



T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ



*** –ASAL HALKALARDA * –TÜREVLER**

Nihal YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

*** –ASAL HALKALARDA * –TÜREVLER**

Nihal YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: 29/06/2016

Tez Danışmanı:
Prof. Dr. Neşet AYDIN

ÇANAKKALE

Nihal YILMAZ tarafından Prof. Dr. Neşet AYDIN yönetiminde hazırlanan ve **29/06/2016** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “* –**Asal Halkalarda** * –**Türevler**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Prof. Dr. Neşet AYDIN

.....

Başkan

Doç. Dr. Ali ERDOĞAN

.....

Üye

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

.....

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:.....

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI



Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Nihal YILMAZ

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca yaptığı katkılar, değerlendirmeler ve gösterdiği yolla benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr.Neşet AYDIN'a, çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen sayın hocalarım Didem YEŞİL, Selin TÜRKMEN, Barış ALBAYRAK, Didem CAMCI ve diğer tüm bölüm hocalarıma teşekkür ederim.

Hayatımın her evresinde bana destek olan maddi ve manevi yardımlarını esirgemeyen, aldığım kararlarda yanımda olan sevgili babam Nevzat YILMAZ, annem Ayşe YILMAZ ve kardeşlerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Nihal YILMAZ
Çanakkale, Haziran 2016

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\in$	Elemanı
$\forall$	Her
$\neq$	Eşit değil
$\emptyset$	Boş küme
$\subseteq$	Altküme veya eşit
$\Rightarrow$	İse
$\notin$	Eleman değil
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
$\subset$	Kapsanır
$\not\subset$	Kapsanmaz

ÖZET

* –ASAL HALKALARDA * –TÜREVLER

Nihal YILMAZ

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Neşet AYDIN

29/06/2016, 76

Halka teoride, halkanın değişmeliliğini araştırmak amacıyla türevli halkalarda pek çok çalışma yapılmaktadır.

Bu tezde, asal ve * –asal halkalarda türev ve sol türev yardımıyla halkanın değişmeliliğini araştıran bazı makaleler incelenmiştir. Ayrıca Rehmann ve ark. (2013)’nın yaptıkları “* –Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar” adlı çalışmada elde edilen sonuçlar asal * –halka yerine * –asal halka, * –ideal ve * –Lie ideal alınarak genelleştirilmiştir.

Anahtar sözcükler: Asal Halka, * –Asal Halka, Genelleştirilmiş Sol Türev, Genelleştirilmiş Sol * –Türev, Jordan Sol Türev, Sağ * –Merkezileştirici

ABSTRACT

$\ast$ –DERIVATIONS ON $\ast$ –PRIME RINGS

Nihal YILMAZ

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematics

Advisor : Prof. Dr. Neşet AYDIN

29/06/2016, 76

In ring theory several works have been done to investigate that a ring is comutativity.

In this thesis we investigate some work which examine whether a ring is commutative or not with the aid of derivations and left derivations in prime rings and $\ast$ –prime rings. Also, obtained results in “A Note on Homomorphisms and Anti-homomorphisms on $\ast$ –Ring” by N. Rehmann and colleagues in 2013 are generalized for taking $\ast$ –prime ring, $\ast$ –ideal and $\ast$ –Lie ideal instead of prime $\ast$ –ring.

Keywords: Prime Rings, $\ast$ –Prime Ring, Generalized Left Derivation, Generalized Left $\ast$ –Derivation, Jordan Left Derivation, Right $\ast$ –Centralizer

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAVI SONUÇ FORMU.....	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ÖZET	vi
ABSTRACT.....	vii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
BÖLÜM 2	
GENEL BİLGİLER	2
BÖLÜM 3	13
ASAL ve ASAL * –HALKALARDA TÜREVLER ve SOL TÜREVLER	13
3.1. Asal Halkalarda Lie İdealler ve Jordan Sol Türevler	13
3.2. Asal Halkanın Lie İdealleri Üzerinde Genelleştirilmiş Sol Türevlerin Homomorfizma ve Anti-Homomorfizma Olma Durumları	17
3.3. Asal * –Halkalar Üzerinde Sol * –Türevlerin Homomorfizma ve Anti- Homomorfizma Olma Durumları.....	21
BÖLÜM 4	25
* –ASAL HALKALARDA TÜREV ve SOL TÜREVLERLE DEĞİŞMELİLİK.....	25
4.1. * –Asal Halkalarda Değişmelilik	25
4.2 * –Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik	35
4.3 * –Asal Halkalarda Sol Türevler	49
BÖLÜM 5	57
* –ASAL HALKALARDA SOL – * TÜREVLER	57
5.1 * –Asal Halkalar Üzerinde Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar.....	57
KAYNAKLAR	75
ÖZGEÇMİŞ	I

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Türev çalışmalarının asal halkalara uygulanması fikri ilk kez 1957 yılında E. C. Posner tarafından ele alınmıştır. Posner yapmış olduğu çalışmasında halkalar üzerinde türev tanımını vererek asal halkaların değişmeli olma durumunun türev yardımıyla araştırılabileceğini göstermiştir.

Her asal halka bir ideal ve her ideal bir Lie ideal olduğundan daha sonra yapılan çalışmalarda asal halkanın idealleri ve Lie idealleri üzerinde çalışılarak daha genel sonuçlara ulaşılmıştır. Ayrıca her asal halka bir $*$ –asal halka olduğundan asal halkanın idealleri ve Lie idealleri üzerinde yapılan çalışmalar $*$ –asal halkalar üzerinde ele alınarak bulunan sonuçlar genelleştirilmiştir.

Bu tez beş bölümde ele alınmıştır. İkinci bölümde tezde kullanılacak bazı tanımlar ve kavramlara yer verilmiştir. Ayrıca diğer bölümlerde kullanılacak olan lemma ve teoremler ispatlarıyla verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak, asal halkalarda Lie idealler ve Jordan sol türevler ile ilgili bir makaleye yer verilmiştir. Daha sonra asal halkanın Lie idealleri üzerindeki genelleştirilmiş sol türevlerin homomorfizma ve anti-homomorfizma oldukları durumda ulaşılan bazı sonuçlar bir makale ile verilmiştir. Son olarak asal $*$ –halkalar üzerinde sol $*$ –türevlerin homomorfizma ve anti-homomorfizma oldukları durumda halkanın değişmeliliğini inceleyen bir makaleye yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde $*$ –asal halkaların idealleri ve Lie idealleri üzerinde türevler ve sol türevler yardımıyla halkanın hangi durumlarda değişmeli olduğunu inceleyen makalelere yer verilmiştir.

Beşinci bölümde ise üçüncü bölümde ele alınan, N. Rehman, A. Z. Ansari ve C. Haetinger'in 2013 yılında yaptıkları “ $*$ –Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar” adlı makalede elde edilen sonuçlar asal $*$ –halka yerine $*$ –asal halka, $*$ –asal halkanın idealleri ve Lie idealleri ele alınarak genelleştirilmiştir.

BÖLÜM 2

GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1: Boş olmayan bir G kümesi üzerinde, $*$: $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \rightarrow a * b$ işlemi tanımlansın. Buna göre;

[G1] Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir,

[G2] Her $a \in G$ için, $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır,

[G3] Her $a \in G$ için, $a * x = x * a = e$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır,

[G4] Her $a, b \in G$ için, $a * b = b * a$ dir

özelliklerinden yalnız [G1] sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **yarı grup**, [G1] ve [G2] özellikleri sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **monoid**, [G1], [G2] ve [G3] sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **grup** denir ve $(G, *)$ ile gösterilir. Eğer bir G grubu (*monoidi*, *yarı grubu*) [G4] özelliğini sağlıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **değişmeli grup** (*değişmeli monoid*, *değişmeli yarı grup*) denir.

Tanım 2.2: G bir grup ve $\emptyset \neq A \subset G$ olsun. Eğer A kümesi, G kümesi üzerinde tanımlı işleme göre kendi başına bir grup oluyorsa A kümesine G grubunun bir **altgrubu** denir ve $A < G$ ile gösterilir.

Tanım 2.3: G bir grup, $A < G$ olsun. $A \neq \{e_G\}$ ve $A \neq G$ ise A altgrubuna G grubunun bir **öz altgrubu** denir.

Teorem 2.4: (Brauer's Trick) Bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: $(G, *)$ bir grup, A ve B , G grubunun iki öz altgrubu olsun. Kabul edelim ki $G = A \cup B$ biçiminde yazılsın. Eğer $A \subset B$ ise $G = B$ dir. Bu durum B nin öz altgrup olmasıyla çelişir. Eğer $B \subset A$ ise $G = A$ olur. Bu durum da A nın öz altgrup olmasıyla çelişir. O halde $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ dir. Bu durumda $a \notin B$ ve $b \notin A$ olacak biçimde $a \in A$ ve $b \in B$ elemanları vardır. G bir grup olduğundan $a * b \in G = A \cup B$ dir. Buradan $a * b \in A$ veya $a * b \in B$ olur. Kabul edelim ki $a * b \in A$ olsun. A bir altgrup olduğundan $a^{-1} \in A$ dir. Buradan $a^{-1} * a * b = b \in A$ bulunur. Fakat bu durum $b \notin A$ olmasıyla çelişir. O halde $a * b \in B$ dir. B bir altgrup olduğundan $b^{-1} \in B$ dir. Buradan $a * b * b^{-1} = a \in B$ bulunur. Fakat $a \notin B$ olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla $G = A \cup B$ şeklinde yazılamaz.

Tanım 2.5: R boş olmayan bir küme $+: R \times R \rightarrow R$, $(a, b) \rightarrow a + b$ ve $\cdot: R \times R \rightarrow R$, $(a, b) \rightarrow a \cdot b$ işlemleri tanımlansın. Eğer

[R1] $(R, +)$ değişmeli grup,

[R2] Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

[R3] Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

koşulları sağlanıyor ise R kümesine bu ikili işlemlere göre bir **halka** denir ve $(R, +, \cdot)$ ile gösterilir.

[R4] Her $a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ koşulunu sağlayan R halkasına **değişmeli halka**,

[R5] Her $a \in R$ için $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a$ olacak şekilde $1_R \in R$ elemanı varsa R halkasına **birimli halka** denir.

Tanım 2.6: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subset R$ olsun. Eğer S kümesi R halkası üzerinde tanımlı işlemlere göre kendi başına bir halka oluyorsa S kümesine R halkasının bir **althalkası** denir.

Tanım 2.7: $(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere

$$Z(R) = \{a \in R \mid a \cdot x = x \cdot a, \forall x \in R\}$$

kümesine R halkasının **merkezi** denir.

Uyarı 2.8: Bir halkanın merkezi o halkanın althalkasıdır.

Tanım 2.9: $(R, +, \cdot)$ bir halka ve $\emptyset \neq A \subset R$ olmak üzere

$$C_R(A) = \{x \in R \mid xa = ax, \forall a \in A\}$$

kümesine A kümesinin **merkezleştiricisi** denir.

Tanım 2.10: $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \Delta, \blacksquare)$ iki halka olsun. $f: R \rightarrow S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) \Delta f(b) \text{ ve } f(a \cdot b) = f(a) \blacksquare f(b)$$

koşullarını sağlıyor ise f fonksiyonuna **halka homomorfizması** denir.

Tanım 2.11: $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \Delta, \blacksquare)$ iki halka olsun. $f: R \rightarrow S$ fonksiyonu her $a, b \in R$ için

$$f(a + b) = f(a) \Delta f(b) \text{ ve } f(a \cdot b) = f(b) \blacksquare f(a)$$

koşullarını sağlıyor ise f fonksiyonuna **anti-halka homomorfizması** denir.

Tanım 2.12: R halkası üzerinde;

$$[,]: R \times R \rightarrow R, [x, y] = xy - yx$$

şeklinde tanımlanan işleme **Lie komütatör** işlemi denir. Lie komütatör işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

Her $x, y, z \in R$ için;

(i) $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

(ii) $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$

$$(iii) [x, x] = 0$$

$$(iv) [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ (Jacobi Özdeşliği)}$$

Tanım 2.13: A ve B kümeleri R halkasının boştan farklı althalkaları olsun.

$$[A, B] = \left\{ \sum_{i=1}^n [a_i, b_i] \mid a_i \in A, b_i \in B, n \in \mathbb{N} \right\}$$

biçimindedir.

Tanım 2.14: S , R halkasının bir altkümesi ve $F: R \rightarrow R$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in S$ için $[x, F(x)] = 0$ ise F dönüşümüne **S kümesi üzerinde değişmeli dönüşüm** denir.

Tanım 2.15: S , R halkasının bir altkümesi ve $F: R \rightarrow R$ bir dönüşüm olsun. Her $x \in S$ için $[x, F(x)] \in Z(R)$ ise F dönüşümüne **S kümesi üzerinde merkezleştiren dönüşüm** denir.

Tanım 2.16: R bir halka ve I , R nin bir althalkası olsun. Eğer;

(i) $\forall r \in R$ ve $a \in I$ için $r \cdot a \in I$ ise I althalkasına R nin **sol ideali**,

(ii) $\forall r \in R$ ve $a \in I$ için $a \cdot r \in I$ ise I althalkasına R nin **sağ ideali**,

denir. I , R halkasının hem sağ hem sol ideali ise I althalkasına R halkasının **ideali** denir.

Not 2.17: R bir halka I ve J ise R halkasının idealleri olmak üzere

$$I.J = \left\{ \sum_{sonlu} a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J \right\}$$

kümesi R halkasının idealidir.

Tanım 2.18: R bir halka ve U kümesi R halkasının boştan farklı bir altkümesi olmak üzere;

(i) $(U, +)$ değişmeli grup,

(ii) $[U, R] \subset U$ koşulları sağlanıyorsa U kümesine R halkasının bir **Lie ideali** denir.

Uyarı 2.19: Her ideal bir Lie idealdir ancak her Lie ideal her zaman bir ideal olmak zorunda değildir.

Tanım 2.20: R bir halka ve P kümesi, R halkasının bir ideali olsun. $P \neq R$ ve R halkasının A, B idealleri için ' $AB \subset P$ iken $A \subset P$ veya $B \subset P$ ' koşulu sağlanıyorsa P idealine **asal ideal** denir.

Tanım 2.21: Bir R halkasının (0) ideali asal ideal ise R halkasına **asal halka** denir.

Uyarı 2.22: R halkasının asal halka olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in R$ için $aRb = (0)$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.23: A kümesi R halkasının bir ideali olsun. $A^n = (0)$ olacak biçimde bir n pozitif tamsayısı varsa A idealine **nilpotent ideal** denir.

Tanım 2.24: Sıfırdan farklı nilpotent idealleri olmayan halkaya *yarı-asal halka* denir.

Tanım 2.25: R bir halka olmak üzere her $a \in R$ için $n \cdot a = 0$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı varsa bu koşulu sağlayan en küçük n pozitif tam sayısına R halkasının *karakteristiği* denir. $\text{char} R = n$ ile gösterilir.

Tanım 2.26: R bir halka, n pozitif bir tamsayı ve $a \in R$ olmak üzere $n \cdot a = 0$ iken $a \neq 0$ oluyorsa R halkasına *n -torsion free halka* denir.

Uyarı 2.27: R sıfırdan farklı bir halka olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) R , 2-torsion free bir halka ise R halkasının karakteristiği ikiden farklıdır.

(ii) R bir asal halka olmak üzere R halkasının karakteristiği 2 den farklı ise R halkası 2-torsion free bir halkadır.

İspat: (i) R , 2-torsion free bir halka ve $\text{char} R = 2$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $2x = 0$ dır. R bir 2-torsion free halka olduğundan her $x \in R$ için $x = 0$ olur. Buradan $R = (0)$ elde edilir. Bu sonuç $R \neq (0)$ olmasıyla çelişir. O halde R halkasının karakteristiği ikiden farklıdır.

(ii) R karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka olsun. Kabul edelim ki $x \in R$ için $2x = 0$ olsun. Bu durumda her $a, b \in R$ için

$$2xab = 0 \Rightarrow xab + xab = 0 \Rightarrow xa(b + b) = 0 \Rightarrow xa(2b) = 0$$

olur. Bu ise her $b \in R$ için $xR(2b) = 0$ demektir. R halkasının asal olması kullanılırsa $x = 0$ veya her $b \in R$ için $2b = 0$ elde edilir. Eğer her $b \in R$ için $2b = 0$ ise $\text{char} R = 2$ olur. Ancak bu durum halkanın karakteristiğinin ikiden farklı olmasıyla çelişir. O halde $x = 0$ dır. Böylece R , 2-torsion free bir halkadır.

Uyarı 2.28: R karakteristiği 2 den farklı bir halka olsun. Her $a \in R$ için $2a \in Z(R)$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat: Her $a \in R$ için $2a \in Z(R)$ olduğundan her $r \in R$ için $[2a, r] = 0$ olur. Dolayısıyla $[a + a, r] = [a, r] + [a, r] = 0$ bulunur. Buradan $2[a, r] = 0$ olur. R nin karakteristiği ikiden farklı olduğundan her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ dir. Böylece $a \in Z(R)$ elde edilir.

Tanım 2.29: R bir halka ve $*$: $R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $(xy)^* = y^*x^*$ ve $(x^*)^* = x$ ise $*$ dönüşümüne *involüsyon* denir. Üzerinde involüsyonun tanımlı olduğu halkaya da **-involüsyonlu halka* denir.

Tanım 2.30: R bir $*$ –involüsyonlu halka olsun. $x, y \in R$ için $xRy = xRy^* = (0)$ veya $xRy = x^*Ry = (0)$ olduğunda $x = 0$ veya $y = 0$ oluyorsa R halkasına $*$ –**asal halka** denir.

Tanım 2.31: R bir $*$ –involüsyonlu halka olsun. $S = \{x \in R \mid x^* = x\}$ kümesi R halkasının **simetrik-elemanlarının kümesi**, $K = \{x \in R \mid x^* = -x\}$ kümesi R halkasının **anti-simetrik elemanlarının kümesi** ve $S_*(R) = \{x \in R \mid x^* = \pm x\}$ kümesi R halkasının **simetrik ve anti-simetrik elemanlarının kümesi** olarak adlandırılır.

Tanım 2.32: R bir $*$ –involüsyonlu halka ve I , R halkasının bir ideali olsun. Eğer $I^* = I$ ise I ideale $*$ –**ideal** denir.

Tanım 2.33: R bir $*$ –involüsyonlu halka ve L , R halkasının bir Lie ideali olsun. Eğer $L^* = L$ ise L Lie ideale $*$ –**Lie ideal** denir.

Tanım 2.34: R bir $*$ –involüsyonlu halka ve L , R halkasının bir $*$ –Lie ideali olsun. Eğer her $l \in L$ için $l^2 \in L$ oluyorsa L Lie ideale $*$ –**kare kapalı Lie ideal** denir.

Uyarı 2.35: R bir halka ve $(0) \neq U$, R halkasının bir kare kapalı Lie ideali olsun. O zaman her $x, y \in U$ için $2xy \in U$ dur.

İspat: U Lie ideal olduğundan her $x, y \in U$ için $[x, y] = xy - yx \in U$ dur. Üstelik U kare kapalı Lie ideal olduğundan her $x, y \in U$ için, $xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2 \in U$ olur. Elde edilen bu iki denklem birlikte düşünülüp düzenlenirse her $x, y \in U$ için $2xy \in U$ olduğu görülür.

Tanım 2.36: R bir halka olmak üzere $d: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ ise d dönüşümüne R halkasının bir **türevi** denir.

Uyarı 2.37: R bir halka ve d , R halkasının bir türevi olmak üzere $t \in Z(R)$ ise $d(t) \in Z(R)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki d , R halkasının bir türevi ve $t \in Z(R)$ olsun. Her $r \in R$ için $[r, t] = 0$ olur. Buradan $d([r, t]) = 0$ bulunur. O halde her $r \in R$ için $d([r, t]) = [d(r), t] + [r, d(t)] = 0$ olur. Elde edilen bu son denklemde $t \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $r \in R$ için $[r, d(t)] = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu durumda $d(t) \in Z(R)$ dir.

Tanım 2.38: R bir halka olmak üzere $d: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x \in R$ için $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$ ise d dönüşümüne R halkasının bir **Jordan türevi** denir.

Tanım 2.39: R bir halka olmak üzere $d: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = xd(y) + yd(x)$ ise d dönüşümüne R halkasının bir **sol türevi** denir.

Tanım 2.40: R bir halka olmak üzere $d: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her

$x \in R$ için $d(x^2) = 2xd(x)$ ise d dönüşümüne R halkasının bir **Jordan sol türevi** denir.

Tanım 2.41: R bir $*$ -involüsyonlu halka olmak üzere $d: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $d(xy) = x^*d(y) + yd(x)$ ise d dönüşümüne R halkasının bir **sol $*$ -türevi** denir.

Tanım 2.42: (Bresar, 1991, s. 89) R bir halka olmak üzere $H: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $H(xy) = H(x)y + xd(y)$ olacak şekilde bir d türevi varsa H dönüşümüne R halkasının d ile belirlenmiş **genelleştirilmiş türevi** denir.

Tanım 2.43: (Ashraf ve Shakir, 2008, s. 254) R bir halka olmak üzere $H: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x \in R$ için $H(x^2) = xH(x) + xd(x)$ olacak şekilde bir d Jordan sol türevi varsa H dönüşümüne R halkasının d ile belirlenmiş **genelleştirilmiş Jordan sol türevi** denir.

Tanım 2.44: R bir $*$ -involüsyonlu halka olmak üzere $H: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $H(xy) = x^*H(y) + yd(x)$ olacak şekilde bir d sol $*$ -türevi varsa H dönüşümüne R halkasının d ile belirlenmiş **genelleştirilmiş sol $*$ -türevi** denir.

Tanım 2.45: R bir halka olmak üzere $a \in R$ için $I_a: R \rightarrow R$, $I_a(x) = [a, x] = ax - xa$ olarak tanımlanan I_a toplamsal dönüşümü R nin bir türevidir. Bu türeve **a ile belirli iç türev** denir.

Tanım 2.46: R bir halka ve $T: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(x)y$ koşulunu sağlayan T dönüşümüne R halkasının bir **sol merkezleştiricisi** denir. Her $x, y \in R$ için $T(xy) = xT(y)$ biçiminde tanımlanıyor ise T dönüşümüne R halkasının bir **sağ merkezleştiricisi** denir. T , R halkasının hem sağ hem sol merkezleştiricisi ise T dönüşümüne R halkasının **merkezleştiricisi** denir.

Tanım 2.47: R bir $*$ -involüsyonlu halka ve $T: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşüm olsun. Her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(x)y^*$ ise T dönüşümüne R halkasının bir **sol $*$ -merkezleştiricisi** denir. Her $x, y \in R$ için $T(xy) = x^*T(y)$ biçiminde ise T dönüşümüne R halkasının bir **sağ $*$ -merkezleştiricisi** denir. T , R halkasının hem sağ hem sol $*$ -merkezleştiricisi ise T dönüşümüne R halkasının **$*$ -merkezleştiricisi** denir.

Her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x^*$ ise T dönüşümüne R halkasının bir **Jordan sol $*$ -merkezleştiricisi** denir. Her $x \in R$ için $T(x^2) = x^*T(x)$ ise T dönüşümüne R halkasının bir **Jordan sağ $*$ -merkezleştiricisi** denir. T , R halkasının hem Jordan sağ hem Jordan sol $*$ -merkezleştiricisi ise T dönüşümüne R halkasının **Jordan $*$ -merkezleştiricisi** denir.

Uyarı 2.48: R bir $*$ -involüsyonlu bir halka olsun. Her $a \in R$ için $a^* + a \in S_*(R)$ ve $a^* - a \in S_*(R)$ dir.

İspat: Her $a \in R$ için $a^* \in R$ dir. İnvölüsyon dönüşümü toplamsal dönüşüm olduğundan $(a - a^*)^* = a^* - (a^*)^*$ şeklindedir. $(a^*)^* = a$ olduğundan $(a - a^*)^* = a^* - a$ bulunur. Diğer taraftan $(a + a^*)^*$ ifadesine bakıldığında $(a + a^*)^* = a^* + (a^*)^*$ olur. Buradan $(a^*)^* = a$ olduğu kullanılarak $(a + a^*)^* = a^* + a$ elde edilir. Dolayısıyla her $a \in R$ için $a^* + a$ ve $a^* - a \in S_*(R)$ bulunur.

Uyarı 2.49: R bir $*$ -asal halka ve I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali olsun. d , R halkasında bir türev olmak üzere $d(I) = (0)$ ise $d = 0$ dir.

İspat: I ideal olduğundan her $x \in I$ ve $r \in R$ için $xr \in I$ dir. O halde $d(xr) = 0$ olur. Buradan $0 = d(x)r + xd(r)$ elde edilir. $d(I) = (0)$ olduğundan her $x \in I$, $r \in R$ için $xd(r) = 0$ elde edilir. Son eşitlikte $s \in R$ olmak üzere x yerine xs yazılırsa $xsd(r) = 0$ bulunur. Buradan $xRd(r) = (0)$ olur. Ayrıca I , $*$ -ideal olduğundan her $x \in I$ için $x^* \in I$ dir. O zaman x yerine x^* yazılırsa $xRd(r) = (0) = x^*Rd(r)$ elde edilir. Böylece R halkası $*$ -asal halka ve I sıfırdan farklı bir ideali olduğundan $d(R) = (0)$ olur. O halde $d = 0$ elde edilir.

Lemma 2.50: (Posner E. C., 1957) R asal halka $d: R \rightarrow R$ bir türev ve $a \in R$ olsun. Her $x \in R$ için $ad(x) = 0$ ise $a = 0$ veya $d = 0$ dir.

İspat: Hipotezde x yerine $y \in R$ için xy elemanı yazılırsa

$$0 = ad(xy) = ad(xy) = a(d(x)y + xd(y)) = ad(x)y + axd(y)$$

olur. Her $x, y \in R$ için $axd(y) = 0$ dir. Böylece her $y \in R$ için $aRd(y) = (0)$ elde edilir. R asal halka olduğundan $a = 0$ veya her $y \in R$ için $d(y) = 0$ bulunur. O halde $a = 0$ veya $d = 0$ elde edilir.

Teorem 2.51: (Posner E. C., 1957) R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve d_1 ile d_2 , R halkasının türevleri olsun. Eğer d_1d_2 türev ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dir.

