



BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE

YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

SEMİH ÇAVUŞOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Ocak - 2017

Her hakkı saklıdır

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

SEMİH ÇAVUŞOĞLU

TOKAT

Ocak - 2017

Her hakkı saklıdır

Semih ÇAVUŞOĞLU tarafından hazırlanan “Bazı Sınır Değer Problemleri ve Yaklaşım Yöntemleri” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 20 OCAK 2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği İle Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANA BİLİM DALI’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Üye

Doç. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

Üye

Doç. Dr. Ali YAKAR

Üye

Yrd. Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ

Üye

Yrd. Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR



Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun tarih ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ONAY

Prof. Dr. Ebubekir ALTUNTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

20/01/2017

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

SEMİH ÇAVUŞOĞLU

Ocak 2017

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

SEMİH ÇAVUŞOĞLU

GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. OKTAY MUHTAROĞLU

Bu tezde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ile Sturm-Liouville denklemleri özellikleri ve çözümleri üzerinde durulmuş, sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılan matris dönüşümü ve özellikle de Sonlu Farklar yöntemine yer verilmiştir.

Giriş bölümünde sınır değer problemlerinin kullanıldığı bilim dalları ve alanlardan örnekler verilerek, önemi üzerinde durulmuştur. Daha sonra ise sınır değer problemlerinin en önemlilerinden olan Sturm- Liouville denkleminin bazı tanım, teorem ve ispatlara yer verilmiştir. Sınır değer problemleri yaklaşık çözümleri için yapılan nümerik çalışmalar sıralanmıştır. Sonraki bölümlerde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler, sınır değer problemleri ve Sturm-Liouville sınır değer problemleri ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Son bölümde ise yaklaşım yöntemlerinden bazıları uygulanmıştır.

2017, 73 SAYFA

ANAHTAR KELİMELELER: Sınır değer problemi, Sturm-Liouville denklemi, Sonlu farklar yöntemi, Yaklaşım yöntemleri, Özdeğer, İkinci mertebeden diferansiyel denklem

ABSTRACT

MASTER THESIS

SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS AND APPROXIMATION METHODS

SEMİH ÇAVUŞOĞLU

GAZİOSMANPASA UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

SUPERVISOR: PROF. DR. OKTAY MUHTAROĞLU

This thesis has focused on second-order ordinary differential equations with Sturm-Liouville equation features and solutions, matrix transformation used in finding approximate solutions to the boundary value problems and especially Finite Difference method.

In the preamble by giving examples the disciplines and fields using boundary value problems were emphasized. Then, a brief history of Sturm-Liouville, which is one of the most important boundary value problems is given. Numerical studies about approximate solutions of boundary value problems were listed. In the following chapter of the study some definitions theorems and examples related to the second-order ordinary differential equations, boundary value problems and Sturm-Liouville boundary value problems were given. In the last chapter some of the approximation methods were investigated.

2017, 73 PAGE

KEYWORDS: Boundary value Problem, Sturm-Liouville equation, Finite difference method, Approximation method, Eigenvalue, Second order differential equation

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ile birlikte Yrd. Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR ve Araştırma Görevlisi Dr. Hayati OLGAR'a teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen Erbaa Fatih Anadolu Lisesi idarecileri ile özellikle zümre arkadaşlarım Sedat BOZKURT, Nuray LONGA, Emel GÜCÜNCÜ ve Ayşegül BAŞ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Her zaman yanımda olan sevgili eşime ve kızlarım Zeynep Sıla ve Rana'ya sonsuz teşekkürler.

Semih ÇAVUŞOĞLU

Ocak 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Özdeğer ve Özfonksiyon	5
2.2 Lineer Diferansiyel Operatör	5
2.3 Süperpozisyon İlkesi.....	6
2.4 Regüler ve Singüler Denklem.....	6
2.5 Başlangıç Değer Problemi	7
2.6 Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem	7
2.7 Kesme Hatası	9
3. İKİNCİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ.....	10
4. STURM-LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİ.....	13
4.1 Sturm-Liouville Denklemleri.....	13
4.2 Lagrange Özdeşliği	15
4.3 Green Formülü	16
4.4 Özdeğerlerin Reelliği.....	17
4.5 Özvektörlerin Ortogonalitesi.....	19
4.6 Özdeğerlerin Basitliği	20
4.7 Özdeğerlerin Monoton Artan Dizi Teşkil Etmesi.....	21
4.8 Ortonormal Özfonksiyonlar Dizisi	23
4.8 Özfonksiyon Açılımı.....	25
5. STURM-LIOUVILLE AÇILIMI.....	30
5.1 Sturm-Liouville Denklemleri.....	30
5.2 Homojen Olmayan Sturm-Liouville Problemi	32

5.1 Sturm-Liouville Açılımı	33
6. İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN	
ÇÖZÜM METODLARI	41
6.1 Sonlu Farklar Metodu	41
6.2 Matris Dönüşümü ile Çözüm	59
7. TARTIŞMA VE SONUÇ	67
8. KAYNAKLAR	68
9. EKLER	72
10.ÖZGEÇMİŞ	73

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 6.1.1 (Örnek 6.1.1 ‘in özdeğerler değişim grafiği).....	47
Şekil 6.1.2 (Örnek 6.1.2 için gerçek-yaklaşık çözüm karşılaştırma grafiği).....	50
Şekil 6.1.3 (Örnek 6.1.2 ‘in gerçek özdeğerler değişim grafiği).....	52
Şekil 6.1.4 (Örnek 6.1.3 için özdeğerler karşılaştırma grafiği).....	55
Şekil 6.1.5 (Örnek 6.1.4 ‘in yaklaşık özdeğerler değişim grafiği).....	58
Şekil 6.2.1 (Örnek 6.2.1 için özdeğerler değişim grafiği).....	65
Şekil 6.2.2 (Örnek 6.2.2 için özdeğerleri değişim grafiği).....	66

ÇİZELGE LİSTESİ

<u>Çizelge</u>	<u>Sayfa</u>
Tablo 6.1.1 (örnek 6.1.1 'in özdeğerler tablosu).....	46
Tablo 6.1.2 (örnek 6.1.2 için gerçek çözüm tablosu).....	48
Tablo 6.1.3 (örnek 6.1.3 için yaklaşık çözüm tablosu).....	49
Tablo 6.1.4 (örnek 6.1.3 için karşılaştırma tablosu).....	50
Tablo 6.1.5 (örnek 6.1.3 için gerçek özdeğerler tablosu).....	51
Tablo 6.1.6 (örnek 6.1.3 için özdeğerler karşılaştırma tablosu).....	54
Tablo 6.1.7 (Örnek 6.1.4 için gerçek ve yaklaşık özdeğerler tablosu).....	57
Tablo 6.2.1 ($n=20$ $q(x)=0$ için özdeğerler tablosu).....	64
Tablo 6.2.2 (örnek 6.2.2 özdeğerleri).....	65

1. GİRİŞ

Fizik ve mühendisliğin birçok problemi adi ve kısmi diferansiyel denklemler sınır değer problemlerine indirgeniyor. Örneğin, klasik mekanik problemleri, elektromanyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği, termodinamik problemleri, ısı iletim problemleri ve dalga denklemlerinde sınır değer problemlerine oldukça sık rastlanmaktadır. Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel gelişmelere yol açmıştır. Fizik alanındaki bu bilimsel çalışmaların matematik biliminin gelişmesinde çok büyük etkisi olmuştur. Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi sınır değer problemleri barındırmaktadır. Bu nedenle teorik ve uygulamalı matematik açısından diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin incelenmesi büyük önem taşır. Bilindiği gibi cebir, geometri ve analiz statik problemlerin birçoğunun çözümü için yeterli olmaktadır. Buna karşılık, doğadaki olayları tasvir eden yasaların büyük bir çoğunluğu, bir veya daha fazla büyüklüğün, diğer bir takım büyüklüklere göre değişim hızlarını içerir. Bu değişim hızları matematiksel olarak türev ile ifade edilir. Problemler, türev yardımıyla adi diferansiyel denklemler veya kısmi türevli denklemler şeklinde belirtilir. Bu tipteki bazı problemlerde, araştırma yapılan bölgede veya bölgenin sınır çizgisinin üzerinde katsayıların tekil (singüler) noktaları olabilir. Bu tipteki denklemlere dönüştürülen fiziksel problemlerin gerçek çözümlerini bulmak çok zor olduğu gibi genelde net çözüme ulaşmak imkansızdır. Bazı yaklaşık çözüm bulma yöntemleri, denklemin çözümünün sonsuz seri şeklinde aranmasına dayanmaktadır. Böyle yöntemlerin esaslandırılması için sonsuz serinin yakınsaklığının ispatlanması ve özdeğer fonksiyonlarının ortogonalliğinin gösterilmesi gerekir. Ayrıca matematiksel fizik probleminin çözümünün kararlılığının araştırılması da teorik ve pratik öneme sahiptir.

Sturm-Liouville problemi de sınır değer problemlerinin en önemlilerinden birisidir. İlk defa 1836 yılında ortaya konulan Sturm-Liouville problemi adını, Jacques Charles François Sturm ve Joseph Liouville'nin çalışmalarından almıştır. Sınır değer problemleri uzun bir süre boyunca Laplace denkleminin harmonik çözümlerini bulmak amacıyla Dirichlet problemi olarak çalışılmıştır ve problemin çözüm yöntemlerinden birine de Dirichlet prensibi adı verilmiştir.

Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde bir çok fiziksel problemin araştırılmasında en etkin yöntemlerin başında yer almaktadır. Genellikle kısmî türevli denklemlerde değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanıldıktan sonra Sturm-Liouville denklemleri ile bağlantılı sınır değer problemleri ortaya çıkmıştır.

Adi diferansiyel denklemler için sınır değer probleminin araştırılması G.D. (Birkhoff, 1908) çalışmalarıyla başlamıştır. Birkhoff'un bu çalışmalarında özdeğer parametresine bağlı lineer diferansiyel operatörler için temel çözüm sistemini oluşturan çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiş ve bazı asimptotik eşitlikler bulunmuştur. Ayrıca Birkhoff'un bu çalışmalarında adi diferansiyel operatörler için regüler sınır şartları kavramı tanımlanmış ve uygun sınır değer probleminin öz fonksiyonlarının tamlığı hakkında teorem ispatlanmıştır.

(Tamarkin, 1928) çalışmasında sınır değer problemleri araştırılmıştır. Denklemin temel çözüm sistemini oluşturan fonksiyonların asimptotik davranışları incelenmiş, regüler ve güçlü regüler sınır değer problemi kavramı tanımlanmıştır. Güçlü regüler sınır değer probleminin özdeğerleri için asimptotik formüller bulunmuştur. Regüler problemler için ise Green fonksiyonu değerlendirilmiş ve kök fonksiyonları üzerine açılım teoremleri ispatlanmıştır.

İlerleyen yıllarda bu konuda çok sayıda araştırma yapılmış ve yüzlerce kitap, binlerce makale yazılmıştır. (Andrews, 1986), (Atkinson, 1964), (Birkhoff,1908), (Keller, 1992)

Son yıllara kadarki çalışmalarda genellikle sürekli problemler incelenmiş ve geçiş şartlarını içeren çok az sayıda araştırma yapılmıştır. Geçiş şartları ile verilmiş süreksizliğe sahip genelleştirilmiş Sturm-Liouville problemleri O. Sh. Mukhtarov ve ark. çalışmalarında sistemli bir biçimde araştırılmıştır. (Mukhtarov, 2002, 2005, 2011)

Bu çalışmalarda sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran ve geçiş şartları ile verilen süreksiz Sturm-Liouville problemi incelenmiştir. Mukhtarov ve arkadaşlarının birlikte yazdığı özdeğer parametresine bağlı sınır şartları ve özdeğer parametresine bağlı geçiş şartları olan çalışmalarında problemin operatör-teorik yorumu, özfonksiyonların ve özdeğerlerin asimptotikliği, Green fonksiyonu, rezolvent operatörünün değerlendirilmesi self-adjointliği incelenmiştir.

S.Y.Yakubov ve Y.Y. Yakubov'un 1994' de yayımlanan (Yakubov, 1994) kitabında reguler diferansiyel operatörlerin genel teorisi kurulmuş ve bu teoride yeni

yöntemler geliştirilmiştir. (Yakubov, 1999, 2000) son yıllardaki çalışmalarında ise irregüler sınır-değer problemlerinin spektral özellikleri araştırılarak elde edilen sonuçlar bir çok fiziksel problemlere uygulanmıştır.

Sayısal analiz, matematik problemlerinin bilgisayar yardımı ile çözümlenme tekniğinin temelini teşkil etmektedir ve genellikle analitik olarak çözümleri çok zor veya imkânsız olan matematik problemleri belli hata aralıklarında çözümlenmek için kullanılır. Bilgisayar teknolojisi ile sayısal analiz metotları birbirine paralel olarak gelişmiştir. Bunun en güzel örneği günümüzün en popüler sayısal analiz metotlarından biri olan "sonlu farklar" diğeri ise "sonlu elemanlar" teorisidir. Bu teorilerin temeli 1930'larda atılmasına rağmen, bu yöntemler el ile işlem yapmaya uygun olmadığından dolayı gerekli ilgiyi o yıllarda görmemiş ve gelişen bilgisayar teknolojisiyle birlikte geniş ve yaygın kullanım alanı bulmuştur. Bunun yanında analitik işlemlerin bilgisayar ortamında yapılabilmesi sayısal analiz metotlarının kullanılmasını zorunlu hale getirmektedir. Bu da sayısal analiz ile ilgili metotların gelişimine neden olmuştur.

Bailey, Gordon, Shampine'in (Baily, 1978) 1978 de yayımlanmış bu çalışmasından başlayarak, Sturm Liouville problemleri için sayısal çözümleri günümüze dek yoğun biçimde araştırılmaktadır. Bailey, Everitt, Weidmann, Zettl'in (Baily,1993) yapmış oldukları çalışmada Tekil Sturm Liouville problemleri için sayısal çözüm yapmışlardır.

Ledoux, Daele ve Berghe'nin 2005'de yayımlanmış çalışmasında Sturm Liouville problemleri ve Schrödinger denklemleri için Matlab programında sayısal çözümler yapmışlardır. Ayrıca (Ledoux, 2009) yapmış oldukları çalışmada bazı Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri için sayısal çözümler yapmışlardır.

(Paine, 1981) çalışmasında asimptotik doğruluk teknikleriyle birlikte sonlu farklar metodunu da kullanarak bazı Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri için yaklaşık sonuçlar bulmuşlardır. (Andrew, 1986, 1989, 1994) çalışmalarına sonlu elemanlar yöntemini kullanarak bazı regüler Sturm Liouville problemlerinin özdeğerleri için yaklaşık sonuçlar elde etmişlerdir.

(Attili, 2005) Sturm-Liouville problemleri için Adomian Decomposition metodunu kullanarak bazı yaklaşık sonuçlar elde etmiştir. (Ghelardoni, 2001) SturmLiouville problemlerinin yaklaşık özdeğerlerini Prüfer ve Shooting yöntemlerini kullanarak elde etmişlerdir.

