ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ ve RIESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI

Ferit GÜRBÜZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ ve RIESZ POTANSİYELİNİN SINIRLILIĞI

Ferit GÜRBÜZ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Ayhan Şerbetçi

Bu çalışmada, M maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında varlık ve sınırlılık koşulları incelenmiştir.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde, temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanıtılmış ve bu operatörlerin varlık ve sınırlılığı $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzaylarında gösterilmiştir. Son bölüm olan dördüncü bölümde ilk önce, $0\leq\lambda\leq n$ olmak üzere, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı tanıtılmış, bu uzay üzerinde tanımlanan norm ve λ nın durumlarına göre $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayının yapısı hakkında bazı sonuçlar verilmiştir. Daha sonra, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teorem yardımıyla gösterilmiştir. $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı iki farklı yönden Spanne ve Adams tipi sınırlılık olarak gösterilmiştir. Bunun için Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan iki farklı teorem kullanılmıştır. Son olarak $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında M maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı için Chiarenza ve Frasca (1987) tarafından verilmiş olan alternatif ispatlar verilmiştir.

Ocak 2011, 56sayfa

Anahtar Kelimeler : $L_p(\mathbb{R}^n)$ uzayı, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu, Riesz potansiyeli, kuvvetli ve zayıf tip sınırlılık.

ABSTRACT

Master Thesis

THE BOUNDEDNESS OF HARDY-LITTLEWOOD MAXIMAL OPERATOR AND RIESZ POTENTIAL IN MORREY SPACES

Ferit GÜRBÜZ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Supervisor**:** Prof. Dr. Ayhan Şerbetçi

In this study, existence and boundedness conditions of M maximal operator and I_α Riesz potential in the $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$) Morrey spaces are investigated.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to introduction. In the second chapter, basic definitions and theorems take place. In the third chapter, classical maximal function and Riesz potential are introduced and existence and boundness of these operators are showed in the $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue spaces. In the fourth chapter which is the last chapter firstly, for $0 \leq \lambda \leq n$, $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$) space is introduced and the norm which is introduced on this space and some results of according to the states of λ about structre of $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$) space are given. Then, the boundedness of Hardy-Littlewood maximal operator in the $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$) spaces is showed with the help of the theorem which was given by Guliyev (2009). The boundedness of I_α Riesz potential in the $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$) spaces is showed as Spanne and Adams type boundness with two different ways. For this aim two different theorems which were given by Guliyev (2009) is used. Finally, alternative proofs which were given for boundedness of M maksimal operator and I_α Riesz potential in the $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$)

January 2011, 56 pages

Key Words : $L_p(\mathbb{R}^n)$ space, $L_{p,\lambda}$ ($\mathbb{R}^n$) Morrey space, Hardy-Littlewood maximal function, Riesz potential, strongly and weakly type boundedness.

TEŞEKKÜR

Bana bu konuda çalışma ve ilerleme imkanı veren, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ 'ye (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü) ve her türlü desteği ve yardımı esirgemeyen aileme saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ferit GÜRBÜZ

Ankara, Ocak 2011

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

m	Lebesgue ölçüsü
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$Supp\ f$	f nin desteği
$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen fonksiyonların uzayı
S^{n-1}	$\mathbb{R}^n$ de birim küre
w_{n-1}	Birim kürenin yüzey alanı
$\hat{f}$	f fonksiyonunun fourier dönüşümü
$f * g$	f ile g nin konvolüsyonu
χ_A	A nın karakteristik fonksiyonu
S	Schwarz uzayı
$B\left(x, r\right)$	$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
α_f	f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu
M	Maksimal operatör
I_α	Riesz potansiyel operatörü
$L_{p,\lambda}\left(\mathbb{R}^n\right)$	Morrey uzayı
Γ	Gamma fonksiyonu
$B^c\left(x, r\right)$	$\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı açık yuvarın tümleyeni

1. GİRİŞ

Maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır. Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy-Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından n- boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir. Ayrıca $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

ve $0 < \alpha < n$ olmak üzere $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

şeklindedir.

Morrey uzayları Morrey tarafından 1938 yılında eliptik kısmi diferensiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisine önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır.

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, $0 \le \lambda \le n$, $p \ge 1$ ve $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu sonlu olan fonksiyonların tüm sınıflarının uzayıdır, burada $B(x,r)$ x merkezli r yarıçaplı yuvarı belirtmektedir. Bugün Morrey uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ve Riesz potansiyelinin varlık ve sınırlılık koşulları, Morrey (1938), Peetre (1969), Fefferman ve Stein (1971), Adams (1975), Chiarenza ve Frasca

(1987), Fazio ve Ragusa (1993), Guliyev (2009) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır.

Tezin amacı, M maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında varlık ve sınırlılık koşullarını incelemektir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölüm diğer bölümler için gerekli olan temel tanım ve teoremleri içermektedir. Üçüncü bölümde, klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanıtılmış ve bu operatörlerin varlık ve sınırlılığı ile ilgili çalışmalar yer almıştır. Son bölüm olan dördüncü bölümde $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı tanıtılmış, bu uzay üzerinde tanımlanan norm ve λ nın durumlarına göre $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayının yapısı hakkında bazı sonuçlar verilmiştir. Daha sonra, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teorem yardımıyla gösterilmiştir. $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı iki farklı yönden Spanne ve Adams tipi sınırlılık olarak gösterilmiştir. Bunun için Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan iki farklı teorem kullanılmıştır. Son olarak $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında M maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı için Chiarenza ve Frasca (1987) tarafından verilmiş olan alternatif ispatlar verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|.\| : X \to \mathbb{R} \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in K$ için

$(N1)$ $\|x\| \geq 0 \;\; ve \;\; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

$(N2)$ $\|ax\| = |a| \, \|x\|$

$(N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|.\|)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı kısaca X ile gösterilir.

Tanım 2.2. X ve Y iki lineer uzay ve $T : D_T \subset X \to Y$ bir fonksiyon olsun. T fonksiyonuna operatör denir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir. Burada D_T, T nin tanım kümesi ve $T(D_T) \subset Y$ de T nin görüntü kümesidir. Eğer D_T, X in bir lineer alt uzayı ve T bir lineer dönüşüm ise her α, $\beta \in \mathbb{R}\,(veya\ \mathbb{C})$ ve x, $y \in X$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

dir.

Tanım 2.3. Bir $T : X \to Y$ lineer dönüşüm ve X ve Y, K cismi üzerinde iki vektör uzayı olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ve her x, $y \in X$ için

$$\begin{aligned} T(x+y) &\leq Tx + Ty \\ T(\alpha x) &= \alpha Tx \end{aligned}$$

sağlanıyorsa T ye " alt lineer operatör " denir.

Tanım 2.4. X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için, $\|Tx\| \leq A\|x\|$ olacak şekilde bir A reel sayısı varsa, T operatörüne sınırlıdır denir.

Bir T operatörünün normu $\|T\| = \sup\limits_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.5. Eğer bir $f(x)$ fonksiyonu için hemen her yerde $Tf(x) \geq 0$ ise T operatörüne pozitif operatör denir.

Tanım 2.6. X ve Y normlu uzaylar, $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| < \delta$ koşulunu gerçekleyen her $x \in D(T)$ için, $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa T ye x_0 da süreklidir denir.

Tanım 2.7. (**Süreklilik ve Sınırlılık**) X ve Y normlu uzaylar ve $D(T) \subset X$ olmak üzere, $T : D(T) \to Y$ lineer operatör olsun. Bu durumda T nin sürekli olması için gerek ve yeter koşul T nin sınırlı olmasıdır**.**

Tanım 2.8. (**Cebir ve σ- Cebiri**) X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir:

(i) $X \in \mathcal{A}$

(ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\text{"Her } n \in N \text{ için } E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}\text{"}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir.

Tanım 2.9. (**Borel Cebiri**) Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir.

Tanım 2.10. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 2.11. $\left(\textbf{Ölçülebir Fonksiyon}\right)$ $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile.gösterilir.

Tanım 2.12. $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üze-rinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$
(iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$
özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 2.13. $\left(\textbf{Ölçü Uzayı}\right)$ Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilir.

Tanım 2.14. $\left(\textbf{Dış Ölçü}\right)$ X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
(iii) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iv) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 2.15. $\left(\textbf{Lebesgue Dış Ölçüsü}\right)$ (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i \ , \quad i = 1, ..., n\}$$

$n-$boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri

$$v(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsü

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \ , \ I_k \text{ bir aralık} \right\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E)) \qquad \big(\textbf{Caratheodary Ölçümü}\big)$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Teorem 2.1. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü, her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

Sonuç 2.1. A sayılabilir bir küme ise $m^*(A) = 0$ dır.

Sonuç 2.2. $[0, 1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Tanım 2.16. (**Lebesgue Ölçüsü**) $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfına da $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir, m ile gösterilir.

Tanım 2.17. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer bir önerme(özellik) ölçüsü sıfır olan bir küme dışında doğru ise, o önerme (özellik) hemen her yerde doğrudur denir.

Tanım 2.18. (L_P **Uzayı**) (X, Σ, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L_p = \left\{ f \in M(X, \Sigma) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\}$$

kümesine p- inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L_p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} & , 1 \leq p < \infty \\ ess \sup\limits_{x \in X} |f(x)| & , \; p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

$$ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf \{ \lambda : m \, (x \in X : |f(x)| > \lambda) = 0 \}$$

dir.

Tanım 2.19. **(Örtü)** Birleşimleri A kümesini kapsayan U_i kümeler ailesine A kümesinin bir örtüsüdür denir. Bu U_i kümelerinin her biri açıksa bu halde U_i, A kümesinin açık örtüsüdür denir. Birleşimleri A kümesini kapsayan alt topluluklar ailesine verilen örtünün alt örtüsü ismi verilir. Eğer bu topluluklar ailesi sonlu sayıda kümelerden oluşuyorsa, bu örtüye sonlu alt örtü denir.

Tanım 2.20. X kümesinin her açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü varsa, X kümesine "kompakttır" denir. Kapalı ve sınırlı her kümenin açık örtüsünün sonlu sayıda bir alt örtüsü vardır. Yani, kapalı ve sınırlı her küme kompakttır.

Tanım 2.21. Bir f fonksiyonunun desteği $f\,(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve $Supp\ f = \overline{\{x : f\,(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f kompakt destekli fonksiyon adını alır.

Tanım 2.22. f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int\limits_K |f| \, d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal (yerel) integrallenebilirdir denir ve

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \int\limits_K |f| \, d\mu \; < \; \infty \; ; \; K \subset \mathbb{R}^n, \; K \text{ kompakt} \right\}$$

yazılır. Ayrıca,

$$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \left(\int\limits_K |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty; \; K \subset \mathbb{R}^n, \; K \text{ kompakt} \right\} \text{ ile gösterilir.}$$

Teorem 2.2. Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L_p(\mathbb{R}^n) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Tanım 2.23. (**Hölder eşitsizliği**) $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p$, $g \in L_q$ olsun. Bu durumda $f \; g \in L^1$ ve

$$\|f \; g\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

sağlanır (Neri 1971).

Tanım 2.24. (**Minkowski eşitsizliği**) $p \geq 1$ için eğer $f, \, g \in L_p$ ise $(f \; + \; g) \in L_p$ ve

$$\|f \; + \; g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

dir (Neri 1971).