İspat: d_1 , d_2 ve d_1d_2 türev olduğundan $a, b \in R$ için

$$d_1d_2(ab) = d_1d_2(a)b + ad_1d_2(b)$$

ve

$$\begin{aligned} d_1d_2(ab) &= d_1(d_2(ab)) \\ &= d_1(d_2(a)b + ad_2(b)) \\ &= d_1d_2(a)b + d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) + ad_1d_2(b) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliklerden her $a, b \in R$ için

$$d_2(a)d_1(b) + d_1(a)d_2(b) = 0 \tag{2.1}$$

bulunur. (2.1) eşitliğinde a yerine $c \in R$ için $ad_1(c)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
0 &= d_2(ad_1(c))d_1(b) + d_1(ad_1(c))d_2(b) \\
&= (d_2(a)d_1(c) + ad_2d_1(c))d_1(b) + (d_1(a)d_1(c) + ad_1^2(c))d_2(b) \\
&= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + ad_1d_2(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + ad_1^2(c)d_2(b) \\
&= d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) + a(d_1d_2(c)d_1(b) + d_1^2(c)d_2(b))
\end{aligned}$$

olur. (2.1) eşitliğinde a yerine $c \in R$ için $d_1(c)$ yazılırsa $d_2(d_1(c))d_1(b) + d_1(d_1(c))d_2(b) = 0$ bulunur. Bu iki ifadeden her $a, b \in R$ için

$$d_2(a)d_1(c)d_1(b) + d_1(a)d_1(c)d_2(b) = 0 \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.1) eşitliğinde a yerine c alınırsa $d_2(c)d_1(b) + d_1(c)d_2(b) = 0$ olur. Bu ise $b, c \in R$ için $d_2(c)d_1(b) = -d_1(c)d_2(b)$ demektir. Bu ifade (2.2) eşitliğinde yerine yazılırsa her $a, b, c \in R$ için $d_2(a)d_1(c)d_1(b) - d_1(a)d_2(c)d_1(b) = 0$ olur. Buradan her $a, b, c \in R$ için, $(d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c))d_1(b) = 0$ elde edilir. *Lemma 2.50* den

$$d_1 = 0 \text{ veya } d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$$

dır. Kabul edelim ki $d_2(a)d_1(c) - d_1(a)d_2(c) = 0$ olsun. (2.1) eşitliğinde b yerine c alınırsa $d_2(a)d_1(c) + d_1(a)d_2(c) = 0$ yazılır. Elde edilen son iki eşitlik toplanırsa, $2d_2(a)d_1(c) = 0$ bulunur. R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğundan her $a, c \in R$ için $d_2(a)d_1(c) = 0$ bulunur. *Lemma 2.50* den $d_1 = 0$ veya her $a \in R$ için $d_2(a) = 0$ olur. Dolayısıyla $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

Lemma 2.52: (Herstein I. N., 1969, s 4) R , sıfırdan farklı, 2 –torsion free ve nilpotent idealleri olmayan bir halka olsun. $(0) \neq U$, R halkasının bir althalkası ve Lie ideali ise $U \subset Z(R)$ ya da U , R nin sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: Kabul edelim ki U değişmeli olmayan bir althalka olsun. O zaman $[x, y] \neq 0$ olacak biçimde $x, y \in U$ vardır. U Lie ideal olduğundan her $r \in R$ için $[x, yr] \in U$ dur. O zaman $[x, yr] = y[x, r] + [x, y]r \in U$ olur. U , hem Lie ideal hem de althalka olduğundan $y[x, r] \in U$ olur. Dolayısıyla her $r \in R$ için $[x, y]r \in U$ dır. Buradan

$$[x, y]R \subset U \quad (2.3)$$

olur. Ayrıca U Lie ideal olduğu için her $r, t \in R$ için $([x, y]r)t - t([x, y]r) \in U$ dır. $R^2 \subset R$ ve (2.3) eşitliğinden $[x, y]R^2 \subset U$ elde edilir. Keyfi $k, l \in R$ için $[k, [x, y]l] = k[x, y]l - [x, y]lk$ olur. Burada $[x, y]R \subset U$ ve $[x, y]R^2 \subset U$ olduğu kullanılırsa

$k[x, y]l \in U$ bulunur. Her $k, l \in R$ için yapılabileceğinden $R[x, y]R \subset U$ olur. Üstelik $R[x, y]R, R$ halkasının bir idealidir.

Kabul edelim ki $R[x, y]R = (0)$ olsun. O halde $(R[x, y])^2 = (0)$ olur. O halde R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığından $R[x, y] = (0)$ dır. Burada R halkasının yarı-asal halka olması kullanılırsa $[x, y] = 0$ bulunur. Bu durum $[x, y] \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde $R[x, y]R \neq (0)$ dır. Dolayısıyla U değişmeli olmayan bir althalka iken R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

Şimdi kabul edelim ki U değişmeli bir althalka olsun. U Lie ideal olduğundan $a \in U, m, n \in R$ için $a(a(mn) - (mn)a) = (a(mn) - (mn)a)a$ ve $aman - amna = amna - nama$ olur. Buradan, $am(an - na) - ma(an - na) = (am - ma)(an - na) = 0$ elde edilir. Bu ifade de n yerine m alınırsa $(am - ma)R(am - ma) = 0$ olur. O halde $(R(am - ma))^2 = 0$ bulunur. Böylece R halkasının sıfırdan farklı nilpotent ideali olmadığından her $m \in R$ için $am - ma = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $a \in U$ için $a \in Z(R)$ olur. Yani $U \subset Z(R)$ dir.

Lemma 2.53: (Bergen ve ark., 1981) R , karakteristiği ikiden farklı bir asal halka olsun. U, R halkasının $U \not\subset Z(R)$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer $[M, R] \subset U$ olacak biçimde bir M ideali varsa $[M, R] \not\subset Z(R)$ dir.

İspat: $T(U) = \{x \in R \mid [x, R] \subset U\}$ kümesini tanımlayalım. $u, v \in T(U)$ için $T(U)$ kümesinin tanımından ve U Lie ideal olduğundan $[u - v, R] \subset U$ bulunur. O halde $u - v \in T(U)$ olur. Dolayısıyla $T(U)$ bir altgruptur. Ayrıca $[U, R] \subset U$ olduğundan $U \subset T(U)$ ve $[T(U), R] \subset U$ olur. Böylece $[T(U), R] \subset U \subset T(U)$ bulunur. Böylece $[T(U), R] \subset T(U)$ olur. Buradan $T(U), R$ halkasının bir Lie idealidir.

Şimdi $r \in R$ olmak üzere $u, v \in T(U)$ olduğundan $[u, vr], [v, ru] \in U$ dur. Buradan U bir Lie ideal olduğundan $[u, vr] + [v, ru] \in U$ olur. O halde her $r \in R$ için

$$\begin{aligned} [u, vr] + [v, ru] &= [u, v]r + v[u, r] + r[v, u] + [v, r]u \\ &= uvr - vur + vur - vru + rvu - ruv + vru - rvu \\ &= (uv)r - r(uv) \\ &= [uv, r] \in U \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $[uv, R] \subset U$ olduğundan $uv \in T(U)$ elde edilir. O halde $T(U), R$ halkasının bir althalkasıdır. $T(U)$ bir althalka ve Lie ideal olduğundan Lemma 2.52 den $T(U), R$ halkasının sıfırdan farklı bir M idealini kapsar veya $T(U) \subset Z(R)$ dir. Eğer $T(U) \subset Z(R)$ ise $U \subset T(U) \subset Z(R)$ olduğundan $U \subset Z(R)$ dir. Bu durum $U \not\subset Z(R)$

olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $T(U)$, R halkasının sıfırdan farklı bir M idealini kapsar. O halde $T(U)$ kümesinin tanımından $[M, R] \subset U$ dur.

Varsayalım ki $[M, R] \subset Z(R)$ olsun. O halde $[M, [M, R]] = 0$ dır. Her $r \in R$ ve $s, t \in M$ için

$$[s, [t, r]] = 0 \quad (2.4)$$

olur. Şimdi her $x \in R$ için $I_s(x) = [s, x]$ ve $I_t(x) = [t, x]$ olacak şekilde s ve t ile belirlenen iç türevler olmak üzere (2.4) eşitliğinden $I_s(I_t(R)) = (0)$ elde edilir. Dolayısıyla $I_s I_t = 0$ olur. Sıfır dönüşümü bir türev olduğundan $I_s I_t$ bir türevdir. *Lemma 2.51* den $I_s = 0$ veya $I_t = 0$ olur. Böylece her $s, t \in M$ için $s, t \in Z(R)$ elde edilir. O halde $M \subset Z(R)$ dir. Buradan her $s \in M, r \in R$ için $sr \in M \subset Z(R)$ olduğu kullanılırsa

$$0 = [sr, x] = s[r, x] + [s, x]r = s[r, x]$$

bulunur. O zaman $sI_r(x) = 0$ dır. *Lemma 2.50* den her $s \in M$ için $s = 0$ veya $r \in R$ $r \in Z(R)$ elde edilir. Buradan $M \neq (0)$ olduğu için $R \subset Z(R)$ olur. Dolayısıyla $U \subset Z(R)$ dir. Ancak bu durum $U \not\subset Z(R)$ olmasıyla çelişir. Böylece $[M, R] \not\subset Z(R)$ elde edilir.

Lemma 2.54: (Bergen ve ark., 1981) R halkası karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U , R halkasının $U \not\subset Z(R)$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. $a, b \in R$ için $aUb = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $a \neq 0$ olsun. U , R halkasının Lie ideali ve $U \not\subset Z(R)$ olduğundan *Lemma 2.53* den $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir M ideali vardır. Her $u \in U, m \in M, y \in R$ için $[mau, y] \in [M, R] \subset U$ ve $aUb = (0)$ olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= a[mau, y]b = a[ma, y]ub + ama[u, y]b = a[ma, y]ub \\ &= amayub - ayma = amayub \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $amaRub = (0)$ elde edilir. R bir asal halka olduğundan her $m \in M, u \in U$ için $ama = 0$ veya $ub = 0$ olur. M sıfırdan farklı bir ideal ve $a \neq 0$ olduğundan $aMa \neq (0)$ dır. Yani her $u \in U$ için $ub = 0$ olur. O halde $Ub = (0)$ dır. Diğer taraftan her $x \in R, u \in U$ için $[u, x] \in U$ dır. $Ub = 0$ olması kullanılırsa $0 = [u, x]b = (ux - xu)b = uxb - xub = uxb$ bulunur. Buradan her $u \in U$ için $uRb = (0)$ olur. O halde R asal halka olduğundan her $u \in U$ için $u = 0$ veya $b = 0$ elde edilir. $U \neq (0)$ olduğundan $b = 0$ bulunur.

Lemma 2.55: (Herstein I. N., 1969) R , 2-torsion free bir yarı-asal halka ve $(0) \neq U$, R halkasının bir Lie ideali olsun. $[U, U] = (0)$ ise $U \subset Z(R)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $[U, U] = (0)$ olsun. U , Lie ideal olduğundan $t \in U$ olmak üzere, her $x \in R$ için $tx - xt \in U$ dir. O halde

$$\begin{aligned} 0 &= [t, tx - xt] = [t, tx] - [t, xt] = [t, t]x + t[t, x] - x[t, t] - [t, x]t \\ &= t[t, x] - [t, x]t = [t, [t, x]] \end{aligned}$$

bulunur. $I_t: R \rightarrow R$, $x \rightarrow [t, x]$ şeklinde tanımlanan bir iç türev olsun. O halde $I_t^2(R) = 0$ olur. Lemma 2.51 den $I_t = 0$ dır. O zaman her $t \in U$ için $t \in Z(R)$ dir. Dolayısıyla $U \subset Z(R)$ dir.



BÖLÜM 3

ASAL ve ASAL * –HALKALARDA TÜREVLER ve SOL TÜREVLER

3.1. Asal Halkalarda Lie İdealler ve Jordan Sol Türevler

Bu bölümde M. Ashraf ve N. Rehman'ın 2000 yılında yaptıkları “Asal Halkalarda Lie İdealler ve Jordan Sol Türevler” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 3.1.1: R , 2 –torsion free bir halka ve U , R halkasının kare kapalı bir Lie ideali olsun. d , R halkasının bir toplamsal dönüşümü olmak üzere her $u \in U$ için $d(u^2) = 2ud(u)$ ise;

- (i) Her $u, v \in U$ için, $d(uv + vu) = 2ud(v) + 2vd(u)$,
- (ii) Her $u, v \in U$ için, $d(uvu) = u^2d(v) + 3uvd(u) - vud(u)$,
- (iii) Her $u, v, w \in U$ için $d(uvw + wvu) = (uw + wu)d(v) + 3uvd(w) + 3wvd(u) - vud(w) - vwd(w)$,
- (iv) Her $u, v \in U$ için, $[u, v]ud(u) = u[u, v]d(u)$,
- (v) Her $u, v \in U$ için, $[u, v](d(uv) - ud(v) - vd(u)) = 0$

dir.

İspat: (i) U kare kapalı bir Lie ideal olduğundan her $u, v \in U$ için $uv + vu = (u + v)^2 - u^2 - v^2 \in U$ dir. Buradan $d(uv + vu)$ ifadesi açılıp hipotez kullanılırsa $d(uv + vu) = d(uv) + d(vu) = 2ud(v) + 2vd(u)$ elde edilir.

(ii) Her $u, v \in U$ için (i) ifadesinde v yerine $uv + vu$ yazılırsa $d(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = 4u^2d(v) + 6uvd(u) + 2vud(u)$ elde edilir. Diğer taraftan $d(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = d(u^2v + vu^2) + 2d(uvu) = 2u^2d(v) + 4vud(u) + 2d(uvu)$ elde edilir. Son elde edilen iki denklem birlikte düşünülüp R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$d(uvu) = u^2d(v) + 3uvd(u) - vud(u)$$

eşitliği elde edilir.

(iii) Her $u, v, w \in U$ için (ii) ifadesinde u yerine $u + w$ yazılırsa $d((u + w)v(u + w)) = u^2d(v) + w^2d(v) + (uw + wu)d(v) + 3uvd(u) + 3wvd(u) + 3wvd(w) - vud(u) - vud(w) - vwd(u) - vwd(w)$ elde edilir. Diğer taraftan $d((u + w)v(u + w)) = d(uvu) + d(wvw) + d(uvw + wvu) = u^2d(v) + 3uvd(u) - vud(u) + w^2d(v) + 3wvd(w) - vwd(w) + d(uvw + wvu)$ elde edilir. Bu son elde edilen iki denklemden her $u, v, w \in U$ için $d(uvw + wvu) = (uw + wu)d(v) + 3uvd(w) + 3wvd(u) - vud(w) - vwd(u)$ bulunur.

(iv) Her $u, v \in U$ Uyarı 2.35 den $2uv \in U$ elde edilir. Hipotezden her $u \in U$ için $d(u^2) = 2ud(u)$ olduğu kullanılırsa her $u, v \in U$ için $d(uv)^2 = 2uvd(uv)$ elde edilir. (iii) ifadesinde w yerine $2uv$ yazılır ve R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $u, v, w \in U$ için $d(uv(uv) + (uv)vu) = (u^2v + uvu)d(v) + 3uvd(uv) + 3uv^2d(u) - vud(uv) - vuvd(u)$ elde edilir. Diğer taraftan $d(uv(uv) + (uv)vu) = d((uv)^2 + uv^2u) = 2uvd(uv) + 2u^2vd(v) + 3uv^2d(u) - v^2ud(u)$ elde edilir. Elde edilen son iki denklemin eşitliğinden ve Lie komütatör işlemi kullanıldığında her $u, v \in U$ için

$$[u, v]d(uv) = u[u, v]d(v) + v[u, v]d(u) \quad (3.1)$$

elde edilir. Burada v yerine $u + v$ yazılır ve (3.1) denklemi kullanılırsa her $u, v \in U$ için $[u, v]ud(u) = u[u, v]d(u)$ elde edilir.

(v) Her $u, v \in U$ için (iv) ifadesinde u yerine $u + v$ yazılır ve Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa $[u, v]ud(u) + [u, v]vd(u) + [u, v]ud(u) + [u, v]vd(u) = u[u, v]d(u) + u[u, v]d(v) + v[u, v]d(u) + v[u, v]d(v)$ elde edilir. Burada (iv) ifadesi ve (3.1) eşitliği kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$[u, v](d(uv) - ud(v) - vd(u)) = 0$$

elde edilir.

Lemma 3.1.2: R , 2 –torsion free bir halka ve U , R halkasının kare kapalı bir Lie ideali olsun. d , R halkasının bir toplamsal dönüşümü olmak üzere her $u \in U$ için $d(u^2) = 2ud(u)$ ise;

(i) Her $u, v \in U$ için, $[u, v]d([u, v]) = 0$

(ii) Her $u, v \in U$ için, $(u^2v - 2uvu + vu^2)d(v) = 0$

dir.

İspat: (i) Lemma 3.1.1-(i) ve (v) numaralı eşitliklerinden her $u, v \in U$ için $d(uv + vu) = 2(ud(v) + vd(u))$ ve $[u, v](d(uv) - ud(v) - vd(u)) = 0$ elde edilir. Bu iki denklem birlikte düşünülüp gerekli düzenlemeler yapılırsa her $u, v \in U$ için

$$[u, v](d(vu) - ud(v) - vd(u)) = 0 \quad (3.2)$$

olur. Buradan (3.2) eşitliği ile Lemma 3.1.1-(v) den her $u, v \in U$ için $[u, v]d([u, v]) = 0$ elde edilir.

(ii) Her $u, v \in U$ için hipotezden $d([u, v]^2) = 2[u, v]d([u, v])$ sağlanır. Burada Lemma 3.1.2-(i) ifadesi kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$d([u, v]^2) = 0 \quad (3.3)$$

bulunur. Ayrıca her $u, v \in U$ için Uyarı 2.35 den $2uv, 2vu \in U$ elde edilir. Burada $2uv \in U$ ifadesinde u yerine $2vu$ yazılırsa $4vuv \in U$ olur. Lemma 3.1.1-(i) ifadesinden $4d(u(vuu)) + (vuv)u = 8(ud(vuv) + vuvd(u))$ elde edilir. Burada R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $u, v \in U$ için $d(u(vuu)) + (vuv)u = 2(ud(vuv) + vuvd(u))$ ifadesine ulaşılır. Burada (3.3) ifadesinden

$$\begin{aligned} 0 &= d([u, v]^2) = d(u(vuv) + (vuv)u) - d(uv^2u) - d(vu^2v) \\ &= 2(ud(vuv) + (vuv)d(u)) - u^2d(v^2) - 3uv^2d(u) + v^2ud(u) - v^2d(u^2) \\ &\quad - 3vu^2d(v) + u^2vd(v) \\ &= -3(u^2v - 2uvu + vu^2)d(v) - (uv^2 - 2vuv + v^2u)d(u) \end{aligned}$$

olur. Böylece her $u, v \in U$ için

$$(uv^2 - 2vuv + v^2u)d(u) + 3(u^2v - 2uvu + vu^2)d(v) = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Lemma 3.1.1-(iv) ifadesi (3.4) ifadesinde kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$(u^2v - 2uvu + vu^2)d(u) = 0 \quad (3.5)$$

dır. (3.5) denkleminde u yerine $u + v$ yazılırsa $((u^2v - 2uvu + vu^2) - (v^2u - 2vuv + uv^2))(d(u) + d(v)) = 0$ elde edilir. Burada (3.5) denklemi kullanılırsa $(u^2v - 2uvu + vu^2)d(v) - (v^2u - 2vuv + uv^2)d(u) = 0$ elde edilir. Elde edilen bu son denklem ve (3.4) denklemi birlikte kullanılırsa her $u, v \in U$ için

$$(u^2v - 2uvu + vu^2)d(v) = 0$$

olur.

Teorem 3.1.3: R , 2-torsion free bir asal halka ve U, R halkasının bir kare kapalı Lie ideali olsun. $d: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü her $u \in U$ için, $d(u^2) = 2ud(u)$ koşulunu sağlıyorsa her $u, v \in U$ için $d(uv) = ud(v) + vd(u)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki U R halkasının değişmeli olan bir Lie ideali olsun. $a \in U$ ve $x \in R$ için $[a, x] \in U$ dur. U değişmeli olduğundan her $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
[a, [a, xy]] &= [a, x[a, y] + [a, x]y] \\
&= [a, x[a, y]] + [a, [a, x]y] \\
&= x[a, [a, y]] + [a, x][a, y] + [a, x][a, y] + [a, [a, x]]y
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan $2[a, x][a, y] = 0$ elde edilir. Buradan R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa $[a, x][a, y] = 0$ bulunur. $r \in R$ için y yerine rx yazılıp gerekli düzenlemeler yapılır ve yine aynı eşitlik kullanılırsa her $r, x \in R$ için $[a, x]r[a, x] = 0$ elde edilir. Böylece $[a, x]R[a, x] = (0)$ olur. R bir asal halka olduğundan her $a \in U$, $x \in R$ için $[a, x] = 0$ olur. Buradan $U \subset Z(R)$ elde edilir. *Lemma 3.1.1-(i)* den $2d(uv) = 2(ud(v) + vd(u))$ bulunur. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $u, v \in U$ için $d(uv) = (ud(v) + vd(u))$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki U değişmeli olmasın. Bu durumda $U \not\subset Z(R)$ dir. *Lemma 3.1.1-(iv)* den her $u, v \in U$ için $[u, v]ud(u) = u[u, v]d(u)$ dir. Bu ifade düzenlenirse $(uv - vu)ud(u) = u(uv - vu)d(u) = uvud(u) - vu^2d(u) = u^2vd(u) - uvud(u)$ bulunur. Buradan her $u, v \in U$ için

$$(u^2v - 2uvu + vu^2)d(u) = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinde $w, u_1 \in U$ olmak üzere u yerine $[u_1, w]$ yazılırsa her $u, v, w, u_1 \in U$ için $([u_1, w]^2v)d([u_1, w]) - 2([u_1, w])v[u_1, w])d([u_1, w]) + (v[u_1, w]^2d([u_1, w])) = 0$ elde edilir. *Lemma 3.1.2-(i)* den $([u_1, w])^2vd([u_1, w]) = 0$ bulunur. Buradan her $u_1, w \in U$ için $([u_1, w])^2Ud([u_1, w]) = (0)$ bulunur. Böylece *Lemma 2.54* den her $u_1, w \in U$ için $[u_1, w]^2 = 0$ veya $d([u_1, w]) = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $d([u_1, w]) = 0$ olacak biçimde $u_1, w \in U$ var olsun. *Lemma 3.1.1-(i)* ifadesinden $d(u_1w + wu_1) = 2u_1d(w) + 2wd(u_1)$ bulunur. Bu ifade düzenlenirse $d(u_1w) + d(wu_1) = 2d(u_1w) = 2u_1d(w) + 2wd(u_1)$ olur. Burada R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa $d(u_1w) = u_1d(w) + wd(u_1)$ elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki $[u_1, w]^2 = 0$ ise olacak biçimde $u_1, w \in U$ elemanları var olsun. *Lemma 3.1.2-(ii)* ifadesinde $w \in U$ için v yerine $[u_1, w]$ yazılırsa her $u \in U$ için $(u^2[u_1, w])d([u_1, w]) - 2(u[u_1, w]u)d([u_1, w]) + ([u_1, w]u^2)d([u_1, w]) = 0$ bulunur. Bu eşitlikte *Lemma 3.1.2-(i)* kullanılırsa her $u \in U$ için $([u_1, w]uv)d([u_1, w]) - 2(u[u_1, w]u)d([u_1, w]) = 0$ elde edilir. Burada u yerine $u + v$ yazılıp *Lemma 3.1.2-(i)* kullanılırsa her $u, v \in U$ için $([u_1, w]uv)d([u_1, w]) + ([u_1, w]vu)d([u_1, w]) -$

$2((u[u_1, w]v) + (v[u_1, w]u))d([u_1, w]) = 0$ elde edilir. Burada u yerine $2uv_1$ yazılır ve R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $u, v, v_1 \in U$ için

$$0 = ([u_1, w]uv_1v)d([u_1, w]) + ([u_1, w]vuv_1)d([u_1, w]) \\ - 2((uv_1[u_1, w]v) + (v[u_1, w]uv_1)d([u_1, w]))$$

elde edilir. Burada v_1 yerine $[u_1, w]$ yazılır ve *Lemma 3.1.2-(i)* ve $[u_1, w]^2 = 0$ olduğu kullanılırsa her $u, v, v_1 \in U$ için $([u_1, w]u[u_1, w])vd([u_1, w]) = 0$ elde edilir. Buradan her $u \in U$ için $([u_1, w]u[u_1, w])Ud([u_1, w]) = (0)$ eşitliği elde edilir. *Lemma 2.54* den $d([u_1, w]) = 0$ veya her $u \in U$ için $([u_1, w]u[u_1, w]) = 0$ olur.

Eğer $d([u_1, w]) = 0$ ise $d(u_1w) = u_1d(w) + wd(u_1)$ bulunur.

Öte yandan $[u_1, w]u[u_1, w] = 0$ ise $[u_1, w]U[u_1, w] = (0)$ olur. Buradan *Lemma 2.54* kullanılırsa $[u_1, w] = 0$ olduğu görülür. Buradan $u_1w = wu_1$ dir. O zaman *Lemma 3.1.1-(i)* den

$$d(u_1w + wu_1) = d(u_1w) + d(wu_1) \\ = d(u_1w) + d(u_1w) \\ = 2d(u_1w) \\ = 2u_1d(w) + 2wd(u_1)$$

elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $u_1, w \in U$ için $d(u_1w) = u_1d(w) + wd(u_1)$ olur.

Sonuç 3.1.4: R halkası 2 –torsion free bir asal halka ve $d: R \rightarrow R$ Jordan sol türev ise sol türevdir.

3.2. Asal Halkanın Lie İdealleri Üzerinde Genelleştirilmiş Sol Türevlerin Homomorfizma ve Anti-Homomorfizma Olma Durumları

Bu bölümde N. Rehman ve A. Z. Ansari'nin 2014 yılında yaptıkları “Halkanın Lie İdealleri Üzerinde Genelleştirilmiş Sol Türevlerin Homomorfizma ve Anti-Homomorfizma Olma Durumları” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 3.2.1: (Shakir, 2011, s 209-226) R bir asal halka olmak üzere $F: R \rightarrow R_C$ toplamsal dönüşümü her $r, s \in R$ için $F(rs) = rF(s)$ koşulunu sağlıyorsa her $r \in R$ için $F(r) = rq$ olacak biçimde $q \in Q_1(R_C)$ vardır.

Lemma 3.2.2: R bir halka ve $(0) \neq U$, R halkasının bir kare kapalı Lie ideali olsun. O zaman $2R[U, U] \subseteq U$ ve $2[U, U]R \subseteq U$ dur.

İspat: Her $x, y \in U$ ve her $r \in R$ için $2[x, ry]$ ifadesi Lie komütatör özellikleri kullanılarak açılırsa $2[x, ry] = 2r[x, y] + 2[x, r]y$ eşitliği elde edilir. *Uyarı 2.35* den

$2[x, r]y$ ve $2[x, ry]$ elemanları U Lie idealinin elemanları olduğundan her $x, y \in U$ ve her $r \in R$ için $2r[x, y] \in U$ elde edilir. Dolayısıyla $2R[U, U] \subseteq U$ ifadesine ulaşılır.

Yine her $x, y \in U$ ve her $r \in R$ için $2[x, yr]$ ifadesi Lie komütatör özellikleri kullanılarak açıldığında $2[x, yr] = 2[x, y]r + 2y[x, r]$ eşitliği elde edilir. Uyarı 2.35 den $2[x, yr]$ ve $2y[x, r]$ elemanları U Lie idealinin elemanları olduğundan her $x, y \in U$ ve her $r \in R$ için $2[x, y]r \in U$ elde edilir. Dolayısıyla $2[U, U]R \subseteq U$ ifadesine ulaşılır.

