



**KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN
q-İNTEGRAL İÇEREN EŞİTSİZLİKLER**

Sinan ASLAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

AĞRI-2017

Her Hakkı Saklıdır

**T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Sinan ASLAN

**KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN q -İNTEGRAL
İÇEREN EŞİTSİZLİKLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**TEZ YÖNETİCİSİ
Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**

AĞRI-2017



T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü



TEZ ONAY FORMU

KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN q -İNTEGRAL İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR danışmanlığında, Sinan ASLAN tarafından hazırlanan bu çalışma, 13/02/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Havva KAVURMACI-ÖNALAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 13/02/2017 tarih ve 2017/05-01. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kani ZİLBEYAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “Konveks Fonksiyon Sınıfları için q-İntegral İçeren Eşitsizlikler” adlı tezin tamamen kendi çalışmam olduğunu ve her alıntıya kaynak gösterdiğimi taahhüt eder, tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü arşivlerinde aşağıda belirttiğim koşullarda saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

- ☐ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.
- ☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.
- ☒ Tezimin 2 yıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

13.02.2017

Sinan ASLAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKS FONKSİYON SINIFLARI İÇİN q-İNTEGRAL İÇEREN EŞİTSİZLİKLER

Sinan ASLAN

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teori birbiriyle yakından ilişkili iki konu olup birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve çok sayıda çalışma ortaya konmuştur. Özellikle konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri oldukça yoğun olarak irdelenmiş ve konveks fonksiyonların ortalama değerine ilişkin sınır bulma problemi ile ilgilenilmiştir. Bu konularda yapılan çalışmalarda Caputo türevi, Riemann-Liouville integralleri, uyumlu kesirli türevler ve k-lokal kesirli integraller gibi farklı türev ve integral operatörleri de kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında öncelikle konvekslik kavramı ve konvekslik türleri üzerinde genel bir inceleme yapılmıştır. Ardından kuantum hesabın analizine yer verilmiş ve q-türev, q-integral ile bu kavramların özellikleri üzerinde durulmuştur.

Ardından konveks fonksiyon sınıfları üzerine q-integraller içeren bazı eşitsizlikler ve sonuçlara değinilmiştir. Son olarak ise q-integraller için Steffensen eşitsizliği, Grüss eşitsizliği, Chebysev eşitsizliği ve Ostrowski eşitsizliği gibi klasik integral eşitsizliklerine yer verilmiştir. Ayrıca m-konveks fonksiyonlar için q-integraller yardımıyla iki yeni integral eşitsizliği elde edilmiştir.

2017, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: q-türev, q-integral, kuantum kalkülüs, konveks fonksiyon, integral eşitsizlikler.

ABSTRACT

Master Thesis

INEQUALITIES INVOLVING q -INTEGRALS FOR CONVEX FUNCTION CLASSES

Sinan ASLAN

Ağrı İbrahim Çeçen University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Convex functions and inequality theory are two fields that has a close relationship, they have been attracted attention of many researchers and several studies have been presented. Especially, integral inequalities for convex functions have been dealt intensively and interested with the problem of finding bounds related to mean value of convex functions. In these studies that have been presented in this field, different derivative and integral operators such as Caputo derivative, Riemann-Liouville integrals, conformable fractional derivatives and k -local fractional derivatives have been used.

In this thesis, firstly a general investigation has been performed on the concept of convexity and the kinds of convexity. Later, analysis of quantum calculus have been presented and emphasized on q -derivative, q -integral and properties of them.

After, it is referred to inequalities and results that include q -integrals on the classes of convex functions. Finally, classical integral inequalities such as Steffensen inequality, Grüss inequality, Chebysev inequality and Ostrowski inequality have been given. Besides, two new integral inequalities for m -convex functions have been obtained via q -integrals.

2017, 68 pages

Keywords: q -derivative, q -integral, quantum calculus, convex function, integral inequalities.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana rehberlik eden, geniş tecrübesiyle ve değerli bilgileriyle çalışmamda etkin katkısı bulunan, çalışmalarımın tamamlanabilmesi için her türlü şartı sağlayan ve bana her zaman her türlü desteği sunan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisansa başladığım günden itibaren yanımda olan değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa GÜRBÜZ'e, Sayın Yrd. Doç. Dr. Alper EKİNCİ'ye ve değerli arkadaşlarım Sayın Kıyasettin TAŞDEMİR'e, ve Sayın Nurullah KILIÇ'a en samimi duygularıyla teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum maddi ve manevi destekten dolayı aileme ve her zaman yanımda olan sevgili eşim Fatma ASLAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sinan ASLAN

Şubat, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	v
ŞEKİL ve ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler.....	5
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları.....	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	21
3.1. q-Diferansiyelle ilgili Temel Tanım ve Özellikler.....	21
3.2. q-Türevle ilgili Temel Tanım ve Özellikler.....	24
3.3. $(x - a)^n$ nin q- Benzeri ve q-Türevi.....	31
3.4. $(x - a)_q^n$ Polinomunun Özellik.....	36
3.5. Bazı Özel Polinomlarının q- Türevleri.....	39
3.6. q-Trigonometrik Fonksiyonlar.....	40
3.7. q-İntegral.....	42
3.8. q-Gamma ve Beta Fonksiyonları.....	47
3.9. q-İntegralin Geometrik Anlamı.....	49
3.10. q-İntegral ile İlgili Bazı Önemli Lemma ve Teoremler.....	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	53
4.1. q-Steffensen's Eşitsizliği.....	53
4.2. q-Grüss' Eşitsizliği ve Uygulamaları.....	55
4.3 q-Chebyshev's Eşitsizliği ve Uygulamaları.....	58
4.4. q-Hermite-Hadamart Eşitsizliği.....	61
5. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER.....	64
KAYNAKLAR.....	65
ÖZGEÇMİŞ.....	68

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Euclidean Uzay
I°	I 'nin İçi
$K_m(b)$	m –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –konveks Fonksiyonların Sınıfı
K_s^2	İkinci Anlamda s –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$L_1([a, b])$	$[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
$<$	Küçüktür
$>$	Büyüktür
$\in$	Elemanıdır
$\cap$	Kesişim
$\cup$	Birleşim
$\leq$	Küçük veya Eşittir
$\geq$	Büyük veya Eşittir
$\subset$	Alt Küme
$\subseteq$	Alt Kümesi veya Eşit
$\supseteq$	Kapsar veya Eşit
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de Bir Aralık
$SV(h, I)$	h –konkav Fonksiyonlar Sınıfı
$SX(h, I)$	h –konveks Fonksiyonların Sınıfı
$[n]$	n sayısının q -benzeri
D_q	q -türev

ŞEKİLLER ve ÇİZELGELER DİZİNİ

Şekil 2.1. Konveks Küme.....	5
Şekil 2.2. Konveks Olmayan Küme.....	6
Şekil 2.3. Konveks Fonksiyon.....	7
Şekil 2.4. Aralık Üzerinde Konveks Fonksiyon.....	9
Şekil 2.5. Quasi-Konveks Olup Konveks Olmayan Fonksiyon.....	15
Şekil 2.6. Quasi-Konveks Olmayan Fonksiyon.....	16
Şekil 3.1. q -İntegralin Geometrik Anlamı.....	50



1. GİRİŞ

Konvekslik kavramı ilk olarak Hermite tarafından Ekim 1881’de elde edilen bir sonucun, 1883 yılında Mathesis adlı dergide yayınlanmasıyla ortaya çıkmıştır. Hadamard’ın 1893 yılındaki çalışmasında konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında Jensen ile başlar. Konveksliği ortaya koyan bu ilk çalışmaların ardından günümüze kadar konvekslik kavramı matematiksel analizde önemli bir yere sahip olmakla birlikte birçok yeni konuyla ilişkilendirilmiştir.

Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve eşitsizlik teoriesasen nicelikler arasında karşılaştırma üzerine çalışmaları konu edindiğinden Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır. Hardy, Littlewood, Pólya, Beckenbach, Bellman, Mitrinović, Pachpatte, Pečarić ve Fink gibi matematikçiler Konveks Fonksiyonlar ile Eşitsizlikler Teorisi’ni bir arada inceleyerek bu iki konu arasındaki ilişkileri inşa eden ve geliştiren birçok makale yayınlamışlardır. Konveks fonksiyonları ihtiva eden eşitsizlikleri konu alan ilk temel çalışma 1934’te Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından yazılan “Inequalities” adlı kitaptır (Hardy *et al.* 1952). Diğer bir kayda değer çalışma ise E.F. Beckenbach ve R. Bellman tarafından 1961’de yazılan 1934-1960 yılları arasında elde edilen bu konularda elde edilmiş eşitsizlikler içeren ve yine “Inequalities” adı verilen kitaptır (Beckenbach and Bellman 1961). Mitrinović’in 1970 yılında yayınladığı ve o zamana kadar ele alınmamış konulara değindiği “Analytic Inequalities” isimli kitapta eşitsizlik teoride temel kaynaklardan biri olmuştur (Mitrinović 1970).

Konveks Fonksiyonlar Teorisi ile ilişkili olan temel eşitsizliklerden en önemlileri 1881 yılında Hermite tarafından elde edilen Hermite-Hadamard eşitsizliği ve 1938 yılında Ostrowski tarafından elde edilen Ostrowski eşitsizliğidir. Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili çalışmaların büyük bir kısmı Dragomir ve Pearce tarafından 2000 yılında yazılmış olan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” isimli kaynakta bir araya getirilmiştir (Dragomir and Pearce 2000).

Eşitsizlik teori ve konveks fonksiyonlar üzerine çalışmalar yürüten ve yeni birçok tanım ve teorem ortaya koyan diğer bilim insanları Özdemir, Kırmacı, Agarval, Anastassiou, Milovanovic, Fink, Roberts, Varberg, Barnett, Yıldırım, Sarıkaya, Ujević, Varošanec, Bullen, Cerone, Toader, Alomari, Qi, Pearce, Darus, Bakula, Pečarić, Set, Akdemir, Kavurmacı-Önalın, Avcı-Ardıç, Gürbüz, Ekinci ve İşcan şeklinde sıralanabilir.

Set tarafından hazırlanan “Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikleri” başlıklı doktora tezinde E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar ile birlikte farklı türden E –konveks ve $E - m$ –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli ve diğer bazı farklı türden konveks fonksiyonlar olan m –konveks, (α, m) –konveks, $\log$ –konveks, $quasi$ –konveks, s –konveks, r –konveks ve h –konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri verilmiştir. Bunların yanı sıra bazı genelleştirmeler de elde edilmiştir (Set 2010).

Alomari’nin “Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s –Convex, $Quasi$ –Convex and r –Convex Mappings and Applications” başlıklı doktora tezinde s –konveks, $quasi$ –konveks ve r –konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve bu eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Alomari 2011).

Kavurmacı-Önalın’ın “Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar İçin Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikler” başlıklı doktora tezinde farklı türden konveks fonksiyon sınıfları kullanılarak yeni baskın konveks fonksiyon kavramları tanımlanmış, bu yeni fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikleri edilmiştir. Konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli; konveks ve konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipli yeni integral eşitsizlikleri elde edilmiştir ve elde edilen bazı eşitsizlikler için uygulamalar verilmiştir (Kavurmacı 2012).

Konveks fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalarda temel olarak fonksiyon sınıfının özellikleri, diferansiyel ve integral hesabın bilinen özellikleri, ortalama fonksiyonu ve çeşitli klasik eşitsizlikler kullanılmıştır. Kimi çalışmalarda fonksiyonun tanımlandığı uzay değişkenlik göstermiş olup kimi çalışmalarda ise kullanılan matematiksel analiz işlemleri farklılık arz etmiştir. Temel felsefe olarak her yeni çalışmada sınırlarda iyileştirme, eşitsizliği genelleştirme, yeni bir tipten eşitsizlik elde etme ve bu eşitsizlikleri farklı fonksiyonel uzaylarda takdim etme benimsenmiştir.

Konvekslik üzerine ilk çalışmalar reel sayıların alt aralıklarında yapılmış, ardından bu eşitsizlikler koordinatlarda konvekslik kavramı ile birlikte $\mathbb{R}^n$ uzayına taşınmıştır. Başta Dragomir olmak üzere bazı diğer araştırmacılar izotonik lineer fonksiyonel uzayında, normlu uzaylarda, Hilbert uzaylarda, Banach uzaylarda ve fraktal uzaylarda eşitsizlik çalışmaları yaparak konuyu genişletmişlerdir.

Bazı araştırmacılar ise klasik türev ve integral için elde edilmiş sonuçları Caputo türev, Riemann-Liouville kesirli integraller, uyumlu kesirli integraller, k-lokal kesirli integraller kullanarak genelleştirmiş ve konuya yeni bir boyut kazandırmışlardır.