Tanım 2.25. (**Schwarz eşitsizliği**) $f(x) \in L_2$ ve $g(x) \in L_2$ olsun.

$$\left| \int\limits_a^b f(x) \; g(x) \; dx \right| \leq \left\{ \int\limits_a^b |f(x)|^2 \; dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int\limits_a^b |g(x)|^2 \; dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliğine Schwarz eşitsizliği denir.

Tanım 2.26. $\mathbb{R}^n$ ile n boyutlu Öklid uzayını gösterelim.
$x = (x_1, ..., \; x_n)$, $y = (y_1, \; ..., \; y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \;\; x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq 0$$

olsun. Tüm $\mathbb{R}^n$ de veya $\mathbb{R}^n$ in bir alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon $g(x) = g(x_1, \; ..., \; x_n)$ ve f, $[0, \; \infty)$ da hemen her yerde tanımlı tek değişkenli fonksiyon olsun. Eğer n- değişkenli bir $g(x)$ fonksiyonu herhangi bir tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonunun yardımıyla $g(x) = f(|x|)$ şeklinde gösterilebiliyorsa
g ye radyal fonksiyon denir. Yani

$$g(x_1, \; ..., \; x_n) = f\left(\sqrt{x_1^2 \; + ... + \; x_n^2}\right)$$

dir.

Teorem 2.3. (Fubini) f, $\mathbb{R}^{m+n}$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} |f(x,y)|\, dxdy \\
I_2 &= \int\limits_{\mathbb{R}^{m}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}} |f(x,y)|\, dx \right) dy \\
I_3 &= \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{m}} |f(x,y)|\, dy \right) dx
\end{aligned}$$

integrallerinden en az biri mevcut ve sonlu olsun. I_2 için bu $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g integrallenebilen fonksiyonu vardır öyleki $g(y)$ hemen her y için içteki integrale eşittir anlamındadır ve I_3 için de aynısı geçerlidir. Bu durumda

(a) Hemen her $y \in \mathbb{R}^m$ için $f(.,y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ dir.

(b) Hemen her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x,.) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ dir.

(c) $\int\limits_{\mathbb{R}^m} f(.,y)\, dy \in L^1(\mathbb{R}^n)$

(d) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,.)\, dx \in L^1(\mathbb{R}^m)$

(e) $I_1 = I_2 = I_3$

elde edilir**.**

Tanım 2.27. $x = (x_1, ..., x_n)$ ve $y = (y_1, ..., y_n)$, $\mathbb{R}^n de$ vektörler olmak üzere $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu Öklidyen uzayı $(x,\ y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j\, y_j$ iç çarpımı ile donatılmış $\mathbb{R}^n$, n- boyutlu reel uzaydır.

Burada x in mutlak değeri $|x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ ile tanımlanır.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde $dx = dx_1...dx_n$ ile Lebesgue ölçüsünü göstereceğiz. $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde f fonksiyonunun (Lebesgue) integrali

$$\int f(x)dx = \int ... \int f(x_1, ..., x_n) dx_1...dx_n$$

ile gösterilir.

Çok katlı integrali kutupsal koordinatlarda ifade etmek çoğu kez kullanışlı olmaktadır. $r = |x|$ olsun ve $S^{n-1} = \{x : \ |x| = 1\}$ ile birim küreyi gösterilim.

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx, \qquad dx = dx_1...dx_n$$

integralinin hesabı için;

$$0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \theta_1, ..., \theta_{n-2} \leq \pi,\ 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$$

olmak üzere

$x_1 = r\cos\theta_1$

$x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2$

$x_3 = r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\theta_3$

...

$x_n = r\sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{n-1}$

dönüşümü yapılır. Bu dönüşümün Jakobiyeni

$$J\left(r,\ \theta_1, ...,\ \theta_{n-1}\right) = r^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}...\int_0^{2\pi} f(r)J(r,\theta)drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= \int_0^{\infty} r^{n-1}f(r)dr\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}...\int_0^{2\pi}\prod_{j=1}^{n-1}\left(\sin\theta_j\right)^{n-1-j} d\theta_1...d\theta_{n-1} \\
&= w_{n-1}\int_0^{\infty} f(r)r^{n-1}dr
\end{aligned}$$

elde edilir, burada w_{n-1}, birim kürenin yüzey alanıdır.

Genel olarak

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)dx &= \int_0^{\infty}\int_{S^{n-1}} f\left(r\sin\theta_1,\ ...,\ r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-1}\right) r^{n-1}drd\theta_1...d\theta_{n-1} \\ &= \int_0^{\infty}\int_{S^{n-1}} f(r,\theta)r^{n-1}d\sigma dr\end{aligned}$$

biçimde yazılır. Burada $d\sigma$, S^{n-1} üzerinde dx tarafından belirlenen yüzey ölçüsüdür.

Tanım 2.28. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $f(x)$ ve $g(x)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

integraline f ile g nin konvolüsyonu denir ve $f * g$ ile gösterilir.

Teorem 2.4. Eğer $f,\ g \in L^1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L^1 e aittir. Ayrıca

$$\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$$

sağlanır (Neri 1971).

Teorem 2.5. (Young) $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L^1$ ise bu durumda $h = f * g$ hemen her yerde vardır ve L_p uzayına aittir. Ayrıca

$$\|h\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

eşitsizliği gerçeklenir (Neri 1971).

Teorem 2.6. (Young) $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ olsun, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ ve $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ olsun. Bu durumda $h = f * g$ olmak üzere $h \in L_r$ dir ve

$$\|h\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

sağlanır (Neri 1971).

Tanım 2.29. (**Fourier Dönüşümü**) $f \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ olsun.

$$\hat{f}\left(x\right) = \frac{1}{\left(2\pi\right)^n}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(y\right)e^{-i(x,y)}dy$$

ile verilen $\hat{f}$ fonksiyonu f fonksiyonunun Fourier dönüşümü olarak adlandırılır. Burada $(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ dir. Fourier dönüşümü

$$\hat{f}\,(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,(y)\, e^{-i(x,y)} dy$$

veya

$$\hat{f}\,(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f\,(y)\, e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

olarak da alınabilir. Eğer $n = 1$ ve $f \in L^1\,(\mathbb{R}^1)$ ise bu durumda

$$\hat{f}\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\,(y)\, e^{-ixy} dy$$

olur.

Lemma 2.1. Eğer $f\,(x) = f_1\,(x_1)\, f_2\,(x_2) \ldots f_n\,(x_n)$ ise

$$\hat{f}\,(x) = \hat{f}_1\,(x_1)\, \hat{f}_2\,(x_2) \ldots \hat{f}_n\,(x_n)$$

sağlanır**.**

Teorem 2.7. (Riemann-Lebesgue) Eğer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda $\hat{f}$ sınırlı ve düzgün süreklidir. Ayrıca $|x| \to \infty$ iken $\widehat{f}(x) \to 0$ dır.

Teorem 2.8. $f, g \in L^1$ olsun. Eğer $h = f * g$ ise bu durumda $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ dır (Neri 1971).

Teorem 2.9. $f, g \in L^1$ olsun. Bu durumda

$$\int \widehat{f}(x) g(x) dx = \int f(x) \widehat{g}(x) dx$$

dir (Neri 1971).

Teorem 2.10. (Parseval-Plancherel) $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i(x,y)} dy$$

Fourier dönüşümü vardır. Ayrıca

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_2$$

dir. Eğer Fourier dönüşümünü

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-2\pi i(x,y)} dy$$

ile tanımlarsak bu durumda

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 \qquad \text{(Parseval formülü)}$$

$$< \widehat{f}, \hat{g} > = < f, g > \text{ (Plancherel formülü)}$$

olur. Burada $< f, g >$, f ile g nin iç çarpımını göstermektedir ve

$$< f, g > = \int f \bar{g} dx$$

dir.

Tanım 2.30. $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ve f nin Fourier dönüşümü

$$\widehat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i(x,y)} dy$$

formülüne Fourier dönüşümleri için invers formülü denir

Tanım 2.31. (**Homojen Fonksiyon**) λ ve α reel sayılar olmak üzere

$$f(\lambda x) = |\lambda|^{\alpha} f(x)$$

oluyorsa f ye α. dereceden homojen fonksiyon denir.

Tanım 2.32. (**Karakteristik Fonksiyon**) $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & , \quad x \in A \\ 0 & , \quad x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlanan χ_A fonksiyonu A nın karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır.

Tanım 2.33. Bir s fonksiyonunun görüntü kümesi sonlu elemandan meydana geliyorsa s ye bir basit fonksiyondur denir.

$$\begin{aligned} s \quad &: \quad X \rightarrow \{a_1, a_{2,\ldots,}a_n\} \subset \mathbb{R} \\ x \quad &\rightarrow \quad s\,(x) = a_k, \qquad 1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Tanım 2.34. Bir $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ negatif olmayan α_j tamsayılarının sıralı n-lisine katlı-indis denir.

$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ dir. Eğer α ve β iki katlı-indis ise $\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, ..., \alpha_n + \beta_n)$ dir. Benzer şekilde, $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ olmak üzere

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_n^{\alpha_n}$$

$|\alpha|$. mertebeden bir diferensiyel operatördür. Özel olarak $D^{(0,...,0)} f = f$ dir. Bir boyutlu durumda D^α, $\frac{d}{dx}$ e indirgenir.

Örnek olarak $\mathbb{R}^3$ te $\alpha = (2, 0, 5)$ ise

$$D^\alpha = \frac{\partial^7}{\partial x_1^2 \partial x_3^5} = D_1^2 D_3^5$$

biçimindedir.

Tanım 2.35. (**Schwarz Uzayı**) $\mathbb{R}^n$ uzayında sonsuz kez diferensiyellenebilir ve istenilen α ve β katlı-indisleri için

$$\sup_{x \in IR^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına Schwarz Uzayı denir. Schwarz Uzayı "S" ile gösterilir. Kısaca

$$S = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \ , \ f \in \mathbb{C}^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty \right\}$$

dir. Diğer yandan α ve β katlı-indisler olduğundan $\alpha = (\alpha_1, \ ..., \ \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ ..., \ \beta_n)$ ve $\alpha_j, \ \beta_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, 2, ...$ dir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}, \quad x = (x_1, \ ..., \ x_n), \quad \alpha = (\alpha_1, \ ..., \ \alpha_n)$$

$$D^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} ... \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

dir.

Eğer $f \in S$ ise bu durumda f sınırlıdır, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, f sonsuz kez diferensiyellenebilirdir, $\hat{f}\ (x) \in S$, $\hat{f}\ (x)$ sonsuz kez diferensiyellenebilirdir.

Teorem 2.11. Eğer $1 \leq p < \infty$ ise L_p deki basit fonksiyonların kümesi L_p de yoğundur**.**

Tanım 2.36. (**Kuvvetli ve Zayıf Tip Sınırlılık**) $1 \leq p, \, q \leq \infty$ olmak üzere

$$T : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_q(\mathbb{R}^n)$$

bir operatör olsun. Eğer $\forall \ f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Tf\|_q \ \leq A \, \|f\|_p$$

olacak biçimde f den bağımsız bir $A > 0$ sabiti varsa T operatörüne kuvvetli (p, q) tipindedir denir.

μ bir ölçü olmak üzere eğer $\forall \ \alpha > 0$ için

$$\mu \left\{ x : \ |Tf(x)| > \alpha \right\} \leq \left(\frac{A \, \|f\|_p}{\alpha} \right)^q, q < \infty$$

olacak şekilde α ve f den bağımsız bir A sabiti varsa T dönüşümüne zayıf (p, q) tipindendir denir (Sadosky 1979).

