



YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

FEYYAZ KALMAZ



T.C.

ULUDAĞ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

FEYYAZ KALMAZ

PROF. DR. METİN ÖZTÜRK

(Danışman)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BURSA, 2016

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Feyyaz KALMAZ tarafından hazırlanan “Yalıncat Meromorf Fonksiyonlar Üzerine” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

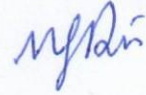
Başkan : Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK
U.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı



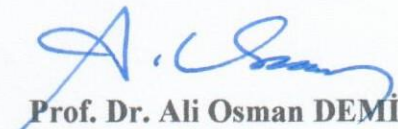
Üye : Prof. Dr. Sibel YALÇIN TOKGÖZ
U.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı



Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ
Karabük Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım


Prof. Dr. Ali Osman DEMİR
Enstitü Müdürü
01/08/2016

U.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

29/07/2016

Feyyaz KALMAZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YALINKAT MEROMORF FONKSİYONLAR ÜZERİNE

Feyyaz KALMAZ

Uludağ Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan analitik yalınkat fonksiyon sınıflarına ait temel kavramlar ve sonuçlar verildi.

Tezin ana bölümünü oluşturan ikinci bölümde, birim dairenin dışında tanımlı sonsuzda veya orijinde basit kutba sahip meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı ve bu sınıfın yıldızlı, konveks, konvekse yakın, $\alpha\alpha$ – mertebeden yıldızlı ve konveks gibi alt sınıfları tanımlandı. Bütün bu sınıflara ait fonksiyonların katsayı problemleri, distorsiyon ve büyüme sonuçları, integral temsilleri verildi. Ayrıca, bu sınıflar arasında mümkün olan geçişler üzerinde duruldu.

Tezin son bölümünde ise, kutbu orijin olmayan ancak birim dairede bir noktada basit kutba sahip meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı ile bu sınıfın çeşitli alt sınıfları tanımlandı. Önceki bölümde fonksiyon sınıfları için incelenen bütün özellikler, bu bölümde, bu sınıflar için de incelendi.

Anahtar Kelimeler: Meromorf yalınkat fonksiyonlar, Meromorf yıldızlı fonksiyonlar, Meromorf konveks fonksiyonlar.

2016, vii+92 sayfa

ABSTRACT

MSc Thesis

ON MEROMORPHIC UNIVALENT FUNCTIONS

Feyyaz KALMAZ

Uludağ University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK

This thesis consists of three parts. In the first section, the basic concepts and results belong to classes of analytic univalent functions that will be used in other sections were given.

In the second section which forms the main part of thesis, the class of meromorphic univalent functions defined out of the unit disc or have the simple pole at origin and the subclass of this class as starlike, convex, close-to-convex, starlike of order α and convex were identified. The coefficient problems, distortion, growth results and integral representation of the functions belong to all these classes were given. Furthermore, there was focused on possible transitions between these classes.

On the final part of the thesis, the class of meromorphic univalent functions which do not have a pole but have a simple pole on unit disc and some subclass of this class were described. The features examined for function classes in the previous section were examined for these classes as well in this section.

Key Words: Meromorphic univalent functions, Meromorphic starlike functions, Meromorphic convex functions

2016, vii+92 pages

TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın yűrűtűlmesi esnasında bűyűk bir sabır ile desteęini esirgemeyen, tezin ortaya çıkması aőamasında araőtırmalarımaya yűn veren danıőman hocam Sayın Prof. Dr. Metin ŐZTŪRK'e sonsuz teőekkűr ederim.

Hayatımın bűtűn evrelerinde her tűrlű kararımaya saygı gűsteren ve destek veren baőta babam Ahmet KALMAZ olmak űzere tűm aileme űkranlarımaya sunarım.

Feyyaz KALMAZ

29/07/2016

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER DİZİN	v
ŞEKİLLER DİZİN	vi
1. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR.....	1
1.1 Analitik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri.....	1
1.2 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri.....	3
1.3 SS Sınıfına Ait Fonksiyonların Özellikleri	7
1.4 Reel Kısmı Pozitif Analitik Fonksiyonlar ve Özellikleri	9
1.5 Yıldızıl ve Konveks Analitik Yalınkat Fonksiyonlar	12
1.6 kk –Katlı Simetrik Fonksiyonlar.....	16
1.7 $\alpha\alpha$ Mertebeli Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar	18
1.8 Konvekse Yakın Fonksiyonlar.....	22
1.9 Alfa Spiral Fonksiyonlar	23
1.10 Tipik Reel Fonksiyonlar.....	24
1.11 Alfa Konveks Fonksiyonlar.....	25
1.12 Bazı İntegral Eşitsizlikleri.....	27
2. MERMORF YALINKAT FONKSİYONLAR	
2.1 Meromorf Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri	29
2.2 Meromorf Yıldızıl ve Konveks Fonksiyonlar.....	43
2.3 $\alpha\alpha$ Mertebeli Meromorf Yıldızıl Fonksiyonlar.....	50
2.4 Konvekse Yakın Meromorf Fonksiyonlar.....	61
2.5 $\alpha\alpha$ – Spiral Meromorf Fonksiyonlar	65
2.6 Sınırlı Meromorf Fonksiyonlar	67
2.7 Tipik Reel Meromorf Fonksiyonlar	70
3. KUTBU ORİJİN OLMAYAN MEROMORF YALINKAT FONKSİYONLAR	
3.1 $SS(pp)$ sınıfı ve özellikleri	73
3.2 $SS(pp)$ sınıfının Konveks ve Yıldızıl Alt Sınıfları özellikler.....	81
KAYNAKLAR.....	88
ÖZGEÇMİŞ	91

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
\mathbb{C}	Kompleks sayılar kümesi
D_r	Orijin merkezli r yarıçaplı açık daire
DD	Açık birim daire
DD^*	Orijin çıkarılmış açık birim daire
DD^c	Birim dairenin dışı
$DD(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı açık daire
$\overline{DD}(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı dairenin kapanışı
$\partial DD(z_0, r)$	z_0 merkezli r yarıçaplı dairenin sınırı
$CC_r = \partial \partial DD(z_0, r)$	Orijin merkezli r yarıçaplı çember
$ff(DD)$	DD dairesinin ff fonksiyonu altındaki görüntü kümesi
$ff < gg$	ff fonksiyonu gg fonksiyonuna sabordinedir
$ff \circ gg$	ff ile gg fonksiyonlarının bileşkesi
ff^{-1}	ff fonksiyonunun tersi
$kk(z)$	Koebe fonksiyonu
$kk_{pp}(z)$	pp noktasında bir kutba sahip Koebe fonksiyonu
$Re ff$	ff fonksiyonunun reel kısmı
$Im ff$	ff fonksiyonunun imajiner kısmı
$rr^*(SS)$	SS sınıfının yıldızlılık yarıçapı
$r_{kk}(SS)$	SS sınıfının konvekslik yarıçapı
PP	Reel kısmı pozitif analitik fonksiyonların sınıfı
SS	Normalize edilmiş yalınkat analitik fonksiyonların sınıfı
MM	DD^{xx} bölgesinde tanımlı analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfı
MM_0	MM sınıfında ait sıfır değerini almayan fonksiyonların sınıfı
$AA(DD)$	Birim dairede tanımlı analitik fonksiyonların sınıfı
PPP	Reel kısmı pozitif ve reel katsayılı fonksiyonların sınıfı
$SS^{(kk)}$	Yalınkat kk –katlı simetrik fonksiyonların sınıfı
$SS^{(2)}$	Çift yalınkat fonksiyonların sınıfı
SSS	Yıldızıl fonksiyonların sınıfı
SSS^α	α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı
CCC	Konveks fonksiyonların sınıfı
CCC^α	α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfı
$\alpha - CCC$	α –konveks fonksiyonların sınıfı
CCC	Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı
$CCCC(pp)$	$SS(pp)$ sınıfına ait konveks fonksiyonların sınıfı
$SSSS(pp, ww_0)$	$SS(pp)$ sınıfına ait yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$SS^\alpha(pp)$	$SS(pp)$ sınıfına ait $-\phi \in PP$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$SS^\alpha(pp, ww_0)$	$SS(pp)$ sınıfına ait $pp \in PP$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı

$MMCC$	\mathbb{D}^{xx} bölgesinde konvekse yakın meromorf fonksiyonların sınıfı
MS	Meromorf yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$MMSSSS(\alpha\alpha)$	$\alpha\alpha$ –mertebeli meromorf yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$MMSSSS(\alpha\alpha)$	$MMSSSS(\alpha\alpha)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$MMCC$	Meromorf konveks fonksiyonların sınıfı
$MMCCCC(\alpha\alpha)$	$\alpha\alpha$ –mertebeli meromorf konveks fonksiyonların sınıfı
$MMCCCC(\alpha\alpha)$	$MMCCCC(\alpha\alpha)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$SSPP(\alpha\alpha)$	$\alpha\alpha$ –spiral fonksiyonların sınıfı
$MMSSPP(\alpha\alpha)$	$\alpha\alpha$ –spiral meromorf fonksiyonların sınıfı
$BBMM(mm)$	Alttan sınırlı meromorf fonksiyonların sınıfı
$BBMM(mm)$	$BBMM(mm)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların sınıfı
$BBMMSS(mm)$	$BBMM(mm)$ sınıfına ait yalınkat fonksiyonların sınıfı
$BBMMSS(mm)$	$BBMMSS(mm)$ sınıfına yalınkat fonksiyonların sınıfı
SPP	Tipik reel fonksiyonların sınıfı
MSP	Tipik reel meromorf fonksiyonların sınıfı
$MMSSPP^*$	Orijinde normalize edilmiş tipik reel meromorf fonksiyonların sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 CC_{rr} eğrisinin $ff \in MM$ fonksiyonu altındaki görüntüsü

Şekil 2.2 $CC_{\rho\rho}$, $\rho\rho > 1$, ve CC_1 eğrilerinin $ff \in MM$ fonksiyonu altındaki resim eğrileri arasında kalan bölge



1. ANALİTİK YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, gelecek bölümlerde benzerleri tanımlanacak olan, birim dairede analitik ve yalınkat olan fonksiyonların sınıfları üzerinde duruldu. Bu sınıflara ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve büyüme özellikleri verildi. Ayrıca, yine ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan belli bazı eşitsizlikler ifade edildi.

1.1 Analitik Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

UU kompleks düzlemde açık bir küme, $ff: UU \rightarrow \mathbb{C}$ kompleks değişkenli bir fonksiyon ve $zz_0 \in UU$ olsun. Eğer

$$\lim_{zz \rightarrow zz_0} \frac{ff(zz) - ff(zz_0)}{zz - zz_0}$$

limiti mevcut ise ff fonksiyonuna zz_0 noktasında **diferansiyellenebilir**, limit değerine ff fonksiyonunun zz_0 noktasındaki **türevi** denir. ff fonksiyonunun zz_0 noktasındaki türevi $ff'(zz_0)$ biçiminde gösterilir. Eğer ff fonksiyonu UU açık kümesinin bütün noktalarında diferansiyellenebilirse ff fonksiyonuna UU kümesinde **analitik** denir. Buna göre analitik fonksiyon, açık kümede tanımlı diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** denir. DD kompleks düzlemde bir bölge ve $ff: DD \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu bire-bir ise, ff fonksiyonuna DD 'de **yalınkat** veya **ünivalent** adı verilir. Başka bir ifadeyle, ff fonksiyonunun DD bölgesinde yalınkat olması, $zz_1 \neq zz_2$ özelliğinde bütün $zz_1, zz_2 \in DD$ noktaları için $ff(zz_1) \neq ff(zz_2)$ olmasını gerektirir. Geometrik olarak bu: $ff(DD)$ görüntü bölgesinin katlı bölge olmaması anlamına gelir.

¶ **Teorem.** ff fonksiyonu kompleks düzlemin bir DD bölgesinde analitik ve $zz_0 \in DD$ olsun. Eğer $ff'(zz_0) \neq 0$ ise uygun bir $rr > 0$ sayısı için ff fonksiyonu $DD(zz_0, rr) \subset DD$ dairelerinde yalınkattır (Palka 1991, s:348).

Genelde, 1.1.1 Teoreminin tersi doğru olmadığı gibi, karşıt tersi de doğru değildir. Ancak 1.4.6 Teoreminde görülebileceği gibi, ff fonksiyonu kompleks düzlemin konveks bir DD bölgesinde analitik ve her $zz \in DD$ için $Reff'(zz) \neq 0$ ise ff fonksiyonu DD 'de yalınkat

olur. Bununla birlikte, DD bölgesinde yalınkat bir fonksiyon DD 'nin bütün alt bölgelerinde de yalınkattır.

$[aa, bb]$ kapalı aralığında tanımlı $zz = gg(tt)$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir **eğri**, $gg([aa, bb])$ görüntü kümesine eğrinin **izi** veya **yörüngesi** denir. gg eğrisinin izini $CC = gg([aa, bb])$ ile göstereceğiz ve CC eğrisi denildiğinde eğrinin izinin kastedildiği anlaşılacak. $gg(aa)$ noktasına eğrinin **başlangıç noktası**, $gg(bb)$ noktasına ise, eğrinin **bitiş noktası** adı verilir. Başlangıç noktasından bitiş noktasına giden yön, eğrinin yönünü gösterir. Böyle bir eğri yönlendirilmiş olur. Her $tt \in [aa, bb]$ için $gg'(tt)$ mevcut ve $gg'(tt) \neq 0$ ise eğriye **düzgün eğri**, $[aa, bb]$ aralığının sonlu sayıda alt aralıklarında düzgün olan eğriye de **parçalı düzgün eğri** denilir. Kendi kendini kesmeyen eğriye **basit eğri**, $gg(aa)$ ve $gg(bb)$ uç noktaları eşit eğriye **kapalı eğri**, sadece uç noktalarında kesişen eğriye **basit kapalı eğri** veya **Jordan eğrisi** ve Jordan eğrisinin sınırladığı bölgeye de **Jordan bölgesi** denir. Kompleks düzlemin bir DD bölgesinde her basit kapalı eğrinin iç kısmı sadece DD bölgesinin noktalarından oluşmuş ise DD 'ye **basit bağlantılı bölge** adı verilir.

DD kompleks düzlemde bir bölge, $ff: DD \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $zz_0 \in DD$ olsun. zz_0 noktasında kesişen DD 'de yönlendirilmiş her CC_1 ve CC_2 düzgün eğri çiftinin zz_0 noktasında aralarındaki açı, $ff(CC_1)$ ve $ff(CC_2)$ görüntü eğrilerinin $ff(zz_0)$ noktasındaki açıya büyüklük olarak eşit, yön olarak aynı ise ff fonksiyonuna zz_0 **noktasında konform** denir.

Aşağıda, bir fonksiyonun bir noktada ve bir bölgede konform olmasını test eden iki tane sonuç verilecektir.

ℵ Teorem. ff fonksiyonu bir DD bölgesinde analitik ve $zz_0 \in DD$ olsun. Eğer $ff'(zz_0) \neq 0$ ise ff fonksiyonu zz_0 noktasında konformdur (Zill 2003, s:354).

ℬ Teorem. DD kompleks düzlemde bir bölge ve $ff: DD \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. ff fonksiyonunun DD bölgesinde konform olması için gerek ve yeter şart, ff fonksiyonunun DD 'de analitik ve yalınkat olmasıdır (Palka 1991, s:382).

Yerel yalınkatlık genel yalınkatlılığı gerektirmediyinden 1.1.3 Teoremi gereği yerel konformluk da genel konformluğu gerektirmez.

Yalınkat fonksiyon teorisinde kullanılan önemli sonuçlardan biri Riemann dönüşüm teoremidir. Bu teorem, kompleks düzlemin kendisi olmayan basit bağlantılı bir alt bölgesinin $\mathbb{D} = \{z: |z| < 1\}$ açık birim dairesi üzerine bire-bir ve analitik olarak dönüştüren bir dönüşümün varlığından bahseder.

¶ **Teorem. (Riemann Dönüşüm Teoremi)** DD , kompleks düzleminin basit bağlantılı bir alt bölgesi ve $DD \neq \mathbb{C}$ olsun. DD bölgesini \mathbb{D} birim dairesi üzerine, bire-bir ve analitik (konform) olarak resmeden, $z_0 \in DD$ noktası için $ff(z_0) = 0$ ve $ff'(z_0) > 0$ özelliğinde bir tek ff fonksiyonu vardır (Palka 1991, s:420).

Riemann dönüşüm teoremi gereği, basit bağlantılı bir bölgede konform dönüşümlerle ilgili bir çok problemi çözmek için, bu bölge yerine ona konform olarak denk olan \mathbb{D} birim dairesini almak uygundur. Böylece, \mathbb{D} 'de elde edilen sonuçlar ona konform olarak denk olan bölgeye taşınabileceğinden, kolaylık açısından çalışmamızı birim daire veya birim dairenin dışı üzerinde yoğunlaştıracamız.

Çoğu zaman basit bağlantılı bir bölgenin, özellikle de birim dairenin konform dönüşüm altındaki görüntü kümesiyle ilgilenmek gerekli olacaktır. Aşağıdaki teorem görüntü kümesinin bulunmasında kolaylık sağlar.

¶ **Teorem.** ff fonksiyonu bir DD Jordan bölgesinde analitik, $CC = \partial DD$ üzerinde sürekli ve bire-bir olsun. Bu durumda, ff fonksiyonu DD bölgesini $ff(CC)$ Jordan eğrisinin sınırladığı bölge üzerine konform olarak resmeder (Pommerenke 1975, s:282).

Birim dairede tanımlı fonksiyonların modülüyle ilgili bir çok eşitsizliğin elde edilmesinde Schwarz lemması denilen aşağıdaki teorem önemli rol oynar.

¶ **Teorem. (Schwarz Lemma)** ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde analitik ve $ff(0) = 0$, $|ff(z)| < 1$ özelliklerini sağlasın. Bu durumda, her $z \in \mathbb{D}$ için $|ff(z)| \leq |z|$ ve $|ff'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik, θ reel sayı olmak üzere, $ff(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu için geçerlidir.

1.2 Analitik Yalınkat Fonksiyonlar ve Temel Özellikleri

\mathbb{D} birim dairesinde analitik, yalınkat, $ff(0) = ff'(0) - 1 = 0$ bağıntısını sağlayan ve orijin civarında

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1.1)$$

biçiminde seri açılımına sahip bir fonksiyona **normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyon** denir. \mathbb{D} 'de normalize edilmiş bütün analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı \mathcal{S} ile gösterilir. Aşağıda, \mathcal{S} sınıfına ait fonksiyonların belli başlı bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır. Bunlardan birincisi \mathcal{S} sınıfının bazı elementer dönüşümler altında değişmez kaldığıdır.

1.2.1 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ ve $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıda tanımlanan g fonksiyonu da \mathcal{S} sınıfına aittir.

(i) $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $g(z) = e^{i\theta} f(e^{-i\theta} z)$ $\sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n$ rotasyonu,

(ii) $0 < r < 1$ için $g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n$ genişmesi,

(iii) $|\alpha| < 1$ ve $\varphi(z) = (z + \alpha)/(1 + \bar{\alpha}z)$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{f(\varphi(z)) - f(\alpha)}{(1 - |\alpha|^2)f'(\alpha)} = z + \frac{(1 - |\alpha|^2)f''(\alpha) - 2\alpha f'(\alpha)}{2f'(\alpha)} z^2 + \dots$$

disk otomorfizmi,

(iv) $k = 2, 3, \dots$ için

$$\begin{aligned} g(z) &= [f(z^k)]^{1/k} = z \frac{f(z^k)^{1/k}}{z^k} \\ &= z + \frac{ka_2}{k} z^{k+1} + \frac{1}{2k^2} [2ka_3 - (k-1)a_2^2] z^{2k+1} + \dots \end{aligned}$$

n . kök dönüşümü

(v) $w \notin f(\mathbb{D})$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)} = z + (a_2 + 1/w)z^2 + \dots$$

atlanmış değer dönüşümü,

(vi) $\varphi\varphi, ff$ fonksiyonunun değer kümesi üzerinde yalınkat ve analitik bir fonksiyon olmak üzere $gg = \varphi\varphi \circ ff$ bileşke dönüşümü (Goodman 1983, vol. I, s:18).

SS sınıfına ait önemli fonksiyonlardan biri; $zz \in \mathbb{D}$ için $kk(zz) = zz/(1 - zz)^2$ **Koebe fonksiyonudur**. Bu fonksiyon açık birim daireyi $\mathbb{C} \setminus \{ww: -\infty < ww \leq -1/4\}$ bölgesi üzerine bire-bir olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonunun rotasyonu, $kk_{ii}(zz) = zz/\diamond - ee^{iii}zz^2$ fonksiyonu açık birim daireyi orijinden çıkan ışının $-ee^{-iii}/4$ noktasından ∞ 'a uzanan parçası hariç, bütün kompleks düzlem üzerine bire-bir olarak resmeder. $zz \in \mathbb{D}$ ve $\alpha\alpha \in (0,2]$ olmak üzere, $ff(zz) = \frac{1}{2\alpha\alpha} \frac{1+zz}{1-zz} - 1$ **genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu** SS sınıfına ait önemli fonksiyonlardan bir diğeridir.

(1.1) açılımıyla verilen SS sınıfına ait fonksiyonların aa_{nn} katsayıları için $|aa_{nn}| \leq nn$ ($nn = 2,3, \dots$) eşitsizliği **Bieberbach tahmini** olarak bilinir. Bieberbach (1916) tarafından verilen bu tahmin ancak De Branges (1985) tarafından ispatlanabilmiştir. Aşağıdaki teorem bu tahmini ifade eder.

1.2.2 Teorem. (Bieberbach Tahmini) $ff \in SS$ fonksiyonu (1.1) açılımı ile verilmiş olsun. Bu durumda her $nn \geq 2$ için $|aa_{nn}| \leq nn$ dir. Eşitlik $ff(zz) = kk_{ii}(zz)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Aşağıda SS sınıfına ait fonksiyonlar altında kompakt dairelerin görüntü bölgesinin alanı ile ilgili bir sonuç verilecektir. Teoremin ispatı, 2.bölümde verilecek olan Alan teoreminin ispatında kullanılacağından burada verilecektir.

1.2.3 Teorem. $ff \in SS$ ve $\diamond = \{zz: |zz| \leq rr < 1\}$ olsun. Bu durumda $ff(\diamond)$ bölgesinin alanı

$$AA(rr) = \pi \sum_{nn=1}^{\infty} |aa_{nn}|^2 rr^{2nn} \quad (1.2)$$

dir.

İspat. $z = x + ii$ ve $w = ff(z) = uu(z) + iiii(z)$ olsun. ff bölgesinin alanı

$$AA(rr) = \frac{duuddii}{ff} = \frac{\partial\partial(uu, ii)}{\partial\partial(xx, ii)}$$

eşitliği ile verilir. $ff = uu + iiii$ fonksiyonu analitik olduğundan,

$$\frac{\partial\partial(uu, ii)}{\partial\partial(xx, ii)} = uu_{xx} + iiii_{xx} = uu_{xx}^2 + iiii_{xx}^2 = |ff'(zz)|^2$$

ve $z = \rho e^{ii}$

$$AA(rr) = \int_0^{2\pi} \int_0^r |ff'(zz)|^2 dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^r |ff'|^2 \rho d\rho d\theta \quad (1.3)$$

olur. (1.1) bağıntısı gereği

$$ff' = 1 + 2aa_2\rho\rho e^{ii} + \dots + nna_m\rho\rho^{m-1} e^{ii(m-1)} + \dots$$

olduğundan,

$$|ff'|^2 = ff' \overline{ff'} = \sum_{n=1}^{\infty} |aa_n|^2 \rho^{2n-2} + \sum_{kk \neq 0} e^{iikk}$$

olarak yazılabilir. Burada aa_{kk} katsayıları aa_m ve $\rho\rho$ 'ya bağlıdır. Bu ifade (1.3) bağıntısında yerine yazılır, düzgün yakınsaklıktan dolayı terim terime integrali alınır ve $kk \neq 0$ için

$$\int_0^{2\pi} \int_0^r e^{iikk} d\rho d\theta = 0 \text{ olduğuna dikkat edilirse (1.2) eşitliği elde edilir. ■}$$

1.2.4 Açıklama. (i) Eğer $0 < rr < 1$ için $AA(rr) \leq mm < \infty$ ise, $NN = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$SS_{NN}(rr) = \pi \sum_{nm=1}^{NN} |aa_m|^2 rr^{2nm} \leq mm$$

dir. $S_{NN}(rr)$ kısmi toplamlar dizisi monoton artan ve üstten sınırlı bir dizi olduğundan, $rr \rightarrow 1^-$ iken limiti mevcuttur. O halde,

$$SS_{NN} = SS_{NN}(1) = \pi \sum_{n=1}^{NN} |a_n|^2 \leq \pi NN$$

elde edilir. (SS_{NN}) kısmi toplamlar dizisi sınırlı ve $\sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$ serisi yakınsak olduğundan $NN \rightarrow \infty$ için

$$AA = \lim_{r \rightarrow 1^-} AA(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \quad (1.4)$$

elde edilir.

(ii) $AA = \pi(1 + 2|a_2|^2 + \dots) \geq \pi$ olduğundan $ff(z) = z$ fonksiyonu için $AA = \pi$ olup, diğer bütün $ff \in SS$ fonksiyonlar için $AA \geq \pi$ dir.

(iii) Eğer $AA(r)$ sınırlı değilse $r \rightarrow 1^-$ iken (1.4) bağıntısındaki seri ıraksak ve $AA = \infty$ olur.

1.3 SS Sınıfına Ait Fonksiyonların Özellikleri

$|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, SS sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili bazı sonuçların elde edilmesinde önemli rol oynar. Bu sonuçlar yalnızca fonksiyonlar teorisinin temel teoremleri olarak bilinir. Bunlardan birincisi, Koebe 1/4 –teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki teoremdir. Bu teorem SS sınıfına ait fonksiyonların görüntü bölgesinin daima 1/4 yarıçaplı merkezi açık bir daireyi bulundurduğunu ifade eder.

