

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞRİ EKSENLİ NANO ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK
PROBLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ İLE
ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

Serhan Aydın AYA

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Mühendisliği Programı

MART 2017

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**EĞRİ EKSENLİ NANO ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK
PROBLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ İLE
ANALİTİK ÇÖZÜMÜ**

DOKTORA TEZİ

**Serhan Aydın AYA
(503112015)**

Makina Mühendisliği Anabilim Dalı

Makina Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ

MART 2017

İTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 503112015 numaralı Doktora Öğrencisi Serhan Aydın AYA ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “EĞRİ EKSENLİ NANO ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMÜ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ekrem TÜFEKÇİ**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Uğur GÜVEN**
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Oğuz ALTAY
İstanbul Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ayşegül AKDOĞAN EKER
Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Adnan DİKİCİOĞLU
İstanbul Teknik Üniversitesi

Teslim Tarihi : 15 Şubat 2017
Savunma Tarihi : 07 Mart 2017





Aileme,



ÖNSÖZ

Son yıllarda nanoteknoloji alanında önemli gelişmeler olmuştur. Mikro ve nano yapıların mühendislik uygulamalarında kullanımı ve bu yapıların mekanik davranışının belirlenmesi birçok güncel çalışmanın konusunu teşkil etmektedir. Modern ve özgün cihazlar tasarlayabilmek için, bu yapıların fiziksel özellikleri konusunda kapsamlı bilgi sahibi olmak gerekmektedir. Örneğin, grafen ve karbon nanotüpler, eşsiz mekanik ve elektriksel özelliklere sahiptir. Nano çubuklar ve nano plaklar, genellikle nano aktüatör veya nano şalter gibi nano elektro-mekanik sistemlerde kullanılırlar. Yapılan deneylerde, nano boyuttaki cisimlerin mekanik özelliklerinde küçük boyut etkisinin önemli rol oynadığı gözlemlenmiştir. Yerel olmayan elastisite teorisi, küçük boyut etkisini göz önünde bulunduran, son on yılda yaygın olarak kullanılan ve geliştirilen bir teori olarak bilinmektedir. Nano ölçekteki cisimlerin analizinde klasik (yerel) elastisite teorisine göre daha uygun sonuçlar verdiği son yıllara ait araştırma makalelerinde belirtilmektedir.

Bu çalışmada, yerel olmayan elastisite teorisinin genel denklemleri, silindirik koordinatlarda düzenlenerek çubuk teorisine uygulanmıştır. Değişken eğrilikli ve değişken kesitli olduğu düşünülen çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri incelenmiştir. Denklemlerin kesin analitik çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Çalışmada, nano boyutlardaki eğri eksenli çubuk problemlerinde, yerel olmayan elastisitenin kullanılmasının klasik elastisiteye göre çok daha üstün olduğunu göstermek ve nanoyapıların mekanik davranışlarını anlamada yerel olmayan etkilerin önemli olduğunu göstermek amaçlanmıştır.

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 112M404 no'lu "Nanoteknoloji Uygulamalarındaki Eğri Eksenli Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisi ile Analitik Çözümü" başlıklı proje ile desteklenmiştir.

Değerli tecrübesi ve bilgisi ile çalışmamın her aşamasında bana yol gösteren ve akademik çalışma prensiplerini kazandıran saygıdeğer hocam Prof. Dr. Ekrem Tüfekci'ye teşekkür ederim.

Bu akademik çalışmanın oluşması için bana her zaman destek olan annem Münevver Aya, babam Kamil Aya ve ablam Pelin Selen Aya'ya teşekkür ederim.

Şubat 2017

Serhan Aydın AYA
(Mak.Yük. Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR	xi
SEMBOLLER	xiii
ŞEKİL LİSTESİ.....	xv
ÖZET.....	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ.....	1
2. NANOTEKNOLOJİDE ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARI ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR	5
3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ.....	11
3.1 Çubukların Düzlem Dışı Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler	11
3.2 Çubukların Düzlem Dışı Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemlerin Çözümü.....	26
4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ	33
4.1 Çubukların Düzlem Dışı Dinamik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler	33
4.2 Çubukların Düzlem Dışı Dinamik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemlerin Çözümü.....	40
5. DÜZLEM DIŞI STATİK DAVRANIŞLA İLGİLİ ÖRNEKLER VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ.....	45
5.1 Serbest Ucundan F_b ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk	46
5.2 Serbest Ucundan M_n ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk	47
5.3 Serbest Ucundan M_t ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk	48
5.4 Simetrik Olmayan Yükleme Durumları	49
5.5 Değişken q_b Yayılı Yükleme Yüklü Değişken Kesitli Çember Eksenli Ankastre-Ankastre Çubuk	52
5.6 Farklı Parametrelerin Çember Eksenli Nano Çubukların Statik Davranışına Etkisi.....	57
5.6.1 Küçük boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ 'nın etkisi.....	58
5.6.2 Narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi	61
5.6.3 Küçük boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi.....	62

6. DÜZLEM DIŞI DİNAMİK DAVRANIŞLA İLGİLİ ÖRNEKLER VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ.....	65
6.1 Küçük Boyut Parametresi R/γ ve Narinlik Oranı λ 'nın Etkisi.....	67
6.2 Narinlik Oranı λ ve Çubuk Açıklığı θ_T 'nin Etkisi.....	68
6.3 Küçük Boyut Parametresi R/γ ve Çubuk Açıklığı θ_T 'nin Etkisi	70
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	73
KAYNAKLAR.....	77
ÖZGEÇMİŞ.....	81



KISALTMALAR

MD	: Atomistik/Moleküler Dinamik Simülasyonlar
MEMS	: Mikro Elektro Mekanik Sistemler
NEMS	: Nano Elektro Mekanik Sistemler





SEMBOLLER

$A(\theta)$	: Diferansiyel denklem takımının katsayılar matrisi
A	: Çubuğun dik kesit alanı
b	: Çubuk kesitinin derinliği
E	: Elastiklik modülü
F_n^l, F_b^l, F_t^l	: Kesite ait iç kuvvet bileşenleri
$F_n^{nl}, F_b^{nl}, F_t^{nl}$	: Kesite ait yerel olmayan iç kuvvet bileşenleri
G	: Kayma modülü
h	: Çubuk kesitinin genişliği
I_b	: Çubuk eğrisinin binormal eksene göre kesitin eylemsizlik momentleri
J	: Burulma sabiti
r, θ, z	: Silindirik koordinatları belirten indisler
∇^2	: Laplasyen
k_n	: Kayma gerilmesinin kesite üniform yayılmadığını gösteren sabit
σ^l	: Klasik elastisite teorisindeki gerilme tensörü
σ^{nl}	: Yerel olmayan elastisite teorisindeki gerilme tensörü
M_n^l, M_b^l, M_t^l	: Kesite ait iç moment bileşenleri
$M_n^{nl}, M_b^{nl}, M_t^{nl}$	: Kesite ait yerel olmayan iç moment bileşenleri
m_n, m_b, m_t	: Çubuğa etkileyen yayılı dış moment bileşenleri
n, b, t	: Normal, binormal ve teğetsel koordinatları belirten indisler
q_n, q_b, q_t	: Çubuğa etkileyen yayılı dış kuvvet bileşenleri
r	: Silindirik koordinat
$\bar{r}$	: Kesit içindeki radyal koordinat
R	: Eğrilik yarıçapı
$\sigma_t, \sigma_{nt}, \sigma_{tb}$	: Frenet koordinat sisteminde çubuk teorisindeki gerilme bileşenleri
u, v, w	: Yer değiştirme bileşenleri
Y	: Asal matris
y	: Diferansiyel denklem takımının değişkenler vektörü
y_0	: Başlangıç değerleri vektörü
ρ	: Özgül kütle
λ	: Narinlik oranı
ω	: Açısal frekans
$\bar{\omega}$	: Boyutsuz frekans
$\Omega_n, \Omega_b, \Omega_t$	: Kesite ait dönme açısının bileşenleri
θ	: Açısal koordinat
θ_T	: Toplam çubuk açıklığı
ν	: Poisson oranı

e_0	: Boyutsuz malzeme sabiti
a	: Atomik mesafe
γ	: Yerel olmayan boyut faktörü
R/γ	: Boyut parametresi
ω^{nl}	: Yerel olmayan teori ile hesaplanmış frekans
ω^l	: Klasik elastisite teorisi ile hesaplanmış frekans
η	: Kesit değişim katsayısı



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Eğri eksenli bir çubukta, Frenet ve silindirik koordinat eksenleri.	14
Şekil 5.1 : Düzlem dışı statik davranışın incelendiği çember eksenli nano çubuk....	45
Şekil 5.2 : $\pi/2$ açıklığı olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli serbest ucundan F_b kuvveti ile yüklü çubuk	46
Şekil 5.3 : Açıklığı $\pi/2$ olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli serbest ucundan M_n momentinin etkidiği çubuk	47
Şekil 5.4 : Açıklığı π olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli serbest ucundan M_t momentinin etkidiği çubuk.	48
Şekil 5.5 : θ_K koordinatından F_{bK} tekil yükü etkileyen ve $\theta_T = 120^\circ$ açıklığı olan, sabit kesitli çember eksenli nano çubuk.....	50
Şekil 5.6 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri (— :Şekil değiştirmemiş çubuk eksenli, — : Yerel olmayan elastisite teorisi sonuçları, — : Klasik elastisite teorisi sonuçları)	51
Şekil 5.7 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_n) eğrileri. (— :Şekil değiştirmemiş çubuk eksenli, — : Yerel olmayan elastisite teorisi sonuçları, — : Klasik elastisite teorisi sonuçları)	51
Şekil 5.8 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_t) eğrileri. (— :Şekil değiştirmemiş çubuk eksenli, — : Yerel olmayan elastisite teorisi sonuçları, — : Klasik elastisite teorisi sonuçları).....	52
Şekil 5.9 : Binormal eksen doğrultusunda değişken $q_b(\theta)$ yayılı yüküyle yüklü çember eksenli ankastre-ankastre çubuk	53
Şekil 5.10 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış yer değiştirme diyagramı	54
Şekil 5.11 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış normal doğrultudaki dönme açısı (Ω_n) diyagramı	55
Şekil 5.12 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış teğet doğrultudaki dönme açısı (Ω_t) diyagramı ($R/\gamma = 1$).....	55
Şekil 5.13 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış teğet doğrultudaki dönme açısı (Ω_t) diyagramı ($R/\gamma = 7$).....	56
Şekil 5.14 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış normal ekseninde eğilme momenti (M_n) diyagramı.....	56
Şekil 5.15 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış teğet ekseninde burulma momenti (M_t) diyagramı	57
Şekil 5.16 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış binormal doğrultuda kesme kuvveti (F_b) diyagramı	57

Şekil 5.17 : Küçük boyut etkisi k ve narinlik oranının λ yerdeğiştirmeye (v^{nl}/v^l) etkisi	58
Şekil 5.18 : Küçük boyut etkisi k ve narinlik oranının λ kesitin normal eksen etrafında dönme açısına $(\Omega_n^{nl}/\Omega_n^l)$ etkisi	59
Şekil 5.19 : Küçük boyut parametresi (k) ve narinlik oranının λ kesitin teğet eksen etrafındaki dönme açısı oranına $(\Omega_t^{nl}/\Omega_t^l)$ etkisi	60
Şekil 5.20 : Narinlik oranı λ ve çubuk açıklığının (θ_T) yerdeğiştirme oranına (v^{nl}/v^l) etkisi.	62
Şekil 5.21 : Küçük boyut parametresi (k) ve çubuk açıklığının (θ_T) yerdeğiştirme oranına (v^{nl}/v^l) etkisi	63
Şekil 5.22 : Küçük boyut parametresi (k) ve çubuk açıklığının (θ_T) kesitin teğet eksen etrafında dönme açısı oranına $(\Omega_t^{nl}/\Omega_t^l)$ etkisi	63
Şekil 6.1 : Değişken kesitli çubuklar.	66
Şekil 6.2 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekansına $\bar{\omega}^{nl}$ etkisi $(\theta_T = 120^\circ)$	67
Şekil 6.3 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekans oranına $(\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l)$ etkisi $(\theta_T = 120^\circ)$	68
Şekil 6.4 : Çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekansına $\bar{\omega}^{nl}$ etkisi $(k = 1)$	69
Şekil 6.5 : Çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod mod frekans oranına $(\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l)$ etkisi $(k = 1)$	70
Şekil 6.6 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekansına $\bar{\omega}^{nl}$ etkisi $(\lambda = 150)$	71
Şekil 6.7 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekans oranına $(\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l)$ etkisi $(\lambda = 150)$. ..	72

EĞRİ EKSENLİ NANO ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK VE DİNAMİK PROBLEMLERİNİN YEREL OLMAYAN ELASTİSİTE TEORİSİ İLE ANALİTİK ÇÖZÜMÜ

ÖZET

Nano çubuklar, nano ölçekteki cihaz ve makinelerde yaygın olarak kullanılan yapı elemanlarıdır. Nano boyuttaki makinaların geliştirilebilmesi için bu çubuk elemanların mekanik davranışının tam olarak bilinmesi gerekmektedir. Sürekli ortam mekaniği uygulamalarında atomlar arasındaki kafes boşlukları, yüzey özellikleri, tane boyutu gibi küçük boyut etkileri göz önünde bulundurulmalıdır. Klasik (yerel) sürekli ortam mekaniğinin nano ölçekteki sistemlere uygulamasının kısıtlı olmasının temel sebebi, atomlar arasında bulunan kafes boşluklarının, yapının bütünlüğünü bozması ve sürekli ortam olarak modellenmesine engel teşkil etmesidir. Nanometre mertebesinde, bahsedilen küçük boyut etkisinin önemi artmaktadır. Bu sebeple, nano çubukların mekanik davranışı konusundaki çalışmalarda yerel olmayan sürekli ortam mekaniği kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, değişken eğrilikli ve değişken kesitli nano çubukların düzlem dışı statik ve dinamik davranışları incelenmiştir. Eringen tarafından verilen yerel olmayan elastisite teorisinin bünye denklemleri silindirik koordinatlarda yazılarak klasik çubuk teorisine uygulanmıştır. Böylece, yerel olmayan çubuk teorisine denklemleri, değişken yayılı yükleri taşıyan değişken eğrilikli ve değişken kesitli çubuklar için elde edilmiştir. Bu denklemler kullanılarak, düzlemsel eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri incelenebilmektedir. Denklemlerde, kuvvet ve momentlerin yerel olmayan etkileri göz önüne alınmaktadır. Kayma etkilerinin yanında kayma kuvvetlerinin yerel olmayan etkilerinin de gözönüne alındığı literatürdeki ilk çalışma bu olmuştur.

Eğri eksenli çubuğun düzlem dışı davranışını ifade eden denklemlerin analitik kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemiyle elde edilmiştir. Başlangıç değerleri yönteminin üstünlüğü; yüksek mertebe statik belirsizliklerin, problemin çözümüne ilave bir zorluk katmamasıdır. Herhangi bir bilinen sınır şartı ile kesin analitik çözüm elde etmek mümkündür. Farklı geometri ve kesite sahip çubukların asal matrislerinin analitik ifadeleri elde edilebilir. Böylece, yer değiştirme, kesit dönmesi ve kesit tesirleri değerleri eksen eğrisi boyunca analitik olarak belirlenebilmektedir. Boyut parametresi, çubuk açıklığı, narinlik oranı gibi bazı parametrelerin değişiminin çubuğun statik davranışına etkisini göstermek amacıyla farklı çubuk geometrileri, yükleme ve sınır şartları içeren problemler çözülmüştür.

Eğri eksenli değişken kesitli çubuğun düzlem dışı serbest titreşimlerini ifade eden denklemler d'Alembert prensibi yardımıyla türetilmiştir. Kayma deformasyonu, eğilme ve burulma dönme eylemsizlikleri etkileri göz önünde bulundurulmuştur. Denklemlerin çözümünde başlangıç değerleri yöntemi kullanılmıştır. Kesin çözüm sadece sabit kesitli çember eksenli kirişler için mevcuttur. Değişken eğrilikli ve kesitli çubuklar, belirli sayıda sabit eğrilikli ve kesitli çubuk elemandan oluşacak şekilde modellenmiş ve aynı çözüm yöntemi kullanılarak sonuç elde edilmiştir. Titreşim ile

ilgili çeşitli problemler çözülerek, doğal frekanslar elde edilmiştir. Boyut parametresi, çubuk açıklığı ve narinlik oranı gibi bazı parametrelerin değişiminin çubuğun dinamik davranışına etkisi gösterilmiştir.

Bu çalışmada sunulan yerel olmayan elastisite teorisi, eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik ve dinamik analizi için temel oluşturmaktadır. Klasik (yerel) elastisite teorisi yerine yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak, nano çubukların mekanik davranışının belirlenmesinde büyük önem arz eden yerel olmayan etkilerin ortaya çıkarılması sağlanmaktadır. Denge denklemlerinin kesin çözümünde boyut etkisi, kayma deformasyonu, dönme eylemsizliği etkilerinin dahil edildiği bu çalışmada elde edilen sonuçların eğri eksenli nano çubuklar ile ilgili yapılacak çalışmalar için önemli bir kaynak teşkil edeceği düşünülmektedir.



ANALYTICAL SOLUTIONS OF OUT-OF-PLANE STATIC AND DYNAMIC PROBLEMS OF CURVED NANOBEAMS USING NONLOCAL ELASTICITY THEORY

SUMMARY

Nanobeams are widely used as a structural element for nano-devices and nano-machines. The development of nano-sized machines depends on proper understanding of mechanical behavior of these nano-sized beam elements. The mechanical properties of nanobeams can be measured by conventional experimental methods, however, these techniques are expensive and should be improved correspond to nano scale. Considering the experimental limitations, researchers focused on better mathematical models that comprise the effects of small length scales such as lattice spacing between atoms, grain size etc. on material behavior in micro and nano scale. Computational strategies, such as molecular dynamics simulations are adopted to analyze mechanical behavior of nano-sized structures. These simulations enable comparable investigations of dynamics of nano materials to experiments, and introduce detailed information on interatomic interactions of nano materials and molecular complexes. However, it could become too complex to simulate nanostructures, and these simulations are bounded by the computational limits. On the other hand, high-order continuum modeling is less computationally expensive than the former approach and provides relatively simple formulations. The nonlocal theory of elasticity, initiated by Eringen and Edelen takes the small-scale effect into account. This theory states that the stress at a given reference point of a body is a function of the strain field at every point in the body; hence, the theory takes the long-range forces between atoms and the scale effect into account in the formulation. Small length scales such as lattice spacing between atoms, surface properties, grain size etc. need to be considered when applying any continuum model. The main reason of limited applicability of classical or local continuum theory to nano-scaled systems is that the assumption of continuous media is not appropriate for modeling the discrete structure of the material due to the lattice spacing between atoms. The small length scale becomes very important in the order of nanometers. Thus, nonlocal continuum mechanics approach is adopted for studying the mechanical behavior of nanobeams.

In this study, the out-of-plane static and dynamic behavior of a curved planar nanobeam having variable curvature and cross-section is investigated. The nonlocal constitutive equations of Eringen are arranged in cylindrical coordinate and implemented into the classical beam equations. Therefore, governing differential equations of nonlocal beam theory is obtained for curved beams with non-uniform cross-section. Using these equations, out-of-plane static and dynamic problems of planar curved nanobeams can be studied. The nonlocal effects of both force and moments are considered in the equations. This is the first study in the literature that considers the nonlocal effects of shear force along with the effects of shear deformation in the formulations.

The governing differential equations are obtained for curved beams and analytical exact solutions for out-of-plane static problems are obtained by using the initial value method. Superiority of the initial value method is that high order statically indeterminacy adds no extra difficulty to the solution. The exact solution can be obtained for any boundary condition. The fundamental matrix of beams with different geometries and cross-sections can be obtained analytically. Thus, the deformation, slope and stress resultants can be defined analytically along the beam axis. In order to understand the effects of different parameters such as small scale parameter, opening angle of the beam and slenderness ratio etc. on the mechanics of the beam, several examples with different geometries, loading and boundary conditions are solved.

In the static analysis, a fully clamped circular beam with non-uniform cross-section and non-uniform distributed load is considered as an example. The effects of the small scale parameter and the other beam characteristics, i.e. opening angle of the beam, the slenderness ratio on the transverse displacements, rotation angle and force resultants are investigated. It is observed that the result of the nonlocal theory always larger than that by the classical model for small sized beams. The size of the beam is determined by small scale parameter which is the ratio of the nanobeam radius to the additional length scale parameter. Thus, the small scale parameter has a relevant importance in calculation of displacement. For smaller values of slenderness ratio, i.e. for thick beams, the effect of small scale parameter on the displacement ratio, i.e. the ratio of the displacement results obtained from nonlocal theory and local theory is more important. The difference between the solution of both theories increases considerably with lower values of small scale parameter for any value of slenderness ratio. A uniform change in displacement ratio is observed at larger values of small scale parameter for different values of slenderness ratio, i.e. the effect is almost the same for both theories. Displacement ratio at the midspan increases with the decreasing opening angle for different values of slenderness ratio. At larger values of opening angle, the displacement ratio remains almost the constant at unity for different values of slenderness ratio. By decreasing the beam length, i.e. for smaller opening angle, size effect is much more important. Consequently, the transverse displacement of the nonlocal beam changes more in comparison to the classic one. Therefore, the size effect must be taken into account for smaller beams. The effects of slenderness ratio - opening angle, small scale parameter - opening angle and small scale parameter - slenderness ratio on the rotation angles and force resultants are also studied. Ratio of rotation angle and also the ratio of moments are not affected by the slenderness ratio. The results for shear forces is equal to unity, meaning the both theories give the same results.

The equations for out-of-plane free vibrations of a curved beam with non-uniform cross section are derived by means of d'Alembert principle. The effects of shear deformation, bending and torsional rotatory inertia are considered for the out-of-plane vibrations. In the solution process, initial value method is used. Exact solution is only available for uniform circular beams. The vibration of a curved beam with varying curvature and cross-section is investigated by dividing the beam into a number of circular uniform beam elements. Similar approach is taken in the solution process. Natural frequencies are obtained for different curved beams. The effect of small scale parameter, opening angle of the beam and slenderness ratio on the dynamic behavior of the beams are presented with these examples. It is observed that size effect is more significant when the small-scale parameter is small. It is observed that the ratio of the natural frequencies predicted by nonlocal and classical models becomes more

noticeable for both lower values of slenderness ratio and opening angle of the nanobeam. It is expected that the valuable results obtained from the presented continuous model would be very useful for dynamic analyses of beam-like components such as nanosensors or nanoactuators whose discrete models have high computational and labor costs.

The literature has shown that, almost all the studies on nonlocal beam theory has discussed the subject in the context of straight nanobeams. There are very limited number of papers on the curved nanobeams and most of them neglect the effect of shear deformation. Numerical and approximate solution methods are used in these studies. Numerical examples for nonlocal curved beam models are insufficient. The present work will be helpful in the analysis and design of curved nanobeams with various combinations of loadings, geometry and boundary conditions. The nonlocal theory and the equations presented in this study forms the basis for the study of out-of-plane static and dynamic analysis of curved nanobeams. Instead of using classical beam theory, using nonlocal elasticity theory reveals the nonlocal effects which is significant to understand the mechanical behavior of nanobeams. The results of the examples presented in this study will give insight to the interplay between the geometry of the beam and the stress distribution and the effect of the nonlocal behavior on static and dynamic behavior of curved nonlocal beams. Considering scale effect, shear deformation and rotatory inertia in the exact solutions of the governing equilibrium equations presented here, the results can be considered as a reference for nonlocal theories of curved nanobeams.



1. GİRİŞ

Karbon nanotüp, grafen levha gibi pratik uygulama alanı bulan keşifler nanoteknoloji alanına olan ilginin odağı olmuştur. Günümüzde bu alandaki çalışmalar artarak devam etmektedir. Nano ölçekteki yapılar, birçok özgün uygulamaya imkan tanımlarından dolayı deneysel ve teorik alanlarda araştırma gruplarının ilgisini çekmiştir. Makro boyutlardaki malzemelerle kıyaslandığında, nano malzemelerin üstün fiziksel, kimyasal veya biyolojik özelliklere sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bu malzemeler daha kuvvetli, esnek, çok daha hafif veya daha farklı ısı ve elektrik iletme özelliklerine sahip olabilmektedir. Manyetik ve optik özelliklerinde önemli ölçüde artma veya azalma olabilmektedir. Bir nano yapının fiziksel özellikleri ve mukavemeti onun boyutuna bağlı olarak önemli değişim gösterebilmektedir.

Nano çubuklar, bir yapı elemanı olarak biosensörlerde, yarı iletken nano kablolarda, atomik kuvvet mikroskoplarında, mikro elektro mekanik sistemlerde (MEMS) ve nano elektro mekanik sistemlerde (NEMS) veya güçlendirme elemanı olarak nano kompozitlerde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Nano ölçekteki çubukların eğilme, titreşim ve burkulma gibi mekanik davranışlarının anlaşılması bu tip elemanların kullanıldığı mühendislik yapılarının tasarımı ve geliştirilmesi için büyük önem arz etmektedir.

Nano yapıların kullanıldığı malzemelerin modellenmesi ve simülasyonunda kullanılan moleküler dinamik (MD) gibi yöntemler çok karmaşık olabilmektedir. Ayrıca, bu modeller, kullanılan hesaplama programlarının ve bilgisayarların kapasiteleriyle sınırlıdır. Mühendislik açısından bakıldığında, MD yöntemi atom, molekül, bağlar ve atomlar arası kuvvetlerin parametre olarak yer aldığı bir yöntem olup ilgili konuları içeren kimya alanında bilgi sahibi olmayı gerektirmektedir. Örneğin, karbon nanotüp, grafen ve grafen bazlı sistemlerin deneysel olarak veya MD simülasyonu ile incelenmesi parametrelerin fazlalığı nedeniyle karmaşık bir süreçtir. Nano cihazların tasarımında kullanılan bu yapıların eğilme, titreşim veya burkulma açısından incelenmesi için daha pratik çözümlere ihtiyaç duyulmaktadır.

Sürekli ortam modeli yaklaşımı, simülasyonlara göre daha basit formüller vermekte ve hesaplamalar daha kolay olmaktadır. Fakat, klasik teorinin, nano yapıların mekanik davranışlarını incelenmesi amacıyla kullanımında problemler ortaya çıkmıştır. Çünkü, klasik sürekli ortam modellerinde, bir noktadaki gerilme durumu aynı noktadaki birim şekil değişimiyle belirlenmektedir. Diğer bir ifade ile, klasik elastisite teorisi boyuttan bağımsız tanımlanmaktadır. Fakat, küçük boyutlarda, bir malzemenin mikro yapısı büyük öneme sahip olup bu etki yadsınamaz. Dolayısıyla, malzemelerin doğası gereği homojen olmayan ve süreksizlik barındıran yapısındaki boyut etkisini göz önünde bulunduran, MD simülasyonlarından daha hızlı çözüm alınabilecek gelişmiş bir sürekli ortam yöntemine ihtiyaç duyulmuştur. Son yıllarda bu doğrultuda yaygın kullanımı olan sürekli ortam mekaniği yöntemi, Eringen'in sunduğu yerel olmayan elastisite teorisidir. Bu teoride, bir noktadaki gerilme durumu hesaplanırken, o nokta etrafındaki diğer noktalarda olan şekil değiştirmeler de hesaba katılmaktadır.