Teorem 2.12. **(Riesz-Torin)** $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ olmak üzere T, (p_0, q_0) ve (p_1, q_1) tipli bir operatör olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

olmak üzere T, kuvvetli (p, q) tipli bir operatördür.

Teorem 2.13. **(Marcinkiewicz Ara Değer Teoremi)** $p_0 < q_0$, $p_1 \leq q_1$ ve $q_0 \neq q_1$ olmak üzere T operatörü zayıf (p_0, q_0) ve zayıf (p_1, q_1) tipli operatör olsun. Ayrıca p ve q

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda T operatörü (p, q) tipli operatördür.

Tanım 2.37. $\big($**Vitali Örtü Lemması**$\big)$ E, sınırlı çaplı olan $\{B_j\}$ küreler ailesinin birleşimi tarafından örtülen $\mathbb{R}^n$ nin ölçülebilir bir alt kümesi olsun.

O halde, $B_{1,}$ B_2, ..., B_k,...(sonlu veya sonsuz) ayrık dizilerini seçtikten sonra öyle ki

$$\sum_k m(B_k) \geq Cm(E_\alpha)$$

sağlanır.

Buradaki C sadece n ye bağlı olan pozitif bir sabittir.

$C = 5^{-n}$ olacaktır (Stein 1970).

Tanım 2.38. (**Dağılım Fonksiyonu**) $(X,\, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ (**veya** $\mathbb{C}$) ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\alpha_f(\lambda) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right)$$

şeklinde tanımlanan

$$\alpha_f : (0,\, \infty) \to [0,\, \infty]$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir.

3. $L_p(\mathbb{R}^n)$ LEBESGUE UZAYLARINDA MAKSİMAL FONKSİYON ve RIESZ POTANSİYELİ

Maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli harmonik analizin önemli konuları arasındadır. Özellikle kısmi türevli denklemler teorisi ve matematiksel fizikte birçok uygulamaları vardır.

Bu bölümde klasik maksimal fonksiyon ve Riesz potansiyeli tanımlanarak, bu operatörlerin varlık ve sınırlılık özellikleri incelenecektir.

3.1 Maksimal Fonksiyon

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Temel Lebesgue Teoremi'ne göre

$$\lim_{r \mapsto 0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)$$

ifadesi hemen her x için geçerlidir, burada

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$$

x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır. Yukarıdaki limit yerine supremum ve f yerine $|f|$ alınarak f nin maksimal fonksiyonu tanımlanır.
Maksimal fonksiyon $\mathbb{R}^n$ nin standart kümelerinde $n = 1$ için Hardy Littlewood tarafından tanımlanmış ve Wiener tarafından n- boyutlu $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına genişletilmiştir (Stein 1970).

Tanım 3.1.1. $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ lokal integrallenebilir bir fonksiyon olsun. f nin maksimal fonksiyonu;

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

biçiminde tanımlanır.
$\mathbb{R}^n$ üzerinde bir g fonksiyonu için

$$m\{x : |g(x)| > \alpha\} = g_*(\alpha)$$

olsun. $g \in L_p$ iken

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p \, dy = -\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$$

sağlanır. Gerçekten $\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha) &= \lim_{\alpha \longmapsto \infty} \alpha^p g_*(\alpha) - \int\limits_0^\infty g_*(\alpha) p\alpha^{p-1} d\alpha = -\int\limits_0^\infty g_*(\alpha) p\alpha^{p-1} d\alpha \\
&= -\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda \right\} dx d\alpha^p \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^\infty \chi \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda \right\} d\alpha^p dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\left\{ x \in \mathbb{R}_+^n : |g(x)| > \lambda \right\}} d\alpha^p dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{|g(x)|} d\alpha^p dx \\
&= -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^{|g(x)|} p\alpha^{p-1} d\alpha dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ p \frac{\alpha^p}{p} \Big|_0^{|g(x)|} \right\} dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve istenilen eşitlik elde edilir.

Teorem 3.1.1. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan f fonksiyonu için

(i) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ ise Mf maksimal fonksiyonu hemen her yerde sonludur.

(ii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise $\forall \alpha > 0$ için

$$m \left\{ x : Mf(x) > \alpha \right\} \leq \frac{A}{\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx$$

sağlanır, burada A sadece boyuta bağlı bir sabittir ve m Lebesgue ölçüsüdür.

(iii) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ ise $Mf \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir (Stein 1970).

İspat: Öncelikle teoremin (ii) ifadesini ispatlayalım. $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ olsun. $\forall x \in E_\alpha$ için $B_x = B(x,r)$, x merkezli yuvarı E_α da bulunsun. Bu durumda

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, dy$$

olduğundan

$$Mf(x) > \alpha \Rightarrow \int_{B_x} |f(y)|\, dy > \alpha m(B_x) \tag{3.1.1}$$

elde edilir. Buradan $m(B_x) < \frac{1}{\alpha} \|f\|_1$ elde ederiz. $\{B_k\}$, E_α da bulunan ayrık yuvarların bir dizisi olsun. Bu durumda Vitali Örtü Lemmasından

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(B_k) \geq cm(E_\alpha) \tag{3.1.2}$$

olur.

(3.1.1) eşitsizliğinde B_x yerine $\bigcup_k B_k$ alınırsa bu durumda

$$\|f\|_1 > \int_{\bigcup_k B_k} |f(y)|\, dy > \alpha \sum_k m(B_k) \geq \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy > \alpha cm(E_\alpha)$$

elde edilir ve burada $E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\}$ yerine yazılırsa

$$m\{x : Mf(x) > \alpha\} < \frac{1}{\alpha c} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\, dy$$

olduğu görülür. Burada $A = \frac{1}{c}$ seçilerek (ii) in ispatı tamamlanır.

Şimdi $1 < p \leq \infty$ için (i) ve (iii) ifadelerini ispatlayalım. $\int_{\mathbb{R}^n} |Mf|^p\, dx$ in sonlu olduğunu gösterelim. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı bir $g(x)$ fonksiyonunun dağılım fonksiyonu

$$g_*(\alpha) = m\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \alpha\}$$

ile tanımlanır. $g \in L_p(\mathbb{R}^n)$ iken

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p \, dy = -\int_0^\infty \alpha^p dg_*(\alpha)$$

dır. Şimdi

$$m(E_\alpha) = m\{x : |Mf(x)| > \alpha\} = g_*(\alpha)$$

ve $g = Mf$ alınırsa

$$\|Mf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p dx = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} m(E_\alpha) d\alpha \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Bu integrali hesaplayabilmek için $m(E_\alpha)$ için bir eşitsizlik elde edelim. Bunun için f_1 fonksiyonunu

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad |f(x)| \geq \frac{\alpha}{2} \\ 0 & , \quad |f(x)| < \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2} \Rightarrow Mf(x) \leq Mf_1(x) + \frac{\alpha}{2}$$

sağlanır. Buradan

$$E_\alpha = \{x : Mf(x) > \alpha\} \subset \left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

olduğundan

$$m(E_\alpha) = m\{x : Mf(x) > \alpha\} \leq m\left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}$$

elde edilir. Dolayısıyla (ii) den

$$m(E_\alpha) \leq m\left\{x : Mf_1(x) > \frac{\alpha}{2}\right\} \leq \frac{2A}{\alpha}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|\, dx$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$m(E_\alpha) \leq \frac{2A}{\alpha} \int\limits_{|f|>\frac{\alpha}{2}} |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği sağlanır. Bu son eşitsizliği (3.1.3) de yerine yazarsak

$$\|Mf\|_p^p = p\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1} m(E_\alpha) d\alpha \leq p\int\limits_0^\infty \alpha^{p-1}\left(\frac{2A}{\alpha}\int\limits_{|f|>\frac{\alpha}{2}} |f(x)|\, dx\right) d\alpha$$

elde edilir. Fubini Teoreminden bu çift katlı integralin değerini hesaplamak için integrasyon sırasını değiştirelim. $p > 1$ olduğundan

$$\int\limits_0^{2|f(x)|} \alpha^{p-2} d\alpha = \frac{\alpha^{p-1}}{p-1}\Big|_0^{2|f(x)|} = \frac{1}{p-1}|2f(x)|^{p-1}$$

elde edilir. Bu çift katlı integralin değeri

$$\frac{2A_p}{p-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|\, |2f|^{p-1}\, dx = (A_p)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$\|Mf\|_p^p \leq (A_p)^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx$$

elde edilir ve eşitsizliğin her iki tarafında $\frac{1}{p}$ inci dereceden kuvvet alınırsa

$$\begin{aligned} \|Mf\|_p &\leq A_p \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= A_p \|f\|_p \end{aligned}$$

bulunur. Böylece teoremin (i) ve (iii) ifadeleri ispatlanmış olur. Burada A_p sabiti hesaplandığında

$$\begin{aligned} A_p &= \left(\frac{5^n p}{p-1} 2^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty \\ &= 2\left(\frac{5^n p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p < \infty \end{aligned}$$

bulunur.

3.2 Riesz Potansiyeli

f yeterince düzgün bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonunun Laplasyeni;

$$\Delta f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in S$ olmak üzere

$$F^{-1}\left(\hat{f}(x)\right) = f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy$$

dir. $e^{i(xy)} = e^{i(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (-\Delta) f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\Delta e^{i(xy)}\right) \hat{f}(y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(-\frac{\partial}{\partial x_1^2} e^{ix_1 y_1} - \frac{\partial}{\partial x_2^2} e^{ix_2 y_2} - \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n^2} e^{ix_n y_n}\right) \hat{f}(y) dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |y|^2 e^{i(xy)} \hat{f}(y) dy \end{aligned}$$

$$I_\alpha f = F^{-1} |y|^{-\alpha} F, \qquad f \in S \tag{3.2.1}$$

olduğundan

$$\Rightarrow (-\Delta) f = F^{-1} |y|^2 F f$$

yazılabilir. Bilindiği gibi Laplace operatörü eliptik operatördür. P. Seeley göstermiştir ki eğer bir eliptik L operatörü için

$$Lf = F^{-1}\phi(x)Ff$$

formülü mevcut ise o zaman onun istenilen kompleks kuvveti için

$$L^z f = F^{-1}\phi^z(x)Ff$$

geçerlidir. Dolayısıyla bu teoreme göre Laplace operatörü için

$$(-\Delta)^z f = F^{-1}|y|^{2z} Ff$$

yazılabilir. Dolayısıyla görünür ki $z = -\frac{\alpha}{2}$ için

$$(-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f = F^{-1}|y|^{-\alpha} Ff \tag{3.2.2}$$

geçerlidir. Yani (3.2.1) ve (3.2.2) den görünür ki Riesz potansiyelinin ve $-\Delta$ nın negatif kesir kuvvetinin genelleşmiş anlamda Fourier dönüşümleri aynıdır. Bu durumda

$$I_\alpha = (-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} \quad , \quad 0 < \alpha < n \tag{3.2.3}$$

ifadesi yazılabilir. (3.2.3) formülü Riesz potansiyelinin ne kadar önemli bir operatör olduğunu gösterir. Çünkü (3.2.2) in yardımıyla Laplace operatörünün negatif kesir kuvvetleri tanımlanabilir, burada $0 < \alpha < n$ ve

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

olmak üzere

$$(I_\alpha f)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

I_α operatörüne Riesz potansiyeli denir.