1.3.1 Teorem. $ff \in SS$ ise $ff(\mathbb{D}) \supset \mathbb{D}_{1/4}$ dır. Eşitlik $ff(z) = k_{ii}(z)$ fonksiyonu için sağlanır. Üstelik, $\bigcap_{ff \in SS} ff(\mathbb{D}) = \mathbb{D}_{1/4}$ dır (Duren 1983, s:31).

SS sınıfına ait fonksiyonlar için önemli sonuçlardan biri de aşağıda verilen distorsiyon ve büyüme sonucudur.

1.3.2 Teorem. $ff \in SS$ ve $z = r e^{i\theta} \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |ff(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2},$$

$$\frac{1-rr}{(1+rr)^3} \leq |ff'(zz)| \leq \frac{1+rr}{(1-rr)^3},$$

$$\frac{1-rr}{1+rr} \leq \frac{zzff'(zz)}{ff'(zz)} \leq \frac{1+rr}{1-rr}$$

dir. Her üç bağıntıda eşitlik, $ff(z) = kk_{ii}(zz)$ fonksiyonu için geçerlidir (Bieberbach 1916).

SS sınıfına ait fonksiyonlar için yukarıda verilen özelliklerin yanında aşağıdaki özellikler de verilebilir.

1.3.3 Teorem. $ff \in SS$ ve $zz = rre^{i\theta} \in \mathbb{DD}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{zzff''(zz)}{ff'(zz)} \leq \frac{2rr^2 + 4rr}{1-rr^2}, \quad |ff''(zz)| \leq \frac{2(2+rr)(1-rr)^4}{1-rr^2}$$

$$\frac{2rr^2 - 4rr}{1-rr^2} \leq \operatorname{Re} \frac{zzff''(zz)}{ff'(zz)} \leq \frac{2rr^2 + 4}{1-rr^2}$$

dir. Her üç bağıntıda eşitlik, $ff(z) = kk_{ii}(zz)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Aşağıdaki sonuç, birim dairede analitik fonksiyonlar için yalınkatlık kriteri olarak kullanılabilir.

1.3.4 Teorem. $zz \in \mathbb{DD}$ ve $ff(z) = zz + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m$ olsun. Eğer $\sum_{m=2}^{\infty} m|a_m| \leq 1$ ise ff fonksiyonu \mathbb{DD} dairesinde yalınkattır.

İspat. $zz, ww \in \mathbb{DD}$ ve $zz \neq ww$ için

$$\begin{aligned} |ff(zz) - ff(ww)| &= |zz - ww + \sum_{k=2}^{\infty} a_k (z^k - w^k)| \\ &\geq |zz - ww| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| (|z|^{k-1} + \dots + |w|^{k-1}) \\ &\geq |zz - ww| - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| |z|^{k-1} > 0 \end{aligned}$$

olur. Yani $ff(zz) \neq ff(ww)$ dir. Dolayısıyla, ff fonksiyonu \mathbb{DD} 'de yalınkat olur.■

SS sınıfının önemli bir topolojik özelliğinden bahsederek bu kısmı tamamlayalım.

1.3.5 Teorem. S sınıfı, \mathbb{DD} dairesinde tanımlı analitik fonksiyonların sınıfının kompakt alt kümesidir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:18).

1.4 Reel Kısmı Pozitif Analitik Fonksiyonlar ve Özellikleri

\mathbb{DD} dairesinde analitik, $ff(0) = 1$ ve $zz \in \mathbb{DD}$ için $Re\{ff(zz)\} > 0$ özelliklerini sağlayan

$$ff(zz) = 1 + pp_1zz + pp_2zz^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} pp_n z^n \quad (1.5)$$

açılımına sahip fonksiyonlara **reel kısmı pozitif analitik fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı PP ile gösterilir. $zz \in \mathbb{DD}$ için,

$$pp(zz) = \frac{1 + zz}{1 - zz} \quad (1.6)$$

fonksiyonu PP sınıfına ait önemli bir fonksiyon olup, birim daireyi $HH = \{ww : Re ww > 0\}$ sağ yarı düzlem üzerine konform olarak resmeder. SS sınıfında Koebe fonksiyonunun oynadığı rolü, pp fonksiyonu PP sınıfında oynar.

PP sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olması gerekmez. Örneğin, $nn \geq 2$ tamsayısı için, $ff(zz) = 1 + zz^{nn}$ fonksiyonu PP sınıfına ait olmasına rağmen \mathbb{DD} dairesinde yalınkat değildir. Bununla birlikte, PP sınıfı konveks ve kompakttır (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:32).

1.4.1 Tanım ff ve gg fonksiyonları \mathbb{DD} dairesinde analitik olsun. Her $zz \in \mathbb{DD}$ için $ff(zz) = gg(ww(zz))$ olacak biçimde $ww(0) = 0$ ve $|ww(zz)| < 1$ özelliğinde \mathbb{DD} dairesinde analitik bir ww fonksiyonu varsa, ff fonksiyonu gg fonksiyonuna **sabordine** denir ve bu durum $ff < gg$ biçiminde gösterilir.

Tanımda verilen ww fonksiyonunun Schwarz lemmasının şartlarını sağladığı açıktır. Aşağıdaki teorem sabordine fonksiyonların geometrik yorumunu vermektedir.

1.4.2 Teorem. ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde analitik, gg fonksiyonu da analitik ve yalınkat olsun. Bu durumda,

$$ff < gg \Leftrightarrow ff(0) = gg(0) \text{ ve } ff(\mathbb{D}) \subset gg(\mathbb{D})$$

dir. Genelde $ff < gg$ ise her bir $rr \in (0,1)$ için $DD_{rr} = \{zz: |zz| < rr\}$ olmak üzere, $ff(DD_{rr}) \subset gg(DD_{rr})$ dir (Goodman 1983, vol: I s:86).

PP sınıfına ait fonksiyonlar (1.6) ile verilen pp fonksiyonuna sabordinedir. Bunun tersi de doğrudur. Yani, $ff \in PP \Leftrightarrow ff < pp$ dir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:28).

PP sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini elde etmek mümkündür. Herglotz (1911)'un temsil teoremi bununla ilgilidir.

1.4.3 Teorem. (Herglotz temsil teoremi) ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde analitik, $ff(0) = 1$ ve $zz \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$ff \in PP \Leftrightarrow ff(zz) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + z\bar{z}e^{i\theta}}{1 - z\bar{z}e^{i\theta}} d\theta \quad (1.7)$$

olacak biçimde $dd(2\pi) - dd(0) = 1$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir dd fonksiyonu vardır (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:31).

Herglotz temsil teoremi PP sınıfına ait fonksiyonların büyüklük ve distorsiyon sonuçlarının elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır.

1.4.4 Teorem. $ff \in PP$ ve $zz = rre^{i\alpha} \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1-rr}{1+rr} \leq |ff(zz)| \leq \frac{1+rr}{1-rr},$$

$$|ff'(zz)| \leq \frac{2}{(1-rr)^2}$$

dir. Eşitlik, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $ff(zz) = pp(e^{i\alpha}zz)$ fonksiyonu için geçerlidir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:31).

1.4.5 Teorem. $f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}_n$ $|p_n| \leq 2$ dir. Eşitlik, $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = p + i\alpha z$ fonksiyonu için geçerlidir (Duren 1983, s:41).

Aşağıda konveks bölgeler ile ilgili iki yalınkatlık testi verilmiştir.

1.4.6 Teorem. D kompleks düzlemde konveks bir bölge ve her $z \in D$ olsun. Belli bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için,

$$\operatorname{Re} \{ i\alpha f'(z) \} > 0$$

ise f fonksiyonu D 'de yalınkattır (Noshiro, 1935) ve (Warchawski, 1935).

1.4.7 Teorem. D kompleks düzlemde bir bölge, f ve φ fonksiyonları D bölgesinde analitik, φ fonksiyonu D bölgesinde yalınkat ve $\varphi(D)$ konveks bir bölge olsun. Bu durumda her $z \in D$ için,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} \right\} > 0$$

ise, f fonksiyonu D 'de yalınkattır (Ozaki, 1935) ve (Kaplan, 1952).

1.4.8 Teorem. $z \in D$ ve $\mathcal{P}(\alpha) = \{f \in \mathcal{P} : \operatorname{Re}[f(z)] > \alpha, 0 \leq \alpha < 1\}$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{P}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + (1 - 2\alpha)z e^{-i\theta}}{1 - z e^{i\theta}} d\theta$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir d fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Üstelik, $f \in \mathcal{P}(\alpha)$ fonksiyonu (1.5) açılımına sahip ise $|p_n| \leq 2(1 - \alpha)$ dir. Eşitlik θ reel sayı olmak üzere $f(z) = 1 + (1 - 2\alpha)z e^{-i\theta} - z e^{-i\theta}$ fonksiyonu için sağlanır (Goodman 1983, vol: I s:105).

\mathcal{P} sınıfına ait reel katsayılı fonksiyonların sınıfı \mathcal{P} ile gösterilirse, Herlogtz temsil teoremi ile verilen integral temsili, \mathcal{P} sınıfına ait fonksiyonlar için de verilebilir.

1.4.9 Teorem. Bir gg fonksiyonunun $PPPP$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart



$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos \theta + z^2} d\theta \quad (1.7a)$$

olacak şekilde $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ özelliğinde, reel değerli, azalmayan bir $d\theta$ fonksiyonu vardır.

1.5 Yıldızlı ve Konveks Analitik Yalınkat Fonksiyonlar

Bu kısımda SS sınıfına ait fonksiyonların görüntü bölgelerinin yıldızlı veya konveks olması durumunda oluşan alt sınıflar tanımlanıp, bu sınıflara ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve büyüme özellikleri verilecektir.

Kompleks düzlemde herhangi w_0 ve w noktalarını birleştiren doğru parçası $[w_0, w] = \{(1 - t)w_0 + tw : 0 \leq t \leq 1\}$ biçiminde tanımlanır. AA kompleks düzlemde bir küme ve $w_0 \in AA$ sabit noktası verilmiş olsun. Eğer her $w \in AA$ noktası için $[w_0, w] \subset AA$ ise AA kümesine w_0 **noktasına göre yıldızlı** ve her $w_1, w_2 \in AA$ noktaları için $[w_1, w_2] \subset AA$ ise AA kümesine **konveks** denir. Buna göre konveks küme, her bir noktaya göre yıldızlı olan kümedir.

f fonksiyonu $DD_r = \{z : |z| < r, 0 < r \leq 1\}$ bölgesinde analitik, yalınkat ve $z_0 \in DD_r$ olsun. Eğer $f(DD_r)$ görüntü bölgesi $w_0 = f(z_0)$ noktasına göre yıldızlı ise f fonksiyonuna DD_r bölgesinde z_0 **noktasına göre yıldızlı** denir. Orijine göre yıldızlı bir fonksiyona **yıldızlı fonksiyon** adı verilir. Eğer $f(DD_r)$ bölgesi konveks ise f fonksiyonuna DD_r de **konveks fonksiyon** denir. DD_r dairesinde yıldızlı ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, $SSSS(DD_r)$ ve $CCCC(DD_r)$ ile gösterilir. Özel olarak, $DD = DD_1$ de (1.1) biçiminde bir Taylor açılımına sahip yıldızlı ve konveks fonksiyonların sınıfları sırasıyla, $SSSS$ ve $CCCC$ ile gösterilir.

γ, \mathbb{C} de $z(t) = x(t) + i y(t)$, $a \leq t \leq b$ parametrik ifadesi ile verilmiş düzgün bir eğri ve f fonksiyonu γ eğrisini bulunduran bir bölgede analitik olsun. $f(\gamma) = \Gamma$, $w_0 \notin \Gamma$ ve $w \in \Gamma$ olduğunu kabul edelim. Eğer $\arg(w - w_0)$, t değişkeninin azalmayan tek değişkenli bir fonksiyonu, yani $a \leq t \leq b$ için

$$\frac{d}{dt} \arg(w - w_0) \geq 0$$

ise, Γ eğrisine w_0 noktasına göre yıldızlı eğri denir. Eğer Γ eğrisine teğet olan doğrunun tt argümenti tt değişkeninin azalmayan bir fonksiyonu, yani $aa \leq tt \leq bb$ için

$$\frac{d}{d} = \frac{dd}{dtt} \arg[ff'(zz)zz'(tt)] \geq 0$$

ise Γ eğrisi **konveks eğri** olarak adlandırılır.

Aşağıdaki teorem yıldızlı ve konveks fonksiyonların analitik ifadesini verir.

1.5.1 Teorem. $ff: \mathbb{DD} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon, $ff(0) = 0$, $ff'(0) \neq 0$ ve $zz \in \mathbb{DD}$ olsun.

Bu durumda,

$$(i) \quad ff \in SSSS \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \frac{zzff'(zz)}{ff(zz)} \right\} > 0$$

$$(ii) \quad ff \in CCCC \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \frac{zzff''(zz)}{ff'(zz)} \right\} > -1$$

dır (Goodman 1983, vol: I s:111).

Konvekslik için başka çift gerektirmeli sonuçlar Sheil–Small (1969) ve Suffridge (1970) tarafından verilmiştir.

1.5.2 Teorem. $ff: \mathbb{DD} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $\zeta\zeta, zz \in \mathbb{DD}$ olsun. Bu durumda,

$$ff \in CCCC \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \frac{2zzff'(zz)}{ff(zz) - ff(\zeta\zeta)} - \frac{zz + \zeta\zeta}{zz - \zeta\zeta} \right\} > 0$$

dır.

1.5.2 Teoreminin bir sonucu, aşağıda verilen konvekslik kriteridir.

1.5.3 Sonuç. $ff: \mathbb{DD} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik ve $|\zeta\zeta| < |zz| < 1$ olsun. Bu durumda

$$ff \in CCCC \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left\{ \frac{zzff'(zz)}{ff(zz) - ff(\zeta\zeta)} \right\} > 0$$

dır.

1.5.1 Teoreminden $SSSS$ ve $CCCC$ sınıfları arasında oldukça kullanışlı olan aşağıdaki bağıntıyı elde etmek mümkündür. Bu bağıntı ilk olarak Alexander (1915) tarafından elde edilmiştir.

1.5.4 Teorem. $ff: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu analitik olsun. Bu durumda,

$$ff \in CCCC \Leftrightarrow zzff' \in SSSS$$

ve

$$ff \in SSSS \Leftrightarrow \frac{z}{\zeta} \frac{ff'}{\zeta} \in CCCC$$

dir.

Koebe fonksiyonu ve rotasyonları $SSSS$ sınıfına ait olduğundan 1.3.2 Teoreminde verilen SS sınıfı için büyüme ve distorsiyon sonuçları $SSSS$ sınıfı için de geçerlidir.

1.5.5 Teorem. $ff \in SSSS$ ve $|zz| = rr < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{rr}{(1+rr)^2} \leq |ff(zz)| \leq \frac{rr}{(1-rr)^2}$$

$$\frac{1-rr}{(1+rr)^3} \leq |ff'(zz)| \leq \frac{1+rr}{(1-rr)^3}$$

dür. Eşitlik hali, Koebe fonksiyonu ve onun uygun bir rotasyonu için geçerlidir (Goodman 1983, vol: I s:117).

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonlar için büyüme ve distorsiyon sonucunu verir.

1.5.6 Teorem. $ff \in CCCC$ ve $|zz| = rr < 1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{rr}{1+rr} \leq |ff(zz)| \leq \frac{rr}{1-rr}$$

$$\frac{1}{(1+rr)^2} \leq |ff'(zz)| \leq \frac{1}{(1-rr)^2}$$

dir. Ayrıca, $ff(\mathbb{D}) \supset \{ww: |ww| < 1/2\}$ olup, $\theta\theta$ reel sayı olmak üzere, eşitlik $ff(zz) = zz/\theta - ee^{iii}zz$ fonksiyonu için geçerlidir.

SSSS ve CCCC sınıflarına ait fonksiyonlar için Nevanlinna (1920) ve Loewner (1923)'e ait katsayı sınırları aşağıdaki teoremden verilmiştir.

1.5.7 Teorem. ff fonksiyonu \mathbb{D} daresinde analitik ve (1.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda,

(i) $ff \in SSSS$ ise $|aa_n| \leq n$ dir. Eşitlik, Koebe fonksiyonu ve rotasyonları için geçerlidir.

(ii) $ff \in CCCC$ ise $|aa_n| \leq 1$ dir. Eşitlik, $\theta\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ff(zz) = zz/\theta - ee^{iii}zz$ fonksiyonu için geçerlidir.

Konveks fonksiyonlar için kullanışlı bir katsayı tahmini Hummel (1957) ve Trimble (1975) tarafından verilmiştir.

1.5.8 Teorem. $zz \in \mathbb{D}$ için $ff(zz) = zz + \sum_{m=2}^{\infty} aa_m zz^m$ dn

(i) $ff \in SS$ ise $|aa_3 - aa_2^2| \leq 1$ dir.

(ii) $ff \in CCCC$ ise $|aa_3 - aa_2^2| \leq (1 - |aa_2|^2)/3$ dür.

1.3.4 Teoreminde olduğu gibi, belli katsayı bağıntısını sağlayan fonksiyon sınıfları yıldızlı ve konveks olabilir.

1.5.9 Teorem. $zz \in \mathbb{D}$ için $ff(zz) = zz + \sum_{m=2}^{\infty} aa_m zz^m$ olsun. Bu durumda,

(i) $\sum_{m=2}^{\infty} m|aa_m| \leq 1$ ise $ff \in SSSS$ dir.

(ii) $\sum_{m=2}^{\infty} m^2|aa_m| \leq 1$ ise $ff \in CCCC$ dir.

Aşağıdaki teorem, yıldızlı fonksiyonlar altında \mathbb{D} daresinin görüntü bölgesinin alanı ile fonksiyonun katsayıları arasındaki bağıntıyı verir.

1.5.10 Teorem. $ff \in SSSS$ fonksiyonu (1.1) açılımına sahip ve $ff(\mathbb{DD})$ bölgesinin alanı AA olsun. Bu durumda $nn \geq 2$ için

$$|aa_m| \leq \frac{2}{n-1} \frac{A^{1/2}}{\pi}$$

dir.

1.5.11 Tanım. FF, SS sınıfının boş olmayan bir alt sınıfı olsun. FF sınıfındaki her bir fonksiyon $DD_{rr^*(FF)}$ dairesinde yıldızlı olacak biçimdeki en büyük $rr^*(FF)$ pozitif sayısına, FF sınıfının **yıldızlılık yarıçapı** ve FF sınıfındaki her bir fonksiyon $DD_{rr_{KK}(FF)}$ dairesinde konveks olacak şekilde en büyük $rr_{KK}(FF)$ pozitif sayısına da FF sınıfının **konvekslik yarıçapı** denir.

Nevanlinna (1920) ve H. Grunsky (1933) SS sınıfına ait fonksiyonlar için konvekslik ve yıldızlılık yarıçapının $rr_{KK}(SS) = \bar{2} - \sqrt{3}$ ve $rr^*(SS) = \tanh(\pi/4)$ olduğunu göstermişlerdir.

16 kk – Katlı Simetrik Fonksiyonlar

1.2.1 Teoreminden, $ff \in SS$ ve $kk = 2, 3, \dots$ için

$$gg(zz) = [ff(zz^{kk})]^{1/kk} \quad (1.8)$$

fonksiyonunun SS sınıfına ait olduğu biliniyor. (1.8) eşitliğinde \mathbb{DD} dairesini kendi üzerine kk defa resmeden $uu = zz^{kk}$ dönüşümü yapılırsa $ff(uu)$ fonksiyonu bu bölgeyi, $ww = 0$ noktasında uygun bir dalı ile birleşen $ff(\mathbb{DD})$ bölgesi üzerine kk defa resmeder. kk . kökü ise, bu kk – katlı yüzeyi tek katlı bir yüzeye dönüştürmüştür.

1.6.1 Tanım. kk pozitif bir tamsayı olsun. Eğer DD bölgesinin orijin etrafında $2\pi/kk$ açılık bir dönmesi DD 'yi kendi üzerine dönüştürüyorsa, DD bölgesine kk – **katlı simetrik bölge** denir. Eğer her $zz \in \mathbb{DD}$ için

$$ee^{-2\pi ii/kk} ff = e^{2\pi ii/kk} zz = ff(zz)$$

ise ff fonksiyonuna \mathbb{DD} dairesinde kk – **katlı simetrik fonksiyon** adı verilir.

Gronwall (1916), \mathbb{D} dairesinde kk –katlı simetrik analitik bir fonksiyonun seri açılımını aşağıdaki biçimde elde etmiştir.

1.6.2 Teorem. ff fonksiyonu \mathbb{D} bölgesinde analitik ve kk –katlı simetrik bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $zz \in \mathbb{D}$ için

$$ff(zz) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{nkk+1} z^{nkk+1} \quad (1.9)$$

biçiminde bir seri açılımına sahiptir. Tersine, (1.9) açılımı ile verilen ff fonksiyonu, serinin \mathbb{D} yakınsaklık dairesinde kk –katlı simetrik bir fonksiyondur.

Tanıma dikkat edilirse, kk –katlı simetrik fonksiyonların yalınkat olması gerekli değildir. Çalışmamızda yalınkat kk –katlı simetrik fonksiyonlar üzerinde duracağız. Bu yüzden birim dairede kk –katlı simetrik yalınkat fonksiyonların sınıfını çalışmak kaçınılmaz olmuştur. Her $zz \in \mathbb{D}$ için

$$ff(zz) = zz + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nkk+1} z^{nkk+1} \quad (1.10)$$

biçiminde bir açılıma sahip kk –katlı simetrik yalınkat fonksiyonların sınıfı $SS^{(kk)}$ ile gösterilir. Özel olarak, $kk = 2$ için $SS^{(2)}$, **çift yalınkat fonksiyonların** sınıfı olarak adlandırılır.

Graham ve Varolin (1996) $SS^{(kk)}$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıda verilen katsayı tahmini ve örtme sonuçlarını elde etmişlerdir.

1.6.3 Teorem. $ff \in SS^{(kk)}$ fonksiyonu (1.10) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$|b_{kk+1}| \leq \frac{2}{kk}$$

dır. Üstelik $\rho_{kk} = 4^{-1/kk}$ olmak üzere, $ff(\mathbb{D}) \supseteq \mathbb{D}_{\rho_{kk}}$ dır. Eşitlik, $gg(zz) = [kk(zz^{kk})]^{1/kk} = zz/(1 - zz^{kk})^{2/kk}$, kk –katlı simetrik Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

Graham ve Varolin (1996) konveks fonksiyonlar için $a_2 = a_3 = \dots = a_k = 0$ şartı altında k –katlı simetrikten daha zayıf olan aşağıdaki distorsiyon sonucunu elde etmişler- dir.

1.6.4 Teorem. \mathbb{D} dairesinde analitik $f(z) = z + a_{k+1}z^{k+1} + a_{k+2}z^{k+2} + \dots$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda

(i) $f \in \mathcal{CC}^k$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{1}{(1 + |z|^k)^{2/k}} \leq |f'(z)| \leq \frac{1}{(1 - |z|^k)^{2/k}}$$

dır.

(ii) $f \in \mathcal{SS}^k$ ise $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{|z|}{(1 + |z|^k)^{2/k}} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1 - |z|^k)^{2/k}}$$

dır. Birinci bağıntı için eşitlik: $k = 1$ iken $f_1(z) = z/(1 - z)$, $k = 2$ için $f_2(z) = 2^{-1} \log[(1 + z)/(1 - z)]$ ve $k \geq 3$ için $f_k(z) = \int_0^z (1 - w^k)^{-2/k} dw$ fonksiyonları için geçerlidir. İkinci bağıntı için eşitlik: $k \geq 1$ iken $g_k(z) = z f_k'(z)$ için geçerlidir.

1.7 α Mertebeli Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar

$f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu, $f(0) = 0$ ve $f'(0) \neq 0$ şartlarını sağlasın. Bu durumda, $0 \leq \alpha < 1$ ve $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z f'(z)}{f(z)} \right\} \geq \alpha$$

ise f fonksiyonuna α mertebeli yıldızlı fonksiyon,

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{z f''(z)}{f'(z)} \right\} \geq \alpha$$

ise f fonksiyonuna α mertebeli konveks fonksiyon denir (Robertson 1936).

$z \in \mathbb{D}$ için $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ biçiminde normalize edilmiş α mertebeli yıldızlı ve konveks fonksiyonların sınıfı, sırasıyla $SSSS(\alpha)$ ve $CCCC(\alpha)$ ile gösterilir. $SSSS(0) = SSS$ ve $CCCC(0) = CCCC$ olduğu açıktır. 1.5.4 Teoreminde verilen $SSSS$ ile $CCCC$ arasındaki ilişki, $SSSS(\alpha)$ ve $CCCC(\alpha)$ sınıfları arasında da mevcuttur.

1.7.1 Teorem. f fonksiyonu \mathbb{D} dairelerinde analitik olsun. Bu durumda $\beta = \frac{2\alpha - 1 + \sqrt{(2\alpha - 1)^2 + 8\alpha}}{4}$ olmak üzere

$$f \in CCCC(\alpha) \Leftrightarrow z f'(z) \in SSSS(\beta)$$

ve

$$f \in CCCC(\alpha) \Leftrightarrow f \in SSSS(\beta)$$

dir (Miller ve Mocanu, 2000).

$CCCC$ ile $SSSS(\alpha)$ sınıfları arasındaki önemli sonuçlardan biri Suffridge (1970)'ye ait olan aşağıdaki sonuçtur.

1.7.2 Teorem. $f \in CCCC$ ise $f \in SSSS(1/2)$ dir. Üstelik, $f \in CCCC$ ise $z \in \mathbb{D}$ için $\operatorname{Re}[f(z)/z] > 1/2$ dir. Sonuçlar kesin olup $1/2$ sabiti büyütülemez.

1.7.3 Teorem. f fonksiyonu \mathbb{D} dairelerinde analitik, $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda $[f(z)/z]^{1/(1-\alpha)} \Big|_{z=0} = 1$ ve $[f'(z)]^{1/(1-\alpha)} \Big|_{z=0} = 1$ olmak üzere,

$$f \in SSSS(\alpha) \Leftrightarrow z [f(z)/z]^{1/(1-\alpha)} \in SS$$

ve

$$f \in CCCC(\alpha) \Leftrightarrow z [f'(z)]^{1/(1-\alpha)} \in SS$$

dir (Ian Graham ve Gabriela Kohr 2003, s:56).

