

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FUZZY, INTUITIONISTIC FUZZY VE TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY
KÜME TEORİSİNDE UZAKLIK - BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE TOPOLOJİK
ÖZELLİKLER**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Fatih KUTLU
DANIŞMAN: Prof. Dr. Tunay BİLGİN

VAN - 2016

T.C.
YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**FUZZY, INTUITIONISTIC FUZZY VE TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY
KÜME TEORİSİNDE UZAKLIK - BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE TOPOLOJİK
ÖZELLİKLER**

DOKTORA TEZİ

HAZIRLAYAN: Fatih KUTLU

VAN – 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Matematik Anabilim Dalı'nda Prof. Dr. Tunay BİLGİN danışmanlığında, Fatih KUTLU tarafından sunulan “FUZZY, INTUITIONISTIC FUZZY VE TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY KÜME TEORİSİNDE UZAKLIK - BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLER” isimli bu çalışma Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili hükümleri gereğince 17/10/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile başarılı bulunmuş ve doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

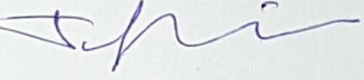
Başkan: Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV

İmza:



Üye: Prof. Dr. Tunay BİLGİN

İmza:



Üye: Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN

İmza:



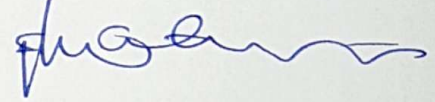
Üye: Doç. Dr. Harun POLAT

İmza:



Üye: Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

İmza:



Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun / / tarih ve sayılı kararı ile onaylanmıştır.

İmza

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatih KUTLU



ÖZET

FUZZY, INTUITIONISTIC FUZZY VE TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY KÜME TEORİSİNDE UZAKLIK - BENZERLİK ÖLÇÜLERİ VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLER

KUTLU, Fatih

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Tunay BİLGİN

Ekim 2016, 253 Sayfa

Bu çalışma yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tez çalışmasının konusu ile ilgili bazı literatür bildirişlerine ayrılmıştır. İkinci bölümde tez çalışmasında kullanılan temel kavramlar detaylıca aktarılmıştır. Üçüncü bölümde fuzzy kümeler üzerinde tanımlı metrik, fuzzy uzaklık, fuzzy benzerlik, fuzzy entropi ve fuzzy kapsama ölçüleri ile alakalı temel yaklaşımlar verilmiştir. Dördüncü bölümde intuitionistic fuzzy kümeler için bir önceki bölümde araştırılan kavramlar incelenmiş ve intuitionistic fuzzy sayılar için sendograf metrik tanımlanmış ve bazı temel topolojik özellikleri incelenmiştir. Bu bölümün sonunda intuitionistic fuzzy uzaklık ve benzerlik ölçüleri ile Šostak manasında topoloji tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Beşinci bölümde temporal intuitionistic fuzzy kümeler ile ilgili temel kavramlar tanıtılmış, Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topoloji tanımlanmıştır. Bu bölümün devamında Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topolojiler için süreklilik, iç, kapanış ve kompaktlık gibi temel topolojik kavramlar tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. Altıncı bölümde temporal intuitionistic fuzzy kümeler için uzaklık, benzerlik, entropi ve kapsama ölçüsü tanımlanmış ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Yedinci bölümde gürültü eklenmiş görüntüler üzerinde fuzzy ve intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerinin benzerlik saptama performansları incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Benzerlik ölçüsü, Entropi, Fuzzy küme, Intuitionistic fuzzy küme, Kapsama ölçüsü, Temporal intuitionistic fuzzy küme, Uzaklık ölçüsü.

ABSTRACT

DISTANCE AND SIMILARITY MEASURES ON THEORY OF FUZZY, INTUITIONISTIC FUZZY AND TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY SETS AND TOPOLOGICAL PROPERTIES

KUTLU, Fatih
Ph. D. Thesis, Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Tunay BİLGİN
October 2016, 253 Pages

