

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW

TÜREVLERİ

İÇEREN KOMÜTATÖRLER

Zeynep KARACA

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı : 403.01.01

Sunuş Tarihi: 11.11.2016

Bornova-İZMİR

2016

Zeynep KARACA tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak sunulan **“Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Skew Türevleri İçeren Komütatörler”** başlıklı bu çalışma E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim yönetmeliği ile E. Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve 11.11.2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/oyçokluğu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

İmza

Jüri Başkanı: Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ

Raportör Üye: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Üye: Doç. Dr. Salahattin ÖZDEMİR

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E. Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Asal Halkalarda Genelleştirilmiş Skew Türevleri İçeren Komütatörler" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

11/11/2016

Zeynep KARACA

ÖZET

ASAL HALKALARDA GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLERİ

İÇEREN KOMÜTATÖRLER

KARACA, Zeynep

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

Kasım 2016, 107 sayfa

Bu tez esas olarak beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusu tanıtılmış, konu ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, tezi anlamada ve okumada kolaylık sağlayacak bazı temel tanım ve kavramlara teorem ve özelliklere yer verilmiştir. Ayrıca halkalardaki türev, genelleştirilmiş türev, skew türev tanıtılıp, tezde kullanılan kavram ve bu bölümde sık kullanılan bazı önemli referans sonuçları yer almıştır.

Üçüncü bölümde, Jui- Chi Chang ın 2011 yılında yapmış olduğu "Asal halkalarda Lie idealler üzerinde Engel koşullu genelleştirilmiş skew türevler" başlıklı çalışması ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, Luisa Carini, Vincenzo De Filippis ve Giovanni Scudo nun 2014 de yapmış oldukları "Asal halkalarda kuvvet değişimli (power-commuting) genelleştirilmiş skew türevler " başlıklı çalışmaları incelenmiştir.

Beşinci bölümde, V. De Filippis ve O. M. Di Vincenzo nun 2014 de yapmış oldukları "Asal halkalarda sol idealler üzerinde Engel koşullu,

hipermerkezleyenli (hypercentralizing) genelleştirilmiş skew türevler" ile ilgili çalışmalarındaki ilk kısım olan asal halkalarda hiperdeğişimli genelleştirilmiş skew türevler konusu çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Asal halka, türev, skew türev, genelleştirilmiş skew türev, genelleştirilmiş polinom özdeşliği, otomorfizmalı genelleştirilmiş polinom özdeşliği



ABSTRACT
COMMUTATORS INVOLVING GENERALIZED SKEW
DERIVATIONS IN PRIME RINGS

KARACA, Zeynep

Msc in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine ALBAŞ

November 2016, 107 pages

This thesis essentially consists of five chapters.

In the first chapter, the subject of the thesis is introduced and a short information about the works have been done so far related to this subject is given.

In the second chapter, some basic definitions and notions, theorems and properties which may help to make easy understanding and reading of this thesis are given. Moreover the definitions of derivation, generalized derivation, skew derivation and generalized skew derivation in rings have been introduced and some important results from the references which are frequently used take places in this chapter.

In the third chapter, Jui- Chi Changs paper titled "Generalized skew derivations with Engel conditions on Lie ideals" published in 2011 is primarily considered.

In the fourth chapter, the paper titled "Power- commuting generalized skew derivations in prime rings" which is a joint work of Luisa Carini, Vincenzo De Filippis and Giovanni Scudo in 2014 is handled.

In the fifth chapter, V. De Filippis and O. M. Di Vincenzo' s 2014 work titled "Hypercentralizing generalized skew derivations on left ideals in prime

rings" is handled and in this paper hypercommuting generalized skew derivations on prime rings are studied.

Key words: Prime ring, derivation, skew derivation, generalized skew derivation, generalized skew derivation, generalized polynomial identity, generalized polynomial identity with automorphism.





TEŞEKKÜR

Bu çalışma boyunca beni sabırla dinlediği, engin bilgi birikimlerini benimle paylaştığı, çalışma sürecinde ilgisi ve desteğiyle her zaman yanımda olan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Emine ALBAŞ' a lisansım ve yüksek lisansım boyunca kendime örnek aldığım başta Sayın Prof. Dr. Nurcan ARGAÇ olmak üzere fikir ve önerilerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen, verdikleri destek ve sorularıma ayırdıkları vakit için Sayın Doç. Dr. Çağrı DEMİR ve Sayın Ar. Gör. Dr. Nihan BAYDAR YARBİL'e, beni bu günlere getiren, benim için hiç bir fedakarlıktan çekinmeyen, aldığım her kararın arkasında duran, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı sevgili AİLEME yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	ix
TEŞEKKÜR.....	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
2.1 Genel Bilgiler.....	3
2.2 Adi Türevli ve Adi Genelleştirilmiş Türevli Halkalar.....	12
2.3 Skew Türevli ve Genelleştirilmiş Skew Türevli Halkalar.....	14
3. ASAL HALKALARDA LİE İDEAL ÜZERİNDE ENGEL KOŞULLU GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLER.....	20
4. ASAL HALKALARDA KUVVET DEĞİŞİMLİ (POWER- COMMUTING) GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLER.....	60
5. ASAL HALKALARDA HİPERDEĞİŞMELİ (HYPERCOMMUTING) GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLER.....	80

İÇİNDEKİLER (Devam)

	<u>Sayfa</u>
6. SONUÇ.....	101
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	102
ÖZGEÇMİŞ.....	107



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$Ann_l(A)$	A kümesinin sol sıfırlayanı
$Z(R)$	R halkasının merkezi
$End({}_R M)$	${}_R M$ sol R - modülünün homomorfizmalarının kümesi
$\dim_D V$	V vektör uzayının D bölümlü halkası üzerindeki boyutu
$\text{Aut}(R)$	R halkasının otomorfizmalar grubu
$D(R)$	R halkasının yoğun sağ ideallerinin kümesi
$M_n(D)$	D bölümlü halkası üzerinde $n \times n$ tipindeki matrisler halkası
$Q_{mr}(R) = Q_{mr}$	R halkasının maksimal sağ kesirler halkası
$U(R) = U$	R halkasının sağ Utumi kesirler halkası
$Q_r(R) = Q_r$	R halkasının iki yanlı (sağ) Martindale kesirler halkası
${}_F R$	R halkasının iki yanlı (sağ) Martindale kesirler halkası
R_F	R halkasının iki yanlı (sol) Martindale kesirler halkası
$Q_S(R) = Q_S$	R halkasının simetrik Martindale kesirler halkası
$R_C = RC$	R halkasının merkezi kapanışı
s_n	n değişkenli standart özdeşlik

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (Devam)

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
C	R halkasının genişletilmiş merkezi
$Soc(R)$	R halkasının "socle" si
$[x, y]$	x ve y elemanlarının komütatör çarpımı
$Char(R)$	R halkasının karakteristiği
1_R	R halkasının birim dönüşümü
I_n	$n \times n$ tipindeki birim matris
$K\{X\}$	X kümesi üzerindeki serbest K - cebir
$*$	Serbest çarpım
$\otimes$	Tensör çarpım
$rank(r)$	r elemanının rankı
$deg(r)$	r elemanının cebirsellik derecesi

1. GİRİŞ

Asal halkaların türevleri üzerine bilinen ilk çalışma 1957 yılında E. C. Posner tarafından yapılmıştır. Bu çalışmasında Posner iki önemli sonuç elde etmiştir. Bunlardan ilki, karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halkada iki türevin bileşkesi de bir türev ise türevlerden birinin sıfır olduğu ve ikinciside, bir asal halkanın bir d türevi o halkanın her elemanı ile değişmeli olduğu durumda halkanın değişmeli olduğu ya da d türevinin sıfır olduğudur. Yapılan bu çalışma bundan sonraki tüm türevli asal halka çalışmalarında referans olarak literatürdeki yerini almıştır. Daha sonra C. Lanski 1988 yılında yapmış olduğu bir çalışmasında Posner'ın bu sonucunu bir Lie ideale genellemiştir.

Daha sonra türev teorisinin gelişimi ile birlikte farklı türev kavramları tanımlanmış ve asal halkalarda bu türevlerin sağladığı bazı özelliklerin incelenmesine yol açmıştır. Bu bağlamda genelleştirilmiş türev, skew türev ve genelleştirilmiş skew türevler tanımlanmıştır. Çalışmalar ilerledikçe de bu tip türev tanımlı asal halkaların karakterizasyonu elde edilmiştir.

Bu çalışmalar ışığında belli bir özdeşlik sağlayan asal halkalardan, halkaların idealleri, Lie idealleri ve tek yanlı idealleri üzerinde sağlanan özdeşlikleri incelenmeye yönelinmiştir. Bunlar sonucunda bir çok yapısal sonuç elde edilmiştir.

Asal halkalardaki türev ile ilgili yapılan çalışmalar zamanla ilerlemiş olup çeşitli türev tanımları yapılmıştır. Bu doğrultuda skew türevler tanımlanmıştır. M. C. Chou ve C. K. Liu 2009 yılında yapmış oldukları çalışmalarında, skew türevli Engel koşulunu incelemişlerdir. Daha sonra bu sonuç, C. Lanski (1993) ve J. H. Mayne (1992) tarafından bazı bilindik sonuçlara genellenmiştir. Daha ileriki bir çalışma olarak N. Argaç, L. Carini ve V. De Filippis 2008 yılında genelleştirilmiş türev durumunu ve J. C. Chang 2011 yılında sağ genelleştirilmiş skew türev durumunu ele almıştır.

L. Carini ve V. De Filippis 2000 yılında bir Lie ideal üzerinde kuvvet merkezi değerli komütatörler üzerindeki türevleri çalışmışlardır. Bu sonuçları V. De Filippis 2006 yılında türev yerine genelleştirilmiş türev olarak çözmüştür. Daha sonra, Y. Wang 2006 yılında asal halkalarda Lie ideallerinin kuvvet merkezli otomorfizmalarını incelenmiştir. Yapılan bu çalışmalar ışığında L. Carini, V. De Filippis ve G. Scudo 2014 yılında genelleştirilmiş skew türev durumunu ele almışlardır ve bazı sonuçları elde etmişlerdir.

Bazı yazarlar bir asal halkanın yapısı ve Engel koşulunu sağlayan toplamsal bir dönüşümün davranışı arasındaki ilişkiyi ele almışlardır. Bu bağlamda T. K. Lee 1995 yılında Engel koşulunun bazı türünü sağlayan asal halkanın tek yanlı ideali üzerinde çalışmıştır. Daha sonra 2008 yılında E. Albaş, N. Argaç ve V. De Filippis tek yanlı idealler üzerinde Engel koşulunu sağlayan genelleştirilmiş türev durumunu incelemişlerdir. Son olarak V. De Filippis ve O. M. Di Vincenzo 2014 yılında genelleştirilmiş skew türev durumunu ele almışlardır.

Bu çalışmadaki amacımız asal halkalar üzerinde tanımlı genelleştirilmiş skew türevleri içeren komütatörlerin halkalarda veya onların herhangi alt kümeleri (idealleri, Lie idealleri) üzerinde bazı koşulları sağladığında bu genelleştirilmiş skew türevlerin yapılarının karakterizasyonunu veren çalışmalarını sunmaktır.

2.ÖNBİLGİLER

2.1 Genel Bilgiler

Bu bölümde, diğer bölümlerde geçecek olan tanımlar ile ispatlarda kullanılacak asal halkaların bazı özellikleri, başvuru kolaylığı için alındıkları kaynaklarla birlikte verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Hungerford, 1974, Definition 1.7) R ve R' herhangi iki halka, $f: R \rightarrow R'$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)f(y)$ ise f dönüşümüne bir halka **homomorfizması**, özel olarak $R = R'$ alınırsa f dönüşümüne R halkasının bir **endomorfizması** denir. Eğer $f: R \rightarrow R'$ homomorfizması bire-bir ve örten bir homomorfizma ise f dönüşümüne bir halka **izomorfizması** denir. Özel olarak $R = R'$ alınırsa f izomorfizmasına R halkasının bir **otomorfizması** denir.

Tanım 2.1.2 (Hungerford, 1974, Definition 1.2) R bir halka, M ve N iki sağ (sol) R -modül olsun. Bir $f: M \rightarrow N$ toplamsal dönüşümü her $m \in M$ ve her $r \in R$ için $f(mr) = f(m)r$ ($f(rm) = rf(m)$) şartını sağlıyorsa f dönüşümüne bir **sağ (sol) R -modül homomorfizması** denir.

Tanım 2.1.3 (Hungerford, 1974) R bir halka ve ${}_R M$ bir sol R -modül olsun. $RM \neq (0)$ ve ${}_R M$ modülünün hiçbir öz alt modülü yoksa o zaman ${}_R M$ **modülüne basit (indirgenemez) modül** denir.

Tanım 2.1.4 (Hungerford, 1974) R bir halka, M bir sol R -modül ve A kümesi M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$Ann_l(A) = \{r \in R : \text{her } a \in A \text{ için } ra = 0\}$$

kümesine A alt kümesinin **sol sıfırlayanı (left annihilator)** denir. Sağ sıfırlayan da yukarıdaki tanıma benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.1.5 (Hungerford, 1974) ${}_R M$ bir sol R -modül olsun. $Ann_l(M) = (0)$ ise M ye sol "**faithful**" modül denir. Eğer R halkası basit, "faithful" bir sol R -modüle sahip ise o zaman R ye **primitif halka** denir.

Tanım 2.1.6 (Hungerford, 1974, Definition 1.8) R bir halka olsun. Her $a \in R$ için $na = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa bu n lerin en küçüğüne **halkanın karakteristiği** denir ve $Char(R) = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir en küçük pozitif n tamsayısı yoksa R halkasına sıfır karakteristikli denir ve $char(R) = 0$ ile ifade edilir.

Tanım 2.1.7 R bir halka olsun. $Z(R) = \{x \in R : \text{her } r \in R \text{ için } xr = rx\}$ kümesine R halkasının **merkezi** denir. $Z(R)$, R halkasının bir alt halkasıdır.

Tanım 2.1.8 (Lam, 2001, Definition 10.1) R bir halka ve P , R nin bir ideali olsun. $P \neq R$ ve R nin herhangi I, J idealleri için $IJ \subseteq P$ iken $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ oluyorsa P idealine R nin bir **asal ideali** denir.

Aşağıdaki önerme bir halkanın asal ideallerinin oldukça önemli karakterizasyonlarından birini verir.

Önerme 2.1.1 (Lam, 2001, Proposition 10.2) R bir halka ve $P \subset R$ nin bir ideali olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) P asal idealdir.
- (ii) $a, b \in R$ için $(a)(b) \subseteq P$ ise $a \in P$ veya $b \in P$ dir.
- (iii) $a, b \in R$ için $aRb \subseteq P$ ise ya $a \in P$ dır ya da $b \in P$ dir.
- (iv) R' nin I, J sağ (sol) idealleri için $IJ \subseteq P$ ise $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ dir.

Tanım 2.1.9 R bir halka olsun. $a, b \in R$ için $aRb = 0$ olduğunda $a = 0$ veya $b = 0$ oluyorsa R halkasına bir **asal halka** denir. Eğer $a \in R$ için $aRa = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına **yarı asal halka** denir.

Tanım 2.1.10 (Beidar et al. 1996) R yarı asal bir halka ve $D(R)$, R halkasının yoğun ideallerinin kümesi olsun.

$$H = \{(f; J) : J \in D(R), f : J_R \rightarrow R_R\}$$

kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdaki " $\sim$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$(f; J) \sim (g; K) \Leftrightarrow L \subseteq J \cap K$ olacak şekilde $L \in D(R)$ vardır ve L üzerinde $f = g$ dir.

$[f; J]$, $(f; J) \in H$ elemanının denklik sınıfı olmak üzere, toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$[f; J] + [g; K] = [f + g; J \cap K]$$

$$[f; J][g; K] = [fg; g^{-1}(J)].$$

Bu işlemler altında H in elemanlarının denklik sınıflarının oluşturduğu küme bir halka teşkil eder. Bu halkaya R nin **maksimal sağ kesirler halkası (sağ Utumi kesirler halkası)** denir ve $(Q_{mr}(R) = Q_{mr})(U(R))$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.2 (Beidar et al. 1996, Proposition 2.1.7) R bir yarı asal halka olsun. $Q_{mr}(R)$ aşağıdakileri sağlar.

- (i) R, Q_{mr} nin bir alt halkasıdır.
- (ii) Her $q \in Q_{mr}$ için $qJ \subseteq R$ olacak şekilde $J \in D$ vardır.
- (iii) Her $q \in Q_{mr}$ ve $J \in D$ için $qJ = 0$ dır ancak ve ancak $q = 0$ dır.

- (iii) Her $J \in D$ ve $f : J_R \rightarrow R_R$ sağ R - modül dönüşümü ve her $x \in J$ için $f(x) = qx$ olacak şekilde bir $q \in Q_{mr}$ vardır.

Üstelik $Q_{mr}(R)$ maksimal kesirler halkası izomorfizmaya bağlı olarak yukarıdaki özellikleri sağlayan bir halka olarak karakterize edilebilir.

Tanım 2.1.11 (Beidar et al., 1996) R yarı asal bir halka olsun.

$$M = M(R) = \{I : I, R \text{ 'nin bir ideali ve } Ann_l(I) = 0\}$$

M kümesi çarpım ve sonlu kesişim altında kapalıdır.

$$T = \{(f; J) : J \in M, f : J_R \rightarrow R_R \text{ sağ } R\text{- modül homomorfizması}\}$$

kümesi üzerinde aşağıda tanımlanan " $\approx$ " bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

$(f; J) \approx (g; K) \Leftrightarrow L \subseteq J \cap K$ olacak şekilde $L \in M$ vardır ve L üzerinde $f = g$ dir.

$\{f; J\}, (f; J) \in T$ elemanının denklik sınıfı olmak üzere, toplama ve çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\{f; J\} + \{g; K\} = \{f + g; KJ\}$$

$$\{f; J\} \{g; K\} = \{fg; KJ\}$$

Bu işlemler altında T nin elemanlarının denklik sınıflarının oluşturduğu küme bir halka teşkil eder. Bu halkaya R nin **iki yanlı sağ (Martindale) kesirler halkası** denir ve $(Q_r = Q_r(R))$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.3 (Beidar et al. 1996, Proposition 2.2.1) R yarı asal bir halka olmak üzere $Q_r(R)$ aşağıdakileri sağlar.

- (i) R, Q_r nin bir alt halkasıdır.
- (ii) Her $q \in Q_r$ için $qJ \subseteq R$ olacak şekilde $J \in I$ vardır.
- (iii) Her $q \in Q_r$ ve $J \in I$ için $qJ = 0$ dır ancak ve ancak $q = 0$ dır.
- (iv) Her $J \in I(R)$ ve $f: J_R \rightarrow R_R$ sağ R - modül dönüşümü ve her $x \in J$ için $f(x) = qx$ olacak şekilde $q \in Q_r$ vardır.

$Q_r(R)$ halkası izomorfizmaya bağlı olarak yukarıdaki özellikleri sağlayan bir halka olarak karakterize edilebilir.

$Q_s = \{q \in Q_{mr}(R) : qJ \cup Jq \subseteq R, J \in I\}$ Q_r nin bir alt halkasıdır ve R nin **simetrik (Martindale) kesirler halkası** olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.12 (Beidar et al., 1996) Herhangi bir R halkasının tüm minimal sol ideallerinin toplamına R ' nin sol "socle " si denir ve $Soc_l(R)$ ile gösterilir. Sağ "socle " si da benzer şekilde tanımlanır. Sol ve sağ "socle" her zaman eşit olmak zorunda değildir.

Sonuç 2.1.1 (Beidar et al. 1996, Corollary 4.3.4) R yarı asal bir halka ve $e = e^2 \in R$ olsun. O zaman

- (i) Re minimal sol idealdir ancak ve ancak eR , R nin minimal sağ idealidir.
- (ii) $Soc_l(R) = Soc_r(R)$.

Eğer $Soc_l(R) = Soc_r(R)$ ise kısaca $Soc(R)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 (Jacobson, 1975) X herhangi bir sayılabilir küme ve $S < X >$, X üzerinde birimli serbest yarı grup olsun. K birimli değişmeli bir halka olmak üzere $K\{X\}$, $S < X >$ i baz kabul eden serbest K - modülü gösterebilir. $K\{X\}$ üzerinde

çarpma işlemi " yan yana koyma " olarak tanımlansın. Bu durumda $K\{X\}$ bir K -cebir olur. Bu cebire X üzerindeki **serbest K - cebir** denir. $K\{X\}$ serbest cebirinin elemanlarına da **polinom** denir ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde gösterilir. Bazı elemanlarına da **monomial** denir.

Tanım 2.1.14 (Jacobson, 1975) $f \in K\{X\}$ olsun. f , $K\{X\}$ in sonlu üretilmiş $K\{x_1, \dots, x_n\}$ alt cebirine ait ise $f = f(x_1, \dots, x_n)$ yazılır. A bir K - cebir olsun. Her $a_1, \dots, a_n \in A$ için $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ ise f ye A için bir **polinom özdeşliği** denir. A halkasına da **polinom özdeşliği halkası** denir.

Tanım 2.1.15 (Beidar et al., 1996) R yarı asal bir halka ve X değişmeli olmayan bilinmeyenlerin sayılabilir bir kümesi olsun. $T = Q_r(R) *_C C(X)$ serbest çarpımını ele alalım. T kümesinin elemanlarına genelleştirilmiş **polinom özdeşliği** denir. $q_i \in Q_r(R)$ ve $y_i \in X$ olmak üzere $m = q_0 y_1 q_1 y_2 q_2 \dots y_n q_n$ tipindeki elemanlara **monomial**, q_i elemanlarına da m monomialinin **katsayıları** denir. T kümesinin her f elemanı monomiallerin sonlu toplamı şeklindedir ve bu gösterim tek türdür. $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in T$ olmak üzere her $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ için $f(r_1, \dots, r_n) = 0$ ise f polinomuna R için bir **genelleştirilmiş polinom özdeşliği** ve R halkasına da **genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası** denir. Burada $f \in T$, T serbest çarpımının sıfırı ise o zaman f özdeşliği aşıkır genelleştirilmiş polinom özdeşlik, aksi taktirde aşıkır olmayan genelleştirilmiş polinom özdeşlik olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.16 (Beidar et al., 1996) Bir R asal halkasının sıfırdan farklı bir türevi d ve I , R halkasının sıfırdan farklı bir ideali olsun. $f \in Q_r(R) *_C C\{X\}$ olmak üzere her $r_i \in I$ için $f(r_1, \dots, r_n, d(r_1), \dots, d(r_n)) = 0$ ise $f(x_1, \dots, x_n, d(x_1), \dots, d(x_n)) = 0$ ifadesine I da bir **diferansiyel özdeşlik** denir.

Tanım 2.1.17 (Jacobson, 1975) R bir halka, $n \geq 2$ bir tamsayı ve $S_n, \{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerindeki simetrik grup olsun. $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{-1, 1\}$ işaret fonksiyonu olmak üzere her $x_1, \dots, x_n \in R$ için

$$s_n = s_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$$

ile tanımlı polinoma n değişkenli standart polinom denir.

Teorem 2.1.1 (Kharchenko, 1978, Theorem) R bir asal halka, d, R nin bir türevi ve I, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Herhangi $r_1, r_2, \dots, r_n \in I$ için $I, f(r_1, \dots, r_n, d(r_1), \dots, d(r_n)) = 0$ diferansiyel özdeşliğini sağlıyor ise

(i) I ideali $f(r_1, \dots, r_n, x_1, \dots, x_n) = 0$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de

sağlar

ya da

(ii) d bir Q - iç türevdir, yani bir $q \in Q$ için $d(x) = [q, x]$ dır ve $I,$

$$f(r_1, \dots, r_n, [q, r_1], \dots, [q, r_n]) = 0$$

genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Özellik 2.1.1 (Chuang, 1988, Lemma 2) $U(R), R$ asal halkasının Utumi kesirler halkası ve $B, U(R)$ nin C üzerindeki bir bazı olsun. $\alpha_i \in C, q_i \in B$ ve $y_i \in \{X_1, \dots, X_n\}$ için $m_i = q_0 y_1 \dots y_n q_n$ ler monomialler olmak üzere, $T = U(R) *_C C\{X\}$ serbest çarpımının bir elemanı $g = \sum_i \alpha_i m_i$ formundadır. Bu durumda $g = \sum_i \alpha_i m_i$ genelleştirilmiş polinomunun T serbest çarpımında sıfır olması için gerek ve yeter bir koşul her i için $\alpha_i = 0$ olmasıdır. Sonuç olarak

$h_i(X_1, \dots, X_n), k_i(X_1, \dots, X_n) \in T$ için $g_1(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i h_i(X_1, \dots, X_n)$ ve

$g_2(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n X_i k_i(X_1, \dots, X_n)$ olmak üzere $a_1, a_2 \in U(R)$ elemanları C

üzerinde lineer bağımsız ve $a_1 g_1(X_1, \dots, X_n) + a_2 g_2(X_1, \dots, X_n) = 0 \in T$ ise o zaman $g_1(X_1, \dots, X_n)$ ve $g_2(X_1, \dots, X_n)$ in her ikisi de T de sıfırdır.

Tanım 2.1.18 R bir halka ve C , R halkasının genişletilmiş merkezi ve $\alpha \in \text{Aut}(R)$ olsun. Eğer $\text{char}(R) = 0$ ise her $x \in C$ için $\alpha(x) = x$, sabit bir t tamsayısı için $\text{char}(R) = p \geq 2$ ise her $x \in C$ için $\alpha(x) = x^{p^t}$ oluyorsa α ya **Frobenius otomorfizması** denir.

Yardımcı Özellik 2.1.2 (Beidar at al., 1996, Theorem 4.7.3) R sıfırdan farklı bir "socle" a sahip bir primitive halka, M indirgenemez bir sağ R - modül olsun. $\Delta = \text{End}(M_R)$ ve α , R halkasının bir otomorfizması olsun. O zaman her $r \in R$ için $r^\alpha = \alpha(r) = S^{-1}rS$ olacak şekilde M nin bir $S^{-1}\tau$ - yarı- lineer otomorfizması ve bir $\tau : \Delta \rightarrow \Delta$ otomorfizması vardır.

Yardımcı Özellik 2.1.3 (Beidar at al., 1996, Theorem 4.2.1) R indirgenemez faithful bir R modül V ye sahip bir (sol) primitif halka ve $D = \text{End}({}_R V)$ olsun. O halde herhangi bir n pozitif tamsayısı için eğer $v_1, v_2, \dots, v_n$ ler V içinde D -bağımsız ve $w_1, w_2, \dots, w_n$ ler V içinde keyfi vektörler ise $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $rv_i = w_i$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır.

Teorem 2.1.2 (Beidar at al., 1996, Theorem 4.7.4) R aşık olmaya bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlayan bir asal halka ve her $x \in C$ için $\alpha(x) = x$ olacak şekilde R nin bir α otomorfizması varsa o zaman α , R nin bir iç otomorfizmasıdır.

Yardımcı Özellik 2.1.4 (Martindale, 1969, Theorem 3) R bir asal halka ve $S = RC$ R nin merkezi kapanışı olsun. S , C üzerinde genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar ancak ve ancak S halkası eS minimal sağ idealini içerir. Yani S primitiftir ve eSe , C üzerinde sonlu boyutlu bölüm cebridir.

Yardımcı Özellik 2.1.5 (Jacobson, 1964, Theorem 1) (Wedderburn Theorem) Her sonlu bölümlü halka değişmelidir.

