

45816



**BİKOMPLEKS SAYILARIN GEOMETRİK  
UYGULAMALARI**

**Faik BABADAĞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**1995**

ANKARA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİKOMPLEKS SAYILARIN GEOMETRİK UYGULAMALARI**

Faik BABADAĞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**Ü.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Bu tez 6./10/1995 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından 90. (Doksa) not takdir edilerek  
oybirliği / ~~oybirliği~~ ile kabul edilmiştir.

Yard. Doç. Dr. Yusuf YAYLI Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU Doç. Dr. Bülent KARA

(Danışman)

*Y. Yaylı*

*H. Hilmi Hacısalihoğlu*

*B. Kara*

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## BİKOMPLEKS SAYILARIN GEOMETRİK UYGULAMALARI

Faik BABADAĞ

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Yusuf YAYLI  
1995, Sayfa: 42

Jüri: Yard. Doç. Dr. Yusuf YAYLI  
Prof.Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU  
Doç.Dr.Bülent KARAKAŞ

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. I. Bölüm giriş için ayrıldı. İkinci bölüm, çalışmamız için gerekli olan temel kavramları içermektedir.

Üçüncü bölümde, Bikompleks sayılar, kuaterniyonlara benzer bir şekilde ele alındı, daha sonra bikompleks sayıların reel ve kompleks matris temsilleri elde edildi.

Dördüncü bölümde,  $E^4$ 'de bir  $M$  hiperyüzeyi üzerinde yatan bir  $\alpha$  eğrisinin bikompleks sayılar yardımıyla belirlediği hareket incelendi. Ayrıca bu hareketin  $r$ . mertebeden ivme merkezleri araştırıldı.

Beşinci bölümde bikompleks sayıların manifold yapısı ve Lie grup yapısı incelendi.

**ANAHTAR KELİMELER:** Bikompleks sayı, Dönme, Öteleme,  
Homotetik hareket, Lie Grubu.

**ABSTRACT**

Masters Thesis

**BICOMPLEX NUMBERS AND THEIR APPLICATIONS**

Faik BABADAĞ

Ankara University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of MathematicsSupervisor : Asst. Prof. Dr. Yusuf YAYLI  
1995, Page: 42Jury: Asst. Prof. Dr. Yusuf YAYLI  
Prof.H.Hilmi HACISALİHOĞLU  
Assoc.Prof.Bülent KARAKAŞ

This thesis consists of five chapters. First chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the basic concepts are given. In the third chapter bicomplex numbers are studied with in the similarity concepts of quaternions. Then the real and complex representation of bicomplex number are obtained.

In the fourth chapter, the motion which is defined by a curve lying on a  $M$ -hypersurface of  $E^4$  with the help of bicomplex numbers is investigated.

The  $r$  th-order acceleration centers of this motion is also investigated. Finally in the fifth chapter, the manifold structure and Lie structure of bicomplex numbers are investigated.

**Key Words:** Bicomplex number, Rotation, Homotetic motion, Lie Group.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
SİMGELER DİZİNİ .....	iv
TEŞEKKÜR .....	v
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	2
2.1. Afin Uzaylar .....	2
2.2. Öklid Uzayları .....	4
2.3. Katı Hareketler .....	5
2.4. 1-parametrelî Homotetik Hareketler .....	8
2.5. İvmeler .....	10
2.6. Bikompleks Sayılar .....	11
2.7. $E^n$ de Eğriler .....	12
2.8. Diferensiyellenebilir Manifoldlar .....	13
2.9. Lie Grubu .....	14
3. BİKOMPLEKS SAYILAR .....	16
3.1. Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi .....	18
3.2. Bikompleks Sayıların Kompleks Matris Gösterimi .....	21
4. HOMOTETİK HAREKET .....	23
4.1. $E^4$ 'de Bir $M$ Hiperyüzeyi Üzerinde Yatan Bir $\alpha$ Eğrisinin Bikompleks Sayılar Yardımıyla Belirlediği Hareket .....	23
4.2. Bir Parametrelî Hareket .....	24
4.3. Hareketin Pol Eğrileri ve Pol Noktaları .....	26
4.4. Pol Eğrilerinin Birbiri Üzerindeki Hareketi .....	27
4.5. Yüksek Mertebeden İvme Merkezleri .....	28
5. MATRİS LİE GRUBU .....	31
5.1. Bikompleks Sayıların Manifold Yapısı .....	33
5.2. Bikompleks Sayılar ve Lie Grupları .....	38
6. SONUÇLAR .....	40
KAYNAKLAR .....	41
ÖZGEÇMİŞ .....	42

**SİMGELER DİZİNİ**

$E^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin cümlesi
$\mathbb{R}$	Sabit Uzay
$\mathbb{R}^0$	Hareketli Uzay
$\langle , \rangle$	Öklid iç çarpım işareti
$\  \ $	Norm işareti
$GL(n+1, \mathbb{R})$	Genel lineer grup
$\mathbb{C}_1$	Kompleks sayılar cümlesi
$\mathbb{C}_2$	Bikompleks sayılar cümlesi
$\otimes$	Bikompleks sayıların çarpımı
$\oplus$	Bikompleks sayıların toplamı

## TEŞEKKÜR

Bu çalıŐmayı hazırlarken yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr.H.Hilmi HACISALİHOĞLU'na değerli zamanlarını esirgemedен bana ayıran, her adımda bilgilerine baŐvurduğum Sayın Hocam Yrd.Doç.Dr.Yusuf YAYLI'ya teŐekkürlerimi arzederim.



## 1. GİRİŞ

Bikompleks sayılar (6) da analiz yönüyle ele alınmış ve geniş bir şekilde incelenmiştir.

Bu çalışmada, bikompleks sayıların matris temsilleri ele alındı ve Hamilton operatörlerine benzer özellikler taşıdığı gösterildi. Bikompleks sayıların matris temsillerinin, birer homotetik hareket yaptırdığı gösterildi.

Ayrıca bir bikompleks eğri ele alınarak bunun yardımıyla tanımlanan homotetik hareket incelendi.

Son olarak bikompleks sayıların Lie grup yapısı da ele alındı.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1. Afın Uzaylar

#### Tanım 2.1.1. Afın Uzay

$\Lambda \neq \emptyset$  bir cümle ve  $V$  de  $\mathcal{F}$  cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer bir

$$\chi: \Lambda \times \Lambda \longrightarrow V$$

dönüşümü  $P, Q \in \Lambda$  noktaları için

$$(P, Q) \longrightarrow \vec{PQ} \in V$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise  $\Lambda$  cümlesine  $V$  ile birleştirilmiş bir **afın uzay** denir.

i)  $\forall P, Q, R \in \Lambda$  için  $\vec{PR} = \vec{PQ} + \vec{QR}$  dir.

ii)  $\forall P \in \Lambda$  ve  $\forall \alpha \in V$  için  $\vec{PQ} = \alpha$  olacak biçimde bir tek  $Q \in \Lambda$  noktası vardır.

$\vec{PQ}$  vektöründe  $P$  noktasına başlangıç noktası ve  $Q$  noktasına uç noktası denir (Hacısalihoğlu 1980).

#### Tanım 2.1.2. Afın Çatı

Bir  $V$  vektör uzayı ile birleşen afın uzaylardan biri  $\Lambda$  olsun.

$P_0, P_1, \dots, P_n \in \Lambda$  noktaları için  $\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \dots, \vec{P_0P_n} \in V$  vektörlerinin sistemi  $V$  nin bir bazı ise

$$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

nokta  $(n + 1)$ -lisine  $A$  afin uzayının bir **afin çatısı** denir (affine frame). Burada  $P_0$  noktasına çatının başlangıç noktası ve  $P_i$  noktasına da çatının bitim noktası denir (Hacısalihoglu 1980).

### Teorem 2.1.1.

Bir vektör uzayı ile birleşen afin uzaylardan biri  $A$  olsun. Belli bir  $P_0 \in A$  noktası seçildiğinde başlangıcı  $P_0$  olan bir afin çatı vardır (Hacısalihoglu 1980).

Teorem 2.1.1'in ifadesine göre  $V$  nin bir bazı  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  olsun. Her bir  $i, 1 \leq i \leq n$  için  $\vec{P_0 P_i} = \alpha_i$  olacak şekilde bir tek  $P_i \in A$  noktasının var olduğunu biliyoruz.

O halde  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta  $(n + 1)$ -lisi bir afin çatıdır ve  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  bazı verildiğinde tektir.

### Tanım 2.1.3. Afin Dönüşüm

Bir  $\mathcal{F}$  cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı  $V_1$  ve  $V_2$  ile birleştirilmiş afin uzaylar, sırası ile  $A_1$  ve  $A_2$  olsun.