1.7.3 Teoremi kullanılarak α mertebeli konveks fonksiyonlar için Robertson (1936)'a ait olan büyüme ve distorsiyon özellikleri verilebilir.

1.7.4 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ için $f \in CCCC(\alpha)$ olsun. Bu durumda, $|z| = r < 1$ için

$$\frac{1}{(1+rr)^{2(1-\alpha\alpha)}} \leq |ff(zz)| \leq \frac{1}{(1-rr)^{2(1-\alpha\alpha)}} \quad (1.11)$$

dır. Eğer $\alpha\alpha \neq 1/2$ ise,

$$\frac{(1+rr)^{2\alpha\alpha-1} - 1}{2\alpha\alpha - 1} \leq |ff(zz)| \leq \frac{1 - (1-rr)^{2\alpha\alpha-1}}{2\alpha\alpha - 1}$$

ve $\alpha\alpha = 1/2$ ise,

$$\log(1+rr) \leq |ff(zz)| \leq -\log(1-rr)$$

dir. Eşitsizlikler kesin olup, eşitlik hali

$$ff(zz) = \begin{cases} \frac{1 - (1-zz)^{2\alpha\alpha-1}}{-\log(1-zz)}, & \alpha\alpha \neq 1/2 \\ \log(1-zz), & \alpha\alpha = 1/2 \end{cases} \quad (1.12)$$

fonksiyonu için geçerlidir.

1.7.3 Teoremi ve (1.11) bağıntısından $SSSS(\alpha\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki büyüme teoremi elde edilebilir.

1.7.5 Teorem. $\alpha\alpha \in [0,1)$ için $ff \in SSSS(\alpha\alpha)$ olsun. $|zz| = rr < 1$ olmak üzere,

$$\frac{rr}{(1+rr)^{2(1-\alpha\alpha)}} \leq |ff(zz)| \leq \frac{rr}{(1-rr)^{2(1-\alpha\alpha)}}$$

dır. Sınırlar kesin olup, eşitlik $ff(zz, \alpha\alpha) = zz(1-zz)^{-2(1-\alpha\alpha)}$ fonksiyonu için geçerlidir.

$\alpha\alpha$ mertebeli konveks fonksiyonlar için gerek ve yeter şartı ifade eden aşağıdaki teorem, Brown (1989) tarafından elde edilmiştir. Bu sonuç, $|\zeta\zeta| < 1$ için \mathbb{DD} 'de konveks bir fonksiyonun her $|zz - \zeta\zeta| < rr < 1 - |\zeta\zeta|$ dairesini konveks bir bölge üzerine dönüştürdüğünü gösterir.

1.7.6 Teorem. $\alpha\alpha \in [0,1)$ ve $ff: \mathbb{DD} \rightarrow \mathbb{C}$ normalize edilmiş analitik bir fonksiyon olsun.

$|\zeta\zeta| < 1$ ve $|zz - \zeta\zeta| < rr < 1 - |\zeta\zeta|$ olmak üzere

$$f \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow \Re \left\{ \frac{(z-\zeta) f''(z)}{f'(z)} \right\} < \alpha$$

dır.

Son olarak, $\mathcal{S}(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için Robertson (1936)'a ait katsayı tahminlerini verelim.

1.7.7 Teorem. $\alpha \in [0,1)$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun.

(i) $f(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} a_m z^m \in \mathcal{S}(\alpha)$ i \ddot{s} $m = 2, 3, \dots$ i \ddot{c} n

$$|a_m| \leq \frac{1}{(m-1)!} \int_{k=2}^{\infty} (k-2)\alpha$$

dır. E \ddot{s} itlik, $f(z, \alpha) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}$ fonksiyonu i \ddot{c} n ge \ddot{c} erlidir.

(ii) $g(z) = z + \sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m \in \mathcal{C}(\alpha)$ i \ddot{s} $m = 2, 3, \dots$ i \ddot{c} n

$$|b_m| \leq \frac{1}{m!} \int_{k=2}^{\infty} 2\alpha$$

dır. E \ddot{s} itlik (1.12)' de verilen fonksiyonlar i \ddot{c} n ge \ddot{c} erlidir.

A \ddot{s} a \ddot{g} ıdaki teorem, $\mathcal{S}(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıflarının integral temsilini vermektedir.

1.7.8 Teorem. $z \in \mathbb{D}$ olmak üzere,

$$f \in \mathcal{S}(\alpha) \Leftrightarrow f(z) = z \exp \left\{ \frac{(1-\alpha)}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \zeta - z e^{-i\theta} d\theta \right\}$$

ve

$$f \in \mathcal{C}(\alpha) \Leftrightarrow f(z) = \exp \left\{ \frac{(1-\alpha)}{\pi} \int_0^{2\pi} \log \zeta - z e^{-i\theta} d\theta \right\}$$

olacak bi \ddot{c} imde, $d(2\pi) - d(0) = 2\pi$ özelli \ddot{g} inde, azalmayan bir $d(\theta)$ fonksiyonu var-

dir.



1.7.9 Teorem. $z \in \mathbb{D}, 0 < \alpha < 1$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} \alpha^n |a_n| \leq 1 - \alpha$$

ise, $f \in SSSS(\alpha)$ dir. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n - \alpha) |a_n| \leq 1 - \alpha$$

ie $f \in CCCC(\alpha)$ dir

1.8 Konvekse Yakın Fonksiyonlar

f fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde analitik olsun. Her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{g'(z)} \geq 0 \quad (1.13)$$

olacak biçimde \mathbb{D} üzerinde tanımlı g konveks fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna \mathbb{D} üzerinde **konvekse yakın fonksiyon** denir.

1.5.4 Teoremi kullanılarak, (1.13) bağıntısı, \mathbb{D} üzerinde tanımlı yıldızlı bir h fonksiyonu için

$$\operatorname{Re} \frac{zff'(z)}{h(z)} \geq 0 \quad (1.14)$$

biçiminde verilebilir. Böylece, \mathbb{D} dairesinde yıldızlı olan bir f fonksiyonu aynı zamanda konvekse yakındır. \mathbb{D} dairesinde tanımlı (1.1) seri açılımına sahip konvekse yakın fonksiyonların sınıfı $CCCC$ ile gösterilir. Böylece önceki sınıflar da göz önüne alınarak

$CCCC \subset SSSS \subset CCCC \subset SS$ olduğu görülür. Reade (1955-56), konvekse yakın fonksiyonların katsayılarının Bieberbach tahminini sağladığını göstermiştir.

1.8.1 Teorem. \mathbb{D} dairesinde konvekse yakın f fonksiyonu (1.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. Bu durumda, her $n \geq 2$ için, $|a_n| \leq n$ dir. Eşitlik Koebe fonksiyonu ve

onun bir rotasyonu olması durumunda geçerlidir.



Aşağıdaki teoremde konvekse yakın fonksiyonların analitik temsili verilmiştir.

1.8.2 Teorem. ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde $ff(0) = ff'(0) - 1 = 0$ özelliğinde analitik bir fonksiyon olsun. $ff \in CCCC$ olması için gerek ve yeter şart, her bir $rr \in (0,1)$, $zz = rre^{i\theta}$ ve $2\pi > \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ şartını sağlayan her θ_1 ve θ_2 çifti için

$$\Re \frac{ff''(zz)}{ff'(zz)} > -\pi \quad (1.15)$$

olmasıdır.

1.9 Alfa Spiral Fonksiyonlar

ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde analitik ve (1.1) açılımına sahip bir fonksiyon olsun. $|\alpha| < \pi/2$ özelliğindeki α sayısı ve her $zz \in \mathbb{D}$ için, ff fonksiyonu

$$\Re \frac{zf'(zz)}{ff(zz)} > 0 \quad (1.16)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, ff fonksiyonuna \mathbb{D} dairesinde α –**spiral fonksiyon denir.**

α –spiral fonksiyonların sınıfı $SSPP(\alpha)$ ile gösterilir. Spacek (1932), $SSPP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların yalınkat olduğunu göstermiştir.

Aşağıdaki iki sonuç Spacek (1932)'e ait olup, $SSPP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsili verilir.

1.9.1 Teorem. $pp \in PP$ olmak üzere, $zz \in \mathbb{D}$ için

$$ff \in SSPP(\alpha) \Leftrightarrow ff(zz) = zz \exp^{-i\alpha} \cos \alpha \int_0^{\frac{zz}{1-zz}} \frac{1 - \zeta}{\zeta} d\zeta \quad (1.17)$$

dır.

(1.17) bağıntısında pp fonksiyonu $pp(zz) = (1 + zz)/(1 - zz)$ olarak alınırsa, $ss = e^{-i\alpha} \cos \alpha$ olmak üzere, ff fonksiyonu

$$ff(zz) = \frac{zz}{(1 - zz)^{2ss}}$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon $\alpha\alpha$ –**spiral Koebe fonksiyonu** olarak adlandırılır.

Zamorski (1960)'ye ait olan aşağıdaki sonuç, $SSPP(\alpha\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntısını ifade eder.

192 **Teorem.** $ff \in SSPP(\alpha\alpha)$ fonksiyonu (1.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$|a_n| \leq \frac{\prod_{k=1}^{n-1} |k+2\alpha-1|}{k} = \frac{1}{(n-1)!} \left(\prod_{k=1}^{n-1} (k+1) \right)^2 + 4k \cos^2 \alpha)^{1/2}$$

dir. Eşitsizlik $n \geq 2$ için kesin olup, eşitlik $\alpha\alpha$ –spiral Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları için geçerlidir.

1.10 Tipik Reel Fonksiyonlar

ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde analitik ve (1.1) açılımına sahip olsun. \mathbb{D} 'de reel olmayan her z değeri için

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} ff(z)) = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \text{ veya } \operatorname{Im} ff(z) (\operatorname{Im} z) \geq 0 \quad (1.18)$$

ise ff fonksiyonuna \mathbb{D} dairesinde **tipik reel fonksiyon** denir. \mathbb{D} dairesinde tipik reel fonksiyonların sınıfı $SSPP$ ile gösterilir.

$PPPP$ sınıfı ile $SSPP$ sınıfı arasındaki ilişki Rogosinski (1932) tarafından aşağıda verilmiştir.

1.10.1 **Teorem.** $gg \in PPPP$ ve $z \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda,

$$ff(z) = \frac{z}{1-z^2} gg(z) = z + p_1 z^2 + (p_2 + 1) z^3 + \dots \quad (1.19)$$

funksiyonu $SSPP$ sınıfına aittir. Tersine, $ff \in SSPP$ ise

$$gg(z) = \frac{1-ff(z)}{z} = 1 + a_2 z + (a_3 - 1) z^2 + \dots$$

funksiyonu $PPPP$ sınıfına aittir.

(1.19) ve (1.7) bağıntıları kullanılarak *SSPP* sınıfına ait fonksiyonlar için integral temsili verilebilir.



1.102 **Teorem.** ff fonksiyonunun $SSPP$ sınıfına ait olması için gerek ve yeter şart

$$ff(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z}{1 - 2z \cos \theta + z^2} d\theta \quad (1.20)$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ özelliğinde, reel değerli, azalmayan bir $d\theta$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır (Robertson, 1935).

Rogosinski (1932), $SSPP$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı bağıntısını elde etmiştir.

1.103 **Teorem.** $ff \in SSPP$ fonksiyonu (1.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda,

$$\frac{\sin m\theta}{\sin \theta} \leq \alpha_m \leq m$$

dir. Eşitlik,

$$k(\theta, z) = \frac{z}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = z + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\sin m\theta}{\sin \theta} z^m$$

fonksiyonu için geçerlidir.

1.11 Alfa Konveks Fonksiyonlar

İlk olarak Mocanu (1969), α -konveks fonksiyon kavramını tanımlamıştır.

ff , \mathbb{D} dairesinde (1.1) açılımına sahip analitik bir fonksiyon ve her $z \in \mathbb{D}$ için

$$\frac{zf(z)}{z} ff'(z) \neq 0$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ \alpha + \frac{zff''(z)}{ff'(z)} \right\} + \left(1 - \frac{zff'(z)}{ff(z)} \right) \geq 0 \quad (1.21)$$

ise ff fonksiyonuna \mathbb{D} dairesinde α -konveks fonksiyon denir. α -konveks fonksiyonların sınıfı $\alpha - CCCC$ ile gösterilir. Bu tanım, α sayısının kompleks olması durumunda da anlamlıdır.

Ancak biz $\alpha\alpha$ sayısını reel alacağız. $1 - CCCC = CCCC$ ve $0 - CCCC = SSSS$ diğ.



açıktır. Bu yüzden $\alpha - CCCC$ sınıfı konveks fonksiyonlardan yıldızlı fonksiyonlara “sürek- li” bir geçişi verir. Bununla birlikte, α sayısını $[0,1]$ aralığına kısıtlamanın gerekli ol- madığı görülecek.

1.11.1 **Teorem.** α reel sayı olmak üzere f fonksiyonu α –konveks olsun. Bu durumda,

(i) $\alpha \in \mathbb{R}$ için f fonksiyonu yıldızlıdır. Yani $\alpha - CCCC \subseteq SSSS$ dir.

(ii) $\alpha \geq 1$ ise, f fonksiyonu konvekstir. Yani $\alpha - CCCC \subseteq CCCC$ dir. (iii) $0 \leq \alpha < 1$ için $CCCC$

$\subseteq \alpha - CCCC$ dir.

(iv) $z \in \mathbb{D}$ için $l(z) = z$ özdeşlik dönüşümü olmak üzere, $\bigcap_{\alpha=0}^{\infty} \{\alpha - CCCC\} = \{l\}$ dir.

(v) $\alpha \leq -1$ iken $g(z) = 1/f(1/z)$ fonksiyonu $|z| > 1$ bölgesinde konvekstir.

Bu teorem, $\alpha - CCCC$ sınıfının α sayısı negatif olması durumunda artan, pozitif olması durumunda azalan olduğunu gösterir. O halde en geniş sınıf, $0 - CCCC = S^*$ sınıfıdır. Bü- tün durumlar için $\alpha - CCCC$ sınıfı, SS sınıfının bir alt sınıfı olur.

Aşağıdaki teorem, $\alpha \geq 0$ için $\alpha - CCCC$ ile $SSSS$ sınıfı arasındaki geçişi vermektedir.

1.11.2 **Teorem.** $z \in \mathbb{D}$ ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu durumda,

$$f \in \alpha - CCCC \Leftrightarrow g(z) = f(z) \frac{z f'(z)}{f(z)} \in SSS$$

dir. Tersine,

$$g \in SSSS \Leftrightarrow f(z) = \frac{1}{\alpha} \frac{z [g(\zeta)]^{1/\alpha}}{\zeta} \in \alpha - CCCC$$

dir. Burada kuvvet fonksiyonunun dalı $\frac{z f'(z)}{f(z)} \Big|_{z=0}^{\alpha} = 1$ olarak seçilmiştir.

$k(z) = z(1 - z^2)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun $SSSS$ sınıfı için ekstral fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa, 1.11.2 Teoreminden

$$k(z, \alpha) = \frac{1}{\alpha} \frac{z \zeta^{1/\alpha}}{\zeta(1-\zeta)^{2/\alpha}}$$

fonksiyonu da $\alpha - CCCC$ sınıfı için bir ekstral fonksiyon olup, bu fonksiyona $\alpha - \mathbf{kon-veks}$ **Koebe fonksiyonu** adı verilir.

$\alpha > 0$ için $\alpha - CCCC$ sınıfına ait fonksiyonlar için Miller (1973)'e ait büyüme sonucu aşağıda verilmiştir.

1.11.3 Teorem. $f \in \alpha - CCCC$ ve $z = re^{i\theta}$ olsun.

(i) $\alpha > 0$ için

$$k(-r, \alpha) \leq |f(z)| \leq k(r, \alpha)$$

dır.

(ii) $\alpha \geq 1$ için

$$\frac{\partial}{\partial r} k(-r, \alpha) \leq |f'(z)| \leq \frac{\partial}{\partial r} k(r, \alpha)$$

dır. Her iki durumda da eşitsizlik kesindir.

1.12 Bazı İntegral Eşitsizlikleri

1.12.1 Teorem. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu C_{α} eğrisi üzerinde analitik ve $\Gamma = f(C_{\alpha})$, bir D bölgesi üzerinde basit kapalı bir eğri olsun. Eğer D bölgesi orijini bulduruyor ve $g(\theta) = PPG'(\theta)$ olmak üzere, $g(\theta)$, θ üzerinde sürekli, pozitif, kesin monoton bir fonksiyon ise

$$I = \frac{d}{d\theta} \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta > 0 \quad (1.22)$$

dır. Eğer orijin D bölgesinin dışında ve $PPG'(\theta) > 0$ artan ise $I > 0$, azalan ise $I < 0$ dır (Goodman 1983, s:192).

1.12.2 Teorem. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) z_1, z_2, \dots, z_m ve w_1, w_2, \dots, w_m kompleks sayılar olmak üzere,

$$\sum_{k=1}^m |w_k z_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^m |w_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^m |z_k|^2 \right)$$

dir. Eşitlik, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için z_i ile w_i sayılarının orantılı olması durumunda geçerli- dir.

1.12.3 Teorem. (Aritmetik, Geometrik ve Harmonik Eşitsizlikler) a_1, a_2, \dots, a_m pozitif reel sayılar olmak üzere, bu sayıların aritmetik, geometrik ve harmonik ortalamaları sırasıyla

$$AA = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m a_k, \quad GG = \sqrt[m]{\prod_{k=1}^m a_k}, \quad HH = \frac{m}{\sum_{k=1}^m (1/a_k)}$$

olsun. Bu durumda

$$HH \leq GG \leq AA \tag{1.24}$$

eşitsizliği sağlanır. Üstelik, $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında alttan pozitif bir sayı ile sınırlı ve integrallenebilir bir fonksiyon ise, üstte toplamlar yerine integraller almak suretiyle (1.24) eşitsizliği yine geçerlidir. Yani,

$$AA = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad GG = \exp \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx \right), \quad HH = \frac{b-a}{\int_a^b [1/f(x)] dx}$$

olmak üzere,

$$HH \leq GG \leq AA$$

dir.

2. MEROMORF YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, birim dairenin dışını veya orijin çıkarılmış birim daireyi konform olarak resmeden, orijinde basit kutba sahip, meromorf fonksiyonların genel sınıfı ile bu sınıfın alt sınıfları tanımlandı. Bütün bu sınıflara ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve genleşme özellikleri ile ilgili yapılan çalışmalar derli toplu olarak verildi.

2.1 Meromorf Yalınkat Fonksiyonların Temel Özellikleri

$\mathbb{D}^{xx} = \{\zeta : |\zeta| > 1\}$ olmak üzere $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$ff(\zeta) = \zeta + c_0 + \frac{c_1}{\zeta} + \dots = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n} \quad (2.1)$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfını MM ile gösterelim. $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için $ff(\zeta) \neq 0$ özelliğindeki $ff \in MM$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfı MM_0 ile, $c_0 = 0$ özelliğindeki $ff \in MM$ fonksiyonlarının oluşturduğu alt sınıfı da MM_1 ile gösterelim. Buna göre $ff \in MM_1$ fonksiyonu \mathbb{D}^{xx} bölgesinde

$$ff(\zeta) = \zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \dots = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta^n}$$

biçiminde bir Laurent açılımına sahiptir.

Birçok araştırmacı \mathbb{D}^{xx} bölgesinde (2.1) açılımına sahip meromorf yalınkat fonksiyonları çalışmak yerine, $\mathbb{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$ delik birim dairede

$$gg(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2.2)$$

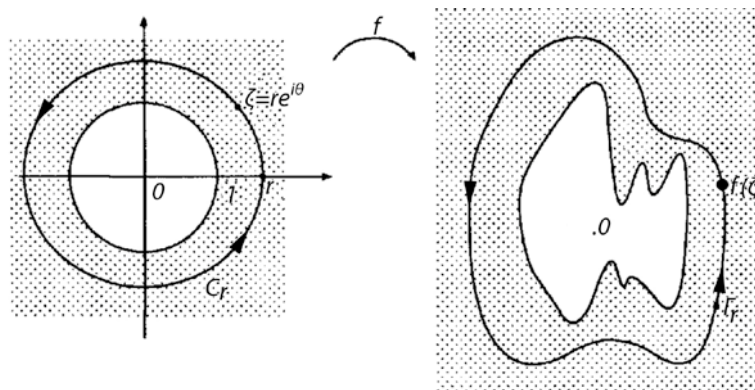
biçiminde Laurent açılımına sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfını çalışmıştır. Gerçekte, \mathbb{D}^* da (2.2) açılımına sahip analitik yalınkat fonksiyonların sınıfı ile MM sınıfı arasında $gg(z) = ff(1/z)$ eşitliği yardımıyla bire-bir bir bağıntı mevcuttur. Dolayısıyla bu sınıflardan birinde yapılan bir çalışmayı diğerine taşımak mümkündür. Bu çalışma-

mızda yerine göre her iki bölgeyi de kullanacağız. Çalışma açısından bazen birinin diğere üstünlüğü söz konusudur. Örneğin, \mathbb{D}^{xx} bölgesinde saat yönünün tersinde pozitif olarak yönlendirilmiş bir $CC_{rr} = \{\zeta: |\zeta| = rr > 1\}$ çemberinin MM sınıfına ait bir ff fonksiyonu altındaki resmi olan $ff(CC_{rr}) = \Gamma_{rr}$ eğrisi de aynı yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olmasına rağmen, \mathbb{D}^* delik dairesinde verilen pozitif olarak yönlendirilmiş $|zz| = \rho\rho < 1$ çemberinin gg fonksiyonu altındaki resmi negatif yönde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olur. Bu yüzden MM sınıfındaki fonksiyonlar ile çalışmayı daha çok tercih edeceğiz.

MM sınıfı ile ilgili vereceğimiz ilk sonuç, cc_0 katsayısının integral temsili olacaktır. (2.1) bağıntısıyla verilen $ff \in MM$ fonksiyonu, $\zeta = rre^{i\theta}$, $rr > 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ çemberi üzerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) d\theta = cc_0 \quad (2.3)$$

eşitliği yazılabilir. $ff(CC_{rr}) = \Gamma_{rr}$ denirse cc_0 katsayısı, (2.3) integralinin basit kapalı Γ_{rr} eğrisi üzerinde kütle dağılımının bir ortalaması olduğu görülür. Bu yüzden Γ_{rr} konveks bir eğri olmak üzere, $ww = cc_0$ noktası Γ_{rr} ile sınırlı bölgenin içinde kalır. Eğer $ff \in MM_0$ ise her bir Γ_{rr} eğrisi $ww = 0$ noktasını iç nokta kabul eden bir bölge sınırlar (Şekil 2.1).



Şekil 2.1

Birim dairede normalize edilmiş analitik yalınkat fonksiyonların SS sınıfı ile MM_0 sınıfı arasında bire-bir bir geçiş mevcuttur. Gerçekten, $gg \in SS$ ise $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$ff = \frac{1}{gg(1/\zeta)} = \zeta - cc_2 + (cc_2^2 - cc_3) \frac{1}{\zeta} + \dots \quad (2.4)$$

fonksiyonu MM_0 sınıfına aittir. Tersine, $ff \in MM_0$ ise $zz \in \mathbb{D}$ için

$$gg(zz) = \frac{1}{ff(1/zz)} = zz - cc_0zz^2 + (cc_0^2 - cc_1)zz^3 + \dots \quad (2.5)$$

fonksiyonu da SS sınıfına aittir. SS sınıfında Koebe fonksiyonuna karşılık gelen MM_0 sınıfına ait fonksiyon

$$kk = \frac{1}{kk(1/\zeta)} = \zeta\zeta - 2 + \frac{1}{\zeta}$$

dır. Bu fonksiyon \mathbb{D}^{xx} bölgesini $\mathbb{C} \setminus [-4, 0]$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder.

Hemen belirtelim ki MM_0 sınıfı ile SS sınıfı arasında yukarıda verilen geçiş, MM sınıfı ile SS sınıfı arasında geçeli değildir. Bu yüzden SS sınıfına ait fonksiyonların sahip olduğu özellikleri doğrudan MM sınıfına taşımak mümkün olmayacaktır.

MM sınıfına ait her bir fonksiyon \mathbb{D}^{xx} bölgesini kompakt bir bölgenin tümleyeni üzerine dönüştürdüğü açıktır. Şekil 2.1 de temsili olarak gösterilen bu kompakt bölgenin alanının tahmini “Alan teoremi” olarak bilinir. Gronwall (1914) tarafından verilen bu teorem, kompakt kümenin alanının MM sınıfına ait fonksiyonların katsayıları yardımıyla belirlenebileceğini ifade eder.

Teorem. (Alan Teoremi) $ff \in MM$ fonksiyonu (2.1) bağıntısıyla verilmiş olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |cc_n|^2 \leq 1 \quad (2.6)$$

dir. Eşitlik ancak ve yalnız $ff(\mathbb{D}^{xx})$ görüntü kümesinin sıfır alanlı bir küme hariç kompleks düzlemi örtmesi durumunda geçerlidir.