Teorem 3.2.3: R , karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka, U , R halkasının sıfırdan farklı değişmeli olmayan bir kare kapalı Lie ideali ve $F: R \rightarrow R$, $d: R \rightarrow R$ Jordan sol türevi ile belirli genelleştirilmiş Jordan sol türev olsun. Eğer F , U üzerinde homomorfizma veya anti homomorfizma ise her $r \in R$ için $F(r) = rq$ olacak biçimde bir $q \in Q_1(R_C)$ vardır.

İspat: F , U üzerinde homomorfizma olsun. F aynı zamanda d ile belirli genelleştirilmiş sol türev olduğundan her $x \in U$ için $F(x^2) = xF(x) + xd(x)$ biçimindedir. Lemma 3.1.4 den d Jordan sol türev ise sol türevdir. Ayrıca her $x, y \in U$ için Uyarı 2.35 den $2xy \in U$ ve R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan $F(2xy) = 2F(xy) = 2F(x)F(y) = F(x)F(y)$ dır. Buradan her $x, y, z \in U$ için

$$F(xyz) = F(x(yz)) = xF(yz) + (yz)d(x) = xF(y)F(z) + yzd(x)$$

ifadesine ulaşılır. Aynı ifade farklı şekilde açılırsa her $x, y, z \in U$ için

$$F(xyz) = F((xy)z) = F(xy)F(z) = xF(y)F(z) + yd(x)F(z)$$

olur. Bu eşitlikler birlikte düşünülüp soldan $xF(y)F(z)$ nin toplamsal tersi eklendiğinde ve kalan ifade soldan y parantezine alındığında her $x, y, z \in U$ için $y(zd(x) - d(x)F(z)) = 0$ elde edilir. O halde her $x, z \in U$ için $U(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$ dır. Bu eşitlik $a \in U$ için soldan a ile çarpıldığında her $x, y, z, a \in U$ için $aU(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Lemma 2.54 den

$$a = 0 \text{ veya } zd(x) - d(x)F(z) = 0$$

elde edilir. Her $a \in U$ için $a = 0$ olması $U = (0)$ olması anlamına gelmektedir. U sıfırdan farklı olduğundan bu durum söz konusu değildir. Dolayısıyla her $x, z \in U$ için, $zd(x) = d(x)F(z)$ dir. Burada x yerine $2xy$ yazılıp karakteristiğin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x, z \in U$ için $zd(xy) = d(xy)F(z)$ eşitliği elde edilir. Buradan d nin sol türev olduğu kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $zxd(y) + zyd(x) - xd(y)F(z) - yzd(x) = 0$ ifadesine ulaşılır. Bu ifadede her $x, z \in U$ için, $zd(x) = d(x)F(z)$ olduğu kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $zxd(y) + zyd(x) - xzd(y) - yzd(x) = 0$ elde edilir. Burada Lie komütatör

işlemi özelliği kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $[z, x]d(y) + [z, y]d(x) = 0$ olur. Bu eşitlikte z yerine y yazılıp Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa her $x, y \in U$ için $[y, x]d(y) = 0$ elde edilir. Böylece her $x, y \in U$ için

$$[x, y]d(y) = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $k \in U$ için x yerine $2xk$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $x, y, k \in U$ için $[xk, y]d(y) = 0$ elde edilir. Bu ifade Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılarak düzenlenirse her $x, y, k \in U$ için $x[k, y]d(y) + [x, y]kd(y) = 0$ olur. Elde edilen bu ifadede $[x, y]d(y) = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, y, k \in U$ için $[x, y]kd(y) = 0$ ifadesi elde edilir. O halde $[x, y]Ud(y) = (0)$ dır. *Lemma 2.54* den her $x, y \in U$ için

$$[x, y] = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

olur.

Şimdi $A = \{x \in U \mid [x, y] = 0, \forall y \in U\}$ ve $B = \{y \in U \mid d(y) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , U Lie idealinin altgruplarıdır ve $U = A \cup B$ dir. Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = A$ veya $U = B$ dir.

Kabul edelim ki $U = A$ olsun. O halde her $x, y \in U$ için $[x, y] = 0$ dır. Böylece $[U, U] = 0$ olur. *Lemma 2.55* den $U \subset Z(R)$ dir. Ancak bu sonuç U nin değişmeli olmamasıyla çelişir. O halde $U = B$ dir. Bu durumda her $x \in U$ için $d(x) = 0$ dır. Buradan $d(U) = 0$ elde edilir. *Lemma 3.2.2* den her $x, k \in U$ ve $r \in R$ için $2[x, k]r \in U$ ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $d([x, k]r) = 0$ olur. Burada d nin sol türev olması kullanılırsa $[x, k]d(r) = 0$ elde edilir. Bu ifadede $m \in U$ olmak üzere x yerine $2xm$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $[xm, k]d(r) = 0$ olur. Elde edilen bu ifadede Lie komütatör işlemi özelliği ve $[x, k]d(r) = 0$ olması kullanılırsa her $x, k, m \in U, r \in R$ için $[x, k]md(r) = 0$ eşitliğine ulaşılır. O halde $[x, k]Ud(r) = (0)$ dır. Böylece *Lemma 2.54* den $x, k \in U, r \in R$ için

$$[x, k] = 0 \text{ veya } d(r) = 0$$

elde edilir.

Kabul edelim ki her $x, k \in U$ için $[x, k] = 0$ olsun. Bu durumda $[U, U] = 0$ dır. *Lemma 2.55* den $U \subset Z(R)$ elde edilir. Ancak bu sonuç U nun değişmeli olmamasıyla çelişir. O halde her $r \in R$ için $d(r) = 0$ dır. Buradan $d(R) = 0$ elde edilir. Bu ise $d = 0$ demektir. O halde *Lemma 3.2.1* den her $r \in R$ için $F(r) = rq$ olan $\exists q \in Q_1(R_C)$ vardır.

Şimdi kabul edelim ki F , U üzerinde anti-homomorfizma olsun. F aynı zamanda d ile belirli genelleştirilmiş Jordan sol türev olduğundan her $x \in U$ için

$$F(x^2) = xF(x) + xd(x)$$

biçimindedir. *Sonuç 3.1.4* den d Jordan sol türev ise sol türevdir. O halde her $x, y \in U$ için

$$F(xy) = xF(y) + yd(x)$$

dir. Ayrıca her $x, y \in U$ için $2xy \in U$ ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğundan $F(2xy) = 2F(xy) = 2F(y)F(x) = F(y)F(x)$ dır. Son elde edilen iki eşitlikten $F(y)F(x) = xF(y) + yd(x)$ ifadesine ulaşılır. Elde edilen bu denklemde y yerine $2xy$ yazılır ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $F(xy)F(x) = xF(xy) + xyd(x)$ elde edilir. Burada F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol türev olduğundan $xF(y)F(x) + yd(x)F(x) = xF(y)F(x) + xyd(x)$ olur. Buradan her $x, y \in U$ için $yd(x)F(x) = xyd(x)$ eşitliğine ulaşılır. Burada $z \in U$ olmak üzere y yerine $2zy$ yazılır ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa $zyd(x)F(x) = xzyd(x)$ elde edilir. Burada $yd(x)F(x) = xyd(x)$ eşitliği kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $xzyd(x) - zxyd(x) = [x, z]yd(x) = 0$ olur. Böylece her $x, z \in U$ için $[x, z]Ud(x) = (0)$ elde edilir. *Lemma 2.54* den her $x, z \in U$ için

$$[x, z] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

olur.

Şimdi $C = \{x \in U \mid [x, z] = 0, \forall z \in U\}$ ve $D = \{x \in U \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , U Lie idealinin altgruplarıdır ve $U = C \cup D$ dir. Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = C$ veya $U = D$ dir.

Kabul edelim ki $U = C$ olsun. Bu durumda her $x, z \in U$ için $[x, z] = 0$ dır. Böylece $[U, U] = 0$ olur. *Lemma 2.55* den $U \subset Z(R)$ dir. Ancak bu sonuç U nun değişmeli olmamasıyla çelişir. O halde $U = D$ dir. Bu durumda her $x \in U$ için $d(x) = 0$ dır. Böylece $d(U) = 0$ olur. *Lemma 3.2.2* den her $t, x \in U$ ve $m \in R$ için $2[x, t]m \in U$ ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $d([x, t]m) = 0$ elde edilir. Burada d nin sol türev olması kullanılırsa $[x, t]d(m) = 0$ olur. Bu eşitlikte $s \in U$ olmak üzere x yerine $2xs$ yazılırsa ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x, s, t \in U$ için $[xs, t]d(m) = 0$ elde edilir. Elde edilen bu ifadede Lie komütatör işlemi özelliği ile $[x, t]d(m) = 0$ olması kullanılırsa her $x, t, s \in U, m \in R$ için $[x, t]sd(m) = 0$ eşitliğine ulaşılır. Buradan her $x, t \in U, m \in R$ için $[x, t]Ud(m) = (0)$ olur. *Lemma 2.54* den her $x, t \in U, m \in R$ için

$$[x, t] = 0 \text{ veya } d(m) = 0$$

elde edilir.

Kabul edelim ki her $x, t \in U$ için $[x, t] = 0$ olsun. Bu durumda $[U, U] = 0$ dır. Buradan *Lemma 2.55* den $U \subset Z(R)$ elde edilir. Ancak bu sonuç U nun değişmeli olmamasıyla çelişir. O halde her $m \in R$ için $d(m) = 0$ dır. Buradan $d(R) = 0$ elde edilir. Böylece $d = 0$ dır. O halde *Lemma 3.2.1* den her $r \in R$ için $F(r) = rq$ olan $\exists q \in Q_1(R_C)$ vardır.

3.3. Asal $*$ –Halkalar Üzerinde Sol $*$ –Türevlerin Homomorfizma ve Anti-Homomorfizma Olma Durumları

Bu bölümde N. Rehman, A. Z. Ansari ve C. Haetinger’in 2013 yılında yaptıkları “ $*$ –Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 3.3.1: (Rehman ve Ansari, 2011, s 742-750) R $*$ –involüsyonlu 2 –torsion free bir yarı-asal halka olsun. $T: R \rightarrow R$ bir toplamsal dönüşümü her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x^*$ koşulunu sağlıyorsa her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(y)x^*$ dır.

Teorem 3.3.2: R bir asal $*$ –halka ve $F: R \rightarrow R$, d sol $*$ –türevi ile belirli genelleştirilmiş sol $*$ – türev olsun.

(i) F, R üzerinde homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya F, R üzerinde sağ $*$ –merkezileştiricidir.

(ii) F, R üzerinde anti-homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya F, R üzerinde sağ $*$ –merkezileştiricidir.

İspat: (i) Kabul edelim ki F, R üzerinde homomorfizma olsun. F homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan her $x, y, z \in R$ için

$$F(xyz) = F(x(yz)) = x^*F(yz) + yzd(x) = x^*F(y)F(z) + yzd(x)$$

ve

$$F(xyz) = F((xy)z) = F(xy)F(z) = x^*F(y)F(z) + yd(x)F(z)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler birlikte düşünöldüğünde $yzd(x) = yd(x)F(z)$ ifadesine ulaşılır. Buradan $y(zd(x) - d(x)F(z)) = 0$ bulunur. Bu ifade soldan $(zd(x) - d(x)F(z))$ ile çarpılırsa her $x, y, z \in R$ için $(zd(x) - d(x)F(z))y(zd(x) - d(x)F(z)) = 0$ bulunur. Dolayısıyla her $x, z \in R$ için

$$(zd(x) - d(x)F(z))R(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$$

olur. Bu ifadede R halkasının asal olması kullanılırsa $zd(x) - d(x)F(z) = 0$ elde edilir. Buradan her $x, z \in R$ için, $zd(x) = d(x)F(z)$ elde edilir. Burada $t \in R$ için x yerine xt yazılırsa $zd(xt) = d(xt)F(z)$ elde edilir. Elde edilen bu denklemde d sol $*$ –türevi kullanılırsa her $x, z, t \in R$ için

$$zx^*d(t) + ztd(x) = x^*d(t)F(z) + td(x)F(z)$$

elde edilir. Bu denklemde $zd(x) = d(x)F(z)$ olduğu kullanılıp Lie komütatör işlemi özelliği de dikkate alındığında

$$[z, x^*]d(t) + [z, t]d(x) = 0$$

elde edilir. Burada z yerine x^* düşünülüğünde her $x, t \in R$ için $[x^*, t]d(x) = 0$ olur. Bu eşitlikte $m \in R$ için, t yerine tm düşünülürse $[x^*, tm]d(x) = 0$ elde edilir. Elde edilen son eşitlikte $[x^*, t]d(x) = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, t, m \in R$ için $[x^*, t]md(x) = 0$ olur. Buradan her $x, t \in R$ için $[x^*, t]Rd(x) = (0)$ denkleminde ulaşılır. R asal halka olduğundan her $x, t \in R$ için

$$[x^*, t] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

dır. Şimdi $A = \{x \in R \mid [x^*, t] = 0, \forall t \in R\}$ ve $B = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , R nin altgruplarıdır ve $R = A \cup B$ dir. Bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = A$ veya $R = B$ dir.

Kabul edelim ki $R = A$ olsun. O halde her $x, t \in R$ için $[x^*, t] = 0$ dir. x yerine x^* yazılırsa $[x, t] = 0$ elde edilir. Bu ise R halkasının değişmeli olduğu anlamına gelmektedir. Şimdi kabul edelim ki $R = B$ olsun. Yani her $x \in R$ için $d(x) = 0$ dir. O halde $d(R) = 0$ dir. Buradan $d = 0$ elde edilir. Böylece F sağ $*$ –merkezileştiricidir.

(ii) Kabul edelim ki F , R üzerinde anti-homomorfizma olsun. F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(y)F(x)$ ve $F(xy) = x^*F(y) + yd(x)$ eşitlikleri sağlanır. Buradan $F(y)F(x) = x^*F(y) + yd(x)$ elde edilir. Elde edilen bu denklemde y yerine xy yazılırsa $F(xy)F(x) = x^*F(xy) + xyd(x)$ olur. F 'in anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olması kullanılırsa

$$x^*F(y)F(x) + yd(x)F(x) = x^*F(y)F(x) + xyd(x)$$

olur. Eşitliğin her iki yanına soldan $x^*F(y)F(x)$ nin toplamsal tersi eklenirse $yd(x)F(x) = xyd(x)$ eşitliğine ulaşılır. Burada $z \in R$ için y yerine zy yazılırsa $zyd(x)F(x) = xzyd(x)$ elde edilir. Bu ifadede $yd(x)F(x) = xyd(x)$ eşitliği kullanılırsa her $x, y, z \in R$ için $xzyd(x) - zxyd(x) = [x, z]yd(x) = 0$ elde edilir. Böylece her $x, z \in R$ için $[x, z]Rd(x) = (0)$ elde edilir. R asal halka olduğundan her $x, z \in R$ için

$$[x, z] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

olur. Şimdi $A = \{x \in R \mid [x, z] = 0, \forall z \in R\}$ ve $B = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , R nin altgruplarıdır ve $R = A \cup B$ dir. Bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = A$ veya $R = B$ dir.

Kabul edelim ki $R = A$ olsun. O halde her $x, z \in R$ için $[x, z] = 0$ dır. Bu ise R halkasının değişmeli olduğu anlamına gelmektedir. Şimdi kabul edelim ki $R = B$ olsun. Bu durumda her $x \in R$ için $d(x) = 0$ dır. O halde $d(R) = 0$ dır. Buradan $d = 0$ elde edilir. Böylece F sağ $*$ –merkezleştirelidir.

Sonuç 3.3.3: R bir asal $*$ –halka ve $d: R \rightarrow R$, sol $*$ –türev olsun.

(i) d, R üzerinde homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya d, R üzerinde sağ $*$ –merkezleştirelidir.

(ii) d, R üzerinde anti-homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya d, R üzerinde sağ $*$ –merkezleştirelidir.

İspat: Her sol $*$ –türev kendisiyle belirli bir genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan *Teorem 3.3.2* ifadesinde F genelleştirilmiş sol $*$ –türevi yerine d sol $*$ –türevinin kendisi düşünüldüğünde teorem sağlanır.

Teorem 3.3.4: R bir $*$ –involüsyonlu halka ve $T: R \rightarrow R$ bir Jordan $*$ –merkezleştireli olsun.

(i) R bir yarı-asal halka ve T, R üzerinde homomorfizma ise T dönüşümü R nin merkezindedir.

(ii) R bir asal halka ve T, R üzerinde anti-homomorfizma ise $T = 0$ veya T dönüşümü bir involüsyondur.

İspat: (i) Kabul edelim ki R yarı-asal halka ve T, R üzerinde homomorfizma olsun. O halde her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(x)T(y)$ dir. Üstelik T, R üzerinde Jordan $*$ –merkezleştireli olduğundan her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x^*$ dır. *Lemma 3.3.1* den $T(xy) = T(y)x^*$ elde edilir. Elde edilen bu denklemlerden her $x, y \in R$ için $T(x)T(y) = T(y)x^*$ elde edilir. Burada $z \in R$ için, y yerine zy yazılırsa $T(x)T(zy) = T(zy)x^*$ elde edilir. Böylece *Lemma 3.3.1* den $T(x)T(y)z^* = T(y)z^*x^*$ olur. Bu ifadede $T(x)T(y) = T(y)x^*$ olduğu kullanıldığında $T(y)x^*z^* = T(y)z^*x^*$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla her $x, y, z \in R$ için, $T(y)[x^*, z^*] = 0$ elde edilir. Burada x yerine x^* ve y yerine y^* yazılırsa $T(y)[x, z] = 0$ elde edilir. Bu ifadede $t \in R$ için x yerine tx düşünülürse $T(y)[tx, z] = 0$ olur. Buradan $T(y)t[x, z] + T(y)[t, z]x = 0$ denkleminde ulaşılır. Ulaşılan bu denklemde $T(y)[x, z] = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, y, z, t \in R$ için

$$T(y)t[x, z] = 0 \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu denklemde $s \in R$ için t yerine st yazılırsa her $x, y, z, t, s \in R$ için $T(y)st[x, z] = 0$ elde edilir. Diğer taraftan (3.7) eşitliği soldan $s \in R$ ile çarpılırsa her $x, y, z, t, s \in R$ için $sT(y)t[x, z] = 0$ elde edilir. Ulaşılan son iki denklem birlikte düşünülüp Lie komütatör işlemi özelliği kullanılırsa $[T(y), s]t[x, z] = 0$ elde edilir. Burada $s = z$ ve $x = T(y)$ alınırsa her $y, z, t \in R$ için $[T(y), z]t[T(y), z] = 0$ elde edilir. O halde her $y, z \in R$ için $[T(y), z]R[T(y), z] = (0)$ dır. R bir yarı-asal halka olduğundan her $y, z \in R$ için $[T(y), z] = 0$ elde edilir. Buradan $[T(R), R] = 0$ dır. Dolayısıyla $T(R) \subset Z(R)$ dir.

(ii) Kabul edelim ki R asal halka ve T, R üzerinde anti-homomorfizma olsun. O halde her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(y)T(x)$ dir. Üstelik T, R üzerinde Jordan $*$ –merkezileştirici olduğundan her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x^*$ dır. O zaman *Lemma 3.3.1* den $T(xy) = T(y)x^*$ olur. Elde edilen bu iki denklemden $T(y)T(x) = T(y)x^*$ elde edilir. Bu ifade soldan $T(y)$ parantezine alındığında her $x, y \in R$ için $T(y)(T(x) - x^*) = 0$ elde edilir. Burada $z \in R$ için y yerine zy yazılıp *Lemma 3.3.1* kullanılırsa $T(y)z^*(T(x) - x^*) = 0$ denklemini elde edilir. Bu ifadede z yerine z^* yazılırsa $T(y)z(T(x) - x^*) = 0$ elde edilir. Buradan her $x, y \in R$ için $T(y)R(T(x) - x^*) = (0)$ olur. Böylece R asal halka olduğundan her $x, y \in R$ için $T(y) = 0$ veya $T(x) = x^*$ elde edilir. Eğer her $y \in R$ için $T(y) = 0$ ise o zaman $T = 0$ dır. Diğer taraftan her $x \in R$ $T(x) = x^*$ ise T bir involüsyondur.

BÖLÜM 4

* –ASAL HALKALARDA TÜREV ve SOL TÜREVLERLE DEĞİŞMELİLİK

4.1. * –Asal Halkalarda Değişmelilik

Bu bölümde L. Oukhtite ve S.Salhi'nin 2006b yılında yaptıkları “* –Asal Halkalarda Değişmelilik” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 4.1.1: T, R üzerinde homomorfizma ve U kare kapalı Lie ideali üzerinde merkezleştiren dönüşüm ise T, U üzerinde değişmelidir.

İspat: T, R üzerinde homomorfizma ve U kare kapalı Lie ideali üzerinde merkezleştiren dönüşüm olsun. O zaman her $x \in U$ için $[x, T(x)] \in Z(R)$ dir. Şimdi her $x \in U$ için $[x, T(x)] = 0$ olduğunu gösterelim.

İlk olarak $x, y \in U$ alalım. $[x, T(x)] \in Z(R)$ ifadesinde x yerine $x + y$ yazılıp hipotez kullanılırsa her $x, y \in U$ için $[x, T(y)] + [y, T(x)] \in Z(R)$ elde edilir. Elde edilen bu denklemde y yerine x^2 yazılıp Lie komütatör işlemi özelliği kullanılırsa

$$T(x)[x, T(x)] + [x, T(x)]T(x) + x[x, T(x)] + [x, T(x)]x \in Z(R)$$

olur. Burada her $x \in U$ için, $[x, T(x)] \in Z(R)$ olduğu kullanılıp ifade düzenlenirse $2(x + T(x))[x, T(x)] \in Z(R)$ elde edilir. $R, 2$ –torsion free bir * –asal halka olduğundan,

$$(x + T(x))[x, T(x)] \in Z(R)$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece her $r \in R$ için $[(x + T(x))[x, T(x)], r] = 0$ elde edilir. Bu ifadede Lie komütatör işlemi özellikleri uygulanıp ve her $x \in U$ için $[x, T(x)] \in Z(R)$ olması kullanılırsa $[(x + T(x)), r][x, T(x)] = 0$ elde edilir. O halde her $x \in U$ ve her $r \in R$ için, $[(x + T(x)), r][x, T(x)] = 0$ dır. Burada r yerine x düşünüldüğünde her $x \in U$ için, $[(x + T(x)), x][x, T(x)] = 0$ eşitliğine ulaşılır. Bu ifadede Lie komütatör işlemi özelliğinden yararlanılırsa her $x \in U$ için, $[x, T(x)]^2 = 0$ elde edilir. $a \in R$ olmak üzere elde edilen son eşitlik soldan a ile çarpılıp, her $x \in U$ için $[x, T(x)] \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa her $x \in U, a \in R$ için $[x, T(x)]a[x, T(x)] = 0$ denkleminde ulaşılır.

Buradan her $x \in U$ için

$$[x, T(x)]R[x, T(x)] = (0) \tag{4.1}$$

elde edilir. (4.1) ifadesi sağdan $[x, T(x)]^*$ ile çarpıldığında her $x \in U$ için $[x, T(x)]R[x, T(x)][x, T(x)]^* = (0)$ olur. Elde edilen denklemde $[x, T(x)][x, T(x)]^*$

ifadesinin $*$ –involüsyon altındaki görüntüsü incelenirse $([x, T(x)][x, T(x)]^*)^* = [x, T(x)][x, T(x)]^* \in S_*(R)$ elde edilir. Böylece her $x \in U$ için

$$[x, T(x)]R[x, T(x)][x, T(x)]^* = [x, T(x)]R([x, T(x)][x, T(x)]^*)^* = (0)$$

elde edilir. Buradan R $*$ –asal halka olduğundan her $x \in U$ için

$$[x, T(x)] = 0 \text{ veya } [x, T(x)][x, T(x)]^* = 0$$

olur.

Kabul edelim ki her $x \in U$ için, $[x, T(x)] = 0$ olsun. Bu durumda T, U üzerinde değişmeli olur. Şimdi kabul edelim ki her $x \in U$ için, $[x, T(x)][x, T(x)]^* = 0$ olsun. $b \in R$ olmak üzere son ifade soldan b ile çarpılırsa

$$b[x, T(x)][x, T(x)]^* = 0$$

elde edilir. Burada her $x \in U$ için $[x, T(x)] \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa her $x \in U, b \in R$ $[x, T(x)]b[x, T(x)]^* = 0$ bulunur. O halde her $x \in U$ için

$$[x, T(x)]R[x, T(x)]^* = (0)$$

dır. Ayrıca her $x \in U$ için $([x, T(x)]^*)^* = [x, T(x)]$ olduğu kullanılırsa $[x, T(x)]R[x, T(x)] = (0)$ elde edilir. Böylece $[x, T(x)]R[x, T(x)]^* = (0) = [x, T(x)]R[x, T(x)]$ denklemleri elde edilir. R $*$ –asal halka olduğundan, her $x \in U$ için, $[x, T(x)] = 0$ elde edilir. O halde T, U üzerinde değişmeli olur.

Not 4.1.2: Bundan sonraki lemma ve teoremlerde U, R halkasının bir $*$ –kare kapalı Lie ideali, T, U üzerinde merkezileştirici otomorfizması ve $0 \neq u_0 \in S_*(R)$ için $Ru_0 \subset U$ olarak alınacaktır. T, U üzerinde merkezleştiren dönüşüm olduğundan Lemma 4.1.1 den her $x \in U$ için, $[x, T(x)] = 0$ dır.

Lemma 4.1.3: $R, *$ –asal halka ve U , sıfırdan farklı $*$ –Lie ideal olsun. $a, b \in R$ için $a U b = (0) = a U b^*$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim $a, b \in R$ için $a U b = (0) = a U b^*$ ve $a \neq 0$ olsun. $0 \neq u_0 \in S_*(R)$ elemanını alalım.

İlk olarak, kabul edelim ki $0 \neq u_0 \in Z(R)$ olsun. Hipotezden her $r \in R$ için $aru_0b = aru_0b^* = 0$ elde edilir. Böylece $aRu_0b = aRu_0b^* = (0)$ yazabiliriz. Burada $(u_0b)^*$ incelendiğinde $(u_0b)^* = b^*u_0^*$ ve $u_0^* = \bar{\tau}u_0$ olması kullanılarak $(u_0b)^* = u_0b^*$ eşitliğine ulaşılır. Ulaşılan bu eşitlik kullanılırsa $a, b \in R$ için $aRu_0b = aR(u_0b)^* = (0)$ eşitliği elde edilir. R bir $*$ –asal halka ve $a \neq 0$ olduğundan $u_0b = 0$ dır. $s \in R$ olmak üzere son eşitlik soldan s ile çarpıldığında $su_0b = 0$ olur. O halde $Ru_0b = (0)$ dır. Burada $u_0 \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa $u_0Rb = (0)$ dır. Bu ifadede $u_0 = \bar{\tau}u_0^*$ olduğu kullanılırsa

$u_0 * Rb = (0)$ eşitliğine ulaşılır. Böylece R nin $*$ –asal halka olması kullanıldığında $u_0 = 0$ veya $b = 0$ bulunur. Kabulden u_0 sıfırdan farklı olduğundan $b = 0$ dir.