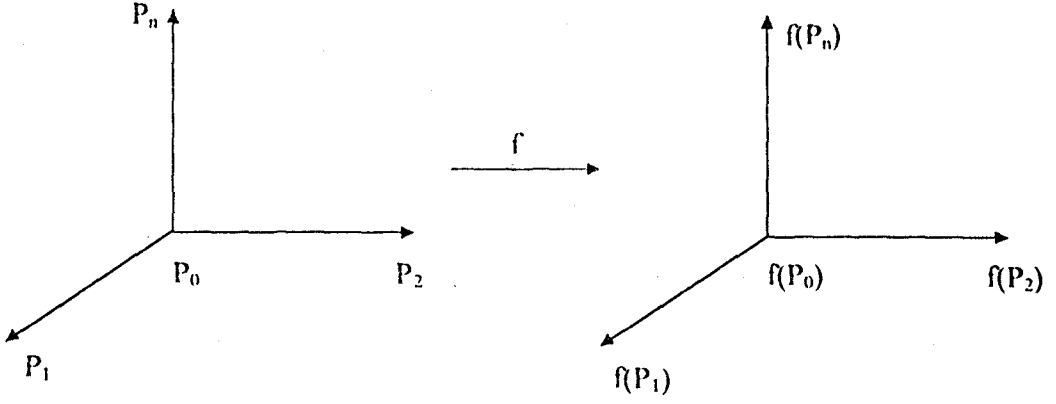
$$f: A_1 \longrightarrow A_2$$

bir dönüşüm olsun. Herhangi bir  $P \in A_1$  noktası için bir

$$\chi_P: V_1 \longrightarrow V_2$$

dönüşümünü şu şekilde tanımlayalım.  $\alpha \in V_1$  vektörü için  $\alpha = \vec{PQ}$  olacak şekilde ikinci afin aksiyomuna göre tek olarak var olan nokta,  $Q \in A_1$  olduğuna göre

$$\chi_P(\alpha) = \vec{f(P)f(Q)} \text{ dir (Hacısalihoglu 1980).}$$



Şekil 2.1.1

## 2.2. Öklid Uzayları

### Tanım 2.2.1. Öklid Uzayı

n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı  $V$  olsun.  $V$  ile birleşen bir  $A$  afin uzayına n-boyutlu **Öklid Uzayı** denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalihoglu 1980).

### Tanım 2.2.2.

$E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında bir nokta  $X$  olsun.  $E^n$  de bir afin koordinat sistemine göre  $X$  noktasının koordinatları  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.

$$x_i: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bileşenlerine  $E^n$  in **i-yinci koordinat fonksiyonu** denir.

$\mathbb{R}^n$  standard reel afin uzay olmak üzere  $\mathbb{R}^n$  de bir

$$\langle ., . \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı  $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  için

$$\langle . \rangle (X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

biçiminde tanımlayalım. Bu iç çarpıma  $\mathbb{R}^n$  de standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı denir. Standart iç çarpımın tanımlı olduğu  $\mathbb{R}^n$  vektör uzayı ile birleşen  $\mathbb{R}^n$  afin uzayına n- boyutlu standart Öklid uzayı denir ve  $E^n$  ile gösterilir (Hacısalihoglu 1980).

### Tanım 2.2.3. Öklid Çatısı

Bir n-boyutlu reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen  $E^n$  Öklid uzayında sıralı bir  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  nokta (n+1)-lisi için eğer  $\{\vec{P_0P_1}, \vec{P_0P_2}, \dots, \vec{P_0P_n}\}$  vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise  $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$  çatısına dik çatı (Öklid Çatısı) denir. (Hacısalihoglu 1980).

### Tanım 2.2.4.

$E^n$  n-boyutlu Öklid uzayında bir nokta X ve bu noktanın bileşenleri  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  olsun.

$$x_i: E^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

bileşenlerine  $E^n$  in i-yinci koordinat fonksiyonu denir. Buna göre  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  reel sayıları n-lisine Öklid koordinat sistemi denir (Hacısalihoglu 1980).

## 2.3. Katı Hareketler

### Tanım 2.3.1. Katı Hareketler

$E^n$  de d uzaklığını değişmez bırakan bir R fonksiyonuna  $E^n$  de bir katı hareket denir. Yani

$$R: E^n \longrightarrow E^n$$

fonksiyonu için eğer

$$d(R(x), R(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in E^n$$

ise  $R$  ye bir katı hareket denir.  $E^n$  in bütün katı hareketlerinin cümlesi  $\mathcal{K}(n)$  ile gösterilir.

$$\mathcal{K}(n) = \{R \mid R: E^n \longrightarrow E^n, d(R(x), R(y)) = d(x, y), \forall x, y \in E^n\}$$

dir (Hacısalihoglu 1980).

### Teorem 2.3.1.

$R \in \mathcal{K}(n)$  ise  $R$  birebir ve örtendir. Ayrıca  $R^{-1} \in \mathcal{K}(n)$  dir (Hacısalihoglu 1980).

### Teorem 2.3.2.

$\mathcal{K}(n)$  cümlesi dönüşümlerin birleşimi işlemine göre bir gruptur (Hacısalihoglu 1980).

### Tanım 2.3.2. Basit Dönme $R_0$

$E^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında bir  $R$  katı hareketi birebir ve uzaklığı koruyan bir dönüşüm olduğundan Teorem 2.3.1 de verildiği gibi  $E^n$  de,  $R$  aynı zamanda üzerindedir. O halde  $R(x) = x$  olacak şekilde bir  $x \in E^n$  noktası sabit tutulabilir, gene  $R$  bir hareket olarak kalabilir.

$E^n$  de  $R$  katı hareketlerinden bir noktayı sabit bırakanlarının cümlesini  $\mathcal{K}_0(n)$  ile gösterelim.

$$\mathcal{K}_0(n) = \{R_0 \mid R_0 \in \mathcal{K}(n), R_0(0) = 0\}$$

Sabit bırakılan nokta başlangıç noktası  $O=(0, \dots, 0)$  olarak seçilebilir.

Buna göre  $\forall R \in \mathcal{K}(n)$  katı hareketi

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall X, Y \in E^n$$

biçiminde tanımlanan iç çarpımı korur.

### Tanım 2.3.3. Dönme Hareketi

$$R_0: E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü  $0 \in E^n$  için  $R_0(0) = 0$  ve  $x \neq 0$  olmak üzere  $\forall x \in E^n$  için  $x \longrightarrow R_0(x)$  biçiminde tanımlanan bir hareket olsun.  $R_0$  hareketine  $0$  etrafında  $E^n$  nin bir **dönme hareketi** denir.  $E^n$  nin  $0$  etrafındaki bütün dönmelerinin cümlesi  $\mathcal{K}_0(n)$  ile gösterilir (Hacısalihoğlu 1980).

### Teorem 2.3.3.

$$\mathcal{K}_0(n) = \{R_0 \mid R_0 \in \mathcal{K}(n), R_0(0) = 0\}$$

cümlesi hareketlerin birleşimi (çarpımı) işlemine göre bir gruptur (Hacısalihoğlu 1980).

### Tanım 2.3.4. Öteleme

$$T: E^n \longrightarrow E^n$$

dönüşümü  $\forall X \in E^n$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  için

$$T(X) = (x_1 + t_1, x_2 + t_2, \dots, x_n + t_n), \quad t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$$

biçiminde tanımlı ise  $T$  ye  $E^n$  deki bir **öteleme** denir.  $E^n$  deki bütün ötelemelerin cümlesi

$$T(n) = \{T \mid T(X) = (x_1 + t_1, \dots, x_n + t_n), t_i \in \mathbb{R}, X \in E^n, x_i \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilir (Hacısalihoglu 1980).

**Teorem 2.3.4.**

$K(n)$  grubu  $GL(n+1, \mathbb{R})$  grubunun bir altgrubu olarak ifade edilebilir, öyleki,

$\forall R \in K(n)$  için

$$R = \begin{bmatrix} & & & t_1 \\ & g_{ij} & & \vdots \\ & & & t_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir, burada  $1 \leq i, j \leq n$  ve  $[g_{ij}] \in O(n)$  (Hacısalihoglu, 1980).

**2.4. 1- Parametrel Homotetik Hareketler**

**Tanım 2.4.1. Homotetik Hareket**

$$F = \begin{bmatrix} hA & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ile belirli dönüşüme  $E^n$  de bir homotetik hareket denir.