Yardımcı Özellik 2.1.6 (Beidar et al., 1996, Theorem 4.7.4) R , genişletilmiş merkezi C olan faithful indirgenemez sağ R modül ve sıfırdan farklı H "socle" ına sahip merkezi kapalı bir primitif halka olsun. M de, merkezi üzerinde sonlu boyutlu olan $\Delta = \text{End}(M)$ halkası olmak üzere o zaman R nin α C - lineer otomorfizması bir iç otomorfizmadır.

Yardımcı Özellik 2.1.7 (Beidar and Bresar, 2001, Lemma 7.1) D bir bölümlü halka ve M , $\dim(M_D) \geq 2$ olacak şekilde bir sağ vektör uzayı olsun. T , her $x \in M$ için x ve Tx lineer bağımlı olacak şekilde M nin toplamsal bir endomorfizması olmak üzere o zaman her $x \in M$ için $Tx = x\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in D$ vardır.

Yardımcı Özellik 2.1.8 (Herstein, 1979, Theorem 2) R bir asal halka ve $0 \neq U$, R nin bir ideali olsun. Eğer her $u \in U$ için $(au - ua)^n = 0$ olacak şekilde bir $a \in R$ varsa o zaman $a \in Z(R)$ dir.

Yardımcı Özellik 2.1.9 (Chuang, 1998, Theorem 2) R bir asal halka ve U , R nin Utumi kesirler halkası olsun. U nun herhangi bir yoğun alt modülü M nin sağladığı genelleştirilmiş polinom özdeşliği (GPI) ile U nun sağladığı genelleştirilmiş polinom özdeşliği (GPI) aynıdır.

Yardımcı Özellik 2.1.10 (Lee and Wong, 1995, Proposition) A sonsuz bir k cismi üzerinde bir asal halka ve K , k cisminin bir cisim genişlemesi olsun. O zaman A ve $A \otimes_k K$, katsayıları A da olan aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Özellik 2.1.11 (Erickson at al., 1975, Theorem 3.5) ϕ birimli değişmeli bir halka olmak üzere, ϕ üzerinde merkezi kapalı bir asal cebir A olsun. F ϕ 'nin bir cisim genişlemesi ise o zaman $A \otimes_{\phi} F$, F üzerinde merkezi kapalı bir asal cebirdir.

2.2 Adi Türevli ve Genelleştirilmiş Türevli Halkalar

R bir halka ve $x, y \in R$ olmak üzere x ve y elemanlarının komütatör çarpımı $[x, y] = xy - yx$ olarak tanımlanır.

R bir halka ve $x, y \in R$ olmak üzere $[x, y]_1 = [x, y] = xy - yx$ ve $k > 1$ için

$$[x, y]_k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} y^i x y^{k-i} \text{ olarak tanımlanır.}$$

Tanım 2.2.1 R bir halka ve $d: R \rightarrow R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d dönüşümüne R nin bir **türevi** (adi) denir. $a \in R$ olmak üzere her $x \in R$ için $\delta(x) = [a, x] = ax - xa$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir türevdir ve bu tip türeve **iç türev** denir.

Yardımcı Özellik 2.2.1 R asal bir halka, I R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Eğer her $a, b \in R$ için $alb = (0)$ ise o zaman ya $a = 0$ dır ya da $b = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 2.2.2 (Herstein, 1969, Lemma 1.1) R bir halka ve I , R nin sıfırdan farklı bir sağ ideali olsun. n sabit bir tamsayı olmak üzere $a \in I$ verildiğinde $a^n = 0$ ise R nin sıfırdan farklı bir nilpotent ideali vardır.

Yardımcı Özellik 2.2.3 (Demir and Argaç, 2010, Corollary 1) R bir asal halka ve $a \in R$ olsun. k, m, n sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x \in R$ için $[ax^m, x^n]_k = 0$ ise o zaman $a \in Z(R)$ dir.

Tanım 2.2.2 R bir halka olsun. R nin A ve B iki alt kümesi için $[A, B]$, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere tüm $[a, b]$ elemanları tarafından üretilen R nin toplamsal alt grubu olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.3 R bir halka ve U , R nin toplamsal bir alt grubu olsun. $[U, R] \subseteq U$ ise U ya R nin bir **Lie ideali** denir. Eğer $[U, U] \neq 0$ ise o zaman U ideale değişmeli değildir denir.

Yardımcı Özellik 2.2.4 (Lanski, 1990, Remark 2) U , R nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve $I = [U, U]$ ve $[U, U], \{[x, y] : x, y \in U\}$ kümesi tarafından üretilen R nin bir Lie ideali ise o zaman $I \subset U + U^2$ ve $[I, R] \subset U$ dir.

Tanım 2.2.4 (Hvala, 1998) $G : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olmak üzere her $x, y \in R$ için $G(xy) = G(x)y + xd(y)$ olacak şekilde R nin bir d türevi varsa G ye **genelleştirilmiş türev** denir. $a, b \in R$ için $G(x) = ax + bx$ formundaki bir dönüşüm **genelleştirilmiş iç türev** olarak adlandırılır.

2.3 Skew Türevli ve Genelleştirilmiş Skew Türevli Halkalar

Tanım 2.3.1 β , R' nin bir otomorfizması olsun. R' nin bir β türevi her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \delta(x)y + \beta(x)\delta(y)$ koşulunu sağlayan $\delta : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşümüdür. β - türevler **skew türevler** olarakta adlandırılır. $\beta = 1$, R' nin birim dönüşümü olduğu zaman β - türevler sadece türev (adi türev) dir. Eğer $\beta \neq 1$ ise o zaman $1 - \beta$ dönüşümü de bir β - türevdir.

Tanım 2.3.2 R bir halka olsun. $f : R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm olmak üzere eğer her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + \beta(x)\delta(y)$ olacak şekilde bir $\delta : R \rightarrow R$ bir β - türevi varsa f bir **sağ genelleştirilmiş β - türev** olarak adlandırılır. Sağ genelleştirilmiş β - türevlerin hem β - türevlere hem de genelleştirilmiş türevlerin bir genellemesidir.

Tanım 2.3.3 R bir halka, $\alpha, \beta \in \text{Aut}(R)$ ve $f : R \rightarrow R$ bir (α, β) - türev olsun. $g : R \rightarrow R$ dönüşümü her $x, y \in R$ için $g(xy) = g(x)\alpha(y) + \beta(x)f(y)$ ise g dönüşümüne, f ile belirli bir **genelleştirilmiş (α, β) türev** denir.

Tanım 2.3.4 R bir asal halka ve Q , R nin simetrik Martindale kesirler halkası olsun. Q üzerindeki tüm skew türevlerin kümesi $\text{SDer}Q$ ile gösterilsin. O zaman $i=1, 2, \dots, n$ için $d_i \in \text{SDer}Q$ olmak üzere $\Delta := d_1 d_2 \dots d_n$ toplamsal dönüşümü skew türev kelimesi olarak adlandırılır. Bu durumda bir skew diferansiyel polinomu, katsayıları Q da olan Δ_j türev kelimeleri birli işlem olarak hareket eden ve değişmeli olmayan x_i değişkenlerini içeren $\phi(\Delta_j(x_i))$ formunda bir genelleştirilmiş polinomdur. $\phi(\Delta_j(x_i))$ skew diferansiyel polinomu Q nun bir T alt kümesi üzerinde skew diferansiyel özdeşlik olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.5 (Chang, 2003) f , R nin bir sağ genelleştirilmiş β - türevi ise o zaman δ , R nin bir β - türevi olmak üzere her $x \in R$ için $f(x) = sx + \delta(x)$ olacak şekilde bir $s \in R_F$ vardır.

Tanım 2.3.6 R bir halka olsun. R nin bir β - türevi olan δ , bazı $b \in Q$ için $\delta(x) = bx - \beta(x)b$ formunda ise o zaman δ ya **X- iç türev** denir veya kısaca **X- iç** de denir. Eğer δ , X - iç türev değilse o zaman **X- dış türev** olarak adlandırılır veya kısaca **X- dış** da denir.

Tanım 2.3.7 Eğer β otomorfizması bazı tersinir $u \in Q$ için $\beta(x) = uxu^{-1}$ ile ifade edilebiliyorsa β ya **X- iç otomorfizma** veya kısaca **X- iç** denir.

Yardımcı Özellik 2.3.1 (Chang, 2003, Lemma 2) R bir asal halka ve f R nin sol (sağ) genelleştirilmiş (α, β) - türevi olsun. O zaman f R nin sol ${}_R F$ (sağ F_R) Martindale kesirler halkasına tek türlü genişletilebilir ve her $x \in R$ için ve δ , R nin (α, β) -türevi olmak üzere $f(x) = \beta(x)f(1) + \delta(x)$ (veya $f(x) = f(1)\beta(x) + \delta(x)$) dir.

Yardımcı Özellik 2.3.2 (Chou and Liu, 2009, Lemma 3.1) V bir D bölümlü halkası üzerinde bir vektör uzayı ve $\dim V_D \geq 2$ olmak üzere sonlu boyutlu sıfırdan farklı lineer dönüşümleri içeren $End(V_D)$ halkasının yoğun bir alt halkası R ve σ R nin bir otomorfizması olmak üzere R nin sıfırdan farklı bir σ türevi δ olsun. Eğer k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x, y \in R$ için $[\delta([x, y]), [x, y]]_k = 0$ ise o zaman $char R = 2$ ve $M_2(D)$ D üzerinde 2×2 matrisler halkası olmak üzere $R \cong M_2(D)$ dir.

Yardımcı Özellik 2.3.3 (Jacobson, 1964, Structure Theorem) Bir U halkası için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

- (i) U , sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır.
- (ii) U , D bölümlü halkası üzerindeki M vektör uzayının lineer dönüşümlerinin yoğun bir alt halkasına izomorftur, üstelik U sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümleri içerir.

Yardımcı Özellik 2.3.4 (De Filippis, 2006, Corollary) R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka I , R nin iki yanlı bir ideali, $a \in R$ ve $n \geq 1$ sabit pozitif bir tamsayı olsun. Herhangi $x, y \in I$ için $(a[x, y], [x, y])^n = 0$ ise $a \in Z(R)$ dir.

Yardımcı Özellik 2.3.5 (De Filippis, 2006, Lemma) R , karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka, I , R ' nin iki yanlı ideali, $a, b \in R$ ve $n \geq 1$ olsun. Herhangi $x, y \in I$ için $([a[x, y] - [x, y]b, [x, y]])^n = 0$ ise o zaman R s_4 ü sağlamadığı ve $a = -b$ olmadığı sürece $a, b \in Z(R)$ dir.

Yardımcı Özellik 2.3.6 (Chuang and Lee, 2005, Theorem 1) R bir asal halka ve D R nin bir dış skew türevi olsun. Eğer $\phi(x_i, D(x_i))$ R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise o zaman x_i ve y_i ler farklı değişkenler olmak üzere $\phi(x_i, y_i)$ de R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Yardımcı Özellik 2.3.7 (Kharchenko,1975) R bir cisim ve $\alpha \in \text{Aut}(R)$, R nin bir dış otomorfizması olsun. $\phi(x_i, \alpha(x_i))$ R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise R , x_i ve y_i ler farklı değişkenler olmak üzere aşıkarak olmayan $\phi(x_i, y_i)$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.8 (Chuang, 1992, Main Theorem) Otomorfizmalı ve antiotomorfizmalı aşıkarak olmayan bir diferansiyel özdeşliği sağlayan bir asal halka aynı zamanda aşıkarak olmayan adi genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de (türevsiz, otomorfizmasız ve antiotomorfizmasız olan polinom özdeşliğini) sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.9 (Chuang, 1993, Theorem 3) R bir asal halka, R nin otomorfizmalarının grubu A , R nin Q - iç otomorfizmalarını içeren bir grubu G_i , ve G_i modül A nin bağımsız bir alt kümesi S olsun. Eğer $\phi = \psi(x_i^{g_j}) = 0$, S kümesine bağlı R nin otomorfizmalı bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ve her $x_i \in X$ ve $g_j \in S$ için $\text{char}(R) \neq 0$ olmak üzere $\phi = \psi(x_i^{g_j})$ nin $x_i^{g_j}$ kelime derecesi $\text{char}(R)$ den küçük ise o zaman $\psi(z_{ij}) = 0$ da R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Yardımcı Özellik 2.3.10 (Chuang, 1988, Theorem 2) R bir asal halka ve I da R nin iki yanlı bir ideali olsun. O zaman I , R ve Q_r katsayıları Q_r de olan aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.11 (Chuang, 1993, Theorem 1) R bir asal halka ve I da R nin iki yanlı bir ideali olsun. O zaman I , R ve Q_r otomorfizmalı aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.12 (Kharchenko, 1975) R bir bölge ve $\alpha \in \text{Aut}(R)$, X - dış olsun. Eğer $\phi(x_i, \alpha(x_i))$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise o zaman R , x_i ve y_i ler farklı değişkenler olmak üzere R halkası aşıkarak olmayan $\phi(x_i, y_i)$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.13 (Chuang, 2005, Theorem 1) R bir asal halka ve D de R nin bir X - dış skew türevi olsun. Eğer $\phi(x_i, D(x_i))$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise o zaman x_i ve y_i ler farklı değişkenler olmak üzere R halkası $\phi(x_i, y_i)$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.14 (Chuang, 2005, Theorem 1) R bir asal halka, D , R nin bir X - dış skew türevi ve α da R nin bir X - dış otomorfizması olsun. Eğer $\phi(x_i, D(x_i), \alpha(x_i))$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise o zaman x_i , y_i ve z_i ler farklı değişkenler olmak üzere R halkası $\phi(x_i, y_i, z_i)$ genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.15 (Chuang, 1992, Main Theorem) Otomorfizmalı ve anti-otomorfizmalı bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlayan bir asal halka aynı zamanda aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.16 (Chuang, 1993, Theorem 2) R bir asal halka ve ϕ , R nin Frobenius otomorfizması olmayan bir otomorfizması olsun. $\phi(x_i, \phi(x_i)) = 0$, R nin bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise o zaman x_i ve y_i ler farklı değişkenler olmak üzere $\phi(x_i, y_i) = 0$ da R nin bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Yardımcı Özellik 2.3.17 (Lee, 1995, Main Theorem) R sol Utumi kesirler halkası U olan bir asal halka ve λ , R ' nin bir sol ideali olsun. Her $x \in \lambda$ için $[d(x^n), x^n]_k = 0$ ise o zaman $[\lambda, R]d(R) = 0$ dır. Yani, $\lambda(1-e)$ sol ideali, $(1-e)U$ da merkezi ve ayrıca $d(eU) = eU$ olacak şekilde U da merkezi bir e idempotenti vardır.

Yardımcı Özellik 2.3.18 (Albaş at al., 2008, Corollary 1) R bir asal halka ve $a \in R$ olsun. Her $r \in R$ için $[ar^k, r^k]_m = 0$ ise o zaman $a \in Z(R)$ dir.

Yardımcı Özellik 2.3.19 (Chuang, 1988, Theorem 2) R bir asal halka ve U , R nin Utumi kesirler halkası olsun. U nun herhangi bir yoğun alt modülü M ve U nun sağladığı genelleştirilmiş polinom özdeşlikleri aynıdır.

Yardımcı Özellik 2.3.20 (Chou and Liu, 2009, Theorem 1.1) R bir asal halka ve L R nin değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun. Her $x \in L$ ve sabit bir k pozitif tamsayısı için δ , R nin $[\delta(x), x]_k = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir σ - türevi ise o zaman $\text{char} R = 2$ ve uygun bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir.

Tanım 2.3.8 (Chuang and Lee, 2005) R asal bir halka ve Q_s , R simetrik Martindale kesirler halkası olmak üzere Q_s nin bir δ türevi süreklidir ancak ve ancak R nin sıfırdan farklı bir I ideali için $\delta(I) \subseteq R$ dir.

Yardımcı Özellik 2.3.21 (Chuang and Lee, 2005, Theorem 2) R asal bir halka, σ , Q_s nin bir otomorfizması olmak üzere σ ve σ^{-1} sürekli ise o zaman σ R nin iki sürekli otomorfizması olarak adlandırılır. $A(R)$ R nin iki sürekli otomorfizmalarının kümesi ve $L_\sigma(R)$ de R nin sürekli σ - türevlerinin kümesi olsun. $\delta \in L_\sigma(R)$ ve $g_k \in A(R)$ için $\varphi(x_i^{\delta^j g_k})$ R nin sıfırdan farklı iki yanlı ideali üzerinde bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ise R_F üzerinde de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Yardımcı Özellik 2.3.22 (Chuang and Lee, 2005, Theorem 1) R asal halkasının X dış otomorfizması σ ve X -dış σ -türevi δ olsun. O zaman R , $\phi(x_i, \sigma(x_i), \delta(x_i)) = 0$ formundaki bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlıyorsa x_i, y_i, z_i ler farklı değişkenler olmak üzere $\phi(x_i, y_i, z_i)$ formundaki genelleştirilmiş polinom özdeşliğini de sağlar.

Yardımcı Özellik 2.3.23 (Chuang, 1993, Theorem 1) R bir asal halka ve $\phi = 0$, R nin sıfırdan farklı iki yanlı bir ideali için diferansiyel özdeşlik olsun. O zaman $\phi = 0$, R nin iki yanlı Utumi kesirler halkası için de bir diferansiyel özdeşliktir.

Yardımcı Özellik 2.3.24 (Chuang, 1992, Corollary) Bir R asal halkası otomorfizmalar ve ters otomorfizmalar ihtiva eden aşıkâr olmayan bir diferansiyel özdeşliği sağlıyor ise C , R nin genişletilmiş merkezi ve RC de R nin merkezi kapanışı olmak üzere, R, C üzerinde sonlu boyutlu bölümlü halka ve sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır.

Yardımcı Özellik 2.3.25 (Lee at al., 1997, Lemma 1.2) R bir asal halka ve merkezi kapanışı S olsun. Her $x \in R$ için $\sum_{i=1}^m a_i x b_i + \sum_{j=1}^n c_j x d_j = 0$ olacak şekilde a_i, b_i, c_j, d_j ler S nin elemanları olsun. Eğer $a_1, a_2, \dots, a_m$ elemanları C üzerinde lineer bağımsız ise her bir b_i elemanı C üzerinde $d_1, \dots, d_n$ elemanlarının bir lineer kombinasyonudur.

3. ASAL HALKALARDA LİE İDEAL ÜZERİNDE ENGEL KOŞULLU GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLER

Bu bölümde Jui-Chi Chang ın 2011 deki "Generalized Skew Derivations with Engel Conditions On Lie Ideals" adlı çalışması ele alınacaktır. Şimdi çalışma boyunca kullanılan bazı tanımları hatırlatalım.

Bu bölümde R merkezi $Z(R)$ olan bir asal halka, ${}_F R$, R nin sağ Martindale kesirler halkası, C R nin merkezi genişlemesi ve $T = {}_F R *_C C(X)$ serbest çarpımı gösterecektir. β R nin bir otomorfizması olsun. R nin bir β -türevi, her $x, y \in R$ için $\delta(xy) = \delta(x)y + \beta(x)\delta(y)$ koşulunu sağlayan $\delta : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşümdür. $f : R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşümü olmak üzere, eğer her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + \beta(x)\delta(y)$ olacak şekilde $\delta : R \rightarrow R$ bir β -türevi varsa f bir sağ genelleştirilmiş β -türevdir.

Chou ve Liu, 2009 daki çalışmalarında R bir asal halka olmak üzere eğer δ R ' nin sıfırdan farklı bir σ -türevi ve L , k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere, her $x \in L$ için $[\delta(x), x]_k = 0$ olacak şekilde R ' nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ise o zaman R ' nin karakteristiği 2 ve bazı F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ olduğunu göstermişlerdir. Bu sonuçlar 1992 yılında Mayne ve 1993 yılında Lanski tarafından elde edilen sonuçların bir genellenmesidir.

Bu bölümde, Chou ve Liu tarafından 2009 yılında elde edilen sonuçlar skew türevlere genişletilecektir. Elde edilen bu yeni sonuçlar aynı zamanda 2008 yılında Argaç, Carini ve De Filippis tarafından elde edilen ilgili sonuçların genelleştirilmiş türevlere bir genellemesidir.

Temel Teorem R bir asal halka, L , R nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve δ β -türevi ile belirli R nin sıfırdan farklı bir sağ genelleştirilmiş β -türevi f olsun. k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x \in L$ için $[f(x), x]_k = 0$ ise o zaman ya her $x \in R$ için $f(x) = sx$ olacak şekilde $s \in C$ vardır ya da bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dır. Üstelik, eğer son durum sağlanırsa yani $R \subseteq M_2(F)$ ise ya R nin karakteristiği 2 dir ya da R nin karakteristiği 2 den farklı ve $b, c \in {}_F R$ ve $b + c \in C$ olmak üzere her $x \in R$ için $f(x) = bx - xc$ dır.

Temel teoremin ispatından sonra iki tane sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1 R bir asal halka ve L , R nin değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun. δ β -türevi ile belirli R nin sıfırdan farklı bir sağ genelleştirilmiş β türevi f olsun. k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x \in L$ için $[f(x), x]_k = 0$ ise o zaman her $x \in R$ için $f(x) = sx$ olacak şekilde bir $s \in C$ vardır veya R nin karakteristiği 2 ve bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir.

Sonuç 3.2 R bir asal halka ve L , R nin değişmeli olmayan bir Lie ideali ve d türevi ile belirli R nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş türevi f olsun. k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x \in L$ için $[f(x), x]_k = 0$ ise o zaman ya her $x \in R$ için $f(x) = sx$ olacak şekilde $s \in C$ vardır, ya da bazı F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir. Üstelik, eğer son durum sağlanırsa yani $R \subseteq M_2(F)$ ise o zaman ya R ' nin karakteristiği 2 dir ya da R ' nin karakteristiği 2 den farklıdır ve $b, c \in {}_F R$ ve $b + c \in C$ olmak üzere her $x \in R$ için $f(x) = bx - xc$ dir.

Aşağıda Argaç, Carini ve De Filippis'in 2008 deki çalışmasında yer alan bir sonuç verilecektir.

Yardımcı Özellik 3.1 (Argaç, Carini and De Filippis, 2008) R merkezi $Z(R)$ olan bir asal halka ve $b \in R$ ve $L \subseteq R$ 'nin değişmeli olmayan bir Lie ideali olsun. Eğer k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x \in L$ için $[bx, x]_k = 0$ ise o zaman R 'nin karakteristiği 2 ve bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ olmadıkça $b \in Z$ dir.

Yardımcı Özellik 3.2 D bölümlü halka ve $\dim V_D \geq 3$ olmak üzere sıfırdan farklı sonlu ranklı lineer dönüşümleri içeren $End(V_D)$ nin yoğun bir alt halkası R olsun. $b, c \in R$ için ϕ , R nin bir otomorfizması olmak üzere $f(x) = bx - \phi(x)c$ olduğunu kabul edelim. Eğer sabit bir k pozitif tamsayısı ve her $x, y \in R$ için $[f([x, y]), [x, y]]_k = 0$ koşulu sağlanırsa o zaman $b - c \in Z$ ve her $x \in R$ için $f(x) = (b - c)x$ dir.

İspat Bazı gerekli değişiklikler yapılarak Chou ve Liu nun 2009 yılındaki çalışmasında bir özellik (Yardımcı Özellik 2.3.2) in ispatı kullanılacaktır. Yardımcı Özellik 2.3.3 (1) $\Leftrightarrow$ (2) den R sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır. Dolayısıyla Yardımcı Özellik 2.1.2 den her $x \in R$ için $\phi(x) = TxT^{-1}$ olacak şekilde bir semi-doğrusal $T \in End(V)$ otomorfizması vardır. Yani her $v \in V$ ve $s \in D$ için τ , D 'nin bir otomorfizması olmak üzere $T(vs) = T(v)\tau(s)$ dir. O zaman $f(x) = bx - \phi(x)c = bx - TxT^{-1}c$ dir ve

eğer v ile $T^{-1}cv$ D - bağımlı ise her $v \in V$ için $T^{-1}cv = v\lambda$ olacak şekilde $\lambda \in D$ vardır. Her $x \in R$ ve her $v \in V$ için

$$f(x)v = bxv - TxT^{-1}cv$$

$$= bxv - Txv\lambda$$

$$= bxv - T(T^{-1}cxv)$$

$$= bxv - cxv$$

$$= ((b-c)x)v$$

olduğundan

$$(f(x) - (b-c)x)v = 0$$

olduğu görülür. Buradan her $x \in R$ ve her $v \in V$ için, $(f(x) - (b-c)x)V = 0$ olur.

V "faithful" olduğundan V nin sol sıfırlayanı sıfırdır. Yani; her $x \in R$ için $f(x) = (b-c)x$ dır. Hipotezden her $x, y \in R$ için

$$[(b-c)[x, y], [x, y]]_k = 0 \quad (3.1)$$

olduğundan (3.1) ve Yardımcı Özellik 3.1 den $b-c \in Z$ olur ve burada ispat biter.

Bu yüzden öyle bir $v_0 \in V$ için v_0 ve $T^{-1}cv_0$ vektörlerinin D -bağımsız olduğunu kabul edelim ve ispatı durumlara ayıralım. Eğer $\dim V_D \geq 4$ ise $v_0, T^{-1}cv_0, u, w$ vektörleri D -bağımsız olacak şekilde $u, v \in V$ seçilebilir. R yoğun olduğundan Yardımcı Özellik 2.1.3 den bu bağımsız vektörleri V içinde keyfi vektörlere atayabiliriz. Yani;

$$x_0 = 0, \quad xT^{-1}cv_0 = 0, \quad xu = T^{-1}w, \quad xw = u$$

ve

$$yv_0 = 0, \quad yT^{-1}cv_0 = u, \quad yu = -w, \quad yw = 0$$

olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Böylece $[x, y]v_0 = 0$, $[x, y]T^{-1}cv_0 = T^{-1}w$, $[x, y]w = w$, $(b[x, y] - \phi([x, y])c)v_0 = -w$ olur. Hipotezden

$$0 = [f([x, y]), [x, y]]_k v_0$$

$$\begin{aligned}
&= \left[b[x, y] - \phi([x, y])c, [x, y] \right]_k v_0 \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_0 \\
&= (-1)^i \binom{k}{k} [x, y]^k (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 \\
&= (-1)^{k+1} [x, y]^k w \\
&= (-1)^{k+1} w
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ise $w = 0$ çelişkisini verir.

Öyleyse $\dim V_D = 3$ olduğu kabul edilebilir. Bu durumda v_0 , $T^{-1}cv_0$ ve w vektörleri D - bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ seçilebilir ve böylece $\{v_0, T^{-1}cv_0, w\}$ kümesi V için bir baz olur.

Eğer $T(v_0 + T^{-1}cv_0 + w) \in v_0D$ ve $T(T^{-1}cv_0 + w) \in v_0D$ ise o zaman

$$T(v_0 + T^{-1}cv_0 + w) = v_0\alpha$$

ve

$$T(T^{-1}cv_0 + w) = v_0\beta$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in D$ vardır.