Şimdi de kabul edelim ki $u_0 \notin Z(R)$ ve her $t \in R$ için $a[t, u_0] = 0$ olsun. Bu eşitlikte $m \in R$ olmak üzere t yerine tm yazılırsa

$$0 = a[tm, u_0] = at[m, u_0] + a[t, u_0]m = at[m, u_0]$$

bulunur. Böylece $aR[m, u_0] = (0)$ elde edilir. Burada m yerine m^* , u_0 yerine u_0^* yazılıp $u_0 \in S_*(R)$ olduğu kullanılırsa $[m, u_0]^* = [m, u_0]$ bulunur. Buradan $aR[m, u_0]^* = (0)$ elde edilir. Böylece R nin $*$ –asal halka olması kullanılarak $a = 0$ veya $[m, u_0] = 0$ bulunur. $a \neq 0$ olduğundan $[m, u_0] = 0$ dir. $u_0 \notin Z(R)$ olduğundan $a[t, u_0] \neq 0$ olacak biçimde $t \in R$ vardır. Hipotez ve Not 4.1.2 kullanılırsa her $m \in R$ için $a[t, u_0]mb = a[t, u_0]mb^* = 0$ bulunur. Buradan $a[t, u_0]Rb = a[t, u_0]Rb^* = (0)$ elde edilir. R bir $*$ –asal halka ve $a[t, u_0] \neq 0$ olduğundan $b = 0$ dir.

Lemma 4.1.4: R , 2 –torsion free $*$ –asal halka ve U , R halkasının $*$ –kare kapalı Lie ideali olsun. $T * = * T$ olacak biçimde bir T otomorfizması her $t \in U$ için $[t, T(t)] \in Z(R)$ ve $x \in U \cap S_*(R)$ için $T(x) \neq x$ koşulunu sağlıyorsa $x \in Z(R)$ dir.

İspat: Her $t \in U$ için $[t, T(t)] \in Z(R)$ olduğundan Lemma 4.1.1 den $[t, T(t)] = 0$ dir. $x \in U \cap S_*(R)$ için $T(x) \neq x$ olsun. $[t, T(t)] \in Z(R)$ ifadesinde $y \in U$ olmak üzere t yerine $t + y$ yazılırsa

$$[t + y, T(t + y)] = [t, T(t)] + [t, T(y)] + [y, T(t)] + [y, T(y)] \in Z(R)$$

elde edilir. Burada her $t \in U$ için $[t, T(t)] = 0$ olduğu kullanılırsa her $t, y \in U$ için $[t, T(y)] + [y, T(t)] = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte Lie komütatör işlemi özellikleri kullanıldığında her $t, y \in U$ için

$$[t, T(y)] = [T(t), y] \tag{4.2}$$

olur. $x, y \in U$ için $2xy \in U$ olduğundan (4.2) ifadesinde t yerine x , y yerine $2xy$ yazılırsa her $y \in U, x \in U \cap S_*(R)$ için $[x, T(2xy)] = [T(x), 2xy]$ elde edilir. Burada T nin otomorfizma, R halkasının 2 –torsion free $*$ –asal halka olduğu kullanılıp Lie komütatör işlemi özellikleri dikkate alınır her $y \in U$ ve $x \in U \cap S_*(R)$ için $T(x)[x, T(y)] = x[T(x), y]$ elde edilir. Elde edilen bu eşitlikte (4.2) numaralı eşitlik kullanılıp düzenleme yapıldığında her $y \in U$ ve $x \in U \cap S_*(R)$ için

$$(T(x) - x)[T(x), y] = 0 \tag{4.3}$$

olur. Burada $u \in U$ olmak üzere y yerine $2uy$ alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (T(x) - x)[T(x), 2uy] \\
&= (T(x) - x)[T(x), uy + uy] \\
&= (T(x) - x)([T(x), uy] + [T(x), uy]) \\
&= 2((T(x) - x)[T(x), uy]) \\
&= 2((T(x) - x)u[T(x), y] + (T(x) - x)[T(x), u]y)
\end{aligned}$$

olur. R halkasının 2-torsion free $*$ -asal halka olduğu kullanıldığında her $y, u \in U$ ve $x \in U \cap S_*(R)$ için $(T(x) - x)u[T(x), y] + (T(x) - x)[T(x), u]y = 0$ elde edilir. Burada (4.3) numaralı eşitlik kullanıldığında

$$(T(x) - x)U[T(x), y] = (0), \forall y \in U, x \in U \cap S_*(R) \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece $T^{**} = T$ ve $U^* = U$ olduğundan

$$(T(x) - x)U[T(x), y]^* = (0), \forall y \in U, x \in U \cap S_*(R) \quad (4.5)$$

bulunur. (4.4) ve (4.5) eşitlikleriyle Lemma 4.1.3 den $(x - T(x)) = 0$ veya $[T(x), y] = 0$ elde edilir. Buradan $T(x) \neq x$ olduğundan her $y \in U$ için

$$[T(x), y] = 0 \quad (4.6)$$

bulunur.

Şimdi $0 \neq u_0 \in S_*(R)$ ve $k, r \in R$ alınsın. Not 4.1.2 den $kru_0 \subset Ru_0 \subset U$ olduğundan y yerine kru_0 yazılabilir. Böylece

$$0 = [T(x), kru_0] = [T(x), k]ru_0 + k[T(x), ru_0]$$

elde edilir. Burada (4.6) eşitliği kullanılırsa her $k, r \in R$ ve $u_0 \in S_*(R)$ için $[T(x), k]ru_0 = 0$ elde edilir. Böylece $[T(x), k]Ru_0 = (0)$ elde edilir. Bu eşitlikte $u_0 \in S_*(R)$ olduğu dikkate alınıp $u_0 = u_0^*$ düşünülürse $[T(x), k]Ru_0^* = (0)$ eşitliğine ulaşılır. Dolayısıyla $u_0 \neq 0$ olduğu ve R halkasının 2-torsion free $*$ -asal halka olduğu kullanıldığında her $k \in R$ için $[T(x), k] = 0$ elde edilir. Buradan $[T(x), R] = (0)$ dır. Böylece $T(x) \in Z(R)$ elde edilir. $T(x) \in Z(R)$ ise her $r \in R$ için $T(x)T(r) = T(r)T(x)$ yazılır. T bir otomorfizması olduğundan $T(xr) - T(rx) = T(xr - rx) = 0$ eşitliği

bulunur. Buradan $xr - rx = 0$ olduğu görülür. Dolayısıyla her $r \in R$ için $xr = rx$ bulunur. O halde $x \in Z(R)$ elde edilir.

Teorem 4.1.5: R , 2-torsion free $*$ -asal halka U , R halkasının bir $*$ -kare kapalı Lie ideali ve $1 \neq T, T^* = T$ olacak biçimde her $u \in U$ için $[u, T(u)] \in Z(R)$ olan R halkasının otomorfizması olsun. Eğer $0 \neq u_0 \in S_*(R)$ için $Ru_0 \subset U$ ise $U \subset Z(R)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $[U, U] \neq (0)$ ve her $x \in U$ için $T(x) = x$ olsun. Buradan $T([r, x]) = [r, x]$ yazılır. Bu eşitlik incelenirse

$$T([r, x]) = T(rx - xr) = T(r)T(x) - T(x)T(r) = [T(r), T(x)] = [T(r), x]$$

olur. Böylece her $x \in U, r \in R$ için

$$T([r, x]) = [r, x] = [T(r), x] \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.7) de $u \in U$ olmak üzere r yerine ru yazılırsa

$$\begin{aligned} T([ru, x]) &= T(r[u, x] + [r, x]u) \\ &= T(r[u, x]) + T([r, x]u) \\ &= T(r)T([u, x]) + T([r, x])T(u) \\ &= T(r)[u, x] + [r, x]u \end{aligned}$$

olur. Bu ifadede $[ru, x] = r[u, x] + [r, x]u$ olması kullanılırsa $T(r)[u, x] + [r, x]u = r[u, x] + [r, x]u$ bulunur. Buradan her $x, u \in U, r \in R$ için

$$T(r)[u, x] = r[u, x] \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) ifadesinde $z \in R$ olmak üzere r yerine rz yazılırsa $T(rz)[u, x] = rz[u, x]$ olur ve bu ifade düzenlenirse her $r, z \in R, u, x \in U$ için $0 = T(r)z[u, x] - rz[u, x] = (T(r) - r)z[u, x]$ bulunur. Buradan her $u, x \in U, r \in R$ için

$$(T(r) - r)R[u, x] = (0) \quad (4.9)$$

elde edilir. Buradan u yerine u^* ve x yerine x^* yazılırsa her $r \in R, u, x \in U$ için

$$(T(r) - r)R[u, x]^* = (0) \quad (4.10)$$

yazılır. R $*$ -asal halka olduğundan (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden her $r \in R, u, x \in U$ için

$T(r) - r = 0$ veya $[u, x] = 0$ bulunur. Böylece $[U, U] \neq (0)$ olduğu kullanılırsa her $r \in R$ için $T(r) = r$ elde edilir. Fakat bu sonuç $T \neq 1$ olmasıyla çelişeceğinden her $u \in U$ için $T(u) \neq u$ dır.

Kabul edelim ki $T, U \cap S_*(R)$ üzerinde birim dönüşüm olsun. Öte yandan her $x \in U$ için $x - x^*, x + x^* \in U \cap S_*(R)$ dır. O zaman $T(x - x^*) = x - x^*, T(x + x^*) = x + x^*$ olması kullanılırsa

$$T(x - x^*) + T(x - x^*) = (x - x^*) + (x - x^*)$$

$$T((x - x^*) + (x + x^*)) = x - x^* + x + x^*$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa $T(2x) = 2x$ elde edilir. Buradan $2(T(x) - x) = 0$ olur. Burada R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $T(x) - x = 0$ elde edilir. Böylece her $x \in U$ için $T(x) = x$ bulunur Ancak bu sonuç $T(x) \neq x$ olmasıyla çelişir. O halde $T, U \cap S_*(R)$ üzerinde birim dönüşüm değildir. Bu durumda $x \in U \cap S_*(R)$ için $T(x) \neq x$ olduğu için Lemma 4.1.4 den $x \in Z(R)$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $y \notin Z(R)$ olacak biçimde $0 \neq y \in U \cap S_*(R)$ var olsun. Lemma 4.1.4 den $T(y) = y$ dir. Üstelik her $x \in U$ için $2xy \in U$ olacağından $T(2xy) = 2xy$ dir. T bir otomorfizma olduğu için $0 = 2T(xy) - 2xy = 2(T(xy) - xy)$ yazılır. Burada R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $T(xy) - xy = 0$ elde edilir. Buradan $0 = T(x)y - xy = (T(x) - x)y$ bulunur. Bulunan eşitlik soldan $r \in R$ ile çarpılırsa $0 = r(T(x) - x)y$ elde edilir. Öte yandan $x \in Z(R)$ ise $T(x) \in Z(R)$ dir. $T(x) \in Z(R)$ ise her $r \in R$ için $(T(x) - x)ry = 0$ olur. Buradan her $x \in U, r \in R$ için

$$(T(x) - x)Ry = (0) \tag{4.11}$$

bulunur. $y^* = y$ olduğundan (4.11) ifadesinden

$$(T(x) - x)Ry^* = (0) \tag{4.12}$$

olur. R $*$ -asal halka olduğundan (4.11) ve (4.12) ifadelerinden $T(x) = x$ veya $y = 0$ elde edilir. Bu durum $T(x) \neq x$ ve $y \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde her $y \in U \cap S_*(R)$ için $y \in Z(R)$ dir. O halde $U \cap S_*(R) \subset Z(R)$ elde edilir. Üstelik her $x \in U$ için $x - x^*, x + x^* \in U \cap S_*(R)$ dır. Buradan $x - x^* + x + x^* = 2x \in Z(R)$ olur. Eğer $2x \in Z(R)$ ve

karakteristik ikiden farklı olduğundan *Uyarı 2.28* den her $x \in U$ için $x \in Z(R)$ bulunur. O halde $U \subset Z(R)$ elde edilir.

Teorem 4.1.6: R , 2 –torsion free $*$ –asal halka, $0 \neq J$, R halkasının bir $*$ –ideali ve $1 \neq T, T**T$ olacak biçimde her $x \in J$ için $[x, T(x)] \in Z(R)$ olan R halkasının otomorfizması ise R halkası değişmelidir.

İspat: J $*$ –ideal ise her $a \in J$ için $a^2 \in J$ dır. Ayrıca J $*$ –ideal ise aynı zamanda $*$ –Lie idealdir. O halde J $*$ –kare kapalı Lie idealdir. Aynı zamanda her $a \in J$ için $Ra \subset J$ dır. Ayrıca $a \in J$ için $a - a^*$ ve $a + a^*$, $S_*(R)$ nin elemanlarıdır. Dolayısıyla $R(a - a^*) \subset J$ ve $R(a + a^*) \subset J$ olduğundan *Teorem 4.1.5* ten $J \subset Z(R)$ dir. Bu durumda her $x \in J$ için $J \subset Z(R)$ olduğundan $x \in Z(R)$ olur.

Kabul edelim ki ki her $x \in J$ için $x^2 = 0$ olsun. x yerine $(x^* + x)$ yazılırsa $(x^* + x) \in Z(R)$ ve $(x^* + x)^2 = 0$ elde edilir. Buradan $(x^* + x)(x^* + x) = 0$ dır. $r \in R$ olmak üzere son bulunan eşitlik soldan r ile çarpıldığında $r(x^* + x)(x^* + x) = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte $(x^* + x) \in Z(R)$ olması kullanılırsa $(x^* + x)r(x^* + x) = 0$ olur. Böylece her $x \in J$ için yapılabileceğinden $(x^* + x)R(x^* + x) = (0)$ elde edilir. Burada $(x^* + x) \in S_*(R)$ olması kullanılırsa her $x \in J$ için

$$(x^* + x)R(x^* + x)^* = (0)$$

elde edilir. Bu durumda R $*$ –asal halka olduğundan $x^* + x = 0$ dır. Buradan $x^* = -x$ dir. Bulunan bu eşitlikte $x^2 = 0$ olması kullanılırsa $xx^* = 0$ elde edilir. Bu eşitlik $s \in R$ olmak üzere soldan s ile çarpılıp $x \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa $sxx^* = 0$ bulunur. Dolayısıyla her $x \in J$ için $xRx^* = (0)$ dır. Buradan $x = 0$ elde edilir. Her $x \in J$ için $x = 0$ olması $J = (0)$ anlamına gelmektedir. J $*$ –idealinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani her $x \in J$ için $x^2 \neq 0$ olmalıdır.

Şimdi $k, l \in R$ olmak üzere x^2 soldan kl ile çarpılıp her $x \in J$ için $x \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa

$$x^2 kl = x(xk)l = x(kx)l = (xk)(xl) = (kx)(xl) = (xl)(kx) = x(lk)x = x^2 lk$$

eşitlikleri elde edilir. Yani $x^2 \in Z(R)$ dir. Buradan her $k, l \in R$ için $x^2[k, l] = 0$ dır. Keyfi $m \in R$ için son bulunan ifade soldan m ile çarpılıp $x^2 \in Z(R)$ olduğu kullanıldığında $x^2 m[k, l] = 0$ dır. Dolayısıyla

$$x^2 R[k, l] = (0)$$

elde edilir. R halkası $*$ –asal halka olduğundan $k^*, l^* \in R$ dir. Böylece involüsyon ve Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa $x^2 R[k, l]^* = (0)$ elde edilir. R halkası $*$ –asal

halka ve $x^2 \neq 0$ olduğundan her $k, l \in R$ için $[k, l] = 0$ dir. Dolayısıyla R halkası değişmelidir.

Lemma 4.1.7: R , 2-torsion free $*$ -asal halka ve I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali olsun. O zaman $a, b \in R$ için $alb = alb^* = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dir.

İspat: $a, b \in R$ için $alb = alb^* = (0)$ ve $a \neq 0$ olsun. Kabul edelim ki her $x \in I$ için $ax = 0$ olsun. Bu durumda I $*$ -ideal olduğundan her $r \in R$ için $rx \in I$ dir. O halde x yerine rx yazılırsa $arx = 0$ olur. Buradan $aRx = aRx^* = (0)$ eşitlikleri elde edilir. R $*$ -asal halka olduğundan $a = 0$ veya her $x \in I$ için $x = 0$ dir. Ancak bu durum I sıfırdan farklı bir $*$ -ideal olduğundan çelişkiye sebep olur. O halde $a \neq 0$ olmak üzere $x \in I$ için $ax \neq 0$ olacak biçimde bir $x \in I$ vardır. Üstelik $IR \subset I$ olduğundan ve hipotezden $aIRb = aIRb^* = (0)$ dir. Özel olarak $x \in I$ için $axRb = axRb^* = (0)$ olur. Böylece R $*$ -asal halka ve $ax \neq 0$ olduğundan $b = 0$ elde edilir.

Uyarı 4.1.8: R , $*$ -asal halka ve I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali olsun. Eğer her $t \in I, r \in R$ için $[t, r] = 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: I bir $*$ -ideal olduğundan her $t \in I, k \in R$ için $tk \in I$ dir. O zaman hipotezden $[tk, r] = 0$ olur. Lie komütatör işlemi özelliğinden $[tk, r] = t[k, r] + [t, r]k = 0$ elde edilir. Bu denklemde $[t, r] = 0$ olması kullanılırsa her $t \in I, k, r \in R$ için $t[k, r] = 0$ olur. Dolayısıyla $I[k, r] = (0)$ dir. Her $m \in I$ için $mI[k, r] = m^*I[k, r] = (0)$ dir. I $*$ -ideali sıfırdan farklı olduğundan ve Lemma 4.1.7 den her $k, r \in R$ için $[k, r] = 0$ dir. O halde R halkası değişmelidir.

Teorem 4.1.9: R , 2-torsion free $*$ -asal halka, I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d , R halkasının sıfırdan farklı bir türevi olsun. $r \in S_*(R)$ olmak üzere her $x \in I$ için $[d(x), r] = 0$ ise $r \in Z(R)$ dir. Üstelik $d(I) \subset Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Kabul edelim ki $r \in S_*(R)$ olmak üzere her $x \in I$ için $[d(x), r] = 0$ olsun. I $*$ -ideal olduğundan her $a, b \in I$ için $ab \in I$ dir. Dolayısıyla hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= [d(ab), r] \\ &= [d(a)b + ad(b), r] \\ &= d(a)[b, r] + [d(a), r]b + a[d(b), r] + d(b)[a, r] \end{aligned}$$

olur. Bu denklemde $r \in S_*(R)$ olmak üzere her $x \in I$ için $[d(x), r] = 0$ olduğu kullanılırsa her $a, b \in I$ için

$$d(a)[b, r] + [a, r]d(b) = 0 \tag{4.13}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.13) eşitliğinde b yerine br alınırsa

$$d(a)[br, r] + [a, r]d(br) = d(a)b[r, r] + [a, r]bd(r) + d(a)[b, r]r + [a, r]d(b)r$$
 olur. Bu denklemde (4.13) eşitliği ile Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa her $a, b \in I$ için $[a, r]bd(r) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $a \in I$ için

$$[a, r]Id(r) = (0) \quad (4.14)$$

olur. Ayrıca I $*$ -ideal olduğundan (4.14) eşitliğinde a yerine a^* alınıp $r \in S_*(R)$ olduğu kullanılırsa her $a \in I$ için

$$[a, r]^*Id(r) = (0) \quad (4.15)$$

olur. Böylece Lemma 4.1.7 den her $a \in I$ için $[a, r] = 0$ veya $d(r) = 0$ dır.

Kabul edelim ki her $a \in I$ için $[a, r] = 0$ olsun. O halde $t \in R$ olmak üzere $[ta, r] = t[a, r] + [t, r]a = 0$ olur. Elde edilen bu son denklemde $[a, r] = 0$ olması kullanılırsa her $t \in R, a \in I$ için $[t, r]a = 0$ olur. Buradan her $t \in R$ için $[t, r]I = (0)$ elde edilir. Böylece her $b \in I$ için $[t, r]Ib = (0)$ ve $[t, r]Ib^* = (0)$ eşitlikleri elde edilir. I $*$ -idealinin sıfırdan farklı olduğu ve Lemma 4.1.7 den her $t \in R$ için $[t, r] = 0$ dır. Yani $r \in Z(R)$ dir.

Şimdi de kabul edelim ki $d(r) = 0$ olsun. Hipotez ve $d(r) = 0$ olması kullanılırsa her $a \in I$ için

$$d([a, r]) = [d(a), r] + [a, d(r)] = 0 \quad (4.16)$$

olur. Öbür yandan (4.13) eşitliğinde $c \in I$ olmak üzere b yerine bc yazılırsa $d(a)[bc, r] + [a, r]d(bc) = d(a)b[c, r] + d(a)[b, r]c + [a, r]d(b)c + [a, r]bd(c) = 0$ olur. Son elde edilen bu denklemle beraber (4.13) eşitliği kullanılırsa her $a, b \in I$ için $d(a)b[c, r] + [a, r]bd(c) = 0$ olur. Burada c yerine $[c, r]$ yazılırsa $d(a)b[[c, r], r] + [a, r]bd([c, r]) = 0$ olur. Elde edilen bu denklem ile birlikte (4.16) eşitliği kullanılırsa her $a, b, c \in I$ için $d(a)b[[c, r], r] = 0$ olur. Yani her $a, c \in I$ için

$$d(a)I[[c, r], r] = (0) \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) eşitliğinde c yerine c^* yazılıp $r \in S_*(R)$ olduğu kullanılırsa her $a, c \in I$ için

$$d(a)I[[c, r], r]^* = (0) \quad (4.18)$$

olur. Böylece 4.17 ve 4.18 eşitlikleri ile *Lemma 4.1.7* den her $a \in I$ için $d(a) = 0$ veya her $c \in I$ için $[[c, r], r] = 0$ dır. Eğer her $a \in I$ için $d(a) = 0$ ise *Uyarı 2.49* dan $d = 0$ olur. Fakat $d \neq 0$ olduğu için bu durum çelişkiye sebep olur. O halde her $c \in I$ için $[[c, r], r] = 0$ dır. Burada c yerine ca yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [[ca, r], r] \\ &= [c[a, r], r] + [[c, r]a, r] \\ &= c[[a, r], r] + [c, r][a, r] + [c, r][a, r] + [[c, r], r]a \end{aligned}$$

dır. Elde edilen bu son denklemde her $c \in I$ için $[[c, r], r] = 0$ olması kullanılırsa $2[c, r][a, r] = 0$ elde edilir. R halkası 2-torsion free olduğundan her $a, c \in I$ için $[c, r][a, r] = 0$ bulunur. Burada $t \in R$ olmak üzere c yerine tc yazılırsa

$$0 = [tc, r][a, r] = [t, r]c[a, r] + t[c, r][a, r]$$

dır. Burada $[c, r][a, r] = 0$ olması kullanılırsa her $a, c \in I, t \in R$ için $[t, r]c[a, r] = 0$ olur. Bu durumda her $a \in I, t \in R$ için

$$[t, r]I[a, r] = (0) \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) eşitliğinde a yerine a^* yazılıp $r \in S_*(R)$ olması kullanılırsa her $a \in I, t \in R$ için

$$[t, r]I[a, r]^* = (0) \quad (4.20)$$

olur. Böylece *Lemma 4.1.7* den her $t \in R$ için $[t, r] = 0$ veya her $a \in I$ için $[a, r] = 0$ dır. Eğer her $t \in R$ için $[t, r] = 0$ ise $r \in Z(R)$ dir. Eğer her $a \in I$ için $[a, r] = 0$ ise $t \in R$ için $[ta, r] = t[a, r] + [t, r]a = 0$ olur. Burada $[a, r] = 0$ olması kullanılırsa her $k \in R, a \in I$ için $[t, r]a = 0$ bulunur. O halde her $k \in R$ için $[k, r]I = (0)$ elde edilir. Böylece *Lemma 4.1.7* den her $k \in R$ için $[k, r] = 0$ dır. Bu ise $r \in Z(R)$ olur.

Şimdi de kabul edelim ki $d(I) \subset Z(R)$ olsun. $r \in R$ olmak üzere $r \in S_*(R)$ ise hipotezden her $x \in I$ için $[d(x), r] = 0$ dır. Buradan $r \in Z(R)$ bulunur. Dolayısıyla $S_*(R) \subset Z(R)$ dir. Üstelik her $r \in R$ için $r + r^*, r - r^* \in S_*(R)$ olduğundan $r + r^*, r -$

$r^* \in Z(R)$ dir. $Z(R)$, R halkasının bir althalkası olduğundan $2r \in Z(R)$ olur. Uyarı 2.28 den $r \in Z(R)$ dir. Yani R halkası değişmelidir.

Teorem 4.1.10: R , 2 –torsion free $*$ –asal halka, d , R halkasının sıfırdan farklı bir türevi ve $a \in S_*(R)$ olsun. Eğer $d([R, a]) = 0$ ise $a \in Z(R)$ dir. Üstelik her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: $d([R, a]) = 0$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d([r, a]) = [d(r), a] + [r, d(a)] = 0$ dır. Kabul edelim ki $d(a) = 0$ olsun. O halde her $r \in R$ için $[d(r), a] = 0$ olur. Burada $a \in S_*(R)$ olduğundan Teorem 4.1.9 dan $a \in Z(R)$ dir.

Şimdi de kabul edelim ki $d(a) \neq 0$ olsun. Hipotez ve türev tanımı kullanılırsa

$$0 = d([ar, a]) = d(a[r, a]) + d([a, a]r) = d(a)[r, a] + ad([r, a])$$

bulunur. Burada $d([r, a]) = 0$ olması kullanılırsa her $r \in R$ için $d(a)[r, a] = 0$ olur. Elde edilen bu son denklemden $t \in R$ olmak üzere r yerine rt alınırsa

$$0 = d(a)[rt, a] = d(a)r[t, a] + d(a)[r, a]t$$

elde edilir. Burada $d(a)[r, a] = 0$ olması kullanılırsa her $r, t \in R$ için $d(a)r[t, a] = 0$ bulunur. O halde her $t \in R$ için

$$d(a)R[t, a] = (0) \tag{4.21}$$

elde edilir. Üstelik R $*$ –asal halka olduğundan (4.21) eşitliğinde t yerine t^* ve $a \in S_*(R)$ olduğu kullanılırsa her $t \in R$ için

$$d(a)R[t, a]^* = (0) \tag{4.22}$$

bulunur. R $*$ –asal halka olduğundan $d(a) = 0$ veya her $t \in R$ için $[t, a] = 0$ dır. $d(a) \neq 0$ olduğundan O halde her $t \in R$ için $[t, a] = 0$ olur. Yani $a \in Z(R)$ dir.

Kabul edelim ki her $x, y \in R$ için $d([x, y]) = 0$ dır. $y \in S_*(R)$ ise hipotezden her $x \in R$ için $d([x, y]) = 0$ dır. O halde edilen sonuçtan $y \in Z(R)$ bulunur. Yani $S_*(R) \subset Z(R)$ dir. Üstelik her $y \in R$ için $y + y^*, y - y^* \in S_*(R)$ olduğundan $y + y^*, y - y^* \in Z(R)$ dir. $Z(R)$, R halkasının bir althalkası olduğundan $2y \in Z(R)$ dir. Uyarı 2.28 den $y \in Z(R)$ dir. O halde R halkası değişmelidir.