Bu yüksek lisans tezinde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ile Sturm-Liouville denklemleri özellikleri ve çözümleri üzerinde durulmuş, sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında kullanılan matris dönüşümü ve özellikle de Sonlu Farklar yöntemine yer verilmiştir. Bu tezde bazı sınır değer problemlerinin yaklaşım yöntemleri ile incelenmesi hedeflenmektedir. Tez bu konuda kaynak oluşturma hedefi taşımaktadır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Özdeğer ve Özfonksiyon

Tanım 2.1 X , bir Banach uzayı $A: X \rightarrow X$ şeklinde tanımlı bir sınırlı lineer operatör olmak üzere

$$Ay = \lambda y$$

ya da I birim operatör olmak üzere

$$(A - \lambda I)y = 0$$

denkleminin sıfırdan farklı bir y çözümü varsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına A operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir. (Kandemir, 2015)

2.2 Lineer Diferansiyel Operatör

İkinci mertebeden lineer diferansiyel operatör

$$L = a_0(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_2(x)$$

biçiminde tanımlanıyor.

Kolayca görürüz ki

$$\phi, \psi \in C^2(I) \text{ ve } c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

olmak üzere

$$L(c_1\phi + c_2\psi) = c_1L\phi + c_2L\psi$$

eşitliği sağlanır.

Yani L operatörü lineerdir.

2.3 Süperpozisyon İlkesi

Temel bir özellik olarak homojen lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin lineer birleşimi de bir çözüm belirtir. Eğer ϕ ve ψ fonksiyonları için $L\phi = 0$, $L\psi = 0$, sağlanıyorsa, herhangi C_1 ve C_2 sabitleri için

$$L(C_1\phi + C_2\psi) = C_1L\phi + C_2L\psi = 0$$

eşitliği elde edilir.. Bu eşitlik süperpozisyon ilkesi olarak bilinir. (Al-Gwaiz, 2008)

Not: Eğer her x noktasında $a_0(x) \neq 0$ ise (2.1.2) denkleminin her iki tarafını sıfırdan

farklı a_0 'a bölerek, $y'' + \frac{a_1}{a_0}y' + \frac{a_2}{a_0}y = \frac{f}{a_0}$, denklemini elde ederiz. Burada

$q = \frac{a_1}{a_0}$, $r = \frac{a_2}{a_0}$, $g = \frac{f}{a_0}$ olarak alınırsa

$$y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x) \quad (2.1)$$

eşitliği elde edilir.

2.4 Regüler ve Singüler Denklemler

Tanım 2.2

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (2.2)$$

ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi verilsin.

$a_0(x) \neq 0$ ($\forall x$ için) durumunda (2.2) denkleminin I aralığında regüler denklem, aksi

durumda, eğer en az bir $c \in I$ noktasında $a_0(c) = 0$ oluyorsa singüler denklem ve c noktasına ise denklemin singüler noktası denir. (Al-Gwaiz, 2008)

2.5 Başlangıç Değer Problemi

Teorem 2.1 Eğer q, r ve g fonksiyonları I aralığında sürekli, x_0 , I aralığında keyfi bir nokta ise (2.1) denkleminin her γ, η sayıları ve her $x_0 \in I$ noktası için

$$\varphi(x_0) = \gamma, \varphi'(x_0) = \eta \quad (2.3)$$

şartlarını sağlayan çözümü vardır ve tekdir.

(2.3) şartlarına başlangıç koşulları ve (2.1)-(2.3) sistemine ise başlangıç değer problemi denir. (Al-Gwaiz, 2008)

2.6 Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım 2.3

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = f(x), a_n(x) \neq 0 \quad (2.4)$$

biçimindeki denkleme n . mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklem denir. Burada $a_0, a_1, \dots, a_n$ katsayıları ve f fonksiyonu bir (a, b) aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonları göstermektedir.

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = 0, a_n(x) \neq 0 \quad (2.5)$$

denklemine ise n . mertebeden homojen lineer diferansiyel denklem denir.

(Kandemir, 2015)

Tanım 2.4

$$L(y) = a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0(x) y \quad (2.6)$$

şeklinde yazılan ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. L dönüşümüne ise diferansiyel operatör denir.

Böylece (2.2.1) denklemi

$$Ly = f(x) \quad (2.7)$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 2.2 (2.4) eşitliği ile tanımlanan L operatörü lineerdir. Yani, $y_1, y_2, \dots, y_n$ n. mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ herhangi keyfi sabitler olmak üzere

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n) = c_1 L(y_1) + c_2 L(y_2) + \dots + c_n L(y_n) \quad (2.8)$$

eşitliği sağlanır.

Teoremin ispatı açıktır.

Tanım 2.5 $y_1, y_2, \dots, y_n$ herhangi fonksiyonlar ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (2.9)$$

ifadesine $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının lineer birleşimi denir.

Teorem 2.3 $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları (2.5) homojen lineer diferansiyel denkleminin birbirinden farklı çözümleri ise $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (2.10)$$

fonksiyonu da (2.2.2) homojen lineer diferansiyel denkleminin bir çözümüdür.

Tanım 2.6 $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları herhangi bir (a, b) aralığında $(n-1)$ -inci mertebeden türevlenebilen fonksiyonlar olsun. Bu durumda,

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \dots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

determinantına $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının *Wronskiyanı* denir.

Teorem 2.4 $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonlarının her biri (2.5) denkleminin çözümü ise bu fonksiyonların lineer bağımlı olması için gerek ve yeter koşul $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.7 n -tane $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonu bir (a, b) aralığında n . mertebeden (2.5) homojen lineer diferansiyel denkleminin bağımsız çözümleri ise $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \quad (2.12)$$

lineer birleşimine (2.5) homojen lineer diferansiyel denkleminin genel çözümü denir.

2.7 Kesme Hatası

Tanım 2.8 Matematik işlemler yerine, yaklaşık olanlarının alınmasıyla ortaya çıkan hatalara kesme hatası denir. Örnek olarak Taylor serisi açılımıyla yapılan hatayı gösterebiliriz.

$x_{i+1} - x_i = h$ olmak üzere

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

açılımında

$$R_n = \frac{y^{(n)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

eşitliği yapılan hatayı göstermektedir.

3. İKİNCİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Klasik ikinci mertebeden lineer sınır değer problemi

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = \phi(x) \quad (3.1)$$

biçimindeki ikinci mertebeden lineer diferansiyel denkleminde ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= \gamma_2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

biçimindeki sınır şartlarından oluşur. Burada $P(x)$, $Q(x)$ ve $\phi(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$ ve $\alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0$ dır.

Tanım 3.1 $\phi(x) = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ise (3.1)-(3.2) sınır değer problemine homojen sınır değer problemi, aksi halde ise homojen olmayan sınır değer problemi denir.

Böylece homojen sınır değer problemi

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (3.3)$$

denklemini ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

sınır koşulları ile tanımlanır.

Sınır değer problemlerinin çözümünde önce 2. mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü bulunur. Genel çözümdeki keyfi sabitler, sınır koşullarını sağlayacak şekilde belirlenir. Böylece sınır değer probleminin çözümü hem diferansiyel denklemini hem de sınır koşullarını sağlar.

Not: Homojen sınır değer problemlerinin daima $y(x) = 0$ çözümü vardır. Bu çözüme denklemin aşık (trivial) çözümü denir. Denklemin eğer sıfırdan farklı ($y(x) \neq 0$) çözümleri var ise bu çözümlere ise aşık olmayan çözümler adı verilir.

Teorem 3.1 $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (3.5)$$

diferansiyel denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. Buna göre (3.3),(3.4) homojen sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümlerinin olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

olmasıdır. (Bronson, 2000)

Teorem 3.2 (3.1)-(3.2) homojen olmayan sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul (3.3)- (3.4) homojen sınır değer probleminin sadece aşıkâr çözüme sahip olmasıdır. (Bronson,2000)

Başka bir deyişle, homojen olmayan problemin bir tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul homojen denklemin bir tek çözüme sahip olmasıdır.

Tanım 3.2 (3.3)-(3.4) homojen sınır değer probleminin P ve Q katsayı fonksiyonları x değişkeni ile birlikte keyfi bir λ parametresine bağlı ise o halde sınır değer problemi

$$y'' + P(x, \lambda)y' + Q(x, \lambda)y = 0 \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

biçiminde ifade edilir.

Bu problemin λ parametresinin bazı değerleri için aşıkâr olmayan çözümlere sahip olacağının araştırılması önemli bir problemidir. Bu türdeki sınır değer problemlerine özdeğer problemi denir.

(3.10)-(3.11) probleminin aşıkâr olmayan çözümlere sahip λ değerlerine problemin özdeğerleri, bu özdeğerlere karşılık gelen ve aşıkâr olmayan çözümlere ise problemin özfonksiyonları denir.

Uygulamalı matematikte en sık karşılaşılan sınır koşulları aşağıda verilmiştir.

1. Periyodik sınır koşulları:

$$y(-L) = y(L) \quad y'(-L) = y'(L)$$

2. Ayrılabilir sınır koşulları:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = \gamma_1$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2$$

3. Dirichlet sınır koşulları:

$$y(a) = \gamma_1 \quad y(b) = \gamma_2$$

4. Neumann sınır koşulları:

$$y'(a) = \gamma_1 \quad y'(b) = \gamma_2$$

4. STURM-LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİ

4.1 Sturm-Liouville Denklemi

Sturm-Liouville sınır değer problemi

$$L[y] \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x)y, \quad (4.1.1)$$

operatörü yardımıyla

$$L[y] + \lambda r(x)y = 0 \quad (4.1.2)$$

biçiminde ifade edilir. (4.1.2) denkleminde p, q, r fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli ve $p > 0, r \geq 0$ olduğu kabul edilir. Bu denklemin

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 p(a) y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 p(b) y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

sınır koşullarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemi Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. Burada

$$a_1^2 + a_2^2 \neq 0, \quad b_1^2 + b_2^2 \neq 0 \quad (4.1.4)$$

olduğu doğal olarak kabul edilir.

Eğer $\lambda = \mu$ değeri için (4.1.2) denkleminin (4.1.3) sınır koşullarını sağlayan aşıkâr olmayan çözümü varsa μ –ye özdeğer, uygun çözüme ise özfonksiyon denir.

Eğer (4.1.2) Sturm-Liouville özdeğer probleminde;

1. p ve q fonksiyonları bir $[a, b]$ aralığında $p > 0$ ve $r > 0$ şartlarını sağlıyorsa
Regüler Sturm-Liouville özdeğer problemi denir.
2. Regüler olmayan Sturm-Liouville problemine Singüler Sturm-Liouville özdeğer problemi denir.

3. p, q, r fonksiyonları $[a, b]$ aralığında sürekli, $p > 0$ ve $r > 0$ ve sınır koşulları

$p(a) = p(b)$ $p'(a) = p'(b)$ ise periyodik Sturm-Liouville özdeğer problemi denir.

Not: Şimdi ise ikinci mertebeden genel diferansiyel denklemin Sturm-Liouville formunda nasıl yazılabileceğine inceleyelim:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y + \lambda a_3(x)y = 0 \quad (4.1.5)$$

(4.1.5) denkleminin Sturm-Liouville denklemi olması için

$$(py')' = py'' + p'y' = a_0(x)y'' + a_1(x)y'$$

olacak biçimde p fonksiyonunun mevcut olmasıdır. Yani $a_0'(x) = a_1(x)$ olmasıdır.

Fakat her denklem için $a_0'(x) = a_1(x)$ eşitliği sağlanamaz.

Şimdi, (4.1.5) denklemin $\mu = \mu(x)$ ile çarparsak

$$\mu(x)a_0(x)y'' + \mu(x)a_1(x)y' + \mu(x)a_2(x)y + \lambda\mu(x)a_3(x)y = 0 \quad (4.1.6)$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemin Sturm-Liouville biçiminde olması için

$$p(x) = \mu(x)a_0(x) \text{ ve } p'(x) = \mu(x)a_1(x)$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Buradan, $p'(x) = \frac{p(x)a_1(x)}{a_0(x)}$, ($a_0(x) \neq 0$) denklemi elde

edilir. Bu denklemin çözümü, $p(x) = e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx}$ bulunur. Bu $p(x)$ ' i kullanarak,

$$\mu = \frac{p(x)}{a_0(x)} = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} \quad (4.1.7)$$

eşitliği elde edilir. Bulunan (4.1.7) ifadesi (4.1.6) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y' \right)' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y + \lambda \frac{a_3(x)}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} y = 0 \quad (4.1.8)$$

denklemini elde edilir ki, bu denklem de Sturm-Liouville tipindeki bir denklemdir.

Burada $a_0(x)$ ve $a_1(x)$ bir $[a, b]$ aralığında sürekli ve $a_0(x) \neq 0$ olması şartlarını önceden kabul etmemiz gerekir.

Örnek 4.1 $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$, $x \in [a, b]$, $(a > 0)$ (4.1.9)

denklemini Sturm-Liouville denklemi haline getirelim.

Çözüm: (4.1.7) eşitliğini kullanarak

$$\mu = \frac{1}{a_0(x)} e^{\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx} = \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{x}{x^2} dx} = \frac{e^{\ln x}}{x^2} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \quad (4.1.10)$$

elde edilir. Denklemi $\mu = \frac{1}{x}$ ile çarpılarak, $(xy')' + \lambda \frac{1}{x} y = 0$ Sturm-Liouville formu elde edilmiş olur.

Sturm-Liouville probleminin bazı özelliklerinin tanım ve ispatına geçelim.

4.2 Lagrange Özdeşliği

Teorem 4.2.1 Kabul edelim ki u ile v , $a \leq x \leq b$ aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx} (pW[u, v]) \quad (4.2.1)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} uL[v] - vL[u] &= u[(pv')' + qv] - v[(pu')' + qu] \\ &= u(pv')' + uqv - v(pu')' - vqu \\ &= up'v' + upv'' - vp'u' - vpu'' \\ &= p'(uv' - vu') + p(uv'' - vu'') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p'W[u, v] + pW'[u, v] \\
&= \frac{d}{dx}(pW[u, v])
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$uL[v] - vL[u] = \frac{d}{dx}(pW[u, v])$$

Elde edilen bu özdeşliğe Lagrange özdeşliği denir.

4.3 Green Formülü

Teorem 4.3.1 Kabul edelim ki u ile v $[a, b]$ aralığında ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$(4.3.1) \quad \int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = \left(p(x)W[u, v] \right) \Big|_a^b$$

eşitliği elde edilir.

İspat: (4.2.1) eşitliğinin her iki tarafını $[a, b]$ -de integralleyerek (4.3.1) elde edilir.

Lagrange özdeşliğinin bir sonucu olan (4.3.1) eşitliğine Green Formülü adı verilir.

Eğer (4.3.1) denkleminde u ve v fonksiyonları sınır koşullarını sağlarsa

($a_1 \neq 0, b_1 \neq 0$ olmak üzere)

$$\begin{aligned}
& p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] \Big|_a^b \\
&= p(b)[u'(b)v(b) - u(b)v'(b)] - p(a)[u'(a)v(a) - u(a)v'(a)] \\
&= p(b) \left[-\frac{b_1}{b_2}u(b)v(b) + \frac{b_1}{b_2}u(b)v(b) \right] - p(a) \left[-\frac{a_1}{a_2}u(a)v(a) + \frac{a_1}{a_2}u(a)v(a) \right] = 0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. O halde a_2 veya b_2 den herhangi birinin sıfır olması durumunda (4.3.1) in sağ tarafının sıfır olduğu kolayca görülür.