Burada,  $h = h \cdot I_n$  bir skalar matris,  $A \in SO(n)$  ve  $a \in \mathbb{R}_1^n$  dir (Hacısalihoglu 1971).

**Tanım 2.4.2. 1-Parametrel Homotetik Hareket**

$J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık,  $o \in J$  olsun.  $h: J \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu,  $A \in SO(n)$  matrisi ve  $n \times 1$  tipindeki  $a$  matrisi  $t$ 'ye göre diferensiyellenebilir olmak üzere elemanları,

$$F(t) = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & a(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı  $F(t)$  cümlesine  $E^n$  in 1-parametrelî homotetik hareketi denir (Hacısalihoglu 1971).

$h$  bir skaler olduğundan,

$$h^{-1} = \frac{1}{h} \quad h^T = h$$

dir.  $B = hA$  denilirse

$$B^{-1} = h^{-1}A^{-1} = \frac{1}{h}A^{-1}$$

elde edilir. Bir  $X \in E^n$  için  $F_t(X) = BX + a$  noktalarının geometrik yeri  $E^n$  de bir eğridir.

Bu eğriyi  $(y_t)$  ile göstereceğiz.

$$F_t(X) = BX + a$$

eşitliğinden  $t$ 'ye göre türev alınırsa

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dB}{dt}X + B\frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt} \quad (2.4.1)$$

elde edilir.

### Tanım 2.4.3. (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

$Y = BX + a$  hareketine ait

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dB}{dt}X + B\frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt}$$

ifadesindeki  $\frac{dy}{dt}$ 'ye hareketin mutlak hızı,  $\frac{dB}{dt}X + \frac{da}{dt}$ 'ye sürüklenme hızı,  $B\frac{dX}{dt}$ 'ye de hareketin rölatif hızı denir (Hacısalıhoğlu 1971).

Hareketli ve sabit uzayın her ikisinde de bir t anında sabit olan bir nokta için

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dX}{dt} = \frac{dB}{dt}X + \frac{da}{dt} = 0$$

dır. Bu ortak sabit noktaya t anındaki ani pol noktası denir. Bu ortak noktanın sabit uzaydaki adı sabit pol noktası ve hareketli uzaydaki adı da hareketli pol noktasıdır.

#### Teorem 2.4.1.

$Y = BX + a$  bir homotetik hareket ise  $\det\left(\frac{dB}{dt}\right) \neq 0$  dır (Hacısalıhoğlu 1971).

#### Teorem 2.4.2.

n-boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  in homotetik hareketleri her n için regüler hareketlerdir (Hacısalıhoğlu 1971).

#### Teorem 2.4.3.

n-boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  in homotetik hareketi bir t anında bir tek ani pol noktasına sahiptir (Hacısalıhoğlu 1971).

### 2.5. İvmeler

(2.4.1) den t ye göre tekrar türev alınırsa,

$$\ddot{Y} = \ddot{B}X + \ddot{a} + 2\dot{B}\dot{X} + B\ddot{X}$$

elde edilir. Buradan sırası ile  $\ddot{Y}$  hareketin mutlak ivmesi,  $\ddot{B}X + \ddot{a}$  sürüklenme

ivmesi,  $2B \times$  coriolis ivmesi ve  $B \times$  rölatif ivmesidir. (Olcaylar 1971).

## 2.6. Bikompleks Sayılar

### Tanım 2.6.1.

Bir kompleks sayı  $x_1 + ix_2$ ;  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ve  $i^2 = -1$  biçimindedir. Kompleks sayılar cümlesi  $\mathcal{C}_1$  ile gösterilirse

$$\mathcal{C}_1 = \{x_1 + ix_2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Bikompleks sayılar ise ,

$X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$ ;  $x_k \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq k \leq 4$  ve  $i^2 = j^2 = -1$ ;  $ij = ji$  biçimindedir ve

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= \{x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4 \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 + ix_2 + j(x_3 + ix_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z_1 + jz_2; z_1, z_2 \in \mathcal{C}_1\} \end{aligned}$$

biçiminde de ifade edilir.

$\mathcal{C}_2$ 'de iki eleman toplanabilir ve skaler ile çarpılabilir. Böylece  $\mathcal{C}_2$  toplama ve çarpma ile birlikte bir vektör uzayıdır.

$\mathcal{C}_2$  deki çarpma şu şekilde tanımlanır.

$$X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$$

$$Y = y_1 + iy_2 + jy_3 + iyy_4$$

$X \otimes Y$  çarpılırken polinomların çarpımı gibi çarpım yapılır. Burada  $i^2 = j^2 = -1$  ve  $ij = ji$  ifadeleri de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
X \otimes Y &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4) \\
&+ i(x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3) \\
&+ j(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2) \\
&+ ij(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

$\mathcal{C}_2$ ,  $\otimes$  işlemine göre kapalı, birleşimli değişmeli ve çarpımın toplama dağılma özelliği vardır.  $\mathcal{C}_2$  Banach Cebiridir (G.B.Price 1991).

## 2.7. ( $E^n$ ' de Eğriler)

### Tanım 2.7.1. ( $E^n$ ' de Eğri)

$n$ -boyutlu Öklid uzayı  $E^n$  ve  $\mathbb{R}$  nin bir irtibatlı açık alt cümlesi  $I$  olmak üzere,

$$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise  $\alpha(I)$  cümlesine  $E^n$  'de bir eğri denir.

### Tanım 2.7.2. (Hiperüzey)

$E^n$ ,  $n$ -boyutlu Öklid uzayında  $(n-1)$  boyutlu bir yüzey veya  $(n-1)$ -yüzey diye  $E^n$  deki boş olmayan bir  $M$  cümlesine denir. Öyleki bu  $M$  cümlesi

$$M = \left\{ x \in U \subset E^n \mid \begin{array}{l} f: U \xrightarrow{\text{dif. bilir}} \mathbb{R} \\ x \longrightarrow f(x) = C \end{array}, U \text{ açık cümle} \right\}$$

$\nabla f|_p \neq 0$ ,  $\forall p \in M$  biçiminde tanımlanır.  $E^2$  de bir 1-yüzeye düzlemsel eğri denir.  $E^3$  de bir 2-yüzeye sadece yüzey denir.  $E^n$  de bir  $(n-1)$ -yüzey,  $n > 3$  olması halinde daha çok bir hiperüzey olarak adlandırılır (Hacısalihoglu 1994).

## 2.8. Diferensiyellenebilir Manifolddar

### Tanım 2.8.1. Topolojik Manifold

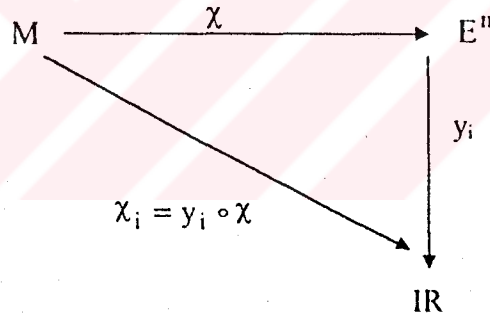
$M$  bir Hausdorff uzayı olsun.  $M$  nin herbir açık alt cümlesi  $E^n$  nin bir açık alt cümlesine homeomorf ve  $M$  sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebiliyorsa  $M$ 'ye  $n$ -boyutlu topolojik manifold denir (Hacısalihoğlu 1980).

### Tanım 2.8.2. Harita

$M$  bir topolojik manifold olsun.  $U \subset M$  açık alt cümlesinden  $E^n$  bir  $V$  açık alt cümlesine bir

$$\chi : U \rightarrow V$$

homeomorfizm verilsin.  $(\chi, U)$  ikilisine  $M$  de bir koordinat komşuluğu veya harita denir (Hacısalihoğlu 1980).



$\chi_i = y_i \circ \chi$  olmak üzere  $\chi_i$  lere  $\chi$  haritasına bağlı koordinat fonksiyonları denir.

### Tanım 2.8.3. Atlas

$M$   $n$ -boyutlu topolojik manifold ve  $A$  da  $\alpha$  indislerinin cümlesi olsun.  $U_\alpha \subset M$  açık alt cümlelerinin

$\{U_\alpha\}_\alpha \in A$  ailesi  $M$  nin bir örtüsü olsun. Herbir  $U_\alpha$  nin  $E^n$  deki bir  $V_\alpha$  açık alt cümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. Böylece elde edilen  $(\chi_\alpha, V_\alpha)$  haritalarının

$$S = \{(\chi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

ailesine  $M$  nin koordinat komşuluğu sistemi veya atlası denir (Hacısalihoglu 1980).