Teorem 3.2.1. (Riesz Potansiyeli İçin Hardy-Littlewood-Sobolev Teoremi)

$o < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun.

(i) Eğer $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ise

$$\left(I_\alpha f\right)(x) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{-n+\alpha} f(y)dy$$

integrali hemen her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) Eğer $p > 1$ ise bu durumda

$$\left\|I_\alpha f\right\|_q \leq A_{p,q} \left\|f\right\|_p$$

eşitsizliği gerçeklenir.

(iii) Eğer $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ise bu durumda

$$m\left\{x : |I_\alpha f(x)| > \lambda\right\} \leq \left(\frac{A\left\|f\right\|_1}{\lambda}\right)^q, \text{ Tüm } \lambda \text{ lar için}$$

Yani, $f \to I_\alpha f$ dönüşümü $(1, q)$ zayıf tiptir $\left(\frac{1}{q} = 1 - \frac{\alpha}{n}\right)$ (Stein 1970).

İspat: $K(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ olsun. $f \to I_\alpha * f$ dönüşümü yerine $f \to K * f$ dönüşümünü göz önüne alalım (İki dönüşüm arasında bir sabitle$\left(\frac{1}{\gamma(\alpha)}\right)$ çarpım kadar fark vardır). K yı $K_1 + K_2$ olarak ayrıştıralım. Burada

$$K_1(x) = \begin{cases} K(x) & , \quad |x| \leq \mu \\ 0 & , \quad |x| > \mu \end{cases} \qquad K_2(x) = \begin{cases} K(x) & , \quad |x| > \mu \\ 0 & , \quad |x| \leq \mu \end{cases}$$

biçimindedir. Burada μ herhangi bir pozitif sabittir. Buradan

$$K * f = K_1 * f + K_2 * f$$

elde edilir. $K_1 * f$ ve $K_2 * f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu gösterilirse $K * f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu, dolayısıyla $I_\alpha f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu gösterilmiş olur.

$$\left(K_1 * f\right)(x) = \int\limits_{|x| \leq \mu} K_1(x-t) f(t)dt = \int\limits_{|x| \leq \mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt$$

Young Teoreminden;

$$\begin{aligned}
\|K_1 * f\|_p &\le \|f\|_p \int\limits_{|x|\le\mu} \frac{1}{|x-t|^{n-\alpha}}dt \\
&= \|f\|_p \, w_{n-1} \int\limits_0^{\mu} \rho^{\alpha-1} d\rho \\
&= \|f\|_p \, w_{n-1} \frac{\mu^{\alpha}}{\alpha} < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow K_1 * f$ hemen her x için mutlak yakınsaktır.

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} K_2(x-t) f(t) dt = \int\limits_{|x|>\mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt$$

dir. $p^{'}$, p nin dualini belirtmek üzere $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$ olduğundan, Hölder eşitsizliğinden

$$(K_2 * f)(x) = \int\limits_{|x|>\mu} \frac{f(t)}{|x-t|^{n-\alpha}} dt \le \left[\int\limits_{|x|>\mu} \frac{1}{\left(|x-t|^{n-\alpha}\right)^{p^{'}}} dt \right]^{\frac{1}{p^{'}}} \|f\|_p$$

elde edilir. Parantez içindeki integralin yakınsak olması için $(n-\alpha)p^{'} > n$ olması gerekir.

$$\begin{aligned}
(n-\alpha)p^{'} &= n\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)p^{'} = n\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)p^{'} = n\left(\frac{1}{p^{'}}+\frac{1}{q}\right)p^{'} = n\left(1+\frac{p^{'}}{q}\right) > n \\
&= \|f\|_p \left(w_{n-1} \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\alpha)p^{'}}} d\rho \right)^{\frac{1}{p^{'}}} = \|f\|_p \left(c^{'} w_{n-1} \mu^{n-(n-\alpha)p^{'}} \right)^{\frac{1}{p^{'}}} \\
&\quad \left\{ \frac{n}{p^{'}} - (n-\alpha) = n\left(\frac{1}{p^{'}} - 1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) = \frac{-n}{q} \right\} \\
&\le c_1 \|f\|_p \, \mu^{-\frac{n}{q}} \\
&\Rightarrow \|K_2 * f\|_1 \le c_1 \|f\|_p \, \mu^{-\frac{n}{q}} \\
&\Rightarrow \|K_2 * f\|_1 < \infty \text{ olup} \\
&\Rightarrow K_2 * f \text{ hemen her } x \text{ için mutlak yakınsaktır. O halde} \\
&\Rightarrow K * f = K_1 * f + K_2 * f \text{ olduğundan} \\
&\Rightarrow K * f \text{ hemen her } x \text{ için mutlak yakınsaktır.}
\end{aligned}$$

Böylece $I_\alpha f$ nin hemen her x için mutlak yakınsak olduğu elde edilir.

Dolayısıyla teoremin (i) ifadesi ispatlanmış olur. Şimdi (iii) yi ispatlayalım:

$$\begin{aligned}
(I_\alpha f)(x) &= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy \qquad (y\to x+y)\\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}}dy\\
&= \frac{1}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{|y|\le\alpha}\frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}}dy+\frac{1}{\gamma(\alpha)}\int\limits_{|y|>\alpha}\frac{f(x+y)}{|y|^{n-\alpha}}dy\\
&= (I_{\alpha_1}f)(x)+(I_{\alpha_2}f)(x) \qquad (3.2.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.4) den

$$\{x:|(I_\alpha f)(x)|>2\lambda\}\subset\{x:|(I_{\alpha_1}f)(x)|>\lambda\}\cup\{x:|(I_{\alpha_2}f)(x)|>\lambda\}$$

gerçeklenir. O halde yukarıdaki kümenin ölçüsü

$$m\{x:|(I_\alpha f)(x)|>2\lambda\}\le m\{x:|(I_{\alpha_1}f)(x)|>\lambda\}+m\{x:|(I_{\alpha_2}f)(x)|>\lambda\} \quad (3.2.5)$$

şeklindedir. Şimdi bu ifadeleri ayrı ayrı hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
m\{x:|(I_{\alpha_1}f)(x)|>\lambda\} &= \int\limits_{m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1}f\right)(x)\right|>\lambda\right\}} 1^p dx\\
&\le \int\limits_{m\left\{x:\left|\left(I_{\alpha_1}f\right)(x)\right|>\lambda\right\}} \left|\frac{(I_{\alpha_1}f)(x)}{\lambda}\right|^p dx\\
&\le \frac{1}{\lambda^p}\int\limits_{\mathbb{R}^n}|(I_{\alpha_1}f)(x)|^p dx\\
&= \frac{1}{\lambda^p}\|I_{\alpha_1}f\|_p^p
\end{aligned}$$

elde edilir. Young teoreminden

$$m\{x:|(I_{\alpha_1}f)(x)|>\lambda\}\le\frac{1}{\lambda^p}\|I_{\alpha_1}f\|_p^p=\frac{1}{\lambda^p}A^p\|K_1*f\|_p^p\le\frac{A^P}{\lambda^P}\|K_1\|_1^p\|f\|_p^p$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\|K_1\|_1^p &= \left(\int\limits_{|x|\leq\mu} \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} dx \right)^p = \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_0^\mu \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{n-\alpha}} d\rho dx' \right)^p \\
&= \left(w_{n-1} \int\limits_0^\mu \rho^{\alpha-1} d\rho \right)^p = \left(w_{n-1} \frac{\rho^\alpha}{\alpha} \Big|_0^\mu \right)^p \\
&= \frac{w_{n-1}^p}{\alpha^p} \mu^{\alpha p} = c^p \mu^{\alpha p} \\
m\left\{x : \left|\left(I_{\alpha_1} f\right)(x)\right| > \lambda\right\} &\leq \frac{c_1 \mu^{\alpha p}}{\lambda^p} \|f\|_p^p = c_1 \left(\frac{\mu^\alpha}{\lambda} \|f\|_p \right)^p \qquad (3.2.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Ayrıca Hölder eşitsizliğinden

$$
m\left\{x : |(I_{\alpha_2} f)(x)| > \lambda\right\} \leq \frac{A'}{\lambda} \|K_2\|_{p'} \|f\|_p
$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$$
\|K_2\|_{p'} = \left(\int\limits_{|x|>\mu} \frac{1}{\left(|x|^{n-\alpha}\right)^{p'}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = c_2 \mu^{-\frac{n}{q}}
$$

olduğundan ve

$$
\|K_2\|_{p'} \|f\|_p = c_2 \mu^{-\frac{n}{q}} \|f\|_p = \lambda
$$

seçilirse $\|K_2 * f\|_1 \leq \lambda$ ve böylece $m\left\{x : |K_2 * f| > \lambda\right\} = 0$ elde edilir.

$$
\Rightarrow \mu^{-\frac{n}{q}} = \frac{\lambda}{c_2 \|f\|_p} \Rightarrow \mu = \left(\frac{c_2 \|f\|_p}{\lambda} \right)^{\frac{q}{n}} \qquad (3.2.7)
$$

(3.2.5),(3.2.6) (3.2.4) de kullanılır ve (3.2.5) de μ nun yerine (3.2.7) deki ifadesi yazılırsa

$$
\begin{aligned}
m\{x:|(I_\alpha f)(x)|>2\lambda\} &\leq c_1\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\left(\frac{c_2\|f\|_p}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha}{n}}\right)^p \\
&= c_{p,q}\frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{\frac{q\alpha p}{n}} \\
\frac{\alpha}{n} &= \frac{1}{p}-\frac{1}{q} \Rightarrow \frac{\alpha q p}{n}=q-p \\
&= c_{p,q}\frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^{q-p}=c_{p,q}\left(\frac{\|f\|_p}{\lambda}\right)^q
\end{aligned}
$$

bulunur. Yukarıdaki ifadede $p=1$ için $f\in L_1(\mathbb{R}^n)$ alındığında $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli $\frac{1}{q}=1-\frac{\alpha}{n}$ olmak üzere zayıf $(1,q)$ tipinde operatördür. Böylece (iii) ifadesi ispatlanmış olur.

Şimdi (ii) yi ispatlayalım. İspatı yaparken Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi' nden yararlanacağız. (iii) den dolayı I_α zayıf $(1,q_0)=\left(1,\frac{1}{1-\frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatördür. $(p_1,q_1)=\left(p_1,\frac{1}{\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}}\right)$ tipli operatör, (p_0,p_1), (q_0,q_1) sayılarını Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi'ne uygun olarak seçelim. I_α zayıf (p_0,q_o) ve (p_1,q_1) tipli operatördür. Bu durumda Marcinkiewicz Teoremi' nden

$$
0<\theta<1 \text{ ve } \frac{1}{p}=\frac{1-\theta}{p_0}+\frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}
$$

olmak üzere I_α kuvvetli (p,q) tipli operatördür.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{q} &= \frac{1-\theta}{q_0}+\frac{\theta}{q_1}=(1-\theta)\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)+\theta\left(\frac{1}{p_1}-\frac{\alpha}{n}\right) \\
&= 1-\frac{\alpha}{n}-\theta+\theta\frac{\alpha}{n}+\frac{\theta}{p_1}-\frac{\alpha}{n}\theta \\
&= 1-\theta-\frac{\alpha}{n}+\frac{\theta}{p_1} \\
&\quad \left(\frac{1}{p}=1-\theta+\frac{\theta}{p_1} \text{ olduğundan}\right) \\
&= \frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n} \text{ veya } \frac{\alpha}{n}=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}
\end{aligned}
$$

olduğundan Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi' nden

$$
\|I_\alpha f\|_q \leq c\,\|f\|_p\,, \qquad \frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}
$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 3.2.1. $\alpha > 0,\ 0 < \lambda \leq n,\ 1 < p < \frac{\lambda}{p},\ 1 \leq q \leq \infty$, ve $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $M_{\frac{\lambda}{p}} f \in L_q(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{L_r(E)} \leq C \left\| M_{\frac{\lambda}{p}} f \right\|_{L_q(E)}^{\frac{\alpha p}{\lambda}} \|f\|_p^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}} \tag{3.2.8}$$

gerçeklenir, burada $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{p} + \frac{(\alpha p)}{(\lambda q)}$ ve C, f ve E den bağımsız bir sabittir (Adams 1975).