Böylece L diferansiyel operatörü (4.1.1) eşitliği ile tanımlı ise ve u ile v (4.1.3) sınır koşullarını sağlarsa Lagrange özdeşliğinden

$$\int_a^b \{L[u]v - uL[v]\}dx = 0 \quad (4.3.2)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.3.1) denklemini farklı bir şekilde yazalım.

Eğer $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı reel değerli u ile v fonksiyonlarının iç çarpımını

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx \quad (4.3.3)$$

biçiminde tanımlarsak (4.3.2) denklemi

$$\langle L[u], v \rangle = \langle u, L[v] \rangle \quad (4.3.4)$$

biçiminde ifade edilir.

Not: Eğer u ile v kompleks değerli fonksiyonlar ise iç çarpımları

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)\bar{v}(x)dx \quad (4.3.5)$$

biçiminde tanımlanır.

4.4 Özdeğerlerin Reelliği

Teorem 4.4.1 Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir. (Boyce,1992)

İspat: Teoremi ispatlamak için, kabul edelim ki λ (4.1.2) Sturm-Liouville probleminin kompleks özdeğeri ve ϕ de bu özdeğere karşılık gelen kompleks özfonksiyonu olsun.

μ ile ν reel sabitler ve $U(x)$ ile $V(x)$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere,

$\lambda = \mu + i\nu$ ve $\phi(x) = U(x) + iV(x)$ olsun. Eğer (4.3.4) ifadesinde

$u = \phi$, $v = \bar{\phi}$ alırsak

$$\langle L[\phi], \phi \rangle = \langle \phi, L[\phi] \rangle \quad (4.4.1)$$

$L[\phi] = \lambda r \phi$ olduğundan

$$\langle \lambda r \phi, \phi \rangle = \langle \phi, \lambda r \phi \rangle \quad (4.4.2)$$

biçiminde yazılabilir. (4.3.6) iç çarpım tanımından

$$\int_a^b \lambda r(x) \phi(x) \bar{\phi}(x) dx = \int_a^b \phi(x) \bar{\lambda r(x) \phi(x)} dx \quad (4.4.3)$$

eşitliği elde edilir. Burada $r(x)$ reel değerli fonksiyon olduğundan

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b r(x) \phi(x) \bar{\phi}(x) dx = 0 \quad (4.4.4)$$

eşitliği elde edilir.

$$\int_a^b r(x) \phi(x) \bar{\phi}(x) dx = \int_a^b r(x) |\phi(x)|^2 dx > 0 \quad (4.4.5)$$

olduğu için (4.4.4)'den $\lambda - \bar{\lambda} = 0$ yani $\lambda = \bar{\lambda}$ elde edilir. Bu ise λ 'nın reel olduğu anlamına gelir.

Böylece Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin reel olduğu gösterilmiş olur.

Not: Özdeğerler reel olduğu için tüm özfonksiyonların reel değerli fonksiyonlar olduğunu kabul edebiliriz.

4.5 Özfonksiyonların Ortogonalliği

Teorem 4.5.1 Bir Sturm-Liouville probleminde birbirinden farklı λ_1 ve λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla ϕ_1 ve ϕ_2 olmak üzere

$$\int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x)dx = 0 \quad (4.5.1)$$

eşitliği sağlanır. (Boyce,1992)

(Bu durumda , Sturm-Liouville sınır değer probleminde farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyon $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre “ortogonaldir” denir.)

İspat: ϕ_1 ve ϕ_2 sırasıyla, λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O halde

$$L[\phi_1] = \lambda_1 r \phi_1, \quad L[\phi_2] = \lambda_2 r \phi_2 \quad (4.5.2)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.3.4) eşitliğinde $u = \phi_1$, $v = \phi_2$ alırsak,

$$\langle \lambda_1 r \phi_1, \phi_2 \rangle = \langle \phi_1, \lambda_2 r \phi_2 \rangle \text{ yazılır.}$$

Buradan da

$$\langle \lambda_1 r \phi_1, \phi_2 \rangle - \langle \phi_1, \lambda_2 r \phi_2 \rangle = 0 \quad (4.5.3)$$

eşitliği elde edilir. (4.3.6) ‘daki iç çarpım tanımından yararlanırsak

$$\lambda_1 \int_a^b r(x)\phi_1(x)\bar{\phi}_2(x) dx - \lambda_2 \int_a^b \phi_1(x)\bar{r}(x)\bar{\phi}_2(x) dx = 0 \quad (4.5.4)$$

denklemini bulunur. Burada $\lambda_2, r(x), \phi_2(x)$ ifadeleri reel olduğundan

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b r(x)\phi_1(x)\phi_2(x) dx = 0 \quad (4.5.5)$$

elde edilir. Kabulümüzde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\int_a^b r(x) \phi_1(x) \phi_2(x) dx = 0 \quad (4.5.6)$$

elde edilerek teorem ispatlanmış olur.

4.6 Özdeğerlerin Basitliği

Teorem 4.6.1 Sturm-Liouville probleminin bütün özdeğerleri basittir.

Yani, Sturm-Liouville denkleminin her bir özdeğerine lineer bağımsız yalnızca bir özfonksiyon karşılık gelir. (Boyce,1992)

İspat: Kabul edelim ki ϕ_1 ve ϕ_2 (4.1.2) denkleminin λ özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyon olsun. Bu durumda ϕ_1 ve ϕ_2 (4.1.3) sınır koşullarını sağlayacağından

$$\begin{aligned} a_1 \phi_1(a) + a_2 \phi_1'(a) &= 0 \\ a_1 \phi_2(a) + a_2 \phi_2'(a) &= 0 \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece

$$\phi_1'(a) = -\frac{a_1}{a_2} \phi_1(a), \quad \phi_2'(a) = -\frac{a_1}{a_2} \phi_2(a) \quad (4.6.2)$$

eşitlikleri elde edilir. ϕ_1 ve ϕ_2 'nin $x=a$ noktasındaki wronskiyanı

$$\begin{aligned} W[\phi_1, \phi_2](a) &= \phi_1(a) \phi_2'(a) - \phi_1'(a) \phi_2(a) \\ &= \phi_1(a) \left(-\frac{a_1}{a_2} \phi_2(a) \right) - \left(-\frac{a_1}{a_2} \phi_1(a) \right) \phi_2(a) = 0 \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

olarak bulunmuş olur.

Böylece ϕ_1 ve ϕ_2 özfonksiyonlarının $[a, b]$ aralığında lineer bağımlı olduğunu gösterilmiş olur.

4.7 Özdeğerlerin Monoton Artan Dizi Teşkil Etmesi

Teorem 4.7.1 Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri monoton artan ve de sonlu yığılma noktasına sahip olmayan bir dizi teşkil eder.

Yani, düzgün bir Sturm-Liouville probleminin sonsuz sayıda özdeğeri vardır. Ayrıca bu özdeğerler $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ biçiminde artan bir dizi oluşturur. (Boyce,1992)

İspat:

$$(py')' + (\lambda r - q)y = 0 \quad (4.7.1)$$

denklemini

$$\begin{aligned} a_1 y(a) - b_1 y'(a) &= 0 \\ a_2 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

sınır koşulları ile verilen Sturm-Liouville denklemini birinci mertebeden

$$y' = \frac{1}{p} x \quad (4.7.3)$$

$$x' = (q - \lambda r)y \quad (4.7.4)$$

diferansiyel denklem sistemine dönüştürülür. (4.7.3) denkleminde, $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ kutupsal koordinatları ile

$$\begin{aligned} y &= R \sin \theta \\ py' &= R \cos \theta \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Prüfer dönüşümleri (4.7.3), (4.7.4) denklemlerine uygularsak

$$R' \cos \theta - R\theta' \sin \theta = (q - \lambda r)R \sin \theta \quad (4.7.6)$$

$$R' \sin \theta + R\theta' \cos \theta = \frac{1}{p} R \cos \theta \quad (4.7.7)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.7.6) denklemi $\sin \theta$ ile (4.7.7) denklemi $\cos \theta$ ile çarpılıp bu eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$R' = \frac{R}{2} \left(\frac{1}{p} + q - \lambda r \right) \sin 2\theta \quad (4.7.8)$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.7.6) denklemi $\cos \theta$ ile (4.7.7) denklemi $\sin \theta$ ile çarpılıp bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\theta' = \frac{1}{p} \cos^2 \theta + (\lambda r - q) \sin^2 \theta \quad (4.7.9)$$

eşitliği elde edilir. (4.7.9) eşitliği R' 'den bağımsızdır. Dolayısıyla her λ sayısı ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı için bu denklemin, $\theta_\lambda(a) = \alpha$ koşulunu sağlayan bir tek θ_λ çözümü vardır.

Eğer θ_λ fonksiyonu (4.7.9) denkleminin bir çözümü ise λ sayısı (4.7.1), (4.7.2) Sturm-Liouville probleminin bir özdeğeri ve $Y_\lambda = R_\lambda \sin \theta_\lambda$ fonksiyonu da bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun.

Eğer Y_λ fonksiyonu (4.7.2) sınır koşullarını sağlıyorsa

$$0 = a_1 Y_\lambda(a) - b_1 Y_\lambda'(a) = R_\lambda(a) \left[a_1 \sin \theta_\lambda(a) - \frac{b_1}{p(a)} \cos \theta_\lambda(a) \right] \quad (4.7.10)$$

ve

$$0 = a_2 Y_\lambda(b) - b_2 Y_\lambda'(b) = R_\lambda(b) \left[a_2 \sin \theta_\lambda(b) - \frac{b_2}{p(b)} \cos \theta_\lambda(b) \right] \quad (4.7.11)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bundan dolayı $x = a$ noktasındaki koşulun sağlanması için (4.7.9) denkleminin θ_λ çözümü

$$a_1 = 0 \text{ ise } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ve}$$

$$a_1 \neq 0 \text{ ise } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ ve } \tan \alpha = \frac{b_1}{a_1 p(a)} \geq 0$$

olmak üzere $\theta_\lambda(a) = \alpha$ eşitliği sağlanmalıdır. Benzer şekilde

$$a_2 = 0 \text{ ise } \beta = \pi/2 \text{ ve}$$

$$a_2 \neq 0 \text{ ise } \frac{\pi}{2} < \beta \leq \pi \text{ ve } \tan \beta = \frac{b_2}{a_2 p(b)} \leq 0$$

olmak üzere, $\theta_\lambda(b) = \beta + (n-1)\pi$ ($n \in \mathbb{N}$) eşitliği sağlanmalıdır.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden $\theta_\lambda(b)$ 'nin λ 'ya göre sürekli ve artan olduğunu biliyoruz.

Bu durumda eğer $\theta_\lambda(b) < \frac{\pi}{2}$ olacak biçimde bir λ sayısı varsa ve $\lambda \rightarrow \infty$ için

$\theta_\lambda(b) \rightarrow \infty$ ise bu durumda $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\theta_{\lambda_n}(b) = \beta + (n-1)\pi \text{ ve } \lambda_n < \lambda_{n+1} \text{ olur.}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur. (González, 1996)

4.8 Ortonormal Özfonksiyonlar Dizisi

λ_n özdeğerinin karşılık gelen özfonksiyonlar ϕ_n 'ler ise teorem 4.5.1 'e göre

$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n, \dots$ özfonksiyonlar cümlesi $[a, b]$ aralığında $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani

$$\int_a^b r(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, (n \neq m) \quad (4.8.1)$$

eşitliği sağlanır.

$$Q_n = \int_a^b r(x) [\phi_n(x)]^2 dx \quad (4.8.2)$$

ve

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{Q_n}} \phi_n(x), \quad n=1,2,\dots \quad (4.8.3)$$

gösterirsek

$$\int_a^b r(x) [\Phi_n(x)]^2 dx = 1 \quad (4.8.4)$$

elde edilir. $(\Phi_n(x))$ dizisine $[a,b]$ aralığında “ortonormal özfonksiyonlar dizisi”

denir. $\sqrt{Q_n}$ ‘e “ ϕ_n ’in normu” adı verilir ve

$$\sqrt{Q_n} = \|\phi_n\| = \sqrt{\int_a^b r(x) [\phi_n(x)]^2 dx} \quad (4.8.5)$$

şeklinde gösterilir. Sonuç olarak, Regüler Sturm-Liouville probleminde ϕ_n

özfonksiyonlarını $\|\phi_n\|$ normuna bölerek, $\{\Phi_n\}$ ortonormal özfonksiyon dizisi elde edilir.

$$\{\Phi_n\} = \left\{ \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} \right\} \quad (4.8.6)$$

ortonormal özfonksiyon dizisi elde edilebilir.

Örnek 4.3

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < L)$$

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$

probleminin ortonormal özfonksiyon sistemini bulalım.

Çözüm: Bu problemin özdeğerlerinin, $\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2$, $n=1,2,\dots$ olduğunu ve bu λ_n

’lere karşılık gelen özfonksiyonların $y_n(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, (0 \leq x \leq L), (n=1,2,3,\dots)$

olduğunu kolayca bulabiliriz. Böylece $\{\phi_n\}$ cümlesi, $[0, L]$ aralığında $r(x)=1$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal bir fonksiyon cümlesidir ve

$\int_0^L a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot a_m \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, (n \neq m)$ 'dir. Öte yandan ϕ_n 'nin normu

$$\|\phi_n\| = \sqrt{\int_0^L a_n^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx} = a_n \sqrt{\frac{L}{2}}, \quad (0 \leq x \leq L) \text{ 'dir.}$$

Böylece,

$$\{\Phi_n\} = \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, (n=1, 2, \dots) \quad (4.8.7)$$

cümlesi, problemin ortonormal fonksiyon cümlesidir.

4.9 Özfonksiyon Açılımı

Teorem 4.9.1 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (4.1.2) ve (4.1.3) Sturm-Liouville denkleminin ortonormal özfonksiyonlar dizisi olsun. f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, f' , $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli ve f , (4.1.3) sınır koşullarını sağlıyor olsun.

$$C_n = \int_a^b r(x) f(x) \Phi_n(x) dx \quad (4.9.1)$$

katsayılar olmak üzere, f fonksiyonu $L_2[a, b]$ Hilbert uzayında

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x) \quad (4.9.2)$$

biçiminde seri açılımına sahiptir.

İspat: $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (4.1.2) ve (4.1.3) Sturm-Liouville denkleminin ortonormal özfonksiyonlar dizisi olmak üzere $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Phi_n(x) \quad (4.9.3)$$

özfonksiyonlar serisi biçiminde gösterilebilir olsun. $C_1, C_2, C_3 \dots$ katsayılarını belirlemek için (4.9.3) eşitliğinin her iki tarafını $r(x)\Phi_m(x)$ ile çarpıp a'dan b'ye integrallersek

$$\int_a^b r(x) f(x) \Phi_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_a^b r(x) \Phi_n(x) \Phi_m(x) dx \quad (4.9.4)$$

elde edilir. Özfonksiyonlar ortogonal olduğundan $m = n$ için

$$\int_a^b r(x) f(x) \Phi_m(x) dx = C_n \int_a^b r(x) [\Phi_n(x)]^2 dx \quad (4.9.5)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$C_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) \Phi_m(x) dx}{\int_a^b r(x) [\Phi_n(x)]^2 dx} \quad (4.9.6)$$

olur. Böylece $f(x)$ fonksiyonunu verilen Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları cinsinden ifade eden ve C_n katsayıları (4.9.6) eşitliği ile elde edilen (4.9.1) özfonksiyon serisi tanımlanmış olur.