Bu yeni boyutlardan biri de kuantum hesap yardımıyla elde edilmiş integral eşitsizlikler ve konveksliğin kuantum hesapta kullanılmasıdır. Kuantum hesap en genel ifadeyle limit kullanmaksızın elde edilen hesap olarak bilinir. Klasik türevden sadece diferansiyellenemeyen fonksiyonların kümesinde türev almayı sağlayan bir operatör farkıyla ayrılır. Kuantum diferansiyel operatörü ortogonal polinomlar, temel hipergeometrik fonksiyonlar, varyasyon analizi, mekanik ve görelilik teorisi gibi matematiğin ve fiziğin birçok alanındaki uygulamaları ile ilginç bir role sahiptir. Son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çeken ve üzerine çalışmalar yapılan q-kalkülüs için türev, integral ve bu kavramların temel özellikleri inşa edilmiştir. Ayrıca, Hölder, Hermite-Hadamard, Trapezoid, Ostrowski, Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz, Grüss and Grüss-Çebyşev ve Steffensen eşitsizliği gibi birçok eşitsizlik q-integraller için takdim edilmiştir. Bunun yanısıra q-değişken operatörü yardımıyla kesirli kuantum hesap kavramı da tanımlanmış ve bazı özellikleri ispat edilmiştir.

Bu yeni yapılan tanımların uygulamaları olarak, kesirli q -diferansiyel denklemler için birinci ve ikinci mertebeden başlangıç değer problemlerinin varlık ve tekliğiyle ilgili sonuçlar verilmiştir. Konuyla ilgili olarak Tariboon et al., Jackson, Al-Salam, Agarwal, Ernst, Sudsutad et al., Ferreira, Annaby and Mansour, Bangerezako, Graef and Kong, Ahmad et al., Tariboon and Ntouyas, Noor et al., Taf et al., Anastassiou, Pachpatte, Pólya ve Szegő gibi bilim insanlarının çalışmaları incelenebilir.



2.KURAMSAL TEMELLER

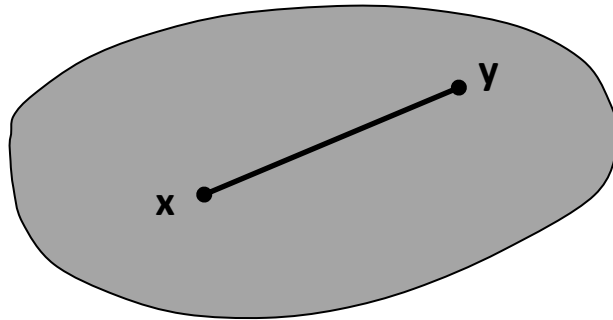
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu çalışmada kullanılacak bazı temel tanımlar aşağıda verilmiştir.

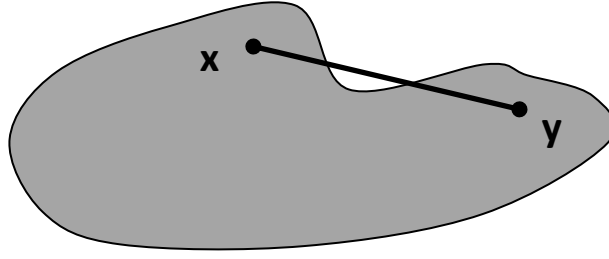
Tanım 2.1.1. “Konveks Küme”: “ L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = tx + (1 - t)y, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

İse A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = tx + (1 - t)y$ eşitliğindeki x ve y ’nin katsayıları için $t + (1 - t) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $t, 1 - t$ yerine $t + k = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan t, k reel sayıları alınabilir. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları x ve y olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir” (Bayraktar 2000).



Şekil 2.1. Konveks küme



Şekil 2.2. Konveks olmayan küme

Tanım 2.1.2. (J –Konveks Fonksiyon) “ $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Kesin J –Konveks Fonksiyon) “Her $x, y \in I$ ve $x \neq y$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir” (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): “ $I, \mathbb{R}$ ’de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

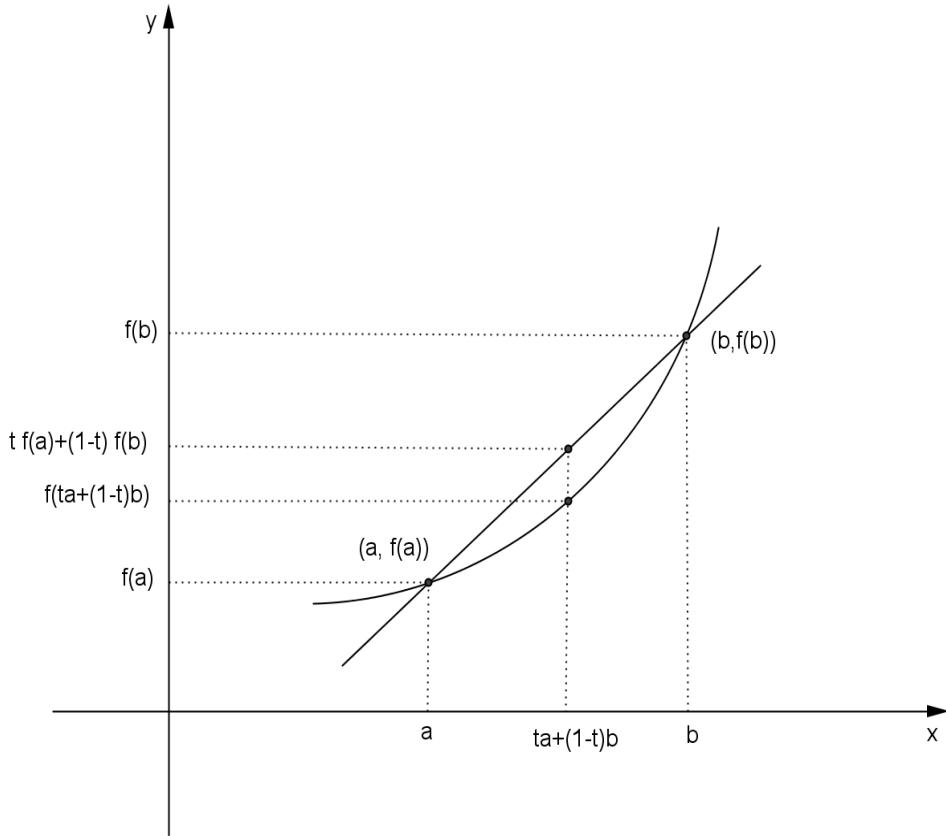
şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir” (Pečarić *et al.* 1992).

Eğer $\alpha \in (0,1)$ aralığında alınırsa bu durumda

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olur. Bu f fonksiyonuna da strictly konveks fonksiyon denir. “ $-f$ ” konveks (strictly konveks) ise o zaman f ’ye konkav (strictly konkav) denir.

Konveks fonksiyonun geometrik anlamı aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.3. Konveks fonksiyon

Geometrik olarak $ta + (1 - t)b$ noktasında; f ’nin eğri üzerinde aldığı değer $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı

değerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya üstündedir.

Şekil 2.3' den de görüldüğü gibi $t \in [0, 1]$ olduğundan $tf(a) \leq f(a)$ dir. Benzer şekilde $(1 - t)f(b) \leq f(b)$ dir. Yani $tf(a)$, $f(a)$ 'nın $(1 - t)f(b)$ de $f(b)$ 'nin altındadır.

Dolayısıyla $tf(a) + (1 - t)f(b)$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında olur. Konkav fonksiyon için kiriş f' nin grafiğinin $[a, b]$ aralığında kalan kısmının üzerinde veya altındadır.

Teorem 2.1.1. (Üçgen Eşitsizliği):“Herhangi bir x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.2. (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu):“ f , $[a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Örnek 2.1.1. $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ fonksiyonu I üzerinde konveks fonksiyondur.

Çözüm: f 'nin konveks olduğunu göstermek için $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

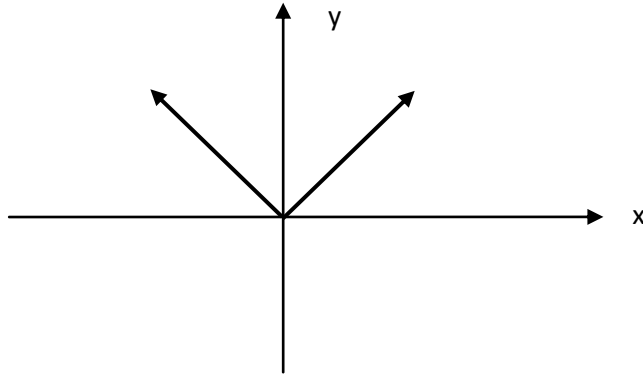
$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. Buna göre

$$\begin{aligned} f(\alpha x + (1 - \alpha)y) &= |\alpha x + (1 - \alpha)y| \\ &\leq |\alpha x| + |(1 - \alpha)y| \quad (\text{üçgen eşitsizliğinden}) \\ &= \alpha|x| + (1 - \alpha)|y| \\ &= \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk ve son ifadeden f fonksiyonunun konveksliği ispatlanmış olur

$f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da türeve sahip olmamasına rağmen konveks fonksiyondur.



Şekil 2.4. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Sonuç 2.1.1. “ $x, y \in \mathbb{R}$ ve $p + q > 0$ olmak üzere

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (2.1) eşitsizliğine denktir” (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.3. (Hölder Eşitsizliği):“ $a = (a_1, \dots, a_n)$ ve $b = (b_1, \dots, b_n)$ reel veya kompleks sayıların iki n –lisi olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

olmak üzere

(a) $p > 1$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

(b) $p < 0$ veya $q < 0$ ise,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri geçerlidir” (Mitrinović 1970).

Teorem 2.1.4. (İntegraller için Hölder Eşitsizliği):“ $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı ve integrallenebilen iki fonksiyon olsun. $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir” (Mitrinović *et al.* 1993)

Tanım 2.1.5. (Süreklilik):“ $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in S$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $x \in S$ ve $|x - x_0| < \delta$ için $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, x_0 ’da süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.6. (Düzgün Süreklilik):“ $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilmiş olsun. $|x_1 - x_2| < \delta$ şartını sağlayan her $x_1, x_2 \in S$ için $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f, S ’de düzgün süreklidir denir” (Bayraktar 2010).

Tanım 2.1.7. (Lipschitz Şartı):“ $f: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa f, S ’de Lipschitz şartını sağlıyor denir” (Bayraktar 2010).

Sonuç 2.1.2.“ f, S ’de Lipschitz şartını sağlıyorsa f, S ’de düzgün süreklidir” (Bayraktar 2010).

Teorem 2.1.5.“ $[a, b] \subseteq I^\circ$ olsun. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise f Lipschitz şartını sağlar. Sonuç olarak $f, [a, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° ’de süreklidir”(Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.6.“ f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. f , (a, b) aralığında sürekli ve
- b. f , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır” (Azpeitia 1994).

Tanım 2.1.8. (Artan ve Azalan Fonksiyonlar):“ f , I aralığında tanımlı bir fonksiyon ve x_1, x_2 de I ’da iki nokta olsun. Bu durumda

- (a) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) > f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır,
- (b) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) < f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- (c) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \geq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- (d) $x_2 > x_1$ iken $f(x_2) \leq f(x_1)$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır

denir” (Adams and Essex 2010).

Teorem 2.1.7.“ J açık bir aralık ve $J \subseteq I$ olmak üzere f , I üzerinde sürekli ve J üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

- (a) Her $x \in J$ için $f'(x) > 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artandır.
- (b) Her $x \in J$ için $f'(x) < 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalandır.
- (c) Her $x \in J$ için $f'(x) \geq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde azalmayandır.
- (d) Her $x \in J$ için $f'(x) \leq 0$ ise f fonksiyonu I üzerinde artmayandır”(Adams and Essex 2010).

Aşağıda konveks fonksiyonların türevleri ile artanlık (azalanlık) arasındaki ilişkiyi içeren sonuç ve teoremler verilmiştir.

Sonuç 2.1.3.“ f, g konveks fonsiyonlar ve g aynı zamanda artan ise $g \circ f$ fonksiyonu konvekstir” (Roberts and Varberg 1973).

Teorem 2.1.8. “Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks (kesin konveks) bir fonksiyon ise $f'_+(x)$ ve $f'_-(x)$ var ve bu fonksiyonlar I° ’de artandır (kesin artandır)”(Pečarić et al. 1992).

Teorem 2.1.9.“ f fonksiyonu (a, b) aralığında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart f' ’nin artan (kesin artan) olmasıdır”(Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.1.10.“ f fonksiyonunun I açık aralığında ikinci türevi varsa, f fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks (kesin konveks) olması için gerek ve yeter şart $x \in I$ için

$$f''(x) \geq (>)0$$

olmasıdır”(Pečarić *et al.* 1992)

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyon Sınıfları

Çeşitli konveks fonksiyon türleri vardır. Bunlardan en çok bilinen ve literatürde bu konuda çalışanlar tarafından sık kullanılan konveks fonksiyon türleri şunlardır:

Tanım 2.2.1. (Quasi-Konveks Fonksiyon):“ $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı bir küme ve $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly *quasi* –konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye *quasi* –konkav fonksiyon ve

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye strictly-*quasi* –konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

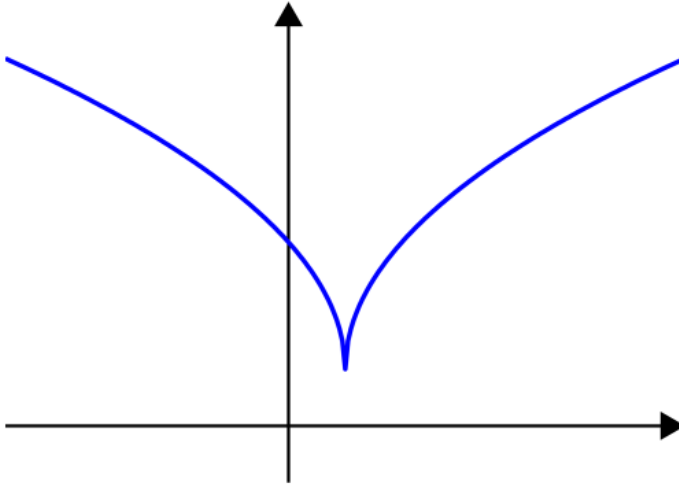
Tanım 2.2.2.“ f hem *quasi* –konveks hem de *quasi* –konkav ise f 'ye *quasi* –monotonik denir” (Greenberg and Pierskalla 1971).