Nano çubukların statik ve dinamik analizi konusunda yapılan çalışmalar ikinci bölümde incelenmiştir. Bu çalışmalarda, nano çubukların yerel olmayan Euler-Bernoulli kiriş teorisi veya yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisi ile incelendiği, fakat çalışmaların genellikle doğrusal yapı elemanları ile sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Yerel olmayan eğri eksenli kiriş modelleri konusunda yapılan sayısal örneklerin ise yetersiz olduğu sonucuna varılmıştır.

Üçüncü bölümde, sürekli değişken eğri eksenli ve sürekli değişken kesitli nano çubukların düzlem dışı statik problemlerine ait analitik ifadeler Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi kullanılarak verilmiştir. Eğri eksenli nano çubukların statik davranışını ifade eden diferansiyel denklemler Eringen'in sunduğu yerel olmayan bünye denklemleri kullanılarak elde edilmiştir. Denklemlerde, kayma deformasyonu etkisi göz önünde bulundurulmuştur. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak diferansiyel denklemlerin kesin çözümü elde edilmiştir. Yer değiştirme, kesitin normal ve teğetsel eksen etrafında dönme açıları ve kesit tesirleri analitik olarak elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, d'Alembert prensibinden faydalanılarak eğri eksenli nano çubuklara ait serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Kayma deformasyonu etkisi yanında eğilme ve burulma dönme eylemsizliği etkileri de denklemlere dahil edilmiştir. Sürekli değişken eğrilige ve kesite sahip çubukların düzlem dışı serbest

titreşimlerinin analizinde sabit kesitli çember eksenli çubuk için elde edilen kesin analitik çözüm yöntemi kullanılmıştır.

Beşinci bölümde, eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik davranışıyla ilgili çeşitli problemlerin çözümleri verilerek yer değiştirme, dönme açısı ile iç kuvvet ve momentler hesaplanmıştır. Küçük boyut etkisi, narinlik oranı, çubuğun açıklığı, sınır koşullarının etkilerinin parametrik incelendiği örnekler sunulmuştur. Ayrıca, farklı yükleme durumlarında elde edilen sonuçlar da incelenmiştir. Basit yükleme durumları için çubuğun bir noktasının yer değiştirme, dönme açısı ve kesit tesiri ifadeleri analitik olarak verilmiştir. Ardından, ankastre-ankastre mesnetli nano çubukta θ_K olarak belirtilen, rastgele seçilmiş bir noktadan etkiyen tekil yüklerin statik davranışa etkisi de incelenmiştir. Son kısımda, değişken yayılı yük etkisindeki çember eksenli sürekli değişken kesitli çubuk incelenmiştir.

Altıncı bölümde, yerel olmayan ve klasik teori kullanılarak, çember eksenli ve değişken kesitli nano çubuğun düzlem dışı serbest titreşimi ile ilgili örnekler çözülmüştür. Küçük boyut etkisi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen doğal frekans oranına etkisi araştırılmıştır. Hesaplamalarda, kayma deformasyonu yanında eğilme ve burulma dönme eylemsizliği etkileri de göz önüne alınmıştır.

Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, eğri eksenli çubukların statik ve dinamik analizinde çubuk geometrisi, sınır koşulları ve yerel olmayan davranışın etkisinin belirlenmesi hedeflenmiştir.



2. NANOTEKNOLOJİDE ÇUBUKLARIN STATİK VE DİNAMİK DAVRANIŞLARI ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

Karbon nanotüp ve grafen levha gibi keşiflerin ardından nanoteknolojiye olan ilgi son yirmi yılda büyük bir hızla artmıştır. Nano ölçekteki çubuk yapılar, büyük rijitlik ve mukavemet değerleri, düşük yoğunlukları ve üstün iletkenlikleriyle, nano elektro mekanik sistemlerde, ultra duyarlı algılayıcılarda, yarı iletken nano kablolarda ve atomik kuvvet mikroskoplarında temel yapı elemanları olarak kullanılmaktadır (Craighead, 2000; Kong ve diğ., 2000; Roukes, 2001; Li ve Chou, 2003; Ekinci, 2005). Özel bir uygulama olarak, küçük boyut ve büyük yüzeyli karbon nano tüpler, yoğun kimyasal ortamlardaki dayanıklılığıyla dikkat çekmektedir (Zhao ve diğ., 2002). Özgün nano cihazların tasarımı için bu yapıların mühendisler ve bilim insanları tarafından iyi anlaşılmış olması gerekmektedir.

Nano çubukların mekanik özellikleri konvansiyonel deneysel yöntemlerle ölçülebilir, fakat mevcut teknikler bu ölçekteki sistemler için karmaşık ve pahalıdır, dolayısıyla bu tekniklerin geliştirilmesi gerekmektedir. Sürecin zorluğuna rağmen, bazı metal ve polimerlerle yapılan deneysel çalışmalardan elde edilen sonuçlar, mikro ve nano ölçekteki malzemenin mekanik davranışının boyuta bağlı olduğunu göstermektedir. Çalışmalarda, nano ölçekteki malzemenin elastiklik modülünün normal boyutlardaki malzemelerin elastiklik modülüne göre oldukça yüksek olduğu gözlenmiştir (Treacy ve diğ., 1996; McFarland ve Colton, 2005). Nano malzemelerin özellikleri belirgin bir biçimde normal boyutlardaki malzemelerden farklı olduğundan, uygulamada büyük bir potansiyele sahiptir.

Araştırmacılar, deneysel kısıtlamaları göz önüne alarak, mikro ve nano ölçekteki bu malzemelerin mekanik davranışını incelemek amacıyla kafes boşluğu, tane boyutu gibi küçük boyut etkilerini kapsayacak bir matematiksel model üretmek için çalışmalar yapmıştır. Örneğin bu amaçla, nano boyuttaki yapılar için moleküler dinamik (MD) simülasyonları gibi sayısal yöntemler uygulanmıştır (Srivastava ve Wei, 2003). Bu simülasyonlarda nano yapılarıdaki atom veya moleküller arasındaki atomsal etkileşimleri doğru modellemek amacıyla farklı parametreler incelenmiştir. Bir

moleküler dinamik simülasyonunda, çeşitli ampirik potansiyel çiftleriyle tanımlanan bağ enerjilerinin fonksiyonu için birçok denklem mevcuttur. Bu denklemlerin çeşitliliği doğruluk derecesine ve moleküler sistemin tipine bağlıdır. Sayısal yaklaşım ile yapılan simülasyonlar, nano malzemelerin dinamik davranışı için deneylerle kıyaslanabilir inceleme yapma imkanı sunmuş ve nano malzeme ile moleküler komplekslerin atomlar arası ilişkileri hakkında detaylı bilgi edinilmesini sağlamıştır. Bazı araştırmacılar, bu yöntem ile deneysel yolla ulaşmanın neredeyse imkansız olduğu sonuçlara dahi ulaşıldığını belirtmişlerdir (Arash ve diğ., 2011). Fakat, nano yapıların simülasyonu genellikle çok karmaşıktır ve hesaplamalar, bilgisayar donanımının kapasitesiyle kısıtlanmaktadır.

Diğer bir yandan, yüksek mertebe sürekli ortam modelleri daha az hesaplama gücüne ihtiyaç duymaktadır ve daha basit formülasyonlar sunmaktadır (Arash ve Wang, 2012; Barretta ve diğ., 2014; Rafiee ve Monghadam, 2014). Literatürde verilen sürekli ortam modelleri genellikle klasik (yerel) veya yerel olmayan sürekli ortam teorilerine dayanmaktadır. Klasik yöntemde, narinliği düşük karbon nanotüp ince cidarlı bir boru gibi düşünülerek şekil değişimi bir elastik çubuğa benzer şekilde hesaplanabilir. Çubuk yaklaşımı, Harik (2001) tarafından incelenmiş ve sürekli çubuk yaklaşımının geçerliliği kontrol edilmiştir. Çalışmada, önerilen geometrik parametreler ile moleküler dinamik simülasyonları arasındaki ilişki araştırılmıştır. Klasik sürekli ortam modellerinde, herhangi bir noktadaki gerilme durumu aynı noktadaki birim şekil değiştirme durumu ile belirlenmektedir. Klasik elastisite teorisinin boyuttan bağımsız tanımı nedeniyle mikro ve nano yapıların mekanik davranışı için klasik modellerin kullanımının uygunluğu tartışılır durumdadır.

Malzemelerin doğası gereği homojen olmayan ve süreksizlik barındıran yapısındaki boyut etkisini göz önünde bulunduran, moleküler dinamik simülasyonlarından daha hızlı çözüm alınabilecek gelişmiş bir sürekli ortam yöntemine ihtiyaç duyulmuştur. Eringen ve Edelen (1972) tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisi son yıllarda bu doğrultuda yaygın kullanımı olan bir sürekli ortam mekaniği yöntemidir. Bu teoride, bir noktadaki gerilme durumu hesaplanırken, o nokta etrafındaki diğer noktalarda olan şekil değiştirmeler de hesaba katılmaktadır. Böylece, atomlar arasındaki uzun mesafe kuvvetleri ve küçük boyut etkisini içeren bir model elde edilmektedir. Yerel olmayan elastisite teorisinin Euler-Bernoulli kirişi için uygulaması ilk olarak Peddieson (2003) tarafından gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlara göre

bu yöntemin nano yapıların analizinde kullanılabileceği öngörülmüştür. Geçtiğimiz yıllarda, sürekli ortam modelleri konusunda yoğun çalışmalar yapılmış olup, sürekli ortam modelleri nano malzemelerin statik ve dinamik davranışlarını ifade eden denklemler yerel olmayan sürekli ortam modeline göre geliştirilmiştir.

Örneğin, Wang ve diğ. (2006) tarafından geliştirilen diğer bir yerel olmayan sürekli ortam modelinde klasik Timoshenko çubuk modelinden farklı iki malzeme parametresi bulunmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak, Phadikar ve Pradhan (2010) nano çubukları doğrusal olmayan bir formülasyonla incelemişlerdir. Alizada ve Sofiyev (2011) iki boyutlu kristal yapı için düzeltilmiş elastiklik modülünü elde etmiştir. Boyut etkisi ve boşlukların elastiklik modülünü etkilediği sonucuna varmışlardır. Mahmoud ve diğ. (2012) nano çubukların statik şekil değiştirmesine yerel olmayan elastisitenin etkisini incelemiştir. Yakın zamanda gerçekleştirilen bazı çalışmalara göre, karbon nanotüplerin analizinde kullanılan yerel olmayan elastisite teorisi ile moleküler dinamik simülasyonu uyumlu sonuçlar vermiştir. Murmu ve Adhikari (2012) karbon nanotüplerin kullanıldığı nano ölçekli biyosensör konusunda yaptıkları çalışmada yerel olmayan elastisite teorisinden elde ettikleri sonuçlar ile moleküler dinamik sonuçlarının uyumlu olduğunu gözlemlemiştir. Benvenuti ve Simone (2013) klasik (yerel) ve yerel olmayan elastisite teorisi ile gradyen teori arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Çalışmada, küçük boyut etkisinin yanı sıra gradyen teori ile yerel olmayan elastisite teorisi arasındaki uyum araştırılmıştır. Barretta ve De Sciarra (2014) yerel olmayan termodinamik yaklaşımla nano çubukların eğilme problemlerini incelemiştir. Varyasyonel formüller sunulmuş ve sınır koşullarına bağlı olarak ilgili diferansiyel denklemler elde edilmiştir. Örnek olarak, yayılı yük etkisindeki nano ölçekli konsol giriş incelenmiş ve küçük boyut etkisi nedeniyle yapının daha rijit davrandığı belirlenmiştir. Euler-Bernoulli yerel olmayan çubuk teorisine dayanarak nano çubukların statik davranışını incelemek için Marotti de Sciarra (2014) yerel olmayan sonlu eleman metodunu geliştirmiştir. Salvat ve diğ. (2014), yüksek mertebeden Euler-Bernoulli yerel olmayan çubuk teorisine dayanan bir yerel olmayan sonlu eleman yöntemi geliştirmişlerdir. Üniform yayılı yük etkisindeki basit mesnetli bir çubuk problemi çözülmüş ve elde edilen sonuç diferansiyel denklemin kesin çözüm sonucuyla karşılaştırılmıştır.

Karbon nanotüplerin dinamik davranışını anlamak amacıyla yapılan birçok çalışmada, farklı dinamik yüklerdeki titreşimler teorik olarak incelenmiştir. Berrabah ve diğ.

(2013) nano çubukların eğilme, burkulma ve serbest titreşimi ile ilgili çalışmak amacıyla bir yerel olmayan elastisite teorisi sunmuştur. Küçük boyut etkisi ve kayma deformasyonu etkisinin dahil edildiği modelde hareket denklemlerinin elde edilmesinde Hamilton prensibi kullanılmıştır. Basit mesnetli bir nano çubuğa ait eğilme, burkulma ve doğal frekans ifadeleri için analitik çözümler sunulmuştur. Bir diğer çalışmada, Eltaher ve diğ. (2014) nano çubukların serbest titreşimleri için sonlu eleman yöntemini uygulamıştır. Formülasyonda Eringen'in yerel olmayan bünye denklemleri kullanılmıştır. Nano çubukların dinamik analizinde yerel olmayan parametre, sınır ve yükleme koşulları incelenmiştir. Ansari ve diğ. (2015) viskoelastik Timoshenko nano çubukların serbest titreşimini yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak incelemiştir. Tek duvarlı karbon nanotüplerin malzeme özellikleri kullanılarak zamana bağlı denklemler çözülmeye çalışılmıştır. Yerel olmayan parametreler, viskoelastisite katsayısı ve nano çubuk uzunluğunun viskoelastik nano çubuğun zaman cevabına olan etkisi verilen sayısal sonuçlarla yorumlanmıştır. Arash ve diğ. (2015) nanomekanik rezonatörlerin kullanımı konusunda yaptıkları incelemede, konu ile ilgili yapılmış olan teorik çalışmaları da özetlemiştir. Bu çalışmalara örnek olarak, sürekli ortam yaklaşımı, moleküler simülasyon gibi yöntemler verilebilir. Bu teorik çalışmalar neticesinde, önemli kullanım alanı bulunan nanomekanik rezonatörlerin daha iyi tasarlanması amaçlanmıştır. Zenkour ve Sobhy (2015) ısı etkisindeki nano çubukların eğilme analizi için basitleştirilmiş üç bilinmeyen şekil değişimi olan (kesme ve normal şekil değişimleri) yerel olmayan çubuk teorisini sunmuştur. Çalışmada Eringen'in yerel olmayan bünye denklemleri kullanılmıştır. Hamilton prensibi kullanılarak denklemler oluşturulmuştur. Sonuçlar literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Bağdatlı (2015) farklı mesnetleme koşullarındaki Euler-Bernoulli nano çubuklarının lineer olmayan titreşimlerini incelemiştir. Problemin doğrusal kısmında, mod şekillerinin ve frekansların kesin çözümleri verilmiştir. Lineer olmayan kısımda ise, pertürbasyon tekniği ile bulunan yaklaşık çözümler hareket denklemlerine uygulanmıştır. Ansari ve diğ. (2016) termomekanik yükler etkisindeki, burkulmuş piezoelektrik Timoshenko nano çubukların serbest titreşim analizinde boyut etkisini içeren yerel olmayan elastisite teorisini uygulamıştır. Farklı sınır koşullarında, boyut parametresinin ve sıcaklığın artışı ile boyutsuz doğal frekansların burkulma öncesi durum için küçüldüğü, sonrasındaki durum için ise büyüdüğünü gözlenmiştir. Bahrami ve Teimourian (2016), yerel olmayan elastisite teorisinin dalga yayılımı yöntemi ile birleştirildiği çalışmalarında

karbon nanotüplerin dalga cevabını incelemiştir. Dalga yayılımı yönteminin titreşim, enerji iletimi ve dalga cevabı analizi için kullanışlı bir yöntem olduğu belirtilmiştir.

Nano çubuklar konusunda yapılan çalışmalar genellikle düz çubuklarla ilgilenmiştir, fakat gözlemler sonucu bu yapıların tam olarak düz olmadığı belirlenmiştir (Joshi ve diğ., 2010). Wang ve diğ. (2012) tarafından eğri eksenli nano yapılar konusunda Eringen'in sunduğu yerel olmayan elastisite teorisi kullanılmıştır. Çalışmada, yazarlar yerel olmayan elastisite teorisini kullanarak nano-ring ve çember eksenli nano yapıların burkulmasına ait analitik ifadeleri çıkarmışlardır. Shao ve diğ. (2009) dalgalı yapının karbon nanotüpün elastikliğini büyük ölçüde düşürdüğünü belirlemiştir. Burada, eğri eksenli nano çubukların eğriliğinin üretimde oluşturulduğunu veya düz çubuğun eksenel kuvvetlerin etkisinde burkulmasıyla gerçekleştiği düşünülmektedir. Eğri eksenli nano çubukların düzlem içi statik analizi için Tüfekci ve diğ. (2016a) yerel olmayan elastisite teorisini kullanan bir model sunmuştur. Analitik modelde eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkileri ve bunların yerel olmayan etkileri ile eğilme momentinin yerel olmayan etkisi dahil edilmiştir. Kesin çözümde başlangıç değerleri yöntemi uygulanmıştır ve çözüm analitik olarak elde edilmiştir. Benzer çözüm yolunun izlendiği bir diğer çalışmada Tüfekci ve diğ. (2016b) değişken eğrilikli ve değişken kesitli nano çubukların düzlem içi statik davranışı konusunda kapsamlı bir analiz gerçekleştirmiştir. Çalışmada, çubuk eğriliği, kesiti ve çubuğa etkileyen yükler değişken olarak alınmıştır ve çubuk geometrisi, sınır şartları, boyut etkisi, eksenel uzama ve kayma deformasyonu etkilerinin öneminin incelendiği örnekler çözülmüştür. Tüfekci ve Aya (2016) çember eksenli nano çubukların düzlem dışı statik davranışını inceledikleri çalışmalarında kayma deformasyonu ve yerel olmayan etkileri ile eğilme ve burulma momentlerinin yerel olmayan etkilerini analitik modelde dahil etmiştir. Çalışmada, tekil yük etkisindeki nano çubuklardaki şekil, kesit açısı ve kesit tesirlerinin değişimlerin belirlendiği bir örnek çözülmüştür.

Sürekli ortam mekaniği uygulamalarında atomlar arasındaki kafes boşlukları, yüzey özellikleri, tane boyutu gibi küçük boyut etkileri göz önünde bulundurulmalıdır. Klasik (yerel) sürekli ortam mekaniğinin nano ölçekteki sistemlere uygulamasının kısıtlı olmasının temel sebebi, atomlar arasında bulunan kafes boşluklarının yapının bütünlüğünü bozması ve sürekli ortam olarak modellenmesine engel teşkil etmesidir. Nanometre mertebesinde, bahsedilen küçük boyut etkisinin önemi artmaktadır. Bu sebeple, nano çubukların mekanik davranışı konusundaki çalışmalarda yerel olmayan

sürekli ortam mekaniği kullanılmaktadır. Alt bölümlerde, düzlemsel eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik ve serbest titreşim davranışlarını belirlemek için bir analitik yöntem geliştirilmiştir. Çubuk kesitinin çift simetrik olduğu kabul edilmiştir. Boyut etkisinin ihmal edilmesinin sonuçlarda önemli sapmaya neden olduğu bilinmektedir. Bu çalışma, Eringen'in yerel olmayan teorisini kullanarak bu problemi aşmayı hedeflemektedir. Mevcut çalışma, eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik ve dinamik davranışının incelenip, kesin çözümün sunulduğu ilk çalışma olma özelliğini taşımaktadır. Bu sebeple, elde edilen sonuçların, bu konuda daha sonra yapılacak teorik ve sayısal çalışmalar için değerlendirme kıstası olarak kabul edilebileceği düşünülmektedir.

3. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI STATİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

3.1 Çubukların Düzlem Dışı Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler

Mikro ve nano çubukların statik problemlerinin çözümünde küçük boyut etkisini içeren yerel olmayan elastisite teorisi kullanılmaktadır. Boyut etkisi; kafes parametreleri, tane boyutu ve molekül büyüklüğüne bağlı değişen karakteristik uzunluk ile ilişkilidir. Çubuk boyu, karakteristik uzunluğa göre çok büyük olduğunda, yerel olmayan teoremin sonuçları klasik (yerel) teoremin sonuçlarına yakınsamaktadır. Eringen (1983) tarafından sunulan yerel olmayan elastisite teorisine göre bir noktada oluşan gerilmeler belirli bir alandaki birim uzamaların integrali ile ilişkilidir:

$$\sigma_{ij}^{nl}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') d\Omega \quad (3.1)$$

Bu denklemde, α_{ijkl} çekirdek tensörü atom boyutundaki etkileşimleri, σ_{ij}^{nl} yerel olmayan gerilmeyi ve ε_{kl} ise yerel birim uzamayı ifade etmektedir. $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{x}'$ ise Ω alanında malzemenin herhangi iki noktasına ait konum vektörleridir. İzotrop ortamda, $\alpha_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 'nin elastiklik tensörü bileşenlerine eşit olarak dağıldığı varsayılmaktadır (Eringen, 1983). Bu durumda denklem 3.1 aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\sigma_{ij}^{nl}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') d\Omega \quad (3.2)$$

Bu denklemde, C_{ijkl} izotrop malzeme için elastiklik tensörü ve α skaler çekirdek fonksiyonudur. Bu denklem aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\sigma_{ij}^{nl}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \sigma_{ij}^l(\mathbf{x}') d\Omega \quad (3.3)$$

Burada, σ_{ij}^l yerel gerilme tensörüdür.

Yerel olmayan elastisite teorisinin integral bünye denklemleri bazı şartlar altında aşağıda verilen kısmi diferansiyel denkleme sadeleştirilebilir (Eringen, 1983; Benvenuti ve Simone, 2013). Böylece, yerel ve yerel olmayan elastisite teorisinin gerilmeleri arasındaki ilişki aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemlerle verilmektedir:

$$(1 - \gamma^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma}^{nl} = \boldsymbol{\sigma}^l \quad (3.4)$$

Burada, γ yerel olmayan parametreyi, ∇^2 Laplasyen operatörünü, $\boldsymbol{\sigma}^{nl}$ yerel olmayan elastisite teorisinin gerilme tensörünü, $\boldsymbol{\sigma}^l$ yerel (klasik) elastisite teorisinin gerilme tensörünü göstermektedir. Bu denklemler, yerel ve yerel olmayan elastisite teorilerindeki gerilmeler arasındaki ilişkiyi vermektedir. Bu ifade kullanılarak eğri eksenli çubukların yerel olmayan denklemleri, gerilme tensörünün silindirik koordinatlardaki laplasyeni hesaplanarak elde edilebilir. Bu denklem silindirik koordinatlarda düzenlenirse;

$$\sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{rr} = \sigma_{rr}^l \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.6)$$

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.7)$$

$$\sigma_{rz}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{rz} = \sigma_{rz}^l \quad (3.8)$$

$$\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{\theta z} = \sigma_{\theta z}^l \quad (3.9)$$

$$\sigma_{zz}^{nl} - \gamma^2 (\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{zz} = \sigma_{zz}^l \quad (3.10)$$

ifadeleri elde edilir. Yerel olmayan elastisite teorisindeki $\boldsymbol{\sigma}^{nl}$ gerilme tensörünün laplasyeni, Povstenko (1995) tarafından aşağıdaki eşitliklerle verilmektedir:

$$(\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{rr} = \nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \quad (3.11)$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{\theta\theta} = \nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \quad (3.12)$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{\sigma}^{nl})_{r\theta} = \nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \quad (3.13)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{rz} = \nabla^2 \sigma_{rz}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta} \quad (3.14)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{\theta z} = \nabla^2 \sigma_{\theta z}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta} \quad (3.15)$$

$$(\nabla^2 \sigma^{nl})_{zz} = \nabla^2 \sigma_{zz}^{nl} \quad (3.16)$$

burada, skaler büyüklüğün laplasyen ifadesi,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.17)$$

olarak bilinmektedir. Eğri eksenli çubukların denklemleri Frenet koordinat sisteminde verilmektedir. Silindirik ve Frenet koordinat sistemleri arasındaki ilişkinin incelenebilmesi amacıyla her iki koordinat sistemi Şekil 3.1’de gösterilmektedir. Çubuk teorisinde, üç boyutlu yükleme durumu için σ_t , σ_{tn} ve σ_{tb} gerilmeleri mevcuttur. Çubuk kesitinin rijit olduğu, yani herhangi bir boyut değişimine ve çarpılmaya uğramadığı varsayımıyla, diğer gerilmelerin, yani σ_n , σ_b ve σ_{nb} değerlerinin sıfır oldukları ifade edilmektedir. Silindirik koordinatlardaki gerilmeler ile Frenet koordinatlarındaki gerilmeler arasındaki ilişki aşağıda verilmektedir:

$$\sigma_n = -\sigma_{rr} = 0 \quad (3.18)$$

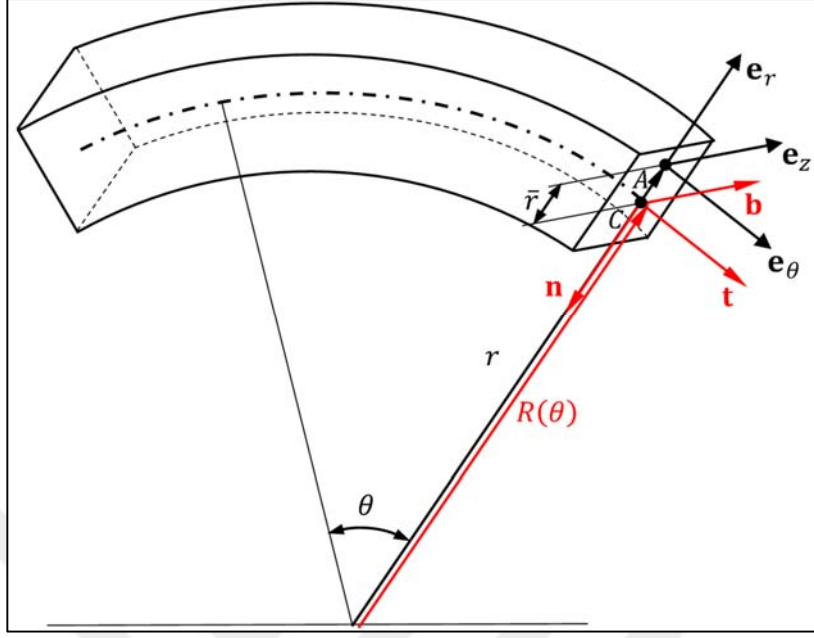
$$\sigma_b = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.19)$$

$$\sigma_t = \sigma_{\theta\theta} \neq 0 \quad (3.20)$$

$$\sigma_{tn} = -\sigma_{r\theta} \neq 0 \quad (3.21)$$

$$\sigma_{tb} = \sigma_{\theta z} \neq 0 \quad (3.22)$$

$$\sigma_{nb} = -\sigma_{rz} = 0 \quad (3.23)$$



Şekil 3.1 : Eğri eksenli bir çubukta, Frenet ve silindirik koordinat eksenleri.