Homojen olmayan

$$L[y] + \mu ry = f, (a < x < b) \quad (4.9.7)$$

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9.8)$$

sınır değer problemini gözönüne alalım. Bu probleme uygun

$$L[y] + \mu ry = 0 \quad (4.9.9)$$

$$\begin{aligned} a_1 y(a) + a_2 y'(a) &= 0 \\ b_1 y(b) + b_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9.10)$$

homojen problemin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ olsun. Bu takdirde ϕ_n fonksiyonu

$$L[\phi_n] + \lambda_n r \phi_n = 0 \quad (4.9.11)$$

$$\begin{aligned} a_1 \phi_n(a) + a_2 \phi_n'(a) &= 0 \\ b_1 \phi_n(b) + b_2 \phi_n'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (4.9.12)$$

eşitliklerini sağlar. Bu fonksiyonlar $[a, b]$ aralığında r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Yani,

$$\int_a^b r(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0 \text{ eşitliği sağlanır. Şimdi } y \text{ fonksiyonunu}$$

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (4.9.13)$$

biçiminde tanımlayalım. c katsayılarını öyle seçmeye çalışacağız ki, y fonksiyonu (4.9.7), (4.9.8) problemini sağlasın. Her bir ϕ_n , (4.9.8) sınır koşullarını sağladığından, y fonksiyonu da (4.9.8) sınır koşullarını sağlar. Şimdi

$$L\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\right] + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = f(x)$$

eşitliğinden

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n L[\phi_n(x)] + \mu r \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) = f(x)$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $L[\phi_n] = -\lambda_n r \phi_n$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n) c_n r \phi_n(x) = f(x) \quad (4.9.14)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi eşitliğin her iki yanını $\phi_m(x)$ ile çarpıp ve a'dan b'ye integral alınırsa ve $\{\phi_n\}$ fonksiyonlar sisteminin ortogonalliğinden yararlanılırsa

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n) c_n r \phi_n(x) \phi_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu - \lambda_n) c_n \int_a^b r \phi_n(x) \phi_m(x) dx$$

$$(\mu - \lambda_m) c_m \int_a^b r \phi_m^2(x) dx = \int_a^b f(x) \phi_m(x) dx$$

eşitliği bulunur. Buradan

$$\gamma_m = \frac{\int_a^b f(x) \phi_m(x) dx}{\int_a^b r \phi_m^2(x) dx} \quad (4.9.15)$$

gösterirsek, $(\mu - \lambda_m) c_m = \gamma_m$ elde edilir. Yani (4.9.13) fonksiyonunun (4.9.7) denkleminin çözümü olabilmesi için, C_n katsayılarının

$$(\mu - \lambda_n) C_n = \gamma_n, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.9.16)$$

bağıntılarını sağlaması gerekir. Böylece iki durum ortaya çıkabilir:

1. Birinci durumda μ özdeğer olmasın. Yani, her $n=1,2,3,\dots$ için $\mu \neq \lambda_n$ 'dir.

Bu durumda (4.9.15) den

$$C_n = \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n}, (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.9.17)$$

elde edilir. Böylece homojen olmayan (4.9.7)-(4.9.8) sınır değer problemlerinin

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n(x) \quad (4.9.18)$$

biçiminde yalnız bir çözümü vardır.

2. İkinci durumda ise μ özdeğerlerden birine eşit olsun. $\mu = \lambda_N$ olursa,

(4.9.15) denklemi $n=N$ için $0.C_N = \gamma_N$ biçimindedir.

a) $\mu = \lambda_N$ ve $\gamma_N \neq 0$ ise (4.9.15) denkleminde C_N katsayılarını elde etmek mümkün değildir. Böylece (4.9.7)-(4.9.8) sınır değer problemlerinin çözümü yoktur.

b) $\mu = \lambda_N$ ve $\gamma_N = 0$ ise (4.9.15) denklemi her C_N için sağlanır. Böylece (4.8.3)-(4.8.4) sınır değer problemlerinin çözümü vardır ve tek değildir.

$$y = C_N \phi_N + \sum_{n=1, n \neq N}^{\infty} \frac{\gamma_n}{\mu - \lambda_n} \phi_n$$

biçimindedir. $\gamma_N = 0$, (4.9.15) denklemi gereği

$$\int_a^b f(x) \phi_N(x) dx = 0$$

olmasını gerektirir. Yani, $\mu = \lambda_N$ olması halinde (4.9.7)-(4.9.8) sınır değer probleminin yalnız ve yalnız f 'nin λ_N 'e karşılık gelen özfonksiyona dik (ortogonal) olması halinde çözülebilir. Bu koşula Fredholm Alternetifi denir. (Çağlayan, 2012)

5. STURM-LIOUVILLE AÇILIMI

5.1 Sturm-Liouville Denklemi

Bir L lineer operatörü verilsin ve

$$Ly = \lambda y \quad (5.1.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada λ bir sabit parametredir. Bu denklemi sağlayan fonksiyona özfonksiyon, λ 'nın ilgili değerine ise özdeğer denir.

Böylece eğer $\psi_n(x)$, bir λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon ise

$$L\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \quad (5.1.2)$$

eşitliği yazılır. Bu kesimde L operatörünü

$$L \equiv q(x) - \frac{d^2}{dx^2} \quad (5.1.3)$$

biçiminde tanımlayacağız. Burada $q(x)$, verilen (a,b) aralığında tanımlı x 'in fonksiyondur. Bu durumda y , ikinci mertebeden diferansiyel denklemi sağladığından

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \{\lambda - q(x)\} y = 0 \quad (5.1.4)$$

biçimde yazılabilir ve $\psi_n(x)$, y yerine yazılırsa

$$\psi_n''(x) + \{\lambda_n - q(x)\} \psi_n(x) = 0 \quad (5.1.5)$$

denklemi elde edilir. Eğer bu denklemi alıp n 'nin yerine m yazar, sırasıyla $\psi_n(x)$ ve $\psi_m(x)$ ile çarpıp çıkarırsak

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \psi_m(x) \psi_n(x) &= \psi_m(x) \psi_n''(x) - \psi_n(x) \psi_m''(x) \\ &= \frac{d}{dx} \{ \psi_m(x) \psi_n'(x) - \psi_n(x) \psi_m'(x) \} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, eğer $\psi_m(x)$ ve $\psi_n(x)$, $x=a$ ve $x=b$ ’de ikisi de sıfırsa, her iki tarafı a’ dan b’ye integrallersek

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \psi_m(x) \psi_n(x) dx = [\psi_m(x) \psi_n'(x) - \psi_n(x) \psi_m'(x)]_a^b = 0$$

elde edilir. Eğer $\lambda_n \neq \lambda_m$ oluyorsa

$$\int_a^b \psi_m(x) \psi_n(x) dx = 0 \quad (5.1.6)$$

‘dır. $\psi_n(x)$ özfonksiyonları $\alpha_n = \left(\int_a^b \psi_n^2(x) dx \right)^{-1/2}$ sabiti ile çarpılırsa elde edilen

$\phi_n(x) = \alpha_n \psi_n(x)$ özfonksiyonları için

$$\int_a^b \phi_n^2(x) dx = 1 \quad (5.1.7)$$

eşitliğini elde edilir. Böylece $\phi_n(x)$ fonksiyonları bir ortonormal sistem oluşturur.

Asıl problem, bir keyfi $f(x)$ fonksiyonunun hangi şartlar altında bayağı Fourier serisi cinsinden açılabileceğini belirlemektir. Bundan sonra (ψ_n) özfonksiyonlar sistemini ortonormal kabul edeceğiz. f fonksiyonunun Fourier serisine açılımı

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \quad (5.1.8)$$

biçiminde olsun. $\psi_m(x)$ ile çarpılıp, a’ dan b’ye integrali alınırsa

$$c_m = \int_a^b f(x) \psi_m(x) dx \quad (5.1.9)$$

biçiminde ifade edilir.

5.2 Homojen Olmayan Sturm-Liouville Problemi

Şimdi homojen olmayan

$$\Phi'' + \{\lambda - q(x)\} \Phi(x) = f(x) \quad (5.2.1)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu durumda $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun (5.1.4) denkleminin çözümleri ile ifade edilebilir olduğunu göstereceğiz.

ϕ ve ψ fonksiyonlarının $W(\phi, \psi) = \phi(x) \cdot \psi'(x) - \phi'(x) \cdot \psi(x)$ biçimindeki Wronskiyanı $W_x(\phi, \psi)$ ya da kısaca $W(\phi, \psi)$ biçiminde gösterilsin. O zaman $\phi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ (5.1.4) denkleminin $W(\phi, \psi) = 1$ olacak biçimde iki çözümü olsun. O zaman (5.2.1) in çözümü

$$\Phi(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) \int_a^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \phi(x, \lambda) \int_x^b \psi(y, \lambda) f(y) dy \quad (5.2.2)$$

biçiminde elde edilir. Eğer (5.2.2) ifadesini (5.2.1)-de yerine yazarsak bunun böyle olduğu görülür.

Şimdi

$$\Phi(x) = \Phi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \quad (5.2.3)$$

fonksiyonunun özelliklerine bakalım. Kolayca gösterebiliriz ki

$$\begin{aligned} \Phi''(x) - q(x)\Phi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \{\psi_n''(x) - q(x)\psi_n(x)\}}{\lambda - \lambda_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-c_n \lambda_n \psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_n} \right) = f(x) - \lambda \Phi(x) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece homojen olmayan denklemin çözümü homojen denklemin çözümleri ile ifade edilmiş olur.

5.3 Sturm Liouville Açılımı

Kabul edelim ki $q(x)$, x 'in bir reel fonksiyonu (a,b) aralığının tüm noktalarında sürekli olsun. Klasik Sturm-Liouvillede (a,b) aralığı sınırlı bir aralık ve $q(x)$ $x \rightarrow a$ ve $x \rightarrow b$ de sonlu limite sahiptir. (Titchmarsh,1962)

Teorem 5.1 Eğer $q(x)$ yukarıdaki şartları sağlarsa ve α verilirse (5.1.4) denkleminin $a \leq x \leq b$ aralığında

$$\phi(a) = \sin \alpha, \quad \phi'(a) = -\cos \alpha \quad (5.3.1)$$

şartlarını sağlayan $\phi(x) = \phi(x, \lambda)$ çözümü vardır. Her bir x için $\phi(x, \lambda)$, λ 'nın bir tam fonksiyonudur.

(5.1.4) denkleminin $\phi(x, \lambda), \chi(x, \lambda)$ çözümleri

$$\left. \begin{aligned} \phi(a, \lambda) &= \sin \alpha, & \phi'(a, \lambda) &= -\cos \alpha \\ \chi(b, \lambda) &= \sin \beta, & \chi'(b, \lambda) &= -\cos \beta \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2)$$

şartlarını sağlayan çözümler olsun.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} W(\phi, \chi) &= \phi(x) \chi''(x) - \chi(x) \phi''(x) \\ &= \{q(x) - \lambda\} \phi(x) \chi(x) - \{q(x) - \lambda\} \chi(x) \phi(x) = 0 \end{aligned}$$

olduğu için $W(\phi, \chi)$ x 'ten bağımsızdır ve sadece λ 'nın bir fonksiyonudur ve $w(\lambda)$ olarak gösterilir. Yukarıdaki teorem açıkça gösterir ki

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{\chi(x, \lambda)}{w(\lambda)} \int_a^x \phi(y, \lambda) f(y) dy + \frac{\phi(x, \lambda)}{w(\lambda)} \int_x^b \chi(y, \lambda) f(y) dy \quad (5.3.3)$$

biçiminde λ 'nın bir tam fonksiyonudur.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu sürekli ise, $\Phi(x, \lambda)$ (5.2.1) denklemini sağlıyorsa sınır koşullarından λ 'nın tüm değerleri için

$$\left. \begin{aligned} \Phi(a, \lambda) \cos \alpha + \Phi'(a, \lambda) \sin \alpha &= 0 \\ \Phi(b, \lambda) \cos \beta + \Phi'(b, \lambda) \sin \beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4)$$

elde edilir. $w(\lambda)$ 'nin tüm sıfırlarının $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ gibi reel ve basit sıfır olduğunu kabul edelim. Sonra $\phi(x, \lambda_n)$ ve $\chi(x, \lambda_n)$ özfonksiyonlarının wronskiyanı sıfır olduğundan, $\chi(x, \lambda_n), \phi(x, \lambda_n)$ 'in

$$\chi(x, \lambda_n) = k_n \phi(x, \lambda_n) \quad (5.3.5)$$

biçiminde sabitle çarpımıdır. Böylece $\phi(x, \lambda)$ 'in residüsü $\lambda = \lambda_n$ için

$$\frac{k_n}{w'(\lambda_n)} \phi(x, \lambda_n) \int_a^b \phi(y, \lambda_n) f(y) dy$$

ifadeye eşit olur. Yukarıdaki formüller gösterir ki $f(x)$ fonksiyonun açılımı

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{w'(\lambda_n)} \phi(x, \lambda_n) \int_a^b \phi(y, \lambda_n) f(y) dy \quad (5.3.6)$$

biçimindedir. Bu Sturm- Liouville açılımıdır.

Bayağı Fourier Serisi $q(x)=0$ durumu için elde edilir. Bu durumda (5.1.4) denklemi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda y = 0$$

biçimindedir ve bu denklem için

$$\phi(x, \lambda) = -\frac{\sin\{(x-a)\sqrt{\lambda}\}}{\sqrt{\lambda}}, \quad \chi(x, \lambda) = \frac{\sin\{(b-x)\sqrt{\lambda}\}}{\sqrt{\lambda}}$$

$$w(\lambda) = \frac{\sin\{(b-a)\sqrt{\lambda}\}}{\sqrt{\lambda}}.$$

biçiminde elde edilebilir. Böylece $w(\lambda)$ 'nın sıfırları, $\lambda_n = \{n\pi/(b-a)\}^2, (n=1, 2, \dots)$.

$$w'(\lambda) = \frac{b-a}{2\lambda_n} \cos\{(b-a)\sqrt{\lambda_n}\} = \frac{(-1)^n (b-a)}{2\lambda_n}$$

Böylece (5.3.6) açılımı $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ durumu için

$$f(x) = \frac{2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \int_a^b \sin\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) f(y) dy$$

Fourier sinüs serisini verir.

Benzer şekilde $\alpha = \frac{1}{2}\pi, \beta = \frac{1}{2}\pi$ alınarak

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy + \frac{2}{b-a} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi \frac{x-a}{b-a}\right) \int_a^b \cos\left(n\pi \frac{y-a}{b-a}\right) f(y) dy$$

kosinüs serisi elde edilir.

Teorem 5.2 $f(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında integrallenebilir fonksiyon olsun. Eğer $a < x < b$ için (5.3.6) de ifade edilen Sturm Liouville açılımı, bayağı bir Fourier serisi ile eşyakınsar. Özellikle, eğer $f(x), x'$ in yakın komşuluğunda sınırlı varyasyona

sahipse, $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ 'a yakınsar.