Sonuç 2.2.1.“Herhangi bir konveks fonksiyon *quasi* –konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani *quasi* –konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar vardır.

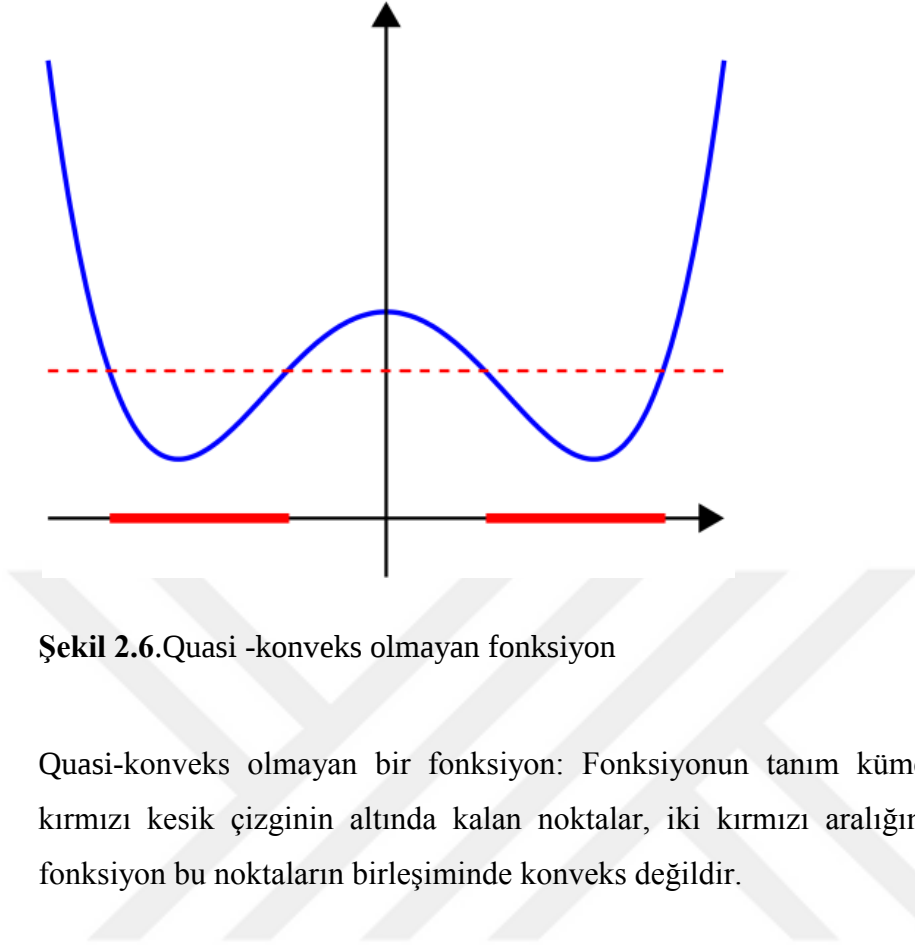
Örneğin $g: [-2,2] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-2, -1] \\ t^2, & t \in (-1, 2] \end{cases}$$

fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında konveks değildir. Fakat g fonksiyonu $[-2,2]$ aralığında *quasi* –konveks fonksiyondur” (İon 2007).



Şekil 2.5. Quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyon



Şekil 2.6.Quasi -konveks olmayan fonksiyon

Quasi-konveks olmayan bir fonksiyon: Fonksiyonun tanım kümesinde, değerleri kırmızı kesik çizginin altında kalan noktalar, iki kırmızı aralığın birleşimidir ve fonksiyon bu noktaların birleşiminde konveks değildir.

Tanım 2.2.3. (Wright-Konveks Fonksiyon): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $y > x, \alpha > 0$ şartları altında her bir $y + \alpha, x \in I$ için

$$f(x + \alpha) - f(x) \leq f(y + \alpha) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.4. (Wright-Quasi-Konveks Fonksiyon): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $y > x, \alpha > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \alpha \in I$ ve $\forall \alpha \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}[f(tx + (1 - t)y) + f((1 - t)x + ty)] \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2}[f(y) + f(x + \alpha)] \leq \max\{f(x), f(y + t)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir” (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.2.5. (J –Quasi-Konveks Fonksiyon): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna J – *quasi* –konvekstir denir” (Dragomir and Pearce 2000).

Tanım 2.2.6. (Log-Konveks Fonksiyon): “ $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq f^t(x)f^{1-t}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Log-konvekstir denir” (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.2.7(Godunova-Levin Fonksiyonu): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon, $\forall x, y \in I, t \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(tx + (1-t)y) \leq \frac{f(x)}{t} + \frac{f(y)}{1-t}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyon veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak;

$f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır” (Godunova and Levin 1985).

Tanım 2.2.8.(P –Fonksiyonu): “ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun.

$\forall x, y \in I, t \in [0,1]$ olmak üzere;

$$f(tx + (1 - t)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna P –fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir” (Dragomir *et al.*1995).

Tanım 2.2.9.(m –Konveks Fonksiyon): “ $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], \alpha \in [0,1]$ ve $m \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1 - \alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir” (Toader 1984).

$-f$ fonksiyonu m –konveks ise bu takdirde f fonksiyonu m –konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m –konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir. Eğer $m = 1$ alınırsa $[0, b]$ üzerinde m –konveks fonksiyon bilinen konveks fonksiyona dönüşür.

Tanım 2.2.10. (Birinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): “ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere her $u, v \in \mathbb{R}_+$ ve her $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir” (Orlicz 1961).

Tanım 2.2.11.(İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyon): “ $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ve $0 < s \leq 1$ olsun. $\alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$ olmak üzere her $u, v, h \in \mathbb{R}_+$ için

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir”(Breckner 1978). Yukarıda verilen her iki s –konvekslik tanımı $s = 1$ için bilinen konveksliğe dönüşür.

Örnek 2.2.1. “ $s \in (0,1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

(i) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ dir.

(ii) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ dir” (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.2.12. (h –Konveks Fonksiyon): “ $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} & f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\ & \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

şartını sağlayan negatif olmayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir” (Varošanec 2007).

“(2.3) eşitsizliğinin tersini doğrulayan $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna h –konkav fonksiyon denir yani $f \in SV(h, I)$ ’dır” (Varošanec 2007).

“Bu tanımdan açıkça şu sonuçlar çıkarılabilir: $h(\alpha) = \alpha$ ise tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve eşitsizliğin yön değiştirmesi durumunda tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ ise $SX(h, I) = Q(I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = 1$ ise $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ’dır; $s \in (0, 1)$ olmak üzere $h(\alpha) = \alpha^s$ ise $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ dir” (Varošanec 2007).

Tanım 2.2.13.(Starshaped Fonksiyon): “ $b > 0$ olmak üzere $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x \in [0, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

şartını sağlıyorsa bu fonksiyona starshaped fonksiyon denir” (Toader 1984).

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. q-Diferansiyelle ilgili Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 3.1.1. Herhangi bir keyfi $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım,

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

İfadesine q-diferansiyel denir.(Kac et al. 1943).

Örnek 3.1.1 $f(x) = x$ fonksiyonu için $d_q f(x)$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.1.1

$$\begin{aligned} d_q f(x) &= f(qx) - f(x) \\ &= qx - x \\ &= (q - 1)x \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.2.(İki Fonksiyonun Çarpımının q-Diferansiyeli): $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_q(f(x).g(x)) &= f(qx).g(qx) - f(x).g(x) \\ &= f(qx).g(qx) - f(x).g(x) - f(qx).g(x) + f(qx).g(x) \\ &= f(qx)(g(qx) - g(x)) + g(x)(f(qx) - f(x)) \end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)$$

şeklinde bulunur. (Yardımcı 2005).

Örnek 3.1.2. $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $d_q(f(x)g(x))$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.1.2.

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x)$$

$$\begin{aligned}
&= qx((qx)^2 - x^2) + x^2(qx - x) \\
&= q^3x^3 - qx^3 + q^3x^2 - x^3 \\
&= q^3x^3 - x^3 \\
&= x^3(q^3 - 1)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.3. (İki Fonksiyonun Toplamının q-Diferansiyeli): $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d_q(f(x) + g(x)) &= (f(qx) + g(qx)) - (f(x) + g(x)) \\
&= f(qx) - f(x) + g(qx) - g(x) \\
&= d_q f(x) + d_q g(x)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.1.3. $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $d_q(f(x) + g(x))$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.1.3.

$$\begin{aligned}
d_q(f(x) + g(x)) &= d_q f(x) + d_q g(x) \\
&= f(qx) - f(x) + g(qx) - g(x) \\
&= qx - x + q^2x^2 - x^2 \\
&= x^2(q^2 - 1) + x(q - 1) \\
&= x(q - 1)(x(q + 1) + 1)
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.4. (Bir Fonksiyonun bir Sabitle Çarpımının q-Diferansiyeli): λ bir sabit $f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d_q(\lambda f(x)) &= \lambda qx - \lambda x \\
&= \lambda x(q - 1) \\
&= \lambda d_q f(x)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.1.4 $f(x) = x$ ve λ bir sabit olmak üzere $d_q(\lambda f(x))$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.1.4

$$\begin{aligned}d_q(\lambda f(x)) &= \lambda d_q f(x) \\&= \lambda qx - \lambda x \\&= \lambda x(q - 1)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.5 (İki Fonksiyonun Farkının q-Diferansiyeli) $f(x)$ ve $g(x)$ İki fonksiyon $-1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}d_q(f(x) - g(x)) &= d_q(f(x) + (-1) \cdot g(x)) \\&= d_q f(x) + d_q((-1) \cdot g(x)) \\&= d_q f(x) + (-1) \cdot d_q g(x) \\&= d_q f(x) - d_q g(x)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.1.5 $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $d_q(f(x) - g(x))$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.1.5.

$$\begin{aligned}d_q(f(x) - g(x)) &= d_q(x - x^2) \\&= d_q(x + (-1) \cdot x^2) \\&= (qx + (-1) \cdot q^2 x^2) - (x + (-1) \cdot x^2) \\&= qx - q^2 x^2 - x + x^2 \\&= x(q - 1) - x^2(q^2 - 1) \\&= x(q - 1) \cdot (1 - x(q + 1))\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.1.6.(Sabit Fonksiyonun q-Diferansiyeli): $f(x) = c$ sabit bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}
d_q f(x) &= f(qx) - f(x) \\
&= c - c \\
&= 0
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

3.2. q-Türevle ilgili Temel Tanım ve Özellikler

Tanım 3.2.1 Şimdide q-diferansiyel yardımıyla q- türev tanımlayalım.

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \quad (3.1)$$

$f(x)$ 'in q-türevi denir.(Yardımcı 2005).

Örnek 3.2.1 $f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z}^+$ fonksiyonun q-türevini bulunuz.

Çözüm 3.2.1

$$\begin{aligned}
D_q f(x) &= D_q (x^n) \\
&= \frac{(qx)^n - x^n}{qx - x} \\
&= \frac{x^n(q^n - 1)}{x(q - 1)} \\
&= \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1}
\end{aligned}$$

Tanım 3.2.2 $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

ifadesine n nin q –benzeri denir.

Ayrıca

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu tanıma göre yukarıdaki örneğe geri dönersek

$$D_q x^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} x^{n-1} = [n].x^{n-1}$$

olacaktır. Bu ifade x^n nın sıradan türev haline benzemektedir. Eğer $q \rightarrow 1$ için eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} D_q x^n &= \lim_{q \rightarrow 1} [n] x^{n-1} \\ &= \lim_{q \rightarrow 1} (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).x^{n-1} \\ &= (1 + 1 + 1^2 + \dots + 1^{n-1})x^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

olacaktır. Çünkü,

$$\lim_{q \rightarrow 1} [n] = \lim_{q \rightarrow 1} (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = n$$

olacaktır. Yani $[n]$ q-analizinde, sıradan analizdeki n pozitif tam sayısı ile aynı rolü oynamaktadır.(Yardımcı 2005).

Tanım 3.2.3

$$[\infty] = \frac{1}{1 - q}$$

olarak tanımlanır.(Yardımcı 2005).

Tanım 3.2.4 (İki Fonksiyonun Çarpımının q-Türevi): $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, (3.1) ifadesinden yararlanarak aşağıdaki q-türevi elde ederiz

$$\begin{aligned} D_q(f(x).g(x)) &= \frac{d_q(f(x).g(x))}{d_q x} \\ &= \frac{f(qx).d_q g(x) + g(x).d_q f(x)}{(q - 1).x} \\ &= f(qx). \frac{d_q g(x)}{(q - 1)x} + g(x). \frac{d_q f(x)}{(q - 1)x} \end{aligned}$$

$$= f(qx).D_q g(x) + g(x).D_q f(x)$$

simetriden dolayı,

$$D_q(f(x).g(x)) = g(qx).D_q f(x) + f(x).D_q g(x)$$

elde edilir.(Yardımcı 2005).