This study consists of seven chapters. The first chapter has been devoted to some literature notices about the thesis subject. In the second chapter, the fundamental concepts used in thesis study have been presented in detail. In the third section, basic approaches associated with fuzzy metric defined on the sets, fuzzy distance, fuzzy similarity, fuzzy entropy and fuzzy inclusion measurements have been given. In the fourth chapter, the concepts explored in the previous section have been investigated for intuitionistic fuzzy sets and stenograph metric has been defined for intuitionistic fuzzy numbers and some basic topological properties have been examined. Besides at the end of this chapter the topology in Šostak's sense have been defined by using intuitionistic fuzzy distance and similarity measures and some properties of this topology have been examined. In the fifth chapter, the basic concepts related to temporal intuitionistic fuzzy sets have been introduced; temporal intuitionistic fuzzy topology in Šostak's sense has been defined. In the rest of this section, the basic topological concepts like continuity, interior, closure and compactness for temporal intuitionistic fuzzy topologies in Šostak's sense have been defined and some properties of them have been examined. In the sixth section, distance, similarity, entropy and inclusion measures for temporal intuitionistic fuzzy sets have been defined and the relationships between these concepts have been examined. In the seventh chapter, the similarity detection performances of fuzzy and intuitionistic fuzzy similarity measures on the noise added images have been investigated.

Keywords: Fuzzy sets, Intuitionistic fuzzy sets, Temporal intuitionistic fuzzy sets, Distance measure, Similarity measure, Entropy, Inclusion measure.

ÖN SÖZ

Tez çalışmasında her türlü yardımı ve desteği esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Tunay BİLGİN'e, tez yazım sürecince değerli önerileri ile çalışmanın daha iyi bir şekil almasında katkıda bulunan tez izleme komitesinin değerli üyeleri Prof. Dr. Heybetkulu MUSTAFAYEV ve Doç. Dr. Havva KAVURMACI ÖNALAN'a teşekkür ederim. Ayrıca tez çalışmasındaki değerli katkıları nedeni ile Biophysics and Biomedical Engineering Enstitüsünden (Bulgaristan) Prof. Dr. K. T. ATANASSOV, Beni Suef Üniversitesinden (Mısır) Prof. Dr. A. A. RAMADAN'a, Zhejiang Sci-Tech Üniversitesinden (Çin Halk Cumhuriyeti) Dr. Taihe FAN'a, Mersin Üniversitesinden Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU'na, Muş Alparslan Üniversitesinden Doç. Dr. Harun POLAT'a, Yüzüncü Yıl Üniversitesinden Yrd. Doç. Dr. Özkan ATAN'a, Prof. Dr. Yılmaz ALTUN'a, Prof. Dr. Sadi BAYRAMOV'a, başta Prof. Dr. Cemil TUNÇ olmak üzere Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Bölümünde görev yapan tüm hocalarıma ve Öğr. Gör. Cemal TOSUN, Okt. Halil İbrahim ÖZOK, Öğr. Gör. Eyyüp ŞEVGİN başta olmak üzere tüm değerli mesai arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Tez çalışması boyunca gösterdikleri sonsuz sabır ve özveri ile tezi bitirmemi kolaylaştıran değerli eşim Nazan KUTLU'ya ve aileme teşekkür ederim.

2016

Fatih KUTLU

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖN SÖZ	v
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	ix
ŞEKİLLER LİSTESİ	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Fuzzy Küme Teorisi	4
2.2 Intuitionistic Fuzzy Küme	12
2.3. Fuzzy ve Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzaylarında Topoloji	25
3. FUZZY KÜMELER UZAYINDA UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİ	38
3.1. Fuzzy Metrik Uzaklık Kavramı Üzerine Genel Bir İnceleme	38
3.2. Fuzzy Uzaklık ve Benzerlik Ölçüleri	69
4. INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER UZAYINDA UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİ	87
4.1. Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzayında Metrik Kavramı	87
4.2. Intuitionistic Fuzzy Sayılar Uzayında Sendograf Metrik	99
4.3. Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzayında Uzaklık ve Benzerlik Ölçüleri	107
4.4. Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzayında Uzaklık ve Benzerlik Ölçülerinden Üretilen Şostak Manasındaki Topolojik Uzaklık ve Bazı Özellikleri	154
5. TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER VE TEMPORAL INTUITONISTIC FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR	162
5.1. Temporal Intuitionistic Fuzzy Kümeler için Temel Tanımlamalar	162
5.2. Temporal Intuitionistic Fuzzy Topolojik Uzaylar	169
5.3. Şostak Manasında Temporal Intuitionistic Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık	186
6. TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER UZAYINDA UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİ	195
7. UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİNİN BAZI UYGULAMALARI	221
7.1. Görüntü İşleme Alanında Gürültü ve Çeşitleri	222

	Sayfa
7.2. Gürültü Eklenmiş Görüntüler Üzerinde Fuzzy ve Intuitionistic Fuzzy Benzerlik Ölçülerinin Performans Analizi	225
KAYNAKLAR.....	235
ÖZ GEÇMİŞ.....	253