$T(v_0 + T^{-1}cv_0 + w) = T(v_0) + T(T^{-1}cv_0 + w)$ olduğundan $v_0\alpha = T(v_0) + v_0\beta$ ve buradan $T(v_0) = v_0(\alpha - \beta)$ olur. O zaman $T(v_0) \in v_0D$ dir ve aynı zamanda $T(T^{-1}cv_0 + w) \in v_0D$ dir. Buradan $v_0, T^{-1}cv_0 + w \in T^{-1}(v_0D) = T^{-1}(v_0)D$ olur ve böylece v_0 ve $T^{-1}cv_0 + w$ nin D -bağımlı olduğu elde edilir. Bu ise $\{v_0, T^{-1}cv_0, w\}$ kümesinin D - bağımsız olması ile çelişir. Bu yüzden $\lambda \in \{0,1\}$ olmak üzere $u = v_0\lambda + T^{-1}cv_0 + w$ ise $T(u) \notin v_0D$ olmalıdır. $\alpha, \beta, \gamma \in D$ ve $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ olmak üzere $T(u) = v_0\alpha + T^{-1}cv_0\beta + w\gamma$ yazalım. R yoğun olduğundan Yardımcı Özellik 2.1.3 den

$$xv_0 = 0, xT^{-1}cv_0 = w, xw = 0$$

ve

$$yv_0 = 0, yT^{-1}cv_0 = 0, xw = -u$$

olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Özel olarak

$$xu = w, yu = -u, xT(u) = w\beta, yT(u) = -u\gamma$$

alalım. Buradan

$$[x, y]v_0 = 0, [x, y]T^{-1}cv_0 = u, [x, y]w = -w$$

elde edilir. O zaman

$$(b[x, y] - \phi([x, y])c)v_0 = b[x, y]v_0 - T[x, y]T^{-1}cv_0 = -T(u)$$

olur. Aynı zamanda $i \geq 1$ için

$$[x, y]u = u - w, [x, y]T(u) = u\beta - w\gamma, [x, y]^{2i-1}T(u) = u\beta - w\gamma$$

olduğundan $[x, y]^{2i}T(u) = (u - w)\beta + w\gamma$ olur. $\beta \neq 0, \gamma \neq 0$ ve $\{u, w\}$ kümesi D -bağımsız olduğundan $i \geq 1$ için $[x, y]^i T(u) \neq 0$ dır. Aksi halde $[x, y]^i T(u) = 0$ olacak şekilde bir i indisi bulunsaydı o zaman i tek iken $[x, y]^{2k+1}T(u) = (u - w)\beta + w\gamma = u\beta + (\gamma - \beta)w = 0$ olurdu. Bu durumda u ve w nın lineer bağımsızlığından $\beta = 0$ ve $\gamma = \beta$ bulunurdu, i çift iken $[x, y]^{2i}T(u) = (u - w)\beta + w\gamma = u\beta + (\gamma - \beta)w$ olurdu ve yine u ve w nın lineer bağımsızlığından $\beta = 0$ ve $\gamma = \beta$ bulunurdu. Bu ise $0 \neq \beta$ ve $0 \neq \gamma$ nın seçilişiyle çelişir. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= [f([x, y]), [x, y]]_k v_0 \\ &= [b[x, y] - \phi([x, y])c, [x, y]]_k v_0 \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} \right) v_0 \end{aligned}$$

dır. Burada $i < k$ için $[x, y]^{k-i} v_0 = 0$ olduğundan yukarıdaki ifade $i = k$ için açılırsa,

$$0 = (-1)^k \binom{k}{k} [x, y]^k (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-k} v_0$$

elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^k [x, y]^k (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 \\ &= (-1)^k [x, y]^k (b[x, y]v_0 - T[x, y]T^{-1}cv_0) \\ &= (-1)^k [x, y]^k (-T(u)) \\ &= (-1)^{k+1} [x, y]^k T(u) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (u-w)\beta + w\gamma & (k=2m, k : \text{çift}) \\ u\beta - w\gamma & (k=2m+1, k : \text{tek}) \end{cases}$$

olmasını gerektirir ve buradan ya $(u-w)\beta + w\gamma = 0$ ya da $u\beta - w\gamma = 0$ olur. Her iki durumda da u, w D -bağımsız olduğundan $\beta = \gamma = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Yardımcı Özellik 3.3 F , $\text{char} F \neq 2$ olan bir cisim V_F $\dim V_F = 2$ olan F üzerinde bir vektör uzayı ve $R = \text{End}(V_F)$ olsun. $b, c \in R$ ve ϕ R 'nin bir otomorfizması olmak üzere her $x \in R$ için $f(x) = bx - \phi(x)c$ olsun. Eğer k sabit bir pozitif tamsayı olmak üzere her $x, y \in R$ için $[f([x, y]), [x, y]]_k = 0$ ise ya $b - c \in Z$ ve her $x \in R$ için $f(x) = (b - c)x$ dır ya da $\phi = 1_R$ ve $b + c \in Z$ dir.

İspat Yardımcı Özellik 2.1.2 den her $x \in R$ için $\phi(x) = TxT^{-1}$ olacak şekilde bir yarı- doğrusal $T \in \text{End}(V)$ otomorfizması vardır. Üstelik her $v \in V, s \in F$ ve τ , F nin bir otomorfizması olmak üzere $T(vs) = T(v)\tau(s)$ dir. O halde $f(x) = bx - \phi(x)c = bx - TxT^{-1}c$ ve $f(x)v = bxv - TxT^{-1}cv$ olur. Şimdi ispatı durumlara ayıralım.

Eğer her $v \in V$ için v ve $T^{-1}cv$ vektörleri F - bağımlı ise $T^{-1}cv = v\lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in D$ vardır. Yardımcı Özellik 3.2 nin ispatının ikinci paragrafından

$$\begin{aligned} f(x)v &= bxv - TxT^{-1}cv \\ &= bxv - Txv\lambda \\ &= bxv - TT^{-1}cxv \\ &= bxv - cxv \\ &= (b - c)xv \end{aligned}$$

her $x \in R$ için $f(x) = (b-c)x$ ve $b-c \in Z$ ve $f(x) = (b-c)x$ elde edilir ve ispat biter.

Bu nedenle herhangi bir $v_0 \in V$ için v_0 ve $T^{-1}cv_0$ vektörlerinin F - bağımsız olduğunu kabul edelim. O halde $\{v_0, T^{-1}cv_0\}$ kümesi V_F in bir bazıdır. R ' nin yoğunluğundan Yardımcı Özellik 2.1.3 den

$$xv_0 = T^{-1}cv_0, xT^{-1}cv_0 = 0, yv_0 = 0, yT^{-1}cv_0 = v_0$$

olacak şekilde $x, y \in R$ vardır. Böylece

$$[x, y]v_0 = -v_0, [x, y]T^{-1}cv_0 = T^{-1}cv_0$$

ve

$$(b[x, y] - \phi([x, y])c)v_0 = -(b+c)v_0 \text{ olur. Buradan}$$

$$0 = [f([x, y]), [x, y]]_k v_0$$

$$= [b[x, y] - \phi([x, y])c, [x, y]]_k v_0$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_0$$

$$= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 \quad (k \text{ çift ise})$$

$$= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 \quad (k \text{ tek ise})$$

$$= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 \quad (\text{her iki durumda da})$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y]v_0 - T[x, y]T^{-1}cv_0) \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (-bv_0 - cv_0) \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b+c)v_0
\end{aligned}$$

bulunur. $\{v_0, T^{-1}cv_0\}$ kümesi V_F nin bir bazı olduğundan bazı $r, s \in F$ için

$(b+c)v_0 = v_0r + T^{-1}cv_0s$ dir. Eğer $s \neq 0$ ise son bağıntıdan

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b+c)v_0 \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (v_0r + T^{-1}cv_0s) \\
&= (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i v_0r + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1}cv_0s \right)
\end{aligned}$$

dır. k tek veya k çift ise $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i v_0r = 0$ olduğundan

$$0 = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1}cv_0s$$

olur ve aynı zamanda $i \leq k$ için $[x, y]^i T^{-1}cv_0 = T^{-1}cv_0$ ve $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} = 2^k$,

$\text{char}F \neq 2$ olduğundan

$$0 = (-1)^{k+1} 2^k T^{-1}cv_0s$$

$$= T^{-1}cv_0s$$

elde edilir. Buradan $s = 0$ olmalıdır ve böylece $(b+c)v_0 = v_0r$ olur. Yine

$$xv_0 = -v_0 - T^{-1}cv_0, \quad xT^{-1}cv_0 = 0, \quad yv_0 = 0, \quad yT^{-1}cv_0 = -v_0$$

olacak şekilde $x, y \in R$ seçilebilir. Buradan

$$[x, y]v_0 = -v_0, [x, y]T^{-1}cv_0 = v_0 + T^{-1}cv_0$$

olur. Üstelik $i \geq 1$ için

$$[x, y]^i v_0 = (-1)^i v_0, [x, y]^{2i-1} T^{-1}cv_0 = v_0 + T^{-1}cv_0$$

ve

$$[x, y]^{2i} T^{-1}cv_0 = T^{-1}cv_0$$

olur. Eğer $T(v_0) = v_0q + T^{-1}cv_0p$ ise

$$(b[x, y] - \phi([x, y])c)v_0 = b[x, y]v_0 - T[x, y]T^{-1}cv_0$$

$$= -bv_0 - T(v_0) - TT^{-1}cv_0$$

$$= -bv_0 - T(v_0) - cv_0$$

$$= -(b+c)v_0 - T(v_0)$$

$$= -v_0r - v_0q - T^{-1}cv_0p$$

$$= -v_0(r+q) - T^{-1}cv_0p$$

bulunur. Hipotezden

$$\begin{aligned}
0 &= \left[f([x, y]), [x, y] \right]_k v_0 \\
&= \left[b[x, y] - \phi([x, y])c, [x, y] \right]_k v_0 \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_0 \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) (-1)^{k-i} v_0 \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (-v_0(r+q) - T^{-1}cv_0p) \\
&= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (-1)(v_0(r+q) + T^{-1}cv_0p) \\
&= (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i (v_0(r+q) + T^{-1}cv_0p) \\
&= (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i v_0(r+q) + \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1}cv_0p \right)
\end{aligned}$$

dır. k çift veya k tek ise $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i v_0(r+q) = 0$ olduğundan yukarıdaki ifadeden

$$0 = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1}cv_0p$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=tek}^k \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1} c v_0 p + \sum_{i=\text{çift}}^k \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1} c v_0 p \right) \\
&= (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=tek}^k \binom{k}{i} (v_0 + T^{-1} c v_0) p + \sum_{i=\text{çift}}^k \binom{k}{i} T^{-1} c v_0 p \right) \\
&= (-1)^{k+1} \left(\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} T^{-1} c v_0 p + \sum_{i=tek}^k \binom{k}{i} v_0 p \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\left(j = \binom{k}{1} + \binom{k}{3} + \dots + \binom{k}{2(\frac{k+1}{2})-1} \right)$ olmak üzere son bağıntıdan

$$\begin{aligned}
0 &= (-1)^{k+1} (2^k T^{-1} c v_0 p + j v_0 p) \\
&= 2^k T^{-1} c v_0 p + j v_0 p \\
&= (2^k T^{-1} c v_0 + j v_0) p
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer $p \neq 0$ ise $2^k T^{-1} c v_0 + j v_0 = 0$ olur. $\text{char} R \neq 2$ olduğundan $j v_0 = 0$ olur. Buradan $v_0 = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. O halde $p = 0$ olmalıdır. O zaman $T(v_0) = v_0 q$, $q \neq 0$ olur. Daha sonra $\alpha, \beta, m, n, \lambda, \gamma, l, h \in F$ olmak üzere, $c v_0 = v_0 \alpha + T^{-1} c v_0 \beta$, $c T^{-1} c v_0 = v_0 m + T^{-1} c v_0 n$, $b v_0 = v_0 \lambda + T^{-1} c v_0 \gamma$, $b T^{-1} c v_0 = v_0 l + T^{-1} c v_0 h$ olduğunu kabul edelim. Böylece $(b + c) v_0 = v_0 \lambda + T^{-1} c v_0 \gamma + v_0 \alpha + T^{-1} c v_0 \beta$ ve buradan $(b + c) v_0 = v_0 (\lambda + \alpha) + T^{-1} c v_0 (\gamma + \beta)$ olur. $(b + c) v_0 = v_0 r$ olduğundan $\lambda + \alpha = r$ ve $\gamma + \beta = 0$ olur. Her bir $s \in F / \{0\}$ için $x v_0 = T^{-1} c v_0 s$, $x T^{-1} c v_0 = 0$, $y v_0 = 0$, $y T^{-1} c v_0 = -v_0$ olacak şekilde $x, y \in R$ seçilebilir. O halde bu seçiliş altında $[x, y] v_0 = v_0 s$, $[x, y] T^{-1} c v_0 = -T^{-1} c v_0 s$ elde edilir ve yukarıdaki bağıntılar kullanılarak

$$(b[x, y] - \phi([x, y]c)) v_0 = b[x, y] v_0 - T[x, y] T^{-1} c v_0$$

$$\begin{aligned}
&= bv_0s + TT^{-1}cv_0s \\
&= bv_0s + T(T^{-1}cv_0)\tau(s) \\
&= bv_0s + cv_0\tau(s) \\
&= (v_0\lambda + T^{-1}cv_0\gamma)s + (v_0\alpha + T^{-1}cv_0\beta)\tau(s) \\
&= v_0(s\lambda + \tau(s)\alpha) + T^{-1}cv_0(-\beta s + \beta\tau(s)) \\
&= v_0(s\lambda + \tau(s)\alpha) + T^{-1}cv_0(-\beta s + \beta\tau(s)) \\
&= v_0(s\lambda + \tau(s)\alpha) + T^{-1}cv_0\beta(\tau(s) - s)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\eta = s\lambda + \tau(s)\alpha$ ve $\mu = \beta(\tau(s) - s)$ alınarak ve Engel açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= [f([x, y], [x, y])_k] v_o \\
&= [b[x, y] - \phi([x, y])c, [x, y]]_k v_o \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_o \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) v_0 s^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i v_0 \eta s^{k-i} + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1}cv_0 \mu s^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} v_0 \eta s^k + \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1}cv_0 \mu s^{k-i}
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Burada k nın tek veya çift olması durumunda

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} v_0 \eta s^k = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i T^{-1} c v_0 \mu s^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} T^{-1} c v_0 \mu s^k + \binom{k}{1} T^{-1} c v_0 \mu s^k + \binom{k}{2} T^{-1} c v_0 \mu s^k + \dots + \binom{k}{k} T^{-1} c v_0 \mu s^k \\ &= 2^k T^{-1} c v_0 \mu s^k \end{aligned}$$

bulunur. Son bağıntı $\text{char} R \neq 2$, $s \neq 0$ ve $T^{-1} c v_0$ D -bağımsız olduğundan $\mu = 0$ olmasını gerektirir ve ayrıca $\mu = \beta(\tau(s) - s)$ olduğu hatırlanarak ya $\beta = 0$ veya $\tau(s) = s$ olmasını gerektirir. Eğer $\beta = 0$ ise $c v_0 = v_0 \alpha + T^{-1} c v_0 \beta$ olduğundan $c v_0 = v_0 \alpha$ olur. Böylece $T(T^{-1} c v_0) = c v_0 = v_0 \alpha$ ve $T(v_0) = v_0 q$, $q \neq 0$ olduğundan $T(v_0)$, $T(T^{-1} c v_0)$ F -bağımlı olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\tau(s) = s$ olmalıdır. Buradan $\tau = 1_F$ ve T , F -lineerdir.

Son olarak T nin skaler bir lineer dönüşüm ve böylece ϕ nin R nin 1 birim otomorfizması olduğu gösterilecektir. $\left[b[x, y] - T([x, y]) T^{-1} c, [x, y] \right]_k v_0 = 0$ bağıntısında içerilen tüm nesnelerin hepsi T -lineer dönüşümler olduğundan ispatın geri kalan kısmında R nin tüm elemanlarını $\{v_0, T^{-1} c v_0\}$ bazına göre matris gösterimleri kullanılacaktır. Yani, $\alpha + \lambda = r$, $\gamma + \beta = 0$, $q \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olmak üzere $b = \begin{bmatrix} \lambda & l \\ \gamma & h \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} \alpha & m \\ \beta & n \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} q & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ yazılabilir. Herhangi $s, t, u \in F$ için $[x, y] = \begin{bmatrix} s & t \\ u & -s \end{bmatrix}$ olacak şekilde $x, y \in R$ seçilebilir. Böylece

$$b[x, y] - T[x, y]T^{-1}c = \begin{bmatrix} (\lambda + \alpha)s + lu - qt & \left(\frac{2\alpha n}{\beta} - l - m\right)s + \left(\lambda - \frac{qn}{\beta}\right)t + \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta} - \frac{\alpha m}{q}\right)u \\ hu & (n - h)s + t\gamma + \left(\frac{n\alpha - \beta m}{q}\right)u \end{bmatrix}$$

elde edilir. Genelliği bozmadan ispatın geri kalanında k yı tek sayı alalım.

$$\left[b[x, y] - T[x, y]T^{-1}c, [x, y] \right]_k v_0$$

$$= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_0$$

$$= \sum_{i=tek}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_0$$

$$+ \sum_{i=\text{çift}}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - \phi([x, y])c) [x, y]^{k-i} v_0$$

$$= \sum_{i=tek}^k (-1)^i \binom{k}{i} \begin{bmatrix} (s^2 + tu)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ 0 & (s^2 + tu)^{\frac{k-1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\lambda + \alpha)s^2 + lus - qts + hut \\ (\lambda + \alpha)su + lu^2 - qtu + hsu \end{bmatrix}$$

$$+ \sum_{i=\text{çift}}^k (-1)^i \binom{k}{i} \begin{bmatrix} (s^2 + tu)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ 0 & (s^2 + tu)^{\frac{k-1}{2}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} (\lambda + \alpha)s^2 - qts - \left(m - \frac{2\alpha n}{\beta}\right)su + \left(\lambda - \frac{qn}{\beta}\right)tu + \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta} - \frac{\alpha m}{q}\right)u^2 \\ nsu + \gamma tu + \left(\frac{n\alpha - m\beta}{q}\right)u^2 \end{bmatrix}$$

$$= 2^{k-1} \begin{bmatrix} (s^2 + tu)^{\frac{k-1}{2}} & 0 \\ 0 & (s^2 + tu)^{\frac{k-1}{2}} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} -\left(m+l-\frac{2\alpha n}{\beta}\right)su + \left(\lambda-h-\frac{qn}{\beta}\right)tu + \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta}-\frac{\alpha m}{q}\right)u^2 \\ (-\lambda-\alpha+n+h)su + (\gamma+q)tu + \left(-l+\frac{n\alpha-m\beta}{q}\right)u^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve buradan

$$(s^2+tu)^{\frac{k-1}{2}} \left(-\left(m+l-\frac{2\alpha n}{\beta}\right)su + \left(\lambda-h-\frac{qn}{\beta}\right)tu + \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta}-\frac{\alpha m}{q}\right)u^2 \right) = 0$$

ve

$$(s^2+tu)^{\frac{k-1}{2}} \left((-\lambda-\alpha+n+h)su + (\gamma+q)tu + \left(-l+\frac{n\alpha-m\beta}{q}\right)u^2 \right) = 0$$

olur. F bir cisim olduğundan

$$(s^2+tu) \left(-\left(m+l-\frac{2\alpha n}{\beta}\right)su + \left(\lambda-h-\frac{qn}{\beta}\right)tu + \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta}-\frac{\alpha m}{q}\right)u^2 \right) = 0 \quad (3.2)$$

ve

$$(s^2+tu) \left((-\lambda-\alpha+n+h)su + (\gamma+q)tu + \left(-l+\frac{n\alpha-m\beta}{q}\right)u^2 \right) = 0 \quad (3.3)$$

olur. (3.2) de $s=t=u=1$ alınırsa

$$m+l-\frac{2\alpha n}{\beta} - \left(\lambda-h-\frac{qn}{\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta}-\frac{\alpha m}{q}\right) = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.2) de $s=0$ ve $t=u=1$ alınırsa

$$-\left(\lambda - h - \frac{qn}{\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta} - \frac{\alpha m}{q}\right) = 0 \quad (3.5)$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) birleştirilerek

$$m + l - \frac{2\alpha n}{\beta} = 0 \quad (3.6)$$

bulunur. Tekrar (3.2) de $s = u = 1$ ve $t = 0$ alınırsa

$$m + l - \frac{2\alpha n}{\beta} - \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta} - \frac{\alpha m}{q}\right) = 0 \quad (3.7)$$

olur. (3.4) ve (3.7) den

$$\lambda - h - \frac{qn}{\beta} \quad (3.8)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.3) de $s = t = u = 1$ alınırsa

$$-\lambda - \alpha + n + h + \gamma + q - l + \frac{n\alpha - m\beta}{q} = 0 \quad (3.9)$$

olur. (3.3) de $s = 0$ ve $t = u = 1$ alındığında

$$\gamma + q - l + \frac{n\alpha - m\beta}{q} = 0 \quad (3.10)$$

bulunur. (3.9) ve (3.10) dan

$$-\lambda - \alpha + n + h = 0 \quad (3.11)$$

elde edilir. Tekrar (3.3) te $s = u = 1$ ve $t = 0$ alınarak

$$-\lambda - \alpha + n + h - l + \frac{n\alpha - m\beta}{q} = 0 \quad (3.12)$$

bulunur. (3.9) ve (3.12) den

$$\gamma + q = 0 \quad (3.13)$$

bağıntısına ulaşılır. Yani

$$\lambda + \alpha = n + h \text{ ve } \gamma + q = 0 \quad (3.14)$$

elde edilir. Fakat $\gamma + \beta = 0$ olduğundan $\beta = q$ olur. (3.8) den

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda - h - \frac{qn}{\beta} \\ &= \lambda - h - \frac{\beta n}{\beta} \end{aligned}$$

$$= \lambda - h - n$$

elde edilir. Buradan $\lambda = h + n$ ve (3.9) dan $\lambda + \alpha = n + h$ olur ve $\alpha = 0$ elde

edilir. Yerine yazıldığında $T = \begin{bmatrix} q & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \beta$ elde

edilir. Böylece T bir skaler lineer dönüşüm olur. (3.4) ten

$$m + l - \frac{2\alpha n}{\beta} - \left(\lambda - h - \frac{qn}{\beta} \right) - \left(\frac{\alpha^2 n}{q\beta} - \frac{\alpha m}{q} \right) = 0 \text{ dır ve buradan } m + l = 0 \text{ olur.}$$

$$\text{Böylece } b + c = \begin{bmatrix} \lambda + \alpha & l + m \\ \gamma + \beta & h + n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ skaler matrisi elde edilir,}$$

yani $b + c \in Z$ olduğuna ulaşılır.

Yardımcı Özellik 3.4 R değişmeli olmayan bir asal halka ve β , R nin bir X -iç otomorfizması olmak üzere $f(x) = bx - \beta(x)c$ olsun. Sabit bir k tamsayısı ve her $x, y \in R$ için $[f([x, y]), [x, y]]_k = 0$ ise ya $b - c \in Z$ dir ve her $x \in R$ için $f(x) = (b - c)x$ dir, ya da bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir. Üstelik ikinci durumun sağlanması durumunda ya $\text{char} R = 2$ ya da $\text{char} R \neq 2$, $\beta = 1_R$ ve $b + c \in Z$ dir.

İspat Hipotezden β bir X -iç otomorfizma olduğundan her $x \in R$ için $\beta(x) = gxg^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir $g \in Q$ elemanı vardır. Böylece $f(x) = bx - \beta(x)c = bx - gxg^{-1}c$ olur. Eğer $g^{-1}c \in C$ ise her $x \in R$ için $f(x) = bx - gxg^{-1}c = bx - gg^{-1}cx = (b - c)x$ olur ve Yardımcı Özellik 3.1 den $b - c \in Z$ dir ve burada ispat biter.

Böylece $g^{-1}c \notin C$ olduğu kabul edilebilir. Engel koşulundan,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= [f([x, y]), [x, y]]_k \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - g[x, y]g^{-1}c) [x, y]^{k-i} \end{aligned}$$

dir ve $\varphi(x, y)$, R nin aşıkâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Aksi halde $\varphi(x, y)$, aşıkâr bir özdeşlik olur ve dolayısıyla

$$\begin{aligned} 0_T &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - g[x, y]g^{-1}c) [x, y]^{k-i} \\ &\quad + (-1)^k \binom{k}{k} [x, y]^k b[x, y] [x, y]^{k-k} - (-1)^k \binom{k}{k} [x, y]^k g[x, y]g^{-1}c [x, y]^{k-k} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - g[x, y]g^{-1}c) [x, y]^{k-i-1} + (-1)^k [x, y]^k b \right) [x, y].1 \end{aligned}$$

$$+(-1)^{k-1}[x, y]^k g[x, y].g^{-1}c$$

olur. $\{1, g^{-1}c\}$ C -bağımsız olduğundan

$$0_T = \left(\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} [x, y]^i (b[x, y] - g[x, y]g^{-1}c) [x, y]^{k-i-1} + (-1)^k [x, y]^k b \right) [x, y]$$

ve $(-1)^{k-1}[x, y]^k g[x, y] = 0_T$ olmasını gerektirir.

$(-1)^{k-1}[x, y]^k g[x, y] = 0_T$ olduğu durumda $[x, y]^k g[x, y] = 0_T$ olur ve buradan $[x, y]^k = 0$ ve $g[x, y] = 0$ olur. T bir bölge olduğundan $[x, y] = 0$ ve $0 \neq g$ elemanı tersinir olduğundan yine $[x, y] = 0$ ve böylece R nin değişmeli olduğu çelişkisi elde edilir. Yardımcı Özellik 2.1.9 dan, $\varphi(x, y) = 0$, Q nun da aşıkâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Eğer C sonsuz ise C nin cebirsel kapanışı F olsun ve C sonlu ise de $F=C$ olsun. C nin sonsuz olduğu durumda Yardımcı Özellik 2.1.10 dan $\varphi(x, y) = 0$, $Q \otimes_C F$ için de bir GPI dır ve Yardımcı Özellik 2.1.11 dan $Q \otimes_C F$, C üzerinde merkezi kapalı bir asal cebirdir. Burada $Q \otimes_C F$ ile R aynı GPI ı sağladığından yer değiştirilirse R de merkezi kapalı bir asal halka olur. C ' nin sonlu olduğu durumda Q ile R yer değiştirilirse R de merkezi kapalı bir asal halka olur. Bundan dolayı R merkezi kapalı ve C cismi de ya cebirsel kapalı ya da sonlu olarak alınabilir. Yardımcı Özellik 2.3.3 den R , sonlu ranklı sıfırdan farklı lineer dönüşümleri içeren C üzerinde bir vektör uzayı üzerinde lineer dönüşümlerin halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. R değişmeli olmadığından $\dim V_C \geq 2$ olur.

Eğer $\dim V_C \geq 3$ ise Yardımcı Özellik 3.2 den $b-c \in Z$ dır ve her $x \in R$ için $f(x) = (b-c)x$ dır. O zaman $\dim V_C = 2$ ve R nin karakteristiği 2 den farklı kabul edilebilir. O halde Yardımcı Özellik 3.3 ten ya $b-c \in Z$ ve her $x \in R$ için $f(x) = (b-c)x$ ya da $\beta = 1_R$ ve $b+c \in Z$ dir. Eğer her $x \in R$ için $f(x) = (b-c)x$ ise $f(x) = bx - \beta(x)c = bx - g x g^{-1}c = (b-c)x = bx - cx$ olur ve buradan $g x g^{-1}c = cx$ ve $x g^{-1}c = g^{-1}cx$ elde edilir. Böylece $g^{-1}c \in C$ olur.

Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden $\beta = 1_R$, $b + c \in Z$ olmalıdır. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdiye kadar yapılanların ışığında artık temel teoremin ispatına geçilebilir.