4.2 $*$ –Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik

Bu bölümde L. Oukhtite ve S.Salhi'nin 2006a yılında yaptıkları “ $*$ –Asal Halkalarda Türevler ve Değişmelilik” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 4.2.1: R bir $*$ –asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali ve d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. Her $x \in I$ için $[x, R]Id(x) = (0)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Her $x \in I$ için $[x, R]Id(x) = (0)$ olsun. I $*$ –ideal olduğundan her $x \in I$ için $x^* \in I$ dir. O halde $x - x^* \in I$ olur. Buradan $x - x^* = t$ denilip gerekli düzenlemeler yapılırsa $t^* = -t$ elde edilir. Dolayısıyla $t \in I \cap S_*(R)$ dir. Hipotezden her $r \in R$ için $[t, r]Id(t) = (0)$ olur. Burada t yerine t^* yazılıp $t \in S_*(R)$ olduğu kullanılırsa $[t, r]^*Id(t) = (0)$ elde edilir. Lemma 4.1.7 den her $r \in R$ için $[t, r] = 0$ veya $d(t) = 0$ dır.

Kabul edelim ki $d(t) = 0$ olsun. Bu durumda $d(x - x^*) = 0$ olur. d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan türevi olduğundan $d(x) = d(x^*) = d(x)^*$ elde edilir. O halde hipotezden $[x, R]Id(x) = [x, R]Id(d(x)^*) = (0)$ olur. Burada R halkasının bir $*$ –asal halka olması kullanılırsa her $x \in I$ için $[x, R] = (0)$ veya $d(x) = 0$ bulunur.

Diğer taraftan kabul edelim ki her $r \in R$ için $[t, r] = 0$ olsun. Dolayısıyla her $r \in R$ için $[x, r] = [x, r]^*$ dır. Bu eşitlik hipotez ve son elde edilen ifade kullanılarak düzenlenirse

$$[x, R]Id(x) = [x, R]^*Id(x) = (0)$$

elde edilir. Burada R halkasının bir $*$ –asal halka olması kullanılırsa her $x \in I$ için $[x, R] = (0)$ veya $d(x) = 0$ olur.

Dolayısıyla her $x \in I$ için

$$[x, R] = (0) \text{ veya } d(x) = 0$$

elde edilir.

şimdi $A = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid x \in Z(R)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , I nın altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $I = A$ veya $I = B$ dir.

Kabul edelim ki $I = A$ olsun. O halde her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Burada Uyarı 2.49 dan $d = 0$ bulunur. Ancak bu sonuç d türevinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. O halde $I = B$ dir.

Bu durumda her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ olur. Her $r, s \in R$ olmak üzere her $x \in I$ için $x \in Z(R)$ olduğu kullanılırsa $rsx = rxs = xrs = srx = srx$ bulunur. Burada Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa her $x \in I$ için $[r, s]x = (0)$ sağlanır. O halde $[r, s]I = (0)$ olur. Bu eşitlik $m \in R$ olmak üzere sağdan m ile çarpılırsa $[r, s]Im = (0)$ bulunur. Burada m yerine m^* yazılırsa $[r, s]Im^* = (0)$ elde edilir. Son elde edilen iki

eşitlik birlikte düşünülüp *Lemma 4.1.7* kullanılırsa her $r, s, m \in R$ için $[r, s] = (0)$ veya $m = 0$ dır. Her $m \in R$ için $m = 0$ olması $R = (0)$ anlamına gelmektedir. Ancak bu sonuç çelişkiye sebep olur. Dolayısıyla her $r, s \in R$ için $[r, s] = 0$ dır. Yani R halkası değişmelidir.

Lemma 4.2.2: R bir $*$ –asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali ve d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. Her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Hipotezde $x, y \in I$ için x yerine $x + y$ elemanı yazılırsa $[d(x + y), x + y] = 0$ olur. Burada türev tanımı ve Lie komütatör özellikleri kullanılıp, her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in I$ için

$$[d(x), y] + [d(y), x] = 0 \quad (4.23)$$

elde edilir. (4.23) eşitliğinde y yerine yx yazılırsa

$$0 = [d(x), y]x + y[d(x), x] + d(y)[x, x] + [d(y), x]x + y[d(x), x] + [y, x]d(x)$$

olur. Bu denklemde (4.23) eşitliği ve her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[y, x]d(x) = 0$ elde edilir. Burada $r \in R$ olmak üzere y yerine ry yazılıp her $x, y \in I$ için $[y, x]d(x) = 0$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in I$ ve her $r \in R$ için $[x, r]yd(x) = 0$ elde edilir. Buradan her $y \in I$ için

$$[x, r]Id(x) = (0)$$

olur. O halde *Lemma 4.2.1* den R halkası değişmelidir.

Lemma 4.2.3: R halkası karakteristiği ikiden farklı olan bir $*$ –asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali ve d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. Eğer $d^2(I) = 0$ ise $d = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $d^2(I) = 0$ olsun. Her $x, y \in I$ için $xy \in I$ olduğundan hipotezden $d^2(xy) = 0$ olur. Bu ise $d(d(xy)) = 0$ demektir. Buradan türev tanımı ve her $x \in I$ için $d^2(x) = 0$ olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için $2d(x)d(y) = 0$ elde edilir. Bu eşitlikte R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için

$$d(x)d(y) = 0 \quad (4.24)$$

olur. (4.24) eşitliğinde $k \in I$ olmak üzere x yerine xk yazılırsa

$$0 = d(xk)d(y) = d(x)kd(y) + xd(k)d(y)$$

elde edilir. Burada (4.24) eşitliği kullanılırsa her $x, y, k \in I$ için $d(x)kd(y) = 0$ olur. Dolayısıyla her $x, y \in I$ için

$$d(x)Id(y) = (0) \quad (4.25)$$

elde edilir. Üstelik I $*$ -ideal olduğundan her $y \in I$ için. (4.25) eşitliğinde y yerine y^* yazılırsa ve d türevinin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için

$$d(x)Id^*(y) = (0) \quad (4.26)$$

elde edilir. Buradan (4.25) ve (4.26) eşitlikleri kullanılırsa *Lemma 4.1.7* den her $x, y \in I$ için $d(I) = 0$ olur. *Uyarı 2.47* den $d = 0$ dır.

Lemma 4.2.4: R bir $*$ -asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali, d_1 ve d_2 , R halkasının $*$ ile değişmeli olan türevleri olsun. $d_2(I) \subset I$ ve $d_1d_2(I) = 0$ ise $d_1 = 0$ veya $d_2 = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $d_2(I) \subset I$ ve $d_1d_2(I) = 0$ olsun. Her $u, v \in I$ için $uv \in I$ olduğundan. hipotezde u yerine uv yazılırsa $d_1d_2(uv) = 0$ olur. Bu eşitlikte türev tanımı kullanılırsa her $u, v \in I$ için

$$d_1(d_2(u))v + d_2(u)d_1(v) + d_1(u)d_2(v) + ud_1(d_2(v)) = 0 \quad (4.27)$$

elde edilir. (4.27) eşitliğinde $d_1d_2(I) = 0$ olması kullanılırsa her $u, v \in I$ için $d_1(u)d_2(v) + d_2(u)d_1(v) = 0$ olur. $d_2(I) \subset I$ olduğundan son elde edilen denklemde u yerine $d_2(u)$ alınırsa

$$0 = d_2(d_2(u))d_1(v) + d_1(d_2(u))d_2(v)$$

olur. Burada yine $d_1d_2(I) = 0$ olması kullanılırsa her $u, v \in I$ için

$$d_2^2(u)d_1(v) = 0 \quad (4.28)$$

eşitliği elde edilir (4.28) eşitliğinde $w \in R$ olmak üzere v yerine vw yazılırsa $d_2^2(u)d_1(vw) = 0$ bulunur. Bu durumda her $u, v, w \in I$ için $d_2^2(u)vd_1(w) + d_2^2(u)d_1(v)w = 0$ elde edilir. Son elde edilen denklemde (4.28) eşitliği kullanılırsa her $u, v, w \in I$ için $d_2^2(u)vd_1(w) = 0$ olur. Bu durumda her $u, w \in I$ için

$$d_2^2(u)Id_1(w) = (0) \quad (4.29)$$

elde edilir. O halde (4.29) eşitliğinde w yerine w^* yazılıp, d türevinin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $u, w \in I$ için

$$d_2^2(u)Id_1^*(w) = (0) \quad (4.30)$$

olur. Burada (4.29) ve (4.30) eşitlikleri birlikte düşünülürse ve *Lemma 4.1.7* kullanılırsa her $u \in I$ için $d_2^2(u) = 0$ veya her $w \in I$ için $d_1(w) = 0$ elde edilir. Eğer her $w \in I$ için $d_1(w) = 0$ ise *Uyarı 2.49* dan $d_1 = 0$ elde edilir. Eğer $u \in I$ için $d_2^2(u) = 0$ ise *Lemma 4.2.3* ten $d_2 = 0$ bulunur.

Lemma 4.2.5: R bir $*$ –asal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali ve d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. $a \in I \cap S_*(R)$ için $[d(I), a] \subset Z(R)$ ise $a \in Z(R)$ dir.

İspat: $a \in I \cap S_*(R)$ için $[d(I), a] \subset Z(R)$ olsun. Buradan $a^2 \in I$ olmak üzere hipotezden $[d(a^2), a] \in Z(R)$ olur. Bu durumda

$$[d(a^2), a] = [d(a), a]a + d(a)[a, a] + a[d(a), a] + [a, a]d(a) \in Z(R)$$

elde edilir. Bu eşitlikte hipotez ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $a[d(a), a] \in Z(R)$ elde edilir. O halde her $r \in R$ için $[a[d(a), a], r] = 0$ dir. Bu denklemde hipotez kullanılırsa $[a, r][d(a), a] = 0$ elde edilir. Burada $[d(a), a] \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $r \in R$ için

$$[a, r]R[d(a), a] = (0) \quad (4.31)$$

bulunur. Üstelik R $*$ –asal halka olduğundan her $r \in R$ için (4.31) eşitliğinde r yerine r^* yazılırsa $a \in S_*(R)$ ve d nin $*$ ile değişmeli olması kullanılarak her $r \in R$ için

$$[a, r]^*R[d(a), a] = (0) \quad (4.32)$$

elde edilir. R $*$ –asal halka olduğundan (4.31) ve (4.32) eşitliklerinden her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ veya $[d(a), a] = 0$ elde edilir.

Eğer her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ ise $a \in Z(R)$ olur. Yani ispat tamamlanır. Kabul edelim ki $[d(a), a] = 0$ olsun. Her $b \in I$ için hipotezden $[d([a, b]), a] = [[a, d(b)], a] + [[d(a), b], a] \in Z(R)$ elde edilir. Buradan her $b \in I$ için

$$[[d(a), b], a] \in Z(R) \quad (4.33)$$

olur. (4.33) eşitliğinde b yerine ab yazılırsa $[[d(a), ab], a] \in Z(R)$ bulunur. Buradan $[d(a), a] = 0$ olması ve hipotez kullanılırsa her $b \in I$ için $a[[d(a), b], a] \in Z(R)$ elde edilir. O halde her $r \in R$ için

$$0 = [a[[d(a), b], a], r] = [a, r][[d(a), b], a] + a[[[d(a), b], a], r]$$

dır. Elde edilen bu son denklemde (4.33) eşitliği kullanılırsa her $r \in R, b \in I$ için $[a, r][[d(a), b], a] = 0$ bulunur. Böylece (4.33) eşitliğinden her $r \in R, b \in I$ için

$$[a, r]R[[d(a), b], a] = (0) \quad (4.34)$$

olur. Üstelik R $*$ -asal halka olduğundan her $r \in R$ için (4.34) eşitliğinde r yerine r^* yazılıp, $a \in S_*(R)$ ve d türevinin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa

$$[a, r]^*R[[d(a), b], a] = (0) \quad (4.35)$$

olur. O zaman R $*$ -asal halka olduğundan (4.34) ve (4.35) eşitliklerinden her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ veya her $b \in I$ için $[[d(a), b], a] = 0$ dır.

Eğer her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ ise ispat tamamlanır. Kabul edelim ki her $b \in I$ için $[[d(a), b], a] = 0$ olsun. Bu durumda Jacobi özdeşliği kullanılırsa her $b \in I$ için

$$[[d(a), b], a] + [[b, a], d(a)] + [[a, d(a)], b] = 0$$

olur. Böylece $[[d(a), b], a] = 0$ kullanılırsa

$$[[b, a], d(a)] = 0$$

elde edilir. O halde d_a , her $b \in I$ için $d_a(b) = [b, a]$ biçiminde a ile belirli iç türev olmak üzere $[[b, a], d(a)] = (d_{d(a)}d_a)(b) = 0$ dır. Üstelik I $*$ -ideal olduğundan $d_a(I) \subset I$ dır ve d_a ile $d_{d(a)}$ $*$ ile değişmelidir. O halde Lemma 4.2.4 ten $d_a = 0$ veya $d_{d(a)} = 0$ olur. Eğer $d_a = 0$ ise $a \in Z(R)$ dir.

Kabul edelim ki $d_{d(a)} = 0$ olsun. O zaman $d(a) \in Z(R)$ olur. Buradan her $b \in I$ için $ab \in I$ ile hipotezden $[d(ab), a] \in Z(R)$ elde edilir. Bu durumda her $b \in I$ için

$$[d(ab), a] = [d(a), a]b + d(a)[b, a] + a[d(b), a] + [a, a]d(b) \in Z(R)$$

dir. Bu ifadede $d(a)[b, a] + a[d(b), a] \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $b \in I$ için $[d(a)[b, a] + a[d(b), a], a] = 0$ olur. Burada $d(a) \in Z(R)$ olması ve hipotez kullanılırsa her $b \in I$ için

$$d(a)[[b, a], a] = 0 \quad (4.36)$$

bulunur. (4.36) eşitliğinde $d(a) \in Z(R)$ olduğundan

$$d(a)R[[b, a], a] = (0) \quad (4.37)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $a \in S_*(R)$ ve d nin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $b \in I$ için

$$d^*(a)R[[b, a], a] = (0) \quad (4.38)$$

bulunur. (4.37) ile (4.38) eşitlikleri ve R $*$ -asal halka olması kullanılırsa $d(a) = 0$ veya her $b \in I$ için $[[b, a], a] = 0$ olur.

Kabul edelim ki her $b \in I$ için $[[b, a], a] = 0$ olsun. Bu durumda $[[b, a], a] = d_a^2(b) = 0$ olduğundan Lemma 4.2.3 ten $d_a = 0$ elde edilir. Buradan $a \in Z(R)$ dir.

Şimdi de kabul edelim ki $d(a) = 0$ olsun. Hipotezden her $b \in I$ için $[d(ab), a] \in Z(R)$ dir. Bu ifadede $d(a) = 0$ olması kullanılırsa $a[d(b), a] \in Z(R)$ elde edilir. Buradan her $r \in R$ için $[a[d(b), a], r] = 0$ olur. Bu son eşitlikle hipotez kullanılırsa her $b \in I, r \in R$ için

$$[a, r][d(b), a] = 0 \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) eşitliği ile hipotezden her $b \in I, r \in R$ için

$$[a, r]R[d(b), a] = (0) \quad (4.40)$$

olur. (4.40) eşitliğinde r yerine r^* yazılıp, $a \in S_*(R)$ ve d türevinin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $b \in I, r \in R$ için

$$[a, r]^* R[d(b), a] = (0) \quad (4.41)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece (4.40) ile (4.41) eşitlikleri ve R $*$ –asal halka olduğundan her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ veya her $b \in I$ için $[d(b), a] = 0$ dır. Her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ ise $a \in Z(R)$ dir.

Kabul edelim ki her $b \in I$ için $[d(b), a] = 0$ olsun. Bu durumda $c \in I$ olmak üzere b yerine $b[c, a]$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= [d(b[c, a]), a] \\ &= d(b)[[c, a], a] + b([d(c), a] + [c, d(a)], a) + [b, a]([d(c), a] + [c, d(a)]) \end{aligned}$$

olur. Burada her $b \in I$ için $[d(b), a] = 0$ olması kullanılırsa her $b, c \in I$ için $d(b)[[c, a], a] = 0$ bulunur. Buradan $k \in I$ olmak üzere b yerine bk yazılırsa

$$d(b)k[[c, a], a] + bd(k)[[c, a], a] = 0$$

elde edilir. Bu denklemde her $b, c \in I$ için $d(b)[[c, a], a] = 0$ olması kullanılırsa her $k \in I$ için $d(b)k[[c, a], a] = 0$ olur. Yani her $b, c \in I$ için

$$d(b)I[[c, a], a] = (0) \quad (4.42)$$

olur. Üstelik I $*$ –ideal olduğundan $b \in I$ için b yerine b^* yazılıp, d nin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $b, c \in I$ için

$$d(b)^* I[[c, a], a] = (0) \quad (4.43)$$

bulunur. Böylece I $*$ –ideal olduğundan (4.42) ve (4.43) eşitlikleri beraber kullanılırsa *Lemma 4.1.7* den her $b \in I$ için $d(b) = 0$ veya her $c \in I$ için $[[c, a], a] = 0$ olur.

Kabul edelim ki her $b \in I$ için $d(b) = 0$ olsun. Bu durumda *Uyarı 2.47* den $d = 0$ dır. Ancak bu sonuç $d \neq 0$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $c \in I$ için $[[c, a], a] = 0$ dır. Buradan her $c \in I$ için $[[c, a], a] = d_a^2(c) = 0$ olur. Böylece $d_a^2 = 0$ dır. O halde *Lemma 4.2.3* den $d_a = 0$ olur. Yani $a \in Z(R)$ dir.

Teorem 4.2.6: R karakteristiği ikiden farklı bir $*$ –asal halka, I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali ve d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. Her $x \in I$ için $[d(x), x] \in Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: Her $x \in I$ için $[d(x), x] \in Z(R)$ olsun. Her $x, y \in I$ için $x + y \in I$ olduğundan hipotezden $[d(x + y), x + y] \in Z(R)$ olur. Bu ifadede her $x \in I$ için $[d(x), x] \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[d(x), y] + [d(y), x] \in Z(R)$ elde edilir. Son elde edilen ifadede y yerine x^2 yazılıp hipotez kullanılırsa her $x \in I$ için $2x[d(x), x] \in Z(R)$ olur. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa Bu durumda her $r \in R$ için

$$[x[d(x), x], r] = 0$$

dır. Buradan her $r \in R$, $x \in I$ için $[r, x][d(x), x] = 0$ elde edilir. Elde edilen bu son denklemde r yerine $d(x)$ yazılırsa $[d(x), x]^2 = 0$ olur. Bu durumda her $x \in I$ için $[d(x), x] \in Z(R)$ olması kullanılırsa

$$[d(x), x]R[d(x), x] = (0) \quad (4.44)$$

elde edilir. (4.44) eşitliği sağdan $[d(x), x]^*$ ile çarpılırsa

$$[d(x), x]R[d(x), x][d(x), x]^* = (0) \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. O zaman R $*$ –asal halka olduğundan her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ veya $[d(x), x][d(x), x]^* = 0$ dır.

Kabul edelim ki her $x \in I$ için $[d(x), x][d(x), x]^* = 0$ olsun. Bu durumda $[d(x), x] \in Z(R)$ olması kullanılırsa

$$[d(x), x]R[d(x), x]^* = (0) \quad (4.46)$$

elde edilir. Böylece R $*$ –asal halka olduğundan (4.44) ve (4.46) eşitliklerinden her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ bulunur. O halde *Lemma 4.2.2* den R halkası değişmelidir.

Teorem 4.2.7: R , karakteristiği ikiden farklı olan bir $*$ –asal halka ve I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali olsun. d_1 ile d_2 , R halkasının $*$ ile değişmeli olan türevleri ve her $x \in I$ için $d_1(x)x - xd_2(x) \in Z(R)$ olmak üzere, eğer d_2 sıfırdan farklı ise R halkası değişmelidir.

İspat: d_2 sıfırdan farklı olsun. I bir $*$ –ideal olduğundan her $x \in I$ için $d_1(x)x - xd_2(x) \in I$ dır. Bu durumda hipotezden her $x \in I$ için $d_1(x)x - xd_2(x) \in I \cap Z(R)$ elde edilir.

Kabul edelim ki $I \cap Z(R) = (0)$ olsun. O halde her $x \in I$ için $d_1(x)x = xd_2(x)$ dır. Elde edilen bu son denklemde $y \in I$ olmak üzere x yerine $x + y$ yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa her $x, y \in I$ için

$$d_1(x)y + d_1(y)x = xd_2(y) + yd_2(x) \quad (4.47)$$

bulunur. (4.47) eşitliğinde y yerine yx yazılırsa

$$d_1(x)yx + d_1(yx)x = xd_2(yx) + yxd_2(x)$$

olur. Elde edilen bu son denklemde (4.47) eşitliği ve $d_1(x)x = xd_2(x)$ olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[x, yd_2(x)] = 0$ bulunur. Bu denklemde $r \in R$ olmak üzere y yerine ry yazılıp, her $x, y \in I$ için $[x, yd_2(x)] = 0$ olması kullanılırsa her $x \in I$ için $[x, R]Id_2(x) = (0)$ elde edilir. O halde *Lemma 4.2.1* den R halkası değişmelidir.

Şimdi de kabul edelim ki $I \cap Z(R) \neq (0)$ olsun. O halde $0 \neq c \in I \cap Z(R)$ vardır. Üstelik $c \in I \cap Z(R)$ için $c^* \in I \cap Z(R)$ dir. $c^* \neq c$ ise $t = c - c^*$ olmak üzere $t \neq 0$ dır ve $t^* = -t$ dir. $c^* \neq -c$ ise $t = c + c^*$ olmak üzere $t \neq 0$ dır ve $t^* = t$ dir. O halde $0 \neq c \in I \cap Z(R)$ için $c^* = c$ veya $c^* = -c$ dir. Ayrıca her $x, y \in I$ için hipotezde x yerine $x + y$ yazılırsa

$$d_1(x)y + d_1(y)x - xd_2(y) - yd_2(x) \in Z(R)$$

olur. Bu son denklemde y yerine c yazılıp, $c \in Z(R)$ için *Uyarı 2.37* den $d_1(c), d_1(c) \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$c(d_1(x) - d_2(x)) + (d_1(c) - d_2(c))x \in Z(R) \quad (4.48)$$

olur. Ayrıca her $x, y \in I$ için $d_1(x)y + d_1(y)x - xd_2(y) - yd_2(x) \in Z(R)$ ifadesinde y yerine c^2 yazılır ve düzenlenirse her $x \in I$ için

$$d_1(x)c^2 + 2cd_1(c)x - 2xcd_2(c) - c^2d_2(x) \in Z(R) \quad (4.49)$$

bulunur. (4.48) eşitliği sol taraftan c ile çarpılırsa her $x \in I$ için

$$c^2(d_1(x) - d_2(x)) + c(d_1(c) - d_2(c))x \in Z(R) \quad (4.50)$$

ifadesi elde edilir. (4.49) ve (4.50) ifadeleri taraf tarafa çıkarılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$c(d_1(c) - d_2(c))x \in Z(R) \quad (4.51)$$

olur. Dolayısıyla her $r \in R$ için $[c(d_1(c) - d_2(c))x, r] = 0$ dır. Bu eşitlikte $c \in Z(R)$ için *Uyarı 2.37* den $d_1(c), d_2(c) \in Z(R)$ olması kullanılırsa

$$c(d_1(c) - d_2(c))[x, r] = 0$$

olur. Elde edilen bu son denklem ile birlikte *Uyarı 2.37* den $c \in Z(R)$ için $d_1(c), d_2(c) \in Z(R)$ olması kullanılırsa her $x \in I, r \in R$ için

$$c(d_1(c) - d_2(c))R[x, r] = (0) \quad (4.52)$$

bulunur. (4.52) eşitliğinde x yerine x^* ve r yerine r^* yazılırsa

$$c(d_1(c) - d_2(c))R[x, r]^* = (0) \quad (4.53)$$

eşitliğine ulaşılır. R *-asal halka olduğundan (4.52) ve (4.53) eşitliklerinden $c(d_1(c) - d_2(c)) = 0$ veya her $x \in I, r \in R$ için $[x, r] = 0$ olur. Her $x \in I, r \in R$ için $[x, r] = 0$ ise *Uyarı 4.1.8* den R halkası değişmelidir. Eğer $c(d_1(c) - d_2(c)) = 0$ ise $c \in Z(R)$ olduğundan

$$cR(d_1(c) - d_2(c)) = (0) \quad (4.54)$$

bulunur. (4.54) eşitliğinden

$$c^*R(d_1(c) - d_2(c)) = (0) \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.54) ve (4.55) eşitlikleri ile R *-asal halka olması kullanılırsa $c = 0$ veya $d_1(c) - d_2(c) = 0$ dır. Dolayısıyla $c \neq 0$ olduğundan $d_1(c) = d_2(c)$ olur. Bu eşitlik (4.37) eşitliği ile kullanılırsa her $x \in I$ için $c(d_1(x) - d_2(x)) \in Z(R)$ elde edilir. O halde

her $r \in R$ için $[c(d_1(x) - d_2(x)), r] = 0$ olur. Burada $c \in Z(R)$ ve $c^* = \pm c$ olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$cR[(d_1(x) - d_2(x)), r] = c^*R[(d_1(x) - d_2(x)), r] = (0)$$

bulunur. R $*$ -asal halka olduğundan her $x \in I$, $r \in R$ için $[(d_1(x) - d_2(x)), r] = 0$ elde edilir. O halde $(d_1 - d_2)(I) \subset Z(R)$ dir.

Kabul edelim ki $d = d_1 - d_2$ olsun. $d \neq 0$ ise *Lemma 4.2.2* den R halkası değişmelidir. $d = 0$ ise $d_1 = d_2$ olur. Buradan her $x \in I$ için $[x, d_1(x)] \in Z(R)$ dir. O halde *Teorem 4.2.6* dan R halkası değişmelidir.

Teorem 4.2.8: R , karakteristiği ikiden farklı olan bir $*$ -asal halka, I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali ve d , R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. $a \in S_*(R)$ ve her $x \in I$ için $[ad(x), x] = 0$ ise $a = 0$ veya R halkası değişmelidir.

İspat: $a \in S_*(R)$ ve her $x \in I$ için $[ad(x), x] = 0$ olsun. Her $x, y \in I$ için $x + y \in I$ dir. Hipotezde x yerine $x + y$ yazılır ve her $x \in I$ için $[ad(x), x] = 0$ olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için

$$[ad(x), y] + [ad(y), x] = 0 \quad (4.55)$$

bulunur. (4.55) eşitliğinde y yerine yx yazılır ve Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa her $x, y \in I$ için

$$ay[d(x), x] + a[y, x]d(x) + [a, x]yd(x) = 0 \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.56) eşitliğinde y yerine ay yazılırsa her $x, y \in I$ için

$$a^2y[d(x), x] + a^2[y, x]d(x) + a[a, x]yd(x) + [a, x]ayd(x) = 0 \quad (4.57)$$

bulunur. Burada (4.57) eşitliği soldan a parantezine alınıp (4.56) denklemi kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[a, x]ayd(x) = 0$ olur. O halde her $x \in I$ için

$$[a, x]ald(x) = (0) \quad (4.58)$$

dir.