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1.	Hamming, N. Hamming, Euclidean, N. Euclidean uzaklık ölçüleri ile elde edilen uzaklıklar (Szmidt ve Kacprzyk, 2000).....111
Çizelge 6.1.	Temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri ile elde edilen genel intuitionistic fuzzy uzaklık dereceleri.....198
Çizelge 7.1.	Fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri.....231
Çizelge 7.2.	İki parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri.....231
Çizelge 7.3.	İki parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri.....232
Çizelge 7.4.	Üç parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri.....232
Çizelge 7.5.	Üç parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri.....233

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1.	Intuitionistic fuzzy kümelerin ayrık gösterimi (Atanassov, 2012).....13
Şekil 2.2.	Intuitionistic fuzzy kümelerin iki boyutlu gösterimi (Szmidt, 2014).....14
Şekil 2.3.	Intuitionistic fuzzy kümelerin üç boyutlu gösterimi (Szmidt, 2014).....14
Şekil 2.4.	Intuitionistic fuzzy kümelerin küresel gösterimi (Yang ve Chiclana, 2009).....16
Şekil 2.5.	Intuitionistic fuzzy kümelerin radar kümesi gösterimi (Atanassova, 2012).....16
Şekil 2.6.	Üçgen şekilli IFN (Mahapatra ve Roy, 2012).....20
Şekil 2.7.	Yamuk Şekilli IFN (Mahapatra ve Roy, 2012).....21
Şekil 5.1.	TIFS'nin geometrik gösterimi (Atanassov, 1991).....165
Şekil 6.1.	μ_A temporal intuitionistic üyelik fonksiyonunun grafiği.....200
Şekil 6.2.	η_A temporal intuitionistic üye olmama fonksiyonunun grafiği.....201
Şekil 6.3.	μ_A temporal intuitionistic üye olma fonksiyonunun grafiği.....201
Şekil 6.4.	η_B temporal intuitionistic üye olmama fonksiyonunun grafiği.....202
Şekil 6.5.	D_1^{**} ile ölçülen temporal uzaklığın zamana göre değişimi.....202
Şekil 6.6.	D_2^{**} ile ölçülen temporal uzaklığın zamana göre değişimi.....203
Şekil 7.1.	Fuzzy sistemlerin temel işlem şeması.....220
Şekil 7.2.	Gauss tipi gürültü için ihtimali yoğunluk fonksiyonunun grafiği ($\mu=0.1$, $\sigma=0.2$).....222
Şekil 7.3.	Benek tipi gürültü için ihtimali yoğunluk fonksiyonunun grafiği.....223
Şekil 7.4.	Tasarlanan grafiksel kullanıcı arayüzü (GUI).....228
Şekil 7.5.	Tuz ve biber tipi gürültü uygulanmış görüntü a) orijinal b) (G.S.) 0.1, c) (G.S.) 0.3 ve d) (G.S.) 0.7)229

Şekil 7.6.	Gauss tipi gürültü uygulanmış görüntü a) orijinal b) (G.S.) 0.1, c) (G.S.) 0.3 ve d) (G.S.) 0.7)229
Şekil 7.7.	Benek tipi gürültü uygulanmış görüntü a) orijinal b) (G.S.) 0.1, c) (G.S.) 0.3 ve d) (G.S.) 0.7)230

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
FS^X	X kümesi üzerinde tanımlı tüm fuzzy kümelerin kümesi
IFS^X	X kümesi üzerinde tanımlı tüm intuitionistic fuzzy kümelerin kümesi
$TIFS^{(X,T)}$	X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlı tüm temporal intuitionistic fuzzy kümelerin kümesi
ST-FS	FS^X üzerinde tanımlı Šostak manasındaki fuzzy topoloji
ST-IFS	IFS^X üzerinde tanımlı Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topoloji
CT-FS	FS^X üzerinde tanımlı Chang manasındaki fuzzy topoloji
ST-IFS	IFS^X üzerinde tanımlı Chang manasındaki intuitionistic fuzzy topoloji
ST-TIFS	$TIFS^{(X,T)}$ üzerinde tanımlı Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topoloji
CT-TIFS	$TIFS^{(X,T)}$ üzerinde tanımlı Chang manasındaki intuitionistic fuzzy topoloji
FN	Fuzzy sayılar kümesi
IFN	Intuitionistic fuzzy sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$send(A)$	A intuitionistic fuzzy sayısının sendografi
$end(A)$	A intuitionistic fuzzy sayısının endografi