Bu ilişki hem yerel hem de yerel olmayan gerilmeler için aynıdır. Çubuğun eğrilik yarıçapının sadece θ açısai koordinatının fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır. Yani, $R = R(\theta)$ olduğundan silindirik koordinat r ve diferansiyeli şu şekilde tarif edilebilir:

$$r = R(\theta) + \bar{r}; \quad \partial r = \partial \bar{r} \quad (3.24)$$

burada $\bar{r}$ kesit içindeki radyal koordinatı göstermektedir. Çubuk teorisinde, kesit boyutlarının eğrilik yarıçapının yanında çok küçük olduğu yani $\bar{r}/R(\theta) \ll 1$ kabulüyle, yaklaşık olarak $(1 + \bar{r}/R(\theta)) \cong 1$ şeklinde alınabilir.

Bu çalışmada, düzlemsel yükleme durumundaki düzlemsel eğri eksenli çubuklar ele alındığından $\sigma_{tn} = -\sigma_{r\theta} = 0$ olacaktır. Bu durumda, eğri eksenli düzlemsel çubuğun, düzlemindeki davranışını ifade eden, θ koordinatındaki kesit tesirleri olan F_b^{nl} , M_n^{nl} ve M_t^{nl} sadece θ koordinatına bağlı olacaktır. Kesit tesirlerinin silindirik koordinatlardaki türevleri:

$$\frac{\partial F_b^{nl}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \frac{\partial^2 F_b^{nl}}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \frac{\partial F_b^{nl}}{\partial \theta} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 F_b^{nl}}{\partial \theta^2} \neq 0 \quad \frac{\partial F_b^{nl}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 F_b^{nl}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial M_n^{nl}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \frac{\partial^2 M_n^{nl}}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \frac{\partial M_n^{nl}}{\partial \theta} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 M_n^{nl}}{\partial \theta^2} \neq 0 \quad \frac{\partial M_n^{nl}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 M_n^{nl}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial M_t^{nl}}{\partial \bar{r}} = 0 \quad \frac{\partial^2 M_t^{nl}}{\partial \bar{r}^2} = 0 \quad \frac{\partial M_t^{nl}}{\partial \theta} \neq 0 \quad \frac{\partial^2 M_t^{nl}}{\partial \theta^2} \neq 0 \quad \frac{\partial M_t^{nl}}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 M_t^{nl}}{\partial z^2} = 0 \quad (3.27)$$

olarak bilinmektedir.

Silindirik koordinatlardaki denge denklemleri;

$$\frac{\partial \sigma_{rr}^{nl}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}^{nl}}{\partial r} + \frac{\sigma_{zr}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.30)$$

olarak bilinmektedir. Bu denklemler, 3.18-3.23 denklemleri kullanılarak yeniden yazılırsa;

$$-\frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r} 2\sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.32)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}^{nl}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.33)$$

ifadeleri elde edilir.

Yerel olmayan elastisite teorisinden elde edilen gerilmeler arasındaki ilişkilerden faydalanılarak, denklem 3.17, denklem 3.5'te yerine konarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 \left(\nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right) = \sigma_{rr}^l \quad (3.34)$$

Denklem 3.17, σ_{rr}^{nl} için düzenlenirse;

$$\nabla^2 \sigma_{rr}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.35)$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade, denklem 3.34'te yerine konursa;

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{nl} - \gamma^2 \left[\frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{rr}^{nl}}{\partial z^2} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{rr}^l \end{aligned} \quad (3.36)$$

ifadesine ulaşılır. Çubuk varsayımı, yani 3.18-3.23 denklemleri kullanılarak;

$$\frac{4\gamma^2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2\gamma^2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} = 0 \quad (3.37)$$

eşitliği elde edilir.

Denklem 3.12, denklem 3.15'te yerine konularak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \quad (3.38)$$

Denklem 3.17, $\sigma_{\theta\theta}^{nl}$ için düzenlenirse;

$$\nabla^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.39)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik, denklem 3.38'de yerine konursa, aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{\theta\theta}^l \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.18-3.23 denklemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} \sigma_{\theta\theta}^{nl} \right] \\ = \sigma_{\theta\theta}^l \end{aligned} \quad (3.41)$$

eşitliği elde edilir.

Denklem 3.17, denklem 3.7’de yerine konur ve düzenlenirse;

$$\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{r\theta}^l \quad (3.42)$$

bulunur. Denklem 3.17, $\sigma_{r\theta}^{nl}$ için düzenlenerek;

$$\nabla^2 \sigma_{r\theta}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.43)$$

ifadesi elde edilir. Bu, denklem 3.42’de yerine konursa;

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} \right. \\ \left. + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr}^{nl} - \sigma_{\theta\theta}^{nl}) \right] = \sigma_{r\theta}^l \end{aligned} \quad (3.44)$$

elde edilir. 3.18-3.23 denklemleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right] \\ = \sigma_{r\theta}^l \end{aligned} \quad (3.45)$$

denkleminde ulaşılır.

Denklem 3.17, denklem 3.8’de yerine konur ve düzenlenirse;

$$\sigma_{rz}^{nl} - \gamma^2 \left[\nabla^2 \sigma_{rz}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta} \right] = \sigma_{rz}^l \quad (3.46)$$

bulunur. Denklem 3.17, σ_{rz}^{nl} için düzenlenerek;

$$\nabla^2 \sigma_{rz}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{rz}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.47)$$

ifadesi elde edilir. Bu, denklem 3.46’da yerine konursa;

$$\sigma_{rz}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{rz}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \sigma_{rz}^{nl} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta} \right] = \sigma_{rz}^l \quad (3.48)$$

elde edilir. 3.18-3.23 denklemleri kullanılarak;

$$\frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.49)$$

denklemine ulaşılır.

Denklem 3.17, denklem 3.9'da yerine konur ve düzenlenirse;

$$\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 \left[\nabla^2 \sigma_{\theta z}^{nl} - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta} \right] = \sigma_{\theta z}^l \quad (3.50)$$

bulunur. Denklem 3.17, $\sigma_{\theta z}^{nl}$ için düzenlenerek;

$$\nabla^2 \sigma_{\theta z}^{nl} = \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z^2} \quad (3.51)$$

ifadesi elde edilir. Bu, denklem 3.50'de yerine konursa;

$$\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}^{nl}}{\partial \theta} \right] = \sigma_{\theta z}^l \quad (3.52)$$

elde edilir. 3.18-3.23 denklemleri kullanılarak;

$$\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} \right] = \sigma_{\theta z}^l \quad (3.53)$$

denklemine ulaşılır.

F_b^{nl} kesit tesirini elde etmek için, $\sigma_{\theta z}^{nl}$ gerilme ifadesinin, yani, denklem 3.53'ün kesit üzerinde integre edilmesi gerekir:

$$\begin{aligned} & \iint_A \left[\sigma_{\theta z}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} \right] \right] dA \\ &= \iint_A \sigma_{\theta z}^l dA \end{aligned} \quad (3.54)$$

Denklem 3.24'ü kullanıp, $\bar{r}/R \ll 1$ varsayımı yapıldığında aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}} dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta^2} dA \\ & - \gamma^2 \iint_A \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z^2} dA + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA = \iint_A \sigma_{\theta z}^l dA \end{aligned} \quad (3.55)$$

Belirli koşullar altında integral ve kısmi türevlerin değiştirilebileceğinin belirtildiği Leibniz integral kuralı (Abramowitz ve Stegun, 1972) uygulandığında denklem 3.55 aşağıda verilen şekilde sadeleşecektir:

$$\begin{aligned} & \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA \\ & - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA \\ & + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA = \iint_A \sigma_{\theta z}^l dA \end{aligned} \quad (3.56)$$

Burada,

$$\iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA = F_b^{nl} \quad \iint_A \sigma_{\theta z}^l dA = F_b^l \quad (3.57)$$

eşitlikleri yazılabilir. F_b^{nl} 'in θ koordinatındaki kesit tesiri olduğu bilinmektedir ve değeri sadece θ koordinatına bağlıdır. Dolayısıyla, denklem 3.56 aşağıdaki biçimde düzenlenebilir:

$$\left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) F_b^{nl} - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2 F_b^{nl}}{\partial \theta^2} = F_b^l \quad (3.58)$$

Benzer şekilde, M_n^{nl} ve M_n^l arasındaki ilişkiyi belirlemek için denklem 3.41 ile verilen $\sigma_{\theta\theta}^{nl}$ gerilme ifadesi z koordinatı ile çarpılarak kesit üzerinde integre edilir:

$$\begin{aligned} \iint_A \left\{ \sigma_{\theta\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right] \right\} z dA \\ = \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l z dA \end{aligned} \quad (3.59)$$

$\bar{r}/R \ll 1$ varsayımı yapılır; kısmi integrasyon ve Leibniz kuralı uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dA - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dA \\ - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_A (\sigma_{\theta\theta}^{nl} z) dA \\ + 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} dA = \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l z dA \end{aligned} \quad (3.60)$$

Burada,

$$\iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dA = M_n^{nl}; \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l z dA = M_n^l; \quad \iint_A \sigma_{\theta\theta}^l dA = F_t^l \quad (3.61)$$

eşitlikleri yazılır. M_n^{nl} ve F_t^{nl} kesit tesirleri sadece θ koordinatına bağlıdır. Bu durumda, denklem 3.60 aşağıdaki verilen ifadeye (denklem 3.62) sadeleştirilir:

$$M_n^{nl} - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2 M_n^{nl}}{\partial \theta^2} = M_n^l \quad (3.62)$$

M_t^{nl} teğetsel momenti, $\sigma_{r\theta}^{nl}$ and $\sigma_{\theta z}^{nl}$ gerilme ifadelerinin kiriş kesiti üzerinde integre edilmesiyle elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \iint_A \left\{ \left[\sigma_{r\theta}^{nl} - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial z^2} \right) - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta}^{nl} \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} \right] \right] z \\
& \quad - \left[\sigma_{\theta z}^{nl} \right. \\
& \quad \left. - \gamma^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z^2} \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{r^2} \sigma_{\theta z}^{nl} \right] \right] \bar{r} \Bigg\} dA = \iint_A (\sigma_{r\theta}^l z - \sigma_{\theta z}^l \bar{r}) dA
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Kısmi integrasyon ve Leibniz kuralı uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \iint_A \{ \sigma_{r\theta}^{nl} z - \sigma_{\theta z}^{nl} \bar{r} \} dA - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \iint_A \{ \sigma_{r\theta}^{nl} z - \sigma_{\theta z}^{nl} \bar{r} \} dA \\
& - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \{ \sigma_{r\theta}^{nl} z - \sigma_{\theta z}^{nl} \bar{r} \} dA \\
& - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \iint_A \{ \sigma_{r\theta}^{nl} z - \sigma_{\theta z}^{nl} \bar{r} \} dA \\
& - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_A \{ \sigma_{r\theta}^{nl} z - \sigma_{\theta z}^{nl} \bar{r} \} dA \\
& + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \iint_A \{ \sigma_{r\theta}^{nl} z - \sigma_{\theta z}^{nl} \bar{r} \} dA + 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial z} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} dA \\
& + \frac{2\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl} z dA - 2\gamma^2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA \\
& - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl} dA + \frac{3\gamma^2}{R(\theta)^2} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl} z dA \\
& = \iint_A (\sigma_{r\theta}^l z - \sigma_{\theta z}^l \bar{r}) dA
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Burada,

$$\iint_A \{\sigma_{r\theta}^{nl}z - \sigma_{\theta z}^{nl}\bar{r}\}dA = M_t^{nl}; \quad \iint_A \{\sigma_{r\theta}^l z - \sigma_{\theta z}^l \bar{r}\}dA = M_t^l \quad (3.65)$$

$$\iint_A \sigma_{\theta\theta}^{nl}z dA = M_n^{nl}; \quad \iint_A \sigma_{\theta z}^{nl}dA = F_b^{nl}; \quad \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl}dA = -F_n^{nl}$$

eşitlikleri yazılabilir. Denklem 3.65 ile verilen eşitlikler denklem 3.64'te yerine konduğunda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$M_t^{nl} - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2 M_t^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{2\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial}{\partial \theta} M_n^{nl} - \frac{\gamma^2}{R(\theta)} F_b^{nl} + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} M_t^{nl} + \frac{3\gamma^2}{R(\theta)^2} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl}z dA = M_t^l \quad (3.66)$$

Denklem 3.66'nın sol tarafının son terimi denge denklemleri kullanılarak tekrar yazılırsa:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{nl}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{nl}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{nl}}{\partial z} = 0 \quad (3.67)$$

eşitliği elde edilir. Denklem 3.67, $3z/2r$ ile çarpılıp, ardından kısmi integrasyon kuralını uygulayarak kesit üzerinde integre edilirse ($\bar{r}/R \ll 1$):

$$\frac{3}{R(\theta)^2} \iint_A \sigma_{r\theta}^{nl}z dA = -\frac{3}{2R(\theta)^2} \frac{\partial M_n^{nl}}{\partial \theta} + \frac{3}{2R(\theta)} F_b^{nl} \quad (3.68)$$

Bu ifade denklem 3.66'da yerine konursa M_t^{nl} ve M_t^l arasındaki ilişkiyi veren denklem yazılabilir:

$$\left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) M_t^{nl} - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{\partial^2 M_t^{nl}}{\partial \theta^2} + \frac{\gamma^2}{2R(\theta)^2} \frac{\partial M_n^{nl}}{\partial \theta} + \frac{\gamma^2}{2R(\theta)} F_b^{nl} = M_t^l \quad (3.69)$$

Yerel elastisite teorisinin verdiği, düzlem dışı statik davranışını ifade eden denklemler (Tüfekci ve Dogruer, 2006);

$$\frac{dv(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)\Omega_n(\theta) + \frac{k_n R(\theta)}{GA(\theta)} F_b(\theta) \quad (3.70)$$

$$\frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} = \Omega_t(\theta) + \frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} M_n(\theta) \quad (3.71)$$

$$\frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} = \Omega_n(\theta) + \frac{R(\theta)}{GJ(\theta)} M_t(\theta) \quad (3.72)$$

$$\frac{dM_n(\theta)}{d\theta} = -M_t(\theta) + R(\theta)F_b(\theta) - R(\theta)m_n(\theta) \quad (3.73)$$

$$\frac{dM_t(\theta)}{d\theta} = M_n(\theta) - R(\theta)m_t(\theta) \quad (3.74)$$

$$\frac{dF_b(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)q_b(\theta) \quad (3.75)$$

olarak bilinmektedir. Bu denklemlerde v binormal doğrultulardaki yer değiştirmeleri; n , b ve t indisleri sırasıyla normal, binormal ve teğet doğrultuları göstermektedir. Ω_n kesitin normal eksen etrafındaki dönme açısını; Ω_t kesitin teğet eksen etrafındaki dönme açısını θ , açısal koordinatı; $R(\theta)$, şekil değiştirmemiş çubuk ekseninin eğrilik yarıçapını, F_b binormal doğrultudaki iç kuvvetleri; M_n normal doğrultuda, M_t teğet doğrultuda vektör veren iç momentleri; E ve G malzemenin elastiklik (Young) ve kayma modüllerini; k_b kayma gerilmesinin kesite üniform olarak yayılmadığını karakterize eden sabiti; A , kesit alanını; I_n , binormal eksene göre eylemsizlik momentini temsil etmektedir. J burulma sabitidir. q_b binormal doğrultuda yayılı dış kuvveti, m_n ve m_t normal ve teğet doğrultulardaki yayılı dış momenti göstermektedir.

Burada, çubuk eğriliğinin ve kesitin ayrıca dış yayılı yüklerin, sadece, θ koordinatının fonksiyonu olduğu varsayılmaktadır. Yerel teorinin çubuk denklemleri kullanılarak, elde edilmiş olan yerel ve yerel olmayan teorilerdeki kesit tesirleri arasındaki ilişkiler, düzenlenerek, ilk üç denklemde yerine konacaktır.

3.73-3.75 denklemleri, yani denge denklemleri hem yerel hem de yerel olmayan teoride aynıdır. 3.58, 3.62 ve 3.69 bu bilgi ile düzenlenerek, ifadeler denklem 3.70-3.72'de yerine koyulur ve böylece yerel olmayan bünye denklemleri elde edilir. Bunun için, 3.73-3.75 denklemleri θ koordinatına göre türetilirse;

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M_n(\theta)}{d\theta^2} = & -\frac{dM_t(\theta)}{d\theta} + \frac{dR(\theta)}{d\theta} F_b(\theta) + R(\theta) \frac{dF_b(\theta)}{d\theta} - \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_n(\theta) \\ & - R(\theta) \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\frac{d^2 M_t(\theta)}{d\theta^2} = \frac{dM_n(\theta)}{d\theta} - \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_t(\theta) - R(\theta) \frac{dm_t(\theta)}{d\theta} \quad (3.77)$$

$$\frac{d^2 F_b(\theta)}{d\theta^2} = -\frac{dR(\theta)}{d\theta} q_b(\theta) - R(\theta) \frac{dq_b(\theta)}{d\theta} \quad (3.78)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada, denklem 3.76-3.78, yani kesit tesirlerinin birinci türevleri, denklem 3.58, 3.62 ve 3.69'da yerine konur ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2}\right) M_n^{nl}(\theta) - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} F_b^{nl}(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta)^2 q_b(\theta) \\ - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) m_t(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_n(\theta) \\ + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} = M_n^l(\theta) \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R(\theta)^2}\right) M_t^{nl}(\theta) + \frac{\gamma^2}{2R(\theta)^2} R(\theta) m_n(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_t(\theta) \\ + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \frac{dm_t(\theta)}{d\theta} = M_t^l(\theta) \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2}\right) F_b^{nl}(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} q_b(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)} \frac{dq_b(\theta)}{d\theta} = F_b^l(\theta) \quad (3.81)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeler, çubuk denklemlerinin ilk üçünde (denklem 3.70-3.72) yerine konarak, yerel olmayan elastisite teorisinin verdiği denklemler;

$$\begin{aligned} \frac{dv(\theta)}{d\theta} = & -R(\theta) \Omega_n(\theta) + \frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2}\right) F_b^{nl} \\ & + \frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \left(q_b(\theta) \frac{dR(\theta)}{d\theta} + \frac{dq_b(\theta)}{d\theta} R(\theta) \right) \end{aligned} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} &= -\Omega_t(\theta) \\
&+ \frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \left(\left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) M_n(\theta) - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} F_b^{nl}(\theta) \right. \\
&+ \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta)^2 q_b(\theta) - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) m_t(\theta) \\
&\left. + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_n(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \frac{dm_n(\theta)}{d\theta} \right)
\end{aligned} \tag{3.83}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} &= \Omega_n(\theta) \\
&+ \frac{R(\theta)}{GJ(\theta)} \left(\left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R(\theta)^2} \right) M_t^{nl} + \frac{\gamma^2}{2R(\theta)^2} R(\theta) m_n(\theta) \right. \\
&\left. + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} m_t(\theta) + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \frac{dm_t(\theta)}{d\theta} \right)
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\frac{dM_n^{nl}(\theta)}{d\theta} = -M_t^{nl}(\theta) + R(\theta) F_b^{nl} - R(\theta) m_n(\theta) \tag{3.85}$$

$$\frac{dM_t^{nl}(\theta)}{d\theta} = M_n^{nl}(\theta) - R(\theta) m_t(\theta) \tag{3.86}$$

$$\frac{dF_b^{nl}(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) q_b(\theta) \tag{3.87}$$

olarak elde edilir.

Eğri eksenli çubukların düzlem dışı statik problemlerinin kesin çözümü, çubuk eksen eğrisi ve kesiti ne olursa olsun, yer değiştirmenin, kesit dönmelerinin ve kesit tesirlerinin, çubuk eksen eğrisi boyunca belirlenmesine imkan verecek şekilde, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilebilmektedir. Benzer şekilde, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerinin göz önüne alınması durumunda, çubuk titreşimine ait diferansiyel denklemlerin kesin çözümü, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak hesaplanabilmektedir.

3.2 Çubukların Düzlem Dışı Statik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemlerin Çözümü

Eğri eksenli çubukların kendi düzlemindeki şekil değiştirmelerine ait 3.82-3.87 denklemleri, birinci dereceden değişken katsayılı lineer diferansiyel denklemlerdir. Denklemler matris şeklinde ifade edildiğinde;

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{y}(\theta) + \mathbf{f}(\theta) \quad (3.88)$$

burada $\mathbf{y}$ değişkenler vektörünü temsil etmektedir ve bileşenleri $v, \Omega_n, \Omega_t, M_n^{nl}, M_t^{nl}, F_b^{nl}$ olarak verilmiştir. $\mathbf{A}(\theta)$ 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ifade etmekte olup, $\mathbf{f}(\theta)$ ise 6 elemanlı yayılı dış yük vektörüdür. Denklem 3.88'in çözümü aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, \theta_0)\mathbf{y}_0 + \mathbf{Y}(\theta, \theta_0) \int_{\theta_0}^{\theta} \mathbf{Y}^{-1}(\phi, \theta_0)\mathbf{f}(\phi)d\phi \quad (3.89)$$

Burada $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$, denklem 3.88'in homojen halinin çözümünden elde edilen asal matrisi gösterirken, $\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(\theta_0)$ θ_0 koordinatındaki başlangıç değerleri vektörüdür (Bu çalışma için: $\theta_0 = 0$). Tekil kuvvet ve momentlerin etkidiği çubuğa ait denklemlerin, yani, çubuk üzerine hiçbir yayılı kuvvet ya da momentin etkimemesi durumunda homojen denklem takımının matris formda düzenlenmiş hali aşağıda verilmiştir:

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{y}(\theta) \quad (3.90)$$

Burada, $\mathbf{A}(\theta)$ 6×6 katsayılar matrisidir. 3.90 ile verilen diferansiyel denklem sisteminin çözümü aşağıda verilmiştir:

$$\mathbf{y}(\theta) = \mathbf{Y}(\theta, 0)\mathbf{y}_0 \quad (3.91)$$

3.91 ile verilen denklem sistemi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} v(\theta) \\ \Omega_n(\theta) \\ \Omega_t(\theta) \\ M_n^{nl}(\theta) \\ M_t^{nl}(\theta) \\ F_b^{nl}(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} \\ Y_{51} & Y_{52} & Y_{53} & Y_{54} & Y_{55} & Y_{56} \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ F_{b0} \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Asal matris $\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)$ aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

$$\frac{d\mathbf{Y}(\theta, \theta_0)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{Y}(\theta, \theta_0), \quad \mathbf{Y}(\theta_0, \theta_0) = \mathbf{I} \quad (3.93)$$

$$\mathbf{Y}(\theta_1, \theta_2)\mathbf{Y}(\theta_2, \theta_3) = \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_3), \quad \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_2) = \mathbf{Y}^{-1}(\theta_2, \theta_1) \quad (3.94)$$

Burada $\mathbf{I}$ birim matristir.

İki bölge, $\theta = \theta_K$ kooordinatından tekil yükler etkileyen çember eksenli bir çubuk için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$-\theta_A \leq \theta_1 \leq \theta_K \quad \text{için} \quad \mathbf{y}_1(\theta_1) = \mathbf{Y}(\theta_1, \theta_0)\mathbf{y}_{10} \quad (3.95)$$

$$\theta_K \leq \theta_2 \leq \theta_B \quad \text{için} \quad \mathbf{y}_2(\theta_2) = \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_K)\mathbf{y}_{2K} \quad (3.96)$$

$\mathbf{y}_{2K}$ ikinci bölge için θ_K koordinatındaki başlangıç değerler vektörüdür. $\mathbf{y}_{10}$ ve $\mathbf{y}_{2K}$ vektörlerinin on iki bileşeninin hesaplanabilmesi için sınır ve süreklilik şartlarından elde edilen on iki denklem kullanılır. Bu noktadaki süreklilik şartı:

$$\mathbf{y}_1(\theta_K) + \mathbf{K} = \mathbf{y}_{2K} \quad (3.97)$$

$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0 \ F_{Kb} \ M_{Kn} \ M_{Kt}]^T$ vektörü K noktasında bulunan tekil yükler vektörüdür. Böylece, denklem 3.96 yeniden yazılırsa:

$$\mathbf{y}_2(\theta_2) = \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_K)\mathbf{y}_1(\theta_K) + \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_K)\mathbf{K} \quad (3.98)$$

Denklem 3.94, denklem 3.96 kullanılarak yeniden yazılırsa:

$$\mathbf{y}_2(\theta_2) = \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_0)\mathbf{y}_{10} + \mathbf{Y}(\theta_2, \theta_0)\mathbf{Y}^{-1}(\theta_K, \theta_0)\mathbf{K} \quad (3.99)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece; yer değiştirme, dönme açısı ve kuvvet bileşenlerinin analitik ifadeleri her iki bölge için de elde edilebilir.