Örnek 3.2.2 $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $D_q(f(x).g(x))$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.2.2

$$\begin{aligned} D_q(f(x).g(x)) &= q(x) \frac{q^2 x^2 - x^2}{(q-1)x} + x^2 \cdot \frac{qx - x}{qx - x} \\ &= qx \frac{x^2(q^2 - 1)}{x(q-1)} + x^2 \\ &= qx^2 \cdot (q+1) + x^2 \\ &= x^2(q^2 + q + 1) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.2.5 (İki Fonksiyonun Bölümünün q-Türevi): $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, $g(x) \neq 0$ ve $g(qx) \neq 0$ olsun

$$f(x) = f(x)$$

$$g(x) \frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$$

eşitliğin her iki tarafının q-türevini alalım.

$$D_q \left(g(x) \frac{f(x)}{g(x)} \right) = D_q f(x)$$

$$g(qx).D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) + \frac{f(x)}{g(x)} D_q g(x) = D_q f(x)$$

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{D_q f(x) - \frac{f(x)}{g(x)} D_q g(x)}{g(qx)}$$

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x) \cdot D_q f(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x) \cdot g(qx)}$$

olur. (Yardımcı 2005).

Örnek 3.2.3 $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için

$$D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$$

değerini bulunuz.

Çözüm 3.2.3

$$\begin{aligned} D_q \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{x^2 \frac{qx-x}{qx-x} - x \frac{q^2 x^2 - x^2}{qx-x}}{x^2 q^2 x^2} \\ &= \frac{x^2 - x^2(q+1)}{x^4 q^2} \\ &= \frac{-x^2}{x^4 q^2} \\ &= -\frac{1}{x^2 q} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Tanım 3.2.6(İki Fonksiyonun Toplamının q-Türevi): $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_q(f(x) + g(x)) &= \frac{f(qx) + g(qx) - f(x) - g(x)}{qx - x} \\ &= \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} + \frac{g(qx) - g(x)}{qx - x} \\ &= D_q f(x) + D_q g(x) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.2.4 $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $D_q(f(x) + g(x))$ değerlerini bulunuz.

Çözüm 3.2.4

$$\begin{aligned} D_q(f(x) + g(x)) &= D_q(x + x^2) \\ &= D_q(x) + D_q(x^2) \\ &= \frac{qx - x}{qx - x} + \frac{q^2x^2 - x^2}{qx - x} \\ &= 1 + \frac{x^2(q-1) \cdot (q+1)}{x(q-1)} \\ &= 1 + x(q+1) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.2.7 (Bir Fonksiyon Bir (λ) Sabitle Çarpımının q -Türevi): λ bir sabit $f(x)$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} D_q(\lambda f(x)) &= \frac{\lambda f(qx) - \lambda f(x)}{qx - x} \\ &= \lambda \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\ &= \lambda D_q f(x) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Örnek 3.2.5 $f(x) = x$ ve λ sabit olmak üzere, $\lambda f(x)$ fonksiyonun q -türevini bulunuz.

Çözüm 3.2.5

$$\begin{aligned} D_q(\lambda f(x)) &= \frac{\lambda qx - \lambda x}{qx - x} \\ &= \lambda \frac{qx - x}{qx - x} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tanım 3.2.8 (İki Fonksiyonun Farkının q -Türevi): $f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere,

$$D_q(f(x) - g(x)) = D_q(f(x) + (-1)g(x))$$

$$= D_q f(x) + (-1)D_q g(x)$$

$$= D_q f(x) - D_q g(x)$$

şeklinde bulunur.

Örnek3.2.6 $f(x) = x$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $D_q(f(x) - g(x))$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.2.6

$$\begin{aligned} D_q(f(x) - g(x)) &= D_q(x - x^2) \\ &= D_q(x + (-1)x^2) \\ &= D_q x + (-1)D_q x^2 \\ &= D_q x - D_q x^2 \\ &= \frac{qx - x}{qx - x} - \frac{q^2 x^2 - x^2}{qx - x} \\ &= 1 - \frac{x^2(q - 1) \cdot (q + 1)}{x(q - 1)} \\ &= 1 - x(q + 1) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek3.2.7 $f(x) = \ln x$ fonksiyonun q -diferansiyelini ve q -türevini bulunuz.

$$d_q(\ln x) = \ln qx - \ln x$$

$$= \ln \frac{qx}{x}$$

$$= \ln q$$

$$D_q(\ln x) = \frac{d_q(\ln x)}{d_q x}$$

$$= \frac{\ln qx - \ln x}{x(q - 1)}$$

$$= \frac{\ln q}{x(q - 1)}$$

Örnek3.2.8 $f(x) = x^3$ fonksiyonun q -diferansiyel ve q -türevini bulunuz.

Çözüm 3.2.8

$$\begin{aligned}d_q(x^3) &= q^3 x^3 - x^3 \\ &= x^3(q^3 - 1)\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}D_q(x^3) &= \frac{q^3 x^3 - x^3}{qx - x} \\ &= \frac{x^3(q^3 - 1)}{x(q - 1)} \\ &= \frac{x^3(q - 1)(1 + q + q^2)}{x(q - 1)} \\ &= x^2(1 + q + q^2) \\ &= x^2[3] \\ &= [3]x^2\end{aligned}$$

Tanım 3.2.9. (Sabit Fonksiyonun q -Türevi): $f(x) = c$ sabit bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}D_q f(x) &= \frac{f(qx) - f(c)}{qx - x} \\ &= \frac{c - c}{qx - x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Örnek3.2.9. $f(x) = 10$ fonksiyonu için $D_q f(x)$ değerini bulunuz.

Çözüm 3.2.9.

$$\begin{aligned}D_q f(x) &= \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \\ &= \frac{0}{qx - x}\end{aligned}$$

$$= 0$$

3.3. $(x - \alpha)^n$ nin q-Benzeri ve q-Türevi:

Genel Taylor Formülünde D lineer operatörü yerine D_q lineer operatörünü alalım.

$\{P_0(x), P_1(x), \dots \dots \dots\}$ polinomlar dizisi de yine bu teoremdaki üç şartı sağlasın. Eğer

$$\alpha = 0$$

olarak seçersek

$$P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!}$$

olarak alabiliriz. Çünkü;

$$1. P_0(0) = 1 \text{ ve } p_n(0) = 0 \ (\forall n \geq 1)$$

$$P_0(x) = \frac{x^0}{[0]!} = 1 \quad P_0(0) = 1 \quad p_n(0) = \frac{0^n}{[n]!} = 0$$

$$2. der P_n(x) = n$$

$$3. D_q P_n(x) = P_{n-1}(x)$$

$$D_q 1 = \frac{d_q 1}{d_q 1} = 0$$

Eğer $\alpha \neq 0$ ve $D = D_q$ olarak seçersek acaba $P_n(x)$ nasıl olacaktır? Bu sorunun yanıtını Genel Taylor Formülü yardımıyla bulalım.

$$P_0(x) = 1, \quad D_q P_1(x) = P_0(x), \quad P_1(\alpha) = 0$$

olmalıdır.

$$D_q P_1(x) = 1 \Rightarrow \frac{d_q P_1(x)}{d_q x} = \frac{P_1(qx) - P_1(x)}{x(q-1)} = 1$$

$$P_1(qx) - P_1(x) = x(q-1)$$

$$P_1(aq) - P_1(a) = ap - a$$

$$P_1(aq) = aq - a \text{ ve } P_1(a) = 0$$

olmalıdır. O halde,

$$P_1(x) = x - a$$

olarak bulunacaktır. Şimdi de $P_2(x)$ i bulmaya çalışalım.

$$D_q P_2(x) = P_1(x) \text{ ve } P_2(a) = 0$$

olmalıdır.

$$D_q P_2(x) = \frac{P_2(qx) - P_2(x)}{x(q-1)} = x - a$$

$$P_2(qx) - P_2(x) = (x - a)x(q - 1)$$

$$P_2(aq) - P_2(a) = 0 \Rightarrow P_2(aq) = 0$$

olmalıdır.

$$P_2(a) = 0 \text{ ve } P_2(aq) = 0$$

olacağı için,

$$P_2(x) = (x - a)(x - qa)$$

olacaktır. Bunu sınavalım.

$$D_q P_2(x) = \frac{P_2(qx) - P_2(x)}{x(q-1)} = x - a$$

olmalıdır. Buna göre,

$$\begin{aligned} D_q P_2(x) &= \frac{(qa - q)(qx - aq) - (x - a)(x - aq)}{x(q-1)} \\ &= \frac{(x - a)[q(qx - a) - (x - aq)]}{x(q-1)} \\ &= \frac{(x - a)(q^2x - qa - x + qa)}{x(q-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x - a)(q^2x - x)}{x(q-1)}$$

$$= \frac{(x - a)x(q^2 - 1)}{x(q-1)}$$

$$= (x - a) \frac{q^2 - 1}{q - 1}$$

$$= (x - a)[2]$$

oysa

$$D_q P_2(x) = (x - a)$$

olmalıydı. O halde eşitliği sağlamak için

$$P_2(x) = \frac{(x - a)(x - qa)}{[2]}$$

olmalıdır. Şimdi de $P_3(x)'$ i bulalım.

$$D_q P_3(x) = P_2(x), P_3(a) = 0$$

olmalıdır.

$$D_q P_3(x) = \frac{d_q P_3(x)}{d_q x} = \frac{P_3(qx) - P_3(x)}{x(q - 1)} = \frac{(x - a)(x - qa)}{[2]}$$

$$P_3(qx) - P_3(x) = \frac{(x - a)(x - qa)x(q - 1)}{[2]}$$

$$P_3(aq) - P_3(a) = 0 \Rightarrow P_3(aq) = 0$$

$$P_3(qx) - P_3(x) = \frac{x(q - 1)(x - a)(x - qa)}{[2]}$$

denkleminde $x = qa$ alırsak,

$$P_3(q^2 a) - P_3(qa) = 0 \Rightarrow P_3(q^2 a) = 0$$

olacaktır.

$$P_3(a) = 0, P_3(aq) = 0, P_3(aq^2) = 0$$

olacağından dolayı

$$P_3(x) = (x - a)(x - qa)(x - q^2 a)$$

olacaktır. Bunu sınyalım.

$$D_q P_3(x) = \frac{P_3(qx) - P_3(x)}{x(q - 1)} = \frac{(x - a)(x - qa)}{[2]}$$

olmalıdır. Buna göre,

$$D_3 P_3(x) = \frac{(qx - a)(qx - qa)(qx - q^2 a) - (x - a)(x - qa)(x - q^2 a)}{x(q - 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(qx - a)q(x - a)q(x - qa) - (x - a)(x - qa)(x - q^2a)}{x(q - 1)} \\
&= \frac{(x - a)(x - qa)[(qx - a)q^2 - (x - q^2a)]}{x(q - 1)} \\
&= \frac{(x - a)(x - qa)(q^3x - aq^2 - x + q^2a)}{x(q - 1)} \\
&= \frac{(x - a)(x - qa)x(q^3 - 1)}{x(q - 1)} \\
&= (x - a)(x - qa) \frac{q^3 - 1}{q - 1} \\
&= (x - a)(x - qa)[3]
\end{aligned}$$

oysa

$$D_q P_3(x) = \frac{(x - a)(x - qa)}{[2]}$$

olmalıydı. O halde eşitliği sağlamak için

$$P_3(x) = \frac{(x - a)(x - qa)(x - q^2a)}{[3][2]}$$

olacaktır.

$$P_1(X) = x - a$$

$$p_2(x) = \frac{(x - a)(x - qa)}{[2]}$$

$$P_3(x) = \frac{(x - a)(x - qa)(x - q^2a)}{[3][2]}$$

olduğundan $P_n(x)$ polinomunu $a \neq 0$ için aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$P_n(x) = \frac{(x - a)(x - qa)(x - q^2a) \dots (x - q^{n-1}a)}{[n]!}$$

(Yardımcı 2005).

Tanım 3.3.1 $n!$ in q -benzeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$[n]! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ [n][n-1] \dots [1] & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

(Yardımcı 2005).

Tanım 3.3.2 $(x - a)^n$ polinomunun q-benzeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$(x - a)_q^n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ (x - a)(x - qa) \dots (x - q^{n-1}a) & n \geq 1 \end{cases}$$

(Yardımcı 2005).

Önerme 3.3.1 $n \geq 1$ için

$$D_q(x - a)_q^n = [n](x - a)_q^{n-1}$$

dir.

İspat 3.3.1 Bu önermenin ispatını tüme varım yöntemi ile yapacağız.