1. GİRİŞ

Fuzzy (bulanık) küme tanımı ilk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından yapılmıştır. Klasik yaklaşımın aksine fuzzy küme teorisinde bir kümeye ait olmak üyelik derecesi adı verilen bir değer ile derecelendirilmektedir. Bu yaklaşımın sonucu olarak, klasik küme teorisinde bir kümeye ait olma veya olmama gibi sadece iki durum var iken fuzzy küme teorisinde üye olma çeşitli şekillerde derecelendirilebilmektedir. Bu teori, gerek matematikte gerekse mühendislik alanlarında hem mevcut çalışma alanlarının yeniden değerlendirilmesine hem de birçok yeni çalışma alanının doğmasına neden oldu. Zadeh'in yapmış olduğu bu çalışma başta bilgisayar teknolojileri olmak üzere bilim ve teknolojinin birçok alanında geniş bir uygulama alanı bulmuş ve birçok yeniliğin öncüsü olmuştur.

Fuzzy küme teorisi birçok farklı yaklaşımla genişletilmiştir. Bunlardan biri de Atanassov (1983) tarafından tanımlanan intuitionistic (sezgisel) fuzzy küme kavramıdır. Bu kavramda, fuzzy küme mantığında bulunan bir elemanın belli bir kümeye üyelik derecesi ile beraber üye olmama derecesini de tanımlanmakta, üyelik ve üye olmama derecelerinin toplamının 1 'den küçük veya eşit olma şartı getirilmektedir. Bu iki derecelendirmeye ek olarak, üye olma ve üye olmama değerlerinin toplamının birden çıkarılması ile belirsizlik derecesi adı verilen üçüncü bir değer daha elde edilir. Bu üç değer ile beraber intuitionistic fuzzy küme teorisinin bipolar durumların (olumlu-olumsuz, siyah-beyaz, vb.) ve kesin olmayan bilgilerin ele alınmasında oldukça etkili bir yöntem olduğu literatürde bu teori ile alakalı uygulama çalışmalarının gün geçtikçe artması ile ispatlanmaktadır.

Matematiğin temel tanımlarından olan metrik, fuzzy ve intuitionistic fuzzy küme teorisinde birçok farklı şekilde ve anlayışta tanımlanmıştır. Fuzzy kümeler için ilk olarak Kramosil ve Michalek (1975) tarafından tanımlanan fuzzy metrik kavramı birçok farklı araştırmacı tarafından farklı yaklaşımlar ile tanımlanmıştır. Bunlara örnek olarak Erceg (1979), Dubois ve Prade (1980), Kloeden (1980), Deng (1982), Diamond ve Kloeden (1983), Dubois ve Prade (1983), Abu Osman (1983), Chaudhuri ve Rosenfeld (1983), Kaleva ve Seikkala (1984), Rosenfeld (1985), Gerla ve Volpe (1986), Boxer (1997), Fan (1998), Voxman (1998), Bednar (2005) yaklaşımları verilebilir. Diğer

tarafından bu yaklaşımlardan farklı olarak Liu (1992) fuzzy uzaklık ölçüsü, fuzzy benzerlik ölçüsü, fuzzy entropi kavramlarını tanımlamıştır. Bu yaklaşım diğer yaklaşımlardan farklı olarak benzerlik, örüntü tanıma, görüntü işleme, çoklu kriterli karar verme problemleri gibi birçok alanda uygulama alanı bulmuştur.

Intuitionistic fuzzy kümeler uzayında metrik kavramı fuzzy kümelerde olduğu gibi birçok farklı şekilde ele alınmıştır. Bunlara örnek olarak Park (2004), Guha ve Chakraborty (2010), Melliani ve ark., (2015) tarafından verilen metrik uzaylar verilebilir. Fuzzy kümelerde olduğu gibi intuitionistic fuzzy kümeler içinde uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü, entropi ve kapsama ölçüsü adı verilen birçok farklı ölçü tanımlanmıştır. Bu ölçülerin ilk örnekleri Atanassov (1999) tarafından intuitionistic fuzzy kümeler arasında reel değerli uzaklık ölçüleri olarak tanımlanmıştır. Ardından Szmidt ve Kacprzyk (2000), (2009), Grzegorzewski (2004), Wang ve Xin (2005), Huang ve ark. (2005) gibi çalışmalarda farklı reel değerli uzaklık ölçüleri tanımlanmıştır. Öte yandan benzerlik ölçüsü tanımı da Liu (1992) yaklaşımına uygun olarak Dengfen ve Chuntian (2002), Liang ve Shi (2003), Mitchell (2003), Hung ve Yang (2008) tarafından incelenmiştir. Atanassov (2003) intuitionistic fuzzy metrik ve intuitionistic fuzzy sayı gibi kavramların hala birer açık problem olduğunu belirtmiş ve bunların özelliklerinin araştırılmasının bu teori ve uygulamadaki sıkıntıların giderilmesinde öncü olacağını savunmuştur. Diğer taraftan Zadeh (2007) genel geçer bir benzerlik ölçüsü tanımlanmamasının hali hazırda cevaplanmamış bir muamma olduğunu belirtmiştir.