Kabul edelim ki $x \in I \cap S_*(R)$ olsun. Bu durumda (4.58) eşitliğinde d nin $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$[a, x]aId^*(x) = (0) \quad (4.59)$$

bulunur. Böylece (4.58) ve (4.59) eşitlikleri ile *Lemma 4.1.7* kullanılırsa $[a, x]a = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. Bu ifadede her $y \in I$ için $y + y^* \in I \cap S_*(R)$ olması kullanılırsa $[a, y + y^*]a = 0$ veya $d(y + y^*) = 0$ olur.

Kabul edelim ki $d(y + y^*) = 0$ olsun. O zaman $d(y) = d^*(y)$ dir. O halde (4.58) eşitliğinden her $y \in I$ için

$$[a, y]aId^*(y) = (0) \quad (4.60)$$

bulunur. O halde (4.58) ve (4.60) eşitlikleri ile *Lemma 4.1.7* kullanılırsa her $y \in I$ için $[a, y]a = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki $[a, y + y^*]a = 0$ olsun. Üstelik her $y \in I$ için $y - y^* \in I \cap S_*(R)$ dir. Bu durumda her $y \in I$ için $[a, y - y^*]a = 0$ veya $d(y - y^*) = 0$ olur. Eğer $d(y - y^*) = 0$ ise $d(y) = d^*(y)$ dir. Bu durumda (4.58) eşitliğinden her $y \in I$ için

$$[a, y]aId^*(y) = (0) \quad (4.61)$$

olur. Böylece I $*$ -ideal olduğundan (4.58) ve (4.61) eşitlikleri ile *Lemma 4.1.7* kullanılırsa her $y \in I$ için $[a, y]a = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir. Eğer $[a, y - y^*]a = 0$ ise bu eşitlik ile $[a, y + y^*]a = 0$ eşitliği birlikte düşünülürse $2[a, y]a = 0$ bulunur. Burada R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $[a, y]a = 0$ olur. Bu durumda her $y \in I$ için

$$[a, y]a = 0 \text{ veya } d(y) = 0 \quad (4.62)$$

dir.

Şimdi $A = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ ve $B = \{x \in I \mid [a, x]a = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B, I nın altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ olarak yazılır. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $I = A$ veya $I = B$ dir.

Kabul edelim ki $I = A$ olsun. Bu durumda her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. *Uyarı 2.49* dan $d = 0$ olur. Ancak bu sonuç d nin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $I = B$ olur. Bu durumda her $x \in I$ için $[a, x]a = 0$ dır. Üstelik her $x, y \in I$ için $xy \in I$ olduğundan x yerine xy yazılır ve her $x \in I$ için $[a, x]a = 0$ olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[a, x]ya = 0$ elde edilir. Buradan her $x \in I$ için

$$[a, x]Ia = (0) \quad (4.63)$$

olur. (4.63) eşitliğinde $a \in S_*(R)$ olması kullanılırsa her $x \in I$ için

$$[a, x]Ia^* = (0) \quad (4.64)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada (4.63) ve (4.64) eşitlikleri ile *Lemma 4.1.7* kullanılırsa her $x \in I$ için $[a, x] = 0$ veya $a = 0$ dır.

Kabul edelim ki her $x \in I$ için $[a, x] = 0$ olsun. Bu durumda $r \in R$ olmak üzere x yerine xr yazılır ve her $x \in I$ için $[a, x] = 0$ olması kullanılırsa her $r \in R$ için $I[a, r] = (0)$ bulunur. O zaman I sıfırdan farklı bir $*$ –ideal olduğundan her $r \in R$ için $[a, r] = 0$ olur. Buradan $a \in Z(R)$ elde edilir. Hipotezden her $x \in I$ için $[ad(x), x] = 0$ ve $a \in Z(R)$ olması kullanılırsa $a[d(x), x] = 0$ olur. Elde edilen bu denklemde $a \in Z(R) \cap S_*(R)$ olması kullanıldığında $aR[d(x), x] = (0)$ ve $a^*R[d(x), x] = (0)$ denklemleri elde edilir. Böylece R $*$ –asal halka olduğundan $a = 0$ veya her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olur. Her $x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ ise *Lemma 4.2.2* den R halkası değişmelidir. O halde $a = 0$ veya R halkası değişmelidir.

Teorem 4.2.9: R , karakteristiği ikiden farklı bir $*$ –asal halka, I , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali ve d, R halkasının $*$ ile değişmeli olan sıfırdan farklı bir türevi olsun. $d(I) \subset I$ ve $[d(I), d(I)] \subset Z(R)$ ise R halkası değişmelidir.

İspat: $d(I) \subset I$ ve $[d(I), d(I)] \subset Z(R)$ olsun. I $*$ –ideal olduğundan her $y \in I$ için $y^* \in I$ dır ve d türevi $*$ ile değişmeli olduğundan her $y \in I$ için $d(y) = d^*(y)$ elde edilir. Dolayısıyla her $y \in I$ için $d(y) \in S_*(R)$ olur. Yani $d(I) \subset S_*(R)$ dir. Ayrıca hipotezden $d(I) \subset I$ dır. O halde $d(I) \subset I \cap S_*(R)$ bulunur. Böylece *Lemma 4.2.5* ten $d(I) \subset Z(R)$ olur. Buradan her $y \in I$ için $[d(y), y] = 0$ elde edilir. Dolayısıyla *Lemma 4.2.2* den R halkası değişmeli olur.

4.3 * –Asal Halkalarda Sol Türevler

Bu bölümde L. Oukhtite ve L. Taoufig'in 2007 yılında yaptıkları “* –Asal Halkalarda Sol Türevler” adlı çalışma incelenmiştir.

Lemma 4.3.1: (Oukhtite L. ve Salhi S., 2009., s 19-26.) R , 2 torsion free * –asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir * –Lie ideali olsun. Eğer $[U, U] \neq 0$ ise o zaman R halkasının $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ olacak biçimde bir M * –ideali vardır.

Lemma 4.3.2: (Oukhtite L. ve Salhi S., 2009., s 19-26.) R , 2 –torsion free * –asal halka, U, R halkasının $U \not\subset Z(R)$ olacak biçimde bir * –Lie ideali olsun. O zaman $a, b \in R$ için $aUb = a^*Ub = (0)$ ise $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki $b \neq 0$ ve $Ub = (0)$ olsun. Hipotezden her $x \in U, r \in R$ için $[x, r]b = 0$ yazılır. Burada $t \in R$ için r yerine tr yazılırsa $0 = [x, rt]b = r[x, t]b + [x, r]tb = [x, r]tb$ olur. Böylece her $x \in U, r \in R$ için

$$[x, r]Rb = (0) \quad (4.65)$$

elde edilir. Bu ifadede U bir * –Lie ideal olduğundan

$$[x, r]^*Rb = (0) \quad (4.66)$$

elde edilir. Böylece R * –asal halka olduğundan (4.65) ve (4.66) eşitlikleri kullanılırsa her $r \in R$ için $[x, r] = 0$ veya $b = 0$ dır. O halde $b \neq 0$ olduğundan her $r \in R$ için $[x, r] = 0$ olur. Böylece her $x \in Z(R)$ yani $U \subset Z(R)$ bulunur. Ancak bu sonuç $U \not\subset Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde $Ub \neq 0$ dır.

Diğer taraftan $U \not\subset Z(R)$ ise $[U, U] \neq 0$ dır. Lemma 4.3.1 den $[M, R] \subset U$ ve $[M, R] \not\subset Z(R)$ olacak biçimde bir M * –Lie ideali vardır. O zaman her $u \in U, m \in M, r \in R$ için $[mau, r] \in [M, R] \subset U$ dur. Hipotezden

$$\begin{aligned} 0 &= a[mau, r]b \\ &= a[ma, r]ub + ama[u, r]b \\ &= a[ma, r]ub \\ &= amarub - armaub \\ &= amarub \end{aligned}$$

bulunur. Buradan her $r \in R, m \in M$ için

$$amaRub = (0) \quad (4.67)$$

elde edilir. Hipotezden $(0) = a^*m^*a^*Rub = a^*(am)^*Rub$ olduğu kullanılırsa

$$(ama)^*Rub = (0) \quad (4.68)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece R $*$ -asal halka olduğundan (4.67) ve (4.68) eşitlikleri kullanılırsa $ama = 0$ veya $ub = 0$ olur. Ancak $ub \neq 0$ olduğundan her $m \in M$ için $ama = 0$ dır. Dolayısıyla $aMa = 0$ olur. O zaman $a[ma^*u, r]b = 0$ ifadesinden

$$\begin{aligned} 0 &= a[ma^*u, r]b = a[ma^*, r]ub + ama^*[u, r]b = a[ma^*, r]ub \\ &= ama^*rub - arma^*ub = ama^*rub \end{aligned}$$

olur. Buradan her $m \in M$ için

$$ama^*Rub = (0) \quad (4.69)$$

bulunur. Bu eşitlikten her $m \in M$ için $(0) = ama^*Rub = am^*a^*Rub = a^{**}am^*Rub$ yazılabilir. Buradan her $m \in M$ için

$$(am(a)^*)^*Rub = (0) \quad (4.70)$$

elde edilir. Böylece R $*$ -asal halka olduğundan (4.69) ve (4.70) eşitlikleri kullanılırsa

$$ama^* = 0 \text{ veya } ub = 0$$

bulunur. Ancak $ub \neq 0$ olduğundan her $m \in M$ için $ama^* = 0$ dır. O halde $aMa = aMa^* = (0)$ olduğu kullanılırsa $a = 0$ elde edilir.

Teorem 4.3.3: R , 2-torsion free $*$ -asal halka olmak üzere d sol türevi $*$ ile değişmeli ise $d = 0$ veya R halkası değişmelidir.

İspat: d sol türev olduğundan her $x, y, z \in R$ için

$$d((xy)z) = xyd(z) + zd(xy) = xyd(z) + xzd(y) + zyd(x) \quad (4.71)$$

dır. Diğer taraftan aynı ifade farklı şekilde açılırsa her $x, y, z \in R$ için

$$d(x(yz)) = xd(yz) + yzd(x) = xyd(z) + xzd(y) + yzd(x) \quad (4.72)$$

elde edilir. (4.71) ve (4.72) eşitlikleri birlikte düşünülüp Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa her $x, y, z \in R$ için $[z, x]d(y) = [y, z]d(x)$ eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte y yerine x yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x, z \in R$ için $[z, x]d(x)=0$ elde edilir. Burada $r \in R$ olmak üzere z yerine zr yazılıp, her $x, z \in R$ için $[z, x]d(x)=0$ olması kullanılırsa $[z, x]rd(x) = 0$ olur. Dolayısıyla her $x, z \in R$ için

$$[z, x]Rd(x) = (0) \quad (4.73)$$

elde edilir.

Kabul edelim ki $x \in S_*(R)$ olsun. (4.73) eşitliğinde x yerine x^* yazılıp, $x^* = \bar{\tau}x$ ve d türevinin $*$ ile değişmeli olduğu kullanılırsa $[z, x]Rd^*(x) = 0$ elde edilir. Böylece $R *$ –asal halka olduğundan her $z \in R$, $x \in S_*(R)$ için $[z, x] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir. Üstelik her $y \in R$ için $y - y^* \in S_*(R)$ olduğundan $[z, y - y^*] = 0$ veya $d(y - y^*) = 0$ dır. Buradan her $z, y \in R$ için

$$[z, y] = [z, y^*] \text{ veya } d(y) = d^*(y)$$

elde edilir.

Şimdi $A = \{y \in R \mid [z, y] = [z, y^*], \forall z \in R\}$ ve $B = \{y \in R \mid d(y) = d^*(y)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , R halkasının altgruplarıdır ve $R = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = A$ veya $R = B$ dir.

Kabul edelim ki $R = A$ olsun. Bu durumda her $z, y \in R$ için $[z, y] = [z, y^*]$ olması (4.73) eşitliğinde kullanılırsa her $z, y \in R$ için $[z, y^*]Rd(y) = (0)$ elde edilir. Burada z yerine z^* yazılıp involüsyon işleminin tanımı dikkate alınır $[z, y]^*Rd(y) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Böylece $R *$ –asal halka olduğundan her $z, y \in R$ için $[z, y] = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $R = B$ olsun. Bu durumda her $y \in R$ için, $d(y) = d^*(y)$ olması (4.73) eşitliğinde kullanılırsa her $z, y \in R$ için $[z, y]Rd^*(y) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Böylece $R *$ –asal halka olduğundan her $z, y \in R$ için $[z, y] = 0$ veya $d(y) = 0$ elde edilir.

Her iki durumdanda aynı sonuca ulaşıldığından $z, y \in R$ için

$$[z, y] = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

dır.

Şimdi $C = \{y \in R \mid [z, y] = 0, \forall y \in R\}$ ve $D = \{y \in R \mid d(y) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , R halkasının altgruplarıdır ve $R = C \cup D$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından $R = C$ veya $R = D$ dir. Eğer $R = C$ ise her $z, y \in R$ için, $[z, y] = 0$ olur. Dolayısıyla R halkası değişmelidir. Eğer $R = D$ ise her $y \in R$ için $d(y) = 0$ yani $d(R) = 0$ dır. Dolayısıyla $d = 0$ dır.

Lemma 4.3.4: R , 2 –torsion free $*$ –asal halka ve U , R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –Lie ideali olsun. Eğer $[U, U] = (0)$ ise $U \subseteq Z(R)$ dir.

İspat: $[U, U] = (0)$ olsun. U Lie ideal olduğundan $u \in U$ ve $r, t \in R$ için $[u, rt] \in U$ dur. Hipotezden her $u \in U$ ve $r, t \in R$ için $[u, [u, rt]] = 0$ olur. Bu eşitlik Lie komütatör işlemi kullanılarak açılırsa

$$0 = [u, [u, r]t] + [u, r[u, t]] = [u, [u, r]]t + [u, r][u, t] + [u, r][u, t] + r[u, [u, t]]$$

olur. O zaman hipotez kullanılırsa $2[u, r][u, t] = 0$ elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $u \in U$ ve $r, t \in R$ için $[u, r][u, t] = 0$ bulunur. Burada $z \in R$ olmak üzere z yerine zr yazılıp Lie komütatör işleminin özellikleri kullanılırsa her $u \in U$ ve $r, t, z \in R$ için $[u, r]z[u, t] = 0$ elde edilir. O halde her $u \in U$ ve $r, t \in R$ için

$$[u, r]R[u, t] = (0) \tag{4.74}$$

olur. Özel olarak kabul edelim ki $u \in U \cap S_*(R)$ olsun. (4.74) eşitliğinde r yerine r^* yazılıp $u^* = \pm u$ olması kullanılırsa her $r, t \in R$ için $[u^*, r^*]R[u, t] = 0$ dır. Burada Lie komütatör işlemi özellikleri ve involüsyon tanımı kullanılırsa $[u, r]^*R[u, t] = 0$ elde edilir. Böylece R $*$ –asal halka olduğundan her $u \in U \cap S_*(R)$ ve $r, t \in R$ için $[u, r] = 0$ veya $[u, t] = 0$ dır. O halde $u \in Z(R)$ dir. Dolayısıyla $U \cap S_*(R) \subseteq Z(R)$ dir.

Şimdi $s \in U$ olsun. Bu durumda $s + s^*, s - s^* \in U \cap S_*(R)$ dir. $Z(R)$ bir althalka olduğundan $s + s^* + s - s^* = 2s \in Z(R)$ olur. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $s \in U$ için $s \in Z(R)$ elde edilir. O halde $U \subseteq Z(R)$ dir.

Teorem 4.3.5: R , 2 –torsion free $*$ –asal halka ve U , R halkasının bir $*$ –kare kapalı Lie ideali olsun. Eğer $d: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümü $*$ ile değişmeli olmak üzere her $u \in U$ için $d(u^2) = 2ud(u)$ ise $U \subseteq Z(R)$ veya $d(U) = 0$ dır.

İspat: $U \not\subseteq Z(R)$ olsun. *Lemma 3.1.1-(ii)* den her $u, v \in U$ için $(u^2v - 2uvu + vu^2)d(v) = 0$ dır. Burada $w \in U$ olmak üzere u yerine $u + w$ yazılır ve *Lemma 3.1.1-(ii)* kullanılırsa her $u, v, w \in U$ için

$$(uvw + wuv - 2uvw - 2wvu + vuw + vwu)d(v) = 0 \quad (4.75)$$

elde edilir. (4.75) eşitliğinde $x, y \in U$ olmak üzere $w = v = [x, y]$ alınıp *Lemma 3.1.1-(i)* kullanılırsa her $x, y \in U$ için

$$[x, y]^2 Ud([x, y]) = (0) \quad (4.76)$$

bulunur. Özel olarak kabul edelim ki $x, y \in U \cap S_*(R)$ olsun. (4.76) eşitliğinde $x^* = \bar{x}$, $y^* = \bar{y}$ ve d nin $*$ ile değişmeli olduğu kullanılırsa $[x, y]^2 Ud^*([x, y]) = (0)$ elde edilir. O halde *Lemma 4.3.2* den her $x, y \in U \cap S_*(R)$ için $[x, y]^2 = 0$ veya $d([x, y]) = 0$ dır.

Kabul edelim ki $[x, y]^2 = 0$ olsun. (4.75) eşitliğinde v yerine $[x, y]$ yazılıp *Lemma 3.1.1-(i)* ve $[x, y]^2 = 0$ olması kullanılırsa her $u, w \in U$ için

$$(-2u[x, y]w - 2w[x, y]u + [x, y]uw + [x, y]wu)d([x, y]) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte *Uyarı 2.35* den u yerine $2u[x, y]$ yazılıp yine *Lemma 3.1.1-(i)* ve $[x, y]^2 = 0$ olması kullanılırsa her $u, w \in U$ için $2[x, y]u[x, y]wd([x, y]) = 0$ elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $u, w \in U$ için $[x, y]u[x, y]wd([x, y]) = 0$ olur. Buradan $[x, y]u[x, y]Ud([x, y]) = (0)$ dır. $x, y \in U \cap S_*(R)$ ve U bir $*-Lie$ ideal olduğundan her $u \in U$ için $[x, y]u[x, y]Ud([x, y]) = ([x, y]u[x, y])^* Ud([x, y]) = (0)$ elde edilir. O halde *Lemma 4.3.2* den her $u \in U$ için

$$[x, y]u[x, y] = 0 \text{ veya } d([x, y]) = 0$$

dır.

Kabul edelim ki $[x, y]u[x, y] = 0$ olsun. Buradan $[x, y]U[x, y] = (0)$ dır. Üstelik $x, y \in U \cap S_*(R)$ olduğundan $[x, y]^*U[x, y] = (0)$ dır. Elde edilen son iki denklemde *Lemma 4.3.2* den her $x, y \in U \cap S_*(R)$ için $[x, y] = 0$ bulunur. O halde *Lemma 4.3.4* den $U \subseteq Z(R)$ dir. Ancak bu sonuç $U \not\subseteq Z(R)$ olmasıyla çelişir. Böylece her $x, y \in U \cap S_*(R)$ için $d([x, y]) = 0$ dır.

Şimdi $k, t \in U$ olsun. O zaman $k + k^*, t + t^*, t - t^* \in U \cap S_*(R)$ olduğundan $d([k + k^*, t + t^*]) = 0$ ve $d([k + k^*, t - t^*]) = 0$ dır. Elde edilen bu iki ifade Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılıp taraf tarafa toplanırsa

$$0 = d([k + k^*, t]) + d([k + k^*, t^*]) + d([k + k^*, t]) - d([k + k^*, t^*])$$

olur. Buradan her $k, t \in U$ için $2d([k + k^*, t]) = 0$ elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa

$$d([k + k^*, t]) = 0 \quad (4.77)$$

eşitliğine ulaşılır.

Diğer taraftan $k - k^*, t + t^*, t - t^* \in U \cap S_*(R)$ olduğundan $d([k - k^*, t + t^*]) = 0$ ve $d([k - k^*, t - t^*]) = 0$ dır. Elde edilen bu iki ifade Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılıp taraf tarafa toplanırsa

$$0 = d([k - k^*, t]) + d([k - k^*, t^*]) + d([k - k^*, t]) - d([k - k^*, t^*])$$

olur. Buradan her $k, t \in U$ için $2d([k - k^*, t]) = 0$ elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa

$$d([k - k^*, t]) = 0 \quad (4.78)$$

eşitliğine ulaşılır. O halde (4.77) ve (4.78) eşitliklerinden her $k, t \in U$ için $d([k, t]) = 0$ dır. Burada Lie komütatör işlemi özellikleri kullanılırsa $0 = d(kt - tk) = d(kt) - d(tk)$ elde edilir. Ayrıca *Lemma 3.1.1-(i)* den her $k, t \in U$ için $d(kt) + d(tk) = 2kd(t) + 2td(k)$ dir. Son elde edilen iki denklem taraf tarafa toplanırsa her $k, t \in U$ için $2d(kt) = 2kd(t) + 2td(k)$ elde edilir. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $k, t \in U$ için

$$d(kt) = kd(t) + td(k) \quad (4.79)$$

olur.

Şimdi $m, n \in U$ olmak üzere $d(m^2n)$ ifadesini inceleyelim. (4.79) eşitliğinde her $u \in U$ için $d(u^2) = 2ud(u)$ olduğu kullanılırsa her $m, n \in U$ için

$$d(m^2n) = m^2d(n) + nd(m^2) = m^2d(n) + 2nm d(m)$$

elde edilir. Diğer taraftan her $m, n \in U$ için

$$d(m^2n) = md(mn) + mnd(m) = m^2d(n) + 2mnd(m)$$

dir. Son elde edilen iki denklemde Lie komütatör işlemi özellikleri ve R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $m, n \in U$ için

$$[m, n]d(m) = 0$$

olur. Burada $z \in U$ olmak üzere n yerine $2nz$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $m, n, z \in U$ için $[m, n]zd(m) = 0$ elde edilir. Böylece her $m, n \in U$ için

$$[m, n]Ud(m) = (0) \quad (4.80)$$

olur.

Kabul edelim ki $m \in U \cap S_*(R)$ olsun. (4.80) eşitliğinde $m^* = \pm m$ ve d nin $*$ ile değişmeli olduğu kullanılırsa $[m, n]Ud^*(m) = (0)$ elde edilir. O halde *Lemma 4.3.2* den her $m \in U \cap S_*(R), n \in U$ için $[m, n] = 0$ veya $d(m) = 0$ dır. Üstelik $m + m^*, m - m^* \in U \cap S_*(R)$ olduğundan m yerine $m + m^*$ yazılırsa her $m \in U \cap S_*(R), n \in U$ için $[m + m^*, n] = 0$ veya $d(m + m^*) = 0$ bulunur.

Kabul edelim ki $d(m + m^*) = 0$ olsun. O zaman $0 = d(m) + d(m^*) = d(m) + d^*(m)$ dir. Buradan $d(m) = -d^*(m)$ olduğu görülür. O halde $d(m) \in S_*(R)$ dir. Böylece (4.80) eşitliği kullanılırsa her $m \in U \cap S_*(R), n \in U$ için

$$[m, n]Ud(m)^* = (0) \quad (4.81)$$

bulunur. (4.80) ve (4.81) eşitlikleri kullanılırsa *Lemma 4.3.2* den her $m \in U \cap S_*(R), n \in U$ için $[m, n] = (0)$ veya $d(m) = 0$ elde edilir.

Eğer $[m, n] = (0)$ ise $[m + m^*, n] = 0$ dır. Buradan $[m, n] + [m^*, n] = 0$ elde edilir. Öte yandan $[m - m^*, n] = 0$ dır. Dolayısıyla $[m, n] - [m^*, n] = 0$ olur. O halde $2[m, n] = 0$ dır. Böylece R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $m \in U \cap S_*(R), n \in U$ için $[m, U] = 0$ elde edilir. Eğer $d(m) = 0$ ise $d(m - m^*) = 0$ olduğundan $d(m) = d(m^*) = d^*(m)$ olur. Böylece $d(m) \in S_*(R)$ dir. Buradan (4.80) eşitliğinden $[m, U]Ud(m)^* = (0)$ elde edilir. Bu durumda her $m \in U$ için

$$[m, U] = (0) \text{ veya } d(m) = 0$$

olur.

Şimdi $G = \{m \in U | d(m) = 0\}$ ve $H = \{m \in U | [m, U] = 0\}$ kümeleri tanımlansın. G ve H , U nun altgruplarıdır ve $U = G \cup H$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = G$ veya $U = H$ dır.

Eğer $U = H$ ise her $m \in U$ için $[m, U] = (0)$ bulunur. Böylece *Lemma 4.3.4* den $U \subset Z(R)$ olur. Ancak bu sonuç $U \not\subset Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde $U = G$ dir. Bu durumda her $m \in U$ için $d(U) = 0$ dır. Buradan $d(U) = 0$ elde edilir.



BÖLÜM 5

* –ASAL HALKALARDA SOL– * TÜREVLER

5.1 * –Asal Halkalar Üzerinde Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar

Bu bölümde N. Rehman, A. Z. Ansari ve C. Haetinger'in 2013 yılında yaptıkları “* –Halkalarda Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar” adlı çalışma asal * –halka yerine * –asal halka, * –ideal ve * –lie ideal alınarak genelleştirilmiştir.

Teorem 5.1: R , * –asal halka, $F: R \rightarrow R$, d sol * –türevi ile belirli genelleştirilmiş sol * –türev olsun.

(i) F, R üzerinde homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya F, R üzerinde sağ * –merkezileştiricidir.

(ii) F, R üzerinde anti-homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya F, R üzerinde sağ * –merkezileştiricidir.

İspat: (i) Kabul edelim ki F, R üzerinde homomorfizma olsun. F homomorfizma ve genelleştirilmiş sol * –türev olduğundan her $x, y, z \in R$ için

$$F(xyz) = F(x(yz)) = x^*F(yz) + yzd(x) = x^*F(y)F(z) + yzd(x)$$

$$F(xyz) = F((xy)z) = F(xy)F(z) = x^*F(y)F(z) + yd(x)F(z)$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitliklerden her $x, y, z \in R$ için $yzd(x) = yd(x)F(z)$ elde edilir. Buradan $y(zd(x) - d(x)F(z)) = 0$ bulunur. Elde edilen bu denklemde $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazılırsa her $x, y, z, r \in R$ için $yr(zd(x) - d(x)F(z)) = 0$ olur. Böylece

$$yR(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$$

elde edilir. Burada y yerine y^* yazılırsa

$$y^*R(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$$

bulunur. Böylece R * –asal halka olduğundan her $y \in R$ için $y = 0$ veya her $x, z \in R$ için $zd(x) - d(x)F(z) = 0$ dir. Eğer her $y \in R$ için $y = 0$ ise $R = (0)$ dır. Bu ise çelişkiye sebep olur. O yüzden

$$zd(x) = d(x)F(z), \forall x, z \in R \tag{5.1}$$

dır. (5.1) eşitliğinde $y \in R$ olmak üzere x yerine xy yazılırsa $zd(xy) - d(xy)F(z) = 0$ olur. Burada d nin sol * –türev olması kullanılırsa her $x, y, z \in R$ için

$$zx^*d(y) + zy d(x) - x^*d(y)F(z) - yd(x)F(z) = 0$$

elde edilir. (5.1) eşitliğinden

$$zx^*d(y) + zyd(x) - x^*zd(y) - yzd(x) = [z, x^*]d(y) + [z, y]d(x) = 0$$

denklemine ulaşılır. Burada z yerine x^* yazılırsa $[x^*, y]d(x) = 0$ elde edilir. Bu son denklemde y yerine yz yazılırsa her $x, y, z \in R$ için $[x^*, y]zd(x) = 0$ olur. Böylece her $x, y \in R$ için

$$[x^*, y]Rd(x) = (0) \quad (5.2)$$

olur.