Çubuğa sabit yayılı yüklerin etkimesi durumunda dış yük vektörü olan $\mathbf{f}$ 'nin ve asal matris $\mathbf{Y}$ 'nin tersi olan $\mathbf{Y}^{-1}$ 'in hesaplanması gereklidir. 3.89 ifadesinden çözüm aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} v \\ \Omega_n \\ \Omega_t \\ M_n^{nl} \\ M_t^{nl} \\ F_b^{nl} \end{bmatrix} = [Y]_{6 \times 6} \begin{bmatrix} v_0 \\ \Omega_{n0} \\ \Omega_{t0} \\ M_{n0} \\ M_{t0} \\ F_{b0} \end{bmatrix} + [Y]_{6 \times 6} \int_0^\theta [Y]^{-1}_{6 \times 6} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} d\phi \quad (3.100)$$

Çember eksenli üniform nano çubuk için yazılan homojen diferansiyel denklemin çözümü kolaylıkla elde edilebilir. Eğrilik yarıçapı, atalet momenti ve kesit alanı;

$$R(\theta) = R, \quad I_n(\theta) = I_n, \quad J(\theta) = J, \quad A(\theta) = A \quad (3.101)$$

olacaktır. Bu durum için asal matrisin bileşenleri aşağıda verilmiştir.

$$Y_{11} = 1; \quad Y_{12} = -R \sin \theta; \quad Y_{13} = R(1 - \cos \theta); \quad (3.102)$$

$$Y_{14} = \frac{R^2}{GJ} + \frac{3\gamma^2}{2GJ} - \frac{R^2 \cos \theta}{GJ} - \frac{3\gamma^2 \cos \theta}{2GJ} - \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} - \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} - \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJ} \quad (3.103)$$

$$Y_{15} = -\frac{R^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{R^2 \theta \cos \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ} + \frac{R^2 \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R^2 \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n} + \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJ} \quad (3.104)$$

$$Y_{16} = \frac{k_b R \theta}{GA} + \frac{R^3 \theta}{GJ} + \frac{k_b \gamma^2 \theta}{GAR} + \frac{3R\gamma^2 \theta}{2GJ} + \frac{R^3 \theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{R^3 \theta \cos \theta}{2GJ} + \frac{R\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{3R\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ} - \frac{R^3 \sin \theta}{2EI_n} - \frac{3R^3 \sin \theta}{2GJ} - \frac{R\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n} - \frac{9R\gamma^2 \sin \theta}{4GJ} \quad (3.105)$$

$$Y_{21} = 0; \quad Y_{22} = \cos \theta; \quad Y_{23} = -\sin \theta; \quad (3.106)$$

$$Y_{24} = \frac{R\theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{R\theta \cos \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n R} + \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJR} + \frac{R \sin \theta}{2EI_n} - \frac{R \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n R} - \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJR} \quad (3.107)$$

$$Y_{25} = -\frac{R\theta \sin \theta}{2EI_n} - \frac{R\theta \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n R} - \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJR} \quad (3.108)$$

$$Y_{26} = -\frac{R^2}{GJ} - \frac{3\gamma^2}{2GJ} + \frac{R^2 \cos \theta}{GJ} + \frac{3\gamma^2 \cos \theta}{2GJ} + \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} + \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJ} \quad (3.109)$$

$$Y_{31} = 0; \quad Y_{32} = \sin \theta; \quad Y_{33} = \cos \theta; \quad (3.110)$$

$$Y_{34} = \frac{R\theta \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R\theta \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n R} + \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJR} \quad (3.111)$$

$$Y_{35} = \frac{R\theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{R\theta \cos \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n R} + \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJR} - \frac{R \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n R} + \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJR} \quad (3.112)$$

$$Y_{36} = -\frac{R^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{R^2 \theta \cos \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ} + \frac{R^2 \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R^2 \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n} + \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJ} \quad (3.113)$$

$$Y_{41} = 0; \quad Y_{42} = 0; \quad Y_{43} = 0; \quad Y_{44} = \cos \theta; \quad Y_{45} = -\sin \theta; \quad Y_{46} = R \sin \theta; \quad (3.114)$$

$$Y_{51} = 0; \quad Y_{52} = 0; \quad Y_{53} = 0; \quad Y_{54} = \sin \theta; \quad Y_{55} = \cos \theta; \quad (3.115)$$

$$Y_{56} = R - R \cos \theta; \quad (3.116)$$

$$Y_{61} = 0; \quad Y_{62} = 0; \quad Y_{63} = 0; \quad Y_{64} = 0; \quad Y_{65} = 0; \quad Y_{66} = 1; \quad (3.117)$$

Asal matrisin tersinin bileşenlerine ait analitik ifadeler aşağıda verilmiştir:

$$YI_{11} = 1; \quad YI_{12} = R \sin \theta; \quad YI_{13} = R(1 - \cos \theta); \quad (3.118)$$

$$YI_{14} = \frac{R^2}{GJ} + \frac{3\gamma^2}{2GJ} - \frac{R^2 \cos \theta}{GJ} - \frac{3\gamma^2 \cos \theta}{2GJ} - \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} - \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} - \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJ} \quad (3.119)$$

$$YI_{15} = \frac{R^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{R^2 \theta \cos \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ} - \frac{R^2 \sin \theta}{2EI_n} - \frac{R^2 \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n} - \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJ} \quad (3.120)$$

$$YI_{16} = -\frac{k_b R \theta}{GA} - \frac{R^3 \theta}{GJ} - \frac{k_b \gamma^2 \theta}{GAR} - \frac{3R\gamma^2 \theta}{2GJ} - \frac{R^3 \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{R^3 \theta \cos \theta}{2GJ} - \frac{R\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{3R\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ} + \frac{R^3 \sin \theta}{2EI_n} + \frac{3R^3 \sin \theta}{2GJ} + \frac{R\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n} + \frac{9R\gamma^2 \sin \theta}{4GJ} \quad (3.121)$$

$$YI_{21} = 0 ; \quad YI_{22} = \cos \theta ; \quad YI_{23} = \sin \theta ; \quad (3.122)$$

$$YI_{24} = -\frac{R \theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{R \theta \cos \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n R} - \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ R} - \frac{R \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n R} + \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJ R} \quad (3.123)$$

$$YI_{25} = -\frac{R \theta \sin \theta}{2EI_n} - \frac{R \theta \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n R} - \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJ R} \quad (3.124)$$

$$YI_{26} = -\frac{R^2}{GJ} - \frac{3\gamma^2}{2GJ} + \frac{R^2 \cos \theta}{GJ} + \frac{3\gamma^2 \cos \theta}{2GJ} + \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R^2 \theta \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n} + \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJ} \quad (3.125)$$

$$YI_{31} = 0 ; \quad YI_{32} = -\sin \theta ; \quad YI_{33} = \cos \theta ; \quad (3.126)$$

$$YI_{34} = \frac{R \theta \sin \theta}{2EI_n} + \frac{R \theta \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \sin \theta}{2EI_n R} + \frac{3\gamma^2 \theta \sin \theta}{4GJ R} \quad (3.127)$$

$$\begin{aligned}
YI_{35} = & -\frac{R\theta \cos \theta}{2EI_n} - \frac{R\theta \cos \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n R} - \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJR} + \frac{R \sin \theta}{2EI_n} \\
& - \frac{R \sin \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n R} - \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJR}
\end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned}
YI_{36} = & \frac{R^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{R^2 \theta \cos \theta}{2GJ} + \frac{\gamma^2 \theta \cos \theta}{2EI_n} + \frac{3\gamma^2 \theta \cos \theta}{4GJ} - \frac{R^2 \sin \theta}{2EI_n} \\
& - \frac{R^2 \sin \theta}{2GJ} - \frac{\gamma^2 \sin \theta}{2EI_n} - \frac{3\gamma^2 \sin \theta}{4GJ}
\end{aligned} \tag{3.129}$$

$$YI_{41} = 0; \quad YI_{42} = 0; \quad YI_{43} = 0; \quad YI_{44} = \cos \theta; \quad YI_{45} = \sin \theta; \tag{3.130}$$

$$YI_{46} = -R \sin \theta; \tag{3.131}$$

$$YI_{51} = 0; \quad YI_{52} = 0; \quad YI_{53} = 0; \quad YI_{54} = -\sin \theta; \quad YI_{55} = \cos \theta; \tag{3.132}$$

$$YI_{56} = R(1 - \cos \theta); \tag{3.133}$$

$$YI_{61} = 0; \quad YI_{62} = 0; \quad YI_{63} = 0; \quad YI_{64} = 0; \quad YI_{65} = 0; \quad YI_{66} = 1; \tag{3.134}$$



4. EĞRİ EKSENLİ ÇUBUKLARIN DÜZLEM DIŞI DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ

4.1 Çubukların Düzlem Dışı Dinamik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemler

Yerel olmayan elastisite teorisinden elde edilen, çubuğun düzlemine dik statik davranışını ifade eden genel denklemleri, 3.82-3.87 denklemleri ile verilmektedir. Denklemlerde, kayma deformasyonu etkisi göz önüne alınmaktadır. D'Alembert prensibi yardımı ile çubuk teorisinin bu genel denklemleri kullanılarak çubuk titreşimlerini de incelemek mümkündür. Bu prensibe göre, maddesel bir sistemin hareketinden dolayı, bir t anında meydana gelen eylemsizlik kuvvetleri aktif dış kuvvetler olarak, sisteme etki eden gerçek kuvvetlerle birlikte göz önüne alınırsa; sistem bütün bu kuvvetlerin etkisi altında, t anındaki konumunda dengede bulunur. Çubuğa dışarıdan etkiyen yayılı kuvvet ve moment $\mathbf{q}$ ve $\mathbf{m}$ vektörleridir. Dinamik problemin incelenmesinde, bu dış yük vektörlerinin düzlem dışı bileşenlerinin kütle atalet kuvvetleri olarak alınması gerekmektedir (Tüfekci ve Arpacı, 1998);

$$q_b(\theta) = -\rho A(\theta) \frac{d^2 v(\theta)}{dt^2} = \rho A(\theta) \omega^2 v(\theta) \quad (4.1)$$

$$m_n(\theta) = -\rho I_n(\theta) \frac{d^2 \Omega_n(\theta)}{dt^2} = \rho I_n(\theta) \omega^2 \Omega_n(\theta) \quad (4.2)$$

$$m_t(\theta) = -\rho I_p(\theta) \frac{d^2 \Omega_t(\theta)}{dt^2} = \rho I_p(\theta) \omega^2 \Omega_t(\theta) \quad (4.3)$$

Bu denklemlerde ρ çubuk birim uzunluğunun ağırlığını, $A(\theta)$ kesit alanını, t zamanı, $I_n(\theta)$ normal eksene göre alan eylemsizlik momentini ve $I_p(\theta)$ kesit alanının polar eylemsizlik momentini ifade etmektedir. Bu ifadelerin türevleri aşağıda verilmiştir:

$$\frac{dq_b(\theta)}{d\theta} = \rho A(\theta) \omega^2 \frac{dv(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 v(\theta) \quad (4.4)$$

$$\frac{dm_n(\theta)}{d\theta} = \rho I_n(\theta) \omega^2 \frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dI_n(\theta)}{d\theta} \omega^2 \Omega_n(\theta) \quad (4.5)$$

$$\frac{dm_t(\theta)}{d\theta} = \rho I_p(\theta) \omega^2 \frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dI_p(\theta)}{d\theta} \omega^2 \Omega_t(\theta) \quad (4.6)$$

Yer değiştirme, dönme açısı ve kesit tesirlerinin zamanın harmonik fonsiyonları olduğu varsayımı yapılarak; denklem 4.4-4.6 ile verilen türev ifadeleri, yerel olmayan elastisitenin 3.82-3.87 ile verilen çubuk denklemlerinde yerine koyulursa hareket denklemleri elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{dv(\theta)}{d\theta} = & -R(\theta)\Omega_n(\theta) + \frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) F_b^{nl} \\ & + \frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \left(\rho A(\theta) \omega^2 v(\theta) \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right. \\ & \left. + (\rho A(\theta) \omega^2 \frac{dv(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 v(\theta)) R(\theta) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} = & -\Omega_t(\theta) \\ & + \frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \left(\left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) M_n(\theta) - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} F_b^{nl}(\theta) \right. \\ & + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta)^2 \rho A(\theta) \omega^2 v(\theta) \\ & - \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \rho I_p(\theta) \omega^2 \Omega_t(\theta) \\ & + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} \rho I_n(\theta) \omega^2 \Omega_n(\theta) \\ & \left. + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \left(\rho I_n(\theta) \omega^2 \frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho \frac{dI_n(\theta)}{d\theta} \omega^2 \Omega_n(\theta) \right) \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} = \Omega_n(\theta) \\
& + \frac{R(\theta)}{GJ(\theta)} \left(\left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R(\theta)^2} \right) M_t^{nl} \right. \\
& + \frac{\gamma^2}{2R(\theta)^2} R(\theta) \rho I_n(\theta) \omega^2 \Omega_n(\theta) \\
& + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} \rho I_p(\theta) \omega^2 \Omega_t(\theta) \\
& \left. + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} R(\theta) \left(\rho I_p(\theta) \omega^2 \frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} + \rho \frac{dI_p(\theta)}{d\theta} \omega^2 \Omega_t(\theta) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\frac{dM_n^{nl}(\theta)}{d\theta} = -M_t^{nl}(\theta) + R(\theta) F_b^{nl} - R(\theta) \rho I_n(\theta) \omega^2 \Omega_n(\theta) \tag{4.10}$$

$$\frac{dM_t^{nl}(\theta)}{d\theta} = M_n^{nl}(\theta) - R(\theta) \rho I_p(\theta) \omega^2 \Omega_t(\theta) \tag{4.11}$$

$$\frac{dF_b^{nl}(\theta)}{d\theta} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 v(\theta) \tag{4.12}$$

Eğri eksenli çubukların serbest titreşimlerini ifade eden denklemler birinci mertebeden altı adet lineer diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubukların dinamik davranışını ifade eden denklemlerdeki değişken katsayılar sebebiyle bu denklemlerin kapalı form genel çözümü zordur. Kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliğinin de dahil edildiği denklemler çözümü daha da zorlaştırmaktadır. Bu sebepten dolayı, birçok araştırmacı eğri eksenli çubukların doğal frekanslarının hesaplanmasında bahsedilen etkilerin ihmal edildiği teoriyi tercih etmiştir.

4.7-4.12 denklemleri düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
\frac{dv(\theta)}{d\theta} = & \frac{\left(\frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \rho A(\theta) \omega^2 \frac{dR(\theta)}{d\theta} + \frac{\gamma^2 k_b}{GA(\theta)} \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{k_b}{GA(\theta)} \gamma^2 \rho A(\theta) \omega^2 \right)} v(\theta) \\
& - \frac{R(\theta)}{\left(1 - \frac{k_b}{GA(\theta)} \gamma^2 \rho A(\theta) \omega^2 \right)} \Omega_n(\theta) \\
& + \frac{\left(\frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{k_b}{GA(\theta)} \gamma^2 \rho A(\theta) \omega^2 \right)} F_b^{nl}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Omega_n(\theta)}{d\theta} \\
= & \frac{\left(\frac{\gamma^2 R(\theta)}{EI_n(\theta)} \rho A(\theta) \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} v(\theta) \\
& + \frac{\frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta} \rho I_n(\theta) \omega^2 + R(\theta) \rho \frac{dI_n(\theta)}{d\theta} \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \Omega_n(\theta) \\
& - \frac{\left(1 + \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_p(\theta) \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \Omega_t(\theta) + \frac{\left(\frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} M_n(\theta) \\
& - \frac{\left(\frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} F_b^{nl}(\theta)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Omega_t(\theta)}{d\theta} \\
&= \frac{\left(\frac{\gamma^2}{2GJ(\theta)}\rho I_n(\theta)\omega^2 + 1\right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)}\rho I_p(\theta)\omega^2\right)}\Omega_n(\theta) \\
&+ \frac{\left(\frac{R(\theta)}{GJ(\theta)}\frac{\gamma^2}{R(\theta)^2}\frac{dR(\theta)}{d\theta}\rho I_p(\theta)\omega^2 + \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)}\rho\frac{dI_p(\theta)}{d\theta}\omega^2\right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)}\rho I_p(\theta)\omega^2\right)}\Omega_t(\theta) \\
&+ \frac{\frac{R(\theta)}{GJ(\theta)}\left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R(\theta)^2}\right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)}\rho I_p(\theta)\omega^2\right)}M_t^{nl}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\frac{dM_n^{nl}(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)\rho I_n(\theta)\omega^2\Omega_n(\theta) - M_t^{nl}(\theta) + R(\theta)F_b^{nl} \tag{4.16}$$

$$\frac{dM_t^{nl}(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)\rho I_p(\theta)\omega^2\Omega_t(\theta) + M_n^{nl}(\theta) \tag{4.17}$$

$$\frac{dF_b^{nl}(\theta)}{d\theta} = -R(\theta)\rho A(\theta)\omega^2 v(\theta) \tag{4.18}$$

Bu denklemler matrisel formda;

$$\frac{d\mathbf{y}(\theta)}{d\theta} = \mathbf{A}(\theta)\mathbf{y}(\theta) \tag{4.19}$$

olarak yazılabilir. Burada $\mathbf{A}(\theta)$ matrisi, katsayılar matrisidir.

$$\mathbf{A}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

Katsayılar matrisinin $\mathbf{A}(\theta)$ elemanları aşağıda verilmiştir:

$$A_{11} = \frac{\left(\frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \rho A(\theta) \omega^2 \frac{dR(\theta)}{d\theta} + \frac{\gamma^2 k_b}{GA(\theta)} \rho \frac{dA(\theta)}{d\theta} \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{k_b}{GA(\theta)} \gamma^2 \rho A(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.21)$$

$$A_{12} = - \frac{R(\theta)}{\left(1 - \frac{k_b}{GA(\theta)} \gamma^2 \rho A(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.23)$$

$$A_{16} = \frac{\left(\frac{k_b R(\theta)}{GA(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{k_b}{GA(\theta)} \gamma^2 \rho A(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.24)$$

$$A_{21} = \frac{\left(\frac{\gamma^2 R(\theta)}{EI_n(\theta)} \rho A(\theta) \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.25)$$

$$A_{22} = \frac{\frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \left(\frac{dR(\theta)}{d\theta} \rho I_n(\theta) \omega^2 + R(\theta) \rho \frac{dI_n(\theta)}{d\theta} \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.26)$$

$$A_{23} = - \frac{\left(1 + \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_p(\theta) \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.27)$$

$$A_{24} = \frac{\left(\frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.28)$$

$$A_{26} = - \frac{\left(\frac{R(\theta)}{EI_n(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{EI_n(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.29)$$

$$A_{32} = \frac{\left(\frac{\gamma^2}{2GJ(\theta)} \rho I_n(\theta) \omega^2 + 1 \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)} \rho I_p(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.30)$$

$$A_{33} = \frac{\left(\frac{R(\theta)}{GJ(\theta)} \frac{\gamma^2}{R(\theta)^2} \frac{dR(\theta)}{d\theta} \rho I_p(\theta) \omega^2 + \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)} \rho \frac{dI_p(\theta)}{d\theta} \omega^2 \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)} \rho I_p(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.31)$$

$$A_{35} = \frac{\frac{R(\theta)}{GJ(\theta)} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R(\theta)^2} \right)}{\left(1 - \frac{\gamma^2}{GJ(\theta)} \rho I_p(\theta) \omega^2 \right)} \quad (4.32)$$

$$A_{42} = -R(\theta) \rho I_n(\theta) \omega^2 \quad (4.33)$$

$$A_{45} = -1 \quad (4.34)$$

$$A_{46} = R(\theta) \quad (4.35)$$

$$A_{53} = -R(\theta) \rho I_p(\theta) \omega^2 \quad (4.36)$$

$$A_{54} = 1 \quad (4.37)$$

$$A_{61} = -R(\theta) \rho A(\theta) \omega^2 \quad (4.38)$$

şekindedir. Bu diferansiyel denklem takımının kesin analitik çözümü, katsayılar matrisinin sabit olması durumunda mevcuttur. Bu durum, sabit kesitli çember eksenli çubuğa karşı gelmektedir. Dolayısıyla, değişken terimler sabit alınarak denklemler aşağıdaki şekilde sadeleşirler:

$$A_{12} = -\frac{R}{\left(1 - \frac{k_b}{GA} \gamma^2 \rho A \omega^2 \right)} \quad (4.39)$$

$$A_{16} = \frac{\frac{k_b R}{GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right)}{1 - \frac{k_b}{GA} \gamma^2 \rho A \omega^2} \quad (4.40)$$

$$A_{21} = \frac{\frac{\gamma^2 R}{EI_n} \rho A \omega^2}{1 - \frac{\gamma^2}{EI_n} \rho I_n \omega^2} \quad (4.41)$$

$$A_{23} = -\frac{1 + \frac{\gamma^2}{EI_n} \rho I_p \omega^2}{1 - \frac{\gamma^2}{EI_n} \rho I_n \omega^2} \quad (4.42)$$

$$A_{24} = \frac{\frac{R}{EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right)}{1 - \frac{\gamma^2}{EI_n} \rho I_n \omega^2} \quad (4.43)$$

$$A_{32} = \frac{\frac{\gamma^2}{2GJ} \rho I_n \omega^2 + 1}{1 - \frac{\gamma^2}{GJ} \rho I_p \omega^2} \quad (4.44)$$

$$A_{35} = \frac{\frac{R}{GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right)}{1 - \frac{\gamma^2}{GJ} \rho I_p \omega^2} \quad (4.45)$$

$$A_{42} = -R \rho I_n \omega^2 \quad (4.46)$$

$$A_{45} = -1 \quad (4.47)$$

$$A_{46} = R \quad (4.48)$$

$$A_{53} = -R \rho I_p \omega^2 \quad (4.49)$$

$$A_{54} = 1 \quad (4.50)$$

$$A_{61} = -R \rho A \omega^2 \quad (4.51)$$

Bu matris yardımıyla, başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak, titreşim problemlerinin kesin analitik çözümü bulunur.

4.2 Çubukların Düzlem Dışı Dinamik Davranışını İfade Eden Yerel Olmayan Denklemlerin Çözümü

Yerel olmayan çubuk teorisiyle nano boyuttaki çubukların düzlem dışı sönümsüz serbest titreşimlerini ifade eden diferansiyel denklemler 4.13-4.18 denklemleriyle verilmiştir. Sabit kesitli çember eksenli çubuklar için sabit katsayılı bir diferansiyel denklem takımı olan denklemlerin kesin çözümü ise;

$$\mathbf{y}(\theta) = e^{A\theta} \mathbf{y}_0 \quad (4.52)$$

olarak bilinmektedir. Burada $\mathbf{A}$ katsayılar matrisinin elemanları (4.39)-(4.51) denklemleriyle verilmiştir. Bu çözüm, sınır şartları yardımıyla frekansları verecektir. Çubuğun her iki ucundaki mesnet şartına bağlı olarak ilgili denklemler aşağıdaki gibi yazılmalıdır:

$$\text{Ankastre uç için} \quad v_A = 0 \quad \Omega_n = 0 \quad \Omega_t = 0 \quad (4.53)$$

$$\text{Serbest uç için} \quad F_{bA} = 0 \quad M_{nA} = 0 \quad M_{tA} = 0 \quad (4.54)$$

Her iki uç için yazılan toplam altı adet sınır şartından başlangıç değerleri vektörünün altı bileşeni çözülecektir. Ancak, elde edilen denklemler homojen denklem takımı oluşturmaktadır. Bu homojen denklem takımının sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olması gerekmektedir. Buradan elde edilecek denklemin çözümü, frekans değerlerini verecektir.

Sürekli değişken eğriliğe ve kesite sahip çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerinin analizinde sabit kesitli çember eksenli çubuk için elde edilen kesin analitik çözüm yöntemi kullanılmıştır. Çubuk, sabit kesit alanlarına ve sabit eğriliklere sahip bölgelere ayrılarak modellenmiş ve her bölge, sabit kesitli çember eksenli çubuğun düzlem dışı titreşimlerini veren ifadeler ve çözüm yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Çubuk bölgelerinde, eğrilik yarıçapları ve alanları, bölgelerin sahip olduğu ortalama yarıçaplar ve alanlar alınarak belirlenmiş ve böylece, değişken kesitli ve değişken eğrilikli çubuk, birçok sabit kesitli çember eksenli parçanın birleşiminden oluşacak şekilde modellenmiştir. Bu bölgelerin her biri için, yazılan denklemler, başlangıç değerleri yöntemi ile çözülmektedir. Denklemler, kayma deformasyonunu ve dönme eylemsizliğini içermekte ve moment ve kuvvetlerin yerel olmayan etkilerini de gözönüne almaktadır.

Her eleman, sabit kesitli ve çember eksenli bir çubuk olarak düşünülmüş ve her bölge için kesin çözüm, başlangıç değerleri yöntemi ile elde edilmiştir. Elemanların sınır bölgelerindeki kinetik ve kinematik geçiş şartları yazılarak elde edilen denklem takımının çözümünden frekans değerleri elde edilmiştir.

Çubuk, sabit kesitli çember eksenli n parçaya bölündüğünde, her parçanın diferansiyel denklem takımı

$$\frac{d\mathbf{y}_i}{d\theta_i} = \mathbf{A}_i \mathbf{y}_i(\theta_i) ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.55)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mathbf{y}_i(\theta_i)$, 6 elemanlı değişkenler vektörünü ve $\mathbf{A}_i$, 6×6 elemanlı katsayılar matrisini ve i indisi de bölge sayısını ifade etmek üzere, her bölge için değişkenler vektörü,

$$\mathbf{y}_i(\theta) = \begin{bmatrix} v_i \\ \Omega_{ni} \\ \Omega_{ti} \\ M_{ni} \\ M_{ti} \\ F_{bi} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

şeklinde tanımlanabilir. Yukarıda elde edilen $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisi, kayma deformasyonu ve dönme eylemsizliği etkilerini, ayrıca, moment ve kuvvetlerin yerel olmayan etkilerini de göz önüne alarak elde edilen matristir. Etkiler ayrı ayrı ele alınarak da çözüm yapıp, doğal frekanslar elde edilebilir. $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda, denklem takımının kesin çözümü, aynı şekilde elde edilecektir. $\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisinin elemanları 4.39-4.51 denklemleri ile verilmektedir.

$\mathbf{A}_i$ katsayılar matrisinin tüm elemanlarının sabit sayılar olması durumunda, denklem takımının kesin çözümü;

$$\mathbf{y}_i(\theta_i) = e^{\mathbf{A}_i \theta_i} \mathbf{y}_i(\theta_{i0}) \quad (4.57)$$

olarak elde edilir. $\theta_{i0} = 0$ olarak belirlenen koordinat, sabit kesitli her çubuk elemanı için referans koordinatı olarak alınmaktadır. Burada, $\mathbf{y}_i(\theta_{i0})$, $\theta_i = \theta_{i0}$ koordinatındaki bilinen başlangıç değerleri vektörüdür. $e^{\mathbf{A}_i \theta_i}$ matematiksel olarak ifade edilebilmektedir. $6 * n$ adet bilinmeyen başlangıç değerleri, sabit kesitli her çubuk elemanının iki ucu için yazılan sınır şartları, θ_i koordinatları için yazılan geçiş ve denge şartları yardımıyla elde edilir.

Sınır ve geçiş şartlarından elde edilen $(6n)$ adet denklem homojen denklem takımı oluşturduğundan, sistemin sıfırdan farklı tek bir çözümünün olması, katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mümkündür.