İspat. $E = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ diyelim. Belli bir $\rho > 1$ değeri için $D_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, $C_\rho = \partial D_\rho$ ve $f \in C^1(\bar{D}_\rho)$ olsun. f fonksiyonu D bölgesinde yakınsak olduğundan $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için Γ_ρ eğrisi

$$w = g(\theta) = w(\theta) = u(\theta) + i v(\theta)$$

biçiminde parametrik olarak verilmiş, pozitif yönlendirilmiş bir Jordan eğrisidir. Γ_ρ tarafından çevrelenen bölgeye E_ρ denirse $E_\rho \supset E$ olur (Şekil 2.2). Green teoreminden, E_ρ bölgesinin $A(E_\rho)$ alanı

$$A(E_\rho) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \bar{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} z \bar{w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\rho} f(z) dz$$

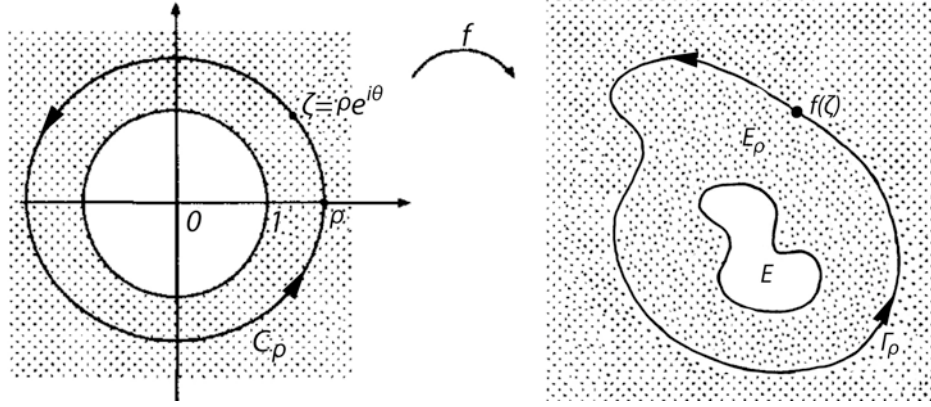
eşitliği ile verilir. f fonksiyonunu D bölgesindeki Laurent açılımı ve $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ olmak üzere $\int_{|z|=\rho} z^k dz = 0$, $k = -1$ için $\int_{|z|=\rho} z^k dz = 2\pi i$ olduğu dikkate alınırsa, düzgün yakınsaklık gereği

$$\begin{aligned} A(E_\rho) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{\rho^{2n}} \right) dz \\ &= \pi \rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |c_{-n}|^2}{\rho^{2n}} \end{aligned}$$

olur. $A(E_\rho) \geq 0$ olduğundan,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |c_{-n}|^2}{\rho^{2n}} \leq \rho^2$$

bulunur. $\rho \rightarrow 1$ iken limite geçilirse $\sum_{n=1}^{\infty} n |c_{-n}|^2$ serisi yakınsak ve toplamının 1'den büyük olmadığı görülür. Böylece (2.6) bağıntısı elde edilir. ■



Şekil 2.2

2 Açıklama. 2.1.1 Teoreminin ispatında geçen $EE_{\rho\rho}$ bölgesinin alanı

$$AA(\rho\rho) = \pi\rho^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n|c_n|^2}{\rho^{2n}}$$

olduğundan, $\rho\rho \rightarrow 1$ iken $EE_{\rho\rho}$ bölgesi daralır ve $EE = \bigcap_{\rho\rho > 1} EE_{\rho\rho}$ olur. Böylece, EE bölgesinin alanı AA ile gösterilirse,

$$AA = AA(1) = \pi - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

bulunur. $AA \geq 0$ olduğundan (2.6) bağıntısı elde edilir. $AA = 0$ olması durumunda (2.6) bağıntısı için eşitlik sağlanır. Bu eşitlik ve (2.6) bağıntısı birlikte düşünülürse

$$0 \leq AA \leq \pi$$

olduğu görülür.

Şimdi MM sınıfına ait bir fonksiyonun distorsiyon özelliğini vererek devam edelim.

2.1.3 Teorem. $ff \in MM$ ve $|\zeta\zeta| = rr > 1$ olsun. Bu durumda

$$1 - \frac{1}{rr^2} \leq |ff'(\zeta\zeta)| \leq \frac{rr^2}{rr^2 - 1} \quad (2.7)$$

dir. Eşitsizliğin sol tarafı için eşitlik, $|\eta\eta| = 1$ olmak üzere, ancak ve yalnız

$$f(\zeta) = \zeta + c_0 + \frac{1}{m\zeta} \quad (2.8)$$

fonksiyonu, eşitsizliğin sağ tarafı için ise eşitlik, $\zeta = r$ olmak üzere

$$f(r) = r + c_0 + \frac{1}{m} = \frac{r^2 - 1}{r} \quad (2.9)$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $G = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ diyelim. u ve t kompleks değişkenler olmak üzere $u = g(t)$ fonksiyonu G bölgesinde analitik ve yalınkat olsun. Her bir $t > 0$ için

$$u = g(t) = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} = h(t)$$

fonksiyonu da \mathbb{D} dairesinde analitik ve yalınkattır. Böylece, 1.3.2 Teoreminden $p = |t| > 0$ için

$$\frac{h'(t)}{h'(0)} = \frac{g'(t)}{g'(0)} \frac{1+t^2}{1-t^2} \frac{1+t}{1-t} \frac{1}{1-t^2} = \frac{1+p}{(1-p)^3} \quad (2.10)$$

elde edilir. $p = |t| > 0$ ve $s = t(1+p)^2/(1-p)^2 > t$ konumu yapılırsa (2.10) eşitsizliğinden $|g'(s)|/|g'(t)| \leq 1$ elde edilir. O halde, $s > t > 0$ özelliğinde her s ve t çifti için $|g'(s)| \leq |g'(t)|$ olur.

$f \in MM$ için $u = \zeta + 1/\zeta$ bağıntısında ζ değeri çekilirse $\zeta = u + \sqrt{u^2 - 4}$ olarak bulunur. Bu dönüşüm altında ζ -düzlemindeki \mathbb{D}^{xx} bölgesi u -düzleminde $-2 \leq u \leq 2$ aralığı çıkarılmış G_1 bölgesi üzerine dönüşür. $g(u) = f(\zeta(u))$ olarak tanımlanırsa, g fonksiyonu G_1 bölgesinde yalınkat ve $g(\infty) = \infty$ olur. Loewner (1919), $|g'(u)|$ fonksiyonu $(2, \infty)$ aralığı üzerinde artmayan olduğunu göstermiştir. O halde, $|g'(r)| \geq |g'(\infty)|$ bulunur.

$$g'_f(u) = f'(\zeta)\zeta'(u) = \frac{f'(\zeta)}{\zeta}$$

$$1 - 1/\zeta^2$$



ve $ff'(\infty) = 1$ olduğundan, $|ff'(rr)| \geq 1 - 1/rr^2$ olduğu görülür. \mathbb{D}^{\times} bölgesinde herhangi bir $\zeta\zeta_{oo}$ noktası uygun bir rotasyonla $|\zeta\zeta_{oo}| = rr$ noktasına getirilebilir. Bu (2.7) eşitsizliğinin birinci tarafını verir. Eşitlik ancak ve yalnız $AA \neq 0$ olmak üzere $gg(uu) = AAuu + BB$ fonksiyonu için geçerlidir.

Şimdi (2.7) ifadesinin sağ tarafındaki eşitsizliğin doğruluğunu gösterelim. (2.1) açılımı ile verilen $ff \in MM$ fonksiyonu için Cauchy-Schwarz eşitsizliği gereği, $|\zeta\zeta| = rr > 1$ olmak üzere

$$|ff'(\zeta\zeta)| \leq 1 + \frac{\sum_{nn=1}^{\infty} nn |cc_{nn}|}{rr^{nn+1}} = 1 + \frac{\sqrt{\sum_{nn=1}^{\infty} nn} \sqrt{\sum_{nn=1}^{\infty} nn |cc_{nn}|^2}}{rr^{nn+1}} \quad (2.11)$$

$$\leq 1 + \frac{\sum_{nn=1}^{\infty} nn}{rr^{2nn+2}} \frac{\sum_{nn=1}^{\infty} nn |cc_{nn}|^2}{rr^{nn+1}}$$

olur. Alan teoremi gereği, $\sum_{nn=1}^{\infty} nn |cc_{nn}|^2 \leq 1$ olduğundan

$$|ff'(\zeta\zeta)| \leq 1 + \frac{1}{rr^4 (1 - 1/rr^2)^2} = 1 + \frac{1}{rr^2 - 1} = \frac{rr^2}{rr^2 - 1} \quad (2.12)$$

elde edilir. Bu ise (2.7) ifadesinin ikinci yanının doğruluğunu gösterir.

Cauchy-Schwarz eşitsizliğindeki eşitlik ancak ve yalnız, AA sabit olmak üzere, her $nn \geq 1$ için $AA\sqrt{nn}/rr^{nn+1} = \sqrt{nn}|cc_{nn}|$ olması durumunda geçerlidir. Öte yandan (2.11) ifadesinde eşitlik her $nn \geq 1$ için $\arg(-cc_{nn}) = \arg(\zeta\zeta^{nn+1})$ olması durumunda sağlanır. Uygun bir dönüşümle $\zeta\zeta = rr > 1$ alınabileceğinden, her nn için $cc_{nn} \leq 0$ ve $AA \geq 0$ olur. Bu durumda $cc_{nn} = -AA/rr^{nn+1}$ dir. Böylece,

$$ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + cc_0 - AA \frac{\sum_{nn=1}^{\infty} 1}{rr^{nn+1} \zeta\zeta^{nn}} = \zeta\zeta + cc_0 - \frac{AA}{rr \zeta\zeta - 1} \quad (2.13)$$

olur. (2.12) ve (2.13) birlikte düşünülürse, $AA = rr^2 - 1 > 0$ olup, ikinci tarafın eşitliği için (2.9) fonksiyonu elde edilir. ■

2.1.4 Açıklama (i) (2.7) eşitsizliğinin birinci denklemi yalınkatlık için gerek şarttır. Yeter şart için yalınkat olması gerekli değildir (Aksent'ev, 1958).

(ii) (2.9) ile verilen ekstremal fonksiyonunun rr değişkeninde bağlı olduğuna dikkat ediniz. Eşitlik pozitif reel eksen üzerinde olmayan noktalar içinde sağlanabilir. Bu durumda $ff_{rr}(\zeta\zeta)$ fonksiyonuna uygun bir dönme ile eşitliği sağlayan noktalar reel eksen üzerine getirilebilir. Her ne kadar $ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + c_0 - 1/\zeta\zeta$ fonksiyonunun $\zeta\zeta = rr$ deki türevi $ff'(\zeta\zeta) = 1 + 1/rr^2$ olsa bile, ff fonksiyonunun ekstremal fonksiyon olmadığına dikkat ediniz.

Loewner (1919)'e ait aşağıdaki teorem \mathbb{D} sınıfına ait fonksiyonların modülü için üst sınırı verir.

2.1.5 Teorem. $ff \in \mathbb{D}$ ve $|\zeta\zeta| = rr > 1$ olsun. Bu durumda

$$|ff(\zeta\zeta)| \leq rr + \frac{1}{rr} \quad (2.14)$$

dir. Bu eşitsizlik her $\zeta\zeta \in \mathbb{D}^{\times}$ için kesindir.

İspat. Uygun bir döndürme yardımıyla $\zeta\zeta = rr$ alabiliriz. $FF(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + 1/\zeta\zeta$ olarak tanımlanırsa, FF fonksiyonunun tersi $GG(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + \frac{1}{\zeta\zeta} - 4\zeta\zeta^2$ olur. Bundan faydalanarak tanımlanan $HH(\zeta\zeta) = GG \circ FF(\zeta\zeta)$ fonksiyonu, $tt = (rr + 1/rr)/2$ için, \mathbb{D}^{\times} bölgesini \mathbb{D}^{\times} den $(1, rr)$ ve $[-rr, -1)$ doğru parçaları çıkarılmış bölge üzerine konform olarak resmeder. Ayrıca,

$$HH(1) = GG \circ FF(1) = GG(2tt) = GG(rr + 1/rr) = rr$$

dir. Verilen $ff \in \mathbb{D}$ fonksiyonu için JJ fonksiyonunu

$$JJ = \frac{ff \circ H(\zeta\zeta)}{tt}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $JJ \in \mathbb{D}$ olup, $JJ(1) = ff(rr)/tt$ noktası $JJ(\mathbb{D}^{\times})$ görüntü kümesinin bir sınır noktası ve $|JJ(1)| \leq 2$ dir. Böylece,

$$|f(r)| \leq 2r = \frac{2r + \frac{1}{r}}{2} = rr + \frac{1}{rr}$$

elde edilir. ■

MM_0 sınıfına ait ff fonksiyonu için $gg(zz) = 1/ff(1/zz)$ fonksiyonu SS sınıfına ait olduğundan 1.3.2 Teoreminden aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

2.1.6 Teorem. $ff \in MM_0$ ve $|\zeta\zeta| = rr > 1$ olsun. Bu durumda

$$rr - 2 + \frac{1}{rr} \leq |f(\zeta\zeta)| \leq rr + 2 + \frac{1}{rr} \quad (2.15)$$

dir.

Şimdi (2.1) açılımına sahip $ff \in MM$ fonksiyonlarının cc_{nn} katsayılarının sınırları ile ilgilenelim. cc_0 katsayısının sıfır olup olmamasının bu sınırlara bir etkisinin olmadığı görülecektir. Ancak bu durumun geçerli olmadığı alt sınıflarda mevcuttur. Aşağıdaki kesin sonuç MM sınıfına ait fonksiyonların cc_1 katsayısı için sınırın alan teoreminden elde edilebileceğini gösterir.

2.1.7 Teorem. $ff \in MM$ fonksiyonu (2.1) açılımı ile verilmiş olsun. Bu durumda $|cc_1| \leq 1$ dir. Eşitlik $\theta\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + cc_0 + e^{iiii}\zeta\zeta^{-1}$ fonksiyonu için geçerlidir. Üstelik, $ff \in MM_0$ ise, $|cc_0| \leq 2$ dir. Eşitlik, $ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + 2e^{iiii} + e^{2iiii}\zeta\zeta^{-1}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. (2.6) bağıntısından $|cc_1| \leq 1$ olduğu hemen görülür. Ayrıca $|cc_1| = 1$ ise, (2.6) bağıntısından $nn \geq 2$ için $cc_{nn} = 0$ dir.

Şimdi, $ff \in MM_0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.5) bağıntısından $zz \in \mathbb{DD}$ için $gg(zz) = 1/ff(1/zz)$ fonksiyonu SS sınıfına ait olup, 1.2.1 Teoremi gereği, $h(zz) = \overline{gg(zz^2)}$ fonksiyonu da SS sınıfına aittir. Buradan

$$\psi\psi = \frac{1}{h(1/\zeta\zeta)} = \zeta\zeta \frac{ff(\zeta\zeta^2)^{1/2}}{\zeta\zeta^2}$$

biçiminde tanımlanan $\psi\psi$ fonksiyonu MM sınıfına ait ve $|\zeta\zeta| > 1$ için $[\psi\psi(\zeta\zeta)]^2 = ff(\zeta\zeta^2)$ dir. $|\zeta\zeta| > 1$ için $\psi\psi$ fonksiyonunun Laurent açılımının

$$\psi\psi(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + \beta\beta_0 + \frac{\beta\beta_1}{\zeta\zeta} + \dots$$

biçiminde olduğunu kabul edelim. O halde,

$$[\psi\psi(\zeta\zeta)]^2 = \zeta\zeta^2 + 2\beta\beta_0\zeta\zeta + \beta\beta_0^2 + 2\beta\beta_1 + \dots$$

ve

$$ff(\zeta\zeta^2) = \zeta\zeta^2 + cc_0 + \frac{cc_1}{\zeta\zeta^2} + \dots$$

olur. Katsayıların eşitliğinden, $\beta\beta_0 = 0$ ve $cc_0 = 2\beta\beta_1$ olduğu görülür. $\psi\psi \in MM$ olduğundan, $|cc_0/2| \leq 1$ ve dolayısıyla $|cc_0| \leq 2$ bulunur. $|cc_0| = 2$ veya $|\beta\beta_1| = 1$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart, $\theta\theta \in \mathbb{R}$ için $\psi\psi(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + e^{i\theta}\zeta\zeta^{-1}$ olmasıdır. Bu durumda, $ff(\zeta\zeta^2) = [\psi\psi(\zeta\zeta)]^2 = \zeta\zeta^2 + 2e^{i\theta}\zeta\zeta^{-1} + 2e^{2i\theta}$ eşitliğinden $ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + 2e^{i\theta} + e^{2i\theta}\zeta\zeta^{-1}$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

2.1.8 Açıklama. Alan teoreminden her $nn \geq 1$ için $|cc_{nn}| \leq 1/\sqrt{nn}$ eşitsizliği de elde edilebilir. Ancak, $nn > 1$ için eşitliği sağlayan $gg(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + 1/\sqrt{nn}\zeta\zeta^{nn}$ fonksiyonu $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesinde yalnızca değildir. Bu yüzden MM sınıfına ait fonksiyonlarda $|cc_{nn}|$ için kesin üst sınır $1/\sqrt{nn}$ den daha küçük olmalıdır. Doğru bir katsayı tahmini için MM sınıfına ait

$$FF(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + 2 + \frac{1}{\zeta\zeta} \quad (2.16)$$

fonksiyonu önemli bir yere sahiptir. FF fonksiyonu $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesini reel eksenden $[0,4]$ aralığı çıkarılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak resmeder. Böylece, $FF \in MM_0$ olduğu görülür. Ayrıca FF fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$GG_{nn}(\zeta\zeta) = FF(\zeta\zeta^{nn+1})^{nn+1} = \zeta\zeta^{nn+1} + 2 + \frac{1}{\zeta\zeta^{nn+1}} \quad (2.17)$$

$$= \zeta \zeta + \frac{2}{\zeta^{n+1}} + \frac{1}{\zeta^{2n+2}} = \zeta \zeta + \frac{2}{n+1} \frac{1}{\zeta^n} + \dots$$

fonksiyonu \mathbb{D}^{xx} bölgesini, kompleks düzlemden birimin $(n+1)$.kökü yönünde ve $4^{1/(n+1)}$ uzunluğuna sahip $n+1$ doğru parçasının çıkarılmış bölge üzerine resmeder. G_n fonksiyonuna bakarak MM sınıfındaki fonksiyonların c_n katsayısı için, $n \geq 1$ olmak üzere

$$|c_n| \leq \frac{2}{n+1} \quad (2.18)$$

tahmini akla gelebilir. Schiffer (1938), $n=2$ için (2.18) bağıntısının doğru ve eşitliğin $f(\zeta) = G_2(\zeta)$ fonksiyonu için geçerli olduğunu göstermiştir. Ancak, Garabedian ve Schiffer (1955), $|c_3|$ için $1/2$ olması beklenen üst sınır yerine bundan daha büyük olan

$$|c_3| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \approx 0,50248 \quad (2.19)$$

kesin üst sınırını elde etmişlerdir. Böylece elli yıldan fazladır doğru olduğu tahmin edilen (2.18) eşitsizliğinin yanlış olduğu görülmüştür. Ancak bazı özel alt sınıflar için Duren (1971) ve Goluzin (1938), (2.18) eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermişlerdir.

2.1.9 Teorem. $f \in MM$ fonksiyonu $k \geq 1$ için \mathbb{D}^{xx} bölgesinde

$$f(\zeta) = \zeta + \frac{c_k}{\zeta^k} + \frac{c_{k+1}}{\zeta^{k+1}} + \dots \quad (2.20)$$

biçiminde bir açılıma sahip olsun. Bu durumda $n = k, k+1, \dots, 2k$ için (2.18) bağıntısı sağlanır. Eşitlik ancak ve yalnız m sabit ve $|\eta| = 1$ olmak üzere $f(\zeta) = \eta G_m(\eta \zeta)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Duren (1971)'e ait bu teoremin ispatı oldukça uzun ve karmaşıktır. Ancak Goluzin (1938), MM_0 sınıfına ait fonksiyonlar için aynı katsayı sınırlarını daha kolay elde etmiştir.

2.1.10 Teorem. $f \in MM_0$ fonksiyonu $k \geq 1$ için (2.20) açılımına sahip olsun. Bu durumda $n = k, k+1, \dots, 2k$ için (2.18) eşitsizliği sağlanır.

İspat. MM_0 sınıfına ait ff fonksiyonuna 1.12.1 Teoremini uygulayalım. $\zeta = re^{i\theta}$ $PP = |ff(\zeta)|$ olmak üzere, her $rr > 1$ sayısı ve uygun bir $GG(PP)$ fonksiyonu için

$$II = \frac{dd}{drr} \int_0^{2\pi\pi} PP^2 dd\theta > 0 \quad (2.21)$$

olur. $\alpha > 0$ için $GG(PP) = PP^{2\alpha}$ olarak tanımlanırsa, $PPGG'(PP) = 2\alpha PP^{2\alpha}$ ifadesi 1.12.1 Teoreminin şartlarını sağlar. Böylece, orijin $\Gamma = ff(CC_{rr})$ eğrisi üzerinde olmamak şartıyla,

$$\frac{dd}{drr} \int_0^{2\pi\pi} PP^{2\alpha} dd\theta > 0 \quad (2.22)$$

dır. Eğer 2α pozitif bir tamsayı ise

$$PP^{2\alpha} = |ff(\zeta)|^{2\alpha} = r^{2\alpha} + \frac{a_k}{\zeta^{k+1}} + \frac{c_{k+1}}{\zeta^{k+2}} + \dots + \alpha^2$$

olur. b_n katsayıları c_n katsayılarıyla tanımlanmak üzere,

$$PP^{2\alpha} = r^{2\alpha} + \frac{b_k}{\zeta^{k+1}} + \frac{b_{k+1}}{\zeta^{k+2}} + \dots + \alpha^2 \quad (2.23)$$

biçiminde yazılabilir. $n = k, k+1, \dots, 2k$ için $b_n = \alpha c_n$ olduğundan, (2.22) ve (2.23)

bağıntılarından $\zeta = re^{i\theta}$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{dd}{drr} \int_0^{2\pi\pi} r^{2\alpha} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{b_n}{\zeta^{n+1}} dd\theta \leq \frac{dd}{drr} \int_0^{2\pi\pi} r^{2\alpha} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{|b_n|^2}{r^{(n+1-\alpha)}} dd\theta \\ &\leq 2\alpha r^{2\alpha-1} - \sum_{n=k}^{\infty} \frac{2(n+1-\alpha)|b_n|^2}{r^{2n+1-2\alpha}} \end{aligned}$$

olur. $rr \rightarrow 1^+$ için limite geçilirse

$$\sum_{n=k}^{\infty} (1-\alpha)|b_n|^2 \leq \alpha \quad (2.24)$$

biçiminde önemli bir eşitsizlik elde edilir. Eğer $\alpha \leq k + 1/2$ ise (2.24) bağıntısındaki serinin terimleri negatif değildir. Böylece $k \leq n \leq 2k$ şartını sağlayan herhangi bir n için

$$(n + 1 - \alpha)|b_n|^2 = (n + 1 - \alpha)^2 |c_n|^2 \leq \alpha$$

olacak biçimde serinin sadece bir terimi seçilebilir. Eğer eşitlik sağlanırsa her $j \neq n$ için $b_j = 0$ dır. Böylece,

$$|c_n|^2 \leq \frac{1}{(n + 1 - \alpha)\alpha} \quad (2.25)$$

elde edilir. Eğer $\alpha = (n + 1)/2$ olarak seçilirse, (2.25) ifadesi $n = k, k + 1, \dots, 2k$ için (2.18) eşitsizliğini verir. (2.25) bağıntısında eşitlik, $\alpha = (n + 1)/2$ değeri (2.23) de yerine yazılırsa

$$p^{2\alpha} = p^{n+1} = \zeta^{(n+1)/2} (1 + b_n/\zeta^{n+1})^2$$

olup eşitliği sağlayan fonksiyonun

$$f(\zeta) = \zeta (1 + \eta/\zeta^{n+1})^{2/(n+1)}$$

olduğu görülür. ■

2.1.11 Sonuç. $f(\zeta) = \zeta + c_1/\zeta + c_2/\zeta^2 + \dots$ fonksiyonu MM_0 sınıfına ait olsun. Bu durumda $|c_1| \leq 1$ ve $|c_2| \leq 2/3$ tür.

Bazilevic (1937) MM sınıfının bir alt sınıfını tanımlayarak bu sınıfa ait fonksiyonlar için kesin katsayı sınırlarını elde etmiştir.

2.1.12 Tanım. k bir pozitif tamsayı ve $\zeta \in \mathbb{D}^{\times}$ olmak üzere,

$$f(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{nk-1}}{\zeta^{nk-1}} \quad (2.26)$$

açılımına sahip MM sınıfına ait fonksiyonlara kk –**katlı simetrik meromorf fonksiyon** denir ve bu fonksiyonların sınıfı $MM^{(kk)}$ ile gösterilir.

Bazilevic (1937)'e ait aşağıdaki teorem, $MM^{(kk)}$ sınıfına ait fonksiyonların c_{2kk-1} katsayıları için kesin üst sınırı verir.

2.1.13 Teorem. $ff \in MM^{(kk)}$ ise

$$|c_{2kk-1}| \leq \frac{1}{kk} + \frac{2}{kk e^{2(kk+1)/(kk-1)}} \quad (2.27)$$

dir. Bu eşitsizlik her bir $kk \geq 1$ için kesindir.

nn tek iken (2.27) ifadesinin sağ tarafı $2/(nn + 1)$ 'den daha büyüktür. Bu ise her $nn > 1$ tek sayıları için 2.1.13 Teoreminin geçerli olmadığını gösterir.

Jenkins (1960) daha geniş fonksiyon sınıfı için (2.27) eşitsizliğini elde etmiştir.

2.1.14 Teorem. $ff \in MM$ fonksiyonu \mathbb{D}^{xx} bölgesinde

$$ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + \sum_{n=kk-1}^{\infty} \frac{c_n}{\zeta\zeta^n} \quad (2.28)$$

biçiminde bir açılıma sahip olsun. Bu durumda (2.27) eşitsizliği sağlanır.

2.1.14 Teoremde $kk - 1$ yerine kk yazılırsa, c_{2kk+1} katsayısını bulunduran 2.1.10 Teoreminin genişletilmiş halini elde ederiz.

Çift katsayılar için tahmin bu kadar açık değildir. Kubota (1975), $ff \in MM$ ve $c_1 \geq 0$ için

$$\operatorname{Re} c_4 \leq \frac{2}{5} + \frac{729}{163840} \quad (2.29)$$

kesin sonucunu elde etmiştir. Ancak $c_1 \leq 0$ iken $\max|c_4| > 2/5$ kesin olmayan sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca, Kubota (1974), reel katsayılı $ff \in MM$ fonksiyonları için $c_5 \leq 1/3 + 4/507$ kesin eşitsizliğini de elde etmiştir.