#### Tanım 2.8.4. $C^r$ Sınıfından Atlas

$n$ -boyutlu  $M$  topolojik manifoldunun bir atlası

$$S = \{(\chi_\alpha, V_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

olsun.

$$\chi_\alpha(V_\alpha) \cap \chi_\beta(V_\beta) \neq \emptyset$$

olacak şekilde her  $(\alpha, \beta) \in A \times A$  için  $\chi_\alpha^{-1} \circ \chi_\beta$  ve  $\chi_\beta^{-1} \circ \chi_\alpha$  fonksiyonları  $r \in \mathbb{N}$  için  $C^r$  sınıfından ise  $S$  atlasına  $C^r$  sınıfından atlas denir (Hacısalihoglu 1993).

#### Tanım 2.8.5. Diferensiyellenebilir Manifold

$M$  bir  $n$ -boyutlu manifold ve  $M$  nin bir  $S$  atlası  $C^r$  sınıfından ise  $M$  ye  $n$ -boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold denir.

## 2.9. Lie Grubu

#### Tanım 2.9.1. Lie Grubu

Bir  $M$  diferensiyellenebilir manifold ve bir  $G$  grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa  $(M, G)$  ikilisine bir **Lie Grubu** denir.

$L_1 : M$  nin noktaları  $G$  nin elemanları ile çakıştır.

$$L_2: M \times M \longrightarrow M$$

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilir.

$M$  ye Lie Grubunun temel manifoldu ve  $G$ 'ye de temel grubu denir (Hacısalıhoğlu 1980).

### Tanım 2.9.2. Matris Lie Grubu

$\left\{ [a_{ij}]_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$  matris uzayının bir alt manifoldu, matrislerin çarpımı işlemine göre bir grup ise bu gruba Matris Lie Grubu denir (Hacısalıhoğlu 1980).



### 3. BİKOMPLEKS SAYILAR

Biz bikompleks sayıları kaynak (6)'ya bağlı kalmak üzere; kuaterniyon teorisine paralel olarak ele alacağız.

Bir bikompleks sayı, sıralı dört sayının  $+1, i, j, ij$  gibi dört birime eşlik etmesiyle tanımlanabilir.

Burada, birinci birim  $+1$  bir reel sayıdır, diğer üç birim ise

$$\left. \begin{aligned} i^2 = j^2 = -1 \\ ij = ji \\ (ij)^2 = (ji)^2 = +1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

özelliklerine sahiptir. Böylece bir bikompleks sayı

$$X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4 ; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada  $x_1, x_2, x_3, x_4$  reel sayılarına  $X$  bikompleks sayısının bileşenleri denir.

Bütün bikompleks sayıların cümlesini  $\mathcal{C}_2$  ile gösterelim. Bu durumda

$$\mathcal{C}_2 = \{X \mid X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, x_k \in \mathbb{R} \quad 1 \leq k \leq 4\} \text{ yazılabilir.}$$

#### Toplama işlemi

$$\begin{aligned} \oplus: \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 &\longrightarrow \mathcal{C}_2 \\ (X, Y) & \quad X \oplus Y = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) \\ & \quad + ij(x_4 + y_4) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Böylece  $(\mathcal{C}_2, +)$  ikilisi bir Abel grubudur. Buradaki etkisiz eleman sıfır bikompleks sayıdır ve  $(0,0,0,0)$  sıralı dördlüsünden başka birşey değildir.

### Skalar ile Çarpma

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2$$

$$(a, X) \longrightarrow a \odot X = ax_1 + iax_2 + jax_3 + ijax_4$$

şeklinde tanımlanan dış işlem için;

$$i. a \odot (X \oplus Y) = (a \odot X) \oplus (a \odot Y); \forall a \in \mathbb{R}, \forall X, Y \in \mathcal{C}_2$$

$$ii. (a + b) \odot X = (a \odot X) \oplus (b \odot X), \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall X \in \mathcal{C}_2$$

$$iii. (a \cdot b) \odot X = a \odot (b \odot X)$$

$$iv. 1 \odot X = X$$

O halde  $\{\mathcal{C}_2, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \odot\}$  sistemi bir reel vektör uzayıdır. Kısaca bu uzayı  $\mathcal{C}_2$  ile göstereceğiz ve  $\mathcal{C}_2$ 'deki  $\oplus$  işleminde  $+$  ile gösterilecek.

### Çarpma

$$\otimes : \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2$$

$$(X, Y) \longrightarrow X \otimes Y = Y \otimes X$$

işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile tanımlanır.

$\otimes$	+1	i	j	ij
+1	+1	i	j	ij
i	i	-1	ij	-j
j	j	ij	-1	-i
ij	ij	-j	-i	1

(3.1.2)

Buna göre

$$\begin{aligned}
X \otimes Y &= (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4) \otimes (y_1 + iy_2 + jy_3 + ijy_4) \\
&+ (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4) \\
&+ i(x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3) \\
&+ j(x_1y_2 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2) \\
&+ ij(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)
\end{aligned}$$

Böylece bikompleks sayıların çarpımının şu özelliklere sahip olduğu kolayca görülür.

- a) İki bikompleks sayının çarpımı bir bikompleks sayıdır.
- b) Bikompleks sayı çarpımı birleşimlidir.
- c) Bikompleks sayı çarpımı dağılımlıdır.
- d) Bikompleks sayı çarpımı değişmelidir ( $ij = ji$ ).

Bu özellikleriyle  $\{\mathcal{C}_2, \oplus, \mathbb{R}, +, \cdot, \otimes, \otimes\}$  sistemi bir cebirdir. Bu cebire bikompleks sayı cebiri denir ve kısaca  $\mathcal{C}_2$  ile gösterilir. Bu cebirin bir bazı  $\{1, i, j, ij\}$  ve boyutu 4 dür.

### 3.1. Bikompleks Sayıların Reel Matris Gösterimi

$$\mathcal{C}_2 = \{X \mid X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, x_k \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{C}_2$ , Reel vektör uzayıdır.  $\mathcal{C}_2$  nin bazı,

$$\{1, i, j, ij\} \quad \text{dir.}$$

$$T: \mathcal{C}_2 \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_2)$$

$$X \longrightarrow T(X) = T_X$$

dönüşümü  $\forall Y \in \mathcal{C}_2$  için,

$$T_X: \mathbb{C}_2 \longrightarrow \mathbb{C}_2$$

$$Y \longrightarrow T_X(Y) = X \otimes Y \\ = Y \otimes X$$

şeklinde tanımlayalım.

$$T_X(Y + Z) = T_X Y + T_X Z$$

$$T_X(\lambda Y) = \lambda T_X Y, \lambda \in \mathbb{R}$$

olduğundan  $T_X$  lineerdir. Şimdi  $T_X$  lineer dönüşümüne karşılık gelen matris hesaplayalım.

$$T_X(1) = X \otimes 1 = X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$$

$$T_X(i) = X \otimes i = ix_1 - x_2 + ijx_3 - jx_4$$

$$T_X(j) = X \otimes j = jx_1 + ijx_2 - x_3 - ix_4$$

$$T_X(ij) = X \otimes ij = ijx_1 - jx_2 - ix_3 + x_4$$

$$T(X) = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad (3.1.3)$$

Bu matris (6) da tanımlı Hamilton operatörlerine çok benzerdir. Kuarterniyon değişimli olmadığı için sağdan ve soldan çarpımlarının her biri için ayrı ayrı farklı iki matris bulunur. Fakat burada tek bir matris elde edilir. Hamilton operatörlerine benzediği için  $T_X$  matrisini  $T(X)$  ile göstereceğiz.

$$T(X) = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

$$T(X) = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{E_2} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_3} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_4}$$

$$G = \{T(X) \mid X \in \mathcal{C}_2\}$$

$G$  cümlesi  $\mathbb{R}_4^4$  uzayının bir alt uzayıdır.

$\text{Sp}\{E_1, E_2, E_3, E_4\} = G$  dir ve Boy  $G = 4$  dür.

$$1 \in \mathcal{C}_2 \text{ için } T(1) = E_1$$

$$i \in \mathcal{C}_2 \text{ için } T(i) = E_2$$

$$j \in \mathcal{C}_2 \text{ için } T(j) = E_3$$

$$ij \in \mathcal{C}_2 \text{ için } T(ij) = E_4$$

olduğu görülür.

$$E_2^2 = E_3^2 = -E_1$$

$$E_2 E_3 = E_3 E_2 = E_4$$

$$E_3 E_4 = E_4 E_3 = -E_2$$

Bu özellikler (6) daki Hamilton operatörlerinde sözü edilen  $E_i$  matrislerinin özelliklerine benzemektedir.