$n = 1$,

$$D_q(x - a)_q = D_q(x - a) = \frac{qx - q - x + a}{x(q - 1)} = 1 = [1](x - a)_q^0$$

olacağı için önerme $n = 1$ için doğrudur. Varsayalım ki,

$$D_q(x - a)_q^n = [n](x - a)_q^{n-1}$$

ifadesi bazı k değerleri için doğru olsun

$$D_q(x - a)_q^n = [n](x - a)_q^{n-1}$$

$k+1$ değeri için de doğru olduğunu gösterelim. İki fonksiyonun çarpımının q-türevinden yararlanarak,

$$(x - a)_q^{k+1} = (x - a)(x - qa) \dots (x - q^{k-1}a)(x - q^k a) = (x - a)_q^k (x - q^k a)$$

$$D_q(x - a)_q^{k+1} = D_q\left((x - a)_q^k (x - q^k a)\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (x-a)_q^k D_q(x-q^k a) + (qx-q^k a) D_q(x-a)_q^k \\
&= (x-a)_q^k \left(\frac{(qx-q^k a) - (x-q^k a)}{x(q-1)} \right) + q(x-q^{k-1} a)[k](x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k \left(\frac{qx-q^k a-x+q^k a}{x(q-1)} \right) + q(x-q^{k-1} a)[k](x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k \left(\frac{x(q-1)}{x(q-1)} \right) + q(x-q^{k-1} a)[k](x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k + q(x-q^{k-1} a)[k](x-a)(x-qa) \dots (x-q^{k-2} a) \\
&= (x-a)_q^k + q[k](x-a)_q^k \\
&= (x-a)_q^k (1+q[k]) \\
&= (x-a)_q^k [k+1]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olmaktadır.(Yardımcı 2005)

3.4. $(x-a)_q^n$ Polinomunun Özellikleri

Genelde

$$(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$$

dir. (Yardımcı 2005).

Önerme 3.4.1.

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n \quad m, n > 0$$

İspat 3.4.1

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa)(x-q^2 a) \dots (x-q^{m-1} a)(x-q^m a) \dots (x-q^{m+n-1} a) \\
&= ((x-a)(x-qa) \dots (x-q^{m-1} a)) ((x-q^m a)(x-q(q^m a)) \dots (x-q^{n-1}(q^m a))) \\
&= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n
\end{aligned}$$

$$(x - a)_q^{m+n} = (x - a)_q^m (x - q^m a)_q^n$$

Eşitliğinde $m = -n$ olarak alınırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$(x - a)_q^{-n} = \frac{1}{(x - q^{-n} a)_q^n}$$

(Yardımcı 2005).

Önerme 3.4.2 Herhangi iki tam sayı olan m ve n için aşağıdaki eşitlik doğrudur.

$$(x - a)_q^{m+n} = (x - a)_q^m (x - q^m a)_q^n$$

İspat 3.4.2

1. $m = -m' < 0$ ve $n > 0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim

$$\begin{aligned} (x - a)_q^m (x - q^m a)_q^n &= (x - a)_q^{-m'} (x - q^{-m'} a)_q^n \\ &= \frac{(x - q^{-m'} a)_q^n}{(x - q^{-m'} a)_q^{m'}} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x - q^{-m'} a)_q^{m'} (x - q^{m'} (q^{-m'} a)_q^{n-m'})}{(x - q^{-m'} a)_q^{m'}} & n \geq m' \\ \frac{(x - q^{-m'} a)_q^n}{(x - q^{-m'} a)_q^{m'-n}} & n < m' \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x - a)_q^{n-m'}}{1} & n \geq m' \\ \frac{1}{(x - q^{n-m'} a)_q^{m'-n}} = (x - a)_q^{n-m'} & n < m' \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$= (x - a)_q^{n-m'}$$

$$= (x - a)_q^{n+m}$$

2. $m \geq 0$ ve $n = -n' < 0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^m &= (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^{-n'} \\
&= \frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'})_q^{n'}} \\
&= \begin{cases} \frac{(x-q^{m-n'} a)_q^{n'} (x-a)_q^{m-n'}}{(x-q^{m-n'})_q^{n'}} & m \geq n' \\ \frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{n'-m} (q^{m-n'} a))_q^m (x-q^{m-n'})_q^{n'-m}} & m < n' \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} (x-a)_q^{m-n'} & m \geq n' \\ \frac{1}{(x-q^{m-n'} a)_q^{n'-m}} = (x-a)_q^{m-n'} & m < n' \end{cases} \\
&= (x-a)_q^{m-n'} \\
&= (x-a)_q^{m+n}
\end{aligned}$$

3. $-m = -m' < 0$ ve $n = -n' < 0$ için önermedeki eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-m'} (x-q^{-m'} a)_q^{-n'} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-m'} a)_q^{m'} (x-q^{-n'} (q^{-m'} a))_q^{n'}} \\
&= \frac{1}{(x-q^{n'} (q^{-m'-n'} a))_q^{m'} (x-q^{-m'-n'} a)_q^{n'}} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-m'-n'} a)_q^{m'+n'}} = (x-a)_q^{-m'-n'} \\
&= (x-a)_q^{m+n}
\end{aligned}$$

(Yardımcı 2005).

$(x - a)_q^n$ nin bir başka özelliği ise,

$$(a - x)_q^n \neq (-1)^n (x - a)_q^n$$

olmasıdır. Bunun yerine $n \geq 1$ için;

$$\begin{aligned} (a - x)_q^n &= (a - x)(a - qx)(a - q^2x) \dots (a - q^{n-1}x) \\ &= (a - x)q(q^{-1}a - x)q^2(q^{-2}a - x) \dots q^{n-1}(aq^{1-n} - x) \\ &= q^{\frac{(n-1)n}{2}}(x - a)(x - q^{-1}a)(x - q^{-2}a) \dots (x - q^{1-n}a)(-1)^n \\ &= (-1)^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}(x - q^{1-n}a)_q^n \end{aligned}$$

(Yardımcı 2005).

3.5. Bazı Özel Polinomların q – Türevleri:

1.

$$\begin{aligned} D_q \left(\frac{1}{(x - a)_q^n} \right) &= D_q \left(\frac{1}{(x - q^{-n}(q^n a))_q^n} \right) \\ &= D_q (1 - q^n a)_q^{-n} \\ &= [-n](1 - q^n a)_q^{-n-1} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} D_q (a - x)_q^n &= D_q \left((-1)^n q^{n(n-1)/2} (x - q^{1-n}a)_q^n \right) \\ &= (-1)^n q^{(n-1)n/2} [n] (x - q^{1-n}a)_q^{n-1} \\ &= -1(-1)^{n-1} [n] q^{n-1} q^{(n-1)(n-2)/2} (x - q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\ &= -[n] q^{n-1} (-1)^{n-1} q^{(n-1)(n-2)/2} (x - q^{-n+2}(q^{-1}a))_q^{n-1} \\ &= -[n] q^{n-1} (aq^{-1} - x)_q^{n-1} \end{aligned}$$

$$= -[n](a - qx)_q^{n-1}$$

3.

$$\begin{aligned} D_q \left(\frac{1}{(a-x)_q^n} \right) &= \frac{(a-x)_q^n D_q 1 - 1 \cdot D_q (a-x)_q^n}{(a-qx)_q^n (a-x)_q^n} \\ &= \frac{-D_q (a-x)_q^n}{(a-qx)_q^n (a-x)_q^n} \\ &= \frac{[n](a-qx)_q^{n-1}}{(a-qx)_q^n (a-x)_q^n} \\ &= \frac{[n](a-qx)(a-q^2x) \dots (a-q^{n-2}qx)}{(a-x)_q^n (a-qx)(a-q^2x) \dots (a-q^{n-1}qx)} \\ &= \frac{[n]}{(a-x)_q^n (a-q^n x)} \\ &= \frac{[n]}{(a-x)_q^n (a-q^n x)} \\ &= \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}} \end{aligned}$$

(Yardımcı 2005).

3.6. q-Trigonometrik Fonksiyonlar

q-trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\begin{aligned} \sin_{q^x} &= \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \quad \text{SiN}_{q^x} = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \\ \cos_{q^x} &= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \quad \text{COS}_{q^x} = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \\ \text{SiN}_{q^x} &= \frac{e^{ix}_{1/q} - e^{-ix}_{1/q}}{2i} = \sin_{1/q^x} \end{aligned}$$

ve

$$\text{COS}_{q^x} = \frac{e^{ix}_q + e^{-ix}_q}{2} = \cos_{1/q^x}$$

$$\begin{aligned}
\cos_{q^x} \cos_{q^x} &= \frac{e^{ix}_q \cdot E^{ix}_q + e^{ix}_q E^{-ix}_q + e^{ix}_q E^{ix}_q + e^{-ix}_q E^{-ix}_q}{4} \\
&= \frac{2 + e^{ix}_q E^{ix}_q + e^{-ix}_q E^{ix}_q}{4} \\
\sin_{q^x} \sin_{q^x} &= \frac{e^{ix}_q E^{ix}_q - e^{ix}_q E^{-ix}_q - e^{-ix}_q E^{ix}_q + e^{-ix}_q E^{-ix}_q}{-4} \\
&= -\frac{e^{ix}_q E^{ix}_q + e^{-ix}_q E^{-ix}_q - 2}{4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$\cos_{q^x} \cos_{q^x} + \sin_{q^x} \sin_{q^x} = 1$ ifadesi $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$ nin q-benzeridir.

Şimdi de q trigonometrik fonksiyonların türevlerini zincir kuralından yararlanarak hesaplayalım $u = u(x) = ix$, $f(x) = e_q^x$ olarak seçelim.

1.

$$\begin{aligned}
D_q \sin_{q^x} &= D_q \left(\frac{e^{ix}_q - e^{-ix}_q}{2i} \right) \\
&= \frac{1}{2i} (D_q e^{ix}_q - D_q e^{-ix}_q) \\
&= \frac{1}{2i} (ie_q^{ix} + ie_q^{-ix}) \\
&= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \\
&= \cos_{q^x}
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
D_q \cos_{q^x} &= D_q \left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (ie_q^{ix} - ie_q^{-ix}) \\
&= \frac{i}{2} (e_q^{ix} - e_q^{-ix})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2i}(e_q^{-ix} - e_q^{ix}) \\
&= -\sin_{q^x}
\end{aligned}$$

3

$$\begin{aligned}
D_q \sin_{q^x} &= D_q \left(\frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \right) \\
&= \frac{1}{2i}(iE_q^{iqx} + iE_q^{-iqx}) \\
&= \frac{1}{2}(E_q^{iqx} + E_q^{-iqx}) \\
&= \cos_{q^x}
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
D_q \cos_{q^x} &= D_q \left(\frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}(iE_q^{iqx} - iE_q^{-iqx}) \\
&= \frac{i}{2}(E_q^{iqx} - E_q^{-iqx}) \\
&= \frac{1}{2i}(E_q^{-iqx} - E_q^{iqx}) \\
&= -\sin_{q^x}
\end{aligned}$$

(Yardımcı 2005).

3.7. q – İntegral

Tanım 3.7.1. $D_q F(x) = f(x)$ ise F ye nin q karşıt türevi denir ve

$$\int f(x) d_{q^x}$$

ile gösterilir. Analizdekine benzer olarak

$$D_q g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$$

dir. Çünkü, $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ bir formal kuvvet serisine eşitse, $D_q g(x) = 0$

olduğundan her i için $q^i a_i = a_i$ bulunur. Bu $i \in \mathbb{Z}^+$ için $a_i = 0$

veg fonksiyonu sabit bir fonksiyonudur, anlamına gelir.

Kuantum analizde değişken dönüşümü yalnızca $u = u(x) = ax^\beta$ biçimindeki fonksiyonlara uygulanabilir. $F(x)$, f nin bir q -karşıt türevi olmak üzere,

$$\int f(u) d_{q^u} = F(u) = F(u(x))$$

dir.(Vulaş 2009).

Teorem 3.7.1

$$\int f(x) d_{q^x} = (1 - q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x)$$

İspat 3.7.1. $f(x)$ keyfi bir fonksiyon olsun f fonksiyonun q karşıt türevi $F(x)$ fonksiyonunu oluşturmak için $M_q(F(x)) = F(qx)$ doğrusal operatörünü tanımlayalım. M_q Operatörü ve q türev tanımından

$$\frac{1}{(q-1)x} (M_q - 1)F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)x} = f(x)$$

eşitliği kolayca görülür.

$$F(x) = \frac{1}{1 - M_q} ((1 - q)xf(x))$$

$$= (1 - q)(xf(x) + qxf(qx) + q^2xf(q^2x) + \dots)$$

$$= (1 - q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) \text{ ve}$$

$$\int f(x) d_{q^x} = (1 - q)x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x)$$

bulunur. Bu seriye f fonksiyonunun Jackson integrali denir.(Vulaş 2009).

Teorem 3.7.2. $0 < |q| < 1$ olsun uygun bir $0 \leq a < 1$ için $|f(x)x^a|$, $[0, A]$ Aralığı üzerinde sınırlıysa

$$\int f(x) d_{q^x} = x(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) \quad (3.2)$$

ile tanımlanan jackson integrali $(0, A]$ üzerinde f fonksiyonunun q karşıtı türevi olan bir F fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca $F(0) = 0$ olmak üzere F fonksiyonu $x = 0$ da sürekli dir. (Vulaş 2009).