2.2 Meromorf Yıldızlı ve Konveks Fonksiyonlar

Bu kısımda meromorf fonksiyonların bazı alt sınıfları üzerinde durulacak

2.2.1 Tanım. (2.1) açılımına sahip $ff \in MM$ fonksiyonu için $ff(\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx})$ görüntü kümesinin tümleyeni orijine göre yıldızlı ise, ff fonksiyonuna **meromorf yıldızlı fonksiyon** veya $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesinde **yıldızlı** denir. Meromorf yıldızlı fonksiyonların sınıfını $MMSSSS$ ile gösterilir.

2.2.1 Tanımından, (2.4) ve (2.5) bağıntıları yardımıyla şu sonucu çıkarmak mümkündür: ff fonksiyonunun $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesinde yıldızlı olması için gerek ve yeter şart $\phi\phi(zz) = 1/ff(1/zz)$ fonksiyonunun $\mathbb{D}\mathbb{D}$ dairesinde yıldızlı olmasıdır. Yani, $zz \in \mathbb{D}\mathbb{D}$ için

$$ff \in MMSSSS \Leftrightarrow \phi\phi(zz) = 1/ff(1/zz) \in SSSS \quad (2.30)$$

dir. Burada ff fonksiyonu sıfır değerini almaması gerektiğinden, $ff \in MMSSSS$ için $ff \in MM_0$, yani $MMSSSS \subset MM_0$ dır. Ancak, $ff \in MMSSSS$ için (2.1) ifadesinde $c_0 \neq 0$ olabilir. 1.5.1 Teoremi ve (2.30) bağıntısı birlikte düşünüldüğünde; $ff \in MMSSSS$ olması için gerek ve yeter şart, $\zeta\zeta \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ ve $zz \in \mathbb{D}\mathbb{D}$ için

$$\frac{\phi\phi'(zz)}{\phi\phi(zz)} = \zeta\zeta \frac{ff'(\zeta\zeta)}{ff(\zeta\zeta)} = 1 + \sum_{nn=1}^{\infty} \frac{pp_{nn}}{\zeta\zeta^{nn}} = n\mathbb{Q} \quad (2.31)$$

fonksiyonunun pozitif reel kısma sahip olmasıdır. Yani her $\zeta\zeta \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ için

$$ff \in MMSSS \Leftrightarrow \text{Re}\{p\zeta\zeta\} > 0$$

dır.

2.2.2 Tanım. $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesinde analitik ve $\zeta\zeta \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ için

$$pp(\zeta\zeta) = 1 + \sum_{nn=1}^{\infty} \frac{pp_{nn}}{\zeta\zeta^{nn}}$$

açılımına sahip $\text{Re}\{pp(\zeta\zeta)\} > 0$ özelliğindeki bir fonksiyona **reel kısmı pozitif meromorf fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfı $MMPP$ ile gösterilir.

2.2.2 Tanımından her $z \in \mathbb{D}$ için

$$p \in MMPP \Leftrightarrow p(1/z) \in PP \quad (2.32)$$

ve $MMPP \subset MM_0$ olduğu görülür.

Bununla birlikte, $\zeta \in \mathbb{D}^{\alpha}$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\operatorname{Re}[p(\zeta)] > \alpha$ özelliğindeki $p \in MMPP$ fonksiyonların sınıfı $MMPP(\alpha)$ ile gösterilir. $MMPP(\alpha)$ sınıfı ile 1.4.8 Teoreminde verilen $PP(\alpha)$ sınıfı arasındaki geçiş (2.32) bağıntısına benzerlik gösterir. Yani, $z \in \mathbb{D}$ için

$$p \in MMPP(\alpha) \Leftrightarrow p(1/z) \in PP(\alpha) \quad (2.33)$$

dır.

$MMPP$ sınıfına ait fonksiyon sınıfları için integral temsilini vermek istiyoruz. Bunun için 1.4.3 Teoremi ve (2.31) bağıntısından faydalanarak aşağıdaki teorem elde edilir.

2.2.3 Teorem. $p \in MMPP$ olması için gerek ve yeter şart, $\zeta \in \mathbb{D}^{\alpha}$ için

$$p(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta} \zeta}{1 - e^{-i\theta} / \zeta} d\theta \quad (2.34)$$

olacak biçimde $d(\theta + 2\pi) - d(\theta) = 1$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir $d(\theta)$ fonksiyonu vardır.

1.4.8 Teoreminde verilen $PP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsili ve (2.33) bağıntısından, $MMPP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için integral temsili elde edilebilir. Aşağıdaki teorem bununla ilgilidir.

2.2.4 Teorem. $p \in MMPP(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^{\alpha}$ ve

$$p(\zeta) = \int_0^{2\pi} \frac{1 + (1 - 2\alpha)e^{-i\theta} \zeta}{1 - e^{-i\theta} / \zeta} d\theta \quad (2.35)$$

olacak biçimde $d(\theta + 2\pi) - d(\theta) = 1$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir

$d(\theta)$ fonksiyonu vardır.

(2.34) ve (2.35) bağıntılarında ζ yerine ζ^{kk} yazılırsa, sırasıyla $MMPP$ veya $MMPP(\alpha\alpha)$ sınıflarına ait kk –katlı simetrik fonksiyonların integral temsili elde edilir.

Eğer (2.34)'de verilen pp fonksiyonu (2.31) bağıntısında yerine yazılır, \mathbb{D}^{xx} bölgesinde her iki tarafın ζ_0 dan ζ ya integrali alınır ve $\zeta_0 \rightarrow \infty$ için limite geçilirse, $MMSSSS$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki integral temsili elde edilir.

2.25 Teorem. $ff \in MMSSSS$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$ff(\zeta) = \zeta \exp \left[\int_0^{2\pi} \log \left(1 - e^{-i\theta} / \zeta \right) d\theta \right] \quad (2.36)$$

olacak biçimde $d(\theta + 2\pi) - d(\theta) = 1$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir $d(\theta)$ fonksiyonu vardır.

Önceki kısımdan (2.1) açılımına sahip MM sınıfına ait fonksiyonlar için $|c_{nn}| \leq 2/(nn + 1)$ eşitsizliğinin genelde doğru olmadığı biliniyor. Aşağıdaki teoremden bu eşitsizliğin $MMSSSS$ sınıfına ait fonksiyonlar için geçerli olduğu gösterilecek.

2.26 Teorem. $ff \in MMSSSS$ fonksiyonu (2.1) tipindeki bir seri açılımına sahip olsun. Her nn pozitif tamsayısı için $|c_{nn}| \leq 2/(nn + 1)$ dir. Eşitlik, $GG_{nn}(\zeta)$ fonksiyonu (2.17) bağıntısıyla verilmek üzere her bir nn ve $ff(\zeta) = \eta G_{nn}(\eta\zeta)$ fonksiyonu için geçerlidir (Clunie, 1959).

İspat. $nn = 1$ için teoremin doğruluğu 2.1.7 Teoreminde verilmiştir. Bu yüzden $nn \geq 2$ kabul edelim. pp fonksiyonu (2.31) eşitliği ile verilmiş olsun. Her $zz \in \mathbb{D}$ için $gg(zz) = pp(1/zz)$ ve

$$bb(zz) = \frac{gg(zz) - \sum_{nn=1}^{\infty} c_{nn} z^n}{1 + gg(zz)} \quad (2.37)$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda her $zz \in \mathbb{D}$ için $|bb(zz)| \leq 1$ dir. (2.37) eşitliğinden $gg(zz) = 1 + bb(zz) - bb(zz)$ olur. gg fonksiyonunun bu ifadesini (2.31) eşitliğinde kullanır ve ζ yerine $1/zz$ yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{z - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^n}{z + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n} = \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n} \\ &= \frac{1 - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}}{1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n} = \frac{1 + b(z)}{1 - b(z)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

bulunur. (2.38) eşitliğinden

$$[1 - b(z)] - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = [1 + b(z)] + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

ve buradan

$$b(z) - 2 - c_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (1 - c_n) c_n z^{n+1} = c_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (1 + c_n) c_n z^{n+1} \quad (2.39)$$

elde edilir. Aynı dereceli terimlerin katsayılarının eşitliğinden $c_0 = -2b_1$ bulunur. c_0 için bulunan bu sonucun 2.1.7 Teoreminde verilen sonuç ile uyduğu görülür.

$$\psi(z) = b(z) - 2 - c_0 z + \sum_{n=1}^{N-1} (1 - c_n) c_n z^{n+1}$$

denirse $N \geq 2$ için

$$\psi(z) = c_0 z + \sum_{n=1}^N (1 + c_n) c_n z^{n+1} + \sum_{n=N+2}^{\infty} A_n z^n \quad (2.40)$$

biçiminde yazılabilir. Burada A_n katsayılarına ihtiyaç duyulmayacaktır. $z = r e^{i\theta}$, $r < 1$ olmak üzere $\psi(z)$ fonksiyonu için

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(z) d\theta$$

integralini (2.40) eşitliğinin her iki tarafı için hesaplayalım. $|b(z)| \leq 1$ olduğundan

(2.40) eşitliği gereği

$$4 + |c_{c_0}|^2 r r^2 + \sum_{n=1}^{NN-1} (c_{c_n} - 1)^2 |c_{c_n}|^2 r r^{2m+2} \geq |c_{c_0}|^2 r r^2 + \sum_{n=1}^{NN} (c_{c_n} + 1)^2 |c_{c_n}|^2 r r^{2m+2}$$

elde edilir. $r r \rightarrow 1^-$ için limite geçilirse

$$(NN + 1)^2 |c_{c_n}|^2 \leq 4 + \sum_{n=1}^{NN-1} (c_{c_n} - 1)^2 - (n + 1)^2 |c_{c_n}|^2 = 4 - \sum_{n=1}^{NN-1} c_{c_n} |c_{c_n}|^2 \leq 4 \quad (2.41)$$

bulunur. Buradan her $NN \geq 2$ için $|c_{c_{NN}}| \leq 2/(NN + 1)$ elde edilir. (2.41) de eşitlik sağlanması durumunda $nn = 1, 2, \dots, NN - 1$ için $c_{c_{nn}} = 0$ olması gerekir. Eğer (2.39)'da $z z^{NN+1}$ li terimlerin katsayıları eşitlenirse $|b_{b_{NN+1}}| = 1$ ve diğer bütün b_{b_j} katsayıları sıfır bulunur. Böylece, (2.37) ve (2.38) bağıntılarından eşitliğin $ff(\zeta\zeta) = \eta\eta G_{NN}(\eta\eta\zeta\zeta)$ fonksiyonu için sağlandığı görülür. ■

2.2.7 Tanım. (2.1) açılımına sahip $ff \in MM$ fonksiyonu için $ff(\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx})$ görüntü kümesinin tümleyeni orijine göre konveks bir bölge ise ff fonksiyonuna **meromorf konveks fonksiyon** veya $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesinde **konveks** denir. Meromorf konveks fonksiyonların sınıfı $MMCCCC$ ile gösterilir.

1.5.4 Teoreminde verilen $CCCC$ ve $SSSS$ sınıfları arasındaki ilişki, $MMCCCC$ ve $MMSSSS$ sınıfları arasında da geçerlidir.

2.2.8 Teorem. $\zeta\zeta \in \mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ olsun.

$$gg \in MMCCCC \Leftrightarrow ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta gg'(\zeta\zeta) \in MMSSSS \quad (2.42)$$

dir. Tersine

$$ff \in MMSSSS \Leftrightarrow \int_{\zeta\zeta_0}^{\zeta\zeta} \frac{f(w)}{w w} dw \in MMCCC \quad (2.43)$$

dir. Burada integral $\mathbb{D}\mathbb{D}^{xx}$ bölgesinde belli $\zeta\zeta_0$ noktasını $\zeta\zeta$ noktasına birleştiren yol boyunca yapılır.

2.2.9 Açıklama. (2.43) bağıntısı ile verilen ff fonksiyonunun cc_0 katsayısı sıfır olmak zorundadır. Aksi takdirde (2.43) integrali $cc_0 \log(\zeta/\zeta_0)$ gibi çok değerli terimini bulun- durmak zorunda kalacaktır.

$ff \in MMSSSS$ fonksiyonu sıfır değerini almadığından $gg \in MMCCCC$ fonksiyonu da sıfır değerini almaz. Bu yüzden $gg \in MM_0$, yani $MMCCCC \subset MM_0$ dır. Ancak $ff \in MMCCCC$ için (2.1) ifadesinde $c_0 \neq 0$ olabilir.

$\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ olmak üzere, (2.1) biçiminde bir seri açılımına sahip $gg \in MMCCCC$ fonksiyonu için (2.30) ve (2.42) bağıntılarından

$$gg \in MMCCCC \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\frac{gg''(\zeta)}{gg'(\zeta)} \right) > 0$$

sonucu elde edilebilir.

Robertson (1963) $MMSSSS$ sınıfına ait fonksiyonlar altında $\{ \zeta : |\zeta| > \sqrt{3} \}$ bölgesinin \bar{r} nin tümleyeninin konveks bir bölge olduğunu göstermiştir.

2.2.10 Teorem. $ff \in MM$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta ff'(\zeta)}{ff} \right) > 0$$

ise ff fonksiyonu $|\zeta| > \sqrt{3}$ için konvektir.

Aşağıdaki teorem $MMCCCC$ sınıfına ait fonksiyonların distorsiyon özelliğini verir.

2.2.11 Teorem. $gg \in MMCCCC$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$1 - \frac{1}{r^2} \leq |gg'(\zeta)| \leq 1 + \frac{1}{r^2} \quad (2.44)$$

dir. Sağ taraf için eşitlik $GG(\zeta) = \zeta + cc_0 + 1/\zeta$ fonksiyonunda $\zeta = irr$ alınarak ve sol taraf için ise $\zeta = rr$ alınarak görülür (Loewner, 1919).

İspat. (2.44) eşitsizliğinin sol tarafı 2.1.3 Teoreminde daha büyük MM sınıfı için gösterilmiştir. Üstelik eşitliği sağlayan $GG(\zeta) = \zeta + cc_0 + 1/\zeta$ fonksiyonu konvektir. Sağ

taraftaki eşitsizliği göstermek için, $ff(\zeta) = \zeta g'(\zeta)$ konumu yapılırsa $ff \in M_{SS}$ dir

2.2.9 Açıklama gereği $ff \in M_{SS}$ dir. O halde, (2.14) eşitsizliğinden $|g'(\zeta)| \leq 1 + 1/r^2$ elde edilir. ■

ff fonksiyonu için eşitsizlikler elde etmede, $c_0 = 0$ olan sınıflarda çalışmak uygundur.

M_{SSSS} sınıfında $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların oluşturduğu alt sınıfını M_{SSSS} sınıfında $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların oluşturduğu alt sınıfını da M_{SSSS} ile gösterelim.

2.2.12 Teorem. $ff \in M_{SSSS}$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olsun. Bu durumda

$$|ff(\zeta)| \leq \frac{1}{r} \quad (2.45)$$

dir. Eşitlik $FF(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ fonksiyonu için sağlanır (Goluzin, 1938).

2.2.13 Teorem. $ff \in M_{SSSS}$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ olsun. Bu durumda

$$r - \frac{1}{r} \leq |ff(\zeta)| \leq r + \frac{1}{r} \quad (2.46)$$

dir.

İspat. 2.1.5 Teoreminden sağ taraftaki eşitsizlik M_{SSSS} sınıfında doğrudur. Böylece M_{SSSS} sınıfında (2.46) bağıntısının sağ tarafındaki eşitsizlik sağlanmış olur. (2.46) bağıntısının sol tarafındaki eşitsizlik için (2.45) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{r} \geq |ff(\zeta) - \zeta| \geq r - |ff(\zeta)|$$

elde edilir. ■

Dikkat edilirse $FF(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$ fonksiyonu için (2.46) eşitsizliği kesindir. Ayrıca $FF \in M_{SSSS}$ olduğundan (2.46) eşitsizliği aynı zamanda M_{SSSS} sınıfı için de geçerli olur.

2.3 $\alpha\alpha$ Mertebeli Meromorf Yıldızl ve Konveks Fonksiyonlar

$\zeta \in \mathbb{D}^{\alpha\alpha}$ ve $0 \leq \alpha\alpha < 1$ olmak üzere

$$\Re \left\{ \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \right\} > \alpha\alpha$$

eşitsizliğini sağlayan (2.1) açılımına sahip $f \in MM$ fonksiyona $\alpha\alpha$ mertebeli meromorf yıldızl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $MMSSSS(\alpha\alpha)$ ile gösterilir. $MMSSSS(0) = MMSSSS$ ve $MMSSSS(\alpha\alpha) \subset MM_0$ dır. $MMSSSS(\alpha\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıda verilecek olan sonuçlar Pommerenke (1963)'ye aittir.

(2.35) bağıntısında $pp(\zeta) = \zeta f'(\zeta)/f(\zeta)$ olarak alınır (2.31) ifadesinin sağında yerine yazılırsa elde edilecek eşitlikten $MMSSSS(\alpha\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki integral temsili elde edilir.

2.3.1 Teorem. $f \in MMSSSS(\alpha\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $\zeta \in \mathbb{D}^{\alpha\alpha}$ için

$$f(\zeta) = \zeta \exp \left\{ (1-\alpha\alpha) \int_0^{2\pi} \log \left(1 - e^{-i\theta} / \zeta \right) d\theta \right\} \quad (2.47)$$

olacak biçimde $d(\theta + 2\pi) - d(\theta) = 1$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir $d(\theta)$ fonksiyonu vardır. Üstelik, $r \rightarrow 1^+$ için $\arg f \rightarrow \pi\theta + 2\pi(1-\alpha\alpha)d(\theta)$ ve

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \alpha\alpha + (1-\alpha\alpha) \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{-i\theta} / \zeta}{1 - e^{-i\theta} / \zeta} d\theta \quad (2.48)$$

dır.

2.3.2 Teorem. $f \in MMSSSS(\alpha\alpha)$ ve $|z| = r > 1$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{D}^{\alpha\alpha}$ için

$$\Re \left\{ \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right\} \leq \frac{|c_0|}{-\alpha\alpha r} + \frac{1}{r^2} \leq \frac{1}{r} \quad (2.49)$$

ve

$$\Re \left\{ \frac{f(\zeta)}{\zeta} \right\} \geq \frac{1 - \alpha\alpha + |\alpha|^2}{r} \geq \frac{1 - \alpha\alpha - |\alpha|^2}{r} \geq 1 + \frac{1}{r} \geq 1 - \alpha\alpha$$

τ

(
2
·
5
0
)

-



dır. (2.49) bağıntısı için eşitlik $0 \leq c_0 \leq 2(1 - \alpha)$ ve $z = r > 1$ olmak üzere,

$$f(z) = \frac{c_0}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-1}}{1 - z^{-1}} = z + c_0 + \dots$$

fonksiyonu için geçerlidir. (2.50) bağıntısı için eşitlik, $0 \leq c_0 \leq 2(1 - \alpha)$ ve $z = r > 1$ olmak üzere,

$$f(z) = z(1 - z^{-1})^{1 - \alpha + c_0/2} = z - c_0 + \dots$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $\alpha = 0$ olması durumu (2.15) eşitsizliğini verir. Bu yüzden $\alpha \neq 0$ için (2.49) eşitsizliğinin ispatı ile başlayalım. (2.47) integral temsili ve geometrik ortalamanın aritmetik ortalamadan daha büyük olmadığı gerçeği kullanılarak, $\zeta \in \mathbb{D}^*$ için

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)^{1/(1-\alpha)}}{\zeta} &= \exp \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{-i\theta} \zeta^{-1}|^{-2} d\theta \leq \int_0^{2\pi} |1 - e^{-i\theta} \zeta^{-1}|^{-2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + r^{-2}) d\theta - 2 \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\zeta} e^{i\theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.51)$$

bulunur. Ayrıca (2.47) bağıntısından

$$c_0 = -2(1 - \alpha) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta$$

olduğu görülür. Böylece, $|c_0| \leq 2(1 - \alpha)$ elde edilir. (2.51) bağıntısından

$$|\zeta^{-1} f(\zeta)|^{1/(1-\alpha)} \leq 1 + r^{-2} + |c_0| r^{-1} / (1 - \alpha) \leq (1 + r^{-1})^2$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikten (2.49) eşitsizliğine ulaşılır.

Şimdi (2.50) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim. $f \in M(\alpha)$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^*$ için

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)^{1-\alpha}} = 1 - c_0 \zeta^{-1} + \dots \quad \text{ve} \quad \operatorname{Re} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)^{1-\alpha}} > \alpha$$

olduğundan

$$\phi(\zeta) = \zeta \frac{[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] - 1}{[\zeta f'(\zeta)/f(\zeta)] + (1 - 2\alpha)} = -\frac{c_0}{2(1 - \alpha)} + \dots \quad (2.52)$$

fonksiyonu \mathbb{D}^{\times} bölgesinde analitik ve $|\phi(\zeta)| < 1$ dir. $|\zeta| = r$ için

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log \frac{f(\zeta)}{\zeta} = \frac{1}{r} + \operatorname{Re} \frac{\zeta f'(\zeta)}{r f(\zeta)} \leq 2(1 - \alpha) \frac{\zeta^{-1} \phi(\zeta)}{r - \zeta^{-1} \phi(\zeta)} \quad (2.53)$$

olur. Eğer $b = |\phi(\infty)| = |c_0|/2(1 - \alpha)$ olarak alınır, Golusin (1957, s:287) den

$$|\phi(\zeta)| \leq (br + 1)/(b + r)$$

dır. Böylece (2.53) eşitsizliğinden

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log |\zeta^{-1} f(\zeta)| \leq 2(1 - \alpha) \frac{br + 1}{r(r^2 - 1)}$$

bulunur. $[r, \infty]$ üzerinden integral alınır

$$\log |\zeta^{-1} f(\zeta)| \geq (1 - \alpha)(1 + b) \log(1 - r^{-1}) + (1 - \alpha)(1 - b) \log(1 + r^{-1})$$

olur. $b = |c_0|/2(1 - \alpha) = |\phi(\infty)| \leq 1$ olduğu dikkate alınır, (2.50) eşitsizliği elde edilir. ■

2.3.3 Teorem. $f \in M_{\alpha}$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $\zeta \in \mathbb{D}^{\times}$ için

$$|f'(\zeta)| \geq \alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta} + (1 - \alpha) \frac{\zeta^{\alpha/(1-\alpha)}}{|\zeta|^2} \geq \frac{1}{|\zeta|^2} \quad (2.54)$$

dır. Eşitlik $\zeta = r > 1$ olmak üzere $f(\zeta) = \zeta(1 - 2r^{-1}\zeta^{-1} + \zeta^{-2})^{1-\alpha}$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $d(\theta)$, $d(2\pi) - d(0) = 1$ özelliğinde $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir fonksiyon olmak üzere (2.47) eşitliğinden

$$\frac{\zeta}{r} = \exp \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|1 - e^{-i\theta} \zeta^{-1}|^2} d\theta$$

yazılabilir. Geometrik ortalama aritmetik ortalamadan büyük olmadığı dikkate alırsa

$$\frac{|\zeta|^{1/(1-\alpha)}}{r} \leq \frac{1}{|1 - e^{-i\theta}\zeta - 1|^2} d\theta$$

bulunur. Böylece (2.48) bağıntısından

$$\frac{|\zeta|^{1/(1-\alpha)}}{r} (1 - |\zeta|^{-2}) \leq \frac{1 - |\zeta|^{-2}}{|1 - e^{-i\theta}\zeta - 1|^2} d\theta = \frac{1}{1 - \alpha} \operatorname{Re} \frac{\zeta'}{f(\zeta)} - \alpha$$

olur. Buradan

$$\operatorname{Re} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \geq \alpha + (1 - \alpha) \frac{|\zeta|^{1/(1-\alpha)}}{r} (1 - |\zeta|^{-2})$$

elde edilir. Bu ise (2.54) ifadesinin kendisidir. ■

2.3.4 Teorem. $f \in M(\alpha)$ ve $\zeta = re^{i\theta} \in \mathbb{D}^*$ olsun. Bu durumda

(i) $0 \leq \alpha < 1/2$ ise

$$|f'(\zeta)| \geq k(1 - r^{-1})^{1-2\alpha}$$

olacak biçimde $k = k(f) > 0$ sayısı vardır.

(ii) $1/2 \leq \alpha < 1$ ise her ε pozitif sayısı için

$$|f'(\zeta)| \geq k(\varepsilon)(1 - r^{-1})^\varepsilon$$

olacak biçimde $k(\varepsilon) = k(f, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

2.3.5 Teorem. $f \in M(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$(n+1)^2 |c_n|^2 \leq 4(1-\alpha)^2 - 4(1-\alpha) \frac{1}{n+1} + \alpha |c_n|^2$$

dir.



İspat. (2.52) bağıntısında olduğu gibi

$$\phi(\zeta) = \zeta \frac{\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)}{\zeta f'(\zeta) + (1 - 2\alpha)f(\zeta)}$$

fonksiyonundan

$$-\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \alpha)c_k \zeta^{-k} = \phi(\zeta) \left[(1 - \alpha) - \sum_{k=0}^{\infty} (1 + 2\alpha)c_k \zeta^{-k-1} \right]$$

bulunur. Böylece, $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned} -\sum_{k=0}^m (1 + \alpha)c_k \zeta^{-k} - \sum_{k=n+1}^{\infty} (1 + \alpha)c_k \zeta^{-k} + \phi(\zeta) \left[\sum_{k=0}^m (1 + 2\alpha)c_k \zeta^{-k-1} - \sum_{k=n}^{\infty} (1 + 2\alpha)c_k \zeta^{-k-1} \right] \\ = \phi(\zeta) \left[(1 - \alpha) - \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2\alpha)c_k \zeta^{-k-1} \right] \end{aligned}$$

olur. Burada, sol taraftaki ifadede ikinci ve üçüncü terimler $m \geq n + 1$ olmak üzere, sadece ζ^{-m} kuvvetlerinden oluştuğundan ve $|\phi(\zeta)| < 1$ olduğundan Parseval formülü gereği

$$\sum_{k=0}^m (1 + \alpha)^2 |c_k|^2 \leq 4(1 - \alpha)^2 + \sum_{k=0}^{n-1} (1 + 2\alpha)^2 |c_k|^2$$

elde edilir. Buradan istenilen sonuca ulaşılır. ■

2.3.4 Teoreminden aşağıdaki sonucu elde etmek mümkündür.

2.3.6 Sonuç. $f \in M_{SSS}(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ ve $\{f(\zeta): |\zeta| > 1\}$ görüntü bölgesinin tümleyenin alanı A olsun. Bu durumda

$$\pi \alpha < A \leq \pi$$

dir. Bu eşitsizlikler kesindir.