Yukarıda ifade edilen çözüm yöntemi sabit kesitli her çubuk elemanına uygulanmaktadır. Çubuk eleman için çubuk açısı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$i. \text{ çubuk eleman için; } \theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i \quad (4.58)$$

İki uç nokta için sınır koşullarından gelen 6 adet eşitlik mevcuttur. Çubuk elemanların sınır bölgelerinde kinetik ve kinematik geçiş koşullarını sağlayan ifadeler aşağıda verilmektedir. Bu ifadeye göre, komşu çubuk elemanların sınır noktalarındaki büyüklükler birbirlerine eşit olmak zorundadır.

$$\mathbf{y}_i(\theta_i) = \mathbf{y}_{i+1}(\theta_i) \quad (4.59)$$

$$e^{A_i \theta_i} \mathbf{y}_i(\theta_{i0}) = e^{A_{i+1} \theta_i} \mathbf{y}_i(\theta_{(i+1)0}) \quad (4.60)$$

$$v(\theta_i) = v_{i+1}(\theta_i) \quad \Omega_{ni}(\theta_i) = \Omega_{n(i+1)}(\theta_i) \quad \Omega_{ti}(\theta_i) = \Omega_{t(i+1)}(\theta_i) \quad (4.61)$$

$$M_{ni}(\theta_i) = M_{n(i+1)}(\theta_i) \quad M_{ti}(\theta_i) = M_{t(i+1)}(\theta_i) \quad F_{bi}(\theta_i) = F_{b(i+1)}(\theta_i) \quad (4.62)$$

Sabit mesnet, ankastre mesnet ve serbest uç için sınır şartları aşağıdaki gibidir.

$$\text{Sabit mesnet: } v_i(\theta) = 0, \quad M_{ni}(\theta) = 0, \quad M_{ti}(\theta) = 0,$$

$$\text{Ankastre mesnet: } v_i(\theta) = 0, \quad \Omega_{ni}(\theta) = 0, \quad \Omega_{ti}(\theta) = 0,$$

$$\text{Serbest uç: } M_{ni}(\theta) = 0, \quad M_{ti}(\theta) = 0, \quad F_{bi}(\theta) = 0,$$

Eğri eksenli bir çubuk (n) adet elemana ayrılıp, bu denklemler her eleman için uygulanırsa, $[6 * (n - 1)]$ adet geçiş şartı yazılır. Böylece, sınır ve süreklilik şartlarından gelen $(6 * n)$ adet eşitlik, matris formunda ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \cdots & \mathbf{01} & \mathbf{01} \\ e^{A_1 \theta_1} & -e^{A_2 \theta_1} & \mathbf{02} & \cdots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\ \mathbf{02} & e^{A_2 \theta_2} & e^{A_2 \theta_1} & \cdots & \mathbf{02} & \mathbf{02} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{02} & \mathbf{02} & \mathbf{02} & \cdots & e^{A_{n-1} \theta_{n-1}} & -e^{A_n \theta_{n-1}} \\ \mathbf{01} & \mathbf{01} & \mathbf{01} & \cdots & \mathbf{01} & \mathbf{X}_n \end{bmatrix}_{6n \times 6n} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{01} \\ \mathbf{y}_{02} \\ \mathbf{y}_{03} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{0(n-1)} \\ \mathbf{y}_{0n} \end{bmatrix}_{6n \times 1} = [\mathbf{0}]_{6n \times 1} \quad (4.63)$$

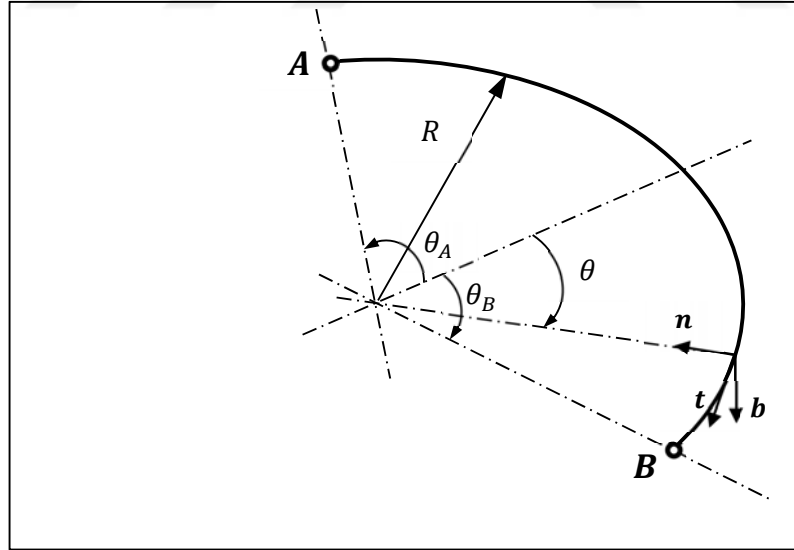
Burada $\mathbf{X}_1$ ve $\mathbf{X}_n$, 3×6 boyutunda eğri eksenli çubuğun A ve B ucundaki sınır şartlarından elde edilen matris; $\mathbf{01}$, 3×6 boyutunda ve $\mathbf{02}$, 6×6 boyutunda sıfır matrisleridir. $\mathbf{y}_{0i} = \mathbf{y}_i(\theta_{0i})$ olarak tanımlanırlar. Elde edilen $6 \times n$ eşitlik, homojen

denklem takımı oluşturduklarından, y_{0i} 'lerin sıfırdan farklı çözümleri ancak katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşit olması durumunda mevcuttur. Determinant ifadesi, ω doğal frekansının bir fonksiyonudur. Böylece doğal frekanslar elde edilir.



5. DÜZLEM DIŞI STATİK DAVRANIŞLA İLGİLİ ÖRNEKLER VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ

Bu bölümde eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik davranışıyla ilgili çeşitli problemlerin çözümleri verilerek yer değiştirme, dönme açısı ile iç kuvvet ve momentler hesaplanmıştır. Örneklerde, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır koőtulları; binormal doğrultuda tekil yük F_b , normal ve teğet doğrultuda tekil moment (M_n ve M_t), binormal doğrultuda deęiőkten yayılı yük $q_b(\theta)$ gibi farklı yükleme durumları incelenmiştir. Tekil yükler, ankastre-serbest mesnetli nano çubukta serbest uçtan etkimektedir. Bunun yanında, ankastre-ankastre mesnetli nano çubukta θ_K olarak belirtilen, rastgele seçilmiőt bir noktadan etkileyen tekil yüklerin statik davranışa etkisi de incelenmiştir. Son bölümde, binormal doğrultuda etkileyen deęiőkten yayılı yük $q_b(\theta)$ etkisindeki çember eksenli sürekli deęiőkten kesitli çubuk incelenmiştir.



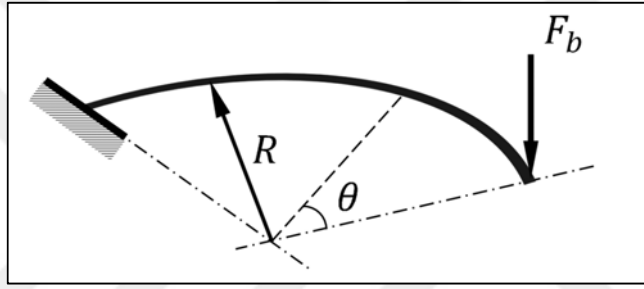
Şekil 5.1 : Düzlem dışı statik davranışın incelendiği çember eksenli nano çubuk.

Farklı yükleme ve sınır koőtullarının yanı sıra; boyut parametresi R/γ , çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı $\lambda = R \theta_T / \sqrt{I_n/A}$ gibi malzeme ve çubuk geometrisi ile ilgili parametrelerin de etkileri incelenmiştir. Çalışmalarda γ boyut parametresi 1.56 mm,

Poisson oranı $\nu = 0.3$, elastiklik modülü $E = 1 \text{ TPa}$ olarak alınmıştır. Bu değerler Hu ve diğ. (2009) çalışmasından alınmıştır.

Bu çalışmada incelenen çember eksenli nano çubuk Şekil 5.1’de verilmiştir. Bilinmeyen başlangıç değerleri, her uç için yazılacak üçer adet lineer denklemle çözülmektedir. Bundan sonra, çubuğun yer değiştirmesinin, dönme açısının, iç kuvvet ve momentlerinin kesin analitik ifadesini belirtmek mümkün olmaktadır.

5.1 Serbest Ucundan F_b ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk



Şekil 5.2 : $\pi/2$ açıklığı olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli serbest ucundan F_b kuvveti ile yüklü çubuk.

Bu örnekte serbest ucundan binormal doğrultuda etkiyen tekil F_b kuvveti ile yüklü, $\theta_T = \pi/2$ açıklığına sahip, çember eksenli sabit kesitli ankastre-serbest çubuk incelenmiştir (Şekil 5.2). Bu çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme ve dönme açısı değerleri, yerel olmayan elastisite teorisi ile:

$$v_o = \left(\frac{F_b k_b \pi R}{2GA} + \frac{F_b \pi R^3}{4EI_n} \right) \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) + \left(\frac{3F_b \pi R^3}{4GJ} - \frac{2F_b R^3}{GJ} \right) \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\Omega_{no} = -\frac{F_b R^2}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) - \frac{F_b R^2}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2} \right) \quad (5.2)$$

$$\Omega_{to} = -\frac{F_b \pi R^2}{4EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) + \left(\frac{F_b R^2}{GJ} - \frac{F_b \pi R^2}{4GJ} \right) \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2} \right) \quad (5.3)$$

olarak elde edilmiştir. Çubuk eksen boyunca, binormal doğrultuda yer değiştirme $v = v(\theta)$, normal eksen etrafındaki dönme açısı $\Omega_n = \Omega_n(\theta)$ ve teğet eksen etrafındaki dönme açısı $\Omega_t = \Omega_t(\theta)$ değerlerinin değişimi aşağıdaki gibi elde edilmiştir. Çubuk boyutunun büyüdüğü ($R \gg \gamma$) durumda, yani boyut parametresi γ/R 'nin küçük

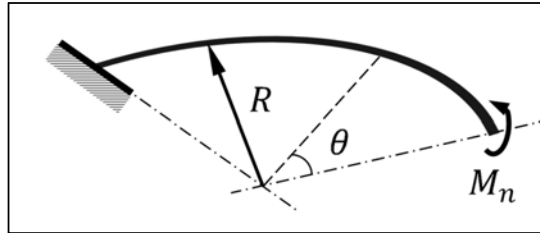
değerlerinde bu parametrenin bulunduğu terimlerin sonuca etkisi yok olmakta ve sonuçlar klasik çubuk teorisi ile aynı olmaktadır. Çubuk eksenini boyunca binormal doğrultuda yer değiştirme $v(\theta)$, normal eksen etrafında dönme açısı $\Omega_n(\theta)$ ve teğet eksen etrafında dönme açısı $\Omega_t(\theta)$ için hesaplanan analitik ifadeler aşağıda verilmiştir:

$$v(\theta) = \frac{F_b k_b R}{GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \frac{F_b R^3}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \cos \theta + \frac{F_b R^3}{GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2} \right) \left[\frac{\pi}{2} - 1 + \theta + \left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta + \sin \theta \right] \quad (5.4)$$

$$\Omega_n(\theta) = \frac{F_b R^2}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) \sin \theta - \cos \theta \right] + \frac{F_b R^2}{GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2} \right) \left[\frac{\cos \theta}{2} - 1 + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} - 1 \right) \sin \theta \right] \quad (5.5)$$

$$\Omega_t(\theta) = \frac{F_b \pi R^2}{4EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2} \right) (\theta - 1) \cos \theta + \frac{F_b R^2}{GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2} \right) \left(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \cos \theta \quad (5.6)$$

5.2 Serbest Ucundan M_n ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk



Şekil 5.3 : Açıklığı $\pi/2$ olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli serbest ucundan M_n momentinin etkidiği çubuk.

Bu örnekte serbest ucundan tekil M_n momentinin etkidiği, $\theta_T = \pi/2$ açıklığına sahip, çember eksenli sabit kesitli ankastre-serbest çubuk incelenmiştir (Şekil 5.3). Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme ve dönme açısı değerleri, yerel olmayan elastisite teorisi ile:

$$v_0 = -\frac{M_n R^2}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) - \frac{M_n R^2}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \quad (5.7)$$

$$\Omega_{n0} = \frac{M_n \pi R}{4EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) + \frac{M_n \pi R}{4GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \quad (5.8)$$

$$\Omega_{t0} = \frac{M_n R}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) - \frac{M_n R}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \quad (5.9)$$

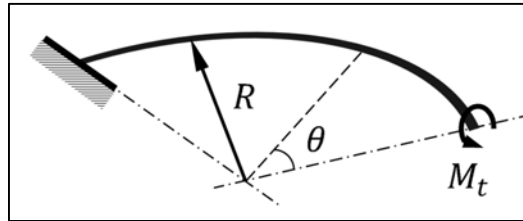
olarak elde edilmiştir. Çubuk eksenini boyunca binormal doğrultuda yer değiştirme $v(\theta)$, normal eksen etrafında dönme açısı $\Omega_n(\theta)$ ve teğet eksen etrafında dönme açısı $\Omega_t(\theta)$ için hesaplanan analitik ifadeler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} v(\theta) = & -\frac{M_n R^2}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left[\cos \theta + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \theta \right] \\ & - \frac{M_n R^2}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left[\cos \theta + \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \Omega_n(\theta) = & \frac{M_n R}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \theta + \frac{M_n R}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \theta \\ & - \frac{F_n k_n R}{2GA} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) [(\theta + \pi) \cos \theta + \sin \theta] \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \Omega_t(\theta) = & \frac{M_n R}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \theta + \cos \theta \right] \cos \theta \\ & + \frac{M_n R}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left[\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \sin \theta - \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

5.3 Serbest Ucundan M_t ile Yüklü, $\pi/2$ Açıklığına Sahip, Çember Eksenli Sabit Kesitli Ankastre-Serbest Çubuk



Şekil 5.4 : Açıklığı π olan, çember eksenli sabit kesitli ve ankastre-serbest mesnetli serbest ucundan M_t momentinin etkidiği çubuk.

Bu örnekte serbest ucundan tekil M_t momentinin etkidiği, $\theta_T = \pi/2$ açıklığına sahip, çember eksenli sabit kesitli ankastre-serbest çubuk incelenmiştir (Şekil 5.4). Çubuğun serbest ucundaki yer değiştirme ve dönme açısı değerleri, yerel olmayan elastisite teorisi ile:

$$v_0 = -\frac{M_t \pi R^2}{4EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) + \frac{M_t R^2}{GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.13)$$

$$\Omega_{n0} = \frac{M_t R}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) - \frac{M_t R}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \quad (5.14)$$

$$\Omega_{t0} = \frac{M_t \pi R}{4EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) + \frac{M_t \pi R}{4GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \quad (5.15)$$

olarak elde edilmiştir. Çubuk eksenli boyunca binormal doğrultuda yer değiştirme $v(\theta)$, normal eksen etrafında dönme açısı $\Omega_n(\theta)$ ve teğet eksen etrafında dönme açısı $\Omega_t(\theta)$ için hesaplanan analitik ifadeler aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} v(\theta) = & -\frac{M_t R^2}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \theta \\ & + \frac{M_t R^2}{GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left[1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta + \sin \theta\right] \end{aligned} \quad (5.16)$$

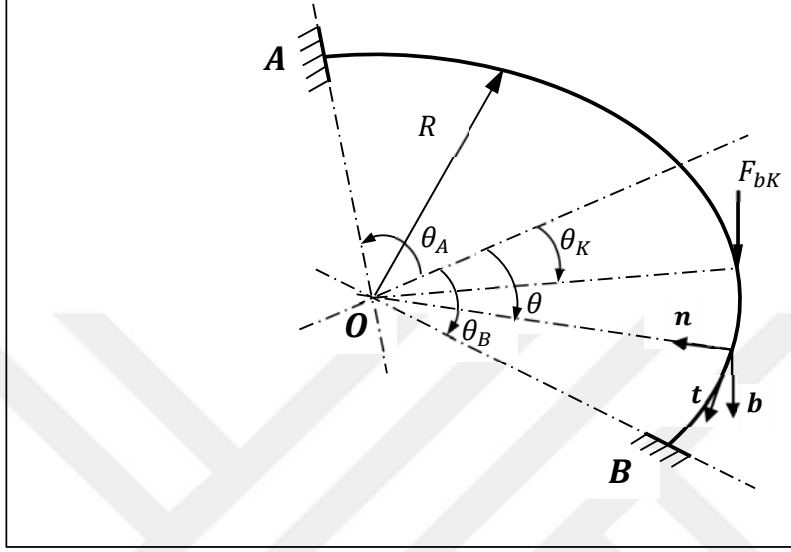
$$\begin{aligned} \Omega_n(\theta) = & \frac{M_t R}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left(\cos \theta - \frac{\pi}{2} \sin \theta - \theta \sin \theta\right) \\ & - \frac{M_t R}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left(\cos \theta + \frac{\pi}{2} \sin \theta + \theta \sin \theta\right) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\Omega_t(\theta) = \frac{M_t R}{2EI_n} \left(1 + \frac{\gamma^2}{R^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \theta + \frac{M_t R}{2GJ} \left(1 + \frac{3\gamma^2}{2R^2}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos \theta \quad (5.18)$$

5.4 Simetrik Olmayan Yükleme Durumları

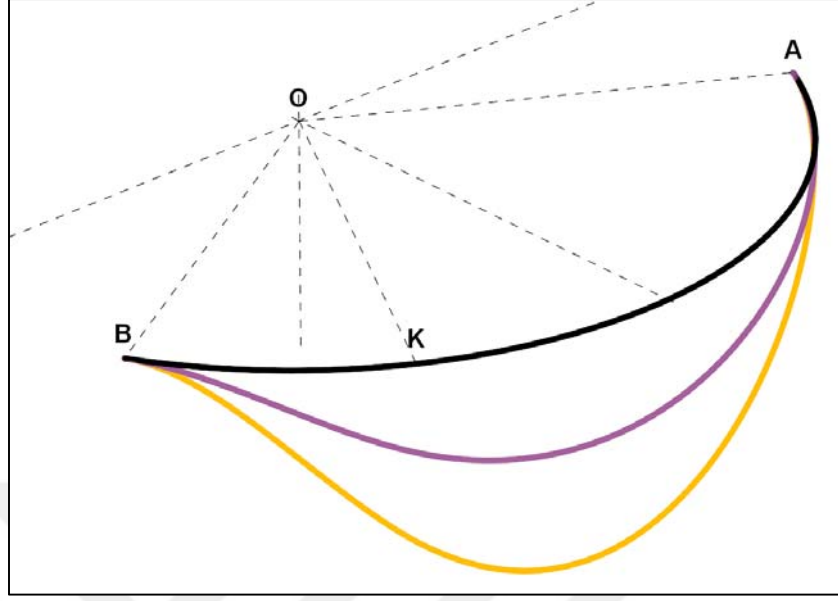
Bu kısımda, simetrik olmayan sınır şartlarına sahip çubukların orta noktalarından farklı konumlarına etkiyen tekil yükleme durumları incelenmiştir. Bu amaçla, ankastre-ankastre mesnetli sabit kesitli çember eksenli Şekil 5.5'te görülen çubuğun, $\theta_K = 30^\circ$ koordinatından F_{bK} tekil kuvveti ile yüklendiği durum incelenmiştir. Çubuk $\theta_T = 2\pi/3$ açıklığına, $\lambda = 100$ narinlik oranına, $R/\gamma = 1$ küçük boyut parametresine

sahiptir. Bu çubukta ortaya çıkan yer değiştirmeler, dönme açıları ve kesit tesirleri; tüm etkilerin gözönüne alındığı yerel olmayan teorinin verdiği sonuçlar ve tüm etkilerin dahil edildiği yerel sonuçlarla birlikte aşağıdaki diyagramlarda verilmiştir.



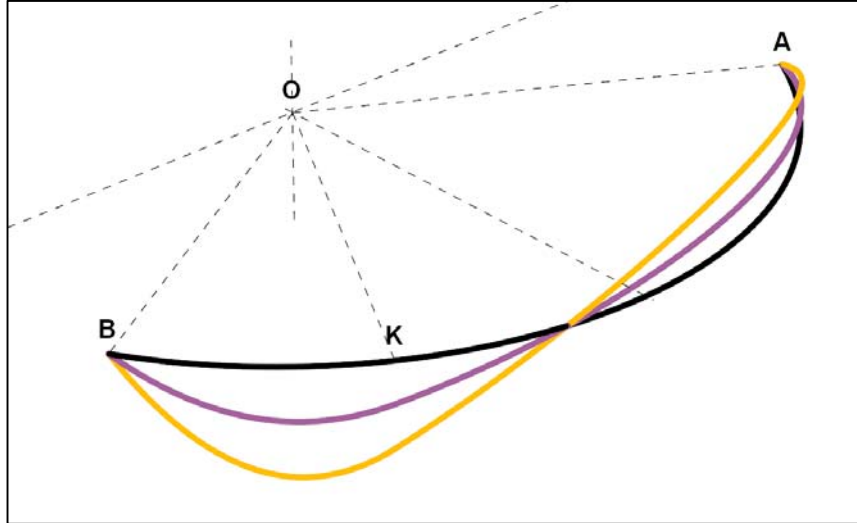
Şekil 5.5 : θ_K koordinatından F_{bK} tekil yükü etkileyen ve $\theta_T = 120^\circ$ açıklığı olan, sabit kesitli çember eksenli nano çubuk.

Şekil 5.6’da tüm etkilerin gözönüne alındığı yerel olmayan teoriden ve tüm etkilerin dahil edildiği yerel teoriden elde edilen yerdeğiştirme değerleri çubuğun şekil değiştirmemiş eksen eğrisi üzerine çizilmiştir. Yerel olmayan teoriden elde edilen sonuçlar, klasik teori ile elde edilen sonuçların yaklaşık olarak iki katıdır. R/γ değeri büyüdükçe bu farkın azaldığı görülmüştür.

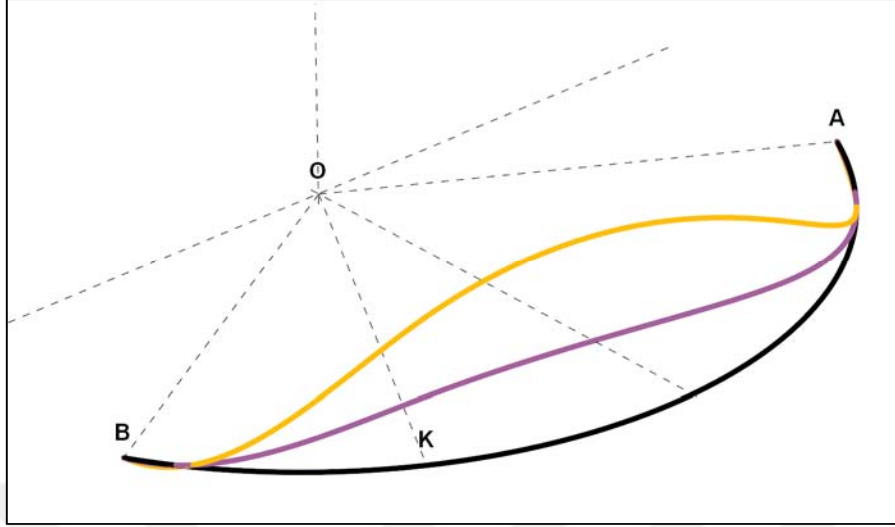


Şekil 5.6 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen yer değiştirme eğrileri
(— :Şekil değiştirmemiş çubuk eksen, — : Yerel olmayan elastisite teorisi sonuçları, — : Klasik elastisite teorisi sonuçları)

Şekil 5.8 ve Şekil 5.9’da kesitin sırasıyla normal eksen etrafında (Ω_n) ve teğet eksen etrafında (Ω_t) dönme açısının yerel olmayan teori ve klasik çubuk teorisi ile hesaplandığı diyagram verilmiştir. Bu iki farklı yaklaşım ile elde edilen sonuçların birbirinden önemli ölçüde farklı olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 5.7 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_n) eğrileri.
(— :Şekil değiştirmemiş çubuk eksen, — : Yerel olmayan elastisite teorisi sonuçları, — : Klasik elastisite teorisi sonuçları)



Şekil 5.8 : Yerel ve yerel olmayan teoriyle elde edilen dönme açısı (Ω_t) eğrileri.
 (— :Şekil değiştirmemiş çubuk eksen, — : Yerel olmayan elastisite teorisi sonuçları, — : Klasik elastisite teorisi sonuçları)

Yer değiştirme ve kesitin dönme açısına ait diyagramlar incelendiğinde genel olarak yerel olmayan teoriden elde edilen sonuçların klasik teori ile elde edilen sonuçlara göre daha büyük olduğu görülmüştür. Bu sonuç McFarland ve Colton'ın (2005) deneysel çalışması ve Reddy'nin (2007) teorik çalışması ile uyumludur. Bu iki yaklaşım ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark, R/γ küçük boyut parametresinin büyümesiyle azalmaktadır. Bu sebeple, eğri eksenli nano çubukların yer değiştirme ve kesin dönme açısının hesaplanmasında boyut parametresinin önemi anlaşılmaktadır.

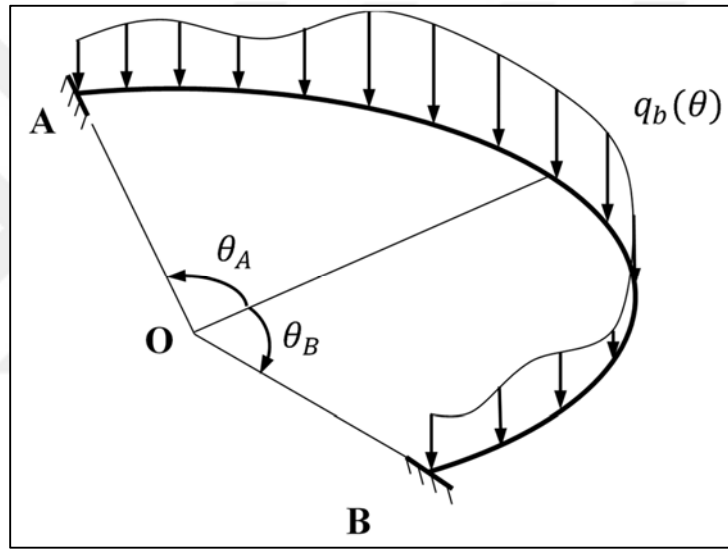
Kesit tesirleri, yani normal doğrultudaki eğilme momenti M_n , teğet doğrultudaki burulma momenti M_t ve binormal doğrultudaki kesme kuvveti F_b de klasik ve yerel olmayan teori ile incelenmiş olup sonuçlar arasındaki farkın çok küçük olduğu görülmüştür. Küçük boyut parametresi R/γ 'nın değeri büyüdükçe hemen hemen üst üste çıkan eğriler elde edilmektedir. Sonuçlar arasındaki farkın az olması nedeniyle ilgili diyagramlar burada verilmemiştir.

5.5 Değişken q_b Yayılı Yükleyle Yüklü Değişken Kesitli Çember Eksenli

Ankastre-Ankastre Çubuk

Tezin bu kısmında, daha genel bir durum için elde edilmiş olan, değişken yayılı yüklerin etkidiği çember eksenli ve değişken kesitli çubuklara ait çözüm ifadeleri kullanılarak, yerdeğiştirme, normal eksen etrafında dönme açısı Ω_n^{nl} , teğet eksen

etrafında dönme açısı Ω_t^{nl} ve kesit tesirleri (M_n^{nl} , M_t^{nl} , F_b^{nl}) diyagramları klasik teoriden elde edilen sonuçlarla birlikte verilmiştir. Elde edilen veriler incelendiğinde yerel olmayan teoriyle hesaplanan yerdeğiştirme ve dönme açısı değerlerinin klasik teori ile hesaplanan yerdeğiştirme ve dönme açısı değerlerine göre daha büyük olduğu görülmüştür. Bu durum literatürdeki ilgili çalışmalarla uyumludur (Reddy, 2007; Patti ve diğ., 2015). Bu örnekte incelenen, sürekli değişken yayılı yükün etkisinde, değişken kesitli, çember eksenli ve iki ucu ankastre mesnetli nano çubuk Şekil 5.9'da verilmiştir. Çubuğun açıklığı $\theta_T = 120^\circ$, narinlik oranı $\lambda = 100$ ve küçük boyut parametresi $R/\gamma = 1$ olarak belirlenmiştir.



Şekil 5.9 : Binormal eksen doğrultusunda değişken $q_b(\theta)$ yayılı yüküyle yüklü çember eksenli ankastre-ankastre çubuk.