Temel Teoremin İspatı Yardımcı Özellik 2.3.1 den her $x \in R$ için $s \in {}_F R$ ve δ R' nin bir β - türevi olacak şekilde $f(x) = sx + \delta(x)$ yazılabilir. L değişmeli olmayan bir Lie ideal olduğundan Yardımcı Özellik 2.2.4 den $[I, I] \subset [I, R] \subset L$ olduğundan $[I, I] \subset L$ olacak şekilde R' nin sıfırdan farklı bir I ideali vardır. Hipotezden her $x, y \in I$ için

$$h(x, y) = [f([x, y]), [x, y]]_k = [s[x, y] + \delta([x, y]), [x, y]]_k = 0 \quad (3.15)$$

olur. Buradan ispat üç durumda incelenir:

Durum I $\delta = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $x \in R$ için $f(x) = sx$ dir. (3.15) den her $x, y \in I$ için $[s[x, y], [x, y]]_k = 0$ olur ve Yardımcı Özellik 2.3.19 dan her $x, y \in {}_F R$ için $[s[x, y], [x, y]]_k = 0$ dır. Böylece Yardımcı Özellik 3.1 den $s \in C$ veya $\text{char} R = 2$ ve bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir ve burada ispat biter.

İspatın geri kalanı için Yardımcı Özellik 2.3.20 nin bir sonucu olan aşağıdaki sonuca ihtiyaç vardır.

Sonuç Eğer $\delta \neq 0$, $s \in Z$ ve her $x, y \in R$ için $[s[x, y] + \delta([x, y]), [x, y]]_k = 0$ ise o zaman $\text{char} R = 2$ ve bazı F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir.

Durum II δ nın bir X - dış türev olduğunu kabul edelim. Yardımcı Özellik 2.3.21 den her $x, y \in Q_r$ için $[s[x, y] + \delta([x, y]), [x, y]]_k = 0$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= [s[x, y] + \delta([x, y]), [x, y]]_k \\
&= [s[x, y] + \delta(xy) - \delta(yx), [x, y]]_k \\
&= [s[x, y] + \delta(x)y + \beta(x)\delta(y) - \delta(y)x - \beta(y)\delta(x), [x, y]]_k \quad (3.16)
\end{aligned}$$

bulunur. İlk olarak β , X - iç olsun. Yani, bazı tersinir $g \in Q$ için $\beta(x) = gxg^{-1}$ formunda olsun. (3.16) dan her $x, y \in {}_F R$ için,

$$0 = [s[x, y] + \delta(x)y + gxg^{-1}\delta(y) - \delta(y)x - gyg^{-1}\delta(x), [x, y]]_k \quad (3.17)$$

olur. Yardımcı Özellik 2.3.22 den ve her $x, y, z, u \in {}_F R$ için (3.17) de $\delta(x)$ yerine z , $\delta(y)$ yerine u alınarak $0 = [s[x, y] + zy + gxg^{-1}u - ux - gyg^{-1}z, [x, y]]_k$ bağıntısına ulaşılır. Burada özel olarak $z = 0 = u$ alınırsa her $x, y \in {}_F R$ için $[s[x, y], [x, y]]_k = 0$ bulunur. Böylece Yardımcı Özellik 3.1 den $s \in Z$ veya $\text{char} R = 2$ ve bazı F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir ve böylece ispat biter.

Şimdi ise β X -dış olsun. Yardımcı Özellik 2.3.22 ve (3.16) dan her $x, y, z, u, w, t \in {}_F R$ için $\delta(x)$ yerine z , $\delta(y)$ yerine u , $\beta(x)$ yerine w ve $\beta(y)$ yerine t alınırsa,

$$0 = [s[x, y] + zy + wu - ux - tz, [x, y]]_k \quad (3.18)$$

bulunur. Özel olarak (3.18) de $z = 0 = u$ alınarak her $x, y \in {}_F R$ için $[s[x, y], [x, y]]_k = 0$ olur. Yardımcı Özellik 3.1 den $s \in Z$ veya $\text{char} R = 2$ ve bir F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir ve böylece ispat biter.

Durum III δ , bazı $b \in Q$ ile belirlenen sıfırdan farklı bir X - iç β - türev, yani; her $x \in R$ için $\delta(x) = bx - \beta(x)b$ olsun. Buradan $f(x) = sx + \delta(x) = sx + bx - \beta(x)b$ olur ve hipotezden her $x \in L$ için $[f(x), x]_k = [(s+b)x - \beta(x)b, x]_k = 0$ elde edilir. Yardımcı Özellik 2.2.4 ten $[I, I] \subset L$ olduğundan ve Yardımcı Özellik 2.3.23 ten her $x \in [_F R, _F R]$ için,

$$[(s+b)x - \beta(x)b, x]_k = 0 \quad (3.19)$$

dır. Özel olarak her $x, y \in _F R$ için $[(s+b)[x, y] - \beta([x, y])b, [x, y]]_k = 0$ dir. Eğer β , X - iç türev ise Yardımcı Özellik 3.4 ten ya $s+b-b = s \in Z$ ve her $x \in R$ için $f(x) = (s+b-b)x = sx$ dir ya da bazı F cismi için $R \subseteq M_2(F)$ dir. Bu durum ya $\text{char} R = 2$ olmasını ya da $\text{char} R \neq 2$ ise $\beta = 1_R$ ve $s+b+b = s+2b \in Z$ olmasını gerektirir ve böylece ispat biter. Bu yüzden β yı bir X - dış türev alabiliriz. Hipotezden her $x, y \in _F R$ için $[(s+b)[x, y] - \beta([x, y])b, [x, y]]_k = 0$ olur. Yardımcı Özellik 2.3.23 ten $_F R$ bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır. Aynı zamanda her $x, y \in R$ için

$$[(s+b)[x, y] - \beta([x, y])b, [x, y]]_k = 0$$

özdeşliği aşıkardır. Aksi halde $[(s+b)[x, y] - (\beta(x), \beta(y))b, [x, y]]_k = 0_T$ olurdu. Buradan $s+b \in C$ ise, $[(\beta(x), \beta(y))b, [x, y]]_k = 0_T$ olur. β dış türev olduğundan $\beta(x) = x'$ ve $\beta(y) = y'$ gibi düşünülerek $[x', y']b, [x, y]]_k = 0$ bulunur. Burada $b \in C$ ise $b[x', y'], [x, y]]_k = 0$ dır ve bu her zaman aşıkardır bir özdeşliktir. Bu nedenle $b = 0$ ise ya $0 \neq s \in C$ olur ve yine aşıkardır bir özdeşlik elde edilir ya da $s = 0$ dır. Bu durumda da $f = 0$ olur. Bu ise çelişki verir.

O halde her $x, y \in R$ için

$$[(s+b)[x, y] - \beta([x, y])b, [x, y]]_k = 0$$

özdeşliği aşıkarak olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Yardımcı Özellik 2.3.24 ten ${}_F R$ sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır ve ${}_F R$ in ilişkili bölümlü D halkası C üzerinde sonlu boyutludur. O zaman Yardımcı Özellik 2.3.3 den ${}_F R$ sonlu ranklı sıfırdan farklı lineer dönüşümleri içeren D üzerindeki V vektör uzayı üzerinde lineer dönüşümler halkasının bir yoğun alt halkasına izomorftur. Yardımcı Özellik 3.2 den $\dim V_D \geq 3$ olduğu durumda ispatın tamamlanacağı bilinmektedir. Bu yüzden $\dim V_D \leq 2$ olsun. Eğer $\dim V_D = 1$ ise $\text{End}(V_D) \cong M_1(D) \cong D$ olup böylece ${}_F R \cong D$ olur. Eğer $\dim V_D = 2$ ise ${}_F R \cong M_2(D)$ dir. Eğer C sonlu ise $\dim D_C < \infty$ olduğundan D sonludur. Yardımcı Özellik 2.1.5 ten her sonlu bölüm halkası değişmeli olduğundan $D \cong C$ ve böylece D bir cisim olur. O zaman ya ${}_F R = C$ ya da ${}_F R \cong M_2(C)$ dir. Fakat burada hipotez gereği R değişmeli olmadığından ${}_F R = C$ olamaz. O halde diğer durumda Yardımcı Özellik 3.3 ten ya $\dim V_D = 2$ ve $\text{char} R \neq 2$ ise $s + b - b = s \in Z$ ve her $x \in R$ için $f(x) = (s + b - b)x = sx$, $\text{char} R = 2$ ise $R \subseteq M_2(F)$ dir ya da $\beta = 1_R$ ve $s + b + b = s + 2b \in Z$ dir ve böylece ispat biter. Bu yüzden ispatın geri kalanı için C nin sonsuz olduğu kabul edilir. O halde Yardımcı Özellik 3.3 ten ${}_F R$ halkasının herhangi bir F cismi için $M_2(F)$ in bir alt halkası olmadığı da kabul edilebilir. Şöyleki; C sonlu iken ${}_F R \cong M_2(D) \subseteq M_2(F)$ olacak şekilde bir F cismi olsaydı D değişmeli olup ve $D \cong C$ olurdu ve böylece Yardımcı Özellik 3.3 ten ispat biterdi. Bu yüzden C sonsuz iken herhangi bir F cismi için ${}_F R \not\subseteq M_2(F)$ dir.

Alt Durum I β , Frobenius olmasın. O zaman hipotezden her $x, y \in {}_F R$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [(s+b)[x, y] - \beta([x, y])b, [x, y]]_k \\ &= [(s+b)[x, y] - [\beta(x), \beta(y)]b, [x, y]]_k \end{aligned}$$

olur. Yardımcı Özellik 2.3.16 dan her $x, y, z, u \in {}_F R$ için yukarıdaki denklemde

$\beta(x)$ yerine z , $\beta(y)$ yerine u alınırsa $[(s+b)[x, y] - [z, u]b, [x, y]]_k = 0$ bulunur. Özel olarak $z = x$ ve $u = y$ alınarak $[(s+b)[x, y] - [x, y]b, [x, y]]_k = 0$ elde edilir. Yardımcı Özellik 3.2 den $s+b-b = s \in C$ ve δ bir iç β -türev olduğundan Sonuç dan $\text{char}_F R = 2$ ve ${}_F R \subseteq M_2(F)$ dir. Fakat ${}_F R \not\subseteq M_2(F)$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Alt Durum II β Frobenius olsun. Burada $\text{char} R = p > 0$ olduğu kabul edilebilir. Aksi takdirde $\text{char} R = 0$ ise β , her $c \in C$ için $\beta(c) = c$ olup Yardımcı Özellik 2.1.6 dan β , X - iç türev olur. Bu ise bir çelişkidir. Bu yüzden her $\lambda \in C$ ve bazı sıfırdan farklı n tamsayısı için $\beta(\lambda) = \lambda^{p^n}$ formunda olmalıdır. $p^m > k$ olacak şekilde bir m tamsayısı seçelim. O halde $\text{char} R = p > 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
[[f(x), x]_k, x]_{p^m-k} &= [f(x), x]_{p^m} \\
&= \sum_{i=0}^{p^m} (-1)^i \binom{p^m}{i} x^i f(x) x^{p^m-i} \\
&= f(x) x^{p^m} - p^m x f(x) x^{p^m-1} + \dots + (-1)^{p^m} x^{p^m} f(x) \\
&= f(x) x^{p^m} - x^{p^m} f(x) \\
&= [f(x), x^{p^m}]
\end{aligned}$$

dır. O zaman her $x \in [{}_F R, {}_F R]$ için,

$$0 = [(s+b)x - \beta(x)b, x]_{p^m-k}, x]_{p^m-k} = [(s+b)x - \beta(x)b, x]_{p^m} \quad \text{olduğundan} \quad (3.19)$$

bağıntısı

$$0 = [(s+b)x - \beta(x)b, x^{p^m}] \quad (3.20)$$

bağıntısına indirgenebilir.

Öncelikle $n \geq 1$ kabul edelim. O zaman $\lambda \in C$ ve $x \in [{}_F R, {}_F R]$ için,
(3.20) de x yerine λx yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 0 &= [(s+b)\lambda x - \beta(\lambda x)b, (\lambda x)^{p^m}] \\
 &= [(s+b)\lambda x - \beta(\lambda)\beta(x)b, (\lambda x)^{p^m}] \\
 &= [\lambda(s+b)x - \lambda^{p^n}\beta(x)b, \lambda^{p^m}x^{p^m}] \\
 &= [\lambda(s+b)x, \lambda^{p^m}x^{p^m}] - [\lambda^{p^n}\beta(x)b, \lambda^{p^m}x^{p^m}] \\
 &= \lambda\lambda^{p^m}[(s+b)x, x^{p^m}] - \lambda^{p^n}\lambda^{p^m}[\beta(x)b, x^{p^m}] \\
 &= \lambda^{p^m+1}[(s+b)x, x^{p^m}] - \lambda^{p^{m+n}}[\beta(x)b, x^{p^m}] \\
 &= \lambda^{p^m+1}([(s+b)x, x^{p^m}] - \lambda^{p^n-1}[\beta(x)b, x^{p^m}]) \\
 &= [(s+b)x, x^{p^m}] - \lambda^{p^n-1}[\beta(x)b, x^{p^m}] \\
 &= [(s+b)x, x^{p^m}] - \gamma[\beta(x)b, x^{p^m}]
 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\gamma = \lambda^{p^n-1} \neq 1$ olduğundan $\gamma \neq 1$ dir. $\psi_1 = [(s+b)x, x^{p^m}]$ ve $\psi_2 = -[\beta(x)b, x^{p^m}]$ olarak alınıp yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa $1.\psi_1 + \gamma.\psi_2 = 0$ olur. γ yerine sırasıyla 1 ve γ alınırsa,

$$1.\psi_1 + 1.\psi_2 = 0$$

$$1.\psi_1 + \gamma.\psi_2 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - 1 \neq 0$ olduğundan bu sistemin sadece sıfır (aşıkâr) çözümü vardır. Bu ise $\psi_1 = 0$ ve $\psi_2 = 0$ olmasını gerektirir. Böylece her $x \in [{}_F R, {}_F R]$ için,

$$[\beta(x)b, x^{p^m}] = 0 \quad (3.21)$$

olur. (3.21) de $\lambda \in C$ olmak üzere x yerine $x + \lambda y$ yazılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= [\beta(x + \lambda y)b, (x + \lambda y)^{p^m}] \\ &= [\beta(x)b + \beta(\lambda)\beta(y)b, (x + \lambda y)^{p^m}] \\ &= [\beta(x)b + \lambda^{p^n}\beta(y)b, (x + \lambda y)^{p^m}] \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi kullandığımız bazı gösterimleri tanıtalım. $0 \leq i \leq p^m$ olmak üzere $\psi_i(x, y)$, i dereceli y ve $p^m - i$ dereceli x ile birlikte tüm monomiallerin toplamını ifade etsin. Burada özel olarak $\psi_0(x, y) = x^{p^m}$, $\psi_1(x, y) = \sum_{i=0}^{p^m-1} x^{p^m-1-i} y x^i$ ve $\psi_{p^m}(x, y) = y^{p^m}$ dir. En son yazılan bağıntıda yukarıdaki tanımlamalar kullanılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= [\beta(x)b + \lambda^{p^n}\beta(y)b, \sum_{i=0}^{p^m} \psi_i(x, y) \lambda^i] \\ &= [\beta(x)b, \sum_{i=0}^{p^m} \psi_i(x, y) \lambda^i] + [\lambda^{p^n}\beta(y)b, \sum_{i=0}^{p^m} \psi_i(x, y) \lambda^i] \\ &= \sum_{i=0}^{p^m} \lambda^i [\beta(x)b, \psi_i(x, y)] + \sum_{i=0}^{p^m-1} \lambda^{p^n+i} [\beta(y)b, \psi_i(x, y)] \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{p^m-1} \lambda^{i+1} [\beta(x)b, \psi_{i+1}(x, y)] + \sum_{i=0}^{p^m-1} \lambda^{p^n+i} [\beta(y)b, \psi_i(x, y)]$$

$$= \sum_{i=0}^{p^m-1} \lambda^{i+1} ([\beta(x)b, \psi_{i+1}(x, y)] + \lambda^{p^n-1} [\beta(y)b, \psi_i(x, y)])$$

elde edilir. Burada $\lambda^{p^n-1} = \mu$ denilerek,

$$0 = \lambda ([\beta(x)b, \psi_1(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_0(x, y)])$$

$$+ \lambda^2 ([\beta(x)b, \psi_2(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_1(x, y)])$$

$$+ \lambda^3 ([\beta(x)b, \psi_3(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_2(x, y)])$$

.

.

.

$$+ \lambda^{p^m} ([\beta(x)b, \psi_{p^m}(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_{p^m-1}(x, y)])$$

bulunur. Daha sonra denklem λ parantezine alınırsa,

$$0 = \lambda ([\beta(x)b, \psi_1(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_0(x, y)])$$

$$+ \lambda ([\beta(x)b, \psi_2(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_1(x, y)])$$

$$+ \lambda^2 ([\beta(x)b, \psi_3(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_2(x, y)])$$

.

.

.

$$+ \lambda^{p^m-1} ([\beta(x)b, \psi_{p^m}(x, y)] + \mu [\beta(y)b, \psi_{p^m-1}(x, y)])$$

elde edilir. Burada $\lambda \neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 0 &= ([\beta(x)b, \psi_1(x, y)] + \mu[\beta(y)b, \psi_0(x, y)]) \\
 &+ \lambda ([\beta(x)b, \psi_2(x, y)] + \mu[\beta(y)b, \psi_1(x, y)]) \\
 &+ \lambda^2 ([\beta(x)b, \psi_3(x, y)] + \mu[\beta(y)b, \psi_2(x, y)]) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &+ \lambda^{p^m-1} ([\beta(x)b, \psi_{p^m}(x, y)] + \mu[\beta(y)b, \psi_{p^m-1}(x, y)])
 \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. $\varphi_i(x, y) = ([\beta(x)b, \psi_{i+1}(x, y)] + \mu[\beta(y)b, \psi_i(x, y)])$ olarak yeniden düzenlenerek,

$$0 = 1.\varphi_0(x, y) + \lambda\varphi_1(x, y) + \lambda^2\varphi_2(x, y) + \dots + \lambda^{p^m-1}\varphi_{p^m-1}(x, y)$$

bağıntısı elde edilir. Burada sırasıyla λ yerine $1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots, \lambda^{p^m-1}$ değerleri yazılarak ve $p^m - 1 = k$ denilerek,

$$0 = 1\varphi_0 + 1\varphi_1 + 1\varphi_2 + \dots + 1\varphi_k$$

$$0 = 1\varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \dots + \lambda^k\varphi_k$$

$$0 = 1\varphi_0 + \lambda^2\varphi_1 + \lambda^4\varphi_2 + \dots + \lambda^{2k}\varphi_k$$

·
·
·

$$0 = 1\varphi_0 + \lambda^k\varphi_1 + \lambda^{2k}\varphi_2 + \dots + \lambda^{k^2}\varphi_k$$

homojen sistemi elde edilir. Burada $1 \leq j \leq k^2$ için $\lambda^j = \mu_j$ denilirse bu homojen sistemin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^k \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \dots & \lambda^{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda^k & \lambda^{2k} & \dots & \lambda^{k^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_k \\ 1 & \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_1^k & \mu_2^k & \dots & \mu_k^k \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \dots (1 - \mu_k) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\mu_j - \mu_i)$$

$$= (1 - \lambda)(1 - \lambda^2) \dots (1 - \lambda^k) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq p^m - 1} (\lambda^j - \lambda^i)$$

bulunur. $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olduğundan bu determinant sıfırdan farklıdır ve ayrıca bu homojen denklem sisteminin sadece sıfır çözümü vardır. O zaman her $0 \leq i \leq p^m - 1$ için $\varphi_i(x, y) = 0$ olur. Yani,

$$\varphi_0(x, y) = [\beta(x)b, \psi_1(x, y)] + \lambda^{p^m - 1} [\beta(y)b, \psi_0(x, y)] = 0$$

olur. Vandermonde Determinantından her $x, y \in [_F R, _F R]$ için $[\beta(x)b, \psi_1(x, y)] = 0$ dır. Daha sonra $z \in _F R$ olmak üzere $y = [x, z]$ yazılarak,

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= (x, [x, z]) = \psi_1(x, xz - zx) \\
 &= x^{p^m - 1}(xz - zx) + x^{p^m - 2}(xz - zx)x + x^{p^m - 3}(xz - zx)x^2 + \\
 &\quad \dots + x(xz - zx)x^{p^m - 2} + (xz - zx)x^{p^m - 1} \\
 &= x^{p^m} z - zx^{p^m}
 \end{aligned}$$

bulunur ve her $x, y \in [_F R, _F R]$ ve $z \in _F R$ için $[\beta(x)b, \psi_i(x, y)] = 0$ olduğundan

$0 = [\beta(x)b, \psi_1(x, [x, z])] = [\beta(x)b, x^{p^m}z - zx^{p^m}]$ olur ve komütatör açılımından

$$\beta(x)bx^{p^m}z - \beta(x)bzx^{p^m} - x^{p^m}z\beta(x)b + zx^{p^m}\beta(x)b = 0 \quad (3.22)$$

elde edilir.

Şimdi bazı $x \in [{}_F R, {}_F R]$ için $x^{p^m} \notin C$ olduğunu kabul edelim. O zaman $\{1, x^{p^m}\}$ kümesi C üzerinde lineer bağımsızdır. (3.22) bağıntısını tekrar düzenlersek $1.zx^{p^m}\beta(x)b - x^{p^m}z\beta(x)b + \beta(x)bx^{p^m}.1 - \beta(x)bzx^{p^m} = 0$ dır. Burada $a_1 = 1$, $a_2 = x^{p^m}$ alınırsa $\{1, x^{p^m}\}$, C üzerinde lineer bağımsız olduğundan Yardımcı Özellik 2.3.25 ten $b_1 = \beta(x)b$ dersek $\beta(x)b$ elemanı, $d_1 = 1$ ve $d_2 = x^{p^m}$ elemanlarının C - lineer birleşimi olarak ifade edilebilir. O halde bazı $\mu, \gamma \in C$ için $\beta(x)b = \mu.1 + \gamma.x^{p^m}$ şeklinde yazabiliriz. Özel olarak $[\beta(x)b, x] = [\mu.1 + \gamma.x^{p^m}, x] = 0$ dır. C sonsuz olduğundan herhangi $y \in [{}_F R, {}_F R]$ için $(x + \lambda y)^{p^m} \notin C$ olacak şekilde sonsuz çoklukta $\lambda \in C$ vardır. Aksi taktirde

$(x + \lambda y)^{p^m} \in C$ olduğu kabul edilirse $(x + \lambda y)^{p^m} = \sum_{i=0}^{p^m} \psi_i(x, y)\lambda^i$ olduğundan,

$$(x + \lambda y)^{p^m} = x^{p^m} + (x^{p^m-1}y + x^{p^m-2}yx + x^{p^m-3}yx^2 + \dots + yx^{p^m-1})\lambda$$

$$+ (x^{p^m-2}y^2 + x^{p^m-3}y^2x + x^{p^m-4}y^2x^2 + \dots + y^2x^{p^m-2})\lambda^2 + \dots + y^{p^m}\lambda^{p^m}$$

elde edilir. Burada λ yerine sırasıyla $1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{p^m}$ yazılıp ve $p^m = k$ denilirse ve elde edilen homojen denklem sisteminde $\lambda^j = \mu_j$ yazarak bu homojen sistemin katsayılar matrisinin determinantı,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^k \\ 1 & \lambda^2 & \lambda^4 & \dots & \lambda^{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda^k & \lambda^{2k} & \dots & \lambda^{k^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_k \\ 1 & \mu_1^2 & \mu_2^2 & \dots & \mu_k^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu_1^k & \mu_2^k & \dots & \mu_k^k \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) \dots (1 - \mu_k) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\mu_j - \mu_i)$$

$$= (1 - \lambda)(1 - \lambda^2) \dots (1 - \lambda^k) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq p^m} (\lambda^j - \lambda^i)$$

bulunur. Burada $\lambda \neq 0$ ve $\lambda \neq 1$ olduğundan bu determinant sıfırdan farklıdır ve bu homojen denklem sisteminin sadece sıfır çözümü vardır. O zaman $x^{p^m} \in C$ olur. Bu da çelişki verir. O halde $(x + \lambda y)^{p^m} \notin C$ olmalıdır. Bazı $\lambda \in C$ için $[\beta(x)b, x] = 0$ olduğundan burada x yerine $x + \lambda y$ yazılarak

$$0 = [\beta(x + \lambda y)b, x + \lambda y]$$

$$= [\beta(x)b + \lambda^{p^n} \beta(y)b, x + \lambda y]$$

$$= [\beta(x)b, x + \lambda y] + [\lambda^{p^n} \beta(y)b, x + \lambda y]$$

$$= [\beta(x)b, x] + [\beta(x)b, \lambda y] + [\lambda^{p^n} \beta(y)b, x] + [\lambda^{p^n} \beta(y)b, \lambda y]$$

$$= \lambda [\beta(x)b, y] + \lambda^{p^n} [\beta(y)b, x] + \lambda^{p^n+1} [\beta(y)b, y]$$

$$= \lambda ([\beta(x)b, y] + \lambda^{p^n-1} [\beta(y)b, x] + \lambda^{p^n} [\beta(y)b, y])$$

olur. Burada $\lambda \neq 0$ olduğundan ve ayrıca $p^n - 1 = k$ alınırsa

$$0 = 1. [\beta(x)b, y] + \lambda^{p^n-1} [\beta(y)b, x] + \lambda^{p^n} [\beta(y)b, y]$$

$$= 1.[\beta(x)b, y] + \lambda^k [\beta(y)b, x] + \lambda^{k+1} [\beta(y)b, y]$$

$$= 1.[\beta(x)b, y] + \lambda^k ([\beta(y)b, x] + \lambda [\beta(y)b, y])$$

elde edilir. Burada $\gamma = \lambda^k$ dersek,

$$0 = 1.[\beta(x)b, y] + \gamma ([\beta(y)b, x] + \lambda [\beta(y)b, y])$$

olur. Burada $\psi_1 = [\beta(x)b, y]$ ve $\psi_2 = [\beta(y)b, x] + \lambda [\beta(y)b, y]$ olarak alınırsa

$0 = \psi_1 + \gamma \psi_2$ elde edilir. Bu ifadede γ yerine sırasıyla 1 ve γ alınırsa,

$$0 = \psi_1 + 1\psi_2$$

$$0 = \psi_1 + \gamma \psi_2$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Sistemin katsayılar matrisi,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - 1 \neq 0$$

determinantına sahiptir. Böylece sistemin sadece sıfır çözümü vardır. Bunlar; $\psi_1 = [\beta(x)b, y] = 0$ ve $\psi_2 = [\beta(y)b, x] + \lambda [\beta(y)b, y] = 0$ dir. $\psi_1 = [\beta(x)b, y] = 0$ da her $z, w \in {}_F R$ için y yerine $[z, w]$ yazalım. Buradan $0 = [\beta(x)b, y] = [\beta(x)b, [z, w]]$ olur. Bağıntının her iki tarafı $[z, w]$ ile çarpılırsa $[\beta(x)b[z, w], [z, w]] = [\beta(x)b, [z, w]]. [z, w] = 0$ olur. Alt Durum I den önceki kabul edilen ${}_F R \not\subset M_2(F)$ kabulünden ve Yardımcı Özellik 3.1 den $\beta(x)b \in C$ olur. Herhangi $y \in [{}_F R, {}_F R]$ için $(x + \lambda y)^{p^n} \notin C$ olacak şekilde sonsuz çoklukta $\lambda \in C$ olduğundan benzer şekilde x yerine $x + \lambda y$ alınarak ve benzer işlemler yapılarak aynı zamanda $\beta(x + \lambda y)b \in C$ bulunur. Öyleyse $\beta(x + \lambda y)b = \beta(x)b + \lambda^{p^n} \beta(y)b \in C$ dir. Burada $\beta(x)b \in C$ olduğundan $\lambda^{p^n} \beta(y)b \in C$ olur.