İspat. $AA \leq \pi\pi$ olduğu 2.1.2 Açıklamasında gösterilmiştir. 2.3.5 Teoreminden

$$\sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha) |a_{kk}|^2 \leq 1 - \alpha$$

dır. Bu eşitsizlik Alan Teoremi ile birlikte kullanılırsa

$$AA = \pi\pi - \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kk}|^2 \geq \pi\pi + \alpha \sum_{k=0}^{\infty} |a_{kk}|^2 \geq \pi\pi\alpha$$

elde edilir. Eşitlik $kk = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere sadece $aa_{kk} = 0$ için sağlanır. Bu durumda $AA = \pi\pi$ dir.

$AA > \pi\pi\alpha$ eşitsizliğinin mümkün en iyi eşitsizlik olduğunu göstermek için $MMSSS(\alpha)$ sınıfına ait

$$f(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta^{n+1}} = \zeta + \frac{2(1-\alpha)/(n+1)}{\zeta^{n+1}} \quad (2.55)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. $w = f(\zeta)$ dönüşümü $|\zeta| = 1$ çemberini

$$K = \{w : |w| \leq 2^{2(1-\alpha)/(n+1)}, |\arg w - 2\pi k/(n+1)| \leq \pi\alpha/(n+1), k = 0, 1, \dots, n\}$$

bölgesi içinde kalan bir küme üzerine resmeder. Dolayısıyla, AA alanı, KK kümenin alanının limiti olan $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi\pi\alpha 2^{2(1-\alpha)/(n+1)} = \pi\pi\alpha$ sayısından daha küçüktür. ■

2.3.5 Teoreminden $MMSSS(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı sınırı hemen elde edilir.

2.3.7 Teorem. $0 \leq \alpha < 1$ için $f \in MMSSS(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) açılımıyla verilmiş olsun. Bu durumda, her $n \geq 0$ için

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)}$$

dir. Eşitlik (2.55) bağıntısıyla verilen f fonksiyonu için geçerlidir. Kaczmariski (1969),

2.3.6 Teoreminin aşağıda verilen daha genel halini elde etmiştir.

2.3.8 Teorem. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $f \in MMSSS(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) açılımında $\alpha_0 = 0$ olarak verilmiş olsun. Ayrıca, $M \geq 1$ ve $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} > \alpha \quad \text{ve} \quad \frac{\zeta f'(\zeta)/f(\zeta) - \alpha}{1 - \alpha} - M < M$$

eşitsizlikleri sağlansın. Bu durumda

$$\rho \leq \frac{[(2 - 1/M)(1 - \alpha)]}{(m+1)}$$

dir. Eşitlik, $M = 1$ iken

$$f(\zeta) = \zeta \exp(\alpha - 1) / (m + 1) \zeta^{m+1}$$

fonksiyonu için, $M > 1$ iken

$$f(\zeta) = \zeta \frac{M - 1}{M \zeta^{m+1}} \frac{(2M-1)(1-\alpha)}{(M-1)(m+1)}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

2.3.9 Tanım $f \in M$ fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer her $\zeta \in \mathbb{D}^x$ için

$$\arg \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} < \frac{\pi}{2} \quad (2.56)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna α mertebeden güçlü yıldızlı denir. Eğer $g \in M$ fonksiyonu (2.2) tipinde bir seri açılımına sahipse (2.56) ifadesi $z \in \mathbb{D}^*$ için

$$-\pi + \arg \frac{z g'(z)}{g(z)} < \frac{\pi}{2}$$

biçimine gelir. Bu durumda g fonksiyonu α mertebeden güçlü yıldızlı olur. $\alpha = 1$ olması durumunda meromorf güçlü yıldızlı fonksiyonlar yıldızlı fonksiyon olur.

Aşağıdaki teorem Brannan ve ark. (1970) tarafından verilen α mertebeli güçlü yıldızlı fonksiyonların katsayı sınırlarıyla ilgilidir.

2.3.10 Teorem. α mertebeli güçlü yıldızlı f fonksiyonu (2.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda her $n \geq 0$ için

$$|c_n| \leq \frac{2\alpha}{n+1}$$

dir. Eşitlik, $\zeta \in \mathbb{D}^*$ için

$$\zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{1 + 1/\zeta^{n+1}^\alpha}{1 - 1/\zeta^{n+1}^\alpha}$$

diferansiyel denklemini sağlayan f fonksiyonları için geçerlidir.

2.3.11 Tanım. $\zeta \in \mathbb{D}^*$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere, (2.1) tipinde seri açılımına sahip $g \in \mathcal{M}$ fonksiyonu için

$$\operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{g''(\zeta)}{g'(\zeta)} \right\} > \alpha$$

eşitsizliği sağlanıyorsa g fonksiyonuna α mertebeli meromorf konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{M}(\alpha)$ ile gösterilir. $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}(\alpha) \subset \mathcal{M}_0$ dır.

Alexander teoremi (1.5.4 Teoremi) $\mathcal{M}(\alpha)$ ve $\mathcal{M}(\alpha)$ sınıfları arasında aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

2.3.12 Teorem. $\zeta \in \mathbb{D}^*$ olsun. Bu durumda (i)

$$f \in \mathcal{M}(\alpha) \Leftrightarrow \zeta f'(\zeta) \in \mathcal{M}(\alpha).$$

(ii) $c_0 = 0$ olmak üzere,

$$f \in \mathcal{M}(\alpha) \Leftrightarrow \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{f(t)}{t} dt \in \mathcal{M}(\alpha) \quad (2.57)$$

dır.

Burada $c_0 \neq 0$ alınmış olsaydı (2.57) integrali $c_0 \ln(\zeta/\zeta_0)$ çok değerli terimini buldurmuş olacaktı. Bu durum fonksiyonun bire-bir olmasını bozardı. (2.40) denklemin-den

$$c_0 = -2(1 - \alpha) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta \quad (2.58)$$

elde edilir. Böylece (2.40) ve (2.57) eşitliklerinden $c_0 = 0$ için $f \in M(\alpha)$ fonksiyonunun integral temsili

$$f(\zeta) = \int_0^{2\pi} \log \zeta - e^{-i\theta} / \zeta d\theta \quad (2.59)$$

biçiminde olur.

Şimdi, Ruscheweyh türev operatörü yardımıyla $M(\alpha)$ sınıfı tarafından kapsanan meromorf yalınkat fonksiyonların yeni bir sınıfı tanımlanıp, bu sınıfa ait fonksiyonların özellikleri incelenecek.

\mathbb{D}^* delik dairesinde

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

Laurent açılımına sahip $g \in M$ fonksiyonları için $z \in \mathbb{D}^*$ olmak üzere

$$D^0 g(z) = g(z)$$

$$D^1 g(z) = \frac{1}{z} + 2c_0 + 3c_1 z + \dots$$

$$D^2 g(z) = D^1 g(z)$$

ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$D^n g(z) = D^{n-1} g(z) = \frac{1}{z} + \dots + c_n z^{n-2} \quad (2.60)$$

zz $mm=2$ $mm-2$



biçiminde tanımlı DD^m operatörü Ruscheweyh türev operatörü olarak adlandırılır.

$z \in \mathbb{D}^*$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{DD^{m+1}gg(z)}{DD^m gg(z)} - 2 \right\} < -\alpha \quad (2.61)$$

eşitsizliğini sağlayan $g \in \mathcal{M}$ fonksiyonların sınıfını $\mathcal{B}_m(\alpha)$ ile gösterelim. Buna göre $\mathcal{B}_0(\alpha) = \mathcal{MSSS}(\alpha)$ olduğu açıktır. Bununla birlikte $\mathcal{B}_m(\alpha)$ sınıfa ait fonksiyonların B. A. Uralegaddi ve C. Somanatha (1991) tarafından verilen diğer üç özelliği aşağıda verilmiştir.

2.3.13 Teorem. Her $m \in \mathbb{N}_0$ için $\mathcal{B}_{m+1}(\alpha) \subset \mathcal{B}_m(\alpha)$ dir.

İspat. $g \in \mathcal{B}_{m+1}(\alpha)$ olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{DD^{m+2}gg(z)}{DD^{m+1}gg(z)} - 2 \right\} < -\alpha \quad (2.62)$$

dir. Bu eşitsizlikten faydalanarak

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{DD^{m+1}gg(z)}{DD^m gg(z)} - 2 \right\} < -\alpha$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\frac{DD^{m+1}gg(z)}{DD^m gg(z)} - 2 = - \frac{1 + (2\alpha - 1)ww(z)}{1 + ww(z)} \quad (2.63)$$

olacak biçimde \mathbb{D} birim dairesinde analitik $ww(z)$ fonksiyonu tanımlayalım. Burada $ww(0) = 0$ olduğu açıktır. Bu eşitlikten

$$\frac{DD^{m+1}gg(z)}{DD^m gg(z)} = \frac{1 + (3 - 2\alpha)ww(z)}{1 + ww(z)} \quad (2.64)$$

yazılabilir. (2.64) logaritmik türevi ve

$$z \left(\frac{DD^m gg(z)}{DD^m gg(z)} \right)' = DD^{m+1}gg(z) - 2DD^m gg(z) \quad (2.65)$$

özdeşliği kullanılarak

$$\frac{[DD^{n+2}gg(zz)/DD^{n+1}gg(zz)] - 2 + \alpha\alpha}{1 - \alpha\alpha} = \frac{2zzww'(zz)}{kk + ww(zz)kk + (3 - 2\alpha\alpha)ww(zz)kk} - \frac{1 - ww(zz)}{1 + ww(zz)} \quad (2.66)$$

elde edilir. $zz \in \mathbb{D}$ için $|ww(zz)| < 1$ olduğunu iddia ediyoruz. Aksi durumda $\max_{|zz| \leq |zz_0|} |ww(zz)| = |ww(zz_0)| = 1$ olacak biçimde $zz_0 \in \mathbb{D}$ noktası vardır. Bu durumda Jack (1971) Lemması gereği

$$zz_0ww'(zz_0) = kkww'(zz_0) \quad (2.67)$$

olacak biçimde $kk \geq 1$ reel sayısı bulunabilir. (2.64) ve (2.67) eşitliklerinden

$$\frac{[DD^{n+2}gg(zz_0)/DD^{n+1}gg(zz_0)] - 2 + \alpha\alpha}{1 - \alpha\alpha} = \frac{2kkww'(zz_0)}{kk + ww(zz_0)kk + (3 - 2\alpha\alpha)ww(zz_0)kk} - \frac{1 - ww(zz_0)}{1 + ww(zz_0)}$$

elde edilir. Böylece,

$$\operatorname{Re} \frac{DD^{n+2}gg(zz_0)/DD^{n+1}gg(zz_0) - 2 + \alpha\alpha}{1 - \alpha\alpha} > \frac{1}{2(2 - \alpha\alpha)}$$

bulunur. Bu durum (2.62) ile çelişir. O halde her $zz \in \mathbb{D}$ için $|ww(zz)| < 1$ dir. Böylece (2.63) eşitliğinden $gg \in \mathbb{B}_m(\alpha\alpha)$ bulunur. ■

2.3.13 Teoremi ve $\mathbb{B}_0(\alpha\alpha) = \mathbb{MSSS}(\alpha\alpha)$ eşitliğinden $\mathbb{B}_m(\alpha\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların yakınlık olduğu sonucu çıkarılabilir.

2.3.14 Teorem. $gg \in \mathbb{M}$, $nn \in \mathbb{N}_0$ ve $cc > 0$ olmak üzere, gg fonksiyonu $zz \in \mathbb{D}$ için

$$\operatorname{Re} \frac{DD^{n+1}gg(zz)}{DD^{nn}gg(zz)} - 2 < -\alpha\alpha + \frac{1 - \alpha\alpha}{2(1 - \alpha\alpha + cc)}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$FF(zz) = \frac{cc}{zz^{cc+1}} \int_0^{zz} dt$$

fonksiyonu $\mathcal{BB}_m(\alpha)$ sınıfına aittir.



2.3.15 Teorem.

$$g \in \mathbb{B}_m(\alpha) \Leftrightarrow F(z) = \frac{1}{z^2} \int_0^z g(t) dt \in \mathbb{B}_{m+1}(\alpha)$$

İspat. F fonksiyonunun tanımı gereği

$$z D^m F'(z) + 2 D^m F(z) = D^m g(z)$$

dır. Yani

$$z D^{m+1} F(z) + 2 D^m F(z) = D^m g(z) \quad (2.68)$$

dir. (2.65) ve (2.67) beraber düşünülürse $D^m g(z) = D^{m+1} F(z)$ bulunur. Böylece $D^{m+1} f(z) = D^{m+2} F(z)$ sağlanır. Buradan da

$$D^{m+1} f(z) / D^m f(z) = D^{m+2} F(z) / D^{m+1} F(z)$$

sonucu elde edilir. ■

2.4 Konvekse Yakın Meromorf Fonksiyonlar

f fonksiyonu \mathbb{D}^{xx} daresinde (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. Eğer $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} \zeta f'(\zeta)}{\phi'(\zeta)} > 0 \quad (2.69)$$

olacak biçimde bir $g \in \mathbb{MSSSS}$ fonksiyonu ve bir $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ sayısı varsa f fonksiyonuna \mathbb{D}^{xx} bölgesinde **konvekse yakın fonksiyon** denir. \mathbb{D}^{xx} bölgesinde konvekse yakın meromorf fonksiyonların sınıfı \mathbb{MCCCC} ile gösterilir.

Analitik konvekse yakın fonksiyonlarda olduğu gibi, Alexander teoremi kullanılarak, $\phi \in \mathbb{MCCCC}$ olmak üzere \mathbb{D}^{xx} bölgesinde konvekse yakın fonksiyonlar

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} \zeta f'(\zeta)}{\phi'(\zeta)} > 0 \quad (2.70)$$

eşitsizliğini sağlayan ff fonksiyonları olarak akla gelebilirdi. Ancak (2.69) ve (2.70) eşitsizlikleri \mathbb{D}^{xx} bölgesinde denk değildir. Bunlardan (2.69) bağıntısını sağlayan fonksiyonlar daha geniş bir sınıfı tanımlar. 2.2.8 Teoreminden her bir $\phi \in \mathcal{M} \cap \mathcal{G} = \{ \phi \mid \phi'(\zeta) \in \mathcal{MSSS} \}$ dir. Ancak, \mathcal{MSSS} sınıfına ait bütün fonksiyonları bu şekilde elde etmek mümkün olmadığı 2.2.9 Açıklamasında belirtilmiştir. Ayrıca \mathcal{MCCCC} sınıfına ait fonksiyonların \mathbb{D}^{xx} bölgesinde yalınkat olma zorunluluğu da yoktur. Örneğin, Libera ve Robertson (1961) (2.2) açılımına sahip ff fonksiyonu ve $0 < |z| < 1$ için $gg(z) = -z^{-1}$ ve

$$-z^{-2}(1 - z^2)ff'(z) = 1 + z^2, ff(z) = z - 2z^2 - (2/3)z^3 + \dots$$

olarak tanımlanan ff fonksiyonu (2.69) bağıntısını sağlamasına rağmen $|c_1| > 1$ olduğundan ff fonksiyonu \mathbb{D}^{xx} bölgesinde yalınkat değildir.

Bazı yazarlar \mathcal{MCCCC} sınıfındaki fonksiyonlara yalınkatlık şartını koyarak bu sınıfı çalışmışlardır. Ancak biz burada \mathcal{MCCCC} sınıfına bu şartı koymayacağız.

Libera ve Robertson (1961) ve Pommerenke (1962), Kaplan (1952)'in analitik konvekse yakın fonksiyonlar için kullandığı metodu kullanarak meromorf konvekse yakın fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

2.4.1 Teorem. ff fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $ff \in \mathcal{MCCCC}$ olması için gerek ve yeter şart $r > 1$ ve $2\pi > \theta_2 - \theta_1 \geq 0$ şartını sağlayan her θ_1 ve θ_2 çifti için

$$\frac{\operatorname{Re} \left\{ \frac{ff''(ree^{i\theta_1})}{ff'(ree^{i\theta_1})} \right\}}{\operatorname{Re} \left\{ \frac{ff''(ree^{i\theta_2})}{ff'(ree^{i\theta_2})} \right\}} > -\pi \quad (2.71)$$

olmasıdır.

2.4.2 Teorem. $z \in \mathbb{D}^*$ için $ff \in \mathcal{MCCCC}$ yalınkat fonksiyonu (2.2) açılımına sahip ve $|b_{-1}| = 1$ olmak üzere, $gg(z) = b_{-1}/z + \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m$ fonksiyonu meromorf yıldızlı olsun. Bu durumda $2 \leq c \leq 2\sqrt{2}$ için

$$m|c_m| + |b_m| \leq c \quad (2.72)$$

dir.

İspat. $ff \in MMCC$ yalınkat fonksiyonu (2.2) açılımına sahip ve $bb_{-1} = e^{iiaa}$ olsun. Bu durumda $\operatorname{Re} \frac{zzff'(zz)}{gg(zz)} > 0$ olur. Buradan \mathbb{D}^* bölgesinde

$$-\sec \alpha \frac{zzff'(zz)}{gg(zz)} + i \tan \alpha = \frac{1 + ww(zz)}{1 - ww(zz)} \quad (2.73)$$

ve

$$ww'(0) = -\frac{cc_0}{2} e^{-2iiaa} \sec \alpha, \quad -\cos \alpha > 0 \quad (2.74)$$

olacak biçimde $ww(0) = 0$ ve $|ww(zz)| < 1$ özelliğinde \mathbb{D} dairesinde analitik ww fonksiyonu vardır. (2.73) ve (2.74) eşitlikleri ve fonksiyonların seri açılımından

$$\begin{aligned} & \frac{zz^2ff'(zz) - e^{iiaa}zzgg(zz)}{gg(zz)} = \frac{zz^2ff'(zz) + e^{-iiaa}zzgg(zz)}{gg(zz)} \\ & 2e^{iiaa} \cos \alpha + \sum_{kk=0}^{\infty} \frac{cc_{kk}}{e^{iiaa}bb_{kk}} - e^{iiaa}bb_{kk}zz^{kk+1} = \sum_{kk=0}^{\infty} \frac{cc_{kk}}{e^{-iiaa}bb_{kk}} + e^{-iiaa}bb_{kk}zz^{kk+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & 2e^{iiaa} \cos \alpha + \sum_{kk=0}^{nn-1} \frac{cc_{kk}}{e^{iiaa}bb_{kk}} - e^{iiaa}bb_{kk}zz^{kk+1} \\ & = \sum_{kk=0}^n \frac{cc_{kk}}{e^{-iiaa}bb_{kk}} + e^{-iiaa}bb_{kk}zz^{kk+1} + \sum_{kk=nn+2}^{\infty} \frac{cc_{kk}}{e^{-iiaa}bb_{kk}} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada $\sum_{kk=nn+2}^{\infty} aa_{kk}zz^{kk}$ serisi \mathbb{D} dairesinde yakınsaktır. $rr < 1$ ve $zz = rre^{i\theta}$ için her iki tarafın integrali alınırsa

$$\begin{aligned} & 4 \cos^2 \alpha + \sum_{kk=0}^{nn-1} \frac{cc_{kk}}{e^{iiaa}bb_{kk}} - e^{iiaa}bb_{kk}r^{2kk+2} \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2e^{iiaa} \cos \alpha + \sum_{kk=0}^{m-1} \frac{cc_{kk}}{e^{iiaa}bb_{kk}} - e^{iiaa}bb_{kk}r^{kk+1} \right) |ww(zz)|^2 d\theta \\ & \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(2e^{iiaa} \cos \alpha + \sum_{kk=0}^{m-1} \frac{cc_{kk}}{e^{iiaa}bb_{kk}} - e^{iiaa}bb_{kk}r^{kk+1} \right) |ww(zz)|^2 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^m |c_k|^2 r^{2k} + e^{-i\alpha} b_{kk} r^{k+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \right) d\theta \\
&\geq \sum_{k=0}^n |c_k|^2 r^{2k} + e^{-i\alpha} b_{kk} r^{2k+2}
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$4 \cos^2 \alpha + \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 - e^{i\alpha} b_{kk} \geq \sum_{k=0}^n |c_k|^2 + e^{-i\alpha} b_{kk}$$

ve

$$\begin{aligned}
|c_n|^2 + e^{-i\alpha} b_{nn} &\leq 4 \cos^2 \alpha - \sum_{k=0}^{n-1} |c_k|^2 + e^{-i\alpha} b_{kk} - e^{i\alpha} b_{kk} \\
&= 4 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{kk}
\end{aligned} \tag{2.75}$$

bulunur. (2.75) eşitsizliğinin sol tarafının kare açılımı yapıp, eşitsizlik yeniden düzenlenirse

$$n^2 |c_n|^2 + |b_{nn}|^2 \leq 4 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} c_k b_{kk} - 2 \operatorname{Re} |c_n|^2 e^{i\alpha}$$

ve

$$\begin{aligned}
(n |c_n| + |b_{nn}|)^2 &\leq 4 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha \sum_{k=1}^{n-1} |c_k b_{kk}| + 4n |c_n b_{nn}| \\
&\leq 4 + \sum_{k=1}^n |c_k b_{kk}|
\end{aligned} \tag{2.76}$$

eşitsizlikleri elde edilir. g fonksiyonu \mathbb{D}^* bölgesinde yalınkat olduğundan alan teoremi gereği $|b_{-1}| = 1$ olmak üzere $\sum_{k=-1}^m |b_k|^2 \leq 1$ dir. Alan teoreminden bilindiği gibi, f fonksiyonu \mathbb{D}^* bölgesinde yalınkat iken $\sum_{k=1}^m |c_k|^2 \leq 1$ olur. Böylece Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{k=1}^n |c_k| |b_k| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |b_k|^2 \leq 1 \quad (2.77)$$

olur. (2.76) ve (2.77) eşitsizliklerinden $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$n|c_n| + |b_n| \leq 2\sqrt{2} \quad (2.78)$$

elde edilir. Burada (2.78) eşitsizliğine ulaşmak için f fonksiyonunun \mathbb{D}^* bölgesinde yalınkat olması gerekli olmuştur.

2.4.3 Açıklama. 2.4.2 Teoreminde $f \in MMSSS$ fonksiyonu (2.2) açılımına sahip ise $g(z) = -f(z)$ alınabileceğinden $|c_n| = |b_n|$ olup, (2.72) eşitsizliği $n = 2$ için

$$|c_n| \leq \frac{2}{n+1}$$

olur. Bu ise Clunie (1959) tarafından elde edilen eşitsizliğe indirgenmiş olur.

2.5 α -Spiral Meromorf Fonksiyonlar

(2.1) açılımına sahip $f \in MM$ fonksiyonu ve $z \in \mathbb{D}^*$ için

$$\operatorname{Re} \frac{z f'(z)}{f(z)} > 0 \quad (2.79)$$

olacak biçimde $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ sayısı varsa f fonksiyonuna \mathbb{D}^* bölgesinde α -spiral meromorf fonksiyon denir. α -spiral meromorf fonksiyonların sınıfı $MMSSPP(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanımdan hareketle $MMSSPP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilinin aşağıdaki biçimde verilebileceği kolaylıkla görülür.

2.5.1 Teorem. $f \in MMSSPP(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart $z \in \mathbb{D}^*$ için

$$f(z) = z \exp \left\{ i \alpha \int_0^{\infty} \frac{t^{-1} - 1}{t} dt \right\}$$

olacak biçimde $p \in PP$ fonksiyonu vardır.

Zamorski (1961), $MMSSPP(\alpha)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayı tahminini aşağıdaki gibi elde etmiştir.

2.5.2 Teorem. $ff \in MMSSPP(\alpha)$ ise her $nn \geq 0$ için

$$|c_{nn}| \leq \frac{2}{nn + 1} \cos \alpha$$

dır. Eşitlik her bir nn ve $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$F_n(\zeta) = \zeta + \frac{1}{\zeta^{nn+1}} e^{-i\alpha} \cos \alpha$$

fonksiyonu için geçerlidir.

Kaczmarzski (1969) bu sonucu aşağıdaki biçimde genelleştirmiştir.

2.5.3 Teorem. α, λ ve KK keyfi sabitler olmak üzere, $0 \leq \alpha < 1$, $|\lambda| < \pi/2$ ve $KK \geq 1$

olsun. Eğer ff fonksiyonu (2.1) seri açılımına sahip $c_0 = 0$ özelliğinde ve her bir $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ için

$$\frac{e^{i\alpha} [\zeta f'(\zeta) / f(\zeta)] - i \sin \alpha - \lambda \cos \alpha}{(1 - \lambda) \cos \alpha} - KK$$

ise her $nn \geq 1$ için

$$|c_{nn}| \leq \frac{(2 - 1/KK)(1 - \lambda)}{nn + 1} \cos \alpha$$

dır. Eşitsizlik tüm değişkenler için kesin olup, Ekstremal fonksiyon; $KK = 1$ iken

$$ff(\zeta) = \zeta \exp \frac{(\lambda - 1) e^{-i\alpha} \cos \alpha}{(nn + 1) \zeta^{nn+1}}$$

ve $KK > 1$ iken

$$ff(\zeta) = \zeta \frac{KK - 1}{KK \zeta^{nn+1}} \frac{(2KK - 1)(1 - \lambda)}{(KK - 1)(nn + 1)} e^{-i\alpha} \cos \alpha$$

dir.



2.5.3 Teoreminin ispatı aşağıdaki iki ilginç sonucun ortaya çıkmasına sebep olmuştur.

2.5.4 **Teorem.** ff fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$, $c_0 = 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $\operatorname{Re}[\zeta f'(\zeta)/ff(\zeta)] > \alpha$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + \alpha) |c_n|^2 \leq 1 - \alpha$$

dır.