### 3.2. Bikompleks Sayıların Kompleks Matris Gösterimi

$$\mathcal{C}_2 = \{X \mid X = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4, x_k \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{aligned} X &= (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4); \quad j^2 = -1 \\ &= z_1 + jz_2; \quad z_1, z_2 \in \mathcal{C}_1 \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise iki kompleks sayının terkibi şeklindedir.

$$\mathcal{C}_2 = \{z_1 + jz_2 \mid j^2 = -1\}$$

$\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_1$  sayıları üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu uzayın bazı  $\{1, j\}$  dir.

$$T_x: \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_2$$

$$Y \longrightarrow T_x(Y) = XY = YX$$

$$T_x(1) = X = (z_1 + jz_2)$$

$$T_x(j) = Xj = (z_1 + jz_2)j$$

$$= z_1j + j(z_2j), \quad j^2 = -1$$

$$= z_1j - z_2$$

$$= -z_2 + jz_2$$

$$T(X) = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$= z_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_1} + z_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{T_j}$$

Özel olarak  $z_1, z_2$  kompleks sayılarını  $z_1 = a, z_2 = b, \forall a, b \in \mathbb{R}$  gibi reel

sayılar seçelim. Bu durumda

$$T(X) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (3.1.4)$$

bu ise  $X = a + jb$  kompleks sayısının matris gösterimidir.



#### 4. HOMOTETİK HAREKET

##### 4.1 $E^4$ de Bir M Hiperyüzeyi Üzerinde Yatan Bir $\alpha$ Eğrisinin Bikompleks Sayılar Yardımıyla Belirlediği Hareket

$$E^4 \text{ de, } M = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E^4 \mid \begin{array}{l} f: E^4 \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \quad \quad \quad x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0 \end{array}, X \neq 0 \right\}$$

cümlesini ele alalım.  $\nabla f|_p \neq 0$ ,  $\forall p \in M$  olduğunda  $M$ ,  $E^4$  de bir hiperyüzeypdir.

Şimdi  $M$  üzerinde bir  $\alpha$  eğrisini,

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$$

$$t \longrightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t))$$

olarak alalım,

$\alpha(t)$  nin her noktasını bikompleks sayı gibi düşünürsek  $\alpha(t)$  ye karşılık gelen matris (3.1.3) den,

$$B = T_{\alpha(t)} = \begin{bmatrix} \alpha_1(t) & -\alpha_2(t) & -\alpha_3(t) & \alpha_4(t) \\ \alpha_2(t) & \alpha_1(t) & -\alpha_4(t) & -\alpha_3(t) \\ \alpha_3(t) & -\alpha_4(t) & \alpha_1(t) & -\alpha_2(t) \\ \alpha_4(t) & \alpha_3(t) & \alpha_2(t) & \alpha_1(t) \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

dir. Eğrimiz başlangıçtan geçmeyen bir eğri olmak üzere, bu matris

$$B = h \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1(t)}{h} & \frac{-\alpha_2(t)}{h} & \frac{-\alpha_3(t)}{h} & \frac{\alpha_4(t)}{h} \\ \frac{\alpha_2(t)}{h} & \frac{\alpha_1(t)}{h} & \frac{-\alpha_4(t)}{h} & \frac{-\alpha_3(t)}{h} \\ \frac{\alpha_3(t)}{h} & \frac{-\alpha_4(t)}{h} & \frac{\alpha_1(t)}{h} & \frac{-\alpha_2(t)}{h} \\ \frac{\alpha_4(t)}{h} & \frac{\alpha_3(t)}{h} & \frac{\alpha_2(t)}{h} & \frac{\alpha_1(t)}{h} \end{bmatrix} = hA \quad (4.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$h: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow h(t) = \|\alpha(t)\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}$$

$\forall t$  için  $h(t) \neq 0$  dir.

**Teorem 4.1.1.**

$B = h A$  eşitliğindeki,  $A$  matrisi reel ortogonal matristir.

**İspat:**  $\alpha(t) \in M$ ,  $\alpha_1(t)\alpha_4(t) - \alpha_3(t)\alpha_2(t) = 0$  ve (4.1.2.) de belli olan

$A$  matrisi için

$$A A^T = A^T A = I_4$$

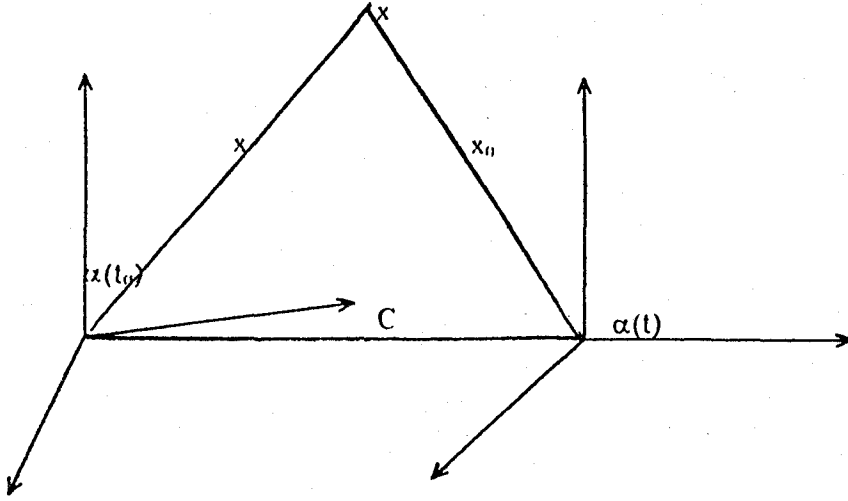
ve

$$\det A = 1$$

dir. Bu ise  $A$  matrisinin ortogonal olması demektir.

#### 4.2. Bir Parametrel Hareket

Sabit uzayı  $R$ , hareketli uzayda  $R_0$  ile gösterelim. O zaman  $R_0$ 'ın  $R$  ye göre 1-parametrel hareketini  $R_0 / R$  ile göstereceğiz



Şekil 4.1.

$\forall t$  için  $C(t) = \alpha(t) - \alpha(t_0)$  olmak üzere (Şekil 4.1.)  $R_0/R$  bir parametrelili hareketli

$$\begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

ile tanımlanabilir.

Burada  $X$  ve  $X_0$  herhangi bir noktanın, sırası ile sabit ve hareketli uzaydaki yer vektörleridir.

#### Teorem 4.2.1.

$E^4$  Öklid uzayında (4.2.1.) ile tanımlanan hareket bir homotetik harekettir.

**İspat:** (4.1.1) ile belli olan  $B$  matrisi,

$$B = hA$$

şeklinde yazılabilir.  $A \in SO(4)$  olduğundan bu matrisin belirlediği hareket bir homotetik harekettir.

**Teorem 4.2.2.**

$\alpha(t)$  birim hızlı eğri ve  $\frac{\dot{\alpha}_1}{\dot{\alpha}_2} = \frac{\dot{\alpha}_3}{\dot{\alpha}_4}$  olsun. Bu takdirde  $B = hA$  nın  $\dot{B}$  türev matrisi reel ortogonal bir matristir.

**İspat:**  $\alpha(t)$  birim hızlı bir eğri olduğundan  $\dot{\alpha}_1^2 + \dot{\alpha}_2^2 + \dot{\alpha}_3^2 + \dot{\alpha}_4^2 = 1$  dir.

$\frac{\dot{\alpha}_1}{\dot{\alpha}_2} = \frac{\dot{\alpha}_3}{\dot{\alpha}_4}$  sağlandığından

$$\dot{B}\dot{B}^T = \dot{B}^T\dot{B} = I_4 \text{ ve } \det \dot{B} = 1 \text{ dir.}$$

Bu ise ispatı tamamlar.

**4.3. Hareketin Pol Eğrileri ve Pol Noktaları**

$R_0 / R$ , 1-parametrelili hareketinde herhangi bir  $t$  anında hem  $R_0$  da hem de  $R$  de sabit olan noktaya hareketin o andaki **pol noktası** denir.

Noktamız hem  $R_0$  da hem de  $R$  de sabit olduğuna göre sürüklenme hızı sıfır olacaktır. Yani

$$\dot{B}X + \dot{C} = 0 \quad (4.3.1)$$

olacaktır. Bu denklemin çözümü ile bulunacak nokta hareketin  $R_0$  daki o ana ait pol noktasıdır.