Özel olarak $x \in S_*(R)$ olsun. Bu durumda $x^* = \pm x$ olduğundan (5.2) eşitliği her $x \in S_*(R), y \in R$ için $[x, y]Rd(x) = (0)$ olur. Burada y yerine y^* yazılırsa $[x, y]^*Rd(x) = (0)$ elde edilir. Böylece R $*$ -asal halka olduğundan her $x \in S_*(R), y \in R$ için $[x, y] = 0$ veya $d(x) = 0$ dır. Üstelik her $r \in R$ için $r - r^* \in S_*(R)$ olduğundan x yerine $r - r^*$ yazılırsa $[r - r^*, y] = 0$ veya $d(r - r^*) = 0$ denklemlerine ulaşılır. Bu ise her $r \in R$ için

$$[r, y] = [r^*, y] \text{ veya } d(r) = d(r^*)$$

demektir.

Şimdi $A = \{r \in R \mid [r, y] = [r^*, y], \forall y \in R\}$ ve $B = \{r \in R \mid d(r) = d(r^*)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , R nin altgruplarıdır ve $R = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = A$ veya $R = B$ dir.

Kabul edelim ki $R = A$ olsun. Bu durumda her $r, y \in R$ için $[r, y] = [r^*, y]$ olduğu kullanılırsa (5.2) eşitliğinden her $r, y \in R$ için $[x, y]Rd(x) = (0)$ elde edilir. Ayrıca (5.2) eşitliğinde y yerine y^* yazılırsa $[x, y]^*Rd(x) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Böylece R $*$ -asal halka olduğundan her $x, y \in R$ için $[x, y] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir. Buradan her $x \in R$ için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ bulunur.

Şimdi $C = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ ve $D = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , R nin altgrupları ve $R = C \cup D$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = C$ veya $R = D$ dir.

Kabul edelim ki $R = C$ olsun. Bu durumda R halkası değişmelidir. Kabul edelim ki $R = D$ olsun. O zaman her $x \in R$ için $d(R) = 0$ olur. Buradan $d = 0$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $R = B$ olsun. O zaman her $r \in R$ için $d(r) = d(r^*)$ dir. (5.2) eşitliğinde x yerine x^* yazılırsa her $x, y \in R$ için $[x, y]Rd(x^*) = (0)$ elde edilir. O zaman her $r \in R$ için $d(r) = d(r^*)$ olduğundan $[x, y]Rd(x) = (0)$ dır. Üstelik (5.2) eşitliğinde y

yerine y^* yazılırsa $[x, y]^* R d(x) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Böylece R $*$ –asal halka olduğundan her $x, y \in R$ için $[x, y] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir. Buradan, yukarıda gösterildiği üzere R halkası değişmelidir veya $d = 0$ dır. O halde R halkası değişmelidir veya F sağ $*$ –merkezleştiricidir.

(ii) Kabul edelim ki F , R üzerinde anti-homomorfizma olsun. F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan her $x, y \in R$ için

$$F(xy) = F(y)F(x) \text{ ve } F(xy) = x^*F(y) + yd(x)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan her $x, y \in R$ için

$$F(y)F(x) = x^*F(y) + yd(x)$$

elde edilir. Elde edilen bu denklemde y yerine xy yazılırsa

$$F(xy)F(x) = x^*F(xy) + xyd(x) \quad (5.3)$$

elde edilir. F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan her $x, y \in R$ için

$$x^*F(y)F(x) + yd(x)F(x) = x^*F(y)F(x) + xyd(x) \quad (5.4)$$

olur. Buradan her $x, y \in R$ için

$$yd(x)F(x) = xyd(x) \quad (5.5)$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $z \in R$ olmak üzere y yerine zy yazılırsa $zyd(x)F(x) = xzyd(x)$ elde edilir. Burada sol tarafında bulunan $yd(x)F(x)$ ifadesi yerine (5.5) eşitliğindeki ifade yazılırsa her $x, y, z \in R$ için $xzyd(x) - zxyd(x) = [x, z]yd(x) = 0$ elde edilir. Böylece her $x, z \in R$ için

$$[x, z]Rd(x) = (0) \quad (5.6)$$

olur. Özel olarak $x \in S_*(R)$ olsun. (5.6) eşitliğinde z yerine z^* yazılırsa ve $x^* = \bar{x}$ olduğu kullanılırsa her $x, z \in R$ için

$$[x, z]^* R d(x) = (0) \quad (5.7)$$

bulunur. Böylece R $*$ –asal halka olduğundan her $x \in S_*(R)$, $z \in R$ için $[x, z] = 0$ veya $d(x) = 0$ dır. Burada her $r \in R$ için $r - r^* \in S_*(R)$ olduğu kullanılıp x yerine $r - r^*$ yazılırsa $[r - r^*, z] = 0$ veya $d(r - r^*) = 0$ elde edilir. Bu ise her $r, z \in R$ için

$$[r, z] = [r^*, z] \text{ veya } d(r) = d(r^*)$$

demektir.

Şimdi $A = \{r \in R \mid [r, z] = [r^*, z], \forall z \in R\}$ ve $B = \{r \in R \mid d(r) = d(r^*)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , R nin altgruplarıdır ve $R = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = A$ veya $R = B$ dir.

Kabul edelim ki $R = A$ olsun. O zaman $[x^*, z]Rd(x) = (0)$ elde edilir. Burada z yerine z^* yazılırsa $[x, z]^*Rd(x) = (0)$ olur. Bu eşitlik (5.6) eşitliği ile düşünülürse R $*$ –asal halka olduğundan her $x, z \in R$ için $[x, z] = 0$ veya $d(x) = 0$ olur. Buradan her $x \in R$ için $x \in Z(R)$ veya $d(x) = 0$ bulunur.

Şimdi $G = \{x \in R \mid x \in Z(R)\}$ ve $H = \{x \in R \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım.

G ve H , R nin altgrupları ve $R = G \cup H$ dır. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $R = G$ veya $R = H$ dır. Eğer $R = G$ ise R halkası değişmelidir. Diğer taraftan eğer $R = H$ ise her $x \in R$ için $d(x) = 0$ dır. Yani $d(R) = 0$ dır. Buradan $d = 0$ elde edilir.

Kabul edelim ki $R = B$ olsun. Bu durumda her $r \in R$ için $d(r) = d(r^*)$ dir. (5.6) eşitliğinde x yerine x^* yazılırsa her $x, z \in R$ için $[x^*, z]Rd(x^*) = (0)$ elde edilir. O halde $[x^*, z]Rd(x) = (0)$ dır. Burada z yerine z^* yazılırsa $[x, z]^*Rd(x) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Ayrıca (5.6) eşitliğinden her $x, z \in R$ için $[x, z]Rd(x) = (0)$ dır. Böylece R halkasının bir $*$ –asal halka olmasından her $x, z \in R$ için $[x, z] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir. Buradan R halkası değişmelidir veya $d = 0$ dır. Üstelik $d = 0$ ise her $x, y \in R$ için $F(xy) = x^*F(y)$ olur. Yani F sağ $*$ –merkezileştirici demektir.

Sonuç 5.2: R , $*$ –asal halka, $F: R \rightarrow R$, d sol $*$ –türevi ile belirli genelleştirilmiş sol $*$ –türev olsun. F , sıfırdan farklı, $*$ ile değişmeli ve R üzerinde sağ $*$ –merkezileştirici olsun. F, R üzerinde homomorfizma ise R halkası değişmelidir.

İspat: F sağ $*$ –merkezileştirici ve homomorfizma olması kullanılırsa her $x, y \in R$ için

$$F(x)F(y) = F(xy) = x^*F(y) \quad (5.8)$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan $F(y)$ parantezine alınırsa her $x, y \in R$ için

$$(F(x) - x^*)F(y) = 0 \quad (5.9)$$

olur. Burada $z \in R$ olmak üzere y yerine z^*y yazılırsa $(F(x) - x^*)F(z^*y) = 0$ elde edilir. O halde F sağ $*$ -merkezleştirici olduğundan her $x, y, z \in R$ için, $(F(x) - x^*)zF(y) = 0$ dır. Ulaşılan bu denklemde y yerine y^* yazılırsa ve F in $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa $(F(x) - x^*)zF^*(y) = 0$ elde edilir. Elde edilen bu iki denklem her $z \in R$ için $(F(x) - x^*)RF(y) = (0)$ ve $(F(x) - x^*)RF^*(y) = (0)$ dır. Böylece R $*$ -asal halka olduğundan her $x, y \in R$ için

$$(F(x) - x^*) = 0 \text{ veya } F(y) = 0$$

dır.

Kabul edelim ki her $x \in R$ için $F(x) = x^*$ olsun. O zaman her $x, y \in R$ için $F(xy) = (xy)^*$ dır. Burada involüsyon tanımı kullanılırsa $F(xy) = (xy)^* = y^*x^*$ elde edilir. Öte yandan F homomorfizma olduğundan her $x, y \in R$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ dir. Üstelik her $x \in R$ için $F(x) = x^*$ olduğundan her $x, y \in R$ için $F(xy) = x^*y^*$ elde edilir. Elde edilen iki durum birlikte düşünülürse her $x, y \in R$ için $y^*x^* = x^*y^*$ olur. Böylece y yerine y^* ve x yerine x^* yazılırsa her $x, y \in R$ için $[x, y] = 0$ elde edilir. O halde R değişmelidir.

Şimdi kabul edelim ki her $y \in R$ için $F(y) = 0$ olsun. Buradan $F(R) = 0$ elde edilir. Bu da $F = 0$ olmasını gerektirir. Ancak bu sonuç $F \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde R halkası değişmelidir.

Teorem 5.3: R $*$ -asal halka ve F, R üzerinde d sol $*$ -türevi ile belirli genelleştirilmiş sol $*$ -türev olsun. I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ -ideali olsun.

(i) F, I üzerinde homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya F, I üzerinde sağ $*$ -merkezleştiricidir.

(ii) F, I üzerinde anti-homomorfizma ise R halkası değişmelidir veya F, I üzerinde sağ $*$ -merkezleştiricidir.

İspat: (i) Kabul edelim ki F, I üzerinde homomorfizma olsun. F homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ -türev olduğundan her $x, y, z \in I$ için

$$F(xyz) = F((xy)z) = F(xy)F(z) = x^*F(y)F(z) + yd(x)F(z) \quad (5.10)$$

$$F(xyz) = F(x(yz)) = x^*F(yz) + yzd(x) = x^*F(y)F(z) + yzd(x) \quad (5.11)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan her $x, y, z \in I$ için $yd(x)F(z) = yzd(x)$ dır. Gerekli düzenleme yapılırsa $y(d(x)F(z) - zd(x)) = 0$ elde edilir. Bu ifadede $r \in R$ olmak üzere y yerine yr yazılırsa $yr(d(x)F(z) - zd(x)) = 0$ denkleminde ulaşılır. Böylece her $x, y, z \in I$ için

$$yR(d(x)F(z) - zd(x)) = (0) \quad (5.12)$$

olur. Burada I^* —ideal olduğundan y yerine y^* yazılırsa her $x, y, z \in I$ için

$$y^*R(d(x)F(z) - zd(x)) = (0) \quad (5.13)$$

elde edilir. Böylece R^* —asal halka olduğundan $y = 0$ veya her $x, z \in I$ için $d(x)F(z) - zd(x) = 0$ dır. Eğer her $y \in I$ için $y = 0$ ise $I = (0)$ dır. $I \neq (0)$ olduğundan çelişki elde edilir. O yüzden her $x, z \in I$ için $d(x)F(z) - zd(x) = 0$ dır. Buradan her $x, z \in I$ için

$$d(x)F(z) = zd(x) \quad (5.14)$$

eşitliği elde edilir. (5.14) eşitliğinde $y \in I$ olmak üzere x yerine xy yazılırsa $zd(xy) - d(xy)F(z) = 0$ denkleminde ulaşılır. d nin sol $*$ —türev olması kullanılırsa her $x, y, z \in I$ için

$$zx^*d(y) + zy d(x) - x^*d(y)F(z) - yd(x)F(z) = 0$$

elde edilir. Burada (5.14) eşitliği kullanılırsa $zx^*d(y) + zy d(x) - x^*zd(y) - yzd(x) = [z, x^*]d(y) + [z, y]d(x) = 0$ denkleminde ulaşılır. Bu ifadede z yerine x^* yazılırsa $[x^*, y]d(x) = 0$ elde edilir. Bu son denklemde $s \in I$ olmak üzere y yerine ys yazılıp aynı eşitlik kullanılırsa her $x, y, s \in I$ için $[x^*, y]sd(x) = 0$ elde edilir. Böylece her $x, y \in I$ için

$$[x^*, y]Id(x) = (0) \quad (5.15)$$

elde edilir.

Özel olarak $x \in I \cap S_*(R)$ olsun. O halde (5.15) eşitliğinde $x^* = \pm x$ olduğu kullanılırsa her $x \in I \cap S_*(R), y \in I$ için $[x, y]Id(x) = (0)$ elde edilir. Burada y yerine y^* yazılırsa $[x, y]^*Id(x) = (0)$ olur. O halde Lemma 4.1.7 den her $x \in I \cap S_*(R), y \in I$ için $[x, y] = 0$ veya $d(x) = 0$ dır.

Öte yandan her $t \in I$ için $t - t^* \in S_*(R)$ olduğundan, x yerine $t - t^*$ yazılırsa $[t - t^*, y] = 0$ veya $d(t - t^*) = 0$ denklemlerine ulaşılır. Bu ise her $t, y \in I$ için

$$[t, y] = [t^*, y] \text{ veya } d(t) = d(t^*)$$

demektir.

Şimdi $A = \{t \in I \mid [t, y] = [t^*, y], \forall y \in I\}$ ve $B = \{t \in I \mid d(t) = d(t^*)\}$ kümeleri tanımlansın. A ve B , I nin altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $I = A$ veya $I = B$ dir.

Kabul edelim ki $I = A$ olsun. (5.15) eşitliğinde her $t, y \in I$ için $[t, y] = [t^*, y]$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[x, y]Id(x) = (0)$ elde edilir. Ayrıca (5.15) eşitliğinde y yerine y^* yazılırsa her $t, y \in I$ için $[x, y]^*Id(x) = 0$ ifadesine ulaşılır. Böylece *Lemma 4.1.7* den her $x, y \in I$ için

$$[x, y] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

dır.

Buradan $C = \{x \in I \mid [x, y] = 0, \forall y \in I\}$ ve $D = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , I nin altgrupları ve $I = C \cup D$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından $I = C$ veya $I = D$ dir.

Kabul edelim ki $I = C$ olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ için $[x, y] = 0$ olur. $r \in R$ olmak üzere x yerine xr alınırsa $[xr, y] = 0$ elde edilir. Burada Lie komütatör işlemi özelliğinden yararlanıp $[x, y] = 0$ olması kullanılırsa her $x, y \in I, r \in R$ için $x[r, y] = 0$ elde edilir. O zaman $k \in R$ olmak üzere x yerine xk yazılıp son eşitlik kullanılırsa $xk[r, y] = 0$ elde edilir. Buradan her $x, y \in I, r \in R$ için $xR[r, y] = (0)$ bulunur. Ayrıca x yerine x^* alınırsa her $x, y \in I, r \in R$ için $x^*R[r, y] = (0)$ elde edilir. Böylece R * -asal halka olduğundan her $x, y \in I$ ve her $r \in R$ için $x = 0$ veya $[r, y] = 0$ dır. Eğer her $x \in I$ için $x = 0$ ise $I = (0)$ olur. Ancak $I \neq (0)$ olduğundan her $y \in I, r \in R$ için $[r, y] = 0$ dır. Böylece *Uyarı 4.1.8* den R değişmelidir.

Kabul edelim ki $I = D$ olsun. O zaman her $x \in I$ için $d(x) = 0$ olur. $m \in R$ için x yerine xm yazılır ve her $x \in I$ için $d(x) = 0$ olduğu kullanılırsa $x^*d(m) = 0$ elde edilir. Buradan x yerine x^* yazılırsa her $x \in I, m \in R$ için $xd(m) = 0$ olur. O zaman $n \in R$ için x yerine xn yazılırsa her $x \in I, m, n \in R$ için $xnd(m) = 0$ dır. Buradan her $x \in I, m \in R$ için $xRd(m) = (0)$ elde edilir. Ayrıca bu son denklemde x yerine x^* yazılırsa $x^*Rd(m) = (0)$ eşitliğine ulaşılır. Son elde edilen iki denklem birlikte düşünülür ve R halkasının * -asal halka olduğu kullanılırsa her $x \in I$ için $x = 0$ veya her $m \in R$ için $d(m) = 0$ elde edilir. $I \neq (0)$ olduğundan her $m \in R$ için $d(m) = 0$ dır. Buradan $d = 0$ bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $I = B$ olsun. O zaman her $t \in I$ için $d(t) = d(t^*)$ dir. (5.15) eşitliğinde x yerine x^* yazılırsa her $x, y \in I$ için $[x, y]Id(x^*) = (0)$ elde edilir. Burada $d(t) = d(t^*)$ olması kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[x, y]Id(x) = (0)$ dır. Ayrıca (5.15) eşitliğinde y yerine y^* yazılırsa her $x, y \in I$ için $[x, y]^*Id(x) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Dolayısıyla Lemma 4.1.7 den her $x, y \in I$ için

$$[x, y] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

dır.

Şimdi $K = \{x \in I \mid [x, y] = 0, \forall y \in I\}$ ve $L = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L , I nin altgruplarıdır ve $I = K \cup L$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $I = K$ veya $I = L$ dir. Eğer $I = K$ ise her $x, y \in I$ için $[x, y] = 0$ olur. Yukarıda gösterildiği gibi bu durumda R değişmelidir. Diğer taraftan $I = L$ ise her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Benzer şekilde $d = 0$ bulunur.

Olası tüm durumlarda R halkası değişmelidir veya $d = 0$ dır. Üstelik $d = 0$ ise her $x, y \in I$ için $F(xy) = x^*F(y)$ olur. Yani F sağ $*$ –merkezileştiricidir.

(ii) Kabul edelim ki F, I üzerinde anti-homomorfizma olsun. F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan her $x, y \in I$ için

$$F(xy) = F(y)F(x) \quad (5.16)$$

$$F(xy) = x^*F(y) + yd(x) \quad (5.17)$$

eşitlikleri sağlanır. O halde her $x, y \in I$ için $F(y)F(x) = x^*F(y) + yd(x)$ dır. Elde edilen bu denklemde y yerine xy yazılırsa

$$F(xy)F(x) = x^*F(xy) + xyd(x) \quad (5.18)$$

elde edilir. Buradan F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan

$$x^*F(y)F(x) + yd(x)F(x) = x^*F(y)F(x) + xyd(x) \quad (5.19)$$

elde edilir. Buradan gerekli düzenleme yapılırsa her $x, y \in I$ için

$$xyd(x) = yd(x)F(x) \quad (5.20)$$

olur. Burada $z \in I$ olmak üzere y yerine zy alınıp (5.20) eşitliği kullanılırsa her $x, y, z \in I$ için $xzyd(x) - zxyd(x) = [x, z]yd(x) = 0$ denkleminde ulaşılır. Böylece her $x, z \in I$ için

$$[x, z]Id(x) = (0) \quad (5.21)$$

elde edilir.

Özel olarak $x \in I \cap S_*(R)$ olsun. O halde (5.21) eşitliğinden her $x \in I \cap S_*(R), z \in I$ için $[x, z]Id(x) = (0)$ elde edilir. Burada z yerine z^* yazılıp, $x^* = \pm x$ olması kullanılırsa $[x, z]^*Id(x) = (0)$ olur. Böylece son elde edilen iki denklem birlikte düşünülür ve *Lemma 4.1.7* de kullanılırsa her $x \in I \cap S_*(R), z \in I$ için $[x, z] = 0$ veya $d(x) = 0$ dır.

Öte yandan her $t \in I$ için $t - t^* \in S_*(R)$ olduğundan $t - t^* \in I \cap S_*(R)$ dir. Bu durumda x yerine $t - t^*$ yazılırsa $[t - t^*, z] = 0$ veya $d(t - t^*) = 0$ denklemlerine ulaşılır. O halde her $t, z \in I$ için

$$[t, z] = [t^*, z] \text{ veya } d(t) = d(t^*)$$

olur.

Şimdi $A = \{t \in I \mid [t, z] = [t^*, z], \forall z \in I\}$ ve $B = \{t \in I \mid d(t) = d(t^*)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , I nin altgruplarıdır ve $I = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi şeklinde yazılamayacağından $I = A$ veya $I = B$ dir.

Kabul edelim ki $I = A$ olsun. Bu durumda (5.21) eşitliğinde $[t, z] = [t^*, z]$ olması kullanılırsa her $x, z \in I$ için $[x^*, z]Id(x) = (0)$ elde edilir. Elde edilen bu denklemde z yerine z^* yazılıp $[t, z] = [t^*, z]$ olduğu kullanılırsa her $x, z \in I$ için $[x, z]^*Id(x) = (0)$ ifadesine ulaşılır. Ulaşılan bu son ifade ve (5.21) numaralı eşitlik düşünülüp *Lemma 4.1.7* dikkate alınır her $x, z \in I$ için

$$[x, z] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

olur.

Şimdi $C = \{x \in I \mid [x, z] = 0, \forall z \in I\}$ ve $D = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , I nin altgrupları ve $I = C \cup D$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $I = C$ veya $I = D$ dir. Eğer $I = C$ ise her $x, z \in I$ için $[x, z] = 0$ dır. Bu durumda *Teorem 5.3-(i)* de R halkasının değişmeli olduğu gösterilmiştir. Diğer yandan $I = D$ ise her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Buradan benzer şekilde $d = 0$ bulunur.

Şimdi kabul edelim ki $I = B$ olsun. O zaman her $t \in I$ için $d(t) = d(t^*)$ dır. (5.21) eşitliğinde x yerine x^* yazılırsa her $x, y \in I$ için $[x^*, y]Id(x^*) = (0)$ elde edilir. Burada $d(t) = d(t^*)$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[x^*, y]Id(x) = (0)$ olur. Bu ifadede y yerine y^* yazılırsa $[x, y]^*Id(x) = (0)$ elde edilir. Ayrıca (5.21) eşitliğinden her $x, y \in I$ için $[x, y]Id(x) = (0)$ dır. Böylece Lemma 4.1.7 den her $x, y \in I$ için

$$[x, y] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

elde edilir.

Şimdi $K = \{x \in I \mid [x, y] = 0, \forall y \in I\}$ ve $L = \{x \in I \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L , I nın altgrupları ve $I = K \cup L$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $I = K$ veya $I = L$ dir. Eğer $I = K$ ise her $x, y \in I$ için $[x, y] = 0$ dır. Böylece R değişmelidir. Diğer yandan $I = L$ ise her $x \in I$ için $d(x) = 0$ dır. Benzer şekilde $d = 0$ olur. O halde her $x, y \in I$ için $F(xy) = x^*F(y)$ dır. Yani F sağ $*$ –merkezileştiricidir.

Sonuç 5.4: R , $*$ –asal halka ve F, R üzerinde d sol $*$ –türevi ile belirli genelleştirilmiş sol $*$ –türev, I, R halkasının sıfırdan farklı bir $*$ –ideali olsun. F , sıfırdan farklı, $*$ ile değişmeli ve R üzerinde sağ $*$ –merkezileştirici olsun. F, I üzerinde homomorfizma ise R halkası değişmelidir.

İspat: F sağ $*$ –merkezileştirici ve homomorfizma olduğundan her $x, y \in I$ için

$$F(x)F(y) = F(xy) = x^*F(y) \quad (5.22)$$

dır. (5.22) eşitliği sağdan $F(y)$ parantezine alınırsa her $x, y \in I$ için

$$(F(x) - x^*)F(y) = 0 \quad (5.23)$$

elde edilir. (5.23) eşitliğinde $z \in I$ olmak üzere y yerine z^*y yazılırsa her $x, y, z \in I$ için $(F(x) - x^*)F(z^*y) = 0$ bulunur. Böylece F sağ $*$ –merkezileştirici olduğundan $(F(x) - x^*)zF(y) = 0$ denkleminde y yerine y^* yazılıp F in $*$ ile değişmeli olması kullanılırsa her $x, y, z \in I$ için $(F(x) - x^*)zF(y)^* = 0$ olur. Elde edilen denklemler her $x, y \in I$ için $(F(x) - x^*)IF(y) = (0)$ ve $(F(x) - x^*)IF(y)^* = (0)$ şeklinde düzenlenebilir. Böylece Lemma 4.1.7 kullanılırsa her $x, y \in I$ için $(F(x) - x^*) = 0$ veya $F(y) = 0$ olur.

Kabul edelim ki her $x \in I$ için $F(x) = x^*$ olsun. Bu durumda her $x, y \in I$ için $F(xy) = (xy)^*$ dır. Böylece involüsyon tanımından $F(xy) = (xy)^* = y^*x^*$ elde edilir. Öte yandan, F homomorfizma olduğundan $F(xy) = F(x)F(y)$ dir. Burada $F(x) = x^*$ olduğu kullanılırsa $F(xy) = x^*y^*$ elde edilir. Böylece her $x, y \in I$ için $y^*x^* = x^*y^*$ olur. Burada y yerine y^* ve x yerine x^* yazılıp Lie komütatör işlemi özelliği kullanılırsa her $x, y \in I$ için $[x, y] = 0$ elde edilir. O halde R değişmelidir.

Şimdi kabul edelim ki her $y \in I$ için $F(y) = 0$ olsun. Buradan $F(I) = 0$ elde edilir. O zaman $t \in I$ ve $r \in R$ için $tr \in I$ olduğundan her $t \in I, r \in R$ için $F(tr) = 0$ olur. Ayrıca F sağ $*$ –merkezileştirici olduğundan $F(tr) = t^*F(r)$ dir. Böylece $k \in R$ olmak üzere t yerine kt yazılırsa $(kt)^*F(r) = 0$ elde edilir. O zaman $t^*k^*F(r) = 0$ dır. Burada k yerine k^* yazılırsa her $t \in I, k, r \in R$ için $t^*kF(r) = 0$ denkleminde ulaşılır. O halde her $k \in R$ için $t^*RF(r) = (0)$ dır. Ayrıca t yerine t^* alınırsa $tRF(r) = (0)$ olur. Böylece R $*$ –asal halka olduğundan her $t \in I$ için $t = 0$ veya her $r \in R$ için $F(r) = 0$ dır. Eğer her $t \in I$ için $t = 0$ ise $I = (0)$ dır. Ancak bu sonuç I $*$ –idealinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. O halde her $r \in R$ için $F(r) = 0$ dır. Bu durumda $F = 0$ olur. Ancak bu sonuç F genelleştirilmiş sol $*$ –türevinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Yani her iki durumdan da çelişki gelmektedir. O halde R halkası değişmelidir.