İspat: İspatı yaparken Hedberg (1972) in Riesz Potansiyelleri için uygulamış olduğu temel düşünceyi takip edeceğiz. Bu durumda $f \neq 0$ için, $I_\alpha f(x)$ kümesi $\delta > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &= \int\limits_{|x-y|<\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int\limits_{|x-y|\geq\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= I + I' \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$k \in \mathbb{Z}$ ve $a_k(x) = \left\{ y : 2^k\delta \leq |x-y| < 2^{k+1}\delta \right\}$ olsun. O takdirde

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{|x-y|<\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{a_{-k}(x)=\left\{y:2^{-k}\delta\leq|x-y|<2^{k+1}\delta\right\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$
\begin{aligned}
|I| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_{-k(x)}} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy, \qquad 0<\alpha<n \text{ olduğundan} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\delta\right)^{\alpha-n} \left(2^{-k+1}\delta\right)^{n} \frac{1}{\left(2^{-k+1}\delta\right)^{n}} \int_{a_{-k(x)}} |f(y)|\, dy \\
& \left(M_\beta f(x) = \sup_{r\to 0} r^{\beta-n} \int_{|x-y|<r} |f(y)|\, dy, \qquad 0\leq\beta\leq n \text{ olduğundan} \right) \\
&\leq \delta^{\alpha} 2^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\right)^{\alpha-n+n} M_0 f(x) \\
&= \delta^{\alpha} 2^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{-k}\right)^{\alpha} M_0 f(x) \\
&= C\delta^{\alpha} M_0 f(x), \qquad 0<\alpha<n
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
I' &= \int_{|x-y|>\delta} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k(x)=\left\{y:2^k\delta\leq|x-y|<2^{k+1}\delta\right\}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy
\end{aligned}
$$

dir. Buradan,

$$
\begin{aligned}
\left|I'\right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k(x)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k}\delta\right)^{\alpha-n} \frac{\left(2^{k+1}\delta\right)^{n-\frac{\lambda}{p}}}{\left(2^{k+1}\delta\right)^{n-\frac{\lambda}{p}}} \int_{a_k(x)} |f(y)|\, dy \\
M_\beta f(x) &= \sup_{r\to 0} r^{\beta-n} \int_{|x-y|<r} |f(y)|\, dy, \qquad 0\leq\beta\leq n \text{ olduğundan} \\
&\leq \delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k}\right)^{\alpha-n} \left(2^{k+1}\right)^{n-\frac{\lambda}{p}} M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{k\alpha-kn+kn-k\frac{\lambda}{p}+n-\frac{\lambda}{p}}\right) M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&= \delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} 2^{n-\frac{\lambda}{p}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{k\left(\alpha-\frac{\lambda}{p}\right)}\right) M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&\qquad \left(0<\alpha<n,\ 1<p<\frac{\lambda}{p} \text{ olduğundan } \left(\alpha-\frac{\lambda}{p}\right)<0\right) \\
&= C\delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\delta = \delta(x) = \left[\frac{M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)}{M_0 f(x)}\right]^{\frac{p}{\lambda}}$ seçilirse hipotezimiz gereği $\delta(x)$ sonlu ve hemen her yerde pozitiftir. Bu seçim kolayca,

$$
\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &\leq |I| + \left|I'\right| \\
&\leq C\delta^{\alpha} M_0 f(x) + C\delta^{\alpha-\frac{\lambda}{p}} M_{\frac{\lambda}{p}} f(x) \\
&= C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{(M_0 f(x))^{\frac{\alpha p-\lambda}{\lambda}}} + C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{(M_0 f(x))^{\frac{\alpha p}{\lambda}}} \frac{1}{(M_0 f(x))^{-1}} \\
&= C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{(M_0 f(x))^{\frac{\alpha p-\lambda}{\lambda}}} + C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{(M_0 f(x))^{\frac{\alpha p-\lambda}{\lambda}}} \\
&= C\frac{\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}}}{(M_0 f(x))^{\frac{\alpha p}{\lambda}-1}} \\
&= C\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}} (M_0 f(x))^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}
\end{aligned}
$$

olduğunu gösterir. Yani,

$$
|I_\alpha f(x)| \leq C\left(M_{\frac{\lambda}{p}} f(x)\right)^{\frac{\alpha p}{\lambda}} (M_0 f(x))^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}
$$

dir.

Teorem 3.1.1. deki (iii) özelliğinden ve Hölder eşitsizliğinden

$$
\|I_\alpha f\|_{L_r(E)} \leq C\left\|M_{\frac{\lambda}{p}} f\right\|_{L_q(E)}^{\frac{\alpha p}{\lambda}} \|f\|_p^{1-\frac{\alpha p}{\lambda}}
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

4. $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ MORREY UZAYLARINDA HARDY-LITTLEWOOD MAKSİMAL OPERATÖRÜ ve RIESZ POTANSİYELİ

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları Morrey tarafından 1938 yılında eliptik kısmi diferensiyel denklemler ve varyasyonlar analizi teorisindeki problemlerle ilgilenirken ortaya çıkarılmıştır. Daha sonra Navier-Stokes ve Schrödinger denklemleri, süreksiz katsayılı eliptik problemler ve potansiyel teorisine önemli uygulamaları ortaya çıkmıştır. Bu bölümde ilk önce, $0 \leq \lambda \leq n$ olmak üzere, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayı tanıtılacak, bu uzay üzerinde tanımlanan norm ve λ nın durumlarına göre $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayının yapısı hakkında bazı sonuçlar verilecektir. Daha sonra, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında Hardy-Littlewood maksimal operatörünün sınırlılığı Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan teorem yardımıyla gösterilecektir. $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı iki farklı yönden Spanne ve Adams tipi sınırlılık olarak gösterilecektir. Bunun için Guliyev (2009) tarafından verilmiş olan iki farklı teorem kullanılacaktır. Son olarak $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında M maksimal operatörünün ve I_α Riesz potansiyelinin sınırlılığı için Chiarenza ve Frasca (1987) tarafından verilmiş olan alternatif ispatlar verilecektir.

4.1 $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzayları

Tanım 4.1. $0 \leq \lambda \leq n$, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları

$$\|f\|_{L_{p,\lambda}} = \|f\|_{L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \leq C < \infty \qquad (4.1.1)$$

olacak biçimdeki fonksiyonların uzayıdır. Burada C sabiti sadece f ye bağlıdır ve $B(x,r)$, merkezi x ve yarıçapı r olan açık yuvarı göstermektedir. Böyle tanımlanan $\|f\|_{L_{p,\lambda}}$, $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayında bir yarı normdur (f sabit olduğunda kesin olarak $\|f\|_{L_{p,\lambda}} = 0$ dır). $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarındaki fonksiyonlar bir sabit farkıyla eşit fonksiyonlar olarak alındığında (4.1.1) de verilen norm ile $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının yapıları hakkında bazı sonuçlar aşağıda verilmiştir:

a) $\lambda = 0$ olduğunda $L_{p,0}(\mathbb{R}^n) = L_p(\mathbb{R}^n)$, yani bilinen Lebesgue uzayıdır.

$$\int\limits_{B(x,r)} |f(x)|^p \, dx \leq C < \infty$$

dir.

b) $\lambda = n$ olduğunda $L_{p,n}(\mathbb{R}^n) = L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir. Gerçekten,

$f \in L_{p,n}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Temel Lebesgue Teoremi' ne göre

$$\lim_{r \to o} \frac{1}{m(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy = |f(x)|^p$$

dir. Bu durumda

$$|f(x)| = \left(\lim_{r \to o} \frac{1}{m(B(x,r))} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \omega_{n-1}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}}$$

elde edilir. Böylece $f \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ dir ve

$$\|f\|_{L_\infty} \leq \omega_{n-1}^{-\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,n}}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

c) $\lambda < 0$ veya $\lambda > n$ ise, o halde $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \theta$ olup burada θ, $\mathbb{R}^n$ de 0 a denk olan fonksiyonların kümesini belirtmektedir.

4.2 $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Maksimal Operatörün Sınırlılığı

Şimdi de Guliyev (2009) tarafından $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında M maksimal operatörü için verilen eşitsizliği ispatlayacağız.

Teorem 4.2.1. $1 < p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ alalım. Bu durumda C; f, $x \in \mathbb{R}^n$ ve $t > 0$ dan bağımsız olmak üzere $p > 1$ için

$$\|Mf\|_{L_{p(B(x,t))}} \leq C t^{\frac{n}{p}} \int\limits_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \, dr \tag{4.2.1}$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

İspat: $1 < p < \infty$ alalım. f fonksiyonu

$f = f_1 + f_2$, $f_1(y) = f(y)\,\chi_{B(x,2t)}(y)$, $f_2(y) = f(y)\,\chi_{B^c(x,2t)}(y)$, $t > 0$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{L_p(B(x,t))} &= \|M(f_1+f_2)\|_{L_p(B(x,t))} \\
&= \|Mf_1 + Mf_2\|_{L_p(B(x,t))} \\
&\le \|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} + \|Mf_2\|_{L_p(B(x,t))}
\end{aligned}$$

elde edilir. $1 < p < \infty$ olmak üzere Teorem 3.1.1. deki (iii) özelliğinden

$$\begin{aligned}
\|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} &\le \|Mf_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\le C\,\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&= C\,\|f\|_{L_p(B(x,2t))} \qquad (4.2.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada C, f den bağımsız bir sabittir. (4.2.2) den ve $\|f\|_{L_p(B(x,2t))}$ normu t ye göre azalmayan olduğundan kolayca

$$\begin{aligned}
\|Mf_1\|_{L_p(B(x,t))} &\le Ct^{\frac{n}{p}} \int_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \\
&\le Ct^{\frac{n}{p}} \int_{t}^{\infty} r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \qquad (4.2.3)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Mf_2 nin sınırlılığı için ilk olarak aşağıdaki eşitsizliği ispatlayacağız:

$$\int\limits_{B^c(x,t)} |x-y|^{-n}\,|f(y)|\,dy \le C\int_t^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))}\,ds, \qquad 0 < t < \infty \qquad (4.2.4)$$

Bu ispatı yapabilmek için $\beta > \frac{n}{p}$ seçilirse, Hölder eşitsizliğinden

$$\int\limits_{B^c(x,t)} |x-y|^{-n}|f(y)|\,dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq \beta \int\limits_{B^c(x,t)} |x-y|^{-n+\beta}|f(y)|\,dy \int\limits_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1}ds \\
&= \beta \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1}ds \int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n: t\leq|x-y|\leq s\}} |x-y|^{-n+\beta}|f(y)|\,dy \\
&\leq C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))} \left\| |x-y|^{-n+\beta} \right\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{t\leq|x-y|\leq s} \frac{1}{\left(|x-y|^{n-\beta}\right)^{p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{t}^{s} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\beta)p'}} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&\leq C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1}\|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(s^{n-(n-\beta)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\beta-1} s^{-\frac{n}{p}} s^{\beta} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds
\end{aligned}$$

elde edilir.