Teorem 4.2.2 den,  $\det \dot{B} = 1$  ve (4.3.1) eşitliği  $\forall t$  için daima  $X = -\dot{B}^{-1}\dot{C}$  çözümüne sahiptir. Buradan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

**Teorem 4.3.1.**

$R_0$ 'daki  $\forall t$  anına tekabül eden pol noktası öteleme vektörünün o noktadaki  $-\dot{C}$  hız vektörünün  $\dot{B}^T$  kadar döndürülmesiyle elde edilir.

**Teorem 4.3.2.**

$E^4$  de bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan (4.2.1) de belli olan homotetik hareketinde  $\forall t$  anında bir tek pol noktası vardır.

**4.4. Pol Eğrilerinin Birbiri Üzerindeki Hareketi**

$R_0$ 'daki  $q_0$  pol noktası için sürüklenme hızı sıfır olsun. O zaman

$$\dot{B}q_0 + \dot{C} = 0 \quad (4.4.1)$$

olduğundan.

$$q = Bq_0 + C$$

ifadesinden  $R$  deki  $q$  pol noktasının hız vektörü için

$$\dot{q} = B\dot{q}_0 \quad (4.4.2)$$

bulunur.

Hareketli ve sabit uzaydaki pol noktalarının geometrik yerlerine, sırası ile, hareketli pol eğrisi ve sabit pol eğrisi adı verilir.

Bu eğrilerin yay parametrelerini, sırası ile,  $ds$  ve  $ds_0$  olarak gösterirsek (4.4.2) den norm alınarak

$$\begin{aligned} \|\dot{q}\| dt &= \|B\dot{q}_0\| dt \\ &= \|h \wedge \dot{q}_0\| dt \\ &= |h| \cdot \|\dot{q}_0\| dt, \quad h > 0 \\ &= h \|\dot{q}_0\| dt \end{aligned}$$

veya

$$ds = h ds_0$$

olduğu görülür.

**Teorem 4.4.1.**

$E^d$  de bir uzay eğrisi boyunca tanımlanan  $B = hA$  eşitliğinde pol eğrileri birbiri üzerinde kayarak yuvarlanırlar. Hareketin kayma yuvarlanma miktarı  $h$  dir.

**4.5. Yüksek Mertebeden İvme Merkezleri****Tanım 4.5.1.**

Bir  $t$  anında sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları arayalım.

$$\ddot{B}x_0 + \ddot{C} = 0 \quad (4.5.1)$$

denklemini sağlayan noktalara **1. mertebeden ivme merkezleri** diyoruz.

$r$ . mertebeden sürüklenme ivmesinin sıfır olduğu noktalara **( $r-1$ ). mertebeden ivme merkezleri** denir. ( $r-1$ ) inci mertebeden sürüklenme ivmesi için (4.5.1) den ardışık türevler alınarak

$$\gamma_i^{(r)} = B^{(r)}x_0 + C^{(r)} \quad (4.5.2)$$

bulunur. ( $r-1$ ). mertebeden ivme merkezi

$$B^{(r)}x_0 + C^{(r)} = 0 \quad (4.5.3)$$

denkleminin çözüm vektörüyle bellidir. Şimdi hareketin yüksek mertebeden ivme merkezlerini bulalım.

$$B^{(r)} = \frac{d^r B}{dt^r} \quad \text{ve} \quad C^{(r)} = \frac{d^r C}{dt^r}$$

ile gösterelim. Ayrıca  $\alpha(t)$   $r$ . mertebeden regüler bir eğri ve  $\frac{\alpha_1^{(r)}}{\alpha_2^{(r)}} = \frac{\alpha_3^{(r)}}{\alpha_4^{(r)}}$  olsun.

$$\text{Bu ise, } \sum_{i=1}^4 (\alpha_i^{(r)})^2 \neq 0, \quad \alpha_i^{(r)} = \frac{d^r \alpha_i}{dt^r}$$

Buradan

$$\det B^{(r)} = \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \alpha_i^{(r)} \right)^2 + 2 \underbrace{\left( \alpha_1^{(r)} \cdot \alpha_4^{(r)} - \alpha_2^{(r)} \cdot \alpha_3^{(r)} \right)}_{=0} \right]$$

$$\left[ \sum_{i=1}^4 \left( \alpha_i^{(r)} \right)^2 + 2 \underbrace{\left( \alpha_2^{(r)} \cdot \alpha_3^{(r)} - \alpha_1^{(r)} \cdot \alpha_4^{(r)} \right)}_{=0} \right]$$

$$\det B^{(r)} = \left[ \sum_{i=1}^4 \left( \alpha_i^{(r)} \right)^2 \right]^2$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\det B^{(r)} \neq 0$$

dir. Böylece  $\forall t$  anında  $(r-1)$ . mertebeden ivme merkezleri için (4.5.3) ifadesinden  $\det B^{(r)} \neq 0$  olduğundan

$$X_0 = B^{(r)-1} (-C^{(r)})$$

bulunur. Bu değer

$$X = BX_0 + C$$

de yerine yazılırsa

$$X = B \left[ B^{(r)-1} (-C)^{(r)} \right] + C$$

elde edilir. Bu bize sabit uzaydaki  $(r-1)$ . mertebeden ivme merkezini verir.

**Örnek:**  $\alpha: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow M \subset E^4$   
 $t \longrightarrow \alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, \cos t, \sin t)$

$\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$  ,  $\alpha(t)$  birim hızlı ve  $\frac{\alpha_1^{(r)}}{\alpha_2^{(r)}} = \frac{\alpha_3^{(r)}}{\alpha_4^{(r)}}$  dir.

Dolayısıyla 4. bölümdeki teoremlerin hepsi bu eğri için gerçekleşir.



## 5. MATRİS LİE GRUBU

Tanım (2.6.1)'de bikompleks sayıların cümlesi  $X$  ile gösterilmişti. 3. bölümde bikompleks sayıların matris temsilleri elde edilmişti. Şimdi,

$$N = \left\{ T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_k \in \mathbb{R} \right\}$$

cümlesini ele alalım.

$\{N, +, \mathbb{R}, \cdot, \cdot, \cdot\}$  sistemi bir vektör uzayıdır. Gösterebiliriz ki  $N$  cümlesi matris çarpımı işlemine göre bir cebirdir.

$$T: \mathcal{C}_2 \longrightarrow N \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \quad T(X) = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

$T$ , 1:1 ve örtendir. Ayrıca  $\forall X, Y \in \mathcal{C}_2$  ve  $\forall C \in \mathbb{R}$  için,

$$T(X + Y) = T(X) + T(Y)$$

$$T(X \cdot Y) = T(X) \cdot T(Y)$$

$$T(CX) = C \cdot T(X) \text{ dir.}$$

O halde  $T$  fonksiyonu bir cebir izomorfizmidir.  $\mathcal{C}_2$  ve  $N$  nin izomorf olması nedeniyle  $\mathcal{C}_2$  üzerindeki incelemeleri  $N$  üzerinde yapacağız.

$N$  cümlesine cebirsel olarak şöyle de bakılabilir.

Bunun için bir

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_4^4$$

C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

matrisini ele alalım. Bunun elemanları aşağıdaki bağıntıları sağlasın.

$$x_{11} = x_{22} \quad \Rightarrow \quad x_{11} - x_{22} = 0$$

$$x_{11} = x_{33} \quad \Rightarrow \quad x_{11} - x_{33} = 0$$

$$x_{11} = x_{44} \quad \Rightarrow \quad x_{11} - x_{44} = 0$$

$$x_{14} = -x_{23} \quad \Rightarrow \quad x_{14} + x_{23} = 0$$

$$x_{14} = -x_{32} \quad \Rightarrow \quad x_{14} + x_{32} = 0$$

$$x_{14} = x_{41} \quad \Rightarrow \quad x_{14} - x_{41} = 0$$

(5.1.1)

$$x_{21} = -x_{12} \quad \Rightarrow \quad x_{21} + x_{12} = 0$$

$$x_{13} = x_{24} \quad \Rightarrow \quad x_{13} - x_{24} = 0$$

$$x_{13} = -x_{31} \quad \Rightarrow \quad x_{13} + x_{31} = 0$$

$$x_{13} = -x_{42} \quad \Rightarrow \quad x_{13} + x_{42} = 0$$

$$x_{21} = -x_{34} \quad \Rightarrow \quad x_{21} + x_{34} = 0$$

$$x_{21} = x_{43} \quad \Rightarrow \quad x_{21} - x_{43} = 0$$

(5.1.1) denklem sistemi homojen lineer denklem sistemi olup 16 bilinmeyen, 12 denklemden oluşur. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin rankı 12 olup, çözüm uzayının boyutu 4 olmalıdır. Bu durumda 16 bilinmeyenin 4 tanesini keyfi seçersek diğer bilinmeyenler bunlar cinsinden bulunur.

$$x_{11} = x_1$$

$$x_{12} = -x_2$$

$$x_{13} = -x_3$$

$$x_{14} = x_4$$

seçersek denklem sisteminin çözümü

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

biçimindeki matrisler olur. Bu matrislerin cümlesi  $N$  olduğundan (5.1.1) denklem sisteminin çözüm cümlesi  $N$  dir.