Şimdi

$$\frac{1}{2\pi i} \int \Phi(x, \lambda) d\lambda, \quad (5.3.7)$$

integralini gözönüne alalım. Burada $\Phi(x, \lambda)$ (5.3.3) ifadesi ile tanımlı ise

λ -düzleminde aşağıdaki biçimde tanımlı olan büyük kapalı çevrel çizgi olsun. $\lambda = s^2$ ve $s = \sigma + it$ gösterelim. s -düzlemdeki çeyrek kareyi oluşturan aşağıdaki doğru parçalarını tanımlayalım;

$$\sigma = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} \right)$$

$$t = \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} \quad \left(0 \leq \sigma \leq \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi}{b-a} \right)$$

Bu eğriye uygun gelen burada λ düzlemindeki eğrinin üst düzlemdeki kısmını alt düzleme simetrik yansıtalım. Böylece bir kapalı eğri elde ediyoruz.

Kolayca gösterebiliriz ki (5.3.7) integrali özfonksiyonlar sistemine açılımına sonlu kısmi toplamına eşit olacak .

Şimdi ise $\sin \alpha \neq 0, \sin \beta \neq 0$ olduğunu düşünelim. Bunun için

$$\phi(y, \lambda) = \cos \{s(y-a)\} \sin \alpha + O \left\{ |s|^{-1} e^{i(y-a)} \right\}$$

$$\chi(x, \lambda) = \cos \{s(b-x)\} \sin \beta + O \left\{ |s|^{-1} e^{i(b-x)} \right\}$$

asimptotik eşitliklerinden yararlanacağız.

Yukarıdaki çeyrek karede (s- düzleminde tanımlanan)

$$w(\lambda) = s \cdot \sin \{s(b-a)\} \sin \alpha \sin \beta + O \left\{ e^{i(b-a)} \right\} \quad (5.3.8)$$

asimptotik eşitliği sağlar.

Çeyrek karede, $|\sin \{s(b-a)\}| > A e^{i(b-a)}$ eşitsizliği sağlandığı için

$$\frac{1}{w(\lambda)} = \frac{1}{s \cdot \sin \{s(b-a)\} \sin \alpha \sin \beta} \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{|s|} \right) \right\}$$

asimptotik eşitliği ve dolayısıyla

$$\frac{\chi(x, \lambda) \phi(x, \lambda)}{w(\lambda)} = \frac{\cos\{s(b-x)\} \cos\{s(y-a)\}}{s \sin\{s(b-a)\}} + O\left\{\frac{e^{i(y-x)}}{|s|}\right\}. \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \frac{\chi(x, \lambda)}{w(\lambda)} \int_a^x \phi(y, \lambda) f(y) dy = \\ = \int_a^x \frac{\cos\{s(b-x)\} \cos\{s(y-a)\}}{s \sin\{s(b-a)\}} f(y) dy + O\left\{\frac{1}{|s|^2} \int_a^x e^{i(y-x)} |f(y)| dy\right\}. \end{aligned}$$

asimptotik eşitlikleri sağlanacak.

$0 < \delta < x - a$ olduğunu kabul edelim. O halde sonuncu terim

$$O\left(\frac{e^{-\delta i}}{|s|^2}\right) + O\left\{\frac{1}{|s|^2} \int_{x-\delta}^x |f(y)| dy\right\}$$

asimptotik ifadesine eşit olacak

$dy/ds = 2s$ olduğu için bu terim (5.3.7) integralinde aşağıdaki toplamayı ortaya çıkarıyor.

$$\int \left\{ e^{-\delta i} + \int_{x-\delta}^x |f(y)| dy \right\} O\left(\frac{1}{|s|}\right) |ds| = O\left\{ \int e^{-\delta i} \left| \frac{ds}{s} \right| \right\} + \left\{ \int_{x-\delta}^x |f(y)| dy \right\}$$

δ 'nın seçilmesi ile ikinci terim istenilen kadar küçük yapılabilir ve δ 'yı sabit tutarak $n \rightarrow \infty$ alınarak limite geçilirse 2. terim sıfıra yaklaşır, çünkü bu ifade aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} O\left\{ \frac{1}{n} \int_0^{\left(\frac{n+1}{3}\right)\pi/(b-a)} e^{-\delta i} dt \right\} + O\left\{ \frac{1}{n} \int_0^{\left(\frac{n+1}{3}\right)\pi/(b-a)} e^{-\delta \left(\frac{n+1}{3}\right)\pi/(b-a)} d\sigma \right\} \\ = O\left(\frac{1}{n\delta}\right) + O\left(e^{-\delta \left(\frac{n+1}{3}\right)\pi/(b-a)}\right) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Benzer şekilde $x \leq y \leq b$ aralığındaki $\Phi(x, \lambda)$ 'nin diğer terimlerinde de uygulanır.

Böylece (5.3.7) ifadesi

$$\frac{1}{2\pi i} \int \left\{ \int_a^x \frac{\cos\{s(b-x)\} \cos\{s(y-a)\}}{s \sin\{s(b-a)\}} f(y) dy + \right. \\ \left. + \int_x^b \frac{\cos\{s(b-y)\} \cos\{s(x-a)\}}{s \sin\{s(b-a)\}} f(y) dy \right\} d\lambda + o(1) \quad (5.3.9)$$

integraline eşittir. Bu formüldeki ilk terim $f(x)$ 'in Fourier Kosinüs Serisinin kısmi toplamına eşittir. Bunu residü hesabıyla kolayca gösterebiliriz. Bununla da teoremin ispatı bitti.

Bu teorem Sturm-Liouville açılımı ile Fourier Serileri arasında ilişkiyi göstermektedir. $\sin \alpha = 0$ ya da $\sin \beta = 0$ durumları içinde teorem benzer şekilde ispatlanabilir.

f fonksiyonunun, x noktasının komşuluğunda sınırlı varyasyonlu olduğu durumda, Fourier serileri teorisine başvurmadan da sonuç kolaylıkla elde edilebilir. İlk adımda

$$\frac{\cos\{s(b-x)\} \cos\{s(y-a)\}}{\sin\{s(b-a)\}} = O \left\{ \frac{e^{i(b-x)+i(y-a)}}{e^{i(b-a)}} \right\} = O \left(e^{-i(x-y)} \right)$$

elde edilir. $a \leq y \leq x - \delta$ aralığında, $f(y) = j(y) + k(y)$ olsun;

burada $j(y)$ mutlak sürekli fonksiyondur ve

$$\int_a^{x-\delta} |k(y)| dy < \varepsilon \text{ 'dır. Buradan}$$

$$\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{2} \right) \pi / (b-a) \int_0^{x-\delta} dt \int_a^{x-\delta} e^{-i(x-y)} |k(y)| dy \leq \int_0^\infty e^{-\delta t} dt \int_a^{x-\delta} |k(y)| dy < \varepsilon / \delta \text{ elde edilir.}$$

Kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{x-\delta}^x \cos\{s(b-x)\} j(y) dy = O \left(\frac{e^{i(x-\delta-a)}}{|s|} \right)$$

eşitliği elde edilir ki bu ise sıfıra yakınsayan bir terimdir.

$$\int_{x-\delta}^x \frac{\cos\{s(b-x)\}\cos\{s(y-a)\}}{\sin\{s(b-a)\}} f(y) dy$$

ifadesini inceleyelim. Burada $f(y)$ yerine $f(x-0)$ yazarsak

$$\begin{aligned} f(x-0) \frac{\cos\{s(b-x)\}}{s^2 \sin\{s(b-a)\}} [\sin\{s(x-a)\} - \sin\{s(x-a-\delta)\}] \\ = \frac{f(x-0)}{2s^2} \{1 + O(e^{-\delta i})\} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu ise (5.3.7) integralinde üst yarıya uygun olan $\frac{1}{2}\pi if(x) + o(1)$ terimini ortaya çıkarır. Böylece f fonksiyonu sınırlı varyasyonlu olduğu için,

$f(x-0) - f(y) = g(y) - h(y)$ yazılabilir. Burada $g(y)$ ve $h(y)$ fonksiyonları pozitif ve monoton azalan ve $y \rightarrow x$ iken sıfıra yakınsar. İkinci ortalama değer teoreminden,

$$\begin{aligned} \int_{x-\delta}^x re \cos\{s(y-a)\} g(y) dy &= g(x-\delta) \int_{x-\delta}^{\xi} re \cos\{s(y-a)\} dy \\ &= g(x-\delta) re \int_{x-\delta}^{\xi} \cos\{s(y-a)\} dy = O\left(\frac{g(x-\delta)}{|s|} e^{i(x-a)}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (5.3.7) ifadesinde

$$\int O\left(\frac{g(x-\delta)}{\lambda}\right) |d\lambda| = O\{g(x-\delta)\}$$

terimini ortaya çıkarıyor ki, burada da δ 'yı istediğimiz kadar küçük seçebiliriz.

Benzer durumlar $h(y)$ içeren terimler ile $y > x$ olan terimler için de geçerlidir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Şimdi ise

$$\psi_n(x) = \left(\frac{k_n}{w'(\lambda_n)} \right)^{\frac{1}{2}} \phi(x, \lambda_n),$$

yazarak (5.1.6)-(5.1.9) formüllerinin geçerliliğini görebiliriz.

Eğer $x=a$ olursa benzer sonuç geçerli olur ve $\sin \alpha \neq 0$ durumu aynı yöntemle kanıtlanabilir. Eğer $\sin \alpha = 0$ olursa, $\Phi(x, \lambda)$ sıfır olur ve $f(a+0) = 0$ durumu hariç benzer sonuç geçerli olmaz. $x=b$ durum benzer biçimde incelenir.

Ayrıca alttaki sonucu elde ederiz:

Teorem 5.3 Eğer $f(x)$, (a, b) aralığında integrallenebilir fonksiyon ve $a < x < b$ ise

$$\Phi(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n \psi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \quad (5.3.10)$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Eğer

$$\int \frac{\Phi(x, \lambda)}{z - \lambda} dz$$

integrali kapalı eğri üzere benzer şekilde hesaplanırsa kolayca (5.3.10) açılımı elde edilir.

Not: Bu seri $\Phi(x, \lambda)$ 'nin Sturm-Liouville açılımıdır ve

$$\frac{c_n}{\lambda - \lambda_n} = \int_a^b \Phi(x, \lambda) \psi_n(x) dx. \quad (5.3.11)$$

ifadesi kolayca gösterilebilir.

6. İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN NÜMERİK ÇÖZÜM METODLARI

6.1 Sonlu Farklar Metodu

Sonlu farklar metodu, sınır değer probleminin $[a, b]$ aralığını N tane noktaya bölerek kesikli bir sistem haline çevirmek esasına dayanır. Böylece sınır değer problemi cebirsel eşitlik haline dönüşmüş olur.

Sonlu fark yöntemi ana özelliği uygun farklar ile türev ifadelerini değiştirerek ayrık denklemler elde etmektir.

Şimdi aşağıdaki sınır-değer problemini göz önüne alalım.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (6.1.1)$$

$$\begin{aligned} y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

(6.1.1)-(6.1.2) sınır-değer problemi sonlu farklar yöntemiyle birkaç adımda çözülen bir sistem haline gelir. (Kahvecioğlu,2004)

İlk adım olarak, sınır değer probleminin tanım aralığı olan $[a, b]$ aralığı N tane eşit aralığa bölünür.

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{N-1}, x_N],$$

Burada, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$ olduğu kabul edilir, $x_0, x_1, \dots, x_N$ noktalarına ise düğüm noktası denir.

$$h = \frac{b-a}{N} \quad (6.1.3)$$

ifadesine ise adım aralığı denir. Sonlu farklar metodunda N ne kadar büyük seçilirse yaklaşık çözümlerdeki hata miktarı o kadar azalır.

Düğüm noktaları

$$x_i = a + i h, \quad 0 \leq i \leq N \quad (6.1.4)$$

eşitliği yardımıyla belirlendikten sonra ikinci adımda, sınır değer probleminde bulunan türev ifadelerinin yerine yaklaşık değer ifadeleri yazılır. Bu ifadeler ise Taylor Serileri yardımıyla elde edilir. Taylor Serileri

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots \quad (6.1.5)$$

$$x_{i+1} - x_i = h$$

olarak tanımlandığından, (6.1.5) Taylor serisi açılımından $y'(x_i)$ ifadesi çekilirse, birinci türev için sonlu farklar ifadeleri sırasıyla,

1. İleri fark bölünmüş sonlu farklar formülü

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} + o(h) \quad (6.1.6)$$

2. Geri fark bölünmüş sonlu farklar formülü

$$y'(x_i) = \frac{y(x_i) - y(x_{i-1})}{h} + o(h) \quad (6.1.7)$$

3. Merkezi fark sonlu farklar formülü

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))}{2h} + o(h^2) \quad (6.1.8)$$

biçiminde elde edilir.

(6.1.5) Taylor serisi açılımından $y''(x_i)$ ifadesi çekilirse, ikinci türev için sonlu farklar ifadeleri sırasıyla,

1- İleri fark bölünmüş sonlu farklar formülü

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+2}) - 2y(x_{i+1}) + y(x_i)}{h^2} + o(h) \quad (6.1.9)$$

2- Geri fark bölünmüş sonlu farklar formülü

$$y''(x_i) = \frac{y(x_i) - 2y(x_{i-1}) + y(x_{i-2}))}{h^2} + o(h) \quad (6.1.10)$$

3- Merkezi fark bölünmüş sonlu farklar formülü

$$y''(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))}{h^2} + o(h^2) \quad (6.1.11)$$

biçiminde ifade edilir.

Merkezi farklarda kesme hatasının mertebesinin h^2 olması, merkezi farklarla türev hesaplamasının daha doğru sonuç vereceğini gösterir. Daha yüksek doğrulukta bölünmüş fark türev formülleri, Taylor Serisi'nden daha fazla terim almak yoluyla elde edilir.

(6.1.8)-(6.1.11) merkezi fark türev ifadeleri (6.1.1) sınır değer probleminde yerine yazılarak

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (6.1.12)$$

$$\left(1 - \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i-1} + (-2 + h^2q_i)y_i + \left(1 + \frac{1}{2}hp_i\right)y_{i+1} = h^2 f(x_i), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (6.1.13)$$

$$y_0 = \alpha, \quad y_{N+1} = \beta \quad (6.1.14)$$

eşitlikleri elde edilir. Elde edilen yaklaşık sonuç eşitliği, sınır değerleri ile birlikte seçilen x_i düğüm noktalarına uygulanarak sonlu sayıda bilinmeyenli denklem sistemi elde edilir.

Sınır koşulları $i=1$ 'den $i=N-1$ 'e kadar denklemde yerine yazılarak elde edilen denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} -2 + h^2 q_1 & 1 + \frac{1}{2} h p_1 & . & . & . \\ 1 - \frac{1}{2} h p_2 & -2 + h^2 q_2 & 1 + \frac{1}{2} h p_2 & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & -2 + h^2 q_{N-1} & 1 + \frac{1}{2} h p_{N-1} \\ . & . & . & 1 - \frac{1}{2} h p_N & -2 + h^2 q_N \end{bmatrix} \quad (6.1.15)$$

biçiminde elde edilir. Denklem sisteminde bulunan denklemlerin sabit terimleri ise,

$$b_i = \begin{cases} h^2 f_1 - \left(1 - \frac{1}{2} h p_1\right) \alpha & , \quad i = 1 \\ h^2 f_i, & , \quad i = 2, 3, \dots, N-2 \\ h^2 f_{N-1} - \left(1 + \frac{1}{2} h p_{N-1}\right) \beta, & i = N-1 \end{cases} \quad (6.1.16)$$

şeklinde elde edilir. $y^T = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-1}, y_N)$ olmak üzere

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_{N-1} \\ y_N \end{bmatrix} \quad (6.1.17)$$

biçimde yazılırsa , $Ay = b$ lineer sistemi tridiagonaldir ve tridiagonal lineer sistemlerin çözümü çok iyi çalışılmış bir problemdir. (Atkinson, 2011)

Örnek 6.1.1

$$\begin{aligned} y'' - y &= 0 \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 1 \end{aligned} \quad (6.1.18)$$

sınır değer probleminin özdeğerlerini bulalım.