$z \in B(x,t)$ için

$$\begin{aligned}
Mf_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z,r)|^{-1} \int\limits_{B(z,r)} |f_2(y)|\,dy \\
&\leq C \sup_{r\geq 2t} \int\limits_{(B^c(x,2t)\cap B(z,r))} |y-z|^{-n}|f(y)|\,dy \\
&\leq C \sup_{r\geq 2t} \int\limits_{(B^c(x,2t)\cap B(z,r))} |x-y|^{-n}|f(y)|\,dy
\end{aligned}$$

$$\leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{-n} |f(y)| \, dy$$

elde edilir. Bu durumda C; x, t den bağımsız bir sabit olmak üzere (4.2.4) den

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &\leq C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \, ds \\ &\leq C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \, ds \end{aligned}$$

dir. Böylece, sabit x ve t için $Mf_2(z)$ fonksiyonu z ye bağlı olmayan bir ifadeyle sınırlanır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|1\|_{L_p(B(x,t))} &= \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{x}^{t} \rho^{n-1} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= Ct^{\frac{n}{p}} \end{aligned}$$

olduğu için

$$\|Mf_2\|_{L_P(B(x,t))} \leq C \int\limits_{t}^{\infty} s^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \|1\|_{L_p(B(x,t))} \, ds \qquad (4.2.5)$$

dir. Sonuç olarak (4.2.3) ve (4.2.5) den (4.2.1) elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.2.2. $1 < p < \infty$ ve $0 < \lambda < n$ olmak üzere

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

dır.

İspat: Teorem 4.2.1. den

$$
\begin{aligned}
\|Mf\|_{p,\lambda} &= \sup_{\substack{r>o\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{p}} \|Mf\|_{L_P(B(x,t))} \\
&\leq C \sup_{\substack{r>o\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{p}} t^{\frac{n}{p}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_P(B(x,r))} dr \\
&\leq C \sup_{\substack{r>o\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{p}-1} r^{\frac{\lambda}{p}} dr \\
&\leq C \sup_{\substack{r>o\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \left\{ r^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \Big|_t^a \right\} \\
&\leq C \sup_{\substack{r>o\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} t^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \\
&\leq C \|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. Bu ispat, bölüm sonunda da değindiğimiz gibi Chiarenza ve Frasca (1987) tarafından M maksimal operatörü için verilmiş olan Teorem 4.4.1. in alternatif bir ispatıdır.

4.3 $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Uzaylarında Riesz Potansiyelinin Sınırlılığı

4.3.1 Spanne tipi sınırlılık

Bu kesimde $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ uzaylarında I_α Riesz potansiyeli için Guliyev (2009) tarafından verilen sınırlılık koşuluyla ilgili iki farklı teoremi ispatlayacağız. Bu teoremler yardımıyla I_α nın Spanne tipi ve Adams tipi sınırlılığını ayrı ayrı ispatlayacağız.

Teorem 4.3.1.1. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$
\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \leq C t^{\frac{n}{q}} \int_t^\infty r^{-\frac{n}{q}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \tag{4.3.1.1}
$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

İspat: $1 < p < \infty$ alalım. f fonksiyonu

$f = f_1 + f_2$, $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y)$, $f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x,2t)}(y)$, $t > 0$ olarak tanımlanırsa

$$
I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x)
$$

elde edilir.

$1 < p < \infty,\ \ 0 < \alpha < \frac{n}{p},\ \ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olmak üzere Teorem 3.2.1. deki (ii) özelliğinden

$$\begin{aligned} \|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} &\le \|I_\alpha f_1\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C\,\|f_1\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &= C\,\|f\|_{L_p(B(x,2t))} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada C, f den bağımsız bir sabittir. Ayrıca,

$$\|f\|_{L_p(B(x,2t))} \le Ct^{\frac{n}{q}} \int\limits_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{q}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_q(B(x,t))} \le Ct^{\frac{n}{q}} \int\limits_{2t}^{\infty} r^{-\frac{n}{q}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \qquad (4.3.1.2)$$

elde edilir.

$|x-z| \le t$, $|z-y| \ge 2t$ olduğunda $|x-z| \le t \le \frac{|z-y|}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x-z+z-y| \\ &\le |x-z| + |z-y| \\ &\le t + |z-y| \\ &\le \frac{3}{2}\,|z-y| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |z-y| &= |z-x+x-y| \\ &\le |z-x| + |x-y| \\ &\le t + |x-y| \\ &\le \frac{|z-y|}{2} + |x-y| \\ &\Rightarrow \frac{|z-y|}{2} \le |x-y| \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak,

$$\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} &\leq \left\| \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{f(y)}{|z-y|^{n-\alpha}} dy \right\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \left\|\chi_{(B(x,t))}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\beta > \frac{n}{q}$ seçilerek, Hölder eşitsizliğinden

$\int\limits_{B^c(x,2t)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$

$$\begin{aligned}
&= \beta \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n+\beta} |f(y)| \left(\int\limits_{|x-y|}^{\infty} s^{-\beta-1} ds \right) dy \\
&= \beta \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \left(\int\limits_{\{y\in\mathbb{R}^n : 2t\leq|x-y|\leq s\}} |x-y|^{\alpha-n+\beta} |f(y)| \, dy \right) ds \\
&\leq C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left\| |x-y|^{\alpha-n+\beta} \right\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{2t\leq|x-y|\leq s} \frac{1}{\left(|x-y|^{n-\alpha-\beta}\right)^{p'}} dy \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{2t}^{s} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^{(n-\alpha-\beta)p'}} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&\leq C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} \|f\|_{L_p(B(x,s))} \left(s^{n-(n-\alpha-\beta)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} ds \\
&= C \int\limits_{2t}^{\infty} s^{-\beta-1} s^{-\frac{n}{p}} s^{\alpha+\beta} \|f\|_{L_p(B(x,s))} ds
\end{aligned}$$

$$= C\int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\frac{n}{p}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,s))}\,ds \qquad (4.3.1.3)$$

elde edilir.

Diğer yandan $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ ise $\frac{n}{q}=\frac{n}{p}-\alpha$ dır. Bu değer (4.3.1.3) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f_2\|_{L_q(B(x,t))} &\leq C\int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-\left(\frac{n}{q}+\alpha\right)-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,s))}\,ds \\
&= C\int_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,s))}\,ds \\
&\leq Ct^{\frac{n}{q}}\int_{2t}^{\infty} s^{-\frac{n}{q}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,s))}\,ds \qquad (4.3.1.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.3.1.2) ve (4.3.1.4) den (4.3.1.1) ispatlanır.

Teorem 4.3.1.2. **(Spanne)** $0<\alpha<n$, $0<\lambda<n-\alpha p$, $1<p<\frac{n}{\alpha}$ olsun. $\mu=\frac{n\lambda}{(n-\lambda)}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p}=\frac{\mu}{q}$ diyelim. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu}\leq C\,\|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Teorem 4.3.1.1. den ve $\frac{\lambda}{p}=\frac{\mu}{q}$ eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{q,\mu} &= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\mu}{q}}\,\|I_\alpha f\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\leq C\sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\mu}{q}}t^{\frac{n}{q}}\int_{t}^{\infty} r^{-\frac{n}{q}-1}\,\|f\|_{L_p(B(x,r))}\,dr \\
&\leq C\sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}}\,\|f\|_{p,\lambda}\int_{t}^{\infty} r^{-\frac{n}{q}-1}r^{\frac{\lambda}{p}}\,dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \|f\|_{p,\lambda} \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \left\{ r^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} |_t^a \right\} \\
&\leq C \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \|f\|_{p,\lambda} t^{\frac{\lambda}{p}-\frac{n}{q}} \\
&= C \sup_{\substack{r>0 \\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{\frac{n-\mu}{q}} \|f\|_{p,\lambda} t^{\frac{\mu}{q}-\frac{n}{q}} \\
&= C \|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3.2 Adams tipi sınırlılık

Teorem 4.3.2.1. $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \frac{n}{p}$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda C; f, x ve t den bağımsız olmak üzere

$$
|I_\alpha f| \leq C t^\alpha M f(x) + C \int_t^\infty r^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr \qquad (4.3.2.1)
$$

eşitsizliği gerçeklenir (Guliyev 2009).

İspat: $1 < p < \infty$ alalım. f fonksiyonu

$f = f_1 + f_2$, $f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y)$, $f_2(y) = f(y)\chi_{B^c(x,2t)}(y)$, $t > 0$ olarak tanımlanırsa

$$
I_\alpha f(x) = I_\alpha f_1(x) + I_\alpha f_2(x)
$$

elde edilir.

$|I_\alpha f_1(x)| \leq C t^\alpha M f(x)$ eşitsizliği Hedberg (1972) tarafından gösterilmiştir (Bakınız Teorem 4.4.2.).

$I_\alpha f_2$ için ise Hölder eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
|I_\alpha f_2(x)| &\leq \int\limits_{B^c(x,2t)} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy \\
&\leq C \int\limits_{B^c(x,2t)} |f(y)|\, dy \int\limits_{|x-y|}^{\infty} r^{\alpha-n-1} dr \\
&\leq C \int\limits_{2t}^{\infty} \left(\int\limits_{2t<|x-y|<r} |f(y)|\, dy \right) r^{\alpha-n-1} dr \\
&\leq C \int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \left(\int\limits_{t<|x-y|<r} 1 dx \right)^{\frac{1}{p'}} r^{\alpha-n-1} dr \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \left(\int\limits_{S^{n-1}} \int\limits_{t}^{r} \rho^{n-1} d\rho dx' \right)^{\frac{1}{p'}} r^{\alpha-n-1} dr \\
&\leq C \int\limits_{t}^{\infty} \|f\|_{L_p(B(x,r))} r^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)} r^{\alpha-n-1} dr \\
&= C \int\limits_{t}^{\infty} r^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} dr
\end{aligned}
$$

dir. Böylece (4.3.2.1) ispatlanır.

Teorem 4.3.2.2. (Adams) $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 < \lambda < n - \alpha p$ olsun. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$$

gerçeklenir, burada

$$\tfrac{1}{q} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{\alpha}{n-\lambda}$$

dir ve C sadece n, λ, p, α ya bağlıdır.