Bundan sonraki paragrafta  $N$  nin manifold yapısını ele alacağız.

### 5.1. $N$ nin Manifold Yapısı

$$g: N \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^4$$

$$T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \rightarrow g(T) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$g$  fonksiyonu 1:1 ve örtendir.  $g(T) = \mathbb{R}^4$  olup  $g(T)$  açıktır.  $x_i$  ler sürekli olduğundan  $g$  ve  $g^{-1}$  süreklidir.

$(g, N)$  ikilisi  $N$  nin bir haritasıdır.

Ayrıca  $\{(g, N)\}$  tek haritalı atlas diferensiyellenebilirdir. Böylece  $N$  bu atlasla birlikte diferensiyellenebilir bir manifolddur.

N nin çarpmaya göre grup yapısı yoktur. Şimdi N nin bir alt cümlesinin Lie grup yapısını araştıralım.

$$M = \left\{ T = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0, X \neq 0 \right\}$$

$M \subset N$  dir. M nin homeomorfizmlerini kurmak için  $\mathbb{R}^4$  deki açık alt cümleleri tanımlayalım.

$$A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_4 = 0, x_1 \neq 0\}$$

$$A_2 = \{(x_1, x_2, x_4) \mid x_3 = 0, x_2 \neq 0\}$$

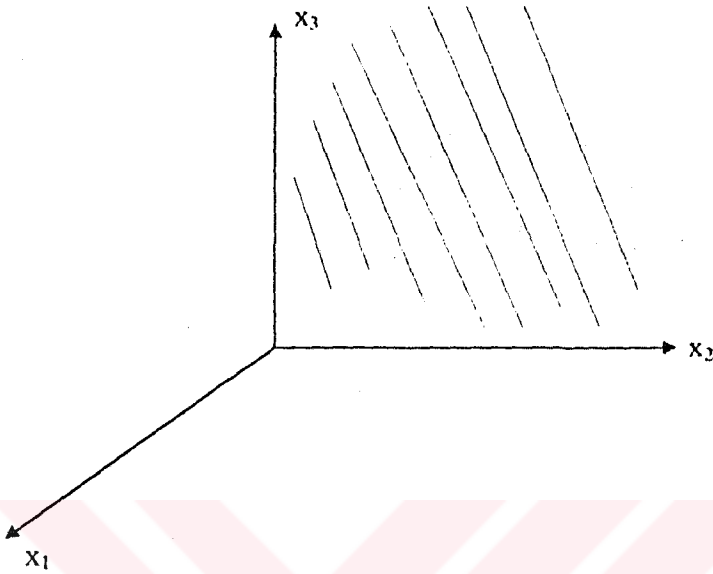
$$A_3 = \{(x_1, x_3, x_4) \mid x_2 = 0, x_3 \neq 0\}$$

$$A_4 = \{(x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = 0, x_4 \neq 0\} \text{ dir.}$$

$$M_i = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \mid x_1 x_4 = x_2 x_3 \text{ ve } x_i \neq 0 \right\}$$

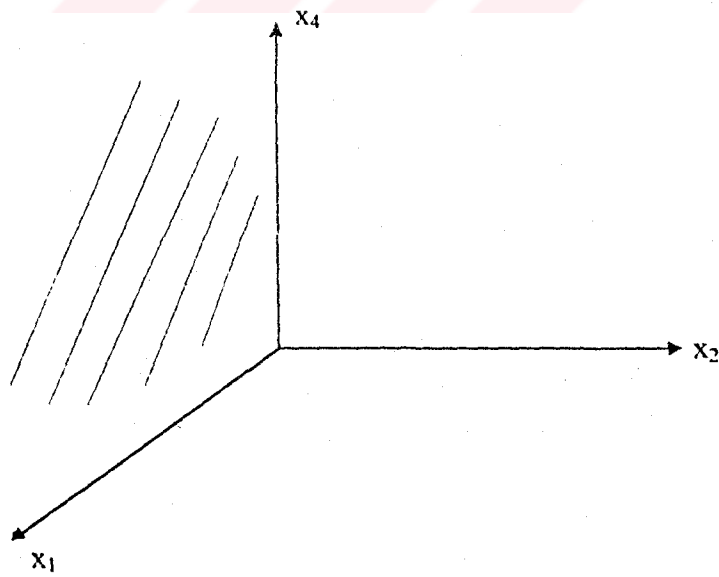
$$x_1 \neq 0; \quad \chi_1: M_1 \longrightarrow \Lambda_1$$

$$\left( x_1, x_2, x_3, \frac{x_2 x_3}{x_1} \right) \rightarrow (x_1, x_2, x_3)$$



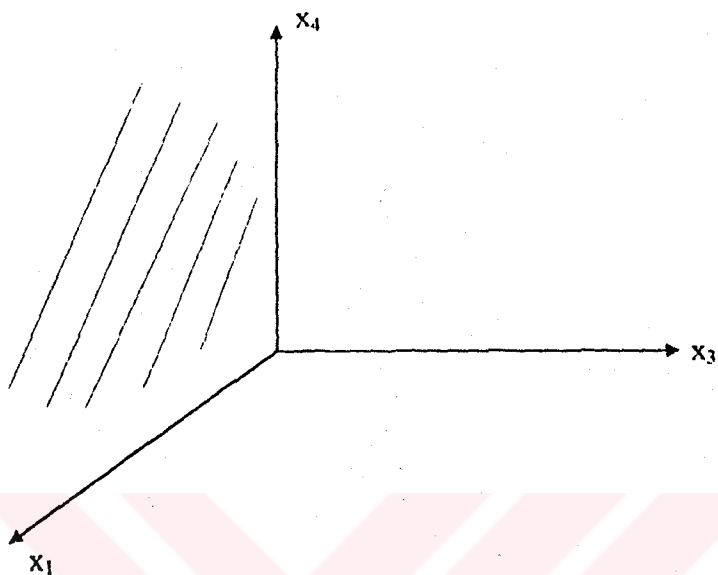
$$x_2 \neq 0; \quad \chi_2: M_2 \longrightarrow \Lambda_2$$

$$\left( x_1, x_2, \frac{x_1 x_4}{x_2}, x_4 \right) \rightarrow (x_1, x_2, x_4)$$



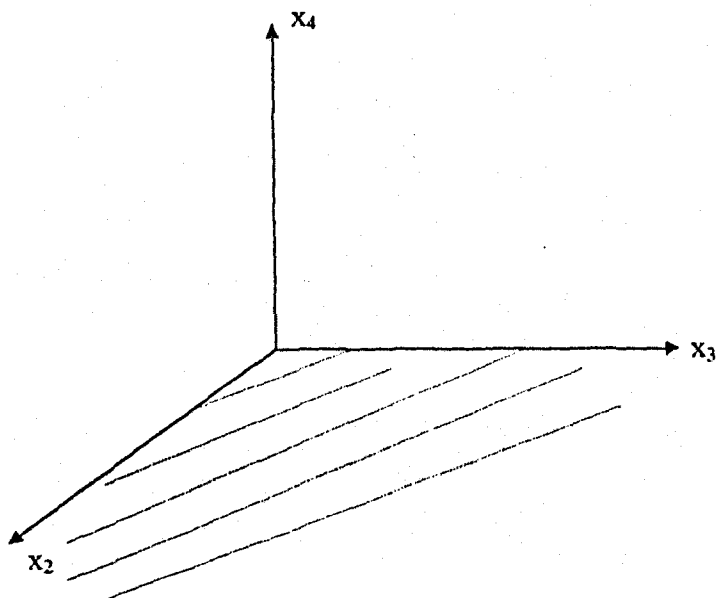
$$x_3 \neq 0; \quad \chi_3: M_3 \longrightarrow A_3$$

$$\left( x_1, \frac{x_1 x_4}{x_3}, x_3, x_4 \right) \rightarrow (x_1, x_3, x_4)$$