$\lambda \neq 0$ olduğundan her $y \in [_F R, _F R]$ için $\beta(y)b \in C$ elde edilir. Özel olarak her $y \in [_F R, _F R]$ için $\beta(y)b \in C$ ise $\beta([x, y])b \in C$ olur. β bir otomorfizma olduğundan $\beta^{-1}(\beta([x, y])b) = \beta^{-1}(\beta([x, y]))\beta^{-1}(b) \in C$ ve buradan $[x, y]\beta^{-1}(b) \in C$ bulunur. $a = \beta^{-1}(b)$ olmak üzere her $y \in [_F R, _F R]$ için $[x, y]a \in C$ elde edilir.

$_F R \cong M_2(D)$ sonlu boyutlu merkezi basit cebir olduğundan ve Alt Durum I den önceki kabul ettiğimiz $_F R \not\subseteq M_2(F)$ durumundan bazı F cismi için $t \geq 3$ olmak üzere $_F R \subseteq M_t(F)$ olur. O zaman her $x, y \in M_t(F)$ için $[x, y]a \in C$ yazılabilir. Diğer taraftan $x = e_{12}$ ve $y = e_{21}$ alınarak $a \neq 0$ olmak üzere $[x, y]a \notin C$ olur. Çünkü, burada her $x, y \in M_t(F)$ için $[x, y]a = [e_{12}, e_{21}]a = (e_{12}e_{21} - e_{21}e_{12})a = (e_{11} - e_{22})a$ dir. Böylece ifadede $rank((e_{11} - e_{22})a) \leq rank(e_{11} - e_{22}) = 2$ olduğundan çelişki elde edilir. O halde her $x \in [_F R, _F R]$ için $x^{p^m} \in C$ kabul edebiliriz. Özel olarak her $x, y \in [_F R, _F R]$ için $[x, y]^{p^m} \in C$ dir. $_F R \cong M_2(D)$ sonlu boyutlu merkezi basit cebir olduğundan ve Alt Durum I den önceki kabul edilen $_F R \not\subseteq M_2(F)$ durumundan bazı F cismi için $t \geq 3$ olmak üzere $_F R \subseteq M_t(F)$ dir ve her $x, y \in [_F R, _F R]$ için $[x, y]^{p^m} \in C$ dir. Fakat $x = e_{12}$ ve $y = e_{21}$ alındığında $[x, y] = [e_{12}, e_{21}] = e_{12}e_{21} - e_{21}e_{12} = e_{11} - e_{22}$ olur ve buradan $[x, y]^{p^m} = (e_{11} - e_{22})^{p^m} = e_{11} + (-1)^{p^m} e_{22}$ olur. Burada $e_{11} + (-1)^{p^m} e_{22} \notin C$ dir. Çünkü $rank(e_{11} + (-1)^{p^m} e_{22}) = 2$ olduğundan bu çelişki verir. Dolayısıyla $n \geq 1$ durumundan çelişki elde edilir.

Şimdi ise $n \leq -1$ kabul edelim. Bu durumda $n' = -n$ ise $n' \geq 1$ ve her $\lambda \in C$ için, $\beta(\lambda^{p^{n'}}) = \beta(\lambda \lambda \dots \lambda) = \beta(\lambda)\beta(\lambda) \dots \beta(\lambda) = \lambda^{p^n} \lambda^{p^n} \dots \lambda^{p^n} = (\lambda^{p^n})^{p^{n'}} = (\lambda^{p^n})^{p^{-n}} = \lambda^{p^n p^{-n}} = \lambda$ olur. (3.20) de x yerine $\lambda^{p^{n'}} x$ alınarak,

$$0 = [(s+b)\lambda^{p^{n'}} x - \beta(\lambda^{p^{n'}} x)b, (\lambda^{p^{n'}} x)^{p^m}]$$

$$\begin{aligned}
&= [\lambda^{p^{n'}}(b+s)x - \lambda\beta(x)b, (\lambda^{p^{n'}})^{p^m} x^{p^m}] \\
&= [\lambda^{p^{n'}}(b+s)x - \lambda\beta(x)b, (\lambda^{p^{n'+m}} x^{p^m})] \\
&= [\lambda^{p^{n'}}(b+s)x, \lambda^{p^{n'+m}} x^{p^m}] - [\lambda\beta(x)b, \lambda^{p^{n'+m}} x^{p^m}] \\
&= \lambda^{p^{n'}} \lambda^{p^{n'+m}} [(b+s)x, x^{p^m}] - \lambda \lambda^{p^{n'+m}} [\beta(x)b, x^{p^m}] \\
&= \lambda^{p^{n'}+p^{n'+m}} [(b+s)x, x^{p^m}] - \lambda^{p^{n'+m}+1} [\beta(x)b, x^{p^m}] \\
&= \lambda^{p^{n'+m}+1} \left(\lambda^{p^{n'}-1} [(b+s)x, x^{p^m}] - [\beta(x)b, x^{p^m}] \right)
\end{aligned}$$

bulunur ve $\lambda^{p^{n'+m}+1} \neq 0$ olduğundan

$$0 = \lambda^{p^{n'}-1} [(b+s)x, x^{p^m}] - [\beta(x)b, x^{p^m}]$$

bağıntısına ulaşılır. Burada $\gamma = \lambda^{p^{n'}-1} \neq 1$ olduğundan $\psi_1 = [(b+s)x, x^{p^m}]$ ve $\psi_2 = -[\beta(x)b, x^{p^m}]$ denilirse $0 = \psi_1 + \gamma\psi_2$ denklemi elde edilir. Burada γ yerine sırasıyla 1 ve γ yazılırsa,

$$0 = \psi_1 + 1.\psi_2$$

$$0 = \psi_1 + \gamma\psi_2$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinanı

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \gamma \end{vmatrix} = \gamma - 1 \neq 0$$

olduğundan sistemin sadece sıfır (aşıkâr) çözümü vardır. Böylece $\psi_1 = [(b+s)x, x^{p^m}] = 0$ ve $\psi_2 = -[\beta(x)b, x^{p^m}] = 0$ olur. Özel olarak $[\beta(x)b, x^{p^m}] = 0$ bağıntısını alalım. Burada x yerine $x + \lambda^{p^{n'}} y$ yazılarak,

$$\begin{aligned} 0 &= [\beta(x + \lambda^{p^{n'}} y)b, (x + \lambda^{p^{n'}} y)^{p^m}] \\ &= [\beta(x)b + \lambda\beta(y)b, (x + \lambda^{p^{n'}} y)^{p^m}] \\ &= [\beta(x)b, (x + \lambda^{p^{n'}} y)^{p^m}] + [\lambda\beta(y)b, (x + \lambda^{p^{n'}} y)^{p^m}] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $0 \leq i \leq p^m$ için $\psi_i(x, y)$, i dereceli y ve $p^m - i$ dereceli x ile birlikte tüm monomiallerin toplamını ifade etsin. O halde yukarıdaki bağıntıdan

$$0 = [\beta(x)b, \sum_{i=0}^{p^m} \psi_i(x, y)(\lambda^{p^{n'}})^i] + [\lambda\beta(y)b, \sum_{i=0}^{p^m} \psi_i(x, y)(\lambda^{p^{n'}})^i]$$

bulunur. Burada ilk toplam terimi $i = 0$ için 0 ve ikinci toplam terimi de $i = p^m$ için 0 olduğundan yukarıdaki ifade,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{p^m-1} (\lambda^{p^{n'}})^{i+1} [\beta(x)b, \psi_{i+1}(x, y)] + \sum_{i=0}^{p^m-1} (\lambda^{p^{n'}})^i \lambda [\beta(y)b, \psi_i(x, y)] \\ &= \sum_{i=0}^{p^m-1} \lambda^{p^{n'}.i+1} \left(\lambda^{p^{n'}-1} [\beta(x)b, \psi_{i+1}(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_i(x, y)] \right) \end{aligned}$$

bağıntısına indirgenir. Burada $\lambda \neq 0$ olduğundan ve $\lambda^{p^{n'}-1} = \mu$ denilerek,

$$0 = \sum_{i=0}^{p^m-1} (\lambda^{p^{n'}})^i \left(\mu [\beta(x)b, \psi_{i+1}(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_i(x, y)] \right)$$

bağıntısı elde edilir ve $\lambda^{p^{n'}} = \gamma$ denilerek,

$$\begin{aligned}
0 = & 1.(\mu[\beta(x)b, \psi_1(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_0(x, y)]) \\
& + \gamma(\mu[\beta(x)b, \psi_2(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_1(x, y)]) \\
& + \gamma^2(\mu[\beta(x)b, \psi_3(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_2(x, y)]) \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& \cdot \\
& + \gamma^{p^m-1}(\mu[\beta(x)b, \psi_{p^m}(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_{p^m-1}(x, y)])
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. Yukarıdaki bağıntıda sırasıyla γ yerine $1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{p^m-1}$ yerleştirilerek ve γ^j yerine de θ_j alınarak Vandermonde determinantından

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \gamma^{p^m-1} \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^4 & \dots & \gamma^{2(p^m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \gamma^{p^m-1} & \gamma^{2(p^m-1)} & \dots & \gamma^{(p^m-1)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \theta_1 & \theta_2 & \dots & \theta_{p^m-1} \\ 1 & \theta_1^2 & \theta_2^2 & \dots & \theta_{p^m-1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \theta_1^{p^m-1} & \theta_2^{p^m-1} & \dots & \theta_{p^m-1}^{p^m-1} \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \theta_1)(1 - \theta_2) \dots (1 - \theta_{p^m-1}). \prod_{1 \leq i < j \leq p^m-1} (\theta_j - \theta_i)$$

$$= (1 - \gamma)(1 - \gamma^2) \dots (1 - \gamma^{p^m-1}). \prod_{1 \leq i < j \leq p^m-1} (\gamma^j - \gamma^i)$$

$$= \prod_{0 \leq i < j \leq p^m-1} (\lambda^{p^{n'}})^j - (\lambda^{p^{n'}})^i$$

$$\neq 0$$

bulunur. Böylece bu homojen denklem sisteminin sadece sıfır çözümü vardır. O halde yukarıda $1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{p^m-1}$ katsayılı denklemlerin her biri sıfır olmalıdır. Özel olarak,

$$\mu[\beta(x)b, \psi_1(x, y)] + [\beta(y)b, \psi_0(x, y)] = 0$$

olur. Tekrar benzer şekilde Vandermonde determinanı uygulanarak ve $\mu = \lambda^{p^{n^*}-1} \neq 1$ olduğu kullanılarak $[\beta(x)b, \psi_1(x, y)] = 0$ ve $[\beta(y)b, \psi_0(x, y)] = 0$ bağıntıları bulunur. Dolayısıyla her $x, y \in [{}_F R, {}_F R]$ için $[\beta(x)b, \psi_1(x, y)] = 0$ elde edilir.

Burada $n \geq 1$ durumu için seçilen argümanlar tekrar kullanılarak ve benzer işlemler yapılarak ispat tamamlanır. Böylece ana teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Son olarak, temel teoremden harici durumun sağlandığını göstermek için bir örnek verelim.

Örnek 3.1 F , karakteristiği 2 olan bir cisim olmak üzere $R = M_2(F)$ ve $L = [R, R] = Fe_{12} + Fe_{21} + F(e_{11} - e_{22})$ olsun. O halde L, R nin değişmeli olmayan bir Lie idealidir ve her $x \in L$ için $x^2 \in Z(R)$ dir. Şöyleki, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in R = M_2(F)$ alalım.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xa+yc & xb+yd \\ za+tc & zb+td \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ax+bz-xa-yc & ay+bt-xb-yd \\ cx+dz-za-tc & cy+dt-zb-td \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} bz-yc & ay+bt-xb-yd \\ cx+dz-za-tc & cy-zb \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Burada $A = bz - yc$, $B = ay + bt - xb - yd$, $C = cx + dz - za - tc$ alınırsa,

$$[R, R] = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \text{ formunda olur. Buradan } [R, R] = Fe_{12} + Fe_{21} + F(e_{11} - e_{22})$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \in L$ için,

$$\begin{aligned} x^2 &= \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 + BC & AB - BA \\ CA - AC & CB + A^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^2 + BC & 0 \\ 0 & CB + A^2 \end{pmatrix} \in Z(R) \end{aligned}$$

dir. Her $x \in R$ için, $f : R \rightarrow R$ $f(x) = e_{11}x - xe_{12}$ ile tanımlı bir dönüşüm olsun.

Tanımdan $0 \neq f(x) = e_{11}x - xe_{12}$ bir genelleştirilmiş türevdir. Her $x \in L$ için,

$$\begin{aligned} [f(x), x]_2 &= [[f(x), x], x] \\ &= [f(x)x - xf(x), x] \\ &= f(x)x^2 - xf(x)x - xf(x)x + x^2f(x) \\ &= f(x)x^2 - 2xf(x)x + x^2f(x) \end{aligned}$$

dır ve $\text{char}(F) = 2$ ve $x^2 \in Z$ olduğundan,

$$\begin{aligned} [f(x), x]_2 &= f(x)x^2 - x^2f(x) \\ &= [f(x), x^2] \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Fakat e_{11} , e_{12} ve $e_{11} + e_{12}$ elemanları merkezde olan elemanlar değildir.

4. ASAL HALKALARDA KUVVET DEĞİŞİMLİ (POWER-COMMUTING) GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLER

Bu bölümde Luisa Carini, Vincenzo De Filippis ve Giovanni Scudo nun 2014 yılındaki "Power – Commuting Generalized Skew Derivations in prime Rings" adlı çalışması ele alınacaktır.

Çalışma boyunca R , merkezi $Z(R)$, genişletilmiş merkezi C , sağ Martindale kesirler halkası Q_R ve simetrik Martindale kesirler halkası Q_s , $\text{char} R \neq 2$ olan bir asal halka ve $T = Q_r(R) *_C C(X)$ serbest çarpımı olarak ele alınacaktır.

Posner 1957 de, herhangi bir $x \in R$ için $[d(x), x] \in Z(R)$ olacak şekilde R nin bir d türevi varsa ya $d = 0$ ya da R nin değişmeli olduğunu ispatlamıştır. Lanski 1988 yılındaki çalışmasında Posner ın bu sonucunu bir Lie ideale genelleştirmiştir. Daha sonra Carini ve De Filippis 2000 yılında aşağıdaki teoremi ispatlamışlardır.

Teorem 4.1 (Carini and De Filippis, 2000) R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka L , R nin merkezi olmayan bir Lie ideali ve d , R nin sıfırdan farklı bir türevi olmak üzere herhangi bir $u \in L$ için $[d(u), u]^n \in Z(R)$ olsun. Bu durumda R , s_4 ü sağlar ve özel olarak herhangi bir $u \in L$ için $[d(u), u]^n = 0$ ise R değişmeli olur.

De Filippis 2006 yılında yapmış olduğu çalışmasında d türevi yerine bir genelleştirilmiş türev olarak benzer bir durumu ele almıştır. Şöyleki, eğer her $x, y \in R$ için $G(xy) = G(x)y + xd(y)$ olacak şekilde bir d türevi varsa $G : R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü bir genelleştirilmiş türev olarak adlandırılır. Genelleştirilmiş türevler öncelikle operatör cebirleri üzerinde çalışılmıştır. Bu yüzden cebirsel açıdan bir inceleme ilginç olabilir. Bu bağlamda Hvala nın 1998 yılındaki ve Lee nin 1999 yılındaki çalışmalarına bakılabilir. Daha sonra belirtildiği üzere De Filippis 2006 yılında Teorem 4.1 de geçen d türevi yerine G genelleştirilmiş

türevini alarak benzer bir durumu düşünmüştür ve aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 4.2 (De Filippis, 2006) R , sağ kesirler halkası U , genişletilmiş merkezi C ve karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve $g \neq 0$, R nin bir genelleştirilmiş türevi, L , R nin merkezi olmayan bir Lie ideali ve $n \geq 1$ olmak üzere her $u \in L$ için $[g(u), u]^n = 0$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $g(x) = ax$ olacak şekilde bir $a \in C$ vardır veya R , s_4 ü sağlar ve bazı $b \in U$ için $g(x) = bx + xb$ formundadır.

Yukarıdaki çalışmayı takiben Wong, 2006 da d türevi yerine R nin aşikar olmayan σ otomorfizmalarını alıp aşağıdaki durumu ispatlamıştır.

Teorem 4.3 (Wang, 2006) R , merkezi Z olan bir asal halka L , R nin merkezi olmayan bir Lie ideali ve σ , R nin trivial olmayan bir otomorfizması olmak üzere her $u \in L$ için $[u^\sigma, u]^n \in Z(R)$ olduğunda ya $\text{char} R > n$ ya da $\text{char} R = 0$ ise o zaman R s_4 ü sağlar.

Bu çalışmada ise Carini, De Filippis, Scudo bu araştırmaların çizgisinde kalarak her $x \in R$ için $[F(x), x]^n = 0$ ve $n \geq 1$ olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir F genelleştirilmiş skew türevi ele almışlardır. Daha detaylı belirtmek gerekirse aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 4.4 R genişletilmiş merkezi C , karakteristiği 2 den farklı değişmeli olmayan bir asal halka, $F \neq 0$ R nin genelleştirilmiş bir skew türevi ve $n \geq 1$ olmak üzere her $x \in R$ için $[F(x), x]^n = 0$ olsun. O halde her $x \in R$ için $F(x) = \lambda x$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır.

Bu bölümde her $x \in R$ ve $a, b \in Q$ için $F(x) = ax + \alpha(x)b$ olacak şekilde $F : R \rightarrow R$ dönüşümünün var olduğunu kabul edelim. Özel olarak her $r \in R$ için $[ar + \alpha(r)b, r]^n = 0$ durumunu düşünelim. İlk olarak her $x \in R$ için $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde tersinir bir $q \in Q$ nun var olduğu durum yani α nın

bir iç otomorfizma olduğu durum ele alınacaktır. Bunun için öncelikle aşağıdaki sonucu verelim.

Yardımcı Özellik 4.1 (De Filippis and Di Vincenzo, 2012, Lemma 1) F sonsuz bir cisim ve $n \geq 2$ olsun. Eğer $A_1, A_2, \dots, A_k$ lar $M_n(F)$ de skaler matrisler değil ise o zaman $PA_1P^{-1}, PA_2P^{-1}, \dots, PA_kP^{-1}$ matrislerinin her birinin içeriklerinin hepsi sıfırdan farklı olacak şekilde bir $P \in M_n(F)$ matrisi vardır.

Önerme 4.1 R karakteristiği 2 den farklı olan bir asal halka ve $a, b, q \in Q$ olsun. Eğer Q nun bir tersinir elemanı q ve her $r \in R$ için

$$[ar + qrq^{-1}b, r]^n = 0 \quad (4.1)$$

olacak şekilde sabit bir $n \geq 1$ tamsayısı var ise aşağıdakilerden biri sağlanır:

- i) $a, b, q \in C$ dir;
- ii) $q^{-1}b \in C$ ve $a + b \in C$ dir.

İspat İlk olarak $q^{-1}b \in C$ durumunu ele alalım. (4.1) den her $r \in R$ için $0 = [ar + qrq^{-1}b, r]^n = [ar + br, r]^n = [(a+b)r, r]^n$ elde edilir. Yardımcı Özellik 2.3.4 den $a+b \in C$ olur ve böylece (ii) sağlanır. Daha sonra $q \in C$ olduğu durumda (4.1) den $0 = [ar + qrq^{-1}b, r]^n = [ar + rb, r]^n = [ar - r(-b), r]^n$ olur ve Yardımcı Özellik 2.3.5 den R s_4 ü sağlamadığı ve $a = -b$ olmadığı sürece $a, -b \in Z(R)$ dir ve buradan $a, b \in Z(R)$ olup (i) sağlanır.

Böylece ispatın geri kalanında $q^{-1}b \notin C$ ve $q \notin C$ olduğunu kabul edilebilir. $q^{-1}b \notin C$ olduğundan $\{1, q^{-1}b\}$ kümesi C - bağımsız olur. (4.1) bağıntısının R için aşık bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğunu kabul edelim. O halde

$$0_T = [ar + qrq^{-1}b, r]^n$$

$$\begin{aligned}
&= [ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1} [ar + qrq^{-1}b, r] \\
&= [ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1} ((ar + qrq^{-1}b)r - r(ar + qrq^{-1}b)) \\
&= [ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1} (ar + qrq^{-1}b)r - [ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1} r(ar + qrq^{-1}b) \\
&= [ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1} ((ar + qrq^{-1}b - ra)r1 + (-[ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1})rqrq^{-1}b
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\{1, q^{-1}b\}$ C - bağımsız olduğundan $-[ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1}rq = 0$ olur.

R asal ve q tersinir olduğundan $[ar + qrq^{-1}b, r]^{n-1} = 0_T$ olmalıdır. Bu işlemler tekrarlanırsa $n-1$ adım sonra $[ar + qrq^{-1}b, r] = 0$ elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
0_T &= arr + qrq^{-1}br - rar - rqrq^{-1}b \\
&= (ar + qrq^{-1}b - ra)r1 - (rq)rq^{-1}b
\end{aligned}$$

olur. $\{1, q^{-1}b\}$ C - bağımsız olduğundan Yardımcı Özellik 2.1.1 den $-rq = 0$ elde edilir. R nin asallığı $q = 0$ olmasını gerektirir ki bu ise q nun tersinir olmasıyla çelişir. O halde (4.1) bağıntısı R için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. (4.1) de $p = q^{-1}b$ alınırsa Yardımcı Özellik 2.3.11 den Q ,

$$[ax + qxp, x]^n \quad (4.2)$$

özdeşliğini sağlar. Böylece Yardımcı Özellik 2.1.4 den Q sonlu boyutlu sıfırdan farklı lineer dönüşümleri içeren C üzerinde V vektör uzayının lineer dönüşümler halkasının yoğun bir alt halkasına izomorf olan primitif bir halkadır.

Öncelikle $\dim_C V \geq 3$ olduğunu kabul edelim. $p \notin C$ olduğundan ve kabaliden $\{v, pv\}$ C - lineer bağımsız olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Üstelik $\dim_C V \geq 3$ olduğundan $\{v, pv, w\}$ lineer C - bağımsız vektörler olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Q nun yoğunluğundan

$$rv = 0, \quad rw = v, \quad rp v = q^{-1}w$$

olacak şekilde $r \in Q$ vardır. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= [ar + qrp, r]^n v \\ &= [ar + qrp, r]^{n-1} [ar + qrp, r] v \\ &= [ar + qrp, r]^{n-1} ((ar + qrp)rv - r(ar + qrp)v) \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &= (-1)^n v \neq 0 \end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir.

Son olarak $\dim_C V \leq 2$ olduğu durumu düşünelim. $\dim_C V = 1$ ise $Q \cong C$ olmasını gerektirir ve bu da Q nun değişmeli olmasını verir. $R \subset Q$ olduğundan ve R değişmeli olmadığından bu çelişkidir. Böylece $\dim_C V = 2$ olduğunu kabul edilebilir. Yani, $M_2(C)$, C cismi üzerinde 2×2 matrisler halkası olmak üzere $Q = M_2(C)$ dir. Bu durumda $M_2(C)$

$$[ax + qxp, x]^2 \tag{4.3}$$

özdeşliğini sağlar.

İlk olarak C nin sonsuz olduğu durumu ele alalım. Hem $q \notin C$ hem de $p \notin C$ olduğundan Yardımcı Özellik 4.1 den AqA^{-1}, ApA^{-1} matrislerinin her biri içeriklerinin hepsi sıfırdan farklı olacak şekilde bir tersinir $A \in M_2(C)$ matrisi vardır. Üstelik

$$[(AaA^{-1})x + (AqA^{-1})x(ApA^{-1}), x]^2$$

$M_2(C)$ için bir genelleştirilmiş özdeşliktir. e_{ij} , (i, j) içeriği 1 ve diğerleri 0 olan matrisleri ifade etsin ve $q_{lm}, p_{lm} \in C$ için,

$$AaA^{-1} = a', \quad AqA^{-1} = q' = \sum q_{lm}e_{lm}, \quad ApA^{-1} = p' = \sum p_{lm}e_{lm}$$

alalım. Yukarıdaki özdeşlikte x yerine $i \neq j$ için $x = e_{ij}$ alalım.

$$0 = [a'e_{ij} + q'e_{ij}p', e_{ij}]^2$$

$$= (a'(e_{ij})^2 + q'e_{ij}p'e_{ij} - e_{ij}a'e_{ij} - e_{ij}q'e_{ij}p')^2$$

olur. Her iki tarafı sağdan e_{ij} ile çarparak,

$$0 = (a'(e_{ij})^2 + q'e_{ij}p'e_{ij} - e_{ij}a'e_{ij} - e_{ij}q'e_{ij}p')^2 e_{ij}$$

$$= (a'(e_{ij})^2 + q'e_{ij}p'e_{ij} - e_{ij}a'e_{ij} - e_{ij}q'e_{ij}p')e_{ij}(-q'e_{ij}p')e_{ij}$$

$$= (-1)^2 e_{ij}q'e_{ij}p'e_{ij}(q'e_{ij}p')e_{ij}$$

$$= (e_{ij}q'e_{ij}p')^2 e_{ij}$$

$$= (e_{ij}q'e_{ij}p')(e_{ij}q'e_{ij}p')e_{ij}$$

$$= (q_{ji}e_{ij})p'(e_{ij}q'e_{ij}p')e_{ij}$$

$$= q_{ji}p_{ji}e_{ij}q'e_{ij}p'e_{ij}$$

$$= q_{ji}p_{ji}q_{ji}e_{ij}p'e_{ij}$$

$$= q_{ji} p_{ji} q_{ji} p_{ji} e_{ij}$$

$$0 = q_{ji}^2 p_{ji}^2 e_{ij}$$

sonucunu buluruz. Buradan $q_{ji}^2 p_{ji}^2 = 0$ elde edilir. C cisim olduğundan son bağıntı $q_{ji} p_{ji} = 0$ olduğunu verir ve bu ise $q_{ji} = 0$ veya $p_{ji} = 0$ olmasını gerektirir. Fakat her iki durumda da bu bir çelişkidir. Çünkü p ve q nun içeriklerinin hepsi sıfırdan farklı idi.

O halde C nin sonlu olduğunu kabul edebiliriz. K , C cisminin genişlemesi olan sonsuz bir cisim ve $\bar{R} = M_2(K) \cong R \otimes_C K$ olsun. $[ax + qxp, x]^2$ genelleştirilmiş polinom özdeşliği x değişkenleri içinde 4. dereceden homojendir. Böylece bu denklemin tam doğrusallaştırılması ile 4 değişkenli $\theta(x_1, y_1, z_1, t_1)$ çoklu doğrusal genelleştirilmiş polinom özdeşliği elde edilir. Üstelik $x_1 = y_1 = z_1 = t_1$ için

$$\theta(x_1, x_1, x_1, x_1) = 4[ax_1 + qx_1p, x_1]^2$$

dir. $\theta(x_1, y_1, z_1, t_1)$ çoklu doğrusal polinomu R ve $\bar{R}$ için de genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. $\text{char} R \neq 2$ olduğundan her $r \in \bar{R}$ için $[ar + qrp, r]^2 = 0$ dır.

Yardımcı Özellik 4.2 R , karakteristiği 2 den farklı ve değişmeli olmayan bir asal halka olsun. Her $x \in R$ için $[\alpha(x), x]^n = 0$ olacak şekilde R ' nin bir $\alpha : R \rightarrow R$ otomorfizması varsa o zaman α R üzerinde birim dönüşümdür.