Çubuk, normal doğrultudaki yatay uzunluğu $b(\theta)$ ve binormal doğrultudaki düşey uzunluğu $h(\theta)$ olan ve bu büyüklüklerin aşağıda verildiği dikdörtgen kesite sahiptir:

$$b(\theta) = \frac{b_0}{\cos \theta} ; \quad h(\theta) = h_0 \quad (5.19)$$

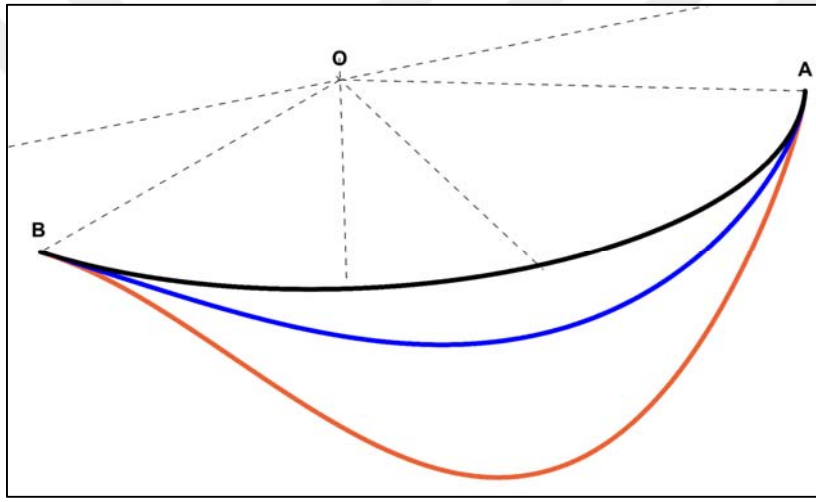
Bu dikdörtgen kesit için burulma sabiti $J(\theta)$ aşağıda verilmiştir (Timoshenko & Goodier, 1951).

$$b \geq h \quad \text{için} \quad J(\theta) = \frac{b(\theta)h(\theta)^3}{3} \left[1 - \frac{0.63b(\theta)}{h(\theta)} \left(1 - \frac{b(\theta)^4}{12h(\theta)^4} \right) \right] \quad (5.20)$$

Yayılı yükün dağılımı ise;

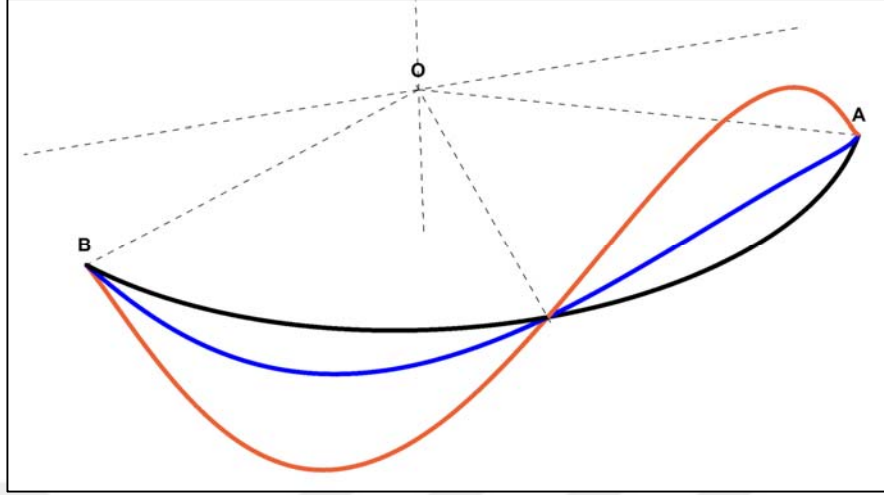
$$-\frac{\theta_T}{2} \leq \theta \leq \frac{\theta_T}{2} \quad \text{için} \quad q_b(\theta) = q_0 \left[\left(\frac{\theta}{\theta_T/2} \right)^2 - 1 \right] \quad (5.21)$$

olarak belirlenmiştir. Yayılı yük ifadesindeki sabit bileşen q_0 birim yük olarak seçilmiştir. Bu durumda ortaya çıkan yer değiştirme, dönme açısı, moment, teğet ve normal doğrultulardaki kuvvetler, hem yerel hem de yerel olmayan teorilerle hesaplanmış ve ilgili diyagramlar verilmiştir. Şekil 5.10'da değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış yer değiştirme diyagramı görülmektedir.



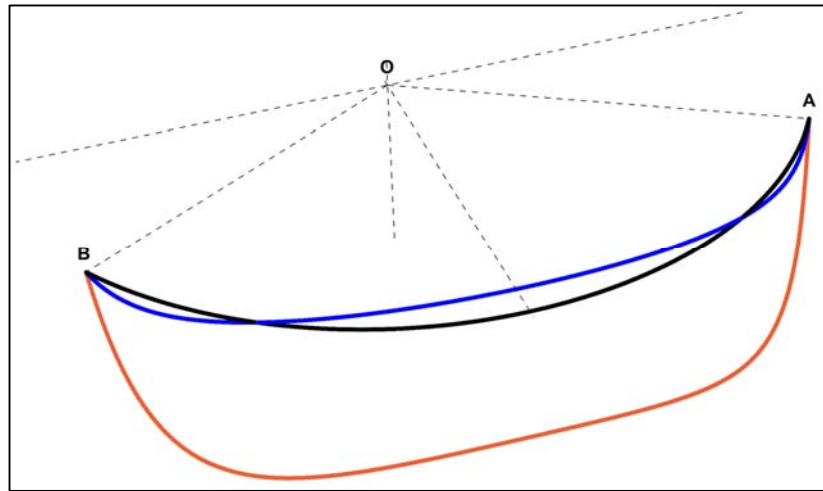
Şekil 5.10 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış yer değiştirme diyagramı.

Küçük boyut parametresi R/γ 'nın büyük değerlerinde sonuçlar arasındaki fark azalmaktadır. Şekil 5.11'de, kesitin normal eksen etrafındaki dönme açısının (Ω_n^{nl} ve Ω_n^l) diyagramı verilmiştir. Yerel olmayan teorinin sonucu kırmızı renkli sürekli çizgiyle, yerel teorininki ise mavi renkli sürekli çizgiyle gösterilmektedir. Sonuçların yine birbirinden oldukça farklı olduğu görülmektedir. Yine, küçük boyut parametresi R/γ 'nın büyük değerlerinde sonuçlar arasındaki fark azalmaktadır.

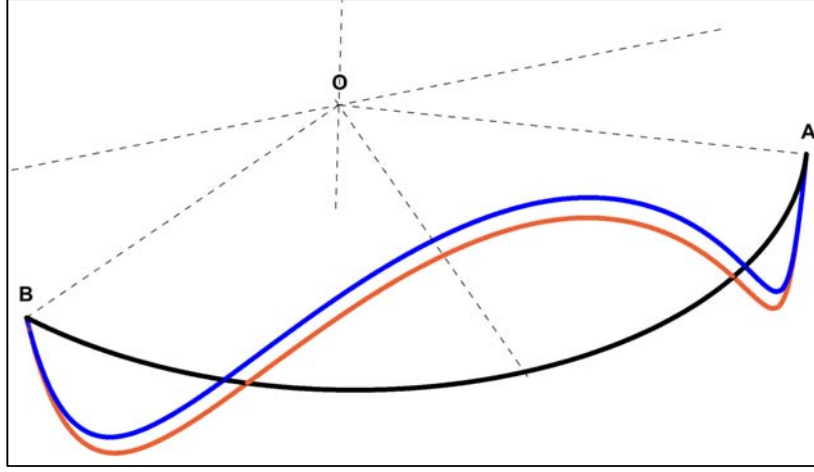


Şekil 5.11 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış normal doğrultudaki dönme açısı (Ω_n) diyagramı.

Şekil 5.12’de, küçük boyut parametresi $R/\gamma = 1$ olan çubuğun yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış dönme açısı diyagramı (Ω_t^{nl} ve Ω_t^l) görülmektedir. Şekil 5.13’te, küçük boyut parametresi $R/\gamma = 7$ olan çubuğun yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış dönme açısı diyagramı (Ω_t^{nl} ve Ω_t^l) görülmektedir. Şekil 5.12’de eğriler benzer görünmemektedir. Yerel olmayan teorinin sonucunun, yerel teorinin sonucundan oldukça farklı olmasının yanı sıra, yerel teoriden elde edilen dönme açısı diyagramının işaret değiştirdiği, yerel olmayan teoride ise hep aynı işaretli olduğu görülmektedir. Fakat, $R/\gamma = 7$ durumunda (Şekil 5.13) farklı iki teoriden elde edilen sonuçlar arasındaki form benzerliği artmakta ve sonuçlar arasındaki fark azalmaktadır.

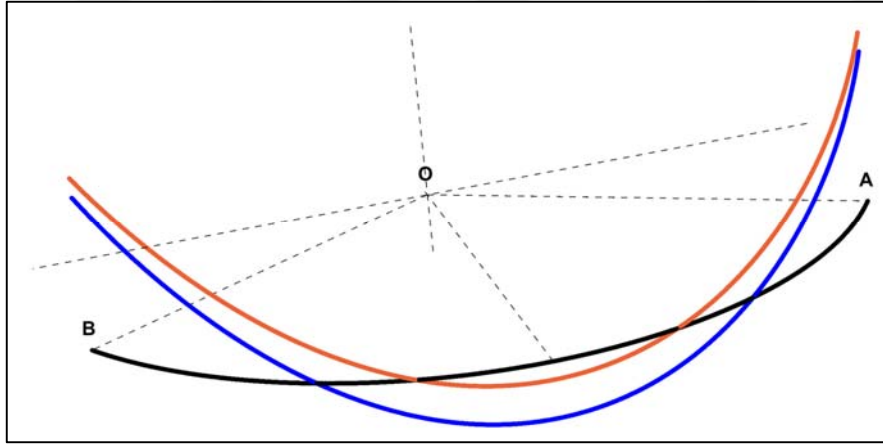


Şekil 5.12 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış teğet doğrultudaki dönme açısı (Ω_t) diyagramı ($R/\gamma = 1$).

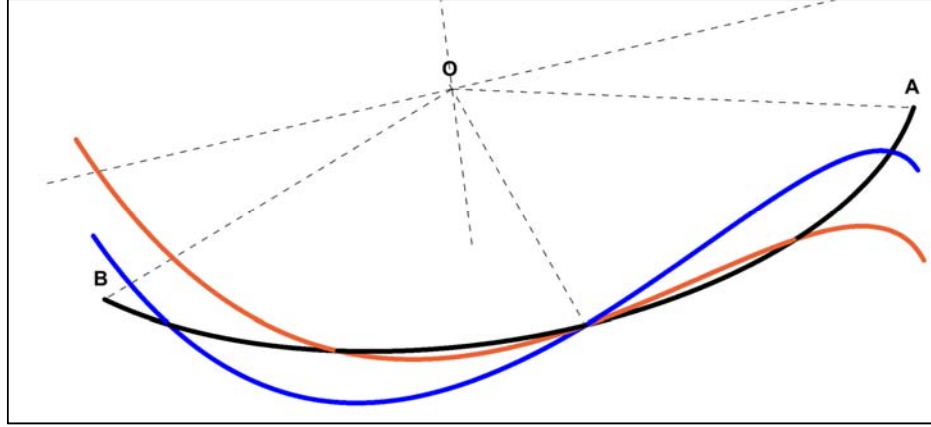


Şekil 5.13 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış teğet doğrultudaki dönme açısı (Ω_t) diyagramı ($R/\gamma = 7$).

Normal eksen doğrultusundaki eğilme momenti M_n^{nl} ve M_n^l ve teğet eksen etrafındaki burulma momenti M_t^{nl} ve M_t^l sırasıyla Şekil 5.14 ve Şekil 5.15'te verilmiştir. Klasik ve yerel olmayan teoriden elde edilen sonuçlar her iki diyagramda da oldukça farklıdır.

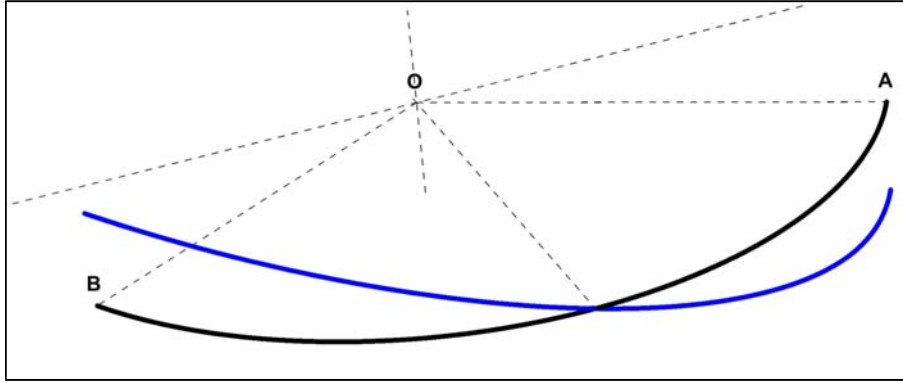


Şekil 5.14 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış normal eksen eğilme momenti (M_n) diyagramı.



Şekil 5.15 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış teğet ekseninde burulma momenti (M_t) diyagramı.

Şekil 5.16'da, çubuğun, yerel ve yerel olmayan teorilerle hesaplanmış binormal doğrultudaki kesme kuvveti F_b^{nl} ve F_b^l diyagramı verilmiştir. Yerel olmayan teori ile elde edilen sonuçların klasik (yerel) teori ile elde edilen sonuçlar ile aynı olduğu gözlenmiştir. Kesme kuvveti sadece dış kuvvete bağlıdır ve küçük boyut parametresinin, narinlik oranının veya çubuk açıklığının bir etkisi yoktur.



Şekil 5.16 : Değişken q_b yayılı yükü etkisindeki, değişken kesitli çember eksenli çubuğun yerel olmayan teori (mavi renk) ve klasik teori (kırmızı renk) ile hesaplanmış binormal doğrultuda kesme kuvveti (F_b) diyagramı.

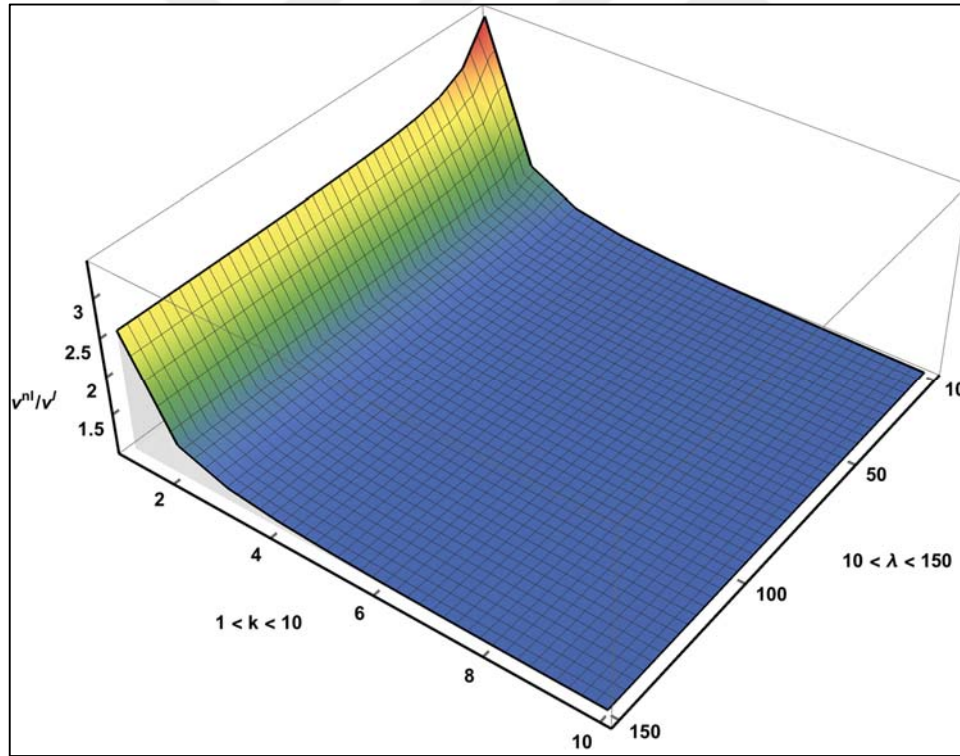
5.6 Farklı Parametrelerin Çember Eksenli Nano Çubukların Statik Davranışına Etkisi

Bu bölümde, bir önceki bölümde incelenen çember eksenli değişken kesitli her iki ucu ankastre mesnetli ve değişken yük etkisindeki çubuğun statik davranışında küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$, çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranının λ etkileri araştırılmıştır. Sınır koşulları ve yükleme tipi Bölüm 5.5'te incelenen çubukla aynıdır. Bu bölümdeki

örneklerde, θ_T çubuk açıklığı 10° ile 180° arasında değişmekte olup $k = R/\gamma$ küçük boyut parametresi 1 ile 10 arasında değişmektedir. Diğer bir parametre, $\lambda = R\theta_T/\sqrt{I_n/A}$ narinlik oranı 10 ile 150 arasındaki değerleri almaktadır. Klasik (yerel) teori ile yerel olmayan teori ile hesaplanan yerdeğiştirme değerlerinin oranı (v^{nl}/v^l), dönme açıların oranı (Ω_n^{nl}/Ω_n^l , Ω_t^{nl}/Ω_t^l) ve momentler (M_n^{nl}/M_n^l , M_t^{nl}/M_t^l) bu parametrelerin değişimine göre hesaplanmış ve sonuçlar ilgili grafiklerde verilmiştir.

5.6.1 Küçük boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ 'nın etkisi

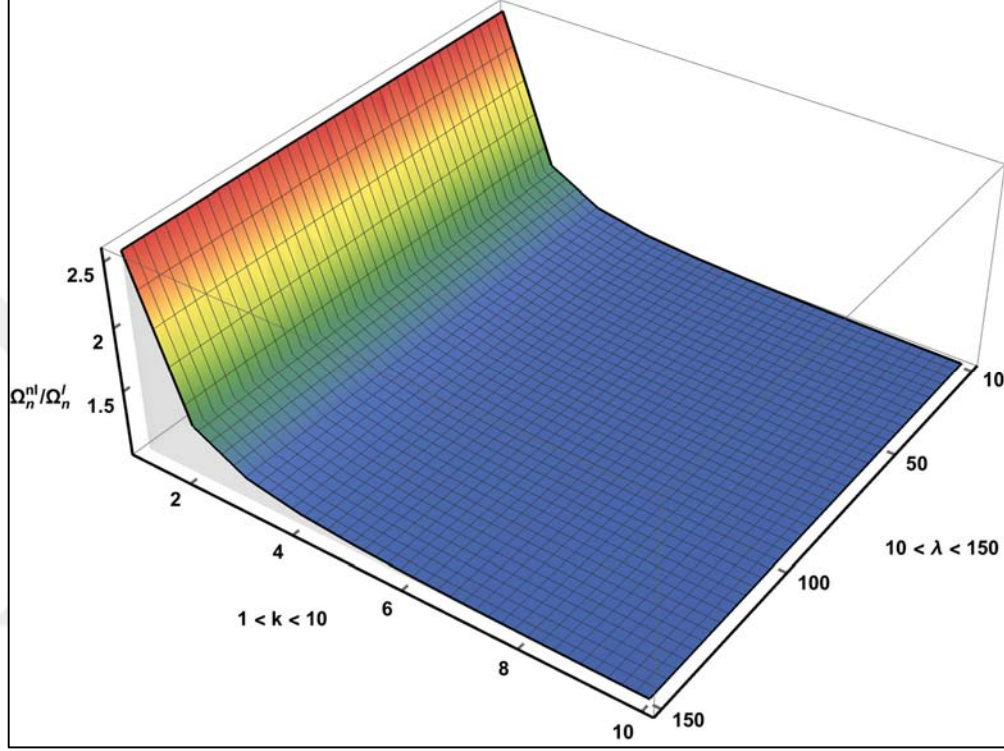
Bu bölümde, çubuk açıklığı $\theta_T = 120^\circ$ olup küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranının λ etkileri araştırılmıştır. Şekil 5.17'de küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranının λ değişimine karşılık çubuğun orta noktasına ait yerel olmayan teori ve yerel teori ile elde edilen yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l çizilmiştir.



Şekil 5.17 : Küçük boyut etkisi (k) ve narinlik oranının (λ) yerdeğiştirmeye (v^{nl}/v^l) etkisi.

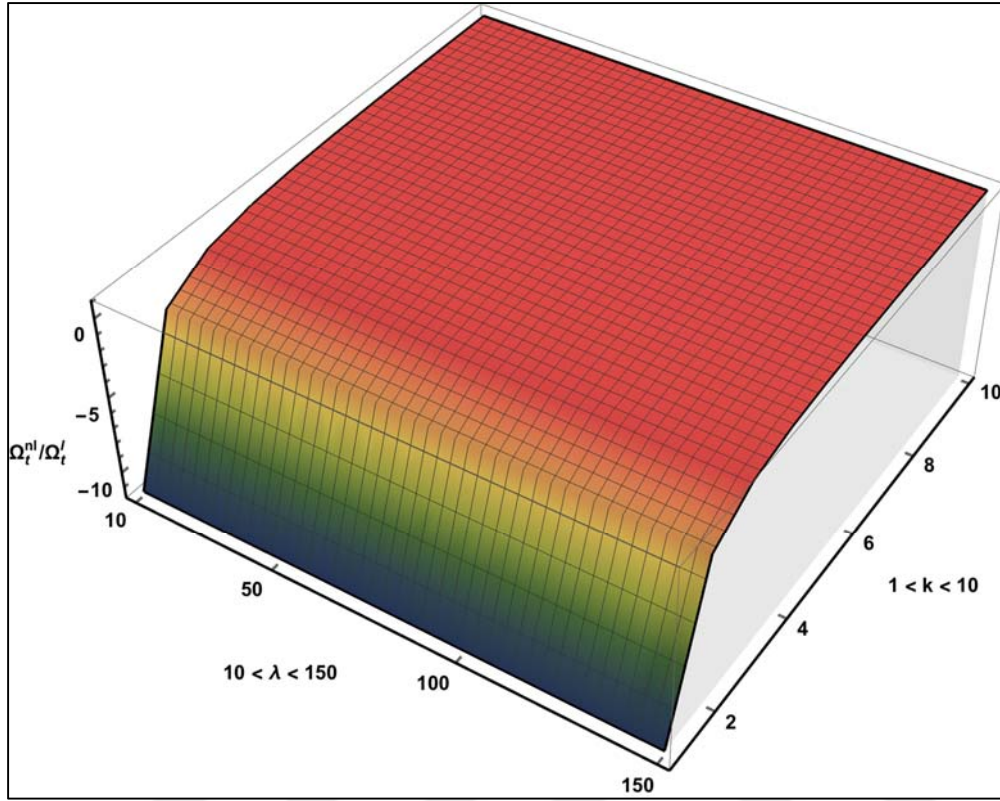
Diyagramdan, küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ 'nın büyük değerlerinde narinlik oranı λ ile yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l sonuçlarında büyük bir değişim olmadığı görülmüştür. Fakat, küçük boyut parametresinin küçük değerlerinde narinlik oranı ile yerdeğiştirmeler önemli ölçüde değişmektedir. Herhangi bir narinlik oranı λ için,

yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l , azalan R/γ değerleriyle artmaktadır. Bu artış, çubuk kısa ve kalın ise (küçük narinlik oranı) daha belirgindir. Çubuk açıklığı θ_T 'nin küçük değerlerinde diyagram yine benzer şekildedir fakat azalan R/γ karşısında v^{nl}/v^l oranındaki değişiklikler daha büyüktür.

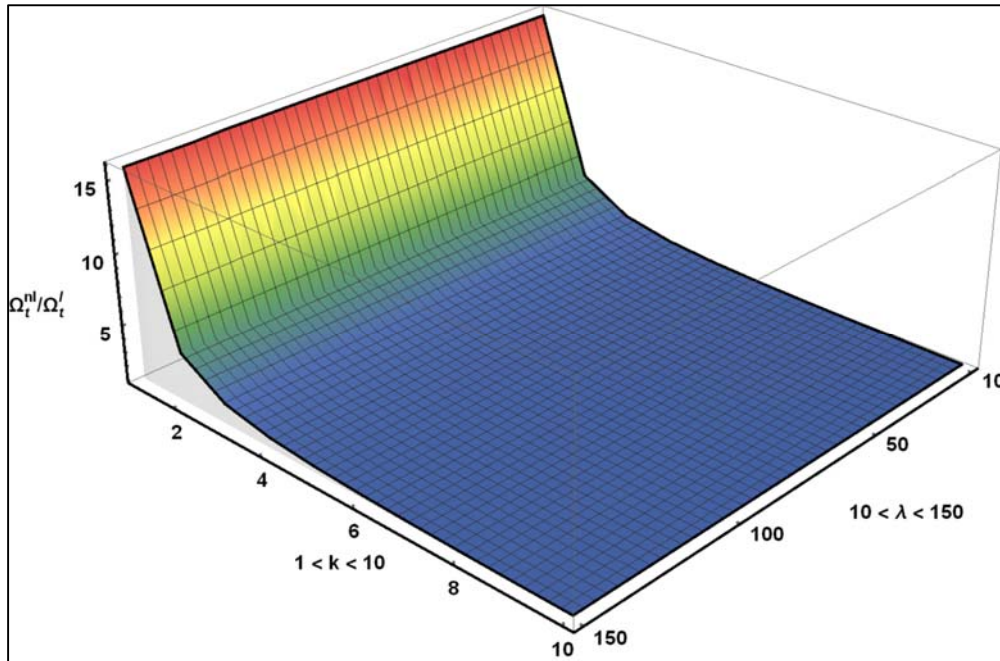


Şekil 5.18 : Küçük boyut etkisi (k) ve narinlik oranının (λ) kesitin normal eksen etrafında dönme açısına (Ω_n^{nl}/Ω_n^l) etkisi.

Şekil 5.18’de küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ ’nın değişimine karşılık çubuğun orta noktasındaki kesitin normal eksen etrafında dönme açısı Ω_n^{nl}/Ω_n^l ’nin değişim grafiği verilmiştir. Dönme açısı oranı Ω_n^{nl}/Ω_n^l narinlik oranı λ ’nın değişmesinden etkilenmemektedir. Beklenildiği üzere, küçük boyut parametresinin azalan değerlerinde Ω_n^{nl}/Ω_n^l oranı önemli ölçüde artmaktadır. Çubuk açıklığı θ_T ’nin azalması ile Ω_n^{nl}/Ω_n^l oranı azalmaktadır.