İspat: $r^\alpha r^{\frac{\lambda-n}{p}} \leq C \left(r^{\frac{\lambda-n}{p}} \right)^{\frac{p}{q}}$den, $r > 0$ olmak üzere $r^{\frac{\lambda-n}{p}} = \frac{Mf(x)}{\|f\|_{p,\lambda}}$ seçilirse ve $B(x,t)$ x merkezli t yarıçaplı açık yuvar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} &= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} \left(\frac{1}{t^\lambda} \int\limits_{B(x,t)} |I_\alpha f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} |I_\alpha f(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{Teorem 4.3.2.1. den} \\
&\leq \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(Cr^\alpha Mf(x) + C \int\limits_r^\infty t^{\alpha-\frac{n}{p}-1} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \, dt \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(Cr^\alpha Mf(x) + C \|f\|_{p,\lambda} \int\limits_r^\infty t^\alpha t^{\frac{\lambda-n}{p}} \frac{dt}{t} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(C \left(r^{\frac{\lambda-n}{p}} \right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x) + C \left(r^{\frac{\lambda-n}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(C \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{p,\lambda}} \right)^{\frac{p}{q}-1} Mf(x) + C \left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{p,\lambda}} \right)^{\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int\limits_{B(x,t)} \left(C (Mf(x))^{\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= C \|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \sup_{\substack{t>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} t^{-\frac{\lambda}{q}} \|Mf\|_{L_p(B(x,t))}^{\frac{p}{q}} \\
&= C \|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \|Mf\|_{p,\lambda}^{\frac{p}{q}} \qquad \text{Teorem 4.2.2. den} \\
&\leq C \|f\|_{p,\lambda}^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{p}{q}} \\
&= C \|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.4 $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey Uzaylarında M Maksimal Operatörünün ve I_α Riesz Potansiyelinin Sınırlığı İçin Alternatif İspatlar

Bu kesimde $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzaylarında M maksimal operatör ve I_α Riesz Potansiyeli için kesim 4.2. ve 4.3. de verilen sınırlılık teoremlerinin ispatlarına alternatif olarak Chiarenza ve Frasca (1987) tarafından verilen sınırlılık teoremlerini ispatlayacağız .

Teorem 4.4.1. $1 < p < \infty$, $0 < \lambda < n$ olsun. Bu durumda

$$\|Mf\|_{p,\lambda} \le c \|f\|_{p,\lambda} \tag{4.4.1}$$

gerçeklenir, burada c, f den bağımsız bir sabittir.

$p = 1$ olsun. Bu durumda

$$t |\{Mf > t\} \cap B_r(x)| \le cr^{\lambda} \|f\|_{1,\lambda} \tag{4.4.2}$$

gerçeklenir, burada c sabiti x, r, t ve f den bağımsızdır.

$1 \le p \le \infty$, $f \in L_{p,\lambda}$, $0 < \lambda < n$ için Mf, $\mathbb{R}^n$ de h.h.y. sonludur

(Chiarenza ve Frasca 1987).

İspat: İspatı yapabilmek için öncelikle bir lemma verelim.

Lemma 4.4.1. f ve ϕ, $\mathbb{R}^n$ üzerinde pozitif reel değerli fonksiyonlar olsun. $r > 1$ için,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f^*(x))^r \phi(x)\, dx \le B_r \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^r \phi^*(x)\, dx$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Uyarı 4.4.1. $f = (f_1, f_2, ...)$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olsun. f^* ın k. terimi, yani f_k^*; f_k nın maksimal fonksiyonudur. f_k^* maksimal fonksiyonu

$$f_k^*(x) = \sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f_k(y)|\, dy,$$

ile verilir; burada supremum, merkezi x olan tüm küpler üzerinden alınır.

Lemma 4.4.1. deki eşitsizlik kullanılarak, $\chi \geq 0$ olmak üzere herhangi f ve χ fonksiyonları için

$$\int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p \chi dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p (M_\chi) dx \tag{4.4.3}$$

elde edilir (Feffermann ve Stein 1971).

Bu durumda $B_r = B(x_0, r)$ yuvarının χ karakteristik fonksiyonu ve $f \in L_{p,\lambda}$ alarak (4.4.3) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (Mf)^p \chi_{B_r} dx &= \int_{B_r} (Mf)^p dx \leq c \left\{ \int_{B_{2r}} |f|^p (M_\chi) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}r} \backslash B_{2^k r}} |f|^p (M_\chi) dx \right\} \\
B_{2r} &: \{x : |x - x_0| < 2r\} \\
\mathbb{R} \backslash B_{2r} &= \{x : |x - x_0| \geq 2r\} \\
&\Rightarrow |x - x_0| - r \geq r \\
&\Rightarrow (|x - x_0| - r)^n \geq r^n
\end{aligned}$$

olur.

$$\Rightarrow \frac{r^n}{(|x - x_0| - r)^n} \leq 1$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
M_{\chi_{B(x,r)}} &= \sup_{r>0} \tfrac{1}{|B(x,r)|} \int_{B_r B(x_0,r)} \chi_{B(x_0,r)}(y) \, dy \\
& \chi_{B(x_0,r)} = \begin{cases} 1 & , \quad x_0 \in B_r \\ 0 & , \quad x_0 \notin B_r \end{cases} \\
&= \sup_{r>0} \tfrac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r) \cap B(x_0,r)} dy = c
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla

$$M_{\chi_{B(x,r)}} \leq \frac{r^n}{(|x - x_o| - r)^n} \leq 1 \text{ dir. Buradan,}$$

$$\int_{B_r} (Mf)^p dx \leq c \left\{ \int_{B_{2r}} |f|^p dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_{2^{k+1}} \backslash B_{2^k r}} |f|^p \frac{r^n}{(|x - x_0| - r)^n} dx \right\}$$

dir. Diğer taraftan $|x - x_0| - r \geq 2^{k-1}r$ olduğundan

$$\frac{r^n}{(|x - x_0| - r)^n} \leq \frac{r^n}{(2^{k-1}r)^n} \leq 1$$

dir. Son olarak

$$\int_{B_r} (Mf)^p \, dx \leq c \left\{ \int_{B_{2r}} |f|^p \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^n}{(2^{k-1}r)^n} \int_{B_{2^{k+1}r}} |f|^p \, dx \right\}$$

elde edilir. Buradan norma geçilirse

$$\begin{aligned} r^{\lambda} \|Mf\|_{p,\lambda}^p &\leq c \left\{ (2r)^{\lambda} \|f\|_{p,\lambda}^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k+1})^{\lambda}}{(2^{k-1}r)^n} \|f\|_{p,\lambda}^p \right\} \\ &= c \|f\|_{p,\lambda}^p \left\{ (2r)^{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k+1})^{\lambda}}{(2^{k-1}r)^n} \right\} \end{aligned}$$

olur. Parantezdeki toplamı açılarak,

$$\begin{aligned} (2r)^{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k+1})^{\lambda}}{(2^{k-1}r)^n} &= r^{\lambda} \left(2^{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k-1})^{\lambda} 4^{\lambda}}{(2^{k-1})^n} \right), \qquad 0 < \lambda < n \\ &= r^{\lambda} \left(2^{\lambda} + 4^{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{k-1})^{n-\lambda}} \right), \qquad 0 < \lambda < n \\ &= r^{\lambda} \left(2^{\lambda} + 4^{\lambda} \lim_{k \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{(2^{n-\lambda})^k}}{1 - \frac{1}{2^{n-\lambda}}} \right), \qquad 0 < \lambda < n \\ &= r^{\lambda} \left(2^{\lambda} + 4^{\lambda} \frac{2^{n-\lambda}}{2^{n-\lambda-1}} \right), \qquad 0 < \lambda < n \\ &\leq c r^{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$r^{\lambda} \|Mf\|_{p,\lambda}^p \leq c \|f\|_{p,\lambda}^p r^{\lambda}$$

dir. Böylece

$$\|Mf\|_{p,\lambda}^p \leq c \|f\|_{p,\lambda}^p \Rightarrow \|Mf\|_{p,\lambda} \leq c \|f\|_{p,\lambda}$$

bulunur.

$p = 1$ için ispat, zayıf tahmine karşılık gelen (4.4.3) ile aynıdır. Gerçekten (4.4.3) de $p=1$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Mf)\,\chi dx \leq c\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f|\,(M_\chi)\,dx$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^n} (Mf)\,\chi_{B_r} dx &= \int\limits_{B_r} (Mf)\,dx \leq c\left\{\int\limits_{B_{2r}} |f|\,(M_\chi)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_{2^{k+1}r}\setminus B_{2^k r}} |f|\,(M_\chi)\,dx\right\} \\
&\leq c\left\{\int\limits_{B_{2r}} |f|\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{B_{2^{k+1}}\setminus B_{2^k r}} |f|\,\frac{r^n}{(|x-x_0|-r)^n} dx\right\} \\
&\leq c\left\{\int\limits_{B_{2r}} |f|\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^n}{(2^{k-1}r)^n} \int\limits_{B_{2^{k+1}r}} |f|\,dx\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burdan norma geçersek,

$$\begin{aligned}
r^\lambda \|Mf\|_{1,\lambda} &\leq c\left\{(2r)^\lambda \|f\|_{1,\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{k+1}\right)^\lambda}{(2^{k-1}r)^n} \|f\|_{1,\lambda}\right\} \\
&= c\,\|f\|_{1,\lambda}\left\{(2r)^\lambda + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(2^{k+1}\right)^\lambda}{(2^{k-1}r)^n}\right\} \\
&\leq c\,\|f\|_{1,\lambda}\, r^\lambda
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|Mf\|_{1,\lambda} \leq c\,\|f\|_{1,\lambda} \Rightarrow \|Mf\|_{1,\lambda} \leq c\,\|f\|_{1,\lambda} \Rightarrow t\,|\{Mf > t\} \cap B_r(x)| \leq cr^\lambda \|f\|_{1,\lambda}$ olup buradan Mf nin $\mathbb{R}^n$ de h.h.y. de sonlu olduğu görülür.

Teorem 4.4.2. $0<\alpha<n$, $1<p<\frac{n}{q}$, $0<\lambda<n-\alpha p$ alalım. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} \leq c\,\|f\|_{p,\lambda} \tag{4.4.4}$$

gerçeklenir, burada

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n-\lambda} \tag{4.4.5}$$

dir.

$p = 1$ için

$$t\left|\{|I_\alpha f| > t\} \cap B_r\right| \leq cr^\lambda \|f\|_{1,\lambda} \tag{4.4.6}$$

elde edilir.

(26) ve (28) de c sadece n, λ, p, α ya bağlıdır (Adams 1975).

İspat: İspatı Hedberg (1972) de Riesz potansiyelleri için kullanılan yöntemden hareketle yapacağız: $p > 1$, $f \in L^{p,\lambda}$ olsun. Bu durumda $f \neq 0$ için, $I_\alpha f$ kümesi $\epsilon > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} I_\alpha f(x) &= \int\limits_{|x-y|\leq\epsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy + \int\limits_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $k \in \mathbb{Z}$ ve $a_k(x) = \left\{y : 2^{-k-1}\epsilon < |x-y| \leq 2^{-k}\epsilon\right\}$ olsun.
O zaman

$$I_1 = \int\limits_{|x-y|\leq\epsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = \sum_{k=o}^{\infty} \int\limits_{2^{-k-1}\epsilon<|x-y|\leq 2^{-k}\epsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^{-k-1}\epsilon<|x-y|\leq 2^{-k}\epsilon} |x-y|^{\alpha-n} |f(y)|\, dy \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k}\epsilon\right)^\alpha \left(2^{-k}\epsilon\right)^{-n} \int\limits_{|x-y|\leq 2^{-k}\epsilon} |f(y)|\, dy \\ &= \epsilon^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left(2^{-k}\right)^\alpha Mf(x), \qquad 0 < \alpha < n \\ &= c_n \epsilon^\alpha Mf(x), \qquad 0 < \alpha < n \end{aligned}$$

$\Rightarrow |I_1| \leq c_n \epsilon^\alpha Mf(x)$ eşitsizliği elde edilir (Hedberg 1972).
İkinci integral için, $\sigma = \frac{(n-\alpha p+\lambda)}{2}$, $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olsun.

$$I_2 = \int\limits_{|x-y|>\epsilon} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy$$

olmak üzere Hölder eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \left(\int\limits_{|x-y|>\epsilon} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{\sigma}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{|x-y|>\epsilon} |x-y|^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n\right)p'} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\equiv I_3 I_4
\end{aligned}
$$

elde edilir.