İspat Yardımcı Özellik 2.3.8 den R , genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Eğer her $x \in R$ için $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde bir $q \in Q$ varsa o zaman $[qxq^{-1}, x]^n = 0$ olup Önerme 4.1 den $q \in C$ elde edilir. Bu ise α nın birim dönüşüm olduğunu gösterir. Şimdi α nın R nin bir dış otomorfizması olduğu kabul edelim.

Yardımcı Özellik 2.3.11 den R ve Q aynı otomorfizmalı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar ve böylece $[\alpha(x), x]^n$, Q için de bir özdeşlik olur. R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkası olduğundan Yardımcı Özellik 2.1.4 den Q , D bölümlü halkası üzerinde V vektör uzayının lineer dönüşümler halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. Q nun bölge olduğu durumda Yardımcı Özellik 2.3.7 den Q , $[y, x]^n = 0$ bağıntısını sağlar ve buradan Q değişmeli olur. Bu ise bir çelişkidir.

Böylece $\dim_D V \geq 2$ olduğu durum kabul edilir. Yardımcı Özellik 2.1.2 den her $x \in Q$ için $\alpha(x) = TxT^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in \text{End}(V)$ yarı- lineer otomorfizması vardır. Bu durumda her $x \in Q$ için $[TxT^{-1}, x]^n = 0$ olur. Eğer herhangi bir $v \in V$ için $T^{-1}v = v\lambda_v$ olacak şekilde $\lambda_v \in D$ varsa Yardımcı Özellik 2.1.7 dan her $v \in V$ için $T^{-1}v = v\lambda$ olacak şekilde bir tek $\lambda \in D$ vardır. Bu durumda $\alpha(x)v = (TxT^{-1})v = Txv\lambda$ ve her $x \in Q$ ve her $v \in V$ için,

$$\begin{aligned}
 (\alpha(x) - x)v &= \alpha(x)v - xv = Txv\lambda - xv \\
 &= T(xv\lambda) - xv \\
 &= T((xv)\lambda) - xv \\
 &= T(T^{-1}(xv)) - xv \\
 &= xv - xv \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

olur. Buradan her $v \in V$ ve her $x \in Q$ için $(\alpha(x) - x)V = 0$ olur. V nin "faithful" oluşu her $x \in Q$ için, $\alpha(x) = x$ olmasını gerektirir. Bu ise α nın birim dönüşüm olması çelişkisini verir. Bu yüzden $\{v, T^{-1}v\}$ lineer D -bağımsız olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. İlk olarak $\dim_D V \geq 3$ olduğu durumu ele alalım. Bu durumda

$\{w, v, T^{-1}v\}$ D -lineer bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Üstelik Q nun yoğunluğundan $rv = 0$, $rT^{-1}v = T^{-1}w$ ve $rw = -v$ olacak şekilde bir $r \in Q$ vardır. Böylece hipotezden $[\alpha(x), x]^n = 0$ olduğu kullanılarak her $r \in R$ için,

$$\begin{aligned}
0 &= [\alpha(r), r]^n v = [TrT^{-1}, r]^n v \\
&= (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})^n v \\
&= (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})^{n-1} (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})v \\
&= (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})^{n-1} (TrT^{-1}rv - rTrT^{-1}v) \\
&= -(TrT^{-1}r - rTrT^{-1})^{n-2} (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})v \\
&= (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})^{n-3} (TrT^{-1}r - rTrT^{-1})v \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= v
\end{aligned}$$

elde edilir. $v \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Bundan dolayı sadece $\dim_D V = 2$ durumu ele alınacaktır.

Şimdi $\dim_D V = 2$ olsun. Kabulden $w \notin vD$ ve $Tw \notin vD$ olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Yukarıdaki kabulde $\{v, T^{-1}v\}$ lineer bağımsız olduğu hatırlatılarak eğer her $w \in V$ için $w \in vD$ veya $Tw \in vD$ olsaydı o zaman $w \in vD$ veya $w \in T^{-1}(vD) = (T^{-1}v)D$ olurdu. Bu ise $V \subseteq (vD) \cup (T^{-1}v)D$ demektir ve ayrıca $(vD) \cup (T^{-1}v)D \subseteq V$ kapsanması mevcuttur. Bu iki bağıntı $V = (vD) \cup (T^{-1}v)D$ olduğunu verir. Bir V vektör uzayı iki öz alt uzayının birleşimi şeklinde yazılamayacağından ya $V = vD$ veya $V = (T^{-1}v)D$ olmalıdır.

Her iki durumda da $\dim_D(V)=1$ olur. Fakat Q bölge olmadığından ve $\dim_D V = 2$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece

$$w = v\lambda + (T^{-1}v)\mu \quad (4.4)$$

$$Tw = v\eta + (T^{-1}v)\theta \quad (4.5)$$

koşullarını sağlayan $w \in V$, $\lambda, 0 \neq \mu, \eta, 0 \neq \theta \in D$ vardır ve üstelik $\tau : D \rightarrow D$, D nin T ye bağlı otomorfizması olmak üzere, (4.4) bağıntısına τ yarı- lineer otomorfizması uygulanarak,

$$\begin{aligned} T(w) &= T(v\lambda + (T^{-1}v)\mu) \\ &= T(v\lambda) + T((T^{-1}v)\mu) \\ &= (Tv)\tau(\lambda) + T(T^{-1}v)\tau(\mu) \\ &= (Tv)\tau(\lambda) + v\tau(\mu) \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada $\mu \neq 0$ olduğundan $\tau(\mu) \neq 0$ dır. (4.5) ve (4.6) karşılaştırılarak, $\tau(\lambda) \neq 0$ iken

$$\begin{aligned} 0 &= T(w) - T(w) = v\eta + (T^{-1}v)\theta - ((Tv)\tau(\lambda) + v\tau(\mu)) \\ &= v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta - (T(v)\tau(\lambda)) \end{aligned}$$

olur. Burada $\theta \neq 0$ ve $\{v, T^{-1}v\}$ D - bağımsız olduğundan $v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta \neq 0$ dır. Aksi durumda $v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta = 0$ olsaydı $\{v, T^{-1}v\}$ nin D - bağımsızlığından $\theta = 0$ çelişisini verirdi. Burada $\tau(\mu) = \mu'$ ve $\tau(\lambda) = \lambda'$ ile gösterelim. $0 = v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta - (T(v)\tau(\lambda))$ denkleminde $(Tv)\tau(\lambda) = v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta$ olur. Burada $\tau(\lambda) = \lambda'$ yazılarak

$(Tv)\lambda' = v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta$ ve böylece $Tv = [v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta](\lambda')^{-1}$ elde edilir. Hipotezden her $x \in Q$ için $[TxT^{-1}, x]^n = 0$ olduğundan bu bağıntıda x yerine $x + y$ yazılarak her $x, y \in Q$ için $[T(x + y)T^{-1}, x + y]^n = 0$ elde edilir ve bağıntı açılarak buradan her $x, y \in Q$ için,

$$\begin{aligned} & (TxT^{-1}x - xTxT^{-1} + TyT^{-1}x - xTyT^{-1} \\ & + TxT^{-1}y - yTxT^{-1} + TyT^{-1}y - yTyT^{-1})^n = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Q nun yoğunluğundan

$$r_1v = 0, \quad r_2v = 0, \quad r_1T^{-1}v = -v, \quad r_2T^{-1}v = 0$$

olacak şekilde $r_1, r_2 \in Q$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} r_1(Tv) &= r_1\left([v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta](\lambda')^{-1}\right) \\ &= r_1[v(\eta - \tau(\mu))](\lambda')^{-1} + r_1(T^{-1}v)\theta(\lambda')^{-1} \\ &= -v\theta(\lambda')^{-1} \end{aligned}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned} r_2(Tv) &= r_2\left([v(\eta - \tau(\mu)) + (T^{-1}v)\theta](\lambda')^{-1}\right) \\ &= r_2\left([v(\eta - \tau(\mu))](\lambda')^{-1} + r_2\left([T^{-1}v)\theta](\lambda')^{-1}\right)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur ve buradan yukarıdaki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}
& (Tr_1T^{-1}r_1 - r_1Tr_1T^{-1} + Tr_2T^{-1}r_1 - r_1Tr_2T^{-1} \\
& + Tr_1T^{-1}r_2 - r_2Tr_1T^{-1} + Tr_2T^{-1}r_2 - r_2Tr_2T^{-1})v = -v\theta(\lambda')^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (4.7) den

$$\begin{aligned}
0 &= (Tr_1T^{-1}r_1 - r_1Tr_1T^{-1} + Tr_2T^{-1}r_1 - r_1Tr_2T^{-1} \\
& + Tr_1T^{-1}r_2 - r_2Tr_1T^{-1} + Tr_2T^{-1}r_2 - r_2Tr_2T^{-1})^n v = v(\theta(\lambda')^{-1})^n \neq 0
\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir.

Yardımcı Özellik 4.3 R , karakteristiği 2 den farklı ve değişmeli olmayan bir asal halka, $b, c \in Q$ ve her $x \in R$ için $[bx + \alpha(x)c, x]^n = 0$ olacak şekilde $\alpha : R \rightarrow R$, R nin bir dış otomorfizması olsun. O zaman $b \in C$ ve $c = 0$ dır.

İspat $b \notin C$ ya da $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Yardımcı Özellik 2.3.8 den R bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği halkasıdır ve Yardımcı Özellik 2.1.4 den Q sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır ve Q nun ilişkili bölümlü halkası D , C üzerinde sonlu boyutludur. Böylece Q , D üzerindeki bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. Yardımcı Özellik 4.2 de belirtildiği gibi her $x \in Q$ için $\alpha(x) = TxT^{-1}$ olacak şekilde bir $T \in \text{End}(V)$ yarı- lineer otomorfizması vardır. Böylece Q , $[bx + TxT^{-1}c, x]^n$ özdeşliğini sağlar.

Eğer herhangi bir $v \in V$ için $T^{-1}cv = v\lambda_v$ olacak şekilde bir $\lambda_v \in D$ varsa Yardımcı Özellik 2.1.7 den her $v \in V$ için $T^{-1}cv = v\lambda$ olacak şekilde bir tek $\lambda \in D$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(bx + \alpha(x)c)v &= (bx + TxT^{-1}c)v = bxv + TxT^{-1}cv \\
&= bxv + Txv\lambda
\end{aligned}$$

$$= bxv + T(xv\lambda)$$

$$= bxv + T(T^{-1}cxv)$$

$$= bxv + cxv$$

$$= (b + c)xv$$

olur ve böylece her $v \in V$ ve $x \in Q$ için

$$(bx + \alpha(x)c - (b + c)x)v = 0$$

elde edilir. V nin "faithful" oluşundan her $x \in Q$ için $bx + \alpha(x)c = (b + c)x$ olur. Bu yüzden her $x \in Q$ için $[(b + c)x, x]^n = 0$ ve $\alpha(x)c = cx$ dir. Teorem 4.2 den $b + c \in C$ elde edilir. Üstelik Q , $\alpha(x)c = cx$ bağıntısını sağladığından ve $\alpha(x)$ -kelimesinin derecesi 1 olduğundan Yardımcı Özellik 2.3.9 gereğince her $x \in Q$ için $yc - cx = 0$ olur ve buradan $c \in C$ elde edilir. $b + c \in C$ olduğundan $b \in C$ dir ya da $c \in C$ ise $(\alpha(x) - x)c = 0$ olur. R asal olduğundan ve $c \in C$ olması $c = 0$ veya her $x \in Q$ için $\alpha(x) = x$ olmasını gerektirir. İkinci durumda α , Q üzerinde birim dönüşümdür. Bu ise α nın dış otomorfizma olmasıyla çelişir. O halde $\{v, T^{-1}cv\}$ kümesi C -bağımlı olamaz. Bundan dolayı $\{v, T^{-1}cv\}$, C -bağımsız olacak şekilde bir $v \in V$ nin var olduğu kabul edilebilir.

Öncelikle $\dim_D V \geq 3$ durumunu düşünelim. Böylece $\{w, v, T^{-1}cv\}$, lineer D -bağımsız olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Üstelik Q nun yoğunluğundan

$$rv = 0, rT^{-1}cv = T^{-1}w, rw = -v$$

olacak şekilde bir $r \in Q$ vardır. Hipotezden her $x \in R$ için $0 = [bx + \alpha(x)c, x]^n$ idi. Q da bu özdeşliği sağladığından özel olarak $r \in Q$ için $0 = [br + \alpha(r)c, r]^n$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= [br + \alpha(r)c, r]^n v \\
&= [br + TrT^{-1}c, r]^n v \\
&= (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)^n v \\
&= (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)^{n-1} (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)v \\
&= (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)^{n-1} (br^2 v + TrT^{-1}crv - rbrv - rTrT^{-1}cv) \\
&= (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)^{n-1} v \\
&= (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)^{n-2} (br^2 + TrT^{-1}cr - rbr - rTrT^{-1}c)v \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&= v
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu v nin lineer bağımsızlığı ile çelişir. O halde $\dim_D V \leq 2$ olmalıdır. Eğer C sonlu ise D de sonludur. Yardımcı Özellik 2.1.5 den D cisimdir.

Eğer $\dim_D V = 1$ ise $Q \cong D$ olur. Bu ise Q sonlu D bölgesine izomorf olduğundan, D nin değişmeliliğinden Q nun değişmeli olmasını ve dolayısıyla R nin değişmeli olduğu çelişkisini verir. Eğer $\dim_D V = 2$ ise $Q \cong M_2(D)$ olup Q , $[bx + \alpha(x)c, x]^2$ bağıntısını sağlar. $\text{char} R \neq 0$ olduğundan yani $\text{char}(R) = p$ (p asal) olduğundan $\alpha(x)$ - kelime derecesi her zaman R nin karakteristiğinden küçüktür. Yani $\text{der}(\alpha(x)\text{- kelime}) = 1 < 2$ dir. Yardımcı Özellik 2.3.9 dan Q $[bx + yc, x]^2$ özdeşliğini sağlar ve Teorem 4.2 den $b, c \in C$ olur. Üstelik eğer $c \neq 0$ ise her $x \in Q$ için $[\alpha(x), x]^2 = 0$ olup Yardımcı Özellik 4.2 den α, Q üzerinde birim dönüşümdür. Bu ise α nın dış otomorfizma olmasıyla çelişir.

Bir önceki tartışmanın ışığında, bundan sonra C cisminin sonsuz olduğunu kabul edebiliriz. İspatın bundan sonraki kısmını iki ayrı durum için inceleyelim:

Öncelikle α Frobenius olmasın. O zaman Yardımcı Özellik 2.3.16 dan R , $[bx + yc, x]^n = 0$ özdeşliğini sağlar. Özel olarak $x=y$ için Teorem 4.2 den $b, c \in C$ olduğu elde edilir. Bunlar yukarıdaki bağıntıda yerine yazılırsa ve $[bx, x] = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= [bx + yc, x]^n \\ &= ([bx, x] + [yc, x])^n \\ &= [yc, x]^n \end{aligned}$$

bulunur. $c \in C$ olduğundan $c^n[y, x]^n = 0$ olur. $0 \neq c \in C$ olduğundan ve genişletilmiş merkez sıfırdan farklı nilpotent eleman içermeyeceğinden $[y, x]^n = 0$ elde edilir ve bu ise R nin değişmeli olduğu çelişkisini verir.

Şimdi ise α Frobenius olsun. Eğer $\text{char} R = 0$ ise tanımdan her $x \in C$ için $\alpha(x) = x$ dir. Yardımcı Özellik 2.1.6 den α bir iç otomorfizmadır. Bu ise α nın dış otomorfizma olmasıyla çelişir. Böylece $\text{char} R = p > 2$ ve her $\gamma \in C$ ve bazı sıfırdan farklı sabit t tamsayısı için $\alpha(\gamma) = \gamma^{p^t}$ olduğunu kabul edelim. Üstelik α birim dönüşüm olmadığından $\alpha(\lambda) = \lambda^{p^t} \neq \lambda$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır. Yani, bir $\lambda \in C$ için, $\lambda^{p^t-1} \neq 0$ dır. Özel olarak $\gamma = \lambda^{p^t-1} \neq 0$ olacak şekilde bir $\gamma \in C$ seçelim. $[bx + \alpha(x)c, x]^n = 0$ bağıntısında x yerine λx yazılarak

$$\begin{aligned} 0 &= [b(\lambda x) + \alpha(\lambda x)c, \lambda x]^n \\ &= [b(\lambda x) + \alpha(\lambda)\alpha(x)c, \lambda x]^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [b(\lambda x) + \lambda^{p'} \alpha(x)c, \lambda x]^n \\
&= ([\lambda bx, \lambda x] + [\lambda^{p'} \alpha(x)c, \lambda x])^n \\
&= (\lambda^2 [bx, x] + \lambda^{p'+1} [\alpha(x)c, x])^n \\
&= (\lambda^2 ([bx, x] + \lambda^{p'-1} [\alpha(x)c, x]))^n \\
&= \lambda^{2n} ([bx, x] + \gamma [\alpha(x)c, x])^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\phi(x) = [bx, x]$ ve $\Omega(x) = [\alpha(x)c, x]$ olsun. O halde her $r \in R$ için $(\phi(r) + \gamma \Omega(r))^n = 0$ olur. Burada $\sum_{(i,n-i)} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$, $n-i$ dereceli $\phi(x)$ ile i dereceli $\Omega(x)$ in bütün permütasyonlarının toplamı olmak üzere

$$\sum_{i=0}^n \gamma^i \left(\sum_{(i,n-i)} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n \right) = 0 \text{ dır.}$$

Tekrar burada içteki her bir toplam, bazı farklı sıra içerisinde tamamen $n-i$ dereceli $\phi(x)$ ile i dereceli $\Omega(x)$ ten oluşur. Burada $j=1, 2, \dots, n$ için, $y_j = \sum_{(j,n-j)} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n$

toplamını ifade etsin. Yani; $y_0 = \sum_{j=0}^n \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n = \phi(x)^n$, $y_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n =$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \phi(x)^{n-1-i} \Omega(x) \phi(x)^i, y_n = \sum_{j=n}^0 \phi_1 \phi_2 \dots \phi_n = \Omega(x)^n \text{ dır.}$$

Bu tanımlamalar ve eşitliklerden

$$y_0 + \gamma y_1 + \gamma^2 y_2 + \dots + \gamma^n y_n = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. Burada γ yerine sırasıyla $1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^n$ yazılırsa

$$y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0$$

$$y_0 + \gamma y_1 + \gamma^2 y_2 + \dots + \gamma^n y_n = 0$$

$$y_0 + \gamma^2 y_1 + \gamma^4 y_2 + \dots + \gamma^{2n} y_n = 0 \quad (4.9)$$

$$y_0 + \gamma^3 y_1 + \gamma^6 y_2 + \dots + \gamma^{3n} y_n = 0$$

.

.

.

$$y_0 + \gamma^n y_1 + \gamma^{2n} y_2 + \dots + \gamma^{n^2} y_n = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Üstelik C sonsuz olduğundan $i=1, 2, \dots, n$ için $\lambda^{i(p^i-1)} \neq 1$ olacak şekilde sonsuz çoklukta $\lambda \in C$ vardır. Yani; $i=1, 2, \dots, n$ için $\gamma^i \neq 1$ olacak şekilde sonsuz çoklukta $\gamma = \lambda^{p^i-1} \in C$ vardır. Böylece

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \gamma^n \\ 1 & \gamma^2 & \gamma^4 & \dots & \gamma^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \gamma^n & \gamma^{2n} & \dots & \gamma^{n^2} \end{vmatrix} = (1-\gamma)(1-\gamma^2)\dots(1-\gamma^n) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\gamma^i - \gamma^j) \neq 0$$

elde edilir. Böylece Vandermonde determinantından katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı oluşu homojen denklem sisteminin sadece sıfır (aşıkâr) çözümü olduğunu verir. Böylece her $i=1, 2, \dots, n$ için $y_i = 0$ olur. Özel olarak $y_0 = 0$ dır. Yani; $\phi(r)^n = 0$ dır. Böylece her $r \in R$ için $[br, r]^n = 0$ dır. Teorem 4.2 deki sonuçlar uygulanarak $b \in C$ elde edilir.

Bu yüzden ispatı tamamlamak için $c \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. $b \in C$ ve $c \neq 0$ olduğundan R , $[\alpha(x)c, x]^n$ özdeşliğini sağlar. O zaman x yerine $x + \lambda$ yazılarak $0 = [\alpha(x + \lambda)c, x + \lambda]^n = [\alpha(x)c + \lambda^{p'}$, $x]^n$ elde edilir. Yani; her $r \in R$ için $([\alpha(r)c, r] + \lambda^{p'}[c, r])^n = 0$ olur. Burada $\mu = \lambda^{p'}$, $\Delta(r) = [\alpha(r)c, r]$, $\psi(r) = [c, r]$ eşitlikleri alınırsa her $r \in R$ için $(\Delta(r) + \mu\psi(r))^n = 0$ elde edilir.

Yukarıdaki argümanlara benzer olarak toplamaların içinde $\psi(x)$ formunda $n - i$ terimli ve $\Delta(x)$ formunda i terimli tüm permütasyonlar olmak üzere kuvvet

açıldığında sonunda $\sum_{i=0}^n \mu^i \left(\sum_{(i,n-i)} \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n \right) = 0$ terimi elde edilir. Burada herhangi

$j=0, 1, 2, \dots, n$ için $z_j = \sum_{(j,n-j)} \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n$ gösterebiliriz. Yani; $z_0 = \sum_{j=0}^n \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n = \Delta(r)^n$

ve $z_n = \psi(r)^n$ dir. Böylece bu tanımlamalar ışığında

$$z_0 + \mu z_1 + \mu^2 z_2 + \dots + \mu^n z_n = 0 \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.10) denkleminde μ yerine sırasıyla $1, \mu, \mu^2, \dots, \mu^n$ yazılırsa

$$z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$$

$$z_0 + \mu z_1 + \mu^2 z_2 + \dots + \mu^n z_n = 0$$

$$z_0 + \mu^2 z_1 + \mu^4 z_2 + \dots + \mu^{2n} z_n = 0$$

$$z_0 + \mu^3 z_1 + \mu^6 z_2 + \dots + \mu^{3n} z_n = 0 \quad (4.11)$$

.

.

.

$$z_0 + \mu^n z_1 + \mu^{2n} z_2 + \dots + \mu^{n^2} z_n = 0$$

homojen denklem sistemi elde edilir. C sonsuz olduğundan $i=1, 2, \dots, n$ için $\lambda^{i.p^i} \neq 1$ olacak şekilde sonsuz çoklukta $\lambda \in C$ vardır. Yani; $i=1, 2, \dots, n$ için $\mu^i = (\lambda^{p^i})^i \neq 1$ koşulunu sağlayacak şekilde sonsuz çoklukta $\mu = \lambda^{p^i} \in C$ vardır. Böylece Vandermonde determinantından

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \dots & \mu^n \\ 1 & \mu^2 & \mu^4 & \dots & \mu^{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \mu^n & \mu^{2n} & \dots & \mu^{n^2} \end{vmatrix} = (1-\mu)(1-\mu^2)\dots(1-\mu^n) \cdot \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\mu^i - \mu^j) \neq 0$$

elde edilir. Burada (4.11) homojen denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklı olduğundan homojen sistemin sadece sıfır çözümü vardır ve böylece $i=0, 1, 2, \dots, n$ için $z_i = 0$ olur. Özel olarak $z_n = 0$ dır. Yani; her $r \in R$ için $[c, r]^n = 0$ dır. Yardımcı Özellik 2.1.8 den $c \in C$ olup $c \neq 0$ olduğundan $[\alpha(x)c, x]^n = [\alpha(x), x]^n c = 0$ ve böylece $[\alpha(x), x]^n = 0$ elde edilir. Yardımcı Özellik 4.2 den α, R üzerinde birim dönüşüm olur. Fakat α, R nin dış otomorfizması olduğundan bu bir çelişkidir.

Son olarak bu bölümde temel sonucun ispatını verelim.

Chuang 2003 de R nin herhangi bir (sağ) genelleştirilmiş skew türevinin R nin Q_r sağ Martindale kesirler halkasına tek türlü genişletilebileceğini göstermiştir. Şöyleki; sağ genelleştirilmiş skew türev, her $x, y \in Q_r$ için δ, R nin bir skew türevi ve α, R nin bir otomorfizması olmak üzere $F(xy) = F(x)y + \alpha(x)\delta(y)$ olacak şekilde $F: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümdür ve her $x \in R$ için $F(x) = ax + \delta(x)$ olacak şekilde $F(1) = a \in Q_r$ vardır.

Teorem 4.4 R genişletilmiş merkezi C , karakteristiği 2 den farklı değişmeli olmayan bir asal halka, $F \neq 0$ R nin genelleştirilmiş bir skew türevi ve $n \geq 1$ olmak üzere her $x \in R$ için $[F(x), x]^n = 0$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $F(x) = \lambda x$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır.

İspat Daha önce belirtildiği gibi F genelleştirilmiş skew türevini her $x \in R$ ve uygun bir $a \in Q_r$ için $F(x) = ax + \delta(x)$ formunda alabiliriz. Böylece hipotezden $R, [ax + \delta(x), x]^n$ özdeşliğini sağlar.

İlk olarak α dış skew türev olsun. Yardımcı Özellik 2.3.6 den $R, [ax + y, x]^n$ özdeşliğini sağlar. Özel olarak $R, [ax, x]^n$ özdeşliğini de sağlar. Teorem 4.2 den $a \in C$ dir ve $[y, x]^n, R$ için bir özdeşliktir. Böylece R değişmelidir. Bu ise bir çelişkidir.

Şimdi ise δ bir iç skew türev olsun. Yani; her $x \in R$ için $\delta(x) = bx - \alpha(x)b$ olacak şekilde bir $b \in Q$ vardır. Böylece her $x \in R$ için, $R,$

$0 = [ax + bx - \alpha(x)b, x]^n = [(a+b)x - \alpha(x)b, x]^n$ özdeşliğini sağlar. İlk olarak α nın bir iç otomorfizma olduğu durumu ele alalım. O zaman, $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde tersinir bir $q \in Q$ vardır. O halde Önerme 4.1 den

- 1) ya $a, b, q \in C$ dir, yani her $x \in R$ için $F(x) = ax$ dir,
- 2) ya da $q^{-1}b \in C$ ve $a \in C$ olmak üzere $F(x) = ax$ dir,

Diğer taraftan α, R nin bir dış otomorfizması ise o zaman Yardımcı Özellik 4.3 ten

- 1) ya $a \in C$ ve $b = 0$ dir, yani her $x \in R$ için $F(x) = ax$ dir,
- 2) ya da $a, b \in C$ dir, yani α, R üzerinde birim dönüşüm ve her $x \in R$ için $F(x) = ax$ dir.

Böylece ispat tamamlanır.

5. ASAL HALKALARDA HİPERDEĞİŞMELİ (HYPERCOMMUTING) GENELLEŞTİRİLMİŞ SKEW TÜREVLER

Bu bölümde De Filippis ve Di Vincenzo nun 2014 yılında yapmış oldukları "Hypercentralizing generalized skew derivations on left ideals in prime rings" başlıklı çalışmalarındaki ilk bölüm olan "Hypercentralizing generalized skew derivations on prime rings" kısmı ele alınacaktır.

Bu çalışma boyunca R bir asal halka, $\text{char} R \neq 2$, Q_r , R nin sağ Martindale kesirler halkası, C R nin merkezi genişlemesi, $T = Q_r(R) *_C C(X)$ serbest çarpımı, I R nin sıfırdan farklı sol ideali ve F de α otomorfizması ile belirlenen R nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş skew türevini ifade edecektir.