(a) Orta nokta ($\theta = 0$)



(b) $\theta = 7\theta_T/16$

Şekil 5.19 : Küçük boyut parametresi (k) ve narinlik oranının (λ) kesitin teğet eksen etrafındaki dönme açısı oranına (Ω_t^{nl}/Ω_t^l) etkisi

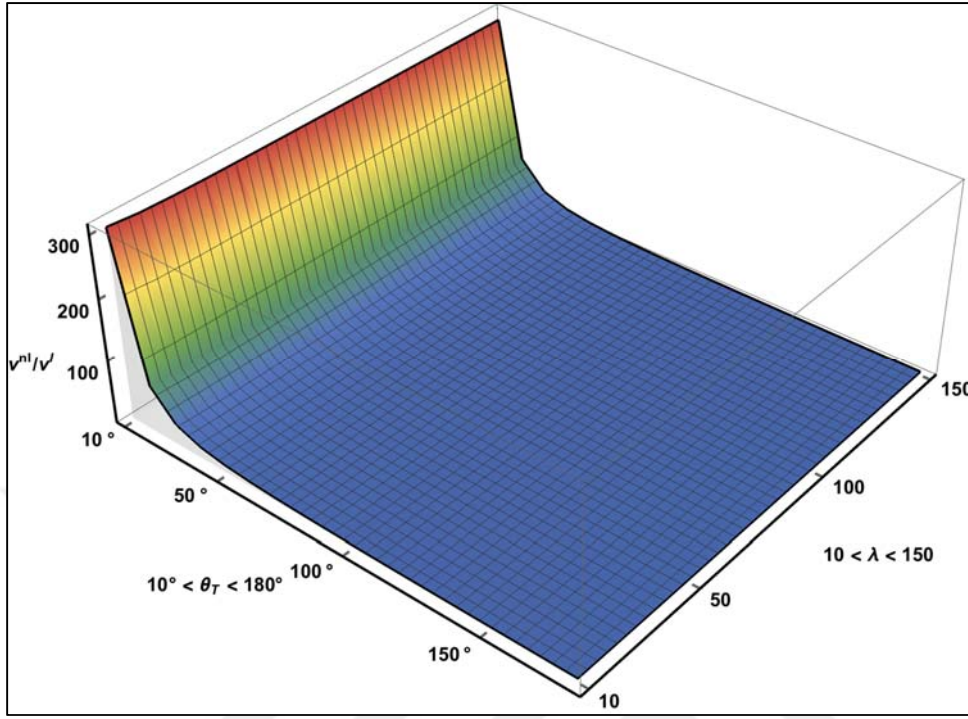
Şekil 5.19a’da küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ ’nın çubuğun orta noktasındaki kesitin teğet eksen etrafında dönme açısı Ω_t^{nl}/Ω_t^l ’nin değişim grafiği verilmiştir. Yerel olmayan teori ve yerel teori ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark artan küçük boyut parametresinin azalmasıyla artmaktadır. Şekil 5.12’den hatırlanacağı üzere, $k = R/\gamma$ ’nin düşük değerlerinde çubuğun orta noktasına ait dönme açısı Ω_t^{nl} değeri işaret değiştirmektedir. Eğer orta nokta yerine mesnetlere yakın bir noktada inceleme yapılırsa Şekil 5.19b’deki sonuç elde edilmektedir.

Normal eksen ve teğet eksen eğilme momenti M_n^{nl}/M_n^l ve M_t^{nl}/M_t^l sonuçları, teğet eksen etrafında dönme açısı oranı Ω_t^{nl}/Ω_t^l sonuçları ile benzer karakterdedir. Kesme kuvveti oranı F_b^{nl}/F_b^l sabittir ve bu sebepten dolayı ilgili grafikler burada verilmemiştir.

5.6.2 Narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T ’nin etkisi

Bu örnekte narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T ’nin etkileri incelenmiştir. Küçük boyut parametresi $R/\gamma = 1$ olarak alınmıştır. Şekil 5.20’de narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T ’nin değişimine karşılık çubuğun orta noktasına ait yerel olmayan teori ve yerel teori ile elde edilen yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l çizilmiştir. v^{nl}/v^l oranının azalan çubuk açıklığı θ_T ile arttığı gözlenmiştir. Özellikle $\theta_T < 60^\circ$ için önemli ölçüde değişim mevcuttur. Bunun yanında, düşük narinlik oranı λ değerlerinde, yani kısa ve kalın çubuklar için, v^{nl}/v^l oranı büyümektedir. Bu artış, çubuk açıklığı θ_T ’nin küçük değerlerinde daha fazladır.

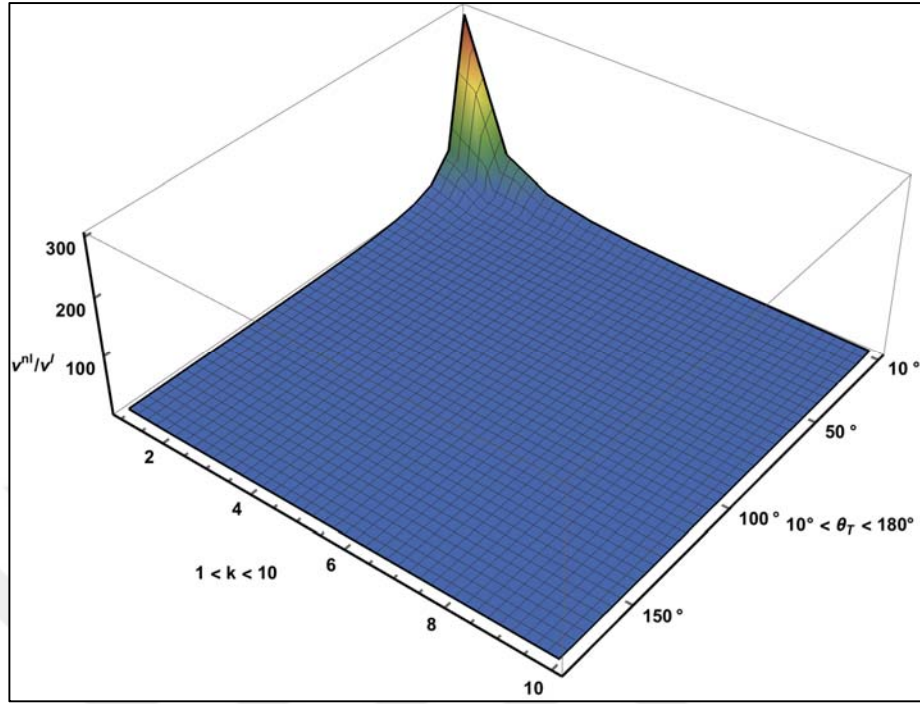
Bunun yanında, normal eksen ve teğet eksen etrafında dönme açısı Ω_n^{nl}/Ω_n^l ve Ω_t^{nl}/Ω_t^l , normal eksen ve teğet eksen eğilme momenti M_n^{nl}/M_n^l ve M_t^{nl}/M_t^l ile ilgili hesaplamalarda da narinlik oranı λ ve çubuk açıklığı θ_T ’nin etkileri incelenmiştir. Sonuçların yerdeğiştirme oranı ile benzer olduğu görülmüştür ve bu sebeple ilgili grafikler burada verilmemiştir.



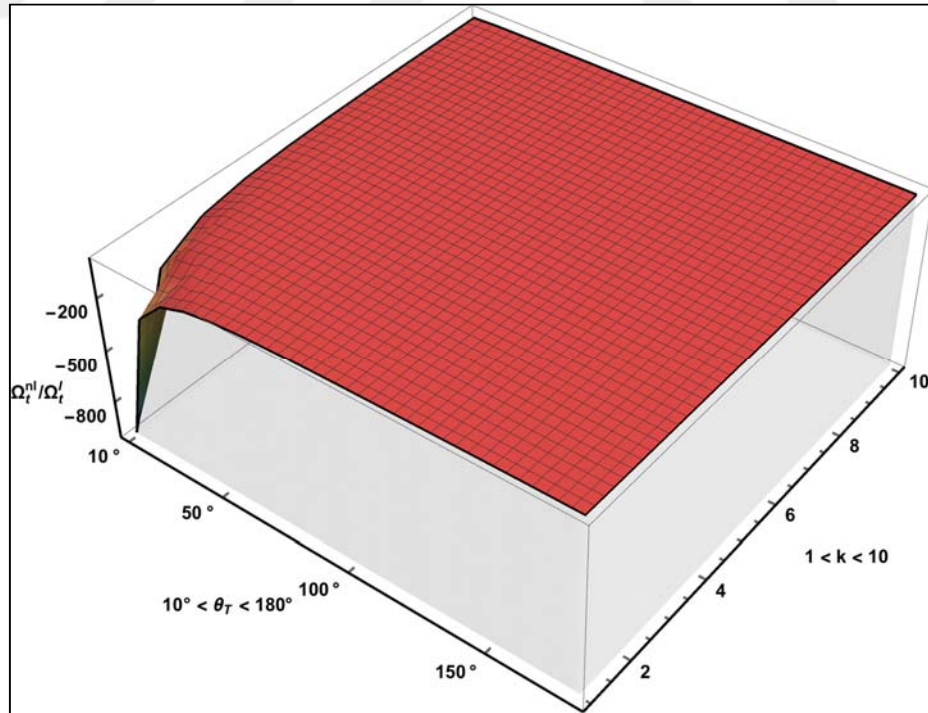
Şekil 5.20 : Narinlik oranı (λ) ve çubuk açıklığının (θ_T) yerdeğiştirme oranına (v^{nl}/v^l) etkisi.

5.6.3 Küçük boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkisi

Bu örnekte, küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin etkileri incelenmiştir. Çubuğun narinlik oranı $\lambda = 150$ 'dir. Şekil 5.21'de küçük boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin değişimine karşılık çubuğun orta noktasına ait yerel olmayan teori ve yerel teori ile elde edilen yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l çizilmiştir. Küçük boyut parametresi R/γ 'dan bağımsız olarak, yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l , azalan çubuk açıklığı θ_T ile artmaktadır. Yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l , azalan küçük boyut parametresi R/γ ile artmaktadır. Artış miktarı, çubuk açıklığı θ_T 'nin küçük değerlerinde daha fazladır. Farklı narinlik oranı λ değerlerinde bu diyagramın formu benzer şekilde kalmakta fakat narinlik oranı büyüdükçe sonuçlar büyümektedir.



Şekil 5.21 : Küçük boyut parametresi (k) ve çubuk açıklığının (θ_T) yerdeğiştirme oranına (v^{nl}/v^l) etkisi.



Şekil 5.22 : Küçük boyut parametresi (k) ve çubuk açıklığının (θ_T) kesitin teğet eksen etrafında dönme açısı oranına (Ω_t^{nl}/Ω_t^l) etkisi.

Kesitin normal eksen etrafında dönme açısı Ω_n^{nl}/Ω_n^l 'na ait grafik Şekil 5.21'de verilen yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l grafiğine benzemektedir. Kesitin teğet eksen etrafında dönme açısı Ω_t^{nl}/Ω_t^l 'na ait sonuçlar Şekil 5.22'de verilmiştir. Sonuçlar yerdeğiştirme oranı v^{nl}/v^l sonuçlarından tamamen farklıdır. Küçük boyut parametresi ve çubuk açıklığının küçük değerlerinde yerel olmayan teori ve yerel teori ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark oldukça büyüktür. Normal eksen ve teğet eksen eğilme momenti M_n^{nl}/M_n^l ve M_t^{nl}/M_t^l ile ilgili incelemelerde benzer sonuçlar görülmüştür.



6. DÜZLEM DIŞI DİNAMİK DAVRANIŞLA İLGİLİ ÖRNEKLER VE DAVRANIŞA ETKİ EDEN PARAMETRELERİN İNCELENMESİ

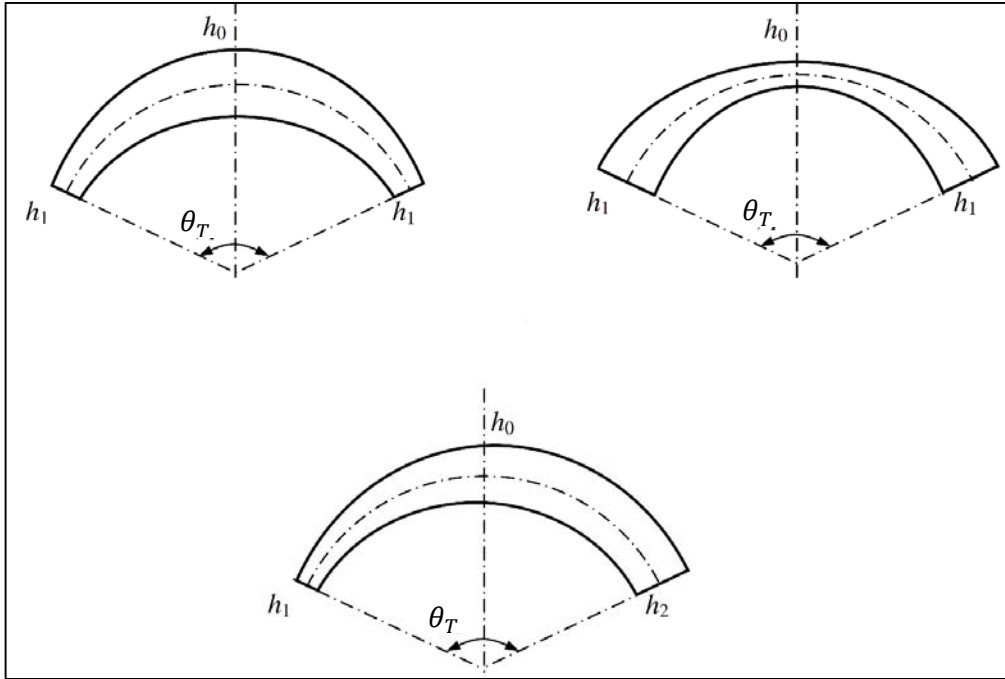
Yerel olmayan çubuk teorisinin, düzlemsel eğri eksenli çubukların kendi düzlemlerindeki titreşimlerini ifade eden denklemler 4.7-4.12 denklemleriyle verilmektedir. Bu bölümde, çeşitli çubuk geometrileri ile ilgili problemler çözülmüştür. Titreşim problemlerinin çözümünde şu parametreler mevcuttur:

1. Çubuğun toplam açıklığı: Çubuk açıklığı için, 10° 'den 180° 'ye kadar çeşitli açıklıklar alınmıştır.
2. Narinlik oranı ($\lambda = R \theta_T / \sqrt{I_n/A}$), olarak tarif edilen narinlik oranı değeri için, kalın bir geometriden ($\lambda = 10$), ince bir geometriye kadar ($\lambda = 150$) çeşitli durumlar ele alınmıştır.
3. Boyut parametresi: R/γ için 1'den 10'a kadar değişen değerler alınmıştır. Burada γ yerel olmayan boyut faktörünü simgelemektedir. Bu faktör, küçüklüğü ifade etmektedir. ($\gamma = e_0 a$).
4. Etkiler: Denklemlere kayma şekil değiştirmesi ve dönme eylemsizliği etkileriyle, kesme kuvveti ve eğilme momentlerinin yerel olmayan etkileri de dahil edilmiştir.

Bu bölümde, yerel olmayan ve klasik (yerel) teori kullanılarak, çember eksenli ve değişken kesitli nano çubuğun düzlem dışı serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Küçük boyut parametresi R/γ , narinlik oranı λ ve çubuk açıklığını θ_T 'nin yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen doğal frekans oranına etkisi araştırılmıştır. Hesaplamalarda, kayma deformasyonu yanında eğilme ve burulma dönme eylemsizliği etkileri de göz önüne alınmıştır. Boyutsuz frekans değeri;

$$\bar{\omega}^l = (R\theta_T)^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_{n0}}} \omega^l ; \quad \bar{\omega}^{nl} = (R\theta_T)^2 \sqrt{\frac{\rho A_0}{EI_{n0}}} \omega^{nl} \quad (6.1)$$

olarak verilmiştir.



Şekil 6.1 : Değişken kesitli çubuklar.

Bu kısımda Şekil 6.1’de verilen üç farklı geometride değişen dikdörtgen kesitli çubuklar incelenecektir. Çubuk kesitlerinin b boyutu değişmezken, h boyutunun değişimleri;

birinci çubuk için (ortası kalın kenarları ince);

$$h(\theta) = \begin{cases} h_0 \left(1 + \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta \leq 0 \\ h_0 \left(1 - \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta > 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

ikinci çubuk için (ortası ince kenarları kalın);

$$h(\theta) = \begin{cases} h_0 \left(1 - \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta \leq 0 \\ h_0 \left(1 + \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) & \theta > 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

üçüncü çubuk için (inceden kalına);

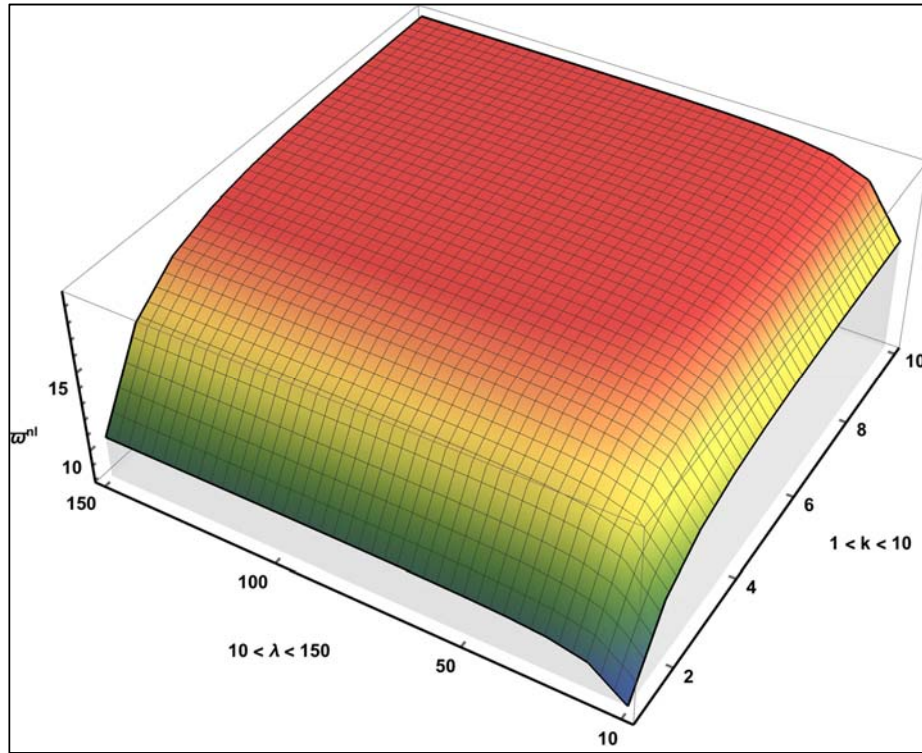
$$h(\theta) = h_0 \left(1 + \eta \frac{\theta}{\theta_T} \right) \quad -\theta_A \leq \theta \leq \theta_B \quad (6.4)$$

olarak alınmıştır. Aşağıda incelenen örneklerde çember eksenli çubuk için değişken kesit yüksekliği ile ilgili parametre $\eta = 0.1$ olarak alınmıştır.

6.1 Küçük Boyut Parametresi R/γ ve Narinlik Oranı λ 'nın Etkisi

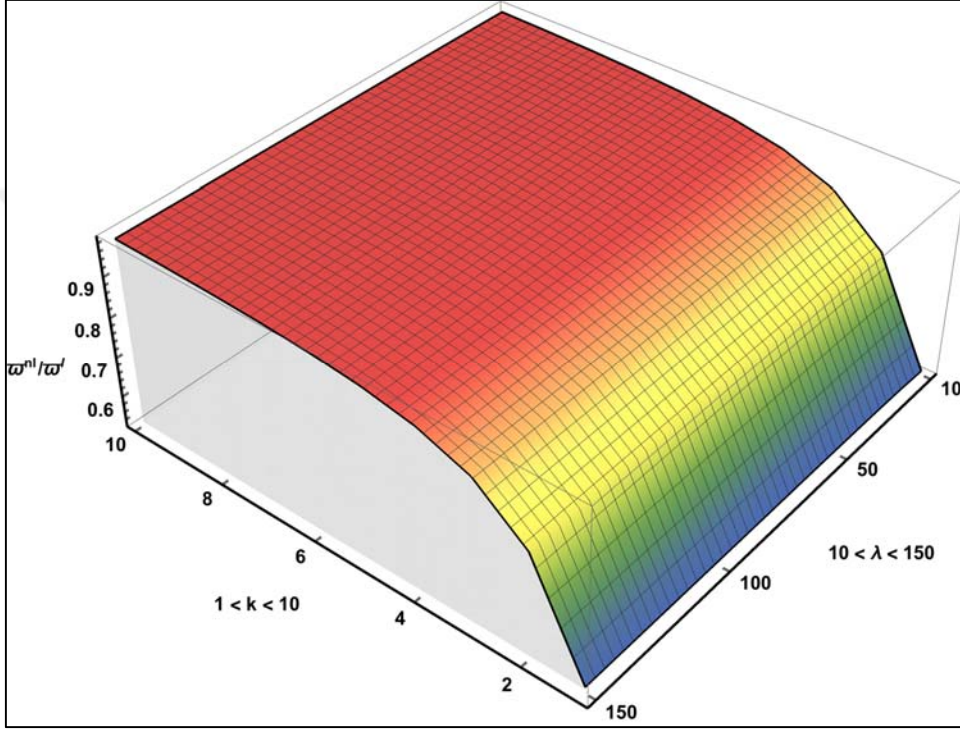
Bu örnekte, çember eksenli çubuğun kesit değişimi denklem 6.3'te verildiği gibi alınmıştır, yani ortası ince kenarları kalın kesitli bir çubuk incelenmektedir. Bu çubuk için, aynı malzemeden yapılmış, yani γ 'nın değerinin sabit tutulduğu, R yarıçapının değiştiği durumlar ele alınmıştır. R/γ 'nın artışıyla, R yarıçapı değiştirilmiştir.

Şekil 6.2'de, çember eksenli sabit kesitli iki ucu ankastre mesnetli, açıklığı ($\theta_T = 120^\circ$) olan nano çubuğun, yerel olmayan elastisite teorisi ile elde edilen birinci moduna ait boyutsuz frekans katsayısının, boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ değerlerinin değişiminden nasıl etkilendiğini göstermektedir. Boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ 'nın küçük değerleri için birinci moda ait boyutsuz frekansın önemli ölçüde etkilendiği görülmektedir. Boyut parametresi R/γ ve narinlik oranı λ 'nın büyük değerlerinde ise birinci boyutsuz frekans katsayısında önemli bir değişim görülmemektedir.



Şekil 6.2 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekansına $\bar{\omega}^{nl}$ etkisi ($\theta_T = 120^\circ$).

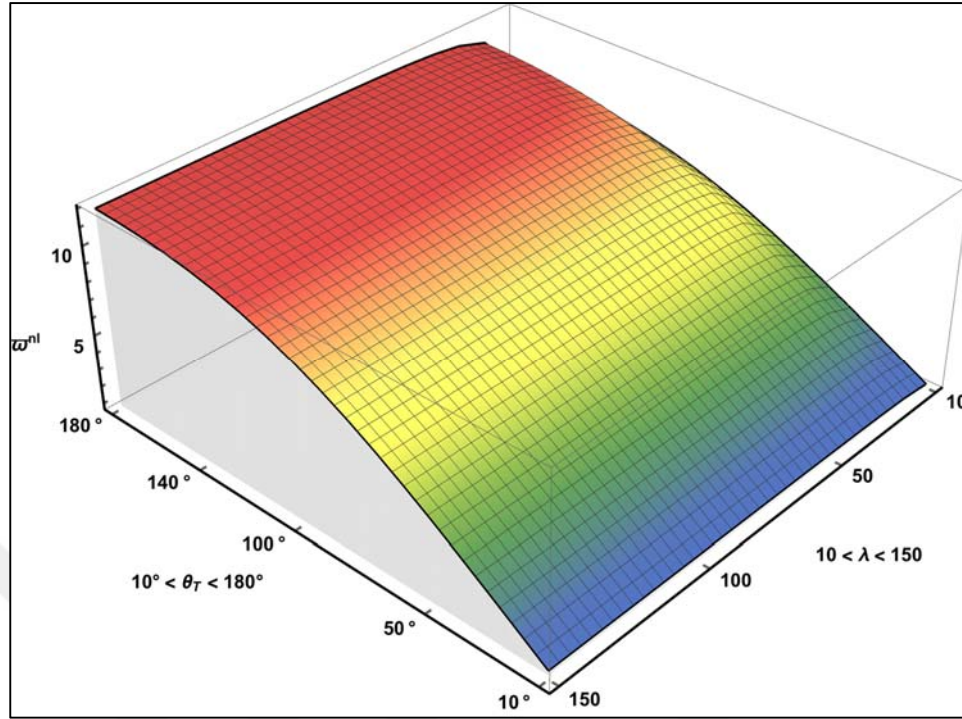
Şekil 6.3'te, $\theta_T = 120^\circ$ olan çubuğun birinci mod frekans oranlarının ($\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$), boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ ile değişimi ele alınmıştır. Şekil 6.3'ten de görüldüğü gibi boyutsuz frekans oranı $\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$ 'nin narinlik oranı değişiminden genel olarak etkilenmemektedir, yani narinlik oranının her iki teorisinin sonuçlarına etkisi benzerdir. Frekans oranı, azalan k değerleri ile azalmaktadır.



Şekil 6.3 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekans oranına ($\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$) etkisi ($\theta_T = 120^\circ$).

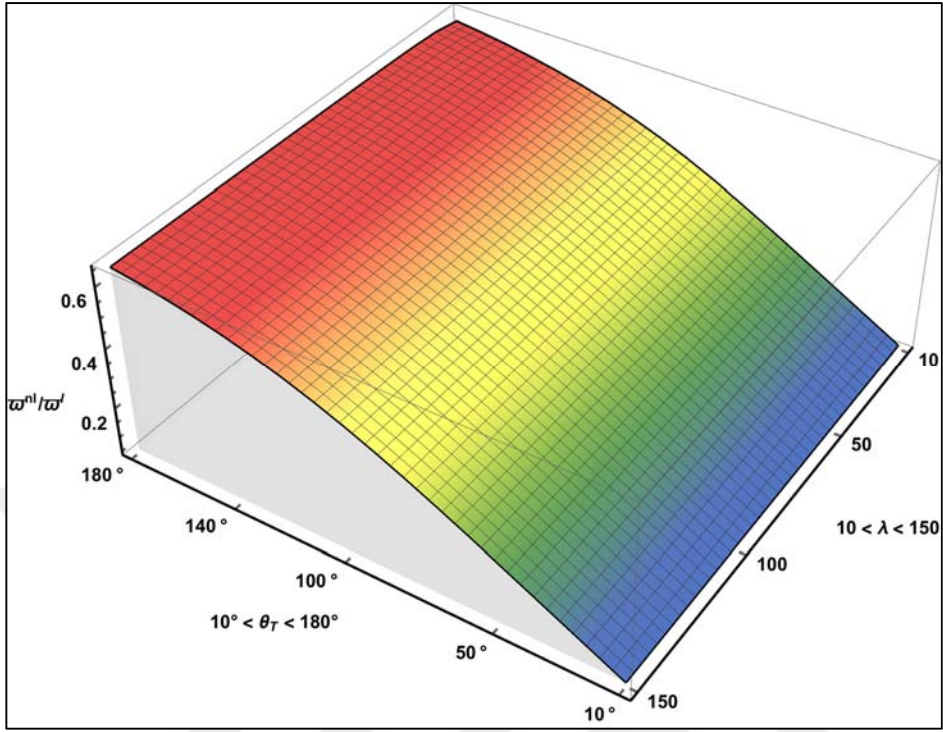
6.2 Narinlik Oranı λ ve Çubuk Açıklığı θ_T 'nin Etkisi

Bu örnekte, önceki örneklerdeki gibi çember eksenli çubuğun kesit değişimi denklem 6.3'te verildiği gibi alınmıştır, yani ortası ince kenarları kalın kesitli bir çubuk incelenmektedir. Boyut parametresi $k = 1$ olarak alınmıştır. Şekil 6.4'te yerel olmayan teori ile elde edilmiş sonuçlar görülmektedir. Çubuk açıklığı $\theta_T = 180^\circ$ için boyutsuz frekans yaklaşık 12 olarak hesaplanmış olup, θ_T küçüldükçe bu değer de küçülmektedir. Şekil 6.5'te verilen boyutsuz frekans oranı $\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$ sonuçları benzer karakteristiğe sahiptir, $\theta_T = 180^\circ$ için boyutsuz frekans oranı yaklaşık olarak 0.6 olarak hesaplanmıştır ve θ_T küçüldükçe bu değer de küçülmektedir.