İspat 3.7.2 $(0, A]$ Üzerinde $|f(x)x^a| < M$ olsun. Herhangi $0 \leq x < A, i \in \mathbb{Z}^+$ için

$$|f(q^i x)((q^i x)^a)| < M \Rightarrow |f(q^i x)| < M(q^i x)^{-a}$$

dir. Böylece, $0 < x \leq A$ için

$$|q^i f(q^i x)| < M x^{-a} (q^{1-a})^i$$

bulunur. $1 - a > 0$ ve $0 < q < 1$ den dolayı, (3.2) daki serinin genel terimi yakınsak bir geometrik serisinin genel terimiyle sınırlı olduğundan (3.2) in sağ tarafı uygun bir F fonksiyonun noktasal olarak yakınsar. (3.2) dan $F(0) = 0$ olduğu görülür. $F(X)$ in $x = 0$ da sürekli olduğunu gösterelim. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x| < \delta$ oldukça

$$\begin{aligned} |F(x) - F(0)| &= \left| x(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) \right| \\ &< (1-q)|x| \sum_{i=0}^{\infty} M x^{-a} (q^{1-a})^i \\ &< \frac{M \delta^{1-a} (1-q)}{1 - q^{1-a}} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

sağlanır. F fonksiyonun $x = 0$ da sürekli olduğu görülür. Ayrıca $0 < x < A$ ve $0 < q < 1$ olduğundan $0 < qx \leq A$ dir ve F fonksiyonun q -diferansiyellesebilir olduğu ve f nin q -karşıtı türevi olduğu açıkça görülür. (Vulaş. 2009)

Tanım 3.7.2 $0 < a < b$ olsun. Belirli q -integral,

$$\int_0^b f(x) d_{q^x} = b(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i b) \quad (3.3)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x) d_{q^x} = \int_0^b f(x) d_{q^x} - \int_0^a f(x) d_{q^x} \quad (3.4)$$

eşitliğiyle tanımlanır.

$0 < \epsilon < b$ olmak üzere $[\epsilon, b]$ üzerinde (3.3) toplamı sonsuz sayıda terimden oluşur ve bu Riemann toplamıdır. Buradan $q \rightarrow 1$ için $b(1-q)q^i \rightarrow 0$ ve toplamı $[\epsilon, b]$ üzerinde Riemann integraline yakınsar. ϵ keyfi olduğundan f fonksiyonu kapalı aralığında sürekli ve

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^b f(x) d_{q^x} = \int_0^b f(x) dx$$

gerçeklenir. (Vulaş 2009).

Tanım 3.7.3 f fonksiyonunun $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *daki* genelleştirilmiş q -integrali,

$$\int_0^\infty f(x) d_{q^x} = \sum_{i=-\infty}^\infty \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x) d_{q^x}$$

toplamıyla tanımlanır.

$$\int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x) d_{q^x} = (1-q)q^i f(q^i)$$

olduğundan

$$\int_0^\infty f(x) d_{q^x} = (1-q) \sum_{i=-\infty}^\infty q^i f(q^i) \quad (3.5)$$

olarak elde edilir. (Vulaş 2009).

Önerme 3.7.1 $x^a f(x)$, $a < 1$ iken $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda ve $a > 1$ iken yeterince büyük x ler için sınırlıysa genelleştirilmiş q integrali yakınsaktır.

İspat 3.7.2 (3.5)ın sağındaki seriyi

$$\sum_{i=-\infty}^\infty q^i f(q^i) = \sum_{i=1}^\infty q^{-i} f(q^{-i}) + \sum_{i=0}^\infty q^i f(q^i)$$

şeklinde ikiye ayıralım. İkinci toplam $(0,1]$ Aralığındaki q -integralidir. Verilen birinci koşul altında toplamın yakınsaklığını gösterilir. Birinci toplam yeterince büyük x ler ve $a > 1$ koşulunu sağlayan bir α için $|x^\alpha f(a)| < M, (M > 0)$

olduğundan yeterince büyük i lerde

$$|q^{-i} f(q^{-i})| = q^{i(\alpha-1)} |q^{-\alpha i} f(q^{-i})| < M q^{i(\alpha-1)}$$

bulunur. Buna göre birinci serinin genel terimi yakınsak bir geometrik serinin genel terimiyle üstten sınırlandırıldığından mutlak yakınsaktır. (Vulaş. 2009)

Teorem 3.7.3 (q-İntegralin Temel Teoremi): $0 \leq a < b \leq \infty$ ve f fonksiyonunun bir karşıt türevi F olsun $F, x = 0$ da sürekliyse

$$\int_a^b f(x) d_{q^x} = F(b) - F(a)$$

dır. (Vulaş 2009).

İspat 3.7.3 F fonksiyonu, $x = 0$ da sürekli olduğundan, bir sabit farkıyla Jackson formülüyle verilir

$$F(x) = x(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) + F(0)$$

buradan

$$\int_0^a f(x) d_{q^x} = F(a) - F(b)$$

ve sonlu bir b için

$$\int_0^b f(x) d_{q^x} = F(b) - F(a)$$

olduğundan iddia kolaylıkla elde edilir. (Vulaş 2009).

Sonuç 3.7.1 $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda $f'(x)$ varsa ve $x = 0$ da sürekliyse

$$\int_a^b D_q f(x) d_{q^x} = f(b) - f(a) \quad (3.6)$$

dir.

İspat 3.7.1. L Hospital kuralıyla

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_q f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(qx) - f(x)}{x(q - 1)} = f'(0)$$

elde edilir. $D_q f(0) = f'(0)$ tanımlanarak, $D_q f(x)x = 0$ da sürekli yapılır. q-integralin temel teoreminden sonuca ulaşılır. Çarpılan iki fonksiyonun q-türevi

$$D_q(f(x) \cdot g(x)) = f(x)D_q g(x) + g(qx) \cdot D_q f(x) \quad (3.7)$$

(* 3.6) ve (3.7)den,

$$\int_a^b f(x) D_q g(x) d_{q^x} = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(qx) \cdot D_q f(x) d_{q^x} \quad (3.8)$$

q-analizdeki kısmi integrasyon formülü elde edilir. (Vulaş 2009).

3.8 q- Gamma ve Beta Fonksiyonları.

Gamma fonksiyonun q-benzeri

$$\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1} E_q((1-q)qx) d_{q^x}, t > 0$$

İntegraliyle tanımlanır. jackson integrali yardımıyla gamma fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \Gamma_q(t) &= \int_0^\infty x^{t-1} E_q((1-q)qx) d_{q^x}, t > 0 \\ &= \left(\frac{1}{1-q}\right)^t \int_0^\infty x^{t-1} E_q(qx) d_{q^x} \\ &= \left(\frac{1}{1-q}\right)^{t-1} \sum_{i=-\infty}^\infty q^{ti} (q^{i+1}; q)_\infty \\ &= \frac{(q; q)_\infty}{(1-q)^{t-1}} \sum_{i=0}^\infty \frac{q^{ti}}{(q; q)_i} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur ve buradan gamma fonksiyonu,

$$\Gamma_q(t) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^t; q)_\infty} (1 - q)^{1-t} \quad (3.9)$$

olarak kutupları hariç genişletilir.

Gamma fonksiyonunun sağladığı bazı eşitlikler q-Gamma fonksiyonu için de gerçekleşir:

q gamma fonksiyonun tanımından

$$\Gamma(t + 1) = t\Gamma(t)$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, n \in \mathbb{N}$$

fonksiyonel eşitliklerinin q-benzerleri,

$$\begin{aligned} \Gamma_q(t) &= \frac{(q; q)_\infty}{(q^t; q)_\infty} (1 - q)^{1-t} \\ &= \frac{(q; q)_\infty}{(1 - q^t)(q^{t+1}; q)_\infty} (1 - q)^{1-t-1}(1 - q) \\ &= \frac{1 - q}{1 - q^t} \Gamma_q(t + 1) \end{aligned}$$

ve

$$\Gamma_q(n + 1) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^{n+1}; q)_\infty} (1 - q)^{-n} = \frac{(q; q)_n}{(1 - q)^n} = [n]!$$

olarak elde edilir. Beta fonksiyonunun q-benzeri:

$$\beta_q(t, s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t + s)} \quad (3.10)$$

olarak tanımlanır. Tanımından

$$\beta_q(t, s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t + s)} = \beta_q(s, t)$$

Simetri özelliği kolayca görülür.

(3.9) ve (3.10) ile verilen q-gamma tanımı yerine yazılırsa

$$\beta_q(t, s) = (1 - q) \frac{(q, q^{t+s}; q)_\infty}{(q^t, q^s; q)_\infty}$$

bulunur. $t > 0$ ise q-binom teoreminden,

$$\begin{aligned}
\beta_q(t, s) &= (1 - q) \frac{(q; q)_\infty}{(q^s; q)_\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(q^s; q)_i}{(q; q)_i} q^{ti} \\
&= (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(q^{i+1}; q)_\infty}{(q^{i+s}; q)_\infty} q^{ti} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. q-beta fonksiyonunun simetri özeliği ve q-binom teoremi kullanarak

$$\beta_q(t, s) = (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(q^{i+1}; q)_\infty}{(q^{i+t}; q)_\infty} q^{si}, s > 0$$

(3.11) de $q^n = t$ dersek,

$$\beta_q(t, s) = (1 - q) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(q^t; q)_i}{(q^s t; q)_i} q^{ti}$$

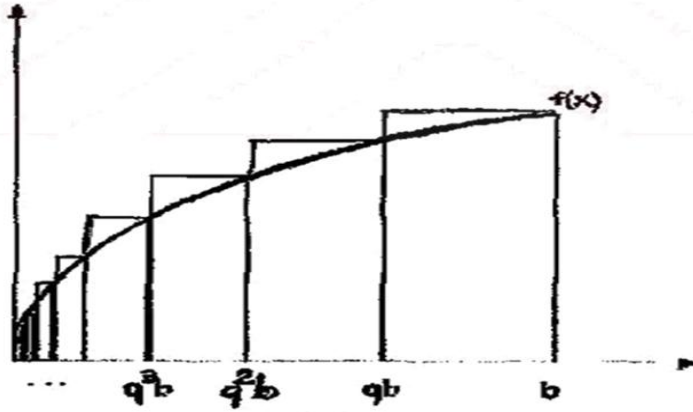
belirli q- integral tanımından

$$\beta_q(t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1 - qx)_q^{s-1} dx \quad s, t > 0$$

q- beta fonksiyonunun integral tanımına ulaşılır.(Vulaş 2009).

3.9. q-İntegralin Geometrik Anlamı

q- integralinin geometrik anlamı aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi sonsuz çokluktaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır.



Şekil 3.1.q-İntegralin Geometrik Anlamı

Şekilden de görüldüğü gibi $[a, b]$ aralığını sonsuz çoklukta aralıklara bölünmüştür. Bu alanların toplamı bize q- integrali verecektir. Bu durum analizdeki belirli integralin tanımına benzemektedir. Eğer $q \rightarrow 1$ için limit alırsak,

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 - q)b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b)$$

ifadesinde dikdörtgenlerin genişliği sıfıra yaklaşacak ve bu durum bu limiti Riemann toplamına yakınsayacaktır. O halde $f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ise,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \int_0^b f(x) d_q x = \int_0^b f(x) dx$$

olacaktır.

$$\begin{aligned} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x) d_q x &= \int_0^{q^j} f(x) d_q x - \int_0^{q^{j+1}} f(x) d_q x \\ &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k} f(q^{j+k}) - (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^{j+k+1} f(q^{j+k+1}) \end{aligned}$$

sonuç olarak

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x) d_q x = (1-q)q^j f(q^j)$$

elde edilecektir. (Yardımcı 2005).

3.10. q-İntegral ile İlgili Bazı Önemli Lemma ve Teoremler:

Lemma 3.10.1. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olsun. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir ise bu takdirde

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} = \frac{q(b-a)}{1+q} \int_0^1 (1 - (1+q)t) D_q f((1-t)a + tb) d_q t.$$

eşitliği geçerlidir (Noor et al.2015).

Teorem 3.10.1. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olarak verilsin. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|D_q f|^r, r \geq 1$ olmak üzere konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \right| \leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left[\frac{q(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(a)|^r + \frac{q(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(b)|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Noor et al. 2015).

Teorem 3.10.2. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olarak verilsin. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|D_q f|^r, p, r > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ olmak üzere konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left| \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x \right| \leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\frac{q(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(a)|^r + \frac{q(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(b)|^r \right]^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Noor et al. 2015).

Teorem 3.10.3. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olarak verilsin. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|D_q f|^r, p, r > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ olmak üzere quasi-konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left| \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x \right| \leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} [\sup\{|D_q f(a)|, |D_q f(b)|\}] \right)^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Noor et al. 2015).

Teorem 3.10.4. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olarak verilsin. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|D_q f|^r, r > 1$ olmak üzere quasi-konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\left| \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x \right| \leq \frac{q^2(b-a)(2+q+q^3)}{(1+q)^4} (\sup\{|D_q f(a)|, |D_q f(b)|\})^{\frac{1}{r}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Noor et al. 2015).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, araştırmada derlenen bulgulara yer verilecektir.

4.1. q-Steffensen's Eşitsizliği

Öncelikle literatürde Steffensen eşitsizliği olarak bilinen eşitlik verilmiştir.