Chuang ve Lee 1995 yılında I bir R yarı asal halkasının bir sol ideali ve $n = n(x) > 1$ ve $n(x)$ ler sınırlı olmak üzere her $x \in I$ için $d(x^n)$ merkezi olacak şekilde R nin bir d türevi varsa $[I, R]d(R) = 0$ olduğunu ispatlamıştır. Eğer R asal bir halka ise bu durum R nin değişmeli olduğunu verir. Bu alanda çalışan bir çok araştırmacı daha da detaya inerek asal halkanın tek yanlı ideallerinin bazı tip Engel koşulunu sağladığındaki durumu analiz etmişlerdir. Bu bağlamda Lee 1995 yılında bir R yarı asal halkası, R nin bir d türevi için, I , R nin bir sol ideali ve k, n sabit pozitif tamsayılar olmak üzere her $x \in I$ için $[d(x^n), x^n]_k = 0$ koşulu sağlanıyorsa o zaman $[I, R]d(R) = 0$ olduğunu bulmuşlardır. Burada R asal bir halka ise bu durum R nin değişmeli olduğunu verir. Son zamanlarda, Albaş, Argaç ve De Filippis tarafından 2008 yılında diğer bir genelleştirme düşünülmüştür. Daha ayrıntılı vurgulamak gerekirse çalışmada d türevi yerine bir asal halkanın δ genelleştirilmiş türevi alındığında ne olacağını düşünmüşlerdir. Şöyleki, genişletilmiş merkezi C , sol maksimal kesirler halkası U , sıfırdan farklı sol ideali I olan bir R asal halkasında δ R nin bir genelleştirilmiş türevi ve $n, k \geq 1$ sabit tamsayılar olmak üzere her $x \in I$ için $[\delta(x^n), x^n]_k = 0$ koşulu sağlanıyorsa o zaman bir $c \in U$ için $\delta(x) = xc$ formundadır ve uygun bir $\lambda \in C$ için $I(c - \lambda) = 0$ dır.

Bu çalışmada ise De Filippis ve Di Vincenzo 2014 yılında Albaş, Argaç ve De Filippis (2008) in çalışmasını genelleştirilmiş skew türevlere genişletmeyi amaçlamışlardır.

Önerme 5.1 R bir asal halka, $n, k \geq 1$ sabit tamsayılar ve $b, c \in Q_r$ halkasının elemanları ve α, R nin bir otomorfizması olsun. Her $r \in R$ için $[br^n - \alpha(r^n)c, r^n]_k = 0$ ise α otomorfizması R üzerinde birim dönüşümdür ve $b, c \in C$ dir ya da $q^{-1}c \in C$ ve $b - c \in C$ olmak üzere her $x \in R$ için $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde tersinir bir $q \in Q_r$ vardır. Diğer bir deyişle, her $x \in R$ için $F(x) = \lambda x$ olacak şekilde $\lambda \in C$ vardır.

Önerme 5.1 in ispatı için öncelikle aşağıdaki yardımcı özelliklere ihtiyaç duyulur. İlk özellik (Argaç, Albaş and De Filippis, 2008, Theorem 1) in bir indirgenmiş halidir.

Yardımcı Özellik 5.1 R , değişmeli olmayan bir asal halka ve $a, b \in R$ olsun. $n, k \geq 1$ sabit tamsayılar olmak üzere, her $r \in R$ için $[ar^n + r^n b, r^n]_k = 0$ ise o zaman $a, b \in C$ dir.

İlk olarak $\alpha \in \text{Aut}(R)$ nin, R nin iç otomorfizması olduğu durum yani her $x \in R$ için $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir $q \in Q_r$ elemanının olduğu durum ele alınacaktır. Daha iyi anlaşılması için her $x \in R$ için

$$\varphi(x) = [bx^n - qx^n q^{-1}c, x^n]_k \quad (5.1)$$

polinomunu gösterecektir. Böylece aşağıdaki özellikte aksi belirtilmedikçe her $r \in R$ için $\varphi(r) = 0$ olacaktır. Yani, R halkası $\varphi(x)$ özdeşliğini sağlar.

Yardımcı Özellik 5.2 R bir asal halka, $n, k \geq 1$ sabit tamsayılar, $b, c, q \in Q_r$ olsun. Eğer q tersinir ve her $r \in R$ için $[br^n - qr^n q^{-1}c, r^n]_k = 0$ ise o zaman $q^{-1}c \in C$ ve $b - c \in C$ dir.

İspat: Hipotezden R , (5.1) özdeşliğini sağlar. Yani $\phi(x)$, R için bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği ve aynı zamanda Q_r için de bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir.

Eğer $q^{-1}c \in C$ ya da $q \in C$ ise Yardımcı Özellik 5.1 den ispat biter. Böylece $q^{-1}c \notin C$ ve $q \notin C$ olduğu düşünülür. Bu durumda (5.1) özdeşliğinin daha önceki bölümlerde yapıldığı gibi benzer işlemler yapılarak Q_r için aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğu görülür.

Yardımcı Özellik 2.1.4 ten Q_r C ilişkili bölümlü halkası ile birlikte sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir halkadır ve Yardımcı Özellik 2.3.3 den Q_r , C üzerinde V vektör uzayının lineer dönüşümler halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur.

$\dim_C V \geq 2$ olsun. Bu durumda, $\{q^{-1}cv, v\}$ lineer C -bağımsız olacak şekilde bir $v \in V$ vardır.

İlk olarak $\dim_C V = \infty$ olduğu durumu ele alalım. $\{q^{-1}cv, v\}$ lineer C -bağımsız olduğundan, $\{q^{-1}cv, v, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$ lineer C -bağımsız olacak şekilde $v_1, \dots, v_{n-1}, w_1, \dots, w_{n-1} \in V$ vardır. Q_r nin yoğunluğundan, $r^n v = 0$ ve $r^n(q^{-1}cv) = q^{-2}cv$ olması için $i = 1, \dots, n-2$ olmak üzere

$$rv = v_1, \quad rv_i = v_{i+1}, \quad rv_{n-1} = 0, \quad r(q^{-1}cv) = w_1,$$

$$rw_i = w_{i+1}, \quad rw_{n-1} = q^{-2}cv, \quad rq^{-2}cv = q^{-1}cv$$

olacak şekilde bir $r \in Q_r$ vardır. (5.1) den

$$\begin{aligned} 0 &= [br^n - qr^n q^{-1}c, r^n]_k v \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (r^n)^i (br^n - qr^n q^{-1}c) (r^n)^{k-i} v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (r^n)^i b r^n (r^n)^{k-i} v - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (r^n)^i (q r^n q^{-1} c) (r^n)^{k-i} v \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (r^n)^i b (r^n)^{k-i+1} v - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (r^n)^i (q r^n q^{-1} c) (r^n)^{k-i} v \\
&= - \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (r^n)^i (q r^n q^{-1} c) (r^n)^{k-i} v \\
&= (-1)^{k+1} (r^n)^k (q r^n q^{-1} c) v \\
&= (-1)^{k+1} (r^n)^k q r^n q^{-1} c v \\
&= (-1)^{k+1} (r^n)^k q q^{-2} c v \\
&= (-1)^{k+1} (r^n)^k q^{-1} c v \\
&= (-1)^{k+1} (r^n)^{k-1} r^n q^{-1} c v \\
&= (-1)^{k+1} (r^n)^{k-1} q^{-2} c v \\
&= (r^n)^{k-2} r^n q^{-2} c v \\
&= q^{-2} c v
\end{aligned}$$

olur. Buradan $q(q^{-2}cv) = q^{-1}cv = 0$ çelişkisi elde edilir. Çünkü $q^{-1}cv$ lineer bağımsız olduğundan $q^{-1}cv \neq 0$ dır. O halde boyut sonlu olmalıdır. Bu durumda $\dim_C V = t$ (t sonlu) olduğu kabul edilir. O zaman $Q_r \cong M_t(C)$ olur. $p_{ij}, q_{ij} \in C$ olmak üzere $p = q^{-1}c = \sum_{i,j} e_{ij} p_{ij}$, $q = \sum_{i,j} e_{ij} q_{ij}$ ile gösterelim. (5.1) de x yerine e_{ii} yazılarak $[be_{ii}^n - qe_{ii}^n q^{-1}c, e_{ii}^n]_k = 0$ elde edilir ve bu bağıntı her $i \neq j$ için sağdan e_{jj} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= [be_{ii}^n - qe_{ii}^n q^{-1}c, e_{ii}^n]_k e_{jj} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k}{m} (e_{ii}^n)^m (be_{ii}^n - qe_{ii}^n q^{-1}c) (e_{ii}^n)^{k-m} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^k (e_{ii}^n)^k (be_{ii}^n - qe_{ii}^n q^{-1}c) \right) e_{jj} \\
&= (-1)^{k+1} (e_{ii}^n)^k qe_{ii}^n q^{-1}ce_{jj} \\
&= (-1)^{k+1} e_{ii} qe_{ii} q^{-1}ce_{jj} \\
&= e_{ii} qe_{ii} q^{-1}ce_{jj} \\
&= q_{ii} e_{ii} q^{-1}ce_{jj}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= q_{ii} e_{ii} \sum_{r,s} e_{rs} p_{rs} e_{jj} \\
&= q_{ii} p_{ij} e_{jj}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $i \neq j$ için,

$$q_{ii} p_{ij} = 0 \quad (5.2)$$

olur.

$p_{ij} \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O zaman yukarıdaki (5.2) bağıntısından $q_{ii} = 0$ elde edilir. Bir $\varphi \in \text{Aut}(Q_r)$ için, $\varphi([bx^n - qx^n q^{-1}c, x^n]_k) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi([bx^n - qx^n q^{-1}c, x^n]_k) \\
&= [\varphi(b)\varphi(x^n) - \varphi(q)\varphi(x^n)\varphi(q^{-1}c), \varphi(x^n)]_k \\
&= [\varphi(b)\varphi(x)^n - \varphi(q)\varphi(x)^n\varphi(q^{-1}c), \varphi(x)^n]_k
\end{aligned}$$

elde edilir. φ örten olduğundan $\varphi(x) = r$ denilirse her $r \in R$ için,

$$= [\varphi(b)r^n - \varphi(q)r^n\varphi(q^{-1}c), r^n]_k$$

bulunur. Böylece her $r \in R$ için,

$$= [\varphi(b)r^n - \varphi(q)r^n\varphi(q^{-1}c), r^n]_k \quad (5.3)$$

bağıntısına ulaşılır.

O zaman b, p ve q nun sağladığı tüm özellikler $\varphi(b)$, $\varphi(p)$ ve $\varphi(q)$ içinde geçerli olacaktır. Dolayısıyla $\varphi(b)$, $\varphi(p)$ ve $\varphi(q)$ (5.2) yi sağlar. Burada φ otomorfizması Q nun herhangi bir otomorfizması olduğundan özel olarak

$\varphi(x) = (1 + e_{ji})x(1 - e_{ji}) = x + e_{ji}x - xe_{ji} - e_{ji}xe_{ji}$ olacak şekilde bir iç otomorfizma olarak alınırsa ve $p'_{ij}, q'_{ij} \in C$ olmak üzere, $\varphi(q) = \sum q'_{ij}e_{ij}$, $\varphi(p) = \sum p'_{ij}e_{ij}$ olur. $\varphi(q)$, $\varphi(p)$ ve $\varphi(b) \in Q$ elemanları (5.2) yi sağladığından benzer işlemlerle $q'_{ii}p'_{ij} = 0$ elde edilir. φ nin tanımından $q'_{ii} = q_{ij}$ ve $p'_{ij} = p_{ij}$ elde edilir. $q'_{ii}p'_{ij} = 0$ olduğundan $q_{ij}p_{ij} = 0$ dır. $p_{ij} \neq 0$ olduğundan her $i \neq j$ için $q_{ij} = 0$ elde edilir. Böylece q köşegen matris olur. Burada eğer $t = 2$ alınırsa $i = 1, 2$ için $q_{ii} = 0$ olur. q tersinir olduğundan bu bir çelişkidir.

Öyleyse $t \geq 3$ olduğunu kabul edebiliriz. Her $k \neq i, j$ için

$$\chi(x) = (1 + e_{ki})x(1 - e_{ki}) = x + e_{ki}x - xe_{ki} - e_{ki}xe_{ki}$$

ve $q''_{ij}, p''_{ij} \in C$ olmak üzere

$$\chi(q) = \sum q''_{ij}e_{ij}, \quad \chi(p) = \sum p''_{ij}e_{ij}$$

olsun. Otomorfizma altında invaryantlıktan (5.2) bağıntısı $q''_{ij}p''_{ij} = 0$ sonucunu verir. Yukarıdaki benzer yöntemle $q''_{ii} = q_{ik}$ ve $p''_{ij} = p_{ij}$ elde edilir. Burada $p_{ij} \neq 0$ olduğundan her $k \neq i$ için $q_{ik} = 0$ olur. Böylece $q = 0$ olur. q tersinir olduğundan bu bir çelişkidir. Her iki durumda da çelişki elde edildiği görülür.

Böylece her $i \neq j$ için $p_{ij} = 0$ olmalıdır. Bu ise p nin bir köşegen matris olduğunu verir. Yukarıdaki açıklamalarda (5.2) özdeşliğinde yapılan incelemeler (5.3) özdeşliğinde de yapılırsa $\varphi(p)$ de p ile aynı özdeşliği sağlar. Yani, $\varphi(p)$ de bir köşegen matris olur. $\varphi(x) = (1 + e_{ij})x(1 - e_{ij}) = x + e_{ij}x - xe_{ij} - e_{ij}xe_{ij}$ ve p de bir köşegen matris olduğundan $p = \sum p_{ss}e_{ss}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= p + e_{ij}p - pe_{ij} - e_{ij}pe_{ij} \\ &= p + e_{ij} \sum p_{ss}e_{ss} - \sum p_{ss}e_{ss}e_{ij} - e_{ij} \sum p_{ss}e_{ss}e_{ij} \end{aligned}$$

$$= p + p_{jj}e_{ij} - p_{ii}e_{ij}$$

olur. Böylece $\varphi(p) - p = (p_{jj} - p_{ii})e_{ij}$ elde edilir. Burada $\varphi(p) - p$ köşegen olduğundan $(p_{jj} - p_{ii})e_{ij}$ de köşegen olmalıdır. $i \neq j$ için e_{ij} köşegen olmadığından her $i \neq j$ için $p_{jj} = p_{ii}$ dir. Buradan uygun bir $\beta \in C$ için $p = \sum \beta e_{kk}$ elde edilir. Yani; $p = \alpha I_n \in C$ olur. $p \in C$ ve $p = q^{-1}c$ olduğundan $q^{-1}c \in C$ dir. Fakat $q^{-1}c \notin C$ idi.

Böylece $q^{-1}c \in C$ veya $q \in C$ olmalıdır. İlk durum geçerliyse başlangıç hipotezden $0 = [(b-c)r^n, r^n]_k$ olur. Yardımcı Özellik 5.1 den $b-c \in C$ olup ispat biter. İkinci durum geçerliyse $0 = [br^n + r^n(-c), r^n]_k$ olup Yardımcı Özellik 5.1 den $b, -c \in C$ elde edilir ve böylece $b-c \in C$ olur ve ispat biter.

Yardımcı Özellik 5.3 R bir asal halka, $n, k \geq 1$ sabit tamsayılar, $b, c \in Q_r$ ve $\alpha \in \text{Aut}(Q)$, Q_r nin bir dış otomorfizması olsun. Eğer her $r \in R$ için $[br^n - \alpha(r^n)c, r^n]_k = 0$ ise o zaman $c = 0$ ve $b \in C$ olmadıkça $b, c \in C$ dir.

İspat Yardımcı Özellik 2.3.11 den R ve Q_r otomorfizmalı aynı genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağladığından her $x \in Q_r$ için,

$$[bx^n - \alpha(x^n)c, x^n]_k = 0 \quad (5.4)$$

dir. Eğer R değişmeli ise ispat biter.

O halde R nin değişmeli olmadığını ve ayrıca $b \notin C$ veya $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. İlk olarak (5.4) özdeşliğinin aşıkâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliği olduğunu görelim. O zaman $[bx^n - \alpha(x^n)c, x^n]_k = 0_T$ olduğunu kabul edelim. $c \in C$ ve $b \notin C$ ise Engel koşulundan

$$0_T = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (x^n)^i (bx^n - \alpha(x^n)c) x^{n(k-i)}$$

$$\begin{aligned}
&= (bx^n - \alpha(x^n)c)(x^n)^k + \sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} (x^n)^i (bx^n - \alpha(x^n)c)x^{n(k-i)} \\
&= bx^n(x^n)^k + x^n \left(\sum_{i=1}^k (-1)^i \binom{k}{i} (x^n)^{i-1} (bx^n - \alpha(x^n)c)x^{n(k-i)} \right) - \alpha(x^n)c(x^n)^k
\end{aligned}$$

olur. $\{1, b\}$ kümesi C -bağımsız olduğundan $x^{n+nk} = 0$ çelişkisi elde edilir. Eğer $c \notin C$ ve $b \notin C$ ise yine benzer işlemlerle çelişki elde edilir. Böylece Yardımcı Özellik 2.3.15 ten Q_r aşikar olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğini sağlar. Buradan Yardımcı Özellik 2.1.4 ten Q_r primitif bir halkadır ve D bölümlü halkası üzerinde bir V vektör uzayının lineer dönüşümlerinin bir halkasının yoğun bir alt halkasına izomorftur. Üstelik Q_r , sonlu ranklı sıfırdan farklı lineer dönüşümleri içerir.

Eğer α , Frobenius değilse o zaman Yardımcı Özellik 2.3.16 dan ve (5.4) den Q_r kesirler halkası

$$[bx^n - y^n c, x^n]_k \quad (5.5)$$

polinom özdeşliğini sağlar ve yukarıdaki bağıntıda $x = y$ alınırsa Yardımcı Özellik 5.1 den $b, c \in C$ bulunur. O zaman, (5.5) ten her $x \in R$ için $b[x^n, x^n]_k - c[y^n, x^n]_k = c[y^n, x^n]_k = 0$ olur. $c \neq 0$ olduğundan $[y^n, x^n] = 0$ ve böylece Q_r değişmeli olur. Bu ise bir çelişkidir. Diğer taraftan Q_r bir bölge ise o zaman Yardımcı Özellik 2.3.12 den ve (5.4) ten Q_r halkası (5.5) bağıntısını sağlar ve yukarıdaki incelemeden Q_r değişmeli olur ve böylece çelişki elde edilir.

Daha önceki incelemeler ışığında α , Frobenius otomorfizması ve $\dim_D V \geq 2$ kabul edilir. Eğer $\dim_D V = 1$ alınırsa $V = D$ olduğundan D üzerinde lineer dönüşümlerin yoğun bir alt halkasına izomorf olan Q_r bölge olur. Bu ise Q_r nin değişmeliliğini verir.

Eğer $\text{char}(R) = 0$ olursa α Frobenius olduğundan her $x \in C$ için $\alpha(x) = x$ olur. Bu durumda Yardımcı Özellik 2.1.6 dan α iç otomorfizma olur. Bu ise α nın dış otomorfizma olmasıyla çelişir.

O halde $\text{char}(R) = p \neq 0$ ve her $\lambda \in C$ ve sıfırdan farklı sabit t tamsayısı için $\alpha(\lambda) = \lambda^{p^t}$ olsun. Üstelik $\gamma^{p^t} \neq \gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in C$ vardır.

İlk olarak $p^s > k$ koşulunu sağlayan $s \geq 1$ alalım. O zaman Q_r her $x \in Q_r$ için $[bx^n - \alpha(x^n)c, x^n]_{p^s}$ özdeşliğini sağlar. Yani, Engel koşulundan her $x \in Q_r$ için

$$\begin{aligned} 0 &= [bx^n - \alpha(x^n)c, x^n]_{p^s} = \sum_{i=0}^{p^s} (-1)^i \binom{p^s}{i} (x^n)^i (bx^n - \alpha(x^n)c) (x^n)^{(p^s-i)} \\ &= (bx^n - \alpha(x^n)c) x^{n(p^s)} - p^s x^n (bx^n - \alpha(x^n)c) x^{n(p^s-1)} \\ &\quad + \dots + (-1)^{p^s-1} p^s x^{n(p^s-1)} (bx^n - \alpha(x^n)c) x^n \\ &\quad + (-1)^{p^s} (x^n)^{p^s} (bx^n - \alpha(x^n)c) \\ &= (bx^n - \alpha(x^n)c) x^{n(p^s)} + x^{n(p^s)} (bx^n - \alpha(x^n)c) \end{aligned}$$

olur. Buradan her $x \in Q_r$ için,

$$0 = [(bx^n - \alpha(x^n)c), x^{n(p^s)}] \quad (5.6)$$

olur. Böylece özel olarak $\lambda^n = \gamma$ olacak şekilde $\lambda \in C$ seçilip ve (5.6) da x yerine λx yazılarak her $x \in Q_r$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= [b(\lambda x)^n - \alpha(\lambda x)^n c, (\lambda x)^{n \cdot p^s}]_{p^s} = [b\lambda^n x^n - \alpha(\lambda^n) \alpha(x^n) c, \lambda^{n \cdot p^s} x^{n \cdot p^s}] \\ &= [b\lambda^n x^n - \lambda^{n \cdot p^t} \alpha(x^n) c, \lambda^{n \cdot p^s} x^{n \cdot p^s}] \\ &= \lambda^{n(p^s+1)} [bx^n - \lambda^{n(p^t-1)} \alpha(x^n) c, x^{n(p^s)}] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan Q_r kesirler halkası, $\lambda^{n(p^s+1)}[bx^n - \lambda^{n(p^t-1)}\alpha(x^n)c, x^{n(p^s)}]$ özdeşliğini sağlar. $\lambda^n = \gamma$ olduğundan yukarıdaki bağıntı her $x \in Q_r$ için $\gamma^{(p^s+1)}[bx^n - \gamma^{(p^t-1)}\alpha(x^n)c, x^{n(p^s)}] = 0$ olur. Buradan her $x \in Q_r$ için,

$$[bx^n - \gamma^{(p^t-1)}\alpha(x^n)c, x^{n(p^s)}] = 0 \quad (5.7)$$

dir. Şimdi (5.6) ve (5.7) denklemlerinin farkı alınırsa

$$[(bx^n - \alpha(x^n)c, x^{n(p^s)})] - [bx^n - \gamma^{(p^t-1)}\alpha(x^n)c, x^{n(p^s)}] = 0 \text{ olur. Buradan}$$

$$\begin{aligned} 0 &= bx^n x^{n \cdot p^s} - \alpha(x^n)cx^{n \cdot p^s} - x^{n \cdot p^s}bx^n + x^{n \cdot p^s}\alpha(x^n)c \\ &= bx^n x^{n \cdot p^s} - \gamma^{p^t-1}\alpha(x^n)cx^{n \cdot p^s} - x^{n \cdot p^s}bx^n + x^{n \cdot p^s}\gamma^{p^t-1}\alpha(x^n)c \end{aligned}$$

olup $0 = (\gamma^{p^t-1} - 1)[\alpha(x^n)c, x^{n \cdot p^s}]$ elde edilir. Bu da Q_r için otomorfizmalı bir özdeşliktir. Yani Q_r halkası

$$[\alpha(x^n)c, x^{n \cdot p^s}] \quad (5.8)$$

özdeşliğini sağlar. Ayrıca tekrar (5.6) ve (5.8) birlikte düşünüldüğünde her $r \in Q_r$ için $0 = [br^n, r^{n(p^s)}] = [b, r^{n(p^s)}]r^n$ olur. $0 = [br^n, r^{n(p^s)}] = [br^n, r^n]_{p^s}$ olduğundan Yardımcı Özellik 2.2.3 kullanılarak $b \in C$ elde edilir. $b \in C$ olduğundan ve baştaki kabulden $c \neq 0$ olmalıdır. Çünkü ispata başlanırken $b \notin C$ veya $c \neq 0$ kabul edilmişti.

Şimdi $0, 1 \neq e^2 = e \in \text{Soc}(Q_r)$ olsun. O zaman (5.8) de x yerine e alınarak ve $e^2 = e$ olduğu kullanılarak

$$[\alpha(e)c, e] = 0 \quad (5.9)$$

elde edilir. (5.9) bağıntısı sağdan $(1-e)$ ile çarpılırsa $(\alpha(e)ce - e\alpha(e)c)(1-e) = 0$ olur ve bu ise

$$e\alpha(e)c(1-e) = 0 \quad (5.10)$$

olmasını gerektirir. (5.10) bağıntısı $Soc(Q_r)$ deki herhangi bir e idempotenti için sağlandığından her $x \in Q_r$ için $(1-e) - (1-e)xe \in Soc(Q_r)$ idempotenti içinde sağlanır ve buradan (5.10) da e yerine her $x \in Q_r$ için $(1-e) - (1-e)xe$ alınarak

$$((1-e) - (1-e)xe)\alpha((1-e) - (1-e)xc)c(1 - (1-e) + (1-e)xe) = 0$$

bulunur. Buradan Q_r ,

$$\begin{aligned} 0 &= (1-e)\alpha(1-e)c(1-e)xe + (1-e)\alpha(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c(e + (1-e)xe) \\ &\quad - (1-e)xe\alpha(1-e)c(e + (1-e)xe) \\ &\quad + (1-e)xe\alpha(1-e)\alpha(x)\alpha(e)c(e + (1-e)xe) \end{aligned} \quad (5.11)$$

bağıntısını sağlar. Burada α bir dış otomorfizma olduğundan (5.11) de $\alpha(x)$ yerine y yerleştirerek Q_r halkasının

$$\begin{aligned} 0 &= (1-e)\alpha(1-e)c(1-e)xe + (1-e)\alpha(1-e)y\alpha(e)c(e + (1-e)xe) \\ &\quad - (1-e)xe\alpha(1-e)c(e + (1-e)xe) \\ &\quad + (1-e)xe\alpha(1-e)y\alpha(e)c(e + (1-e)xe) \end{aligned} \quad (5.12)$$

bağıntısını sağladığı görülür. Burada özel olarak $x = 0$ alınırsa her $r \in Q_r$ için $(1-e)\alpha(1-e)r\alpha(e)ce = 0$ bulunur. Böylece Q_r nin asallığından her $e^2 = e \in Soc(Q_r)$ için

$$(1) \text{ ya } (1-e)\alpha(1-e) = 0$$

$$(2) \text{ yada } \alpha(e)ce = 0$$

dır.

İlk olarak $(1-e)\alpha(1-e) = 0$ durumunu düşünelim. (5.12) den

$$-(1-e)xe\alpha(1-e)c(e + (1-e)xe) + (1-e)xe\alpha(1-e)y\alpha(e)c(e + (1-e)xe) = 0$$

olur ve burada özel olarak $y = 0$ alınırsa

$$-(1-e)xe\alpha(1-e)c(e + (1-e)xe) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki son iki bağıntı karşılaştırıldığında $(1-e)xe\alpha(1-e)y\alpha(e)c(e+(1-e)xe)=0$ olur. Son denklemde y yerine ye alınırsa

$$(1-e)xe\alpha(1-e)ye\alpha(e)ce + (1-e)xe\alpha(1-e)ye\alpha(e)c(1-e)xe = 0$$

olur ve (5.10) kullanılarak

$$(1-e)xe\alpha(1-e)ye\alpha(e)ce = 0 \quad (5.13)$$

elde edilir. Q_r nin asallığından ya $(1-e)xe\alpha(1-e)=0$ veya $e\alpha(e)ce=0$ olmalıdır. Eğer $e\alpha(1-e)=0$ olsaydı $(1-e)\alpha(1-e)=0$ olduğundan $\alpha(1-e)=0$ ve böylece $1-e=0$ olurdu. Bu ise $e \neq 1$ olduğundan çelişki verirdi. O halde $e\alpha(1-e) \neq 0$ ve $e \neq 1$ olduğundan tek alternatif olan $e\alpha(e)ce=0$ olmalıdır. Son bağıntı (5.10) da kullanılarak $e\alpha(e)c=0$ elde edilir. (5.9) da $[\alpha(e)c, e]=0$ olduğundan $\alpha(e)ce - e\alpha(e)c=0$ olur ve burada $e\alpha(e)ce=0$ olduğu kullanılırsa her $e^2 = e \in Q_r$ için $\alpha(e)ce=0$ elde edilir.