Çözüm:

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

merkezi fark türev ifadesi (6.1.18) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - y_i &= 0 \quad \text{ve} \quad y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 y_i = 0 \\ y_{i-1} - (2 + h^2)y_i + y_{i+1} &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

denklemleri elde edilir. Sınır koşulları $y_0 = 0$, $y_{10} = 1$ olmak üzere, $N=10$ seçilirse

$$h = \frac{1-0}{10} = 0.1 \quad \text{adım aralığı elde edilir. Sınır koşulları ve adım aralığı}$$

(6.1.19) denkleminde sırasıyla yerine yazılarak

$$y_0 - (2 + (0.1)^2)y_1 + y_2 = 0$$

$$y_1 - (2 + (0.1)^2)y_2 + y_3 = 0$$

...

$$y_8 - (2 + (0.1)^2)y_9 + y_{10} = 0$$

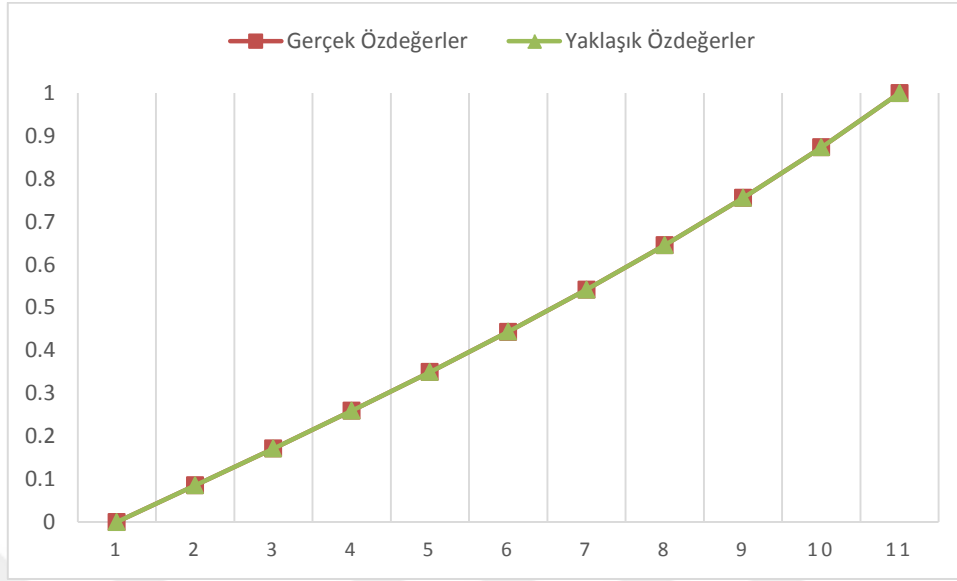
lineer denklem sistemi elde edilir. Lineer denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} -2.01 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2.01 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2.01 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2.01 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2.01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -1 \end{bmatrix}$$

matris formunda yazılabilir. Bu sistemin çözümü ile yaklaşık çözümler elde edilmiş olur. Sistemin çözümü Matlab programı ile yapılmış olup yaklaşık çözümler ve gerçek çözümler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

x_i	Gerçek Özdeğerler	Yaklaşık Özdeğerler	Hata Yüzdesi
0	0	0	0.00%
0.1	0.085234	0.085244	1.17%
0.2	0.171320	0.171341	1.23%
0.3	0.259122	0.259152	1.16%
0.4	0.349517	0.349554	1.06%
0.5	0.443409	0.443452	0.97%
0.6	0.541740	0.541784	0.81%
0.7	0.645493	0.645534	0.64%
0.8	0.755705	0.755739	0.45%
0.9	0.873482	0.873502	0.23%
1	1	1	0.00%

Tablo 6.1.1 (Örnek 6.1.1 özdeğerler tablosu)



Şekil 6.1.1 (Örnek 6.1.1 özdeğerler grafiği)

Örnek 6.1.2 $y'' = 12x^2$ $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ (6.1.20)

sınır değer probleminin gerçek çözümü ile sonlu farklar yöntemiyle yaklaşık çözümünü bulup karşılaştıralım.

Çözüm: (6.1.20) denkleminin gerçek çözümü

$$y = x^4 + c_1x + c_2$$

olup sınır koşulları uygulanırsa

$$y(0) = 0, C_2 = 0, y(1) = 0, C_1 = -1$$

elde edilir. $[0,1]$ aralığını 10 parçaya bölerek gerçek çözümleri hesaplırsak

x_i	Gerçek çözümler
0	0
0.1	-0.0999
0.2	-0.1984
0.3	-0.2919
0.4	-0.3744
0.5	-0.4375
0.6	-0.4704
0.7	-0.4599
0.8	-0.3904
0.9	-0.2439
1	1

Tablo 6.1.2: (Örnek 6.1.2 için gerçek çözüm tablosu)

Şimdi ise sonlu farklar yöntemini uygulayalım:

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad \text{türev ifadesi (6.1.20) probleminde yerine yazılırsa}$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 12x_i^2$$

denklemleri elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2 12x_i^2 \quad (6.1.21)$$

eşitliği elde edilmiş olur.

N=10 için adım aralığını $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$ seçelim.

Sınır değerleri ile düğüm noktalarını değerlerini (6.1.21) denkleminde yerine yazarak

$$\begin{aligned}
y_0 &= 0 \\
y_1 - 2y_2 + y_3 &= 12h^2 x_2^2 \\
y_2 - 2y_3 + y_4 &= 12h^2 x_3^2 \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
y_7 - 2y_8 + y_9 &= 12h^2 x_8^2 \\
y_{i+1} &= 0
\end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Lineer denklem sistemi matris formunda yazılarak

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_8 \\ y_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12h^2 x_1^2 \\ 12h^2 x_2^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 12h^2 x_9^2 - 1 \end{bmatrix}$$

ifadesi elde edilmiş olur. Sistem çözülerek yaklaşık çözümler elde edilmiş olur.

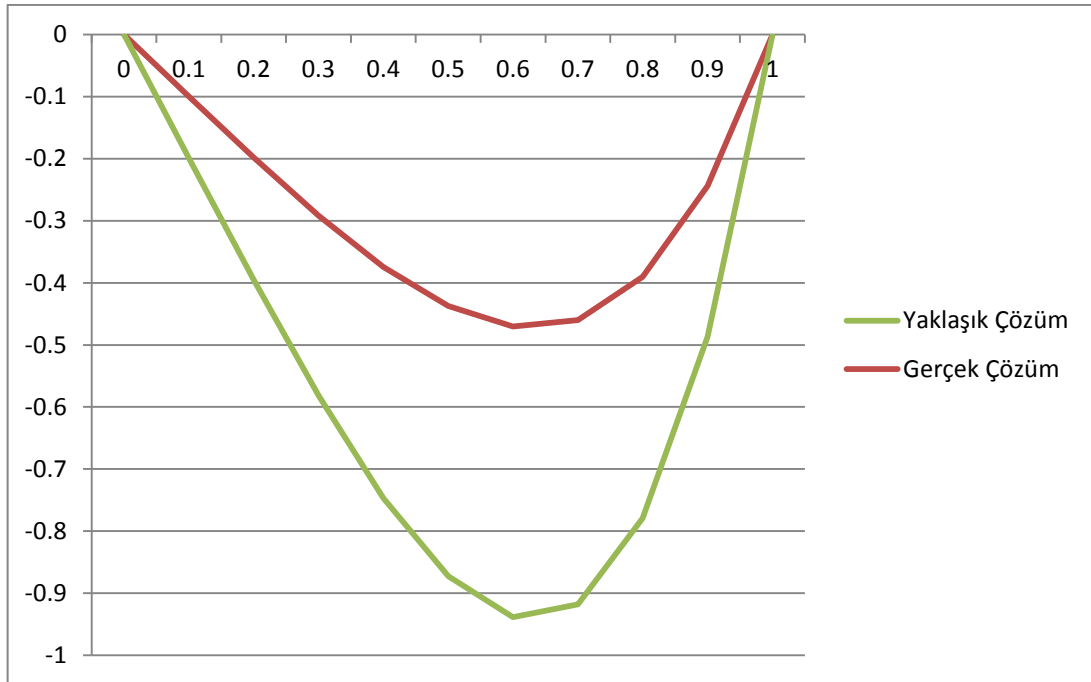
i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
y_i	-0.099	-0.1968	-0.2898	-0.372	-0.435	-0.468	-0.4578	-0.3888	-0.243

Tablo 6.1.3: Örnek 6.1.2 için yaklaşık çözüm tablosu

Şimdi ise örnek (6.1.2)'nin gerçek ve yaklaşık çözümlerini karşılaştıralım.

x_i	Gerçek Çözüm	Yaklaşık çözüm	Değişim %
0	0	0	0
0.1	-0.0999	-0.099	0.90%
0.2	-0.1984	-0.1968	0.81%
0.3	-0.2919	-0.2898	0.72%
0.4	-0.3744	-0.372	0.64%
0.5	-0.4375	-0.435	0.57%
0.6	-0.4704	-0.468	0.51%
0.7	-0.4599	-0.4578	0.46%
0.8	-0.3904	-0.3888	0.41%
0.9	-0.2439	-0.243	0.37%
1	1	1	0

Tablo 6.1.4 (Örnek 6.1.2) için çözüm karşılaştırma tablosu



Şekil 6.1.2 (Örnek 6.1.2) için çözüm karşılaştırma grafiği

Örnek 6.1.3

$$\begin{aligned}y'' &= \lambda y \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= 0\end{aligned}\tag{6.1.22}$$

sınır değer problemini çözelim.

Çözüm: (6.1.22) sınır değer probleminin analitik çözümü

$$y(x) = A \sin \sqrt{-\lambda} x + B \cos \sqrt{-\lambda} x\tag{6.1.23}$$

biçiminde elde edilir. Sınır koşulları yerine konulursa

$$y(0) = 0 \quad \text{için} \quad y(0) = A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \quad \text{yazılırsa} \quad B = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

$$y(1) = 0 \quad \text{için} \quad y(1) = A \sin \sqrt{-\lambda} = 0$$

$$A \neq 0 \quad \text{olmak üzere} \quad \sqrt{-\lambda_n} = n\pi \quad n = 1, 2, \dots$$

Böylece özdeğerler

$$\lambda_n = -n^2 \pi^2 \quad n = 1, 2, \dots\tag{6.1.24}$$

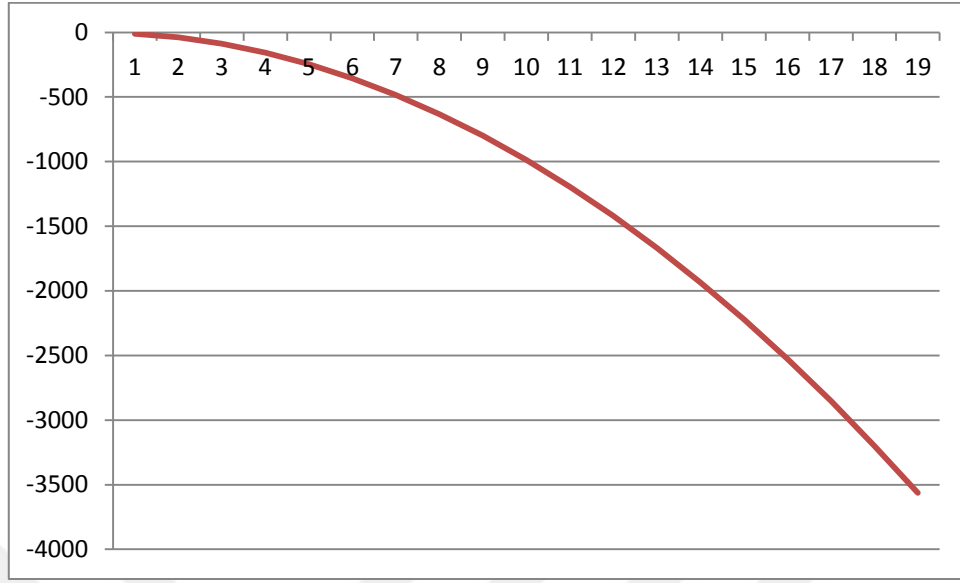
eşitliği biçiminde, özvektörler ise

$$y_n(x) = \sin n\pi x\tag{6.1.25}$$

eşitliği olarak bulunur. Buradan (6.1.22) denkleminin gerçek çözümleri aşağıdaki tablodaki gibi bulunur.

λ_1	λ_2	λ_3		λ_{18}	λ_{19}
-9.8696	-39.4784	-88.8264	...	-3197.7518	-3562.9271

Tablo 6.1.5 Örnek 6.1.3 'in gerçek özdeğerler tablosu



Şekil 6.1.3 örnek 6.1.3 'in gerçek özdeğerler değişim grafiği

Şimdi ise (6.1.22) Sturm-Liouville sınır değer problemini sonlu farklar yöntemi ile çözelim:

$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ türev ifadesini (6.1.22) denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \lambda_h y_i$$

$$y_0 = y_{N+1} = 0, \quad h = \frac{1}{N}$$

.....

$$\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \lambda_h y_i \quad (6.1.26)$$

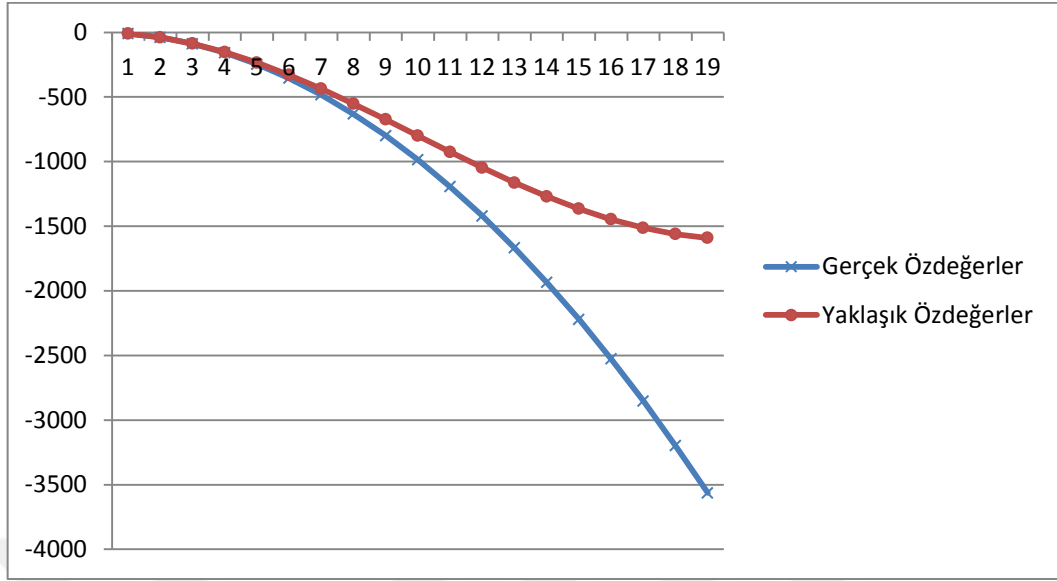
denklemini elde edilir.