Şekil 6.4 : Çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekansına $\bar{\omega}^{nl}$ etkisi ($k = 1$).

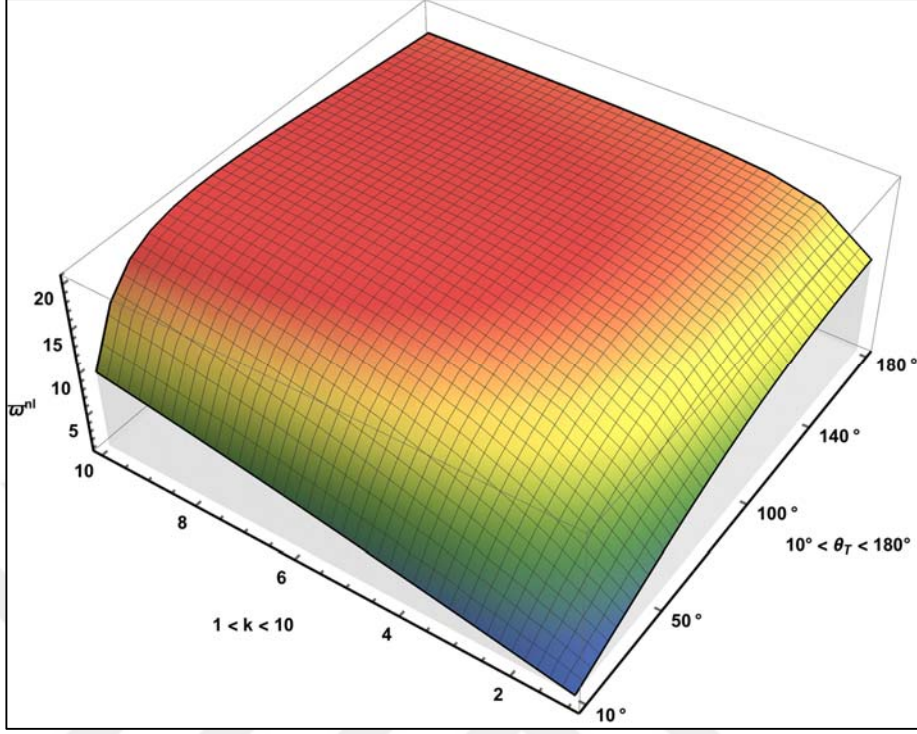
Narinlik oranı λ ; $\lambda > 20$ değerlerinde boyutsuz frekansın değişiminde etkin değildir fakat $\lambda < 20$ değerlerinde azalan λ için yerel teori ile hesaplanan boyutsuz frekans değeri azalmaktadır. Şekil 6.5 incelendiğinde, boyutsuz frekans oranı $\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$ 'nin narinlik oranı değişiminden genel olarak etkilenmediği görülmektedir, yani narinlik oranının her iki teorisin sonuçlarına etkisi benzerdir.



Şekil 6.5 : Çubuk açıklığı θ_T ve narinlik oranı λ 'nın değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekans oranına ($\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$) etkisi ($k = 1$).

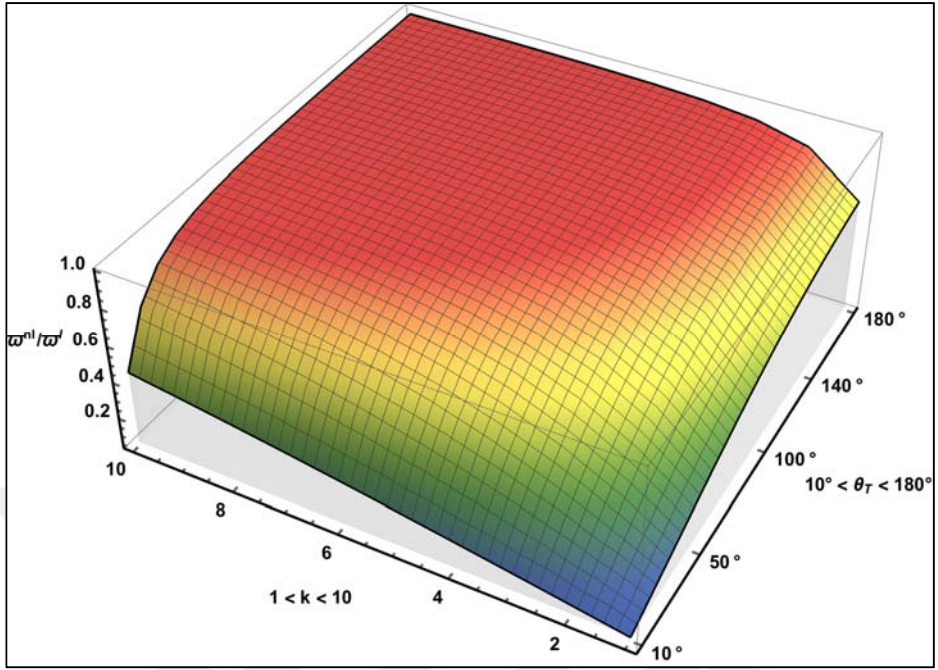
6.3 Küçük Boyut Parametresi R/γ ve Çubuk Açıklığı θ_T 'nin Etkisi

Bu örnekte, boyut parametresi R/γ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin çember eksenli değişken eksenli çubuğun birinci mod frekansına etkisi incelenmiştir. Çember eksenli çubuğun kesit değişimi denklem 6.3'te verildiği gibi alınmıştır. Narinlik oranı $\lambda = 150$ olarak alınmıştır. Bu çubuk için, aynı malzemeden yapılmış, yani γ 'nın değerinin sabit tutulduğu, R yarıçapının değiştiği durumlar ele alınmıştır. R/γ 'nın artışıyla, R yarıçapı değiştirilmiştir.



Şekil 6.6 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekansına $\bar{\omega}^{nl}$ etkisi ($\lambda = 150$).

İlk olarak, Şekil 6.6'da, çubuğun yerel olmayan teori ile hesaplanmış birinci mod frekansının, boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve toplam çubuk açıklığı θ_T ile değişimi ele alınmıştır. Şekil 6.6'da görüldüğü gibi küçük k ve küçük θ_T değerlerinde, birinci mod frekans oranı hızla değişmekte, büyük k ve büyük θ_T değerlerinde ise 20 değerine yakınsamaktadır. Birinci mod frekans oranlarının boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T ile değişiminin verildiği Şekil 6.7'de de benzer sonuçlar alınmıştır. Dolayısıyla, büyük k ve büyük θ_T değerlerinde yerel ve yerel olmayan teori sonuçları benzer değişim göstermektedir.



Şekil 6.7 : Boyut parametresi $k = R/\gamma$ ve çubuk açıklığı θ_T 'nin değişken kesitli çember eksenli çubuğun birinci mod frekans oranına ($\bar{\omega}^{nl}/\bar{\omega}^l$) etkisi ($\lambda = 150$).

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatür araştırmasında, nanomekanik sistemlerin incelenmesinde atomsal yöntemler ve sürekli ortam mekaniği olmak üzere iki farklı teorik yaklaşım geliştirildiği görülmüştür. Atomsal yaklaşımda karmaşık bir modelleme ve hesaplama süreci mevcuttur, hesaplama yükü fazladır. Dolayısıyla, ilgili modeller, kullanılan hesaplama programlarının ve bilgisayarların kapasiteleriyle sınırlıdır. Nano cihazların tasarımında kullanılan bu yapıların eğilme, titreşim veya burkulma açısından incelenmesi için daha pratik çözümlere ihtiyaç duyulmuştur. Sürekli ortam mekaniği yöntemi, nano boyuttaki bu yapıların mekanik davranışının incelenmesi için daha uygun bir yöntem olarak kabul edilmektedir ve diğer yönteme göre daha basit formüller sunmaktadır. Fakat, Euler-Bernoulli, Timoshenko veya daha yüksek mertebeli teoriler gibi klasik çubuk teorileri, küçük boyut etkisinin denklemlere dahil edilmemesinden dolayı bu ölçekteki yapılarla ilgili problemlerin çözümü için uygun değildir. Bunun yanında, Eringen tarafından sunulan, boyut etkisinin hesaba katıldığı yerel olmayan elastisite teorisi, nanomekanik sistemlerin incelenmesi için uygun bir sürekli ortam mekaniği yaklaşımıdır. Bu konuda yapılan çalışmalarda, nano çubukların yerel olmayan Euler-Bernoulli kiriş teorisi veya yerel olmayan Timoshenko kiriş teorisi ile incelendiği, fakat çalışmaların genellikle doğrusal yapı elemanları ile sınırlı olduğu tespit edilmiştir. Nano çubuklar, birçok çalışmada düz çubuk olarak incelenirse de algılayıcı gibi nanoteknoloji uygulamalarında kullanılmak üzere eğri eksenli olarak üretilmiş olabilirler.

Bu çalışmada, Eringen'in yerel olmayan elastisite teorisi eğri eksenli nano çubukların statik ve dinamik davranışlarının incelenmesinde kullanılmıştır. Çalışmanın amacı, sürekli değişken eğri eksenli ve sürekli değişken kesitli nano çubukların düzlem dışı statik ve dinamik davranışını ifade eden denklemlerin elde edilmesi ve bu denklemlerin kesin çözümünün sağlanmasıdır. Bu amaçla, Eringen tarafından verilen yerel olmayan elastisite teorisinin bünye denklemleri silindirik koordinatlarda yazılarak klasik çubuk teorisine uygulanmıştır. Statik analizde, kayma deformasyonu etkisi göz önünde bulundurulmuştur. Başlangıç değerleri yöntemi kullanılarak diferansiyel denklemlerin kesin çözümü elde edilmiştir. Yer değiştirme, kesitin normal

ve teğetsel eksen etrafında dönme açıları ve kesit tesirleri analitik olarak elde edilmiştir.

Daha sonra, d'Alembert prensibinden faydalanılarak eğri eksenli nano çubuklara ait serbest titreşim analizi gerçekleştirilmiştir. Kayma deformasyonu etkisi yanında eğilme ve burulma dönme eylemsizliği etkileri de denklemlere dahil edilmiştir. Sürekli değişken eğrilığe ve kesite sahip çubukların düzlem dışı serbest titreşimlerinin analizinde sabit kesitli çember eksenli çubuk için elde edilen kesin analitik çözüm yöntemi kullanılmıştır.

Statik ve dinamik davranışla ilgili çözülen örneklerde, elde edilen sonuçlar klasik teoremin sonuçlarıyla karşılaştırılmıştır. Eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı statik davranışıyla ilgili örneklerde, çeşitli problemlerin çözümleri verilmiş, yer değiştirme, dönme açısı ile iç kuvvet ve momentler hesaplanmıştır. Bu örneklerde, ankastre-serbest ve ankastre-ankastre sınır koşulları; binormal doğrultuda tekil yük, normal ve teğet doğrultuda tekil moment, binormal doğrultuda değişken yayılı yük gibi farklı yükleme durumları incelenmiştir. Tekil yükler, ankastre-serbest mesnetli nano çubukta serbest uçtan etkimektedir. Bunun yanında, ankastre-ankastre mesnetli nano çubukta rastgele seçilmiş bir noktadan etkiyen tekil yüklerin statik davranışa etkisi de incelenmiştir.

Çubuk açıklığının sabit tutulduğu incelemede, narinlik oranının küçük değerleri için boyut parametresinin yer değişimi oranına etkisinin büyük olduğu görülmüştür. Boyut parametresinin sabit tutulduğu incelemede, çubuk açıklığının azalması ile yer değiştirme oranının arttığı gözlenmiştir. Çubuk açıklığının küçük değerlerinde, bu artış miktarının önemli olduğu belirlenmiştir. Bu örneklerde elde edilen yer değiştirme ve kesitin dönme açısına ait diyagramlar incelendiğinde genel olarak yerel olmayan teoriden elde edilen sonuçların klasik teori ile elde edilen sonuçlara göre daha büyük olduğu görülmüştür. Bu iki yaklaşım ile elde edilen sonuçlar arasındaki fark, küçük boyut parametresinin büyümesiyle azalmaktadır. Bu sebeple, eğri eksenli nano çubukların yer değiştirme ve kesin dönme açısının hesaplanmasında boyut parametresinin önemi anlaşılmaktadır. Normal ve teğet eksen etrafındaki dönme açılarının oranlarının parametrik incelendiği örneklerde, bu oranın narinlik oranının değişiminden etkilenmediği gözlenmiştir. Eğilme ve burulma momentlerinin oranlarında da benzer etki görülmüş olup, kesme kuvveti oranının ise sabit olduğu, yani her iki teoriden elde edilen sonuçların aynı olduğu belirlenmiştir.

Eğri eksenli nano çubukların düzlem dışı serbest titreşim analizinde küçük boyut parametresi, narinlik oranı ve çubuk açıklığının yerel ve yerel olmayan teorilerle elde edilen doğal frekans oranına etkisi araştırılmıştır. Çubuk açıklığının sabit tutulduğu incelemede, boyut parametresi ve narinlik oranının küçük değerleri için birinci moda ait boyutsuz frekansın önemli ölçüde etkilendiği görülmüştür. Boyut parametresi ve narinlik oranının büyük değerlerinde ise birinci boyutsuz frekans katsayısında önemli bir değişim görülmemiştir. Boyut parametresinin sabit tutulduğu incelemede, boyutsuz frekans oranının narinlik oranı değişiminden genel olarak etkilenmediği görülmüştür, yani narinlik oranının her iki teorelin sonuçlarına etkisi benzerdir. Narinlik oranının sabit tutulduğu incelemede boyut parametresi ve çubuk açıklığının büyük değerlerinde yerel ve yerel olmayan teori sonuçları benzer değişim göstermiştir.

Bu çalışmanın en önemli özelliği, sürekli değişken eğrilikli ve değişken kesitli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemleri için kesin analitik çözümün verilmiş olmasıdır. Literatür incelemelerinden bu konuda benzer bir çalışmanın yapılmadığı tespit edilmiştir. Bu çözümler, moleküler dinamik gibi yöntemlere göre daha hızlı sonuçlar vermektedir. Elde edilen sonuçlar, daha önce düz çubuklar ile ilgili yapılmış olan deneysel ve teorik çalışmalarla uyumludur. Bu çalışmada sunulan, sürekli değişken eğrilikli sürekli değişken kesitli nano çubuklar için verilen genel bir çözümün daha sonra yapılacak teorik ve sayısal çalışmalar için değerlendirme kıstası olarak kabul edilebileceği düşünülmektedir. Ayrıca, verilen denklemler, eğri eksenli nano çubukların kararlılık problemlerinin incelenmesinde kullanılabilir. Bu yöntemin, mühendislik uygulamalarında kullanılmak üzere genişletilerek eğri eksenli nano çubuklar için bir sonlu eleman yöntemi geliştirilebileceği de düşünülmektedir.



KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. & Stegun, I. A.** (1972). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York, NY: Dover Books.
- Alizada, A. N. & Sofiyev, A. H.** (2011). Modified Young's moduli of nano-materials taking into account the scale effects and vacancies, *Meccanica*, 46, 915-920.
- Ansari, R., Oskouie, M. F., Gholami, R., Sadeghi, F.** (2016). Thermo-electro-mechanical vibration of postbuckled piezoelectric Timoshenko nanobeams based on the nonlocal elasticity theory, *Composites Part B*, 89, 316-327.
- Arash, B., Wang, Q., Duan, W. H.** (2011). Detection of gas atoms via vibration of graphenes. *Physics Letter A*, 375 (24), 2411-2415.
- Arash, B. & Wang, Q.** (2012). A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes, *Computational Materials Science*, 51, 303-313.
- Arash, B., Jiang, J.W., Rabczuk, T.** (2015). A review on nanomechanical resonators and their applications in sensors and molecular transportation. *Applied Physics Reviews*, 2, 021301:1-20.
- Bahrami, A. & Teimourian, A.** (2016). Study on the effect of small scale on the wave reflection in carbon nanotubes using nonlocal Timoshenko beam theory and wave propagation approach, *Composites: Part B*, 91, 492-504.
- Bağdath, S.M.** (2015). Non-linear vibration of nanobeams with various boundary condition based on nonlocal elasticity theory. *Composites: Part B*, 80, 43-52.
- Barretta, R., De Sciarra, F. M., Diaco, M.** (2014). Small-scale effects in nanorods, *Acta Mechanica*, 225 (7), 1945-1953.
- Benvenuti, E. & Simone, A.** (2013). One dimensional nonlocal and gradient elasticity: closed-form solution and size effect, *Mechanics Research Communications* 48, 46-51.
- Berrabah, H. M., Tounsi, A., Semmah, A., Bedia, E. A. A.** (2013). Comparison of various refined nonlocal beam theories for bending, vibration and buckling analysis of nanobeams. *Structural Engineering and Mechanics*, 48 (3), 351-365.
- Craighead, H. G.** (2000). Nanoelectromechanical systems. *Science*, 290 (5496), 1532-1535.

- De Sciarra, F. M. & Barretta, R.** (2014). A new nonlocal bending model for Euler-Bernoulli nanobeams, *Mechanics Research Communications*, 1 (62), 25-30.
- Ekinci, K. L.** (2005). Electromechanical transducers at the nanoscale: Actuation and sensing of motion in nanoelectromechanical systems (NEMS), *Small*, 1 (8-9), 786-797.
- Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E. and Mahmoud, F. F.** (2014). Vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeams by using finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 37, 4787-4797.
- Eringen, A. C. & Edelen D. G. B.** (1972). Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, 10 (3), 425-435.
- Eringen, A. C.** (1983) On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of Applied Physics*, 54, 4703-4710.
- Harik, V. M.** (2001). Ranges of applicability for the continuum beam model in the mechanics of carbon nanotubes and nanorods. *Solid State Communications*, 120, 331-335.
- Hu, Y. G., Liew, K. M., Wang, Q.** (2009) Nonlocal elastic beam models for flexural wave propagation in double-walled carbon nanotubes. *Journal of Applied Physics*, 106 (4), 044301.
- Joshi, A. Y., Sharma, S. C. and Harsha, S. P.** (2010). Dynamic analysis of a clamped wavy single walled carbon nanotube based nanomechanical sensors. *Journal of Nanotechnology in Engineering and Medicine*, 1, 031007-7.
- Kong, J., Franklin, N.R., Zhou, C., Chapline, M.G., Peng, S., Cho, K., Dai, H.** (2000). Nanotube molecular wires as chemical sensors. *Science*, 287, 622-625.
- Li, C. & Chou, T. W.** (2003). Single-walled carbon nanotubes as ultra-high frequency nanomechanical resonators. *Physical Review B*, 68 (7), 073405
- Mahmoud, F. F., Eltaher, M. A., Alshorbagy, A. E. and Meletis, E.I.** (2012) Static analysis of nanobeams including surface effects by nonlocal finite elements. *Journal of Mechanical Science and Technology* 26, 3555-3563
- McFarland, A. W. & Colton, J. S.** (2005). Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 15, 1060-1067.
- Murmu, T. & Adhikari, S.** (2012). Nonlocal elasticity based vibration of initially prestressed coupled nanobeam systems, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 34, 52-62.
- Oskouie, F. M., Sadeghi, F., Bazdid-Vahdati, M.** (2015). Free vibration of fractional viscoelastic Timoshenko nanobeams using the nonlocal elasticity theory. *Physica E*, 74, 318-327.

- Patti, A., Barretta, R., Sciarra F. M., Mensitieri G., Menna, C., Russo, P.** (2015). Flexural properties of multi-wall carbon nanotube/polypropylene composites: Experimental investigation and nonlocal modeling. *Composite Structures*, 131, 282-289.
- Peddieson, J., Buchanan, G. R. and McNitt, R. P.** (2003). Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, 41, 305-312.
- Phadikar, J. K. & Pradhan, S. C.** (2010). Variational formulation and finite element analysis for nonlocal elastic nanobeams and nanoplates. *Computational Materials Science*, 49 (3), 492-499.
- Povstenko, Y. Z.** (1995). Straight disclinations in nonlocal elasticity, *International Journal of Engineering Science*, 33, 575-582.
- Rafiee, R. & Monghadam, R. M.** (2014). On the modeling of carbon nanotubes: A critical review, *Composites Part B*, 56, 435-449.
- Reddy, J. N.** (2007). Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams, *International Journal of Engineering Science*, 45, 288-307.
- Roukes, M.** (2001). Nanoelectromechanical systems face the future. *Physics World*, 14, 25-31.
- Salvetat, J. P., Briggs, G. A. D., Bonard, J. M., Bacsá, R. R., Kulik, A. J., Stöckli, T., de Sciarra, F. M.** (2014). Finite element modelling of nonlocal beams. *Physica E.*, 59, 144-149.
- Shao, L. H., Luo, R. Y., Bai, S. L., Wang, J.** (2009). Prediction of effective moduli of carbon nanotube-reinforced composites with waviness and debonding. *Composite Structures*, 87, 274-281.
- Srivastava, D. & Wei, C.** (2003). Nanomechanics of carbon nanotubes and composites, *Applied Mechanics Reviews*, 56, 215-230.
- Timoshenko, S. & Goodier, J. N.** (1951) *Theory of Elasticity*, Tokyo: McGraw-Hill Book Co.
- Tufekci, E. & Arpacı, A.** (1998). Exact solution of in-plane vibrations of circular arches with account taken of axial extension, transverse shear and rotatory inertia effects, *Journal of Sound and Vibration*, 209 (5), 845-856.
- Tufekci, E. & Aya, S. A.** (2016) A nonlocal beam model for out-of-plane static analysis of circular nanobeams, *Mechanics Research Communications*, 76, 11-23.
- Tufekci, E., Aya, S. A., Oldac, O.** (2016a). A unified formulation for static behavior of nonlocal curved beams, *Structural Engineering Mechanics*, 59 (3), 475-502.
- Tufekci, E., Aya, S. A., Oldac, O.** (2016b). In-plane static analysis of nonlocal curved beams with varying curvature and cross-section, *International Journal of Applied Mechanics*, 8 (1), 1650010.
- Treacy, M. M. J., Ebbesen, T. W., Gibson, J. W.** (1996). Exceptionally high Young's modulus observed for individual carbon nanotubes. *Nature*, 381 (6584), 678-680.

- Tufekci, E. & Dogruer, O. Y.** (2006). Exact solution of out-of-plane problems of an arch with varying curvature and cross section, *Journal of Engineering Mechanics-ASCE*, 132, 600-609.
- Wang, C. M., Xiang, Y., Yang, J., Kitipornchai, S.** (2012). Buckling of nano-rings/arches based on nonlocal elasticity. *International Journal of Applied Mechanics*, 4, 1250025.
- Wang, Q. & Shindo, Y.** (2006). Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1, 663-680.
- Zenkour, A. M. & Sobhy, M.** (2015). A simplified shear and normal deformations nonlocal theory for bending of nanobeams in thermal environment. *Physica E*, 70, 121-128.
- Zhao, Q., Gan, Z. H., Zhuang, O. K.** (2002). Electrochemical sensors based on carbon nanotubes. *Electroanalysis*, 14 (23), 1609-13.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Serhan Aydın Aya
Doğum Tarihi ve Yeri : 30.07.1985 - Malatya
E-posta : ayas@itu.edu.tr



ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2008, İ.T.Ü, Makina Mühendisliği
- **Yüksek Lisans** : 2011, İ.T.Ü, Makina Mühendisliği, Malzeme ve İmalat

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2009 yılından bu yana İstanbul Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi Mukavemet Birimi'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

DOKTORA TEZİNDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Tufekci, E., **Aya, S. A.** (baskıda). Nonlocal Continuum Modeling of Curved Nano Structures. In P. Russo, F.M. de Sciarra (Eds.), *Experimental Characterization, Predictive Mechanical and Thermal Modeling of Nanostructures and Their Polymer Composites*, Elsevier.
- **Aya, S. A.**, Tufekci, E. (baskıda) Modeling and Analysis of Out-of-Plane Behavior of Curved Nanobeams Based on Nonlocal Elasticity, *Composites Part B: Engineering*.
- Tufekci, E., **Aya, S. A.** (2016). A Nonlocal Beam Model for Out-of-Plane Static Analysis of Circular Nanobeams, *Mechanics Research Communications*, 76, 11-23.
- Tufekci, E., **Aya, S. A.**, Oldac, O. (2016). In-Plane Static Analysis of Nonlocal Curved Beams with Varying Curvature and Cross-Section. *International Journal of Applied Mechanics*, 8, 1650010.
- Tufekci, E., **Aya, S. A.**, Oldac, O. (2016). A Unified Formulation for Static Behavior of Nonlocal Curved Beams. *Structural Engineering and Mechanics*, 59 (3), 475-502.
- **Aya, S. A.**, Tufekci, E. Out-of-Plane Static Analysis of Nanoarches Using Eringen's Nonlocal Elasticity Theory, *Proceedings of the 2nd World Congress on New Technologies (NewTech'16)*, Budapest, Hungary – August 19 – 20, 2016.
- **Aya, S. A.**, Oldac, O., Tufekci, E. A Nonlocal Elasticity Approach for the In-Plane Static Analysis of Nanoarches. *Proceedings of the 2nd World Congress on New Technologies (NewTech'16)*, Budapest, Hungary – August 19 – 20, 2016.

DOKTORA TEZİNİ DESTEKLEYEN KURUMLAR:

Bu çalışma TÜBİTAK tarafından 112M404 no.lu “Nanoteknoloji Uygulamalarındaki Eğri Eksenli Çubukların Statik ve Dinamik Problemlerinin Yerel Olmayan Elastisite Teorisi İle Analitik Çözümü” başlıklı proje ile desteklenmiştir.

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

Dincer Kose, O., Karatasli, B., Demircan, S., Kose, T. E., Cene, E., **Aya, S. A.**, Erdem, M. A., Cankaya, A. B. (baskıda). In Vitro Evaluation of Manual Torque Values Applied to Implant-Abutment Complex by Different Clinicians and Abutment Screw Loosening, *BioMed Research International*.

Tufekci, E., Eroglu, U., **Aya, S. A.** (2016). An Exact Two-Noded Curved Beam Finite Element Including Axial Extension and Shear Deformation, *Engineering with Computers*, DOI:10.1007/s00366-016-0470-1.

Aya, S. A., Ormanci Acar, T., Tufekci, N. (2016). Modeling of Membrane Fouling in Submerged Membrane Reactor Using Support Vector Regression, *Desalination and Water Treatment*, 1, 1-14.

Tufekci, E., Eroglu, U., **Aya, S. A.** (2016). Exact Solution for In-Plane Static Problems of Circular Beams Made of Functionally Graded Materials, *Mechanics Based Design of Structures and Machines, An International Journal*, 44 (4), 476-494.

Ozcoban, M. S., **Aya, S. A.** Turkoglu Demirkol, G., Gunes Durak, S., Tufekci, N. (2016). Modeling of Long Term Permeability of Compacted and Consolidated Clays Permeated with Leachate, *3rd International Congress on Water, Waste and Energy Management*, Rome, Italy, July 18-20, 2016.

Ormanci Acar, T., **Aya, S. A.**, Celik, S. O., Tufekci, N. (2016). The Effects of Fulvic Acid and Iron Oxide on the Fe(II) and Mn(II) Removal by Submerged Membrane System, *18th International Symposium on Environmental Pollution and its Impact on Life in the Mediterranean Region (MESAEP)*, Crete, Greece, September 26-30, 2015.