Şimdi her $x \in Q_r$ için $(ex(1-e)+e)^2 = ex(1-e)+e$ olduğundan bir e idempotenti yerine $ex(1-e)+e \in Soc(Q_r)$ idempotent elemanını alalım. O zaman $\alpha(e)ce=0$ denkleminde bu idempotent elemanı kullanılırsa Q_r ,

$$(\alpha(ex(1-e)) + \alpha(e))c(ex(1-e)+e)$$

özdeşliğini sağlar. Böylece $\alpha(e)ce=0$ olduğu kullanılarak her $x \in Q_r$ için,

$$0 = \alpha(ex(1-e))cex(1-e) + \alpha(ex(1-e))ce + \alpha(e)cex(1-e) + \alpha(e)ce$$

elde edilir ve burada $\alpha(e)ce=0$ olduğu kullanılırsa

$$0 = \alpha(ex(1-e))c(ex(1-e)+e)$$

bulunur. Buradan her $x \in Q_r$ için,

$$0 = \alpha(ex(1-e))c(ex(1-e)+e)$$

$$= \alpha(ex - exe)c(ex(1-e)+e)$$

$$= \alpha(ex - exe)c(ex(1-e)+e)$$

$$\begin{aligned}
&= (\alpha(e)\alpha(x) - \alpha(e)\alpha(x)\alpha(e))(ex(1-e) + e) \\
&= \alpha(e)\alpha(x)cex(1-e) + \alpha(e)\alpha(x)ce - \alpha(e)\alpha(x)\alpha(e)cex(1-e) \\
&\quad - \alpha(e)\alpha(x)\alpha(e)ce \\
&= \alpha(e)\alpha(x)c(ex(1-e) + e)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece Q_r halkası $0 = \alpha(e)\alpha(x)c(ex(1-e) + e)$ özdeşliğini sağlar. α dış otomorfizma olduğundan yukarıdaki bağıntıda $\alpha(x)$ yerine y alınarak her $x, y \in Q_r$ için

$$\alpha(e)yc(ex(1-e) + e) = 0$$

olur. Burada özel olarak $x = 0$ alınırsa her $y \in Q_r$ için, $\alpha(e)yce = 0$ bulunur. Q_r asal ve $\alpha(e) \neq 0$ olduğundan her $e^2 = e \in Soc(Q_r)$ için $ce = 0$ olmalıdır. Q_r nin tüm idempotent elemanları tarafından üretilen toplamsal bir altgrubu E olsun. Böylece $cE = (0)$ olur. Üstelik Q_r , $e \neq 0, 1$ idempotentine sahip basit bir halka olduğundan $[Q_r, Q_r] \subset E$ (Herstein, 1969, Corollary) dir. Yani, $c[Q_r, Q_r] \subset cE = (0)$ dan $c[Q_r, Q_r] = (0)$ olur. Burada her $x, y \in Q_r$ için $c[x, y] = 0$ olur. x yerine rx alınarak her $x, y \in Q_r$ için Q_r nin asallığından $0 = cr[x, y] + c[r, y]x = cr[x, y]$ ve buradan $c = 0$ veya $[Q_r, Q_r] = (0)$ elde edilir. Bu durumda $c \neq 0$ ve Q_r değişmeli olmadığından her iki durumda da çelişki bulunur.

Uyarı 5.1 Yardımcı Özellik 5.1, Yardımcı Özellik 5.2 ve Yardımcı Özellik 5.3; Önerme 5.1 i ispatlamak için gerekli mümkün olan tüm durumları kapsar. Şöyleki;

Yardımcı Özellik 5.1 den $[ar^n + r^n b, r^n]_k = 0$ ise $a, b \in C$ dir. Yardımcı Özellik 5.2 den $[br^n - qr^n q^{-1}c, r^n]_k = 0$ ise $q^{-1}c \in C$ ve $b - c \in C$ dir. Son olarak Yardımcı Özellik 5.3 den $[br^n - \alpha(r^n)c, r^n]_k = 0$ ise $c = 0$ ve $b \in C$ olmadıkça $b, c \in C$ olur. Önerme 5.1 in ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 5.1 R sağ Martindale kesirler halkası Q_r ve genişletilmiş merkezi C olan bir asal halka ve $F: R \rightarrow R$ dönüşümü R nin sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş skew türevi olsun. Eğer $n, k \geq 1$ sabit tamsayılar olmak üzere her $x \in R$ için $[F(x^n), x^n]_k = 0$ ise o zaman her $x \in R$ için $F(x) = \lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır.

İspat Genelleştirilmiş skew türevlerin Tanım 2.3.5 ten genişletilebildiği bilinmektedir. Yani, her $x \in R$ için $F(x) = ax + d(x)$ olacak şekilde bir $a \in Q_r$ ve R nin bir d skew türevi vardır. Ayrıca bu kısımda α dönüşümü ile d skew türevi ve F genelleştirilmiş skew türevi ile ilişkilendirilen R nin bir otomorfizması gösterilecektir.

d bir X - iç skew türev olsun. O zaman her $x \in R$ için $d(x) = cx - \alpha(x)c$ olacak şekilde bir $c \in Q_r$ vardır. Böylece $F(x) = ax + d(x) = ax + cx - \alpha(x)c = (a + c)x - \alpha(x)c$ olur ve hipotezden her $r \in R$ için

$$[(a + c)r^n - \alpha(r^n)c, r^n]_k = 0$$

elde edilir. Önerme 5.1 den

- (1) Her $x \in R$ için $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde bir $q \in Q_r$ tersinir elemanı vardır ve $q^{-1}c \in C$, $a \in C$ dir. O zaman $d(x) = cx - qxq^{-1}c = cx - cx = 0$ olur ve buradan $F(x) = ax$ dır,

veya

- (2) α , R' nin birim dönüşümüdür ve $a + c$, $c \in C$ dir. Buradan $a \in C$ olur ve $d(x) = cx - \alpha(x)c = cx - xc = 0$ olur ve böylece $F(x) = ax$ dır,

ya da

(3) Yardımcı Özellik 5.3 ten $c=0$ ve $a+c \in C$ dir. Böylece $a \in C$ ve $d(x)=0$ bulunur ve bu durumda $F(x)=ax$ dir.

Böylece her bir durumda her $x \in R$ için $F(x)=\lambda x$ olacak şekilde bir $\lambda \in C$ vardır.

Şimdi ise d bir X - iç olmasın. Hipotezden R halkası $[ax^n + d(x^n), x^n]_k$ özdeşliğini sağlar. Leibnitz açılımından $d(x^n) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x^i) d(x) x^{n-i-1}$ olduğundan R halkası,

$$[ax^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x^i) d(x) x^{n-i-1}, x^n]_k \quad (5.14)$$

özdeşliğini sağlar. Burada d bir dış skew türev olduğundan Yardımcı Özellik 2.3.13 kullanılarak (5.14) de $d(x)$ yerine y alınırsa R ,

$$[ax^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x^i) y x^{n-i-1}, x^n]_k \quad (5.15)$$

özdeşliğini sağlar. Özel olarak (5.15) de $y=0$ alınırsa her $x \in R$ için $[ax^n, x^n]_k = 0$ olur. Yardımcı Özellik 5.1 den $a \in C$ elde edilir.

Eğer α otomorfizması R üzerinde birim dönüşüm ise bu d skew türevinin R nin bir (adi) türevi olduğunu verir. Hipotezden $0 = [ax^n + d(x^n), x^n]_k = [ax^n, x^n]_k + [d(x^n), x^n]_k$ elde edilir. Burada $a \in C$ olduğundan $[d(x^n), x^n]_k = 0$ olur. Böylece Yardımcı Özellik 2.3.17 den $[R, R]d(R) = (0)$ bağıntısına ulaşılır. Bu ise R nin asallığından ve ayrıca R değişmeli olmadığından $d(R) = (0)$ yani $d=0$ elde edilir. Yerine yazılırsa $F(x)=ax$ ve $a \in C$ bulunur ve burada ispat biter.

O halde α nın R üzerinde birim dönüşüm olmadığını kabul edelim. $a \in C$ olduğundan R

$$[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha(x^i) y x^{n-i-1}, x^n]_k \quad (2.16)$$

bağıntısını sağlar. Eğer α dış otomorfizma ise Yardımcı Özellik 2.3.14 ten R ,

$$[\sum_{i=0}^{n-1} z^i y x^{n-i-1}, x^n]_k$$

bağıntısını sağlar ve burada özel olarak $z = 0$ alınırsa sadece $i = 0$ durumundan $[y x^{n-1}, x^n]_k = 0$ elde edilir ve bu ise R için bir özdeşliktir. Son bağıntıda y yerine yx alarak her $y \in Q_r$ ve $x \in R$ için $[y x^n, x^n]_k = 0$ elde edilir ve Yardımcı Özellik 2.3.18 kullanılarak $y \in C$ olduğu bulunur. Böylece R değişmeli olur. Bu ise bir çelişkidir.

Son olarak her $x \in Q_r$ için $\alpha(x) = qxq^{-1}$ olacak şekilde bir tersinir $q \in Q_r$ var olduğu durum düşünülür. Böylece R

$$[\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i y x^{n-i-1}, x^n]_k \quad (5.17)$$

özdeşliğini sağlar. Burada α birim dönüşüm olmadığından ve $q \notin C$ olduğundan (5.17) bağıntısı R için aşıkâr olmayan bir genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Tersine aşıkâr bir özdeşlik olduğunu varsayalım. O zaman her $x \in Q_r$ için

$$[\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i y x^{n-i-1}, x^n]_k = 0_T \text{ olur ve Engel açılımından,}$$

$$\begin{aligned} 0_T &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x^n)^j \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i y x^{n-i-1} \right) (x^n)^{k-j} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i y x^{n-i-1} (x^n)^k + \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x^n)^j \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i y x^{n-i-1} \right) (x^n)^{k-j} \\ &= y x^{n-1} (x^n)^k \sum_{i=1}^{n-1} (qxq^{-1})^i y x^{n-i-1} (x^n)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x^n \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x^n)^{j-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i yx^{n-i-1} \right) (x^n)^{k-j} \\
& = q \left(xq^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} (qxq^{-1})^{i-1} yx^{n-i-1} (x^n)^k \right) \\
& + 1 \left(yx^{n-1} (x^n)^k + x^n \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x^n)^{j-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i yx^{n-i-1} \right) (x^n)^{k-j} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\{1, q\}$ C -bağımsız olduğundan $xq^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} (qxq^{-1})^{i-1} yx^{n-i-1} (x^n)^k = 0$

ve $yx^{n-1} (x^n)^k + x^n \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x^n)^{j-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qxq^{-1})^i yx^{n-i-1} \right) (x^n)^{k-j} = 0_T$ olur. Burada

$xq^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} (qxq^{-1})^{i-1} yx^{n-i-1} (x^n)^k = 0$ bağıntısı soldan q ile çarpılırsa

$\sum_{i=1}^{n-1} (qxq^{-1})^i yx^{n-i-1} = 0$ elde edilir. Burada y yerine yq alınırsa

$\left(\sum_{i=0}^{n-2} (qxq^{-1})^i yqx^{n-i-1} \right) 1 + ((qxq^{-1})^{n-1} y)q = 0$ olur. $\{1, q\}$, C -bağımsız olduğundan

$(qxq^{-1})^{n-1} y = 0$ bulunur. Özel olarak $(qxq^{-1})^{n-1} = 0$ olur. Buradan

$(qxq^{-1})^{n-1} = qxq^{-1}qxq^{-1} \dots qxq^{-1} = qx^{n-1}q^{-1}$ bulunur. $q \neq 0$ olduğundan her $x \in Q_r$

için $x^{n-1} = 0$ dır. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla (5.17) aşıkâr olmayan bir

genelleştirilmiş polinom özdeşliğidir. Yardımcı Özellik 2.1.4 ten, Q_r

ilişkilendirilmiş bölümlü halkası C olan sıfırdan farklı "socle" a sahip primitif bir

halkadır. Yardımcı Özellik 2.3.3 den Q_r , C üzerinde V vektör uzayının lineer

dönüşümlerinin yoğun bir alt halkasına izomorftur.

İlk olarak $\dim_C V \geq 3$ olduğu durumu düşünelim. $q \notin C$ olduğundan $\{q^{-1}v, v\}$ C -lineer bağımsız olacak şekilde bir $v \in V$ vardır. Üstelik $\dim_C V \geq 3$ olduğundan $\{q^{-1}v, v, w\}$ C -lineer bağımsız olacak şekilde olacak şekilde bir $w \in V$ vardır. Q_r nin yoğunluğundan Yardımcı Özellik 2.1.3 kullanılarak

$$rw = 0, sw = v, rq^{-1}v = q^{-1}v \text{ ve } rv = v$$

olacak şekilde $r, s \in Q_r$ vardır. Böylece (5.17) de $x = r$ ve $y = s$ alınarak ve Engel açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} (qrq^{-1})^i sr^{n-i-1}, r^n \right]_k w \\
&= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (r^n)^j \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qrq^{-1})^i sr^{n-i-1} \right) (r^n)^{k-j} w \\
&= (-1)^k (r^n)^k \left(\sum_{i=0}^{n-1} (qrq^{-1})^i sr^{n-i-1} \right) w \\
&= (-1)^k (r^n)^k (qrq^{-1})^{n-1} sw \\
&= (-1)^k (r^n)^k (qrq^{-1})^{n-1} v \\
&= (-1)^k (r^n)^k (qrq^{-1} \dots qrq^{-1}) v \\
&= (-1)^k (r^n)^k qr^n q^{-1} v \\
&= (-1)^k (r^n)^k qr^{n-1} q^{-1} v \\
&= (-1)^k (r^n)^k qr^{n-2} q^{-1} v \\
&\vdots \\
&\vdots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$0 = (-1)^k v$$

çelişkisi elde edilir.

Şimdi $\dim_C V = 2$ olsun. Böylece $Q \cong M_2(C)$ dir. Burada q matrisi

$$q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \text{ olsun. O zaman } q^{-1} = \frac{1}{\det(q)} \begin{bmatrix} q_{22} & -q_{12} \\ -q_{21} & q_{11} \end{bmatrix} \text{ dır. (2.17) de } x = e_{22}$$

ve $y = e_{21}$ alınarak

$$0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (qe_{22}q^{-1})^i e_{21} e_{22}^{n-i-1}, e_{22} \right]_k$$

bulunur. Burada tüm toplam terimleri sıfır olacağından $i = n-1$ olmalıdır ve

$$q^{-1} = \sum c_{rs} e_{rs} \text{ alınır}$$

$$0 = [qe_{22}q^{-1}e_{21}, e_{22}]_k$$

$$= [qc_{22}e_{21}, e_{22}]_k$$

$$= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (e_{22})^j qc_{22}e_{21}e_{22}^{k-j}$$

$$= (-1)^k e_{22}qc_{22}e_{21}$$

$$= (-1)^k e_{22} \sum_{i,j=1}^2 q_{ij} e_{ij} c_{22} e_{21}$$

$$= (-1)^k q_{22}c_{22}e_{21}$$

elde edilir. $c_{22} = \frac{q_{11}}{\det(q)}$ olduğundan $0 = \frac{(-1)^k}{\det(q)} q_{22}q_{11}e_{21} = q_{11}q_{22}$ olur. Buradan

$$q_{11}q_{22} = 0 \tag{5.18}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde (5.17) de $x = e_{11}$ ve $y = e_{22}$ alınır

$$0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (qe_{11}q^{-1})^i e_{22} e_{11}^{n-i-1}, e_{11} \right]_k$$

olur. Yine burada yukarıdaki açıklamalardan $i = n-1$ olmalıdır ve $q^{-1} = \sum c_{rs} e_{rs}$ alınır

$$0 = [qe_{11}q^{-1}e_{22}, e_{11}]_k$$

$$= [qc_{12}e_{12}, e_{11}]_k$$

$$= (-1)^k e_{11} q c_{12} e_{12}$$

bulunur. $c_{12} = -\frac{q_{12}}{\det(q)}$ olduğundan

$$0 = q_{11} q_{12} \quad (5.19)$$

olur. $q_{11} \neq 0$ ise (5.18) ve (5.19) dan $q_{12} = 0$ ve $q_{22} = 0$ elde edilir. O zaman q nun ikinci sütunu sıfır olup q nun rankı 1 e eşit olur. q tersinir olduğundan çelişki verir. Dolayısıyla $q_{11} = 0$ olmalıdır. q nun birinci sütunu sıfır olamayacağından $q_{21} \neq 0$ ve yine birinci satırı sıfırı olamayacağından $q_{12} \neq 0$ olmalıdır. Böylece

$$q = \begin{bmatrix} 0 & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \text{ olmalıdır.}$$

Şimdi Q_r nin bir iç otomorfizması $\varphi(x) = (1 + e_{12})x(1 - e_{12})$ olsun. Her $r, s \in Q_r$ için φ bir otomorfizma olduğundan φ nin invaryantlığından

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi \left(\left[\sum_{i=0}^{n-1} (qrq^{-1})^i sr^{n-i-1}, r^n \right]_k \right) \\ &= \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\varphi(q)\varphi(r)\varphi(q)^{-1})^i \varphi(s)\varphi(r)^{n-i-1}, \varphi(r)^n \right]_k \end{aligned}$$

dır. φ nin örtenliğinden $\varphi(s) = y$ ve $\varphi(r) = x$ alınırsa,

$$0 = \left[\sum_{i=0}^{n-1} (\varphi(q)x\varphi(q)^{-1})^i yx^{n-i-1}, x^n \right]_k \quad (5.20)$$

elde edilir ve Q_r bu bağıntıyı sağlar. (5.17) ve (5.20) bağıntıları benzer özdeşlikler olduğundan aynı adımlar uygulanarak işlemler yapıldığında q nun sağladığı özellikler ile $\varphi(q)$ nun sağladığı özellikler ile aynı olur. Burada $\varphi(q)_{ij}$, $\varphi(q)$ nun (i, j) içeriği olmak üzere $\varphi((q))_{11} = 0$, $\varphi((q))_{21} \neq 0$ ve $\varphi((q))_{12} \neq 0$ dir. $\varphi(q) = q - qe_{12} + e_{12}q - e_{12}qe_{12}$ olduğu göz önüne alınarak $\varphi((q))_{11} = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= (\varphi(q))_{11} = e_{11}(\varphi(q))e_{11} \\
&= e_{11}qe_{11} + e_{12}qe_{11} \\
&= (q_{11} + q_{21})e_{11} \\
&= q_{11} + q_{21}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $q_{11} + q_{21} = 0$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $q_{11} = 0$ olduğu kullanılarak $q_{21} = 0$ bulunur. Fakat bu $q_{21} \neq 0$ olmasıyla çelişir. Önce elde edilen tüm çelişkiler $\dim_C V = 1$ olması gerektiğini verir. Bu da bir çelişkidir. O halde α R nin bir iç otomorfizması olamaz. Dolayısıyla tüm çelişkiler d nin X - iç skew türev olmamasıyla elde edildi. O halde d , X - iç skew türev olmalıdır. Böylece ispat biter.

6. SONUÇ

Üçüncü bölümde Lie idealler üzerinde Engel koşullu genelleştirilmiş skew türevler incelenmiş ve ardından iki tane önemli sonuca yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde asal halkalarda kuvvet değişimli (power- commuting) genelleştirilmiş skew türevler ele alınmıştır.

Beşinci bölümde ise asal halkalarda sol idealler üzerinde Engel koşullu hipermerkezleyenli (hypercentralizing) genelleştirilmiş skew türevler ile ilgili bir çalışma esas alınarak asal halkalarda hiperdeğişmeli genelleştirilmiş skew türevler incelenmiştir ve bir genelleştirilmiş skew türevin karakterizasyonu açık bir şekilde verilmiştir.



KAYNAKLAR DİZİNİ

- Argaç, N., Carini, L. and De Filippis, V.,** 2008, An Engel condition with generalized derivations on Lie ideals, Taiwanese J. Math., 12(2): 419- 433 pp.
- Albaş, E., Argaç, N. and De Filippis, V.,** 2008, Generalized derivations with Engel conditions on one- sided ideals, Commun. Algebra, 36(6): 2063- 2071 pp.
- Beidar, K. I., Bresar, M.,** 2001, Extended jacobson density theorem for rings with derivations and automorphisms, Israel J. Mathematics, 122: 317-346 pp.
- Beidar, K. I., Martindale, W. S. and Mikhalev, A. V.,** 1996, Rings with Generalized identities, Marcel Dekker, Inc. New York- Basel- Hongkong.
- Bresar, M., Vukman, J.,** 1993, On certain subgroups of prime rings with derivations, J. Austral. Math. Soc., 54: 133-141 pp.
- Carini, L., De Filippis, V.,** 2000, Commutators with power central values on a Lie ideal, Pacific. J. Math., 19312: 296- 278 pp.
- Carini, L., De Filippis, V. and Scudo, G.,** 2014, Power- commuting generalized skew derivations in prime rings, Mediterr. J. Math.
- Chang, J. C.,** 2003, On the identity $h(x) = af(x) + g(x)b$, Taiwanese J. Math., 7(1): 103- 113 pp.
- Chang, J. C.,** 2011, Generalized skew derivations with Engel conditions on Lie ideals, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 6(3): 305-320 pp.
- Cheng, H. W., Wei, F.,** 2006, Generalized skew derivations of rings, Adv. Math. (China), 35: 237- 243 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- Chuang, C. L.**, 1988, GPIs having coefficients in Utumi quotient rings, Proc. Amer. Math. Soc., 103: 723-728 pp.
- Chuang, C. L.**, 1992, Differential identities with automorphisms and anti-automorphisms I, J. Algebra, 149: 371-404 pp.
- Chuang, C. L.**, 1993, Differential identities with automorphisms and anti-automorphisms II, J. Algebra, 160: 292- 335 pp.
- Chuang, C. L., Chou, M. C. and Liu, C. K.**, 2006, Skew derivations with annihilating Engel conditions, J. Publ. Math. Debrecen, 68(1- 2): 161- 170 pp.
- Chuang, C. L., Lee, T. K.**, 1995, On the one- sided version of hypercenter theorem, Chin. J. Math., 23(3): 211- 223 pp.
- Chuang, C. L., Lee, T. K.**, 2005, Identities with a single skew derivation, J. Algebra, 288: 59-77 pp.
- Chuang, C. L., Liu, C. K.**, 2007, Extended Jacobson density theorem for rings with skew derivations, Comm. Algebra, 35: 1391- 1413 pp.
- Chou, M. C., Liu, C. K.**, 2009, An Engel conditions with skew derivations, Monatshefte fur Math., 158(3): 259-270 pp.
- De Filippis, V.**, 2006, Generalized derivations and commutators with nilpotent values on Lie ideals, Tamsui Oxford J. Math. Sci., 22(2): 167- 175 pp.
- De Filippis, V., Di Vincenzo, O. M.**, 2012, Vanishing derivations and centralizers of generalized derivations on multilinear polynomials, Comm. Algebra, 4016: 1918- 1932 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- De Filippis, V., Di Vincenzo, O. M.**, 2014, Hypercentralizing generalized skew derivations on left ideals in prime rings, *Monatsh Math.*, 173: 315- 341 pp.
- Demir, Ç., Argaç, N.**, 2010, A result on generalized derivations with Engel conditions on one sided ideals, *J. Korean Math. Soc.*, 47(3): 483- 494 pp.
- Erickson, T. S., Martindale, W. S. and Osborn, J. M.**, 1975, Prime non – associative algebras, *Pacific J. Math.*, 60: 49- 63 pp.
- Herstein, I. N.**, 1969, *Topics in Ring Theory*, University of Chicago Press, Chicago.
- Herstein, I. N.**, 1979, Center- like elements in prime rings, *J. Algebra*, 60: 567- 574 pp.
- Hungerford, T. W.**, 1974, *Algebra*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 502 pp.
- Hvala, B.**, 1998, Generalized derivations in rings, *Comm. Algebra*, 26: 1147-1166 pp.
- Jacobson, N.**, 1964, *Structure of rings*, Vol. 37, Amer. Math. Soc., Collog. Pub. ,Rhode Island., 299 pp.
- Jacobson, N.**, 1975, *PI- Algebras*, *Lecture Notes in Mathematics*, 441, Springer-Verlag, Berlin- New York, 115 pp.
- Kharchenko, V. K.**, 1975, Generalized identities with automorphisms, *Algebra I Logika*, 14(2): 215- 237 pp.; Engl. Transl: *Algebra and Logic* 14(2): 132-148 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- Kharchenko, V. K.**, 1978, Differential identities of prime rings, Algebra and Logic, 17: 155- 168 pp.
- Kharchenko, V. K., Popov, A. Z.**, 1992, Skew derivation of prime rings, Comm. Algebra, 20: 3321- 3345 pp.
- Lanski, C.**, 1988, Differential identities, Lie ideals and Posner' s theorems, Pac. J. Math., 134(2), 275- 297 pp.
- Lanski, C.**, 1990, Derivations with nilpotent values of Lie ideals, Proc. Amer. Math. Soc., 108: 31-37 pp.
- Lanski, C.**, 1993, An Engel condition with derivation, Proc. Amer. Math. Soc., 118: 75- 80 pp.
- Lam, T. Y.**, 2001, A first course in noncommutative rings, Springer Verlag, New York, 385 pp.
- Lee, T. K.**, 1995, Semiprime rings with hypercentral derivations, Can. Math. Bull., 38(4): 445-449 pp.
- Lee, T. K.**, 1999, Generalized derivations of left faithful rings, Comm. Algebra, 27: 4057- 4073 pp.
- Lee, T. K.**, 2004, Generalized skew derivations characterized by acting on zero products, Pac. J. Algebra, 216: 293-301 pp.
- Lee, T. K., Liu, K. S.**, 2013, Generalized skew derivations with algebraic values of bounded degree, Houston Journal of Mathematics, 39(13): 733- 740 pp.
- Lee, P. H., Wong, T. L.**, 1995, Derivations cocentralizing Lie ideals, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 23: 1-5 pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (Devamı)

- Lee, P. H., Wong, T. L., Lin, L. S. and Wang, R. J.,** 1997, Commuting traces of multiadditive mappings, J. Algebra, 193: 709- 723 pp.
- Martindale, W. S.,** 1969, Prime rings satisfying a generalized polynomial identity, J. Algebra, 12: 576- 584 pp.
- Mayne, J. H.,** 1992, Centralizing automorphism of Lie ideals in prime rings, Canad. Math. Bull., 35: 510- 514 pp.
- Posner, E. C.,** 1957, Derivations in prime rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8: 1093- 1100 pp.
- Wang, Y.,** 2006, Power- centralizing automorphisms of Lie ideals in prime rings, Comm. Algebra, 34: 609- 615 pp.

ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında İzmir’ in Bornova ilçesinde doğdu. İlköğretimini ve ortaöğretimini Manisa’ nın Salihli ilçesinde Kudret Demir İlköğretim Okulu’ nda, lise öğrenimini Sekine Evren Anadolu Lisesi’ nde tamamladı. Lisans eğitimini 2009- 2014 yılları arasında Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, Teorik Matematik Ağırlıklı Matematik programında tamamladı. 2014 yılından itibaren Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim dalında yüksek lisans yapmaktadır.