2.5.5 **Teorem.** ff fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$, $c_0 = 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, $|\zeta f'(\zeta)/ff(\zeta) - 1| < 1$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n + \alpha)(n + 2 - \alpha) |c_n|^2 \leq (1 - \alpha)^2$$

dır.

26 Sınırlı Meromorf Fonksiyonlar

ff fonksiyonu (2.1) tipinde bir seri açılımına sahip olsun. $\zeta \in \mathbb{D}^{xx}$ olmak üzere $\frac{f(\zeta)}{f(\zeta)}$ $>$ mm olacak biçimde $mm > 0$ sayısı varsa ff fonksiyonuna **alttan sınırlı fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $BBMM(mm)$ ile gösterilir. $BBMM(mm)$ sınıfına ait fonksiyonların $ww = 0$ değerini almadığı açıktır. $BBMM(mm)$ sınıfına ait $c_0 = 0$ özelliğindeki fonksiyonların alt sınıfı $BMS(mm)$ ile gösterilir. $BBMM(mm)$ sınıfına ait meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı $BBMSS(mm)$ ile, $BMS(mm)$ sınıfına ait meromorf yalınkat fonksiyonların sınıfı ise $BMS(mm)$ ile gösterilir.

Aşağıda bu sınıflarla ilgili çeşitli eşitsizlikler verilmiştir. Bunlardan birincisi Alan teoreminin ispatından elde edilen aşağıdaki sonuçtur.

2.6.1 **Teorem.** $ff \in BBMSS(mm)$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq 1 - mm^2$$

dir. Eğer $ff \in BBMMSS(mm)$ ise $mm \leq 1$ dir. Eğer $mm = 1$ ise $ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta$ dir.

2.6.1 Teoreminden $BBMM(mm)$ sınıfında çalışırken daima $0 < mm < 1$ olarak alınacaktır.

Pick (1917), $zz \in \mathbb{DD}$ için $|ff(zz)| < KK$, $KK > 1$ özelliğindeki (1.1) açılımına sahip $ff \in SS$ fonksiyonları için $|aa_2| \leq 2(1 - 1/MM)$ olduğunu gösterdi. Bu eşitsizlikten faydalanarak aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

2.6.2 Teorem. $ff \in BBMMSS(mm)$ ise

$$|cc_0| \leq 2(1 - mm)$$

dir. Eşitlik $\zeta\zeta \in \mathbb{DD}^{xx}$ olmak üzere

$$ff(\zeta\zeta) = \frac{\zeta\zeta}{2} + \frac{1}{\zeta\zeta} + \frac{2mm}{\zeta\zeta} + \frac{1}{\zeta\zeta} + \frac{4mm\zeta\zeta}{(\zeta\zeta - 1)^2} \quad (2.80)$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $\zeta\zeta = 1/zz$ ve $gg(zz) = 1/ff(\zeta\zeta)$ denirse $gg \in SS$ sınırlı yalınkat fonksiyonu modül olarak $KK = 1/mm$ ile üstten sınırlanmış olur. Burada $aa_2 = -cc_0$ olduğundan Pick (1917)'in sonucu gereği $|cc_0| = |aa_2| \leq 2(1 - mm)$ elde edilir.

Zawadzki (1961), $BBMMSS(mm)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|cc_1| \leq 1 - mm^2$ kesin eşitsizliğini elde etmiştir. Ayrıca Janowski (1964), bu sınıfa ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri üzerinde ilave çalışmalar yapmıştır.

2.6.3 Teorem. $kk \geq 1$ olmak üzere

$$ff(\zeta\zeta) = \zeta\zeta + \frac{cc_{kk}}{\zeta\zeta^{kk}} + \dots = \zeta\zeta + \sum_{n=kk}^{\infty} \frac{cc_n}{\zeta\zeta^n} \quad (2.81)$$

fonksiyonu $BBMMSS(mm)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda $kk \leq n \leq 2kk$ için

$$|cc_n| \leq \frac{2}{n+1} (1 - mm^{n+1})$$

olup, eşitlik, $FF^{-1}(ww)$ fonksiyonu

$$ww = FF(\zeta) = \zeta - \frac{1}{\zeta^{m+1}} \quad (2.81)$$

fonksiyonunun ters fonksiyonu olmak üzere

$$mmFF^{-1}(\zeta) = \zeta - \frac{2}{m+1} (1 - mm^{m+1}) \frac{1}{\zeta^{m+1}} + \dots \quad (2.82)$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $tt \neq 0$ için $1/[ff(\zeta)/tt]^{nn}$ ifadesi

$$\frac{1}{[ff(\zeta)/tt]^{nn}} = \frac{1}{\zeta^{nn}} - \frac{nncc_{kk}tt^{nn}}{\zeta^{nn+kk+1}} + \dots \quad (2.83)$$

şeklinde bir seri açılımına sahiptir. Eğer $kk \leq nn \leq 2kk$ ise (2.83) ifadesinde paydadaki üs için $nn + kk + 1 > 2kk$ olması önemlidir. (2.81) ve (2.83) beraber düşünülürse $tt \neq 0$ için

$$ff \frac{ff}{tt} = \zeta + \sum_{n=kk}^{2kk} \frac{cc_{nn}(1 + tt^{nn+1})}{\zeta^{nn}} + \sum_{n=2kk+1}^{\infty} \frac{AA_{nn}}{\zeta^{nn}} \quad (2.84)$$

elde edilir. $tt = mm, mm^2, mm^4, \dots, mm^{2^{NN}}, \dots$ için (2.84) fonksiyonu kullanarak

$$ff_1(\zeta) = mm \frac{ff(\zeta)}{mm} = mm^2 \frac{ff(\zeta)}{mm^2} = \dots$$

biçiminde bir dizi oluşturabiliriz. Bu dizideki her bir fonksiyonunun MM sınıfında olduğu

açıkır. Üstelik her $\zeta \in \mathbb{D}^{\infty}$ için $|FF_{NN}(\zeta)| \geq mm^2$ ve $FF_{NN}(\zeta) = \zeta + \sum_{n=0}^{\infty} cc_{nn}^{(NN)} / \zeta^{nn}$ biçiminde bir seri açılımına sahip ise (2.84) eşitliğinden her $nn = 0, 1, 2, \dots, kk - 1$ için

$cc_{nn}^{(NN)} = 0$ ve $kk \leq nn \leq 2kk$ için

$$\lim_{NN \rightarrow \infty} cc_{nn}^{(NN)} = cc_{nn} + (mm^{nn+1})^2 = cc_{nn} (mm^{nn+1})^{jj} = \frac{cc_{nn}}{1 - mm^{nn+1}}$$

olur. Her bir $f_{NN}(\zeta)$ fonksiyonu 2.1.10 Teoreminin şartlarını sağlar. O halde



$$\frac{c_n}{1 - mm^{n+1}} \leq \frac{2}{nn + 1} \text{ veya } |c_n| \leq \frac{2}{nn + 1} (1 - mm^{n+1})$$

elde edilir.

Eşitlik için, FF fonksiyonu \mathbb{D}^x bölgesini -1 in $(kk + 1)$. kuvvetten kökleri yönünde $kk + 1$ ışını çıkarılmış kompleks düzlem üzerine resmeder. Böylece $FF(\zeta\zeta)$ yıldızlıdır ve $FF(\zeta\zeta)/mm$ dönüşümünde \mathbb{D}^x bölgesini $FF(\mathbb{D}^x)$ görüntü bölgesi içinde bir bölge üzerine resmeder. (2.82) eşitliği ile tanımlı fonksiyon \mathbb{D}^x bölgesinde yalınkattır ve $kk \leq nn \leq 2kk$ için (2.82) bağıntısının sağ tarafındaki kuvvet serisi elde edilir. ■

$\zeta\zeta = 1/zz$ olmak üzere, $gg(zz) = 1/ff(\zeta\zeta) \in SS$ sınırlı yalınkattır fonksiyonu için $|gg(zz)| \leq KK$ ise Pick (1917),

$$-kk(-rr, KK) \leq |gg(zz)| \leq kk(rr, KK)$$

eşitsizliğini elde etmiştir. Bu eşitsizlikten, $KK = 1/mm$ ve $ff \in BBMMSS(mm)$ fonksiyonunun modülü için aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

2.64 Teorem FF fonksiyonu (2.80) bağıntısıyla tanımlı fonksiyon olmak üzere, $ff \in BBMMSS(mm)$ ise $\zeta\zeta \in \mathbb{D}^x$ ve $|\zeta\zeta| = rr > 1$ için

$$ff(\zeta\zeta) \leq ff(rr) \leq -ff(-rr)$$

dir.

2.6.5 Uyarı. $\zeta\zeta = 1/zz$ ve $mm = 1/KK$ olmak üzere $FF(\zeta\zeta) = 1/kk(zz, KK)$ dir. $FF(\zeta\zeta)$ fonksiyonu daha önce 2.6.2 Teoreminin ispatında hesap edilmişti.

2.7 Tipik Reel Meromorf Fonksiyonlar

Sabit olmayan ff fonksiyonu \mathbb{D} dairesinde kutup noktaları hariç analitik ve kutup noktaları hariç her $zz \in \mathbb{D}$ için

$$\Re m ff(zz) \Re Im zz \geq 0 \tag{2.85}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ff fonksiyonuna \mathbb{D} dairesinde **tipik reel meromorf fonksiyon** denir. (2.85) bağıntısından \mathbb{D} dairesinde her bir pp_{jj} kutbu $(-1,1)$ aralığında basit kutup olmalıdır. Üstelik pp_{jj} kutuplarında $-mm_{jj}$ rezidüsü negatif olmalıdır. Bu durumda her jj için $mm_{jj} > 0$ olur.

Eğer ff fonksiyonu orijin civarında analitik ise, $zz = 0$ noktasının belli bir komşuluğunda ff fonksiyonu

$$ff(zz) = zz + \sum_{nn=0}^{\infty} a_{nn} zz^{nn} \quad (2.86)$$

biçiminde normalize edilmiş bir kuvvet serisine açılabilir. (2.86) biçiminde açılıma sahip tipik reel meromorf fonksiyonların sınıfı $MMSSPP$ ile gösterilir. Eğer ff fonksiyonu orijinde bir kutba sahip ise ff fonksiyonunun $zz = 0$ merkezli normalize edilmiş Laurent açılımı

$$ff(zz) = -\frac{1}{zz} + \sum_{nn=0}^{\infty} a_{nn} zz^{nn} \quad (2.87)$$

biçiminde olup, bu açılıma sahip tipik reel meromorf fonksiyonların fonksiyonların sınıfını $MMSSPP^*$ ile göstereceğiz. Hem $MMSSPP$ hemde $MMSSPP^*$ sınıflarına ait fonksiyonların bağlantı olması gerekmez. Bu fonksiyonlar Kısım 1.10'da verilen analitik tipik reel fonksiyonlar yardımıyla ifade edilebileceğini Goodman (1959) göstermiştir.

2.7.1 Teorem. $ff \in MMSSPP$ olsun.

$$ff(zz) = \lambda tt(zz) + \sum_{jj} \frac{1 - \frac{1}{pp_{jj}}}{1 - \frac{1}{pp_{jj}} + \frac{1}{pp_{jj}} zz + zz^2} \quad (2.88)$$

olacak biçimde $pp_{jj} \in (-1,1)$, $mm_{jj} > 0$ reel sayıları, bir $tt \in SSPP$ fonksiyonu ve bir $\lambda \geq 0$ sayısı vardır. Buradaki toplam ff fonksiyonunun bütün kutup noktaları üzerinden olup,

$$\lambda + \sum_{jj} mm_{jj} \frac{1 - \frac{1}{pp_{jj}}}{pp_{jj}^2} = 1$$

bağıntısı sağlanır.

2.7.2 Teorem. $gg \in MMSSPP^*$ ve $ff \in MMSSPP$ olsun. 2.7.1 Teoreminin gösterimleri altında

$$gg(zz) = -\frac{1}{zz} + bb_0 - zz + ff(zz)$$

eşitliği geçerlidir.

Goodman (1959) ve Gel'fer (1954), $MMSSPP$ ve $MMSSPP^*$ sınıfları ve bunların alt sınıflarına ait fonksiyonları için katsayı sınırlarını ve diğer bazı özelliklerini elde etmişlerdir.



3. KUTBU ORİJİN OLMAYAN MEROMORF YALINKAT FONKSİYONLAR

Bu bölümde, $0 < p < 1$ ve $|z_0| = p$ olmak üzere, \mathbb{D} birim dairesinde bir z_0 noktasında basit kutba sahip yalınkat fonksiyonların sınıfı üzerinde durulacak. Bu sınıfa ve alt sınıflarına ait fonksiyonların integral temsilleri, katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon ve genişleme özellikleri verildi.

3.1 $SS(p)$ Sınıfı ve Özellikleri

$0 < p < 1$ ve $|z_0| = p$ olmak üzere, $z_0 \in \mathbb{D}$ noktasında bir kutba sahip ve $|z| < p$ daireesinde

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (3.1)$$

biçiminde seri açılımı olan yalınkat fonksiyonların kümesini $SS(p)$ ile gösterelim. Bir rotasyonla $z_0 = p$ almak mümkün olduğundan, bundan sonra $SS(p)$ ile reel eksen üzerinde p noktasında basit kutba sahip yalınkat fonksiyonların sınıfı gösterilecek. $SS(p)$ sınıfına ait fonksiyonlardan

$$k_p(z) = \frac{z}{(1-pz)(1-z/p)} = z + \frac{1}{p} z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1/p}{p-1/p} z^n \quad ()$$

fonksiyonu özel bir öneme sahiptir. Bu fonksiyon \mathbb{D} dairesini $\mathbb{C} \setminus [-p/(1-p)^2, -p/(1+p)^2]$ bölgesi üzerine konform olarak resmeder. Koebe fonksiyonunun SS sınıfında oynadığı rolü $k_p(z)$ fonksiyonu $SS(p)$ sınıfında oynar.

Birim dairede verilen bir f meromorf fonksiyonunun bu dairede başka açılımları da olabilir. Eğer f fonksiyonu $p \in \mathbb{D}$, $0 < p < 1$ noktasında basit kutba sahip ve rezidüsü m ise $z \in \mathbb{D} \setminus \{p\}$ için

$$f(z) = \frac{m}{z-p} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (3.3)$$

veya $0 < |zz - pp| < 1 - pp$ için



$$ff(zz) = \frac{mm}{zz - pp} + \sum_{nn=0}^{\infty} b_n (zz - pp)^n \quad (3.4)$$

biçiminde iki açılıma sahiptir.

(3.1) ve (3.3) açılımına sahip ff fonksiyonunun katsayılar arasındaki bağıntının aşağıdaki gibi olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

3.1.1 Teorem. ff fonksiyonu (3.1) ve (3.3) açılımlarına sahip olsun. Bu durumda her $nn \geq 0$ için

$$b_n = a_n + \frac{mm}{pp^{n+1}} \quad (3.5)$$

dir.

Chichra (1969), $SS(pp)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki Alan Teoremini elde etmiştir.

3.1.2 Teorem. $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.3) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$\sum_{nn=1}^{\infty} |b_n|^2 \leq \frac{|mm|^2 (1 - pp^2)}{(1 - pp^2)^2} \quad (3.6)$$

dir.

İspat. $pp < |zz| < 1$ bölgesinde (3.3) bağıntısıyla verilen ff fonksiyonu

$$ff(zz) = \sum_{nn=0}^{\infty} \frac{mm pp^{nn}}{zz^{nn+1}} + \sum_{nn=0}^{\infty} b_n zz^{nn}$$

biçiminde yazılabilir. $rr \in (pp, 1)$ için $\Gamma_{rr} = ff(CC_{rr})$ eğrisi saat yönünde yönlendirilmiş basit kapalı bir eğri olup 2.1.1 Teoremin ispatındaki yol takip edilerek

$$\sum_{nn=0}^{\infty} \frac{-nn |mm pp^{nn-1}|^2}{rr^{2nn}} + \sum_{nn=0}^{\infty} |b_n|^2 rr^{2nn} \leq 0$$

elde edilir. $rr \rightarrow 1^-$ için limit alınırsa (3.6) eşitsizliği bulunur. Eşitlik, $kk_{pp}(zz)$ fonksiyonu için geçerlidir. ■

(3.6) bağıntısında $pp = 0$ ve $mm = 1$ olarak alınırsa Alan teoreminde geçen (2.6) bağıntısı elde edilir. (3.5) eşitliği (3.6) bağıntısında yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

3.12 **Sonuç.** $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{r^n}{pp^{n+1}} \leq \frac{|mm|^2}{(1 - pp^2)^2} \quad (3.7)$$

dir. Özel olarak

$$|bb_1| \leq \frac{|mm|}{1 - pp^2}$$

dir.

3.13 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $|zz| = rr < 1$ özelliğindeki bütün zz 'ler için

$$|ff(zz)| \geq \frac{rr}{1 + |aa_2|rr + rr^2}$$

dir. Eğer $|aa_2| > 2$ ise $rr_0 = \sqrt{|aa_2| - \sqrt{|aa_2|^2 - 4}}$ olmak üzere $rr_0 < |zz| = rr < 1$ halka bölgedeki bütün zz 'ler için

$$|ff(zz)| \leq \frac{rr}{-1 + |aa_2|rr - rr^2} \quad (3.8)$$

dir. Her iki bağıntıda da eşitlik,

$$FF(zz) = zz/(1 + |aa_2|zz + zz^2)$$

fonksiyonu için geçerlidir (Fenchel, 1931).

3.13 Teoreminden $SS(pp)$ sınıfında (3.1) açılımına sahip fonksiyonlar için aşağıdaki örtme teoremi elde edilir.

3.1.4 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $ff(\mathbb{DD})$

bölgesi $\{ww: |ww| < 1/(2 + |aa_2|)\}$ veya $|ww| < 1/(\sqrt{|aa_3| + 1} + 2)$ dairesini örter. Eğer $|aa_2| > 2$ ise $ff(\mathbb{DD})$ bölgesi $|ww| > 1/(|aa_2| - 2)$ eşitsizliğini sağlayan bütün ww değerlerini buldurur (Fenchel, 1931). Eğer $|aa_3| > 3$ ise $ff(\mathbb{DD})$ bölgesi $|ww| > 1/(\sqrt{|aa_3| + 1} - 2)$ eşitsizliğini sağlayan bütün ww değerlerini buldurur (Kumato, 1945).

3.1.5 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $|aa_2| > 2$ ise

$$pp \leq r_0 = \frac{|aa_2| - \sqrt{|aa_2|^2 - 4}}{2} = \frac{2}{|aa_2| + \sqrt{|aa_2|^2 - 4}} \quad (3.9)$$

dır (Fenchel, 1931).

İspat. (3.8) eşitsizliğinden, eğer $|zz| > r_0$ olması durumunda ff fonksiyonu sonlu olduğundan $pp \leq r_0$ olmak zorundadır. ■

(3.9) eşitsizliğinde $SS(pp)$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|aa_2| \leq pp + 1/pp$ olduğu görülür.

Ladegast (1953), $SS(pp)$ sınıfına ait fonksiyonlar için çok sayıda eşitsizlik elde etmiştir. Bunlardan biri aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

3.1.6 **Teorem.** ff fonksiyonu SS veya $SS(pp)$ sınıfında bir fonksiyon ve $z_1, z_2 \in \mathbb{DD}$, hiçbiri ff fonksiyonunun kutup noktası olmayan, farklı iki nokta olsun. $kk = 1, 2$ için $r_{kk} = |z_{kk}|$ olmak üzere

$$\frac{ff'(z_1)ff'(z_2)}{ff(z_2) - ff(z_1)} \leq \frac{1}{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)} \quad (3.10)$$

dir. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitlik $z_2 = z_1$ ve $z_2 \neq z_1$ olmak üzere Koebe fonksiyonları için geçerlidir.

İspat. Eğer ff fonksiyonu \mathbb{DD} dairesinde yalınkat ise

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{ff(\zeta) - ff(z)}$$



fonksiyonu da yalınkattır ve $(z_1 + \zeta)/(1 + \bar{z}_1 \zeta) = z_2$ iken kesinlikle bir basit kutba sahiptir. Böylece $\zeta = z_0 = (z_2 - z_1)/(1 - \bar{z}_1 z_2)$ noktasında bir basit kutba sahip olur. $|b_1| \leq |m|/(1 - p^2)$ eşitsizliğini kullanarak $\phi(\zeta)$ fonksiyonuna 3.1.2 Teoremi uygulanabilir. Teoremden geçen b_1, m ve $p = |z_0|$ sayılarını bulmaya ihtiyaç vardır. $r_1 = |z_1|$ olmak üzere

$$m = \lim_{\zeta \rightarrow z_0} (\zeta - z_0) \phi(\zeta) = \frac{1 - r_1^2}{f'(z_2)(1 - \bar{z}_1 z_2)^2}$$

dır. b_1 katsayısını bulmak için

$$\phi(\zeta) = \frac{m}{\zeta - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$$

fonksiyonunun türevi alınıp $\zeta = 0$ konumu yapılırsa

$$b_1 = \frac{-f'(z_1)(1 - r_1^2)}{f(z_2) - f(z_1)} + \frac{1 - r_1^2}{f'(z_2)(z_2 - z_1)^2}$$

elde edilir. $r_2 = |z_2|$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 1 - p^2 &= 1 - |z_0|^2 = 1 - \frac{|z_2 - z_1|^2}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &= \frac{(1 - \bar{z}_1 z_2)(1 - z_1 \bar{z}_2) - (z_2 - z_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \\ &= \frac{(1 - r_1^2)(1 - r_2^2)}{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2} \end{aligned}$$

olur. Böylece $|b_1| \leq |m|/(1 - p^2)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{|f'(z_1)(1 - r_1^2)|}{|f(z_2) - f(z_1)|} + \frac{1 - r_1^2}{|f'(z_2)(z_2 - z_1)|} \leq \frac{1 - r_1^2}{|f'(z_2)(1 - \bar{z}_1 z_2)|} \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2|^2}{(1 - r_2^2)(1 - r_1^2)}$$

bulunur. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $f'(z_2)/(1 - r_1^2)$ ile çarpılırsa, (3.10)

bağıntısı elde edilir. ■



$AA_1 \neq 0$ olmak üzere, (3.10) eşitsizliğinin sol tarafı $gg(zz) = AA_0 + AA_1ff(zz)$ dönüşümü altında değişmez kalır. Bu yüzden bu teoremden bilinen normalizasyona ihtiyaç duyulmamıştır.

3.1.7 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ ve $0 < rr < 1$ olsun. Bu durumda her $\lambda\lambda$ reel sayısı için

$$\int_0^{2\pi} |ff(re^{i\theta})| d\theta \leq \int_0^{2\pi} |ff(\lambda\lambda e^{i\theta})| d\theta \quad (3.11)$$

dır. Eşitlik, $rr \neq pp$ ve $\lambda\lambda \neq 0$ iken $ff(zz) = kk_{pp}(zz)$ fonksiyonu için sağlanır (Kirwan ve Schober, 1976).

(3.11) eşitsizliğinde her iki tarafın $1/\lambda\lambda$ kuvveti alınır ve $\lambda\lambda \rightarrow \infty$ için limit alınırsa, Kirwan ve Schober (1976)'e ait aşağıdaki teorem elde edilir.

3.1.8 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ olsun. Bu durumda

$$|ff(zz)| \leq k_{pp}(rr) \quad (3.12)$$

dir.

Her bir $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu için $|aa_2| \leq pp + 1/pp$ olduğundan 3.1.3 Teoremi gereği

$$|ff(zz)| \geq k_{pp}(-rr) \quad (3.13)$$

olduğu görülür. $rr \rightarrow 1^-$ iken limite geçilirse (3.12) ve (3.13) bağıntılarından aşağıdaki örtme sonucu elde edilir.

3.1.9 Teorem. $ff \in SS(pp)$ ise $ff(\mathbb{DD})$ bölgesi $\{ww : |ww| < pp/(1 + pp)^2\}$ kümesini kapsar.

Üs- telik $ff(\mathbb{DD})$ bölgesi $|ww| > pp/(1 - pp)^2$ bölgesini de içerir.

Jenkins (1962), $SS(pp)$ sınıfına ait (3.1) açılımına sahip fonksiyonlar için bazı katsayı eşitsizlikleri elde etmiştir.

310 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda $nn = 2, 3, 4, 5, 6$ için

$$|aa_n| \leq \frac{1 + pp^2 + pp^4 + \dots + pp^{2nn-2}}{pp^{nn-1}} \quad (3.13)$$

dir. Eşitlik, (3.2) bağıntısıyla verilen $ff(zz) = kk_{pp}(zz)$ fonksiyonu için geçerlidir.

Her ne kadar Jenkins (1962), $SS(pp)$ sınıfına ait fonksiyonların bazı katsayıları için kesin üst sınır elde etmiş olsa da (3.13) bağıntısındaki eşitlik her bir nn için $kk_{pp}(zz) \in SS(pp)$ fonksiyonu için geçerlidir. Gerçekten $kk_{pp}(zz)$ fonksiyonunun seri açılımındaki AA_{nn} katsayısının

$$A_n = \frac{pp^{nn} - 1/pp^{nn}}{pp - 1/pp^{nn}} = \frac{1 - pp^{2nn}}{pp^{nn-1}(1 - pp^2)} = \frac{1 + pp^2 + pp^4 + \dots + pp^{2nn-2}}{pp^{nn-1}} \quad (3.14)$$

olduğu görülür. Böylece (3.13) eşitsizliğinin $SS(pp)$ sınıfına ait fonksiyonların bütün $|aa_n|$ katsayıları için doğru olduğu akla gelebilir. Gerçekte durum buna yakındır.

Kirwan ve Schober (1976), $SS(pp)$ sınıfına ait (3.1) açılımına sahip fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini elde etmişlerdir.

311 **Teorem.** $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda her $nn \geq 2$ için

$$|aa_n| \leq \min \left\{ \frac{1 + pp^{nn}}{pp^{nn-1}(1 - pp^2)}, \frac{1}{2pp^{nn-1}} \right\} \quad (3.15)$$

dır.