Teorem 4.1.1. f ve $g[a, b]$ aralığında integrallenebilir iki fonksiyon olsun. f fonksiyonu azalan ve $\forall x \in (a, b)$, $0 \leq g(x) \leq 1$, $\lambda = \int_a^b g(x)dx$ olarak verilsin. Bu takdirde

$$\int_{b-\lambda}^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^{a+\lambda} f(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

Tanım 4.1.1. $x \in [a, b]$ ve $qx \in [a, b]$ olmak üzere eğer $f(qx) \leq f(x)$ ($f(qx) \geq f(x)$) oluyorsa $f(x)$ q-artandır (q-azalandır).

$f(x)$ 'in $[a, b]$ üzerinde q-artan (q-azalan) olması için gerek ve yeter şart $(D_q f)(x) \geq 0$ ($(D_q f)(x) \leq 0$) olmasıdır.

Ayrıca, eğer $f(x)$ artan (azalan) ise bu durumda $f(x)$ q-artandır (q-azalandır).

Steffensen eşitsizliğinin q-analog versiyonu aşağıdaki teoremde ispat edilmiştir.

Teorem 4.1.2. $0 < q < 1, b > 0, n \in \mathbb{Z}^+$ olduğunu kabul edelim. $a = bq^n$ olmak üzere $F, G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, fonksiyonları verilsin ve $[a, b]$ üzerinde F q-azalan, $0 \leq G \leq 1$ olsun. Ayrıca $k, l \in \{0, 1, \dots, n\}$ olmak üzere $[a, b]$ üzerinde

$$b - c_l \leq \int_a^b G(x)d_q x \leq c_k - a, \quad F \geq 0 \text{ ise}$$

ve

$$c_k - a \leq \int_a^b G(x)d_q x \leq b - c_l, \quad F \leq 0 \text{ ise}$$

şartları sağlansın. Bu takdirde

$$\int_{c_l}^b F(x) d_q x \leq \int_a^b F(x) G(x) d_q x \leq \int_a^{c_k} F(x) d_q x. \quad (4.1)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

İspat: Yalnızca (4.1) eşitsizliğinin sol tarafı ve $F \geq 0$ durumu için ispat yapılacaktır. Diğer kısımların ispatı benzer şekilde görülebilir. Yapılacak olan ispat Steffensen's eşitsizliğinin ispatına oldukça benzer bir yolla elde edilecektir. Teoremin şartları ve F 'nin q -azalan oluşu dikkate alınırsa $j = 0, 1, \dots, l-1$, için $F(c_l) \geq F(c_j)$ ve $j = 0, 1, \dots, n-l$ için $F(c_{l+j}) \geq F(c_l)$ yazılır.

$$\begin{aligned} & \int_a^b F(x) G(x) d_q x - \int_{c_l}^b F(x) d_q x \\ &= \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x + \int_{c_l}^b F(x) G(x) d_q x - \int_{c_l}^b F(x) d_q x \\ &= \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x - \int_{c_l}^b F(x) [1 - G(x)] d_q x \\ &= \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x - (1-q)b \sum_{j=0}^{l-1} q^j F(c_j) [1 - G(c_j)] \\ &\geq \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x - (1-q)b \sum_{j=0}^{l-1} q^j F(c_l) [1 - G(c_j)] \\ &= \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x - F(c_l)(1-q)b \sum_{j=0}^{l-1} q^j + F(c_l)(1-q)b \sum_{j=0}^{l-1} q^j G(c_j) \\ &= \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x - F(c_l)(b - c_l) + F(c_l) \int_{c_l}^b G(x) d_q x \\ &\geq \int_a^{c_l} F(x) G(x) d_q x - F(c_l) \int_a^b G(x) d_q x + F(c_l) \int_{c_l}^b G(x) d_q x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^{c_l} F(x)G(x)d_q x - F(c_l) \left[\int_a^b G(x)d_q x - \int_{c_l}^b G(x)d_q x \right] \\
&= \int_a^{c_l} F(x)G(x)d_q x - F(c_l) \int_a^{c_l} G(x)d_q x = \int_a^{c_l} [F(x) - F(c_l)]G(x)d_q x \\
&= (1-q)c_l \sum_{j=0}^{n-l-1} q^j [F(c_{l+j}) - F(c_l)]G(c_{l+j}) \geq 0.
\end{aligned}$$

4.2. q-Grüss' Eşitsizliği ve Uygulamaları

Literatürde iyi bilinen Grüss' eşitsizliği şu şekilde ifade edilebilir.

Teorem 4.2.1. F ve G fonksiyonları $[a, b]$ aralığında integrallenebilen iki fonksiyon olsun. m, M, φ, ϕ reel sabitler olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $m \leq F(x) \leq M, \varphi \leq G(x) \leq \phi$ verilsin. Bu takdirde

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b FG dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F dx \int_a^b G dx \right| \leq \frac{1}{4} (M-m)(\phi-\varphi).$$

eşitsizliğigeçerlidir (Gauchman 2004).

Teorem 4.2.2. (Discrete Grüss' Eşitsizliği) $u_j \geq 0$ ve $\sum_{j=1}^n u_j \neq 0$. ve $x_j, y_j, u_j, j = 1, \dots, n$ reel sayılar olmak üzere $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), u = (u_1, \dots, u_n)$, verilsin. m, M, φ, ϕ reel sabitler olmak üzere $m \leq x_j \leq M, \varphi \leq y_j \leq \phi, j = 1, \dots, n$, olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j y_j}{\sum_{j=1}^n u_j} - \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j y_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right) \right| \leq \frac{1}{4} (M-m)(\phi-\varphi).$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

İspat: $T(x, y)$ aşağıdaki şekilde verilsin.

$$T(x, y) = \frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j y_j}{\sum_{j=1}^n u_j} - \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j y_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right)$$

Bu durumda,

$$T(x, x) = \frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j^2}{\sum_{j=1}^n u_j} - \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right)^2$$

olacaktır.

Ağırlıklı kareli-aritmetik ortalama eşitsizliği gereği $T(x, x) \geq 0$ olmalıdır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $T^2(x, y) \leq T(x, x)T(y, y)$. Gerekli hesaplama yapılırsa

$$T(x, x) = \left(M - \frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} - m \right) - \frac{1}{\sum_{j=1}^n u_j} \sum_{j=1}^n (M - x_j)(x_j - m)u_j.$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$T(x, x) \leq \left(M - \frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} \right) \left(\frac{\sum_{j=1}^n u_j x_j}{\sum_{j=1}^n u_j} - m \right).$$

yazılır.

Aritmetik-Geometrik ortalama eşitsizliğinden $T(x, x) \leq \frac{(M-m)^2}{4}$ ve $T(y, y) \leq \frac{(\phi-\varphi)^2}{4}$ elde edilir. Dahası

$$T^2(x, y) \leq T(x, x)T(y, y) \leq \frac{(M-m)^2(\phi-\varphi)^2}{16}.$$

yazılır ki buradan $|T(x, x)| \leq (1/4)(M-m)(\phi-\varphi)$.

Teorem 4.2.3.(q-Grüss' Eşitsizliği) m, M, φ, ϕ reel sabitler olmak üzere $\forall x \in [a, b]$ için $m \leq F(x) \leq M, \varphi \leq G(x) \leq \phi$ olarak verilsin. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)G(x)d_q x - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x)d_q x \int_a^b G(x)d_q x \right| \leq \frac{1}{4}(M-m)(\phi-\varphi).$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

q-Grüss' eşitsizliğinin bir uygulaması olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.2.4. m, M reel sabitler, r negatif olmayan bir tamsayı ve $\forall x \in [a, b]$ için $m \leq (D_q^{r+1}f)(x) \leq M$ şartını sağlayan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde

$$\left| \int_a^b R_{q,r,f}(a, x) - [(D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a)] \frac{(b-qa)_q^{r+1}}{[r+2]!} \right| \leq \frac{(b-a)_q^{r+2}}{4[r+1]!} (M-m). \quad (4.2)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

İspat: Kabul edelim ki

$$F(x) = (D_q^{r+1}f)(x), \quad G(x) = \frac{(b - qx)_q^{r+1}}{[r+1]!}.$$

bu durumda

$$(b - qx)_q^{r+1} = (b - qx)(b - q^2x) \dots (b - q^{r+1}x) \leq (b - qa)(b - q^2a) \dots (b - q^{r+1}a) = (b - qa)_q^{r+1}$$

olarak yazılır.

Ayrıca, $m \leq F(x) \leq M$, $0 \leq G(x) \leq ((b - qa)_q^{r+1})/([r+1]!)$. dir.

q-Grüss' eşitsizliği yardımıyla,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)G(x) d_q x - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b F(x) d_q x \int_a^b G(x) d_q x \right| \leq \frac{1}{4} (M - m) \frac{(b - qa)_q^{r+1}}{[r+1]!} \quad (4.3)$$

olduğu açıktır. Taylor kalan formülü yardımıyla

$$\int_a^b F(x)G(x) d_q x = \int_a^b R_{q,r,f}(a, x) d_q x, \quad (4.4)$$

$$\int_a^b F(x) d_q x = \int_a^b (D_q^{r+1}f)(x) d_q x = (D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a) \quad (4.5)$$

Gerekli hesaplamalar yapılarak,

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x) d_q x &= \frac{1}{[r+1]!} \int_a^b (b - qx)_q^{r+1} d_q x = -\frac{1}{[r+2]!} \int_a^b D_q (b - x)_q^{r+2} d_q x \\ &= \frac{1}{[r+2]!} (b - a)_q^{r+2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4)-(4.6) da elde edilen ifadeler (4.3) te yerine yazılırsa,

$$\left| \int_a^b R_{q,r,f}(a, x) - \frac{1}{b-a} [(D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a)] \frac{(b-a)_q^{r+2}}{[r+2]!} \right| \leq \frac{b-a}{4} \frac{(b-qa)_q^{r+1}}{[r+1]!}.$$

bulunur.

Sonuç 4.2.1. $[a, b]$ üzerinde $m \leq (D_q f)(x) \leq M$ verilsin. Bu durumda

$$\left| \int_a^b f(x) d_q x - \frac{1}{1+q} [(bq-a)f(a) + (b-qa)f(b)] \right| \leq \frac{(b-a)_q^2}{4} (M-m).$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

İspat. (4.2) eşitsizliğinde $r = 0$ alınarak ispat tamamlanır.

4.3. q-Chebyshev's Eşitsizliği ve Uygulamaları

Chebyshev's eşitsizliğinin q-analogversiyonu aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde birlikte q-artan veya q-azalan fonksiyonlar olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b F(x)G(x) d_q x \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x) d_q x \int_a^b G(x) d_q x \quad (4.7)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

Eğer fonksiyonlardan biri q-artan diğeri q-azalan ise bu durumda (4.7) eşitsizliği yön değiştirir.

q-Chebyshev's eşitsizliğinin bir uygulaması aşağıdaki teoremden ispat edilmiştir.

Teorem 4.3.2. (i) $D_q^{r+1}f$ nin $[a, b]$ üzerinde q-artan olduğunu kabul edelim $D_q^{r+2}f \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & -[(D_q^{r+1}f)(b) - (D_q^{r+1}f)(a)] \frac{(b-a)_q^{r+2}}{4[r+1]!} \\ & \leq \int_a^b R_{q,r,f}(a,x) d_q x - [(D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a)] \frac{(b-qa)_q^{r+1}}{[r+2]!} \leq 0 \quad (4.9) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

(ii) $D_q^{r+1}f$ nin $[a, b]$ üzerinde q-azalan olduğunu kabul edelim ($D_q^{r+2}f \leq 0$ olsun).

Bu durumda

$$0 \leq \int_a^b R_{q,r,f}(a,x) d_q x - [(D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a)] \frac{(b-qa)_q^{r+2}}{[r+2]!}$$

$$\leq [(D_q^{r+1}f)(a) - (D_q^{r+1}f)(b)] \frac{(b-a)_q^{r+2}}{4[r+1]!} \quad (4.10)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

İspat. $D_q^{r+1}f$ nin $[a, b]$ üzerinde q -artan ve

$$F(x) = (D_q^{r+1}f)(x), \quad G(x) = \frac{(b-qx)_q^{r+1}}{[r+1]!}$$

olduğunu kabul edelim. Bu takdirde q -Chebyshev eşitsizliği, $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ üzerinde birlikte q -artan oldukları kullanılırsa

$$\int_a^b F(x)G(x)d_q x \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b F(x)d_q x \int_a^b G(x)d_q x \quad (4.11)$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\int_a^b F(x)G(x)d_q x = \int_a^b (D_q^{r+1}f)(x) \frac{(b-qx)_q^{r+1}}{[r+1]!} d_q x = \int_a^b R_{q,r,f}(a,x)d_q x, \quad (4.12)$$

$$\int_a^b F(x)d_q x = \int_a^b (D_q^{r+1}f)(x)d_q x = (D_q^r f)(x)|_a^b = (D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a) \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x)d_q x &= \int_a^b \frac{(b-qx)_q^{r+1}}{[r+1]!} d_q x = -\frac{1}{[r+2]!} \int_a^b D_q (b-x)_q^{r+2} d_q x \\ &= -\frac{1}{[r+2]!} (b-x)_q^{r+2} \Big|_a^b = \frac{(b-a)_q^{r+2}}{[r+2]!} \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. (4.12) – (4.14) deki ifadeler (4.11) de yerine yazılırsa

$$\int_a^b R_{q,r,f}(a,x)d_q x \leq \frac{1}{b-a} [(D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a)] \frac{(b-a)_q^{r+2}}{[r+2]!}$$

bulunur ki

$$\int_a^b R_{q,r,f}(a,x)d_q x - [(D_q^r f)(b) - (D_q^r f)(a)] \frac{(b-a)_q^{r+2}}{[r+2]!} \leq 0.$$

elde edilmiş olur.