$$x_4 \neq 0; \quad \chi_4: M_4 \longrightarrow A_4$$

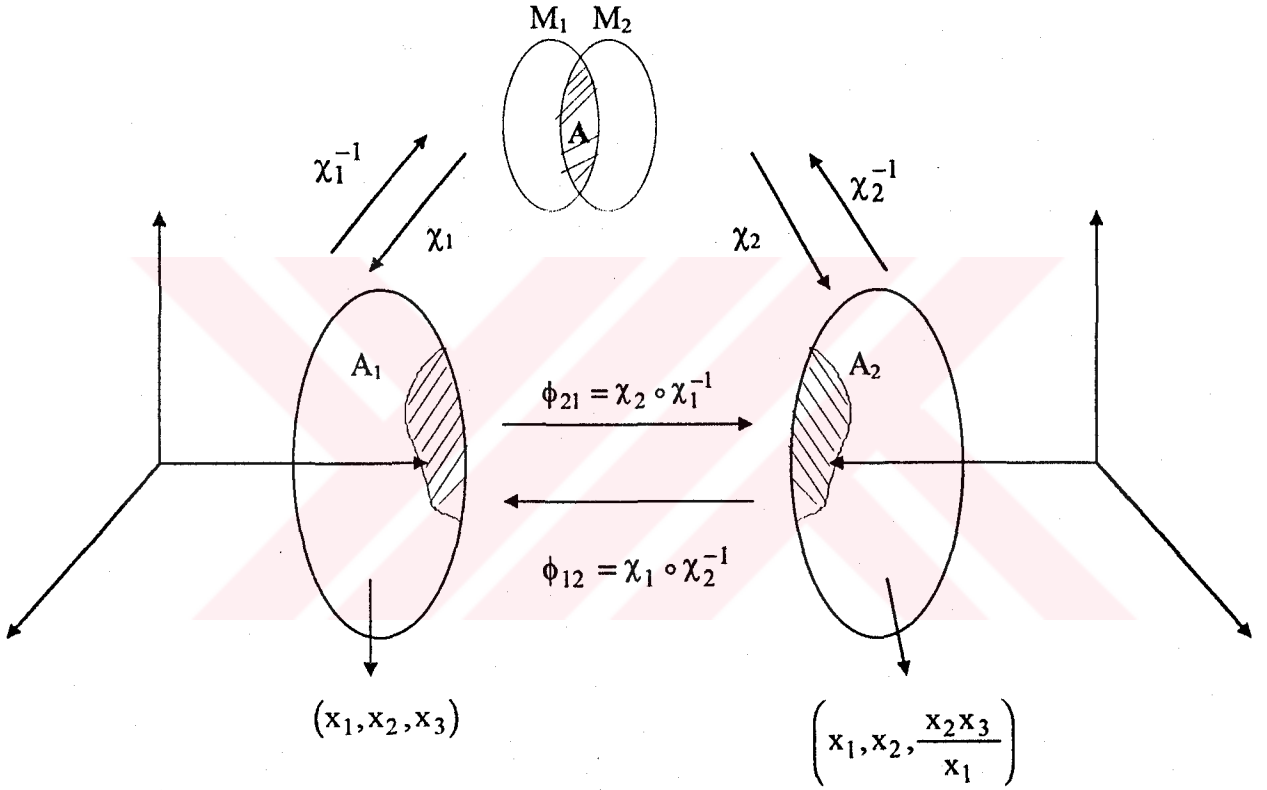
$$\left( \frac{x_2 x_3}{x_4}, x_2, x_3, x_4 \right) \rightarrow (x_2, x_3, x_4)$$



$(\chi_i, M_i)$  ler  $M$  nin birer haritalarıdır.  $\{(\chi_i, M_i)\}_{i=1,2,3,4}$  de  $M$  nin bir atlasıdır.

Şimdi  $M$  nin diferensiyellenebilir Manifold olduğunu gösterelim.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \neq 0, T(X) \in M_1 \\ x_2 \neq 0, T(X) \in M_2 \end{array} \right\} \Rightarrow A = T(X) \in M_1 \cap M_2 \text{ dir.}$$



$$\begin{array}{ccc} \phi_{21} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longrightarrow & \left( x_1, x_2, \frac{x_2 x_3}{x_1} \right) \end{array}$$

$$\phi_{21}(x_1, x_2, x_3) = \left( x_1, x_2, \frac{x_2 x_3}{x_1} \right)$$

ve  $\frac{\partial \phi_{12}}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi_{21}}{\partial x_i}$  mevcut ve süreklidir. Dolayısıyla  $M$  diferensiyellenebilir bir manifolddur. Şimdi  $N$  nin grup yapısını oluşturalım.

## 5.2. Bikompleks Sayıların Lie Grubu

Bir önceki paragrafta  $M$  nin diferensiyellenebilir manifold olduğunu göstermiştik,  $M$  üzerindeki grup işlemi olarak matris çarpımı işlemi alabiliriz.

$$i) . M \times M \longrightarrow M \\ (A, B) \quad A.B$$

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & -x_3 \\ x_3 & -x_4 & x_1 & -x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & -y_2 & -y_3 & y_4 \\ y_2 & y_1 & -y_4 & -y_3 \\ y_3 & -y_4 & y_1 & -y_2 \\ y_4 & y_3 & y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

$$A.B = Z = \begin{bmatrix} z_1 & -z_2 & -z_3 & z_4 \\ z_2 & z_1 & -z_4 & -z_3 \\ z_3 & -z_4 & z_1 & -z_2 \\ z_4 & z_3 & z_2 & z_1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$$

$$z_2 = x_2y_1 + x_1y_2 - x_4y_3 - x_3y_4$$

$$z_3 = x_3y_1 - x_4y_2 + x_1y_3 - x_2y_4$$

$$z_4 = x_4y_1 + x_3y_2 + x_2y_3 + x_1y_4 \quad \text{dir.}$$

$$\det Z = \det(A.B) = \det A \cdot \det B \neq 0 \quad \text{olduğundan} \quad (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) \neq \vec{0}.$$

Ayrıca  $Z_1Z_4 = Z_2Z_3$  dir. Bu durumda  $A.B \in M$  dir.

$$(A.B).C = A.(B.C)$$

$$\text{iii) } \forall A \in M \text{ için } I_4 A = A I_4 = A$$

$$\text{iv) } \forall A \in M \text{ için,}$$

$$A^{-1} = \frac{A^T}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)} \text{ olduğundan } A^{-1} \in M \text{ dir.}$$

$$\text{v) } A.B = B.A$$

dolayısıyla  $(M, \cdot)$  iklisi bir Abel grubudur.

Şimdi de  $M$  deki grup işleminin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim.

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \longrightarrow & M \\ (A, B) & & A.B^{-1} \\ \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) \times (y_1, y_2, y_3) & & (f_1, f_2, f_3) \end{array}$$

Burada  $f_1, f_2, f_3$  fonksiyonları,  $x_i$  ve  $y_i$  Öklid koordinat fonksiyonlarına bağlıdır.  $f_1, f_2, f_3$  fonksiyonlarının diferensiyellenebilir olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla  $M$  bir Lie grubudur.

## 6. SONUÇLAR

- 1) Bikompleks sayıların kuarterniyonlara benzer şekilde verilebileceği gösterildi.
- 2) Bikompleks sayıların reel matris ve kompleks matris gösterimi verildi.
- 3)  $E^4$ 'de bir  $M$  hiperyüzeyi üzerinde yatan bir  $\alpha$  eğrisinin bikompleks sayılar yardımı ile belirlediği hareket incelendi.
- 4) Hareketin yüksek mertebeden ivme merkezleri elde edildi.
- 5) Bikompleks sayıların Manifold ve Lie Grubu yapısı verildi.



**KAYNAKLAR**

- AGRAWAL, O.P.** 1987. Hamilton Operators And Dval-Number Quaternions In Spatial Kinematic Mec-Mach Theory vol 22, No-6 printed in Britain.
- HACISALİHOĞLU, H.H.** 1980. Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Yayını, s. 59-70, 73-80, 239-250.
- HACISALİHOĞLU, H.H.** 1980. Yüksekboyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere. İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayını, s. 1-18, 49-55, 78-85.
- HACISALİHOĞLU, H.H.** 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayını, s. 78-94.
- HACISALİHOĞLU, H.H.** 1994. Diferensiyel Geometri Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayını, s. 23-30.
- PRICE, G.B.**1991. An Introduction to Multicomplex Spaces and Functions. Marcel Dekker, Inc: New York. 1(1)-44(1).
- YAYLI, Y.** 1992. Mech. Mach theory 27(3), 303-305.

## ÖZGEÇMİŞ

1969 yılında Kırıkkale'de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kırıkkale'de tamamladı. 1987 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1991 yılında matematikçi olarak mezun oldu. Eylül 1992 tarihinde, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Aralık 1992 tarihinden itibaren Kırıkkale Üniversitesi Meslek Yüksekokulu'nda Matematik Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