I_3 için

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^k\epsilon<|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon} \frac{|f(y)|^p}{|x-y|^{\sigma}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon} \frac{|f(y)|^p}{|2^k\epsilon|^{\sigma}} dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^k\epsilon)^{\sigma}} \int\limits_{|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2^{k+1}\right)^{\lambda}}{(2^k\epsilon)^{\sigma}} \frac{1}{(2^{k+1}\epsilon)^{\lambda}} \int\limits_{|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(2^{k+1}\right)^{\lambda}}{(2^k)^{\sigma}} \right)^{\frac{1}{p}} \epsilon^{\frac{\lambda-\sigma}{p}} \left(\frac{1}{(2^{k+1}\epsilon)^{\lambda}} \int\limits_{|x-y|\leq 2^{k+1}\epsilon} |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= c\epsilon^{\frac{\lambda-\sigma}{p}} \|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\sigma = \frac{n-\alpha p+\lambda}{2}$ için parantez içindeki toplam açılırsa $0 < \lambda < n-\alpha p$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(2^{k+1}\right)^{\lambda}}{\left(2^{k}\right)^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(2^{k+1}\right)^{\lambda}}{\left(2^{k}\right)^{\frac{n-\alpha p+\lambda}{2}}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(2^{k}\right)^{\frac{\lambda}{2}}2^{\lambda}}{\left(2^{k}\right)^{\frac{n-\alpha p}{2}}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{\lambda}{p}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(2^{k}\right)^{\frac{n-\alpha p-\lambda}{2}}}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= c<\infty
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak I_4 ü hesaplanırsa, $I_4 = \left(\int\limits_{|x-y|>\epsilon} |x-y|^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n\right)p'}\,dy\right)^{\frac{1}{p'}}$ eşitliğinde kutupsal koordinatlara geçilerek

$$\begin{aligned}
I_4 &= \left(\int_{\epsilon}^{\infty} r^{\left(\frac{\sigma}{p}+\alpha-n\right)p'} r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \left(\lim_{b\to\infty}\frac{r^{\frac{\sigma}{p}p'+\alpha p'-np'+n}}{\frac{\sigma}{p}p'+\alpha p'-np'+n}\Big|_{\epsilon}^{b}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= -\frac{1}{c}\left(\epsilon^{\frac{\sigma}{p}+\alpha-n+\frac{n}{p'}}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\sigma = \frac{n-\alpha p+\lambda}{2}$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma}{p}+\alpha-n+\frac{n}{p'} &= \frac{n}{2p}-\frac{\alpha}{2}+\frac{\lambda}{2p}+\alpha-n+\frac{n\,(p-1)}{p} \\
&= \frac{\lambda+\alpha p-n}{2p}, \qquad 0<\lambda<n-\alpha p \Rightarrow \lambda+\alpha p-n<0
\end{aligned}$$

olduğundan
$\Rightarrow I_4 = -\frac{1}{c}\epsilon^{\frac{\lambda+\alpha p-n}{2p}}$ elde edilir. Dolayısıyla

$$|I_2| \le I_3I_4 \le c''\epsilon^{\frac{\lambda+\alpha p-n}{p}}\,\|f\|_{p,\lambda} = c''\epsilon^{\frac{(\lambda-n)}{p}}\epsilon^{\alpha}\,\|f\|_{p,\lambda}$$

elde edilir. Buradan hareketle

$$|I_\alpha f| \leq c'\epsilon^\alpha Mf + c''\epsilon^{\frac{\lambda+\alpha p-n}{p}} \|f\|_{p,\lambda} = c'\epsilon^\alpha Mf + c''\epsilon^{\frac{(\lambda-n)}{p}}\epsilon^\alpha \|f\|_{p,\lambda}$$

elde edilir.
$\epsilon = \left(\frac{Mf}{\|f\|_{p,\lambda}}\right)^{\frac{p}{(\lambda-n)}}$ için

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f| &\leq c'\left(\frac{Mf}{\|f\|_{p,\lambda}}\right)^{\frac{\alpha p}{(\lambda-n)}} Mf + c''\left(\frac{Mf}{\|f\|_{p,\lambda}}\right)\left(\frac{Mf}{\|f\|_{p,\lambda}}\right)^{\frac{\alpha p}{(\lambda-n)}} \\
&= c'\frac{(Mf)^{\frac{(\lambda-n+\alpha p)}{(\lambda-n)}}}{\|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(\lambda-n)}}} + c''\frac{(Mf)^{\frac{(\lambda-n+\alpha p)}{(\lambda-n)}}}{\|f\|_{p,\lambda}\|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(\lambda-n)}}} \\
&= c'''(Mf)^{\frac{(\lambda-n+\alpha p)}{(\lambda-n)}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{-\alpha p}{(\lambda-n)}}\left(1+\frac{1}{\|f\|_{p,\lambda}}\right) \\
&= c\,(Mf)^{\frac{(n-\lambda-\alpha p)}{(n-\lambda)}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{q,\lambda} &= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}}\left(\frac{1}{r^\lambda}\int\limits_{B(x,r)} |I_\alpha f|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int\limits_{B(x,r)} |I_\alpha f|^q\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{q}}\left(\int\limits_{B(x,r)} \left((Mf)^{1-\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}}\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{n-\lambda}}\left(\int\limits_{B(x,r)} (Mf)^{q-\frac{\alpha pq}{n-\lambda}}\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n} \Rightarrow \frac{q-p}{pq}=\frac{\alpha}{n-\lambda} \Rightarrow pq=\frac{(n-\lambda)(q-p)}{\alpha}\right) \\
&= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}}\left(\int\limits_{B(x,r)} (Mf)^{q-(q-p)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{n-\lambda}} \left(\int_{B(x,r)} (Mf)^p\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left(\begin{array}{c} \frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n-\lambda} \Rightarrow -\frac{1}{q}=\frac{\alpha}{n-\lambda}-\frac{1}{p} \\ \Rightarrow -\frac{\lambda}{q}=\frac{\alpha\lambda}{n-\lambda}-\frac{\lambda}{p} \end{array} \right) \\
&= \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{-\frac{\lambda}{p}} r^{\frac{\alpha\lambda}{(n-\lambda)}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}} \left(\int_{B(x,r)} (Mf)^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{(n-\lambda)}} \\
&= r^{\frac{\alpha\lambda}{(n-\lambda)}} \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}} \|Mf\|_{p,\lambda} \left(\int_{B(x,r)} (Mf)^p\, dx \right)^{-\frac{\alpha}{n-\lambda}} \\
&\leq \|f\|_{p,\lambda}^{\frac{\alpha p}{(n-\lambda)}} \|Mf\|_{p,\lambda} \sup_{\substack{r>0\\ x\in\mathbb{R}^n}} r^{\frac{\alpha\lambda}{(n-\lambda)}} \left(\int_{B(x,r)} (Mf)^p\, dx \right)^{-\frac{\alpha}{n-\lambda}} \\
&\left(p=-\frac{(n-\lambda)}{\alpha} \text{ seçilirse } r^{-\frac{\lambda}{p}} = r^{\frac{\lambda\alpha}{n-\lambda}} \text{ elde edilir. Buradan} \right) \\
&= \|f\|^{-1}_{-\frac{(n-\lambda)}{\alpha},\lambda} \|Mf\|_{-\frac{(n-\lambda)}{\alpha},\lambda} \|Mf\|_{-\frac{(n-\lambda)}{\alpha},\lambda}, \qquad (4.4.1) \text{ den} \\
&= c\|f\|_{p,\lambda}
\end{aligned}
$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.4.3. (**Spanne**) $0<\alpha<n$, $0<\lambda<n-\alpha p$, $1<p<\frac{n}{\alpha}$ olsun. $\mu=\frac{n\lambda}{(n-\lambda)}$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$ ve $\frac{\lambda}{p}=\frac{\mu}{q}$ diyelim. Bu durumda

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq c\|f\|_{p,\lambda}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: Eğer $p_1=\frac{(n-\mu)p}{(n-\lambda)}$ seçilerek Teorem 4.4.2. uygulanırsa sadece $L_{p,\lambda}\subseteq L_{p_1,\mu}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Diğer yandan eğer

$$p \geq p_1,\ \frac{(\lambda-n)}{p}=\frac{(\lambda_1-n)}{p_1}$$

ise $L_{p,\lambda}\subseteq L_{p_1,\mu}$ gerçeklenir (Peetre 1969). Dolayısıyla

$$L_{p,\lambda}\subseteq L_{p_1,\mu} \Leftrightarrow \|f\|_{p_1,\mu} \leq \|f\|_{p,\lambda}$$

dir. Buradan

$$\|I_\alpha f\|_{q,\mu} \leq c\,\|f\|_{p_1,\mu} \leq c\,\|f\|_{p,\lambda}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Adams, D.R. 1975. A note on Riesz potentials, Duke Math. J. 42, 765-778.

Bennett, C., Devore, R.A. and Sharpley, R. 1981. Weak-L^{∞} and BMO, Annals of Math. 113, 601-611.

Chiarenza, F. and Frasca, M. 1987. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function, Rend. Math., 7, 273-279.

Coifman, R.C. and Feffermann, C. 1974. Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Studia Mathematica, 51, 241-250.

Coifman, R. and Rochberg, R. 1980. Another characterization of BMO, Proc. Amer. Math. Soc. 79, 249-254.

Fazio, G.D. and Ragusa, M.A. 1993. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients, J. Funct. Anal. 112, 241-256.

Feffermann, C. and Stein, E.M. 1971. Some maximal inequalities, Amer . J. Math. 93, 107-115.

Garcia- Cuerva, J. and Rubio de Francia, J. L. 1985. Weighted norm inequalities and related topics, North-Holland Mathem. Studies 116 Amsterdam.

Guliyev, V.S. 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in generalized Morrey spaces.J. Inequal. Appl., Art. ID 503948, 20 pp.

Hedberg, L.I. 1972. On certain convolution inequalies, Proc. Amer. Math. Soc. 36, 505-510.

Mizuhara, T. 1991. Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces,} Harmonic Analysis (S. Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer - Verlag, Tokyo, 183-189.

Morrey, C.B. 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 43, 126-166.

Muckenhoupt, Benjamin 1972. "Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function". Transactions of the American Mathematical Society, vol. 165: 207–26.

Neri, U. 1971. Singular Integrals, Springer Verlag, New York.

Peetre, J. 1969. On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, Jour. Funct. Anal. 4, 71-87.

Peetre, J. 1966. On convolution operators leaving $L^{p,\lambda}$ spaces invariant, Ann. Mat. Pura e Appl. (IV) 72, 295-304.

Sadosky, C. 1979. Interpolation of operators and singular integrals. Marcel Dekker Inc., 375 p., New York.

Stein, E.M. and Weiss, G. 1971. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press.

Stein, E.M. 1970. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University press Princeton, New Jersey.

Stein, E.M. 1993. Harmonic Analysis. Princeton University Press.

Torchinsky, A. 1986. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, Orlando.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ferit GÜRBÜZ

Doğum Yeri: Ayvalık

Doğum Tarihi: 02.04.1984

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Başkent Anadolu Lisesi (2002)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü (2008)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Şubat 2008-Ocak2011)