$N = 20$ seçilerek adım aralığı $h = \frac{1}{20} = 0,05$ olarak bulunur. Sınır değerleri , h

adım aralığı ve düğüm noktaları (6.1.26) denkleminde yerine yazılarak

	Gerçek Özdeğerler	Yaklaşık Özdeğerler
1	-9.869604401	-9.84933
2	-39.4784176	-39.15479
3	-88.82643961	-87.19478
4	-157.9136704	-152.78640
5	-246.74011	-234.31458
6	-355.3057584	-329.77180
7	-483.6106157	-436.80760
8	-631.6546817	-552.78640
9	-799.4379565	-674.85243
10	-986.9604401	-800.00000
11	-1194.222133	-925.14757
12	-1421.223034	-1047.21360
13	-1667.963144	-1163.19240
14	-1934.442463	-1270.22820
15	-2220.66099	-1365.68542
16	-2526.618727	-1447.21360
17	-2852.315672	-1512.80522
18	-3197.751826	-1560.84521
19	-3562.927189	-1590.15067

Tablo 6.1.6 (örnek 6.1.3 'in özdeğerler karşılaştırma tablosu)



Şekil 6.1.4 (örnek 5.1.3 'in özdeğerler karşılaştırma grafiği)

Örnek 6.1.4

$$\begin{aligned} -y'' + e^x y &= \lambda y \\ y(0) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

(6.1.27)

Sturm-Liouville denkleminin özdeğerlerini sonlu farklar yöntemi ile bulalım.

Çözüm:

$-y'' + e^x y = \lambda y$ denkleminde y'' ifadesinin yerine

$$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

merkezi sonlu fark denklemi yazılırsa

$$-\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + e^{x_i} y_i = \lambda_h y_i$$

ifadesi elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler ile

$$\frac{1}{h^2} (-y_{i+1} + 2y_i - y_{i-1}) + e^{x_i} y_i = \lambda h^2 y_i \quad (6.1.28)$$

eşitliği elde edilmiş olur. Adım aralığını bulmak için $N = 10$ seçilirse adım aralığı

$$h = \frac{1-0}{10} = 0.1 \text{ bulunur.}$$

$1 \leq i \leq 9$ olmak üzere sırasıyla denklemimizde yerine yazarak

$$i = 1 \text{ için} \quad \frac{1}{h^2}(-y_2 + (2 + e^{x_1}h^2)y_1 - y_0) = \lambda_1 h^2 y_1$$

$$i = 2 \text{ için} \quad \frac{1}{h^2}(-y_3 + (2 + e^{x_2}h^2)y_2 - y_1) = \lambda_2 h^2 y_2$$

...

$$i = 9 \text{ için} \quad \frac{1}{h^2}(-y_{10} + (2 + e^{x_9}h^2)y_9 - y_8) = \lambda_9 h^2 y_9$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerde $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları da yerine yazılarak lineer denklem sistemi oluşturulur. Katsayılar matrisinin özdeğerleri bulunduğunda Sturm-Liouville denkleminin yaklaşık özdeğerleri bulunmuş olur.

$Ay = \lambda_i y$ olmak üzere,

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + h^2 e^{x_1} & 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & 2 + h^2 e^{x_2} & 1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 2 + h^2 e^{x_8} & 1 \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & 2 + h^2 e^{x_9} \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi $y^T = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_8, y_9)$ olmak üzere A matrisinin özdeğerleri

$$(A - I\lambda_i)y = \bar{0}$$

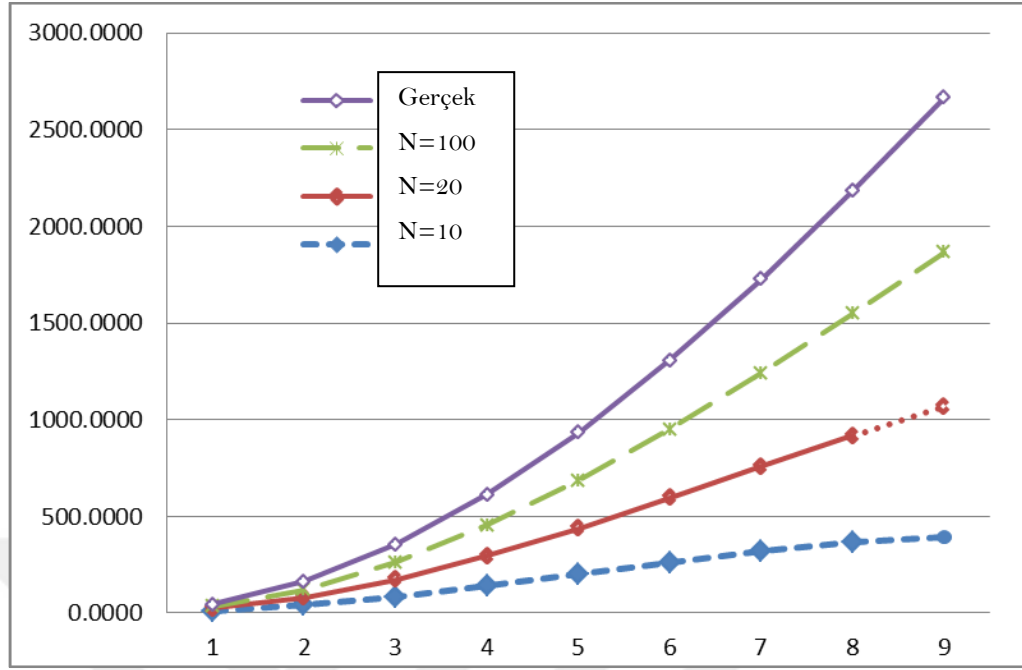
denklemini yardımıyla bulunur. A matrisinin öz değerleri aynı zamanda (6.1.27)

Sturm-Liouville probleminin de özdeğerleridir.

Aşağıdaki tabloda (6.1.27) Sturm-Liouville problemin gerçek özdeğerleri ile $N=10$, $N=20$ ve $N=100$ için yaklaşık özdeğerleri verilmiştir.

	Gerçek Özdeğerler	Yaklaşık Özdeğerler ($N=10$)	Yaklaşık Özdeğerler ($N=20$)	Yaklaşık Özdeğerler ($N=100$)
1	11.5424	11.4613	11.5221	11.5416
2	41.1867	39.9047	40.8631	41.1738
3	90.5404	84.1565	88.9087	90.4747
4	159.6296	139.9117	154.5023	159.4219
5	248.4569	201.7154	236.0313	247.9500
6	357.0230	263.5182	331.4889	355.9722
7	485.3281	319.2698	438.5250	483.3823
8	633.3724	363.5100	554.5039	630.0545
9	801.1558	391.8903	676.5700	795.8441
10			801.7176	980.5876
11			926.8651	1184.1026
12			1048.9310	1406.1883
13			1164.9096	1646.6255
14			1271.9451	1905.1770
15			1367.4017	2181.5876
16			1448.9288	2475.5845
17			1514.5181	2786.8776
18			1562.5518	3115.1597
19			1591.8296	3460.1067
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
97				39912.9519
98				39962.2410
99				39991.8101

Tablo 6.1.7 (Örnek 6.1.4 için gerçek ve yaklaşık özdeğerler tablosu)



Şekil 6.1.5 (Örnek 6.1.4 ‘in yaklaşık özdeğerler değişim grafiği)

6.2 Matris Dönüşümü ile Çözüm

$$y'' + (\lambda - q)y = 0 \quad (6.2.1)$$

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Sturm-Liouville problemi verilsin. Burada $q \in C^1[0, \pi]$ olduğunu kabul edeceğiz.

Bu problem

$$\begin{bmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} + (q(x) - \lambda) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} \quad (6.2.3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(\pi) \\ y'(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak kabul edilmiştir.

Böylece (6.2.1)-(6.2.2) denklemleri

$$Y'(x) = AY(x) + (q(x) - \lambda)BY(x), \quad 0 < x < \pi \quad (6.2.4)$$

$C_1Y(0) + C_2Y(\pi) = \underline{0}$ eşitlikleri biçimde yazılabilir.

$$x_j = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad h = \frac{\pi}{n} \quad \text{olmak üzere,} \quad (6.2.4)$$

denkleminde sonlu farklar yöntemi uygulanırsa

$$Y_{j+1} - Y_j = hAY_{j+1} + h(q_j - \lambda_h)BY_j$$

$$C_1 Y_0 + C_1 Y_n = \underline{0}$$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Buradan

$$-y_{j+1} + (h^2 q_j + 2)y_j - y_{j-1} = h^2 \lambda_h y_j,$$

denklemini elde edilir. Burada

$q_j = q(x_j)$, λ_h , λ 'nın hesaplanan özdeğerleri, Y_j , $Y(x_j)$ 'nin hesaplanmış hali olarak alınmıştır.

Böylece

$$Y_{j+1} - hAY_{j+1} = Y_j + h(q_j - \lambda_h)BY_j$$

denkleminde

$$(I - hA)Y_{j+1} = (I + h(q_j - \lambda_h)B)Y_j$$

denklemini elde edilmiş olur.

$(I - hA)$ matrisinin tersi $(I + hA)$ matrisi olduğundan

$$(I - hA)^{-1} = (I + hA)$$

yazılabilir. Buna göre

$$Y_{j+1} = (I + hA)(I + h(q_j - \lambda_h)B)Y_j = M_j Y_j \quad (6.2.5)$$

eşitliği elde edilir.

$M(x_j) = M_j$ olarak gösterilirse M_j matrisinin özdeğerleri,

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \left(2 - h^2 \lambda_h + h^2 q_j \pm \sqrt{-4 + (2 - h^2 \lambda_h + h^2 q_j)^2} \right) \quad (6.2.6)$$

ve özvektörleri

$$v_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{h} [1 + h^2 (q_j - \lambda_h)] - \mu_{1,2}^j \end{bmatrix} \quad (6.2.7)$$

biçiminde elde edilir. Böylece

$$2 - h^2 (\lambda_h - q_j) = 2 \cos \theta (x_j, \lambda_h) = 2 \cos \theta_j \quad (6.2.8)$$

dönüşümü uygulanırsa, özdeğerleri, $\mu_{1,2} = \cos \theta_j \pm \sin \theta_j = e^{\pm i\theta_j}$

özvektörleri

$$v_1^j = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{h} (1 - e^{-i\theta_j}) \end{bmatrix}, v_2^j = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{h} (1 - e^{i\theta_j}) \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılmış olur.

Şimdi

$$M_j = P_j D_j P_j^{-1} \quad \text{ve} \quad (6.2.9)$$

$$D_j = \begin{bmatrix} e^{i\theta_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_j} \end{bmatrix}$$

ifadeleri (6.2.5) ifadesinde yerine yazılırsa

$$Y_{j+1} = M_j Y_j = P_j D_j P_j^{-1} Y_j$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin her iki tarafına P_{j+1}^{-1} uygulanırsa

$$P_{j+1}^{-1} Y_{j+1} = P_{j+1}^{-1} P_j D_j P_j^{-1} Y_j \quad (6.2.10)$$

ifadesi bulunur. $Z_j = P_j^{-1} Y_j$ olduğundan, (6.2.10) ifadesi yeniden

$$Z_{j+1} = P_{j+1}^{-1} D_j Z_j \quad (6.2.11)$$

ifadesine dönüşür.

P_{j+1}^{-1} ifadesini Taylor teoremine göre açarsak

$$P_{j+1}^{-1} = P_j^{-1} + h \frac{d}{dx} P^{-1}(x) \Big|_{x=x_j} + h^2 \frac{d^2}{dx^2} P^{-1}(x) \Big|_{x=x_j}, x_j < \zeta_j < x_{j+1} \quad (6.2.12)$$

eşitliğini elde ederiz. Elde edilen (6.2.12) eşitliğini (6.2.11)'de yerine yazarak

$$Z_{j+1} = \left(I + h \frac{d}{dx} P^{-1}(x) \Big|_{x=x_j} P_j + h^2 \frac{d^2}{dx^2} P^{-1}(x) \Big|_{x=x_j} P_j \right) D_j Z_j$$

eşitliğini elde ederiz. Burada

$$\frac{d}{dx} P^{-1}(x) \Big|_{x=x_j} P_j D_j = i f_i S \quad \text{ve} \quad f_i = \frac{1}{e^{i\theta_j} - e^{-i\theta_j}} \frac{\partial}{\partial x} \theta \Big|_{x=x_j}, S = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlarsak

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} P^{-1}(x) \Big|_{x=x_j} P_j D_j \right\| \leq \text{const.} h$$

ifadesinden

$$Z_{j+1} = \left(D_j + i h f_j S + O(h^3) \right) Z_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.2.13)$$

elde edilir. Burada const h'ın lineer bağımsız bir sabittir.

(6.2.1)- (6.2.2) probleminin özdeğerleri, $\lambda = k^2$ olarak bulunmuştur.

$$\theta(\lambda) = 2 - h^2 \lambda_h$$

x'e bağlı olmadığından, P sabit matris olduğundan (6.2.3) denklemi

$$D = \begin{bmatrix} e^{i\theta(\lambda_h)} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta(\lambda_h)} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Z_{j+1} = DZ_j, j = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

şeklinde olur. Sınır koşullarından

$$Z_n = D^n Z_0, \quad Y_j = P_j Z_j$$

$$C_1 P_0 Z_0 + C_2 P_n Z_n = \underline{0}$$

elde edilir. Böylece

$$\psi(\lambda_h) = \det[C_1 P + C_2 P D_n],$$

bulunur. λ_h , (6.2.1)-(6.2.2) denkleminin özdeğeridir ve denklemin çözümü

$$\psi(\lambda_h) = 0 \left| \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ e^{ni\theta} & e^{-ni\theta} \end{array} \right| = e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2 \sin n\theta = 0$$

$$\theta = k \frac{\pi}{n} = kh, k = 1, 2, \dots, n-1$$

biçimindedir.(6.2.8) denkleminde

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}(2 - h^2 \lambda_h)\right)$$

$$\cos \theta = \cos\left(\arccos\left(\frac{1}{2}(2 - h^2 \lambda_h)\right)\right)$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(2 - h^2 \lambda_h)$$

$$\lambda_{h,k} = \frac{1}{h^2} (2 - 2 \cos kh) = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right), k = 1, 2, \dots, n-1$$

eşitlikleri bulunmuş olur. Böylece sonuç olarak

$$\lambda_{h,k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right), k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (6.2.14)$$

özdeğerleri elde edilir. Benzer şekilde, $q(x) \neq 0$ ise

$$\lambda_h^{(k)} = \left[k^2 - \frac{2 \sum_{j=0}^{n-1} \sqrt{k^2 - q_j}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k^2 - q_j}}} \right] + O(h^2 k^4) \quad (6.2.15)$$

eşitliği elde edilir. (Oger,2005)

Örnek 6.2.1 $y'' + \lambda y = 0$ Sturm-Liouville denkleminde ve $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$

sınır şartlarından oluşan problemin özfonksiyonlarını bulalım.