İspat. $|zz| = rr < pp$ ise

$$a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} ff(re^{i\theta}) e^{-inn\theta} d\theta$$

dir. Eğer $pp < rr < 1$ ise (3.3) ve (3.5) bağıntılarından

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (3.16)$$



bulunur. $\lambda = 1$ ve $p < r < 1$ için 3.1.7 Teoremi ve Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2\pi r^{nm}} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{f(e^{-i\theta})} d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi r^{nm-1}} \int_0^{2\pi} \frac{dd\theta}{|1 - p r e^{i\theta}| |1 - r e^{i\theta}/p|} \\
 & \leq \frac{1}{r^{nm-1}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dd\theta}{|1 - p r e^{i\theta}|^2} \frac{1}{|1 - r e^{i\theta}/p|^2} \\
 & \leq \frac{1}{r^{nm-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{r^{2m}}{r^{2m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^{2n}}{r^{2n}} \frac{1}{r^2} \\
 & \leq \frac{1}{r^{nm-1}} \frac{pp}{(1 - p^2 r^2)^{1/2} (r^2 - p^2)^{1/2}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. $r \rightarrow 1^-$ için limite geçilir ve (3.16) eşitliği $|a_m| \leq p^2/(1 - p^2)$ ile birlikte kullanılırsa (3.15) eşitsizliğinin sağ tarafındaki ilk kısmı bulunur. İkinci kısım için $r = p e^{-1/m} < p$ denirse

$$\begin{aligned}
 |a_m| & \leq \frac{pp}{r^{nm-1} (1 - p^2 r^2)^{1/2} (r^2 - p^2)^{1/2}} \\
 & \leq \frac{p p e}{p^{nm-1} e^{1/m} (1 - p^4 e^{-2/m})^{1/2} (p^2 - p^2 e^{-2/m})^{1/2}} \\
 & \leq \frac{e}{p^{nm-1} (e^{1/m} - e^{-1/m})} \leq \frac{e n}{2 p^{nm-1}}
 \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Kirwan ve Schober (1976), FitzGerald'ın metodunu geliştirerek aşağıdaki Teoremi elde etmiştir.

3.1.12 Teorem. $f \in SS(p)$ ise

$$|a_m| \leq \frac{1}{6} A_m \quad \text{ve} \quad |a_m| \leq \frac{1}{2} + 2 p^{2m} A_m \quad (3.17)$$

dir. Eğer $p = 1/2$ ve $m \geq 7$ ise, ikinci eşitsizlikten $|a_m| \leq 1,00007 A_m$ olur.

3.2 $SS(pp)$ Sınıfının Konveks ve Yıldızlı Alt Sınıfları

Bu kısımda, \mathbb{D} daresinde bir kutba sahip meromorf fonksiyonların $SS(pp)$ sınıfının konveks ve yıldızlı alt sınıfları üzerinde durulacak. $pp < rr < 1$ olmak üzere CC_{rr} eğrisinin $ff(CC_{rr})$ görüntü eğrisi negatif yönlendirilmiş olacağından konvekslik ve yıldızlılık için 1.5.1 Teoreminde verilen eşitsizlikler negatif olur. Üstelik $ff(0) = 0$ ise orijin noktası $ff(CC_{rr})$ eğrisinin dış kısmında kalacaktır. Bu yüzden yıldızlılık belli bir $ww_0 \neq 0$ noktasına göre olmalıdır.

3.2.1 Tanım. $pp \in (pp, 1)$ olmak üzere, $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu ve $HH = \{zz: \rho\rho < |zz| = rr < 1\}$ bölgesine ait bütün zz noktaları için

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zzff''(zz)}{ff'(zz)} \right] < 0 \quad (3.18)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa ff fonksiyonuna konveks denir. (3.18) eşitsizliğini sağlayan (3.1) seri açılımına sahip $ff \in SS(pp)$ fonksiyonlarının alt sınıfı $CCCC(pp)$ ile gösterilir.

Benzer biçimde $ff \in SS(pp)$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zzff'(zz)}{ff(zz) - ww_0} \right] < 0 \quad (3.19)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ff fonksiyonuna ww_0 noktasına göre yıldızlı denir. ww_0 noktasına göre yıldızlı olan ve (3.1) seri açılımına sahip $ff \in SS(pp)$ fonksiyonlarının alt sınıfı

$SSSS(pp, ww_0)$ ile gösterilir.

Bir çok yazar pp noktasında bir kutbu olan konveks ve yıldızlı fonksiyonların görüntü kümesinin tümleyeninin konveks ve yıldızlı bir bölge olması durumunu incelemiştir (Libera ve Livingston, 1975). Biz burada $ff(CC_{rr})$ eğrilerinin konveks ve yıldızlı olması üzerinde duracağız.

$ff \in CCCC(pp)$ fonksiyonu uygun bir rotasyonla $zz = pp > 0$ noktasında bir kutba sahip ola- bilir.

$$\phi\phi(zz) = 1 + \frac{zzff''(zz)}{ff'(zz)} + \frac{zz+pp}{zz-pp} - \frac{1+ppzz}{1-ppzz} \quad (3.20)$$

biçiminde tanımlı $\phi\phi$ fonksiyonu $\mathbb{D}\mathbb{D}$ dairesinde analitiktir. Çünkü

$$AA(zz) = 1 + \frac{zzff''(zz)}{ff'(zz)} \quad \text{ve} \quad BB(zz) = \frac{zz+pp}{zz-pp} - \frac{1+ppzz}{1-ppzz}$$

fonksiyonları sadece $zz = pp$ noktasında basit kutba sahip olup rezidüleri sırasıyla $-2pp$ ve $2pp$ dir. Bu yüzden $\phi\phi$ fonksiyonu $zz = pp$ noktasında diferansiyellenebilir olacak biçimde yeniden tanımlanabilir. Bununla birlikte $\text{Re}BB \stackrel{iii}{=} 0$ ve $\phi\phi(0) = -1$ dir. Eğer ff fonksiyonu $\partial\mathbb{D}\mathbb{D}$ üzerinde analitik ise $\phi\phi$ fonksiyonu da \mathbb{D} kümesinde analitik olup $\mathbb{D}\mathbb{D}$ dairesinde $zz \in \mathbb{D}\mathbb{D}$ için $\text{Re}\phi\phi(zz) < 0$ olur.

Royster (1970), $CCCC(pp)$ sınıfına ait bir ff fonksiyonu için (3.20) bağıntısıyla verilen $\phi\phi$ fonksiyonunun PP sınıfına ait olduğunu tek yönlü olarak göstermiştir.

3.2.2 Teorem. $ff \in CCCC(pp)$ fonksiyonu $pp \in (0,1)$ noktasında bir kutba sahip olsun. Bu durumda her $zz \in \mathbb{D}\mathbb{D}$ için $\text{Re}[-\phi\phi(zz)] > 0$ ve $-\phi\phi \in PP$ dir.

$-\phi\phi \in PP$ özelliğinde (3.1) açılımına sahip $ff \in SS(pp)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $SS(pp)$ ile gösterilirse 3.2.2 Teoreminden $CCCC(pp) \subset SS(pp)$ olduğu görülür. Ancak pp 'nin bazı değerleri için bu iki sınıfın eşitliği Royster (1970) tarafından aşağıdaki teoreme gösterilmiştir.

3.2.3 Teorem. $0 < pp < 2 - \sqrt{3}$ ise $CCCC(pp) = SS(pp)$ dir. $2 - \sqrt{3} < pp < 1$ ise $SS(pp)$ sınıfına ait olup da $CCCC(pp)$ sınıfına ait olmayan bir FF fonksiyonu bulmak mümkündür.

$-\phi\phi$ fonksiyonunun $zz = pp$ noktasının delik komşuluğunda seri açılımı

$$\begin{aligned} -\phi\phi(zz) &= -AA(zz) - BB(zz) = \frac{2pp}{zz-pp} + zz \sum_{nn=2}^{\infty} \frac{ff^{(n)}(pp)}{n!} (zz-pp)^n + \frac{2pp}{zz-pp} - \frac{1+ppzz}{1-ppzz} \\ &= \frac{1+ppzz}{1-ppzz} + zz \sum_{nn=2}^{\infty} \frac{ff^{(n)}(pp)}{n!} (zz-pp)^n \end{aligned} \quad (3.21)$$

dir. Böylece $-\phi\phi(pp) = (1 + pp^2)/(1 - pp^2)$ olur. $-\phi\phi$ fonksiyonu PP sınıfına ait olmasına rağmen pp noktasındaki kısıtlaması nedeniyle PP sınıfının keyfi bir fonksiyonu değildir.

$CCCC(pp)$ sınıfında pp noktası orijin olarak alınır (2.47) ve (2.59)'da verilen integral temsilleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

3.2.4 Teorem. ff, \mathbb{DD}^* delik dairesinde (2.2) seri açılımına sahip meromorf bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$ff \in MMSSSS \Leftrightarrow ff(zz) = \frac{1}{zz} \exp \int_0^{2\pi\pi} 2 \log \diamond - ee^{-iii} zz \diamond ddd(\theta\theta) \diamond \quad (3.22)$$

ve

$$gg \in MMCCCC \Leftrightarrow gg'(zz) = - \frac{1}{zz^2} \exp \int_0^{2\pi\pi} 2 \log \diamond - ee^{-iii} zz \diamond ddd(\theta\theta) \diamond \quad (3.23)$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi\pi} ee^{-iii} ddd(\theta\theta) = 0$ ve $dd(\theta\theta + 2\pi\pi) - dd(\theta\theta) = 1$ özelliklerini sağlayan

$[0, 2\pi\pi]$ aralığında azalmayan bir $dd(\theta\theta)$ fonksiyonu vardır.

$ff \in CCCC(pp)$ fonksiyonu (3.3) açılımına sahip olsun. $zz \in \mathbb{DD}^*$ için

$$gg(zz) = (pp^2 - 1)ff \frac{pp - zz}{1 - ppz} = \frac{\alpha\alpha_{-1}}{zz} + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha\alpha_m zz^m$$

biçiminde tanımlanan gg fonksiyonu $zz = 0$ noktasında basit kutba sahip ve \mathbb{DD}^* bölgesini konveks bir bölgenin tümleyeni üzerine resmedecek biçimde bulunabilir. (3.23) bağıntısı kullanılırsa gg' için $\alpha\alpha_{-1} = mm$ olmak üzere, Pfaltzgraff ve Pinchuk (1971) $CCCC(pp)$ sınıfına ait fonksiyonların integral temsilini türev fonksiyonu yardımıyla elde etmişler.

3.2.5 Teorem. $ff \in CCCC(pp)$ olması için gerek ve yeter şart,

$$ff'(zz) = - \frac{mm}{(pp - zz)^2 (1 - ppz)^2} \exp \int_0^{2\pi\pi} 2 \log \diamond - ppz - ee^{-iii} (pp - zz) \diamond ddd(\theta\theta) \diamond$$

olacak biçimde $\int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$ ve $d(\theta + 2\pi) - d(\theta) = 1$ özelliklerini sağlayan

$[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir $d(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

(3.20) eşitliği ile tanımlı ϕ fonksiyonu için $-\phi \in \mathcal{P}$ ise Royster (1970), \mathcal{P} sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki integral temsilini elde etmiştir.

3.2.6 Teorem. $f \in \mathcal{P}$, (3.1) seri açılımına sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$f \in \mathcal{P}$ olması için gerek ve yeter şart,

$$f'(z) = \frac{p^2}{(p-z)^2(1-pz)^2} \exp \left\{ \frac{2\pi i}{0} \int_0^{2\pi} \log \left(\frac{z-p}{z-1} \right) e^{-i\theta} d\theta \right\} \quad (3.24)$$

olacak biçimde

$$\frac{2\pi i}{0} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i\theta}}{1-pee^{-i\theta}} d\theta = \frac{p}{1-p^2} \quad \text{ve} \quad \frac{2\pi i}{0} \int_0^{2\pi} d\theta = 1 \quad (3.25)$$

özelliklerini sağlayan, $[0, 2\pi]$ aralığında azalmayan bir $d(\theta)$ fonksiyonunun mevcut olmasıdır.

Pfaltzgraff ve Pinchuk (1971) \mathcal{P} sınıfına ait fonksiyonların türevinin modülü için aşağıdaki kesin üst sınırı elde etmişlerdir.

3.2.7 Teorem $f \in \mathcal{P}$ ve $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D} \setminus \{p\}$ olsun. Bu durumda

$$|f'(z)| \leq \frac{p^2 [(1+pr)^2 + (p+r)^2]}{(1+p^2)|z-p|^2|1-pz|^2}$$

dır. Eşitlik $z = -r$, $0 < r < 1$ olmak üzere

$$f_0(z) = \frac{p^2}{1-p^4} \frac{z-p}{1-pz} - \frac{1-pz}{z-p} + p - \frac{1}{p}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

w_0 noktasına göre yıldızlı olan ve (3.1) açılımına sahip $f \in \mathcal{P}$ fonksiyonlarının

alt sınıfı $SSSS(pp, w_0)$ ile gösterilmiŕti. $ff \in CCCC(pp)$ ise bu durumda $J_{\mathbb{R}}$ bölgesinin tmleye-



nindeki her bir w_0 noktası için $f \in SSSS(p, w_0)$ olduğu açıktır. Ancak buradan belli bir $r_0 < |z| < 1$ halka bölgesinde

$$\operatorname{Re} \left(1 + \frac{z f f''(z)}{f'(z)^2} \right) < 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{z f f'(z)}{f(z) - w_0} < 0$$

sonucunu çıkarmak açık bir problem olarak durmaktadır.

(3.20) eşitliği ile verilen ϕ fonksiyonu ve $f \in SSSS(p, w_0)$ ise \mathbb{D} daresinde

$$p(z) = \frac{p z z}{1 - p z} - \frac{p p}{z z - p p} - \frac{z z f f'(z)}{f(z) - w_0} \quad (3.26)$$

fonksiyonunun reel kısmının pozitif olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece $p(z) \in PP$ dir.

(3.26) ile verilen $p(z) \in PP$ fonksiyonu için (3.1) açılımına sahip $f \in SS(p)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf $SSS(p, w_0)$ ile gösterilir. $0 < p < 1$ ise bu durumda

$SSS(p, w_0) \subset SSS(p, w_0)$ dir. J. Miller (1980) aşağıdaki teoreme ters kapsamanın genelde doğru olmadığını göstermiştir

3.2.7 Teorem. $0 < p \leq \sqrt{2} - 1$ iken $SSS(p, w_0) = SSS(p, w_0)$ dir. $\sqrt{2} - 1 < p < 1$ iken $S(p, w_0)$ sınıfına ait olup $SSS(p, w_0)$ sınıfına ait olmayan bir f fonksiyonu ve bir w_0 noktası bulunabilir.

J. Miller (1980) $S(p, w_0)$ sınıfına ait orijinde bir kutbu olan fonksiyonlar için katsayı sınırları elde etmiştir.

3.2.8 Teorem. $f \in S(p, w_0)$ sınıfına ait (3.1) açılımına sahip analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $z \in \mathbb{D}^*$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{(z - p)(1 - p z)}{p z z} (f(z) - w_0) = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (3.27)$$

biçiminde tanımlı gg fonksiyonu orijine göre yıldızlıdır.



İspat. $0 < pp < 1$ olmak üzere $ww_0 \neq 0$ kabul edelim. Bu durumda gg fonksiyonu \mathbb{D}^* de-lik daireesinde analitiktir. gg fonksiyonunun logaritmik türevinden

$$z \frac{gg'(z)}{gg(z)} = \frac{ppz}{1 - pp} - \frac{pp}{z - pp} - \frac{zff'(z)}{ff(z) - ww_0}$$

bulunur. Eğer $ff \in \mathcal{S}_{\Sigma}(pp, ww_0)$ ise bu eşitlikten \mathbb{D}^* bölgesinde $\text{Re}[z \frac{gg'(z)}{gg(z)}] < 0$ olduğu görülür. Böylece (3.26) bağıntısından sonuç görülür. ■

(3.27) eşitliğinde katsayılar hem gg hemde ff fonksiyonuna bağlıdır. Basit bir hesaplamayla

$$c_0 = -\frac{1}{ww_0} - pp - \frac{1}{pp} \quad (3.28)$$

$$c_1 = 1 + \frac{1}{ww_0} pp + \frac{1}{pp} \frac{aa_2}{ww_0} \quad (3.29)$$

ve $aa_1 = 1$ olmak üzere her $nn \geq 2$ için

$$c_n = -\frac{1}{ww_0} a_{n-1} - aa_n + \frac{1}{pp} a_{n+1} \quad (3.30)$$

olduğu görülür. 2.2.6 Teoreminde z ile $1/z$ yer değiştirirse $|c_n| \leq 2/(n+1)$ elde edilir. Bunu (3.28)'e uygularsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.9 Teorem. $ff \in \mathcal{S}_{\Sigma}(pp, ww_0)$ ise

$$\frac{pp}{(1 + pp)^2} \leq |ww_0| \leq \frac{pp}{(1 - pp)^2} \quad (3.31)$$

dır. Eşitlik $kk_{pp}(z)$ fonksiyonu için geçerlidir.

J. Miller (1980), 3.1.9 Teoreminden hareketle $\mathcal{S}_{\Sigma}(pp, ww_0)$ sınıfına ait fonksiyonlar için aşağıdaki katsayı eşitsizliklerini elde etmiştir.

3.2.10 Teorem. $f \in \mathcal{S}_s(p, w_0)$ fonksiyonu (3.1) açılımına sahip olsun. Bu durumda

$$|a_2 - p - 1/p - w_0| \leq |w_0| \quad (3.32)$$

ve her $n \geq 2$ için

$$|a_{n+1} - (p + 1/p)a_n + a_{n-1}| \leq \frac{2|w_0|}{n+1} \quad (3.33)$$

dir. Her iki eşitsizlik de kesindir.

İspat. (3.32) ve (3.33) eşitsizlikleri, (3.29) ve (3.30) bağıntılarını 2.2.6 Teoreminde verilen $|c_n| \leq 2/(n+1)$ Clunie eşitsizliğine uygulanarak elde edilir. ■

(3.32) bağıntısı için eşitlik $w_0 = -p/(1+p)^2$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{p w_0}{(z-p)(1-pz)} (1+z)^2 + w_0$$

fonksiyonu için geçerlidir. (3.33) bağıntısı için ise eşitlik her $n \geq 2$ ve $w_0 = -p/(1+p^2)$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{p w_0}{(z-p)(1-pz)} \left(1 + \frac{2}{(n+1)z} + w_0\right)$$

fonksiyonu için geçerlidir. ■

KAYNAKLAR

- Aksent'ev, L. A. 1958.** Sufficient conditions for univalence of regular functions, *Izv. Vyss. Ucebn. Zaved. Matematika*, No: 3(4) : 3-7 (Russian).
- Bazilevic, J. 1937.** Complement a mes notes "Zum Koeffizienten problem der schlichten Funktionen" et "Sur les theoremes de Koebe-Bieberbach". *Rec. Math. Moscou, N.S.* 2 : 689-697.
- Branges, L. De. 1985.** A proof of the Bieberbach conjecture, *Acta Mathematica*, 154 : 137-152.
- Brannan, D. A.; Clunie, J.; Kirwan, W. E. 1970.** Coefficient estimates for a class of star-like functions, *Canad. J. Math. Soc.* 22 : 476-485.
- Brown, J. E. 1989.** Images of discs under convex and starlike functions, *Math. Z.*, 202 : 457-462.
- Chichra, Pran Nath. 1969.** An area theorem for bounded univalent functions, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 66 : 317-321.
- Clunie, J. 1959.** On meromorphic schlicht functions, *J. London Math. Soc.* 34 : 215-216.
- Duren, P. L. 1983.** Univalent Functions, *Springer-Verlag*, New York.
- Fenchel, W. 1931.** Bemerkungen über die im Einheitskreises meromorphen schlichten Funktionen, *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. -Math. Kl. H*, 22/23 : 431-436.
- Garabedian, P. R ; Schiffer, M. 1955.** A coefficient inequality for schlicht functions, *Ann. of Math.* (2) 61 : 116-136.
- Gel'fer, S. (Guelfer) 1954.** On coefficients of typically real functions, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N. S.)*, 94 : 373-376.
- Goodman, A. W. 1956.** Functions typically real and meromorphic in the unit circle, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81 : 92-105.
- Goodman, A. W. 1983.** Univalent Functions, I-II, Mariner Publ. Co., Tampa Florida.
- Goluzin, G. 1948.** On distortion theorems and the coefficients of univalent functions, *Mat. Sbornik N. S.*, 23(65) : 353-360.
- Goluzin, G. 1938.** Some estimates of the coefficients of schlicht functions, *Mat. Sb. N. S.*, 3 : 321-330 (in Russian).
- Graham, I ; Kohr G. 2003.**, Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker, Inc. New York.
- Graham, I ; Varolin D. 1996.** Bloch constants in one and several variables, *Pacif. J. Math.* 174 : 347-357.

- Gronwall, T. 1916.** Sur la deformation dans la representation conforme, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 162 : 249-252.
- Grunsky, H. 1933.** Zwei Bemerkungen zur konformen Abbildung, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein*, 43 : 140-143.
- Hummel, J. A. 1957.** The coefficient regions of starlike functions, *Pacif. J. Math.*, 7 : 1381-1389.
- Jack, I. S. 1971.** Functions starlike and convex of order α . *J. London Math. Soc.*, 2(3) : 469-474.
- Jakubowski, Z. J. 1962.** Theoremes sur la deformation dans la famille de fonctions univalentes au pole simple al infini et bornees inferiurement dans le cercle $\mathbb{K}(\infty, 1)$, *Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Lodz*, 34 : 43 pp.
- Jenkins, J. A. 1960.** On certain coefficients of univalent functions, II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 96 : 534-545.
- Kaczmariski, J. 1973.** On the coefficients of some classes of starlike functions, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* 17 : 495-501.
- Kaplan, W. 1952.** Close-to-convex schlicht functions, *Michigan Math. J.*, 1 : 169-185.
- Kirwan, W. E. ; Schober, G. 1978.** Extremal problems for meromorphic univalent functions, *J. Analyse Math.* 30 : 330-348.
- Komatu, Y. 1949.** Note on the theory of conformal representation by meromorphic functions, I,II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo.* 21: 269-277.
- Kubota, Y. 1974-75.** A coefficient inequality for certain meromorphic univalent functions, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 26 : 85-94.
- Kubota, Y. 1974-75.** On the fourth coefficients of meromorphic univalent functions, *Kodai Math. Sem. Rep.*, 26 : 267-288.
- Ladegast, K. 1953.** Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen, *Math. Z.* 58 : 115-159
- Libera, R. J.; Robertson, M. S. 1961.** Meromorphic close-to-convex functions, *Michigan Math. J.*, 8 : 165-175.
- Loewner, K. 1919.** Über Extremumsatze bei der konformen Abbildung des Ausseren des Einheitskreises, *Math. Ann.*, 3 : 65-77.
- Mikolajczyk, L. 1968.** A theorem on distortion for univalent pp –symmetrical functions bounded in the circle $|zz| > 1$, *Prace Mat.* 12 : 35-51.
- Miller, James. 1971.** Extremal functions for meromorphic univalent functions, *J. Analyse Math.* 24 : 77-86.
- Miller, S. S. 1973.** Distortion properties of alpha-starlike functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 : 311-318.

- Miller, James. 1980.** Convex and starlike meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 80: 607-613.
- Mocanu, P.T. 1969.** Une propriete de convexite generalisee dans la theorie de la representation conforme, *Mathematica (Cluj)*, 11 (34) : 127-133.
- Nevanlinna, R. 1920.** Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises, *Översikt Finska Vetenskaps-Soc. Förh.*, 62A : 1-14.
- Noshiro, K. 1934-35.** On the theory of schlicht functions, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ.*, 2 : 129-155.
- Ozaki, S. 1935.** On the theory of multivalent functions, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku*, 40 : 167-188.
- Robertson, M. S. 1936.** A remark on the odd schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42 : 366-370.
- Royster, W. C. 1970.** Convex meromorphic functions, *Mathematical Essays Dedicated to A. J. Macintyre*, 42 : 331-339.
- Palka, B. P 1991.** An Introduction to Complex Function Theory, Springer-Verlag, New York.
- Pfaltzgraff Jhon. A.; Pinchuk, Bernard. 1971.** A variational method for classes of meromorphic functions, *J. Analyse Math.* 24 : 101-150.
- Pommerenke, C. 1963.** On meromorphic starlike functions, *Pacific J. Math.*, 13 : 221-235.
- Pommerenke, C. 1975.** Univalent Functions, *Vandenhoeck&Ruprecht*, Göttingen.
- Reade, M. O. 1955-56.** On close to convex univalent functions, *Mich. Math. J.*, 3 : 59-62.
- Rogosinski , W. 1932.** Über positive harmonische Entwicklungen und typischreelle Potenzreihen, *Math Zeit.* 35 : 93-121.
- Spacek, L. 1932.** Contribution a la theorie des fonctions univalentes, *Casopis Pest. Math.*, 62 : 12-19 (in Russia).
- Trimble, S. Y. 1975.** A coefficient inequality for convex univalent functions, *Proc. Amer. Math Soc.*, 48 : 266-267.
- Waadeland, H. 1957.** Ein Golusinscher Satz über schlichte Abbildungen von $|\zeta\zeta| > 1$, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim.*, 30 :165-168.
- Warschawski, S. E. 1935.** On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 38 : 310-340.
- Zamorski, J. 1960.** About the extremal spiral schlicht functions, *Ann. Polon. Math.*, 9 : 265-273.
- Zawadzki, R. 1961.** Sur les modules des coefficients BB_0 et BB_1 des fonctions holomorphes univalentes bornees inferieurement. *Bull. Soc. Letters Lodz.* 12 : No. 5.9 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Feyyaz KALMAZ

Doğum Yeri ve Tarihi : IĞDIR, 25.02.1989

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu:

Lise : Iğdır, 80. Yıl Cumhuriyet Anadolu Lisesi, 2009.

Lisans : Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat fakültesi
Matematik Bölümü, 2013.