Teorem 5.5: R karakteristiği ikiden farklı bir $*$ –asal halka, $F: R \rightarrow R$, d sol $*$ –türevi ile belirli genelleştirilmiş bir sol $*$ –türev, U , R halkasının sıfırdan farklı ve $U \not\subseteq Z(R)$ olan $*$ –kare kapalı bir Lie ideal olsun.

(i) F , U üzerinde homomorfizma ise F , U üzerinde sağ $*$ –merkezileştiricidir.

(ii) F , U üzerinde anti-homomorfizma ise F , U üzerinde sağ $*$ –merkezileştiricidir.

İspat (i) F , U üzerinde homomorfizma olsun. O zaman her $x, y \in U$ için Uyarı 2.35 den $2xy \in U$ ve R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğundan $F(2xy) = 2F(xy) = 2F(x)F(y) = F(x)F(y)$ elde edilir. Buradan her $x, y, z \in U$ için

$$F(xyz) = F(x(yz)) = x^*F(yz) + (yz)d(x) = x^*F(y)F(z) + yzd(x)$$

ifadesine ulaşılır. Aynı ifade farklı şekilde açılırsa her $x, y, z \in U$ için

$$F(xyz) = F((xy)z) = F(xy)F(z) = x^*F(y)F(z) + yd(x)F(z)$$

olur. Bu eşitlikler birlikte düşünülüp soldan $x^*F(y)F(z)$ nin toplamsal tersi eklenir ve kalan ifade soldan y parantezine alınır her $x, y, z \in U$ için $y(zd(x) - d(x)F(z)) = 0$ elde edilir. Böylece her $x, z \in U$ için $U(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$ dır. Bu eşitlik $a \in U$ olmak üzere soldan a ile çarpılırsa her $a, x, z \in U$ için $aU(zd(x) - d(x)F(z)) =$

(0) ifadesine ulaşılır. Üstelik $U * -\text{Lie}$ ideal olduğundan $a^* \in U$ dur. O halde bir önceki eşitlikte a yerine a^* yazılırsa her $a, x, z \in U$ için $a^*U(zd(x) - d(x)F(z)) = (0)$ elde edilir. Böylece son elde edilen iki denklem birlikte düşünülür ve *Lemma 4.3.2* den yararlanılırsa $a = 0$ veya $zd(x) - d(x)F(z) = 0$ dır.

Eğer her $a \in U$ için $a = 0$ ise $U = (0)$ dır. Ancak bu sonuç $U * -\text{Lie}$ idealinin sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Dolayısıyla her $x, z \in U$ için $zd(x) = d(x)F(z)$ dir. Burada *Uyarı 2.35* den x yerine $2xy$ yazılıp R halkasının karakteristiği ikiden farklı olduğu kullanılırsa $zd(xy) = d(xy)F(z)$ eşitliği elde edilir. Buradan ifadeyi eşitliğin bir yanında toplayıp, d nin sol $*$ -türev olduğu kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $zx^*d(y) + zyd(x) - x^*d(y)F(z) - yzd(x) = 0$ bulunur. Bu ifadede $zd(x) = d(x)F(z)$ olması kullanılırsa $zx^*d(y) + zyd(x) - x^*zd(y) - yzd(x) = 0$ elde edilir. Burada Lie komütatör işlemi özelliği kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $[z, x^*]d(y) + [z, y]d(x) = 0$ olur. Böylece z yerine y yazılırsa $[y, x^*]d(y) = 0$ elde edilir. Yine Lie komütatör işlemi özelliklerinden yararlanılırsa her $x, y \in U$ için $[x^*, y]d(y) = 0$ denkleminde ulaşılır.

Ulaşılan bu eşitlikte x yerine x^* yazılırsa $[x, y]d(y) = 0$ elde edilir. Burada $k \in U$ olmak üzere *Uyarı 2.35* den x yerine $2xk$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olduğu kullanılırsa her $x, y, k \in U$ için $[xk, y]d(y) = 0$ elde edilir. Ayrıca Lie komütatör işlemi özelliğinden bu ifade ayrılırsa $x[k, y]d(y) + [x, y]kd(y) = 0$ olur. Elde edilen bu ifadede her $x, y \in U$ için $[x, y]d(y) = 0$ olması kullanılırsa $[x, y]kd(y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla her $x, y \in U$ için

$$[x, y]Ud(y) = (0) \quad (5.24)$$

olur.

Özel olarak $y \in U \cap S_*(R)$ olsun. O halde (5.24) eşitliğinden her $x \in U, y \in U \cap S_*(R)$ için $[x, y]Ud(y) = (0)$ dır. Burada x yerine x^* yazılır ve $y^* = \pm y$ olması kullanılırsa her $x \in U, y \in U \cap S_*(R)$ için $[x, y]^*Ud(y) = (0)$ elde edilir. Böylece *Lemma 4.3.2* den her $x \in U, y \in U \cap S_*(R)$ için $[x, y] = 0$ veya $d(y) = 0$ dır.

Öte yandan her $t \in U$ için $t - t^* \in S_*(R)$ olduğundan $t - t^* \in U \cap S_*(R)$ dir. Burada y yerine $t - t^*$ yazılırsa $[x, t - t^*] = 0$ veya $d(t - t^*) = 0$ denklemlerine ulaşılır. O halde her $x, t \in U$ için

$$[x, t] = [x, t^*] \text{ veya } d(t) = d(t^*)$$

eşitlikleri elde edilir .

Şimdi $A = \{t \in U \mid [x, t] = [x, t^*], \forall x \in U\}$ ve $B = \{t \in U \mid d(t) = d(t^*)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , U nun altgruplarıdır ve $U = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = A$ veya $U = B$ dir.

Kabul edelim ki $U = A$ olsun. Bu durumda (5.24) eşitliğinde $[x, t] = [x, t^*]$ olduğu kullanılırsa her $x, y \in U$ için $[x, y^*]Ud(y) = (0)$ elde edilir. Burada x yerine x^* yazılır ve gerekli düzenleme yapılırsa $[x, y]^*Ud(y) = (0)$ olur. Elde edilen bu son eşitlik ve (5.24) eşitliği ile birlikte düşünülüp *Lemma 4.3.2* kullanılırsa her $x, y \in U$ için

$$[x, y] = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

olur.

Şimdi $C = \{y \in U \mid [x, y] = 0, \forall x \in U\}$ ve $D = \{y \in U \mid d(y) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , U nun altgrupları ve $U = C \cup D$ dir. Ancak bir grup iki öz altgrupunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = C$ veya $U = D$ dir. Eğer $U = C$ ise her $x, y \in U$ için $[x, y] = 0$ dir. Ancak burada *Lemma 4.3.4* kullanılırsa çelişki elde edilir. O halde $U = D$ dir. Bu durumda her $y \in U$ için $d(y) = 0$ dir. *Lemma 3.2.2* den $k \in U$ ve $r \in R$ olmak üzere $2[y, k]r \in U$ olduğundan y yerine $2[y, k]r$ yazılıp, R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $y, k \in U, r \in R$ için $d([y, k]r) = 0$ elde edilir. Burada d nin sol $*$ -türev olması kullanılırsa $[y, k]^*d(r) = 0$ olur. Böylece Lie komütatör işlemi özelliğinden her $y, k \in U, r \in R$ için $[y^*, k^*]d(r) = 0$ bulunur. Burada y yerine y^* , k yerine k^* yazılırsa her $y, k \in U, r \in R$ için

$$[y, k]d(r) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte $m \in U$ olmak üzere *Uyarı 2.35* den y yerine $2ym$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $y, k, m \in U, r \in R$ için $[ym, k]d(r) = 0$ elde edilir. Elde edilen bu ifadede Lie komütatör işlemi özelliği ve $[y, k]d(r) = 0$ olması kullanılırsa her $y, k, m \in U, r \in R$ için $[y, k]md(r) = 0$ eşitliğine ulaşılır. Böylece her $y, k \in U, r \in R$ için $[y, k]Ud(r) = (0)$ dır. Ayrıca y yerine y^* , k yerine k^* yazılırsa her $y, k \in U, r \in R$ için $[y, k]^*Ud(r) = (0)$ elde edilir. Elde edilen bu son eşitlik ve (5.24) eşitliği ile birlikte düşünülüp *Lemma 4.3.2* kullanılırsa her $y, k \in U$ için $[y, k] = 0$ veya her $r \in R$ için $d(r) = 0$ dır.

Eğer her $y, k \in U$ için $[y, k] = 0$ ise *Lemma 4.3.4* den $U \subset Z(R)$ elde edilir. Ancak bu sonuç $U \not\subset Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde her $r \in R$ için $d(r) = 0$ dır. Buradan $d(R) = 0$ elde edilir. Bu ise $d = 0$ demektir.

Şimdi kabul edelim ki $I = B$ olsun. Bu durumda her $t \in U$ için $d(t) = d(t^*)$ dır. O zaman (5.24) eşitliğinde x yerine x^* ve y yerine y^* yazılırsa her $x, y \in U$ için $[x, y]^* U d(y) = (0)$ elde edilir. Böylece *Lemma 4.3.2* den her $x, y \in U$ için

$$[x, y] = 0 \text{ veya } d(y) = 0$$

olur. Buradan benzer şekilde $d = 0$ elde edilir.

Şimdi $K = \{x \in U \mid [x, y] = 0, \forall y \in U\}$ ve $L = \{y \in U \mid d(y) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L , U nun altgrupları ve $U = K \cup L$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = K$ veya $U = L$ dir. Eğer $U = K$ ise her $x, y \in U$ için $[x, y] = 0$ dır. Ancak *Lemma 4.3.4* den bu durum çelişki belirtir. O halde $U = L$ dir. Bu durumda her $y \in U$ için $d(y) = 0$ olur. Böylece yukarıda gösterildiği gibi devam edilirse $d = 0$ elde edilir.

O halde her durumda $d = 0$ olduğuna ulaşılmıştır. Böylece F , U üzerinde sağ *-merkezileştiricidir.

(ii) Kabul edelim ki F , U üzerinde anti-homomorfizma olsun. F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol *-türev olduğundan her $x, y \in U$ için $F(xy) = F(y)F(x)$ ve $F(xy) = x^*F(y) + yd(x)$ eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler birlikte düşünüldüğünde her $x, y \in U$ için $x^*F(y) + yd(x) = F(y)F(x)$ elde edilir. Burada *Uyarı 2.35* den y yerine $2xy$ yazılırsa

$$x^*F(2xy) + 2xyd(x) = F(2xy)F(x)$$

elde edilir. Burada R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x, y \in U$ için $x^*F(xy) + xyd(x) = F(xy)F(x)$ olur. Böylece F anti-homomorfizma ve genelleştirilmiş sol *-türev olduğundan

$$x^*F(y)F(x) + xyd(x) = x^*F(y)F(x) + yd(x)F(x)$$

bulunur. Bulunan bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa her $x, y \in U$ için $xyd(x) = yd(x)F(x)$ elde edilir. Burada $z \in U$ olmak üzere y yerine $2zy$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $xzyd(x) = zyd(x)F(x)$ elde edilir. O zaman $xyd(x) = yd(x)F(x)$ eşitliğinden yararlanılırsa her $x, y, z \in U$ için $xzyd(x) = zxyd(x)$ bulunur. Burada Lie komütatör işlemi özelliği kullanılırsa her $x, y, z \in U$ için $[x, z]yd(x) = 0$ eşitliğine ulaşılır. Böylece her $x, z \in U$ için

$$[x, z]Ud(x) = (0) \tag{5.25}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki özel olarak $x \in U \cap S_*(R)$ olsun. O halde (5.25) eşitliğinden her $z \in U, x \in U \cap S_*(R)$ için $[x, z]Ud(x) = (0)$ dır. Burada x yerine x^* , z yerine z^* yazılıp $x^* = \pm x$ olması kullanılırsa her $z \in U, x \in U \cap S_*(R)$ için $[x, z]^*Ud(x) = (0)$ elde edilir. Böylece *Lemma 4.3.2* den her $z \in U$ ve her $x \in U \cap S_*(R)$ için $[x, z] = 0$ veya $d(x) = 0$ dır.

Öte yandan her $t \in U$ için $t - t^* \in S_*(R)$ olduğundan $t - t^* \in U \cap S_*(R)$ dir. Bu durumda x yerine $t - t^*$ yazılırsa $[t - t^*, z] = 0$ veya $d(t - t^*) = 0$ denklemlerine ulaşılır. Böylece her $z, t \in U$ için

$$[t, z] = [t^*, z] \text{ veya } d(t) = d(t^*)$$

olur.

Şimdi $A = \{t \in U \mid [t, z] = [t^*, z], \forall z \in U\}$ ve $B = \{t \in U \mid d(t) = d(t^*)\}$ kümelerini tanımlayalım. A ve B , U nun altgruplarıdır ve $U = A \cup B$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = A$ veya $U = B$ dir.

Kabul edelim ki $U = A$ olsun. Bu durumda (5.25) eşitliğinde $[t, z] = [t^*, z]$ olması kullanılırsa her $x, z \in U$ için $[x^*, z]Ud(x) = (0)$ elde edilir. Burada z yerine z^* yazılırsa her $x, z \in U$ için $[x, z]^*Ud(x) = (0)$ olur. Elde edilen bu son eşitlik ve (5.25) eşitliği ile birlikte düşünülüp *Lemma 4.3.2* kullanılırsa her $x, z \in U$ için

$$[x, z] = 0 \text{ veya } d(x) = 0$$

bulunur.

Şimdi $C = \{x \in U \mid [x, z] = 0, \forall z \in U\}$ ve $D = \{x \in U \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. C ve D , U nun altgruplarıdır ve $U = C \cup D$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = C$ veya $U = D$ dir. Eğer $U = C$ ise her $x, y \in U$ için $[x, y] = 0$ dır. Buradan *Lemma 4.3.4* den $U \subset Z(R)$ elde edilir. Ancak bu sonuç $U \not\subset Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde $U = D$ dir. Bu durumda her $y \in U$ için $d(y) = 0$ dır. Buradan (i) şıkkındaki gibi devam edilirse $d = 0$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki $U = B$ olsun. O zaman her $t \in U$ için $d(t) = d(t^*)$ dır. Bu durumda (5.25) eşitliğinde x yerine x^* ve z yerine z^* yazılırsa her $x, z \in U$ için $[x, z]^*Ud(x) = (0)$ elde edilir. Elde edilen bu son eşitlik ve (5.25) eşitliği ile birlikte düşünülüp *Lemma 4.3.2* kullanılırsa her $x, z \in U$ için $[x, z] = 0$ veya $d(x) = 0$ elde edilir.

Şimdi $K = \{x \in U \mid [x, z] = 0, \forall z \in U\}$ ve $L = \{x \in U \mid d(x) = 0\}$ kümelerini tanımlayalım. K ve L , U nun altgruplarıdır ve $U = K \cup L$ dir. Ancak bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamayacağından $U = K$ veya $U = L$ dir. Eğer $U = K$ ise her $x, z \in U$ için $[x, z] = 0$ olur. Ancak bu sonuç *Lemma 4.3.4* den çelişkiye sebep olur. O

halde $U = L$ dir. Bu durumda her $x \in U$ için $d(x) = 0$ dır. Buradan benzer şekilde $d = 0$ elde edilir. O halde F , U üzerinde sağ $*$ –merkezileştiricidir.

Sonuç 5.6: R karakteristiği ikiden farklı $*$ –asal halka, $F: R \rightarrow R$, d sol $*$ –türevi ile belirli genelleştirilmiş sol $*$ –türev, U , R halkasının sıfırdan farklı $*$ –Lie ideal olsun. F , $*$ ile değişmeli ve R üzerinde sağ $*$ –merkezileştirici olsun. F, U üzerinde homomorfizma ise $F = 0$ dır.

İspat: F sağ $*$ –merkezileştirici ve homomorfizma olduğundan her $x, y \in I$ için $F(x)F(y) = F(xy) = x^*F(y)$ dir. Bu ifade $F(y)$ parantezine alınırsa her $x, y \in U$ için $(F(x) - x^*)F(y) = 0$ elde edilir. Burada $z \in U$ olmak üzere *Uyarı 2.35* den y yerine $2zy$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa $(F(x) - x^*)F(zy) = 0$ olur. O zaman F genelleştirilmiş sol $*$ –türev olduğundan her $x, y, z \in U$ için $(F(x) - x^*)z^*F(y) = 0$ elde edilir. Burada z yerine z^* yazılırsa her $x, y, z \in U$ için $(F(x) - x^*)zF(y) = 0$ eşitliğine ulaşılır. O halde $x, y \in U$ için $(F(x) - x^*)UF(y) = (0)$ dır. Bu eşitlikte y yerine y^* yazılıp F in $*$ ile değişmeli olduğu kullanılırsa her $x, y \in U$ için

$$(F(x) - x^*)UF^*(y) = (0)$$

elde edilir. Son elde edilen iki eşitlik birlikte düşünülüp *Lemma 4.3.2* kullanılırsa her $x, y \in U$ için $F(x) = x^*$ veya $F(y) = 0$ bulunur.

Kabul edelim ki her $x \in U$ için $F(x) = x^*$ olsun. Bu durumda *Uyarı 2.35* den x yerine $2xy$ yazılıp R halkasının karakteristiğinin ikiden farklı olması kullanılırsa her $x, y \in U$ için $F(xy) = (xy)^*$ elde edilir. Böylece involüsyon tanımından $F(xy) = (xy)^* = y^*x^*$ olur. Öte yandan F homomorfizma olduğundan her $x, y \in U$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ dir. Kabulden $F(x) = x^*$ ve $F(y) = y^*$ eşitlikleri düşünülürse $F(xy) = x^*y^*$ olur. Böylece her $x, y \in U$ için $y^*x^* = x^*y^*$ elde edilir. Burada y yerine y^* ve x yerine x^* yazılıp Lie komütatör işlemi özelliği dikkate alınırsa her $x, y \in U$ için $[x, y] = 0$ elde edilir. O halde *Lemma 4.3.4* den $U \subset Z(R)$ dir. Ancak bu sonuç $U \not\subset Z(R)$ olmasıyla çelişir. O halde her $y \in U$ için $F(y) = 0$ dır.

Bu durumda $F(U) = 0$ olur. Böylece $x \in U$ ve $r \in R$ için $[x, r] \in U$ olması kullanılırsa her $x \in U, r \in R$ için $F([x, r]) = 0$ elde edilir. Lie komütatör işlemi özelliğinden yararlanılırsa $F(xr - rx) = 0$ ifadesine ulaşılır. Buradan F in sağ $*$ –merkezileştirici olduğu kullanılırsa her $x \in U, r \in R$ için $x^*F(r) - r^*F(x) = 0$ elde edilir. Bu ifadede her $y \in U$ için $F(y) = 0$ olduğu kullanılırsa $x^*F(r) = 0$ olur. Elde edilen bu denklemde x yerine x^* yazılırsa her $x \in U, r \in R$ için $xF(r) = 0$ elde edilir. Böylece her $r \in R$ için $UF(r) = (0)$ dır. Bu ifadede $s \in R$ olmak üzere soldan s ile

çarpılırsa her $r, s \in R$ için $sUF(r) = (0)$ elde edilir. Bu eşitlikte s yerine s^* yazılırsa her $r, s \in R$ için $s^*UF(r) = (0)$ olur. Elde edilen son iki eşitlik birlikte düşünülüp *Lemma 4.3.2* kullanılırsa $s = 0$ veya $F(r) = 0$ elde edilir. Eğer her $s \in R$ için $s = 0$ ise $R = (0)$ olur. Ancak bu sonuç çelişkiye sebep olur. O halde her $r \in R$ için $F(r) = 0$ dır. Böylece $F = 0$ dır.

Teorem 5.7: R bir $*$ –involüsyonlu halka ve $T: R \rightarrow R$ bir Jordan $*$ –merkezileştirici olsun.

(i) $R, *$ –yariasal halka ve T, R üzerinde homomorfizma ise T dönüşümü R nin merkezindedir.

(ii) $R, *$ –asal halka ve T, R üzerinde anti-homomorfizma ve $T *$ ile değişmeli ise $T = 0$ veya T dönüşümü bir involüsyondur.

İspat: (i) Kabul edelim ki $R, *$ –yariasal halka ve T, R üzerinde homomorfizma olsun. O halde her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(x)T(y)$ dir. Üstelik T, R üzerinde Jordan $*$ –merkezileştirici olduğundan her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x^*$ dır. *Lemma 3.3.1* den $T(xy) = T(y)x^*$ elde edilir. Elde edilen bu denklemlerden her $x, y \in R$ için $T(x)T(y) = T(y)x^*$ elde edilir. Burada $z \in R$ için, y yerine zy yazılırsa $T(x)T(zy) = T(zy)x^*$ elde edilir. Böylece *Lemma 3.3.1* den $T(x)T(y)z^* = T(y)z^*x^*$ olur. Bu ifadede $T(x)T(y) = T(y)x^*$ olduğu kullanıldığında $T(y)x^*z^* = T(y)z^*x^*$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla her $x, y, z \in R$ için $T(y)[x^*, z^*] = 0$ elde edilir. Burada x yerine x^* ve y yerine y^* yazılırsa

$$T(y)[x, z] = 0 \quad (5.26)$$

elde edilir. (5.26) denkleminde $t \in R$ için x yerine tx yazılır ve yine aynı denklem kullanılarak düzenlenirse her $x, y, z, t \in R$ için

$$T(y)t[x, z] = 0 \quad (5.27)$$

denklemine ulaşılır.

Diğer taraftan (5.26) denkleminde yine $t \in R$ için x yerine tx yazılır, aynı denklem kullanılır ve daha sonra x yerine x^* ve y yerine y^* alınarak gerekli düzenleme yapılırsa her $x, y, z, t \in R$ için

$$T(y)t[x, z]^* = 0 \quad (5.28)$$

elde edilir. (5.27) ve (5.28) denklemlerinin her ikisinde de $s \in R$ için t yerine st yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılarak bu iki denklem birlikte düşünülürse her $x, y, z, t, s \in R$ için $T(y)st[x, z] = 0 = T(y)st[x, z]^*$ ulaşılır. Diğer taraftan (5.27) ve (5.28) denklemlerinin her ikisinde de soldan $s \in R$ ile çarpılırsa her $x, y, z, t, s \in R$ için $sT(y)t[x, z] = 0 = sT(y)t[x, z]^*$ olur. Ulaşılan son iki denklem birlikte düşünülüp Lie komütatör işlemi özelliği kullanılırsa

$$[T(y), s]t[x, z] = 0 = [T(y), s]t[x, z]^*$$

elde edilir. Burada $s = z$ ve $x = T(y)$ alınırsa her $y, z, t \in R$ için $[T(y), z]t[T(y), z] = 0 = [T(y), z]t[T(y), z]^*$ elde edilir. O halde her $y, z \in R$ için

$$[T(y), z]R[T(y), z] = (0) = [T(y), z]R[T(y), z]^*$$

dır. R $*$ -yariasal halka olduğundan her $y, z \in R$ için $[T(y), z] = 0$ elde edilir. Buradan $[T(R), R] = 0$ dır. Dolayısıyla $T(R) \subset Z(R)$ dır.

(ii) Kabul edelim ki R $*$ -asal halka ve T, R üzerinde anti-homomorfizma olsun. O halde her $x, y \in R$ için $T(xy) = T(y)T(x)$ dır. Üstelik T, R üzerinde Jordan $*$ -merkezileştirici olduğundan her $x \in R$ için $T(x^2) = T(x)x^*$ dır. O zaman Lemma 3.3.1 den $T(xy) = T(y)x^*$ olur. Elde edilen bu iki denklemden $T(y)T(x) = T(y)x^*$ elde edilir. Bu ifade soldan $T(y)$ parantezine alındığında her $x, y \in R$ için $T(y)(T(x) - x^*) = 0$ olur. Burada $z \in R$ için y yerine zy yazılıp Lemma 3.3.1 kullanılırsa $T(y)z^*(T(x) - x^*) = 0$ denklemi elde edilir. Bu ifadede z yerine z^* yazılırsa $T(y)z(T(x) - x^*) = 0$ elde edilir. Buradan her $x, y \in R$ için $T(y)R(T(x) - x^*) = (0)$ olur. Elde edilen bu eşitlikte y yerine y^* yazılır ve T nin $*$ ile değişmeli olduğu kullanılırsa $T^*(y)R(T(x) - x^*) = (0)$ bulunur. Elde edilen son iki denklem birlikte düşünülür ve R halkasının $*$ -asal halka olduğu kullanılırsa her $x, y \in R$ için $T(y) = 0$ veya $T(x) = x^*$ elde edilir. Eğer her $y \in R$ için $T(y) = 0$ ise o zaman $T = 0$ dır. Diğer taraftan her $x \in R$ için $T(x) = x^*$ ise T bir involüsyondur.

KAYNAKLAR

- Ashraf M., Rehmann N., 2000. On Lie Ideals and Jordan Left Derivation of Prime Rings. Arc. Math. (Brno) 36: 201-206.
- Ashraf M., Shakir. A., 2008. On generalized Jordan derivations in rings. Bull. Korean Math. Soc, 45 (2): 253–261.
- Bergen J., Herstein I.N., Kerr J.W., 1981. Lie Ideals and Derivations of Prime Rings. J. Algebra, 71: 259-267.
- Bresar M., 1991. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations. Glasgow Math. J., 33: 89-93.
- Herstein I. N., 1969. Topics in Ring Theory, Univ. Of Chicago Press, Chicago.
- Herstein I. N., 1970. On the Lie Structure of an Associative Ring. Journal of Algebra, 14: 561-571.
- Oukhtite L., Salhi S., 2006a. Derivations and Commutativity of $*$ –Prime Rings, Int. J. Contemp. Math. Sci., 9: 439-448.
- Oukhtite L., Salhi S., 2006b. On Commutativity of $*$ –Prime Rings, Glas. Mat. Ser. III. 41 (1): 57-64.
- Oukhtite L., Salhi S., 2009. Centralizing Automorphisms and Jordan Left Derivations on $*$ –Prime Rings, Advances in Algebra, 19-26.
- Oukhtite L., Taoufiq L., 2007. Left Derivations On $*$ –Prime Rings, International Journal Of Algebra, 1: 31-36.
- Posner E. C., 1957. Derivations Prime Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8: 1093-1100.
- Rehman N., Ansari A.Z., 2011. Additive mappings of semiprime rings with involution, The Alig. Bull. Math., 30 (1-2): 1-7.
- Rehman N., Ansari A.Z, 2014. Generalized left derivations acting as homomorphisms and anti-homomorphisms on Lie ideal of rings, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 22: 327-329.
- Rehman N., Ansari A.Z, Haetinger C., 2013. A Note on Homomorphisms and Anti-

Homomorphisms on $*$ - Ring, Thai Journal of Mathematics, 11 (3): 741-750.

Shakir A., 2011. On generalized left derivations in rings and Banach algebras, Aequat. Math., 81: 209-226.



ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Nihal YILMAZ

Doğum Yeri : Çan/Çanakkale

Doğum Tarihi : 08/10/1991

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi : Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü (2010-2014)

Bildiği Yabancı Diller : İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLER

Trakya Üniversiteler Birliği Lisansüstü Öğrenci Kongresi 29-30 Haziran 2016

Poster Sunumu

*-Asal Halkalar Üzerinde Homomorfizma ve Anti-Homomorfizmalar Üzerine Bir Not

İLETİŞİM

E-posta Adresi : 19nihal91@gmail.com