Çözüm: $-y'' + q(x)y = \lambda y$ denkleminde $q(x) = 0$ olduğundan, (6.2.7) 'ye göre

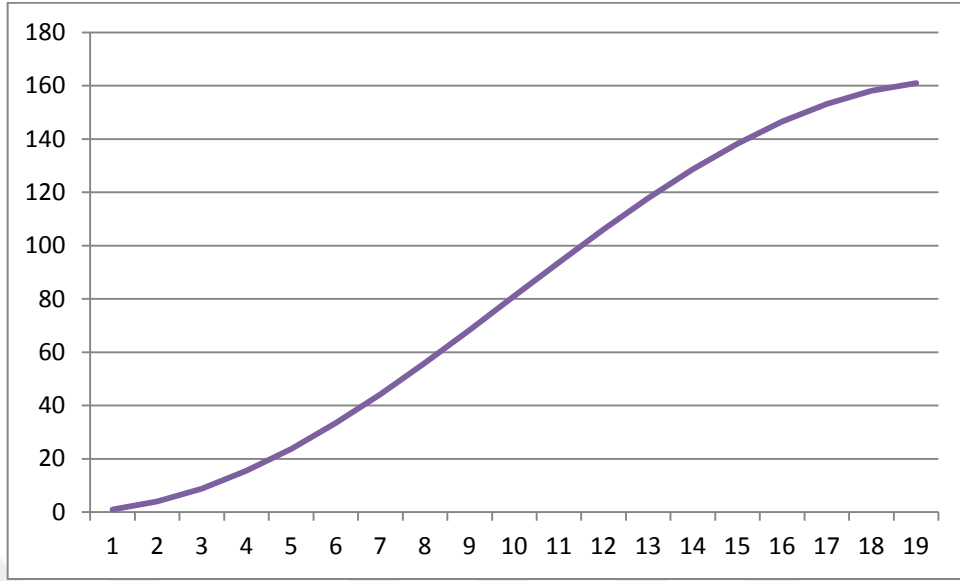
$$\lambda_{h,k} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \left(\frac{kh}{2} \right), k = 1, 2, \dots, n-1$$

denklemine göre, $n=20$ seçersek, $h = \frac{\pi}{20}$ olur. $0 < k < n = 20$ 'den özvektörler

aşağıdaki tabloda verilmiştir.

λ_1	λ_2	λ_3	...	λ_{17}	λ_{18}	λ_{19}
0.99794387	3.967183046	8.834546258	...	153.195379	158.0478862	161.0014906

Tablo 6.2.1($n=20$ $q(x)=0$ için özdeğerler tablosu)



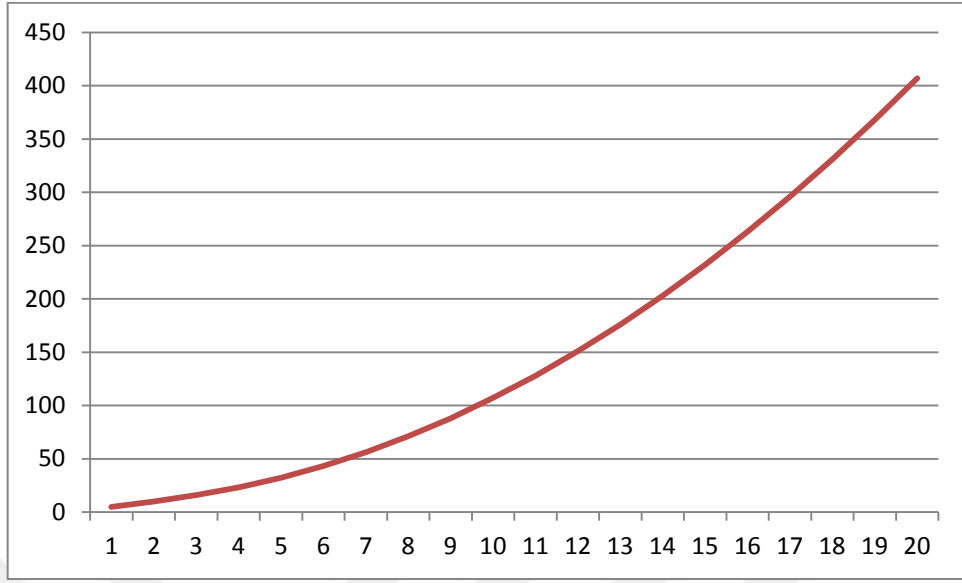
Şekil 6.2.1 (Örnek 5.2.1 için özdeğerler grafiği)

Örnek 6.2.2 $-y'' + e^x y = \lambda y$, $y(0) = 0, y(\pi) = 0$ (6.2.16)

probleminin gerçek özdeğerleri aşağıdaki tablodaki gibi bulunmuştur.

k	λ_k
1	4.89667
2	10.04519
3	16.01927
⋮	⋮
18	331.06934
19	368.06713
20	407.06524

Tablo 6.2.2 (örnek 5.2.2 özdeğerleri)



Şekil 6.2.2 (Örnek 5.2.2 özdeğerler değişim grafiği)

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler tanımlanarak sınır değer problemlerinin özellikleri ile çözümleri üzerinde durulmuştur. En önemli sınır değer problemlerinden olan Sturm-Liouville problemleri detaylı bir şekilde incelenip gerçek çözümleri yanında yaklaşık çözüm yolları irdelenmiştir. Sonlu Farklar yöntemi ve matris dönüşü ile yaklaşık çözümleri hesaplanıp, gerçek çözümleri karşılaştırmalı tablolar ve grafikler hazırlanmıştır.

Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi sınır değer problemlerine indirgendiğinden yaklaşık çözümlerin minimum hata ile gerçek çözümlere en yakın şekilde hesaplanmasının gerekliliği vurgulanarak, özellikle Sonlu Farklar yönteminde h adım aralığı ne kadar küçük seçilirse yaklaşık çözümlerdeki hata miktarı o kadar azaldığı görülmüştür.

8. KAYNAKLAR

- Al-Gwaiz, Mohammed A. Sturm-Liouville theory and its applications.
Springer,2008.
- Amrein W., et al. Sturm-Liouville Theory, Past and Present, Springer, 2005
- Andrew, Alan L. "Correction of finite difference eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems." The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics 30.04 (1989): 460-469.
- Andrew, Alan L., and John W. Paine. "Correction of finite element estimates for Sturm-Liouville eigenvalues." Numerische Mathematik 50.2 (1986): 205-215.
- Andrews, L. C., Elementary Partial Differential Equations with Boundary Value Problems, Academic Press Inc., London, 1986
- Andrew, Alan L. "Asymptotic correction of computed eigenvalues of differential equations." Ann. Numer. Math 1.41-51 (1994): C328.
- Andrew, Alan L. "Correction of finite element eigenvalues for problems with natural or periodic boundary conditions." BIT Numerical Mathematics 28.2 (1988): 254-269.
- Attili, B.S., "The Adomian Decomposition Method For Computing Eigenelements of Sturm-Liouville Two Point Boundary Value Problems", Appl. Math. Comput.,168, 1306-1316, 2005.
- Atkins on, Kendall, Weimin Han, and David E. Stewart. Numerical solution of ordinary differential equations. Vol. 108. John Wiley & Sons, 2011.
- Atkinson, F.V., Discrete And Continuous Boundary Problems. Academic Press, New York, London, 1964.
- Baily, P.B., "Modified Prufer Transformation", J. Comput. Phys, 29, 306-310,1978.
- Baily, P.B., Everitt, W.N., Zettl, A., "Computing Eigenvalue of Singular Sturm-Liouville Problems",Results Math, 20,391-423,1991.
- Baily, P.B., Everitt, W.N., Weidmann, J., Zettl, A., "Regular Approximations of Singular Sturm Liouville Problems" Results in Mathematics,22, 3-22,1993.
- Bayram, M., Nümerik analiz. SüratÜniversite Yayınları, 2013.
- Braun, Martin. "Differential equations and their applications." (1993).

- Berghe, G. Vanden, Marnix Van Daele, and H. De Meyer. "A modified difference scheme for periodic and semiperiodic Sturm-Liouville problems." *Applied numerical mathematics* 18.1 (1995): 69-78.
- Birkhoff, G. D. On The Asymptotic Character of The Solution of The Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol.9 1908, pp. 219 – 231.
- Birkhoff, G. D. Boundary Value and Expantion Problems of Ordinary Linear Differential Equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol.9 1908, pp. 373–395.
- Boyce, William E., Richard C. DiPrima, and Charles W. Haines. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Vol.9. New ork:Wiley,1992.
- Bronson, Richard. *Schaum's Differential Equations*. 2000.
- Caglayan M., Celik N., Dogan S., Adi Diferansiyel Denklemler, Dora Yayınları, 2012
- Coddington, Earl A., and Norman Levinson. *Theory of ordinary differential equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1995.
- Edwards, Charles Henry, and David E.. Penney. *Differential equations and boundary value problems*. Vol. 2. Prentice Hall, 2004.
- Evans, D. J. "Numerical solution of the Sturm Liouville problem with periodic boundary conditions." *Conference on Applications of Numerical Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 1971.
- Finney, Ross L., et al. *Elementary differential equations with linear algebra*. Addison- Wesley, 1976.
- Forsythe, George E., and Wolfgang Richard Wasow. "Finite-difference methods for partial differential equations." (1960).
- Ghelardonı, P., Gherı, G., "Improved Shooting Technique For Numerical Computations of Eigenvalues in Sturm-Liouville Problems", *Nonlinear Analysis*, 47,885-896, 2001.
- González-Velasco, Enrique A. *Fourier analysis and boundary value problems*. Elsevier, 1996.
- Kahvecioglu, S., İki Noktalı Sınır Değer problemlerinin Çözümünde Kullanılan Nümerik Analiz Metodlarının İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2004
- Kandemir, M. *Diferensiyel Denklemler*, Pegem Akademi, 2015

- Kaplan, Wilfred. Elements of Differential Equations. addison-wesley, 1964.
- Keller H., Numerical Methods for Two-Point Boundary Value Problems, Dover,
New York,1992 (corrected reprint of the 1968 edition, Blaisdell, Waltham, MA).
- Kincaid, David Ronald, and Elliott W Cheney. Numerical analysis: mathematics of
scientific computing. Vol. 2. American Mathematical Soc., 2002.
- Kumar, M., "A New Finite Difference Method for a Class of Singular Two-
Point Boundary Value Problems", Applied Mathematics and Computation, 143,
551 -557,2003.
- Kumar, M., Aziz, T., "A Uniform Mesh Finite Difference Method For a Class of
Singular Two-Point Boundary Value Problems", Applied Mathematics and
Computation, 180, 173 -177,2006.
- Lambert, John Denholm, and J. D. Lambert. Computational methods in ordinary
differential equations. London: Wiley, 1973.
- Ledoux, V., Van Daele, M.G., Berghe, V., "Efficient Computation of High
Index Sturm-Liouville Eigenvalues for Problems in Physics", Computer Physics
Communications,180, 241-250,2009.
- Levitan, B.M., Sargsyan I.S., Sturm–Liouville and Dirac operators, Nauka Publ.,
Moscow, 1988(in Russian); Engl. transl.: Mathematics and its Applications
(Soviet Series) vol. 59,Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.
- Mukhtarov O. Sh , Demirci M. , Akdoğan Z., Sturm-Liouville Problems with Eigen
dependent Boundary and Transmissions Conditions. Acta Mathematica
Scientia, Vol25, No. 4, 2005.
- Mukhtarov, O.Sh. and Yakubov, S., 2002. Problems for Ordinary Differential
Equations with Transmission Conditions, Applicable Analysis, Vol 81,
1033-1064.
- Mukhtarov O. Sh., Aydemir K. and Olğar H. , Some properties of one
Sturm-Liouville type problem with abstract linear operator, IV. Congress of
the Turkic World Mathematical Society, Baku, Azerbaijan, 2011
- Mitchell, Andrew Ronald, and David Francis Griffiths. The finite difference method
in partial differential equations. John Wiley, 1980.
- Myint-U, Tyn,. Ordinary differential equations. Elsevier North-Holland, Inc., 1978.

- Oger, V., Computation of eigenvalues of regular sturm-liouville problems with periodic boundary conditions, Yüksek Lisans tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,(2005)
- Paine, J. W., F. R. De Hoog, and R. S. Anderssen. "On the correction of finite difference eigenvalue approximations for Sturm-Liouville problems." *Computing* 26.2 (1981): 123-139.
- Ross, Shepley L. Introduction to Ordinary Differential Equations. Wiley, 1989.
- Smith, Gordon D. Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. Oxford university press, 1985.
- Schneider, A. A Note Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in The Boundary Conditions, Math. Z. 136, 1974, 163-167.
- Tamarkin, J. D. Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions, Math. Z. 27, 1928, 1 – 54.
- Titchmarsh, Edward C. "Eigenfunction expansions I." (1962).
- Yakubov, S. Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators, Longman, Scientific, Technical, 1994.
- Yakubov, S.; Yakubov, Y. Abel Basis of Root Functions of Regular Boundary Value Problems, Math. Nachr. 197, 1999, 157-187
- Yakubov, S.; Yakubov, Y. Differential Operator Equations (Ordinary and Partial Differential Equations), Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

9. EKLER

```
1- N = 10;
2- h = 1/N;
3- x = (0:h:1)';
4- b = zeros(N+1,1);
5- b(2:N) = 12 * h^2 * x(2:N).^2;
6- A = sparse(N+1,N+1);
7- A(1,1) = 1.0; A(N+1,N+1) = 1.0;
8- for j=2:N
9-   A(j,[j-1, j, j+1]) = [1, -2, 1];
10- end
11- Y = A \ b;
```

Ek.1 : Örnek 6.1.2 için MATLAB kodu:

```
1- N=10;
2- h=1/N;
3- for i=1:N-2
4-   A(i,i)=-2*1/h^2;
5-   A(9,9)=-2*1/h^2;
6-   A(i,i+1)=1*1/h^2;
7-   A(i+1,i)=1*1/h^2;
8- end
9- x= linspace(0,1,9);
10- J=eig(A);
11- plot(x,J)
```

Ek.2: Örnek 6.1.3 için MATLAB kodu:

10. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	Semih ÇAVUŞOĞLU Uyruğu: T.C.
Kişisel Bilgiler	Doğum Tarihi ve Yeri: 1977 / Sivas Medeni Hali : Evli- 2 çocuk
İletişim Bilgileri	Tel : 0 505 581 19 77 E-posta: semihcavusoglu@gmail.com
Öğrenim Bilgileri	Yüksek Lisans: 2013-2016 Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans Programı Lisans :1994–1999 Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Lisans Fakültesi Matematik Bölümü Lise : 1992-1994 Hafik Lisesi
İş Deneyimi	2010-halen : MEB Erbaa Fatih Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni 2002-2010 : MEB Sivas Hacı Mehmet Sabancı Lisesi Matematik Öğretmeni 2001-2002 : MEB Hafik Cumhuriyet İlköğretim Okulu Matematik Öğretmeni 1999-2001 : MEB Hafik İmam Hatip Lisesi Matematik Öğretmeni 1999- : Göreve başlama