Teoremin şartları ve Teorem 4.2.4 kullanılarak sol tarafın ispatı görülür. D_q^{r+1} nin q-azalan olması durumunda da benzer ispat yapılır.

Teorem 4.3.2 de eğer $r = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1.

i) $D_q^2 f \geq 0$ ise bu durumda

$$-\frac{1}{4}[(D_q f)(b) - (D_q f)(a)](b-a)_q^2 \leq \int_a^b f(x) d_q x - \frac{1}{1+q} [(bq-a)f(a) + (b-qa)f(b)] \leq 0 \quad (4.15)$$

ii) $D_q^2 f \leq 0$ ise bu durumda

$$0 \leq \int_a^b f(x) d_q x - \frac{1}{1+q} [(bq-a)f(a) + (b-qa)f(b)] \leq \frac{1}{4}[(D_q f)(a) - (D_q f)(b)](b-a)_q^2 \quad (4.16)$$

Gauchman 2004 yılındaki çalışmasında q-konvekslikle ilişkili aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir.

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde q-konveks olsun ve $F(x) = (D_q f)(x)$, $G(x) = x - a$ verilsin. Bu durumda $F(x)$ ve $G(x)$ fonksiyonları q-artandır. q-Chebyshev's eşitsizliği yardımıyla,

$$\int_a^b (x-a)(D_q f)(x) d_q x \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b (D_q f)(x) d_q x \int_a^b (x-a) d_q x \quad (4.17)$$

yazılır. Kısmi integrasyon uygulanarak

$$\int_a^b (x-a)(D_q f)(x) d_q x = (b-a)f(b) - \int_a^b f(qx) d_q x \quad (4.18)$$

bulunur. Ayrıca

$$\int_a^b (D_q f)(x) d_q x = f(b) - f(a) \quad (4.19)$$

ve

$$\int_a^b (x-a) d_q x = \frac{(x-a)_q^2}{1+q} \Big|_a^b = \frac{(b-a)_q^2}{1+q} \quad (4.20)$$

elde edilir.

(4.18)-(4.20) ifadeleri (4.17) de yerine yazılır, eğer $f(x)$ q -convex ise bu durumda

$$\int_a^b f(qx) d_q x \leq \frac{1}{1+q} [(b-qa)f(a) + (qb-a)f(b)] \quad (4.21)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

4.4. q - Hermite- Hadamard Eşitsizliği

$f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde konveks olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.22)$$

eşitsizliği literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir.

Teorem 4.4.1. q - Hermite- Hadamard Eşitsizliği

i) f fonksiyonu q -konveks ve monoton olsun. Ayrıca f fonksiyonu q -azalan iken $c_k \geq (aq+b)/(1+q)$, ve f fonksiyonu q -artan iken ise $c_k \leq (aq+b)/(1+q)$, olarak verilsin. Bu takdirde

$$f(c_k) - \frac{a(1-q)}{b-qa} f(a) \leq \frac{1}{b-qa} \int_a^b f(x) d_q x \quad (4.23)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(ii) f fonksiyonu q -konveks ve monoton olsun. Ayrıca f fonksiyonu q -azalan iken $c_k \geq (aq+b)/(1+q)$, ve f fonksiyonu q -artan iken ise $c_k \leq (aq+b)/(1+q)$, olarak verilsin. Bu takdirde

$$f(c_k) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(qx) d_q x \quad (4.24)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(iii) f fonksiyonu q -konveks ise bu durumda

$$\int_a^b f(x) d_q x \leq \frac{1}{1+q} [(bq-a)f(a) + (b-qa)f(b)] \quad (4.25)$$

$$\int_a^b f(qx) d_q x \leq \frac{1}{1+q} [(b-qa)f(a) + (qb-a)f(b)] \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + f(qx)}{2} d_q x \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (4.27)$$

eşitsizliği geçerlidir (Gauchman 2004).

Teorem 4.4.2. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olarak verilsin. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|D_q f|^r, r \geq 1$ olmak üzere m -konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\frac{q(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(a)|^r + \frac{q(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f\left(\frac{b}{m}\right)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|D_q f|^r$ fonksiyonunun konveksliği, Lemma 3.10.1 ve Power-Mean eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x - \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} \right| = \left| \frac{q(b-a)}{1+q} \int_0^1 (1 - (1+q)t) D_q f((1-t)a + tb) d_q t \right| \\ & \leq \left| \frac{q(b-a)}{1+q} \int_0^1 (1 - (1+q)t)^{1-\frac{1}{r}} (1 - (1+q)t)^{\frac{1}{r}} D_q f((1-t)a + tb) d_q t \right| \\ & \leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\int_0^1 |1 - (1+q)t| d_q t \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |1 - (1+q)t| |D_q f((1-t)a + tb)|^r d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\int_0^1 |1-(1+q)t| \left[(1-t) |D_q f(a)|^r + mt \left| D_q f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^r \right] d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{1-\frac{1}{r}} \left(\frac{q(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(a)|^r + \frac{q(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} m \left| D_q f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.3. $f: I = [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° (I 'nin içi) üzerinde bir q -diferensiyellenebilen fonksiyon olarak verilsin. D_q , $0 < q < 1$ olmak üzere I üzerinde sürekli ve integrallenebilir olsun. Eğer $|D_q f|^r, p, r > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1$ olmak üzere m -konveks fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x \right| \\
&\leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{q(1+4q+q^2)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} |D_q f(a)|^r + \frac{q(1+3q^2+2q^3)}{(1+q+q^2)(1+q)^3} m \left| D_q f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^r \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat. $|D_q f|^r$ fonksiyonunun konveksliği, Lemma 3.10.1 ve Hölder eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{qf(a) + f(b)}{1+q} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) d_q x \right| = \left| \frac{q(b-a)}{1+q} \int_0^1 (1-(1+q)t) D_q f((1-t)a + tb) d_q t \right| \\
&\leq \left| \frac{q(b-a)}{1+q} \int_0^1 (1-(1+q)t)^{1-\frac{1}{r}} (1-(1+q)t)^{\frac{1}{r}} D_q f((1-t)a + tb) d_q t \right| \\
&\leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\int_0^1 |1-(1+q)t| d_q t \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |1-(1+q)t| |D_q f((1-t)a + tb)|^r d_q t \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{q(b-a)}{1+q} \left(\frac{q(2+q+q^3)}{(1+q)^3} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |1-(1+q)t| \left[(1-t) |D_q f(a)|^r + mt \left| D_q f\left(\frac{b}{m}\right) \right|^r \right] d_q t \right)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

ispat tamamlanır.

5.TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada kuantum integral ve türevlerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca kuantum hesabın konvekslik kavramı ile ilişkisi incelenerek kuantum integraller içeren bazı eşitsizlikler ele alınmıştır.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar Lemma 3.10.1 e benzer integral özdeşlikleri elde ederek farklı türden konveks fonksiyon sınıfları için yeni integral eşitsizlikler elde edebilir.



KAYNAKLAR

- Adams, R.A. and Essex, C., 2010. Calculus A Complete Course. PearsonCanadaInc., 934 pp, Toronto, Ontario.
- Agarwal, RP., 1969. Certain fractional q -integrals and q -derivatives. Proc. Camb. Philos. Soc. 66, 365-370.
- Ahmad, B, Ntouyas, SK: Boundary value problems for q -difference inclusions. Abstr. Appl. Anal. 2011, 292860.
- Ahmad, B, Ntouyas, SK, Purnaras, IK., 2012. Existence results for nonlocal boundary value problems of nonlinear fractional q -difference equations. Adv. Differ. Equ. 2012, 140.
- Ahmad, B., 2011. Boundary-value problems for nonlinear third-order q -difference equations. Electron. J. Differ. Equ. 2011, 94 (2011)
- Al-Salam, WA., 1966/1967. Some fractional q -integrals and q -derivatives. Proc. Edinb. Math. Soc. 15(2), 135-140.
- Anastassiou, GA., 2011. Intelligent Mathematics: Computational Analysis. Springer, New York.
- Annaby, MH, Mansour, ZS., 2012. q -Fractional Calculus and Equations. Lecture Notes in Mathematics, vol. 2056. Springer, Berlin.
- Bangerezako, G., 2004. Variational q -calculus. J. Math. Anal. Appl. 289, 650-665.
- Bayraktar, M., 2010. Analiz, ISBN 978-605-395-412-5.
- Bayraktar, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1.
- Cerone, P, Dragomir, SS., 2011. Mathematical Inequalities. CRC Press, New York.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 2000. Selected Topics on Hermite-Hadamard Type Inequalities and Applications, RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html> (10.10.2010).
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385.
- Ernst, T., 2000. The history of q -calculus and a new method. UUDM Report 2000:16, Department of Mathematics, Uppsala University.
- Ferreira, R., 2010. Nontrivial solutions for fractional q -difference boundary value problems. Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2010, 70.

- Gauchman, H.,2004. Integral inequalities in q -calculus. *Comput. Math. Appl.* 47, 281-300.
- G.D. Anderson , M.K. Vamanamurthy , M. Vuorinen , Generalized convexity and inequalities *J. Math. Anal. Appl.* 335 (2007) 1294–1308
- Gill, P.M.,Pearce, C.E.M. andPečarić, J.E., 1997. Hadamard's inequality for s -convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 215, 461-470.
- Graef, JR, Kong, L.,2012. Positive solutions for a class of higher-order boundary value problems with fractional q -derivatives. *Appl. Math. Comput.* 218, 9682-9689.
- Greenberg, H.J. andPierskalla, W.P., 1970. A review of quasiconvex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Gürbüz, M., 2013. Farklı Türden Konveks Fonksiyonların Çarpımı Üzerine İntegral Eşitsizlikleri ve Uygulamaları .Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Gürbüz, M. and Yaradılmış, A., 2015. Some generalizations of integral inequalities and their applications, ar Xiv: 1503.02500, submitted.
- Hudzik, H. andMaligranda, L., 1994. Some remarks on s -convex functions. *Aequationes Math.*, 48, 100-111.
- Ion, D.A., 2007. Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasiconvex functions. *Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser.*, 34, 82-87.
- Ismail, MEH, Simeonov, P.,2009. q -Difference operators for orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* 233, 749-761.
- Jackson, FH.,1910. q -Difference equations. *Am. J. Math.* 32, 305-314.
- Kac, V. and Cheung. P.,2001. *Quantum Calculus*. USA, 113, United States of America.
- Kavurmacı, H., 2012. Bazı Farklı Türden Konveks Fonksiyonlar için Ostrowski ve Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S.,Pečarić, J.E. andFink,A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Noor, MA, Noor, KI, Awan, MU.,2015. Some quantum estimates for Hermite-Hadamard inequalities. *Appl. Math. Comput.* 251, 675-679.

- Noor, MA, Noor, KI, Awan, MU.,2015. Some quantum integral inequalities via preinvex functions. Appl. Math. Comput. 269, 242-251.
- Noor, M. A., Noor, K. I., & Awan, M. U. 2015. Some quantum estimates for Hermite–Hadamard inequalities. Applied Mathematics and Computation, 251, 675-679.
- Orlicz, W., 1961. A note on modular spaces I. Bull. Acad. Polon Sci. Ser. Math. Astronom. Phsy., 9, 157-162.
- Pachpatte, BG.,2012. Analytic Inequalities. Atlantis Press, Paris.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Pólya, G, Szegő, G., 1925. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Band 1. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 19. Springer, Berlin.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions. Academic Press, 300pp, New York.
- Sudsutad et al., 2016. Journal of Inequalities and Applications 2016:81 Page 15 of 15.
- Taf, S, Brahim, K, Riahi, L., 2014. Some results for Hadamard-type inequalities in quantum calculus. Matematiche LXIX(2), 243-258.
- Tariboon, J, Ntouyas, SK, Agarwal, P., 2015. New concepts of fractional quantum calculus and applications to impulsive fractional q-difference equations. Adv. Differ. Equ. 2015, 18.
- Tariboon, J, Ntouyas, SK., 2013. Quantum calculus on finite intervals and applications to impulsive difference equations. Adv. Differ. Equ. 2013, 282.
- Tariboon, J, Ntouyas, SK., 2014. Quantum integral inequalities on finite intervals. J. Inequal. Appl. 2014, 121.
- Vulaş, B., 2009. Bazı q- İntegral Dönüşümleri. Yüksek lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Yardımcı, T., 2005. q- Analiz. Yüksek lisans Tezi, Mimar Sinan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Yu, C, Wang, J., 2013. Existence of solutions for nonlinear second-order q-difference equations with first-order q-derivatives. Adv. Differ. Equ. 2013, 124 .

ÖZGEÇMİŞ

1984 yılında Ağrı'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ağrı'da tamamladı. 2002 yılında kayıt yaptırdığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünden 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl İsmet Ömeroğlu İlköğretim Okulunda Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2011 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaptırıp 2015 yılında mezun oldu. 2015 yılında Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisan öğrenimine başladı. Halen Ağrı Merkez İmam Hatip ortaokulunda görevine devam etmektedir. Evli ve iki çocuk babasıdır.