Reel dünyaya ait kavramlar genellikle zamana bağlıdır. Yani bu kavramların incelenen özellikleri zamana bağlı olarak değişiklik gösterebileceğinden kavramların matematiksel olarak daha iyi ele alınması, daha spesifik manada bu kavramları intuitionistic fuzzy küme olarak tanımlarken elde edeceğimiz üyelik ve üye olmama derecelerinin tanımlanması, için ele aldığımız uzaydaki elemanlar ile birlikte ele alınan zaman kümesindeki zaman anına bağlı olan yeni bir tanımının kurulması ihtiyacı doğmuştur. Literatürdeki bu eksikğin giderilmesi için Atanassov (1991) temporal intuitionistic fuzzy küme adı verilen yeni bir küme teorisi tanımlamıştır. Oldukça yeni bir çalışma alanı olan temporal intuitionistic fuzzy kümeler ile ilgili yapılan çalışma sayıları gün geçtikçe artmakta ve konunun önemi daha iyi anlaşılmaktadır.

Bu çalışma kapsamında fuzzy ve intuitionistic fuzzy küme uzaylarındaki metrik ve daha genel olarak uzaklık kavramları detaylıca incelenmiş olup intuitionistic fuzzy uzaklık ve benzerlik ölçüleri ile Šostak ve Chang manasında topoloji tanımlanmıştır. Diğer taraftan temporal intuitionistic fuzzy kümeler için Chang ve Šostak manasında topolojiler tanımlanmış, bu uzaylarda süreklilik, kompaktlık gibi temel kavramlar tanımlanmıştır. Ayrıca temporal intuitionistic fuzzy kümeler için uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü, entropi ve kapsama ölçüsü tanımlamaları yapılmış ve bunlar arasındaki temel bağıntılar incelenmiştir. Çalışmanın son kısmında gürültü eklenmiş görüntüler üzerinde fuzzy ve intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerinin benzerlik saptama performansları ölçülmüştür.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Öncelikle fuzzy küme kavramı ve temel özellikleri tanıtılmış ardından intuitionistic fuzzy kümeler için benzer tanımlamalar verilmiştir. Bu bölümün son kısmında fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan topolojilere ve bunlar üzerinde tanımlanan temel tanım ve özelliklere yer verilmiştir.

2.1 Fuzzy Küme Teorisi

Tanım 2.1.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde A fuzzy kümesi $\mu_A : X \rightarrow I = [0,1]$ olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$ şeklinde tanımlanır. Burada $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x 'in A fuzzy kümesine ait olma (üyelik) derecesi ve μ_A fonksiyonuna da üyelik fonksiyonu denir. Tanımdan anlaşılacağı üzere her A klasik (crisp) kümesi

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

ile tanımlı karakteristik fonksiyonu ile bir fuzzy küme olarak ifade edilebilir. X kümesi üzerinde tanımlı tüm fuzzy kümelerin ailesini FS^X ile gösterelim (Zadeh, 1965).

Fuzzy kümeler üyelik fonksiyonunun değer kümesine göre de isimlendirilirler. Örneğin $[0,1]$ aralığı yerine bir L latisi üzerine tanımlı fuzzy kümeler L -fuzzy küme veya üyelik derecesi bir fuzzy küme olarak verilmiş ise bu bir tip-2 fuzzy küme adını alır (Zadeh, 1965).

Tanım 2.1.2: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde $\tilde{1} = \{(x, \mu_1(x)); x \in X\}$ ve $\tilde{0} = \{(x, \mu_0(x)); x \in X\}$ fuzzy kümeleri her $x \in X$ için $\mu_1(x) = 1$ ve $\mu_0(x) = 0$ ile tanımlıdır (Zimmermann, 2001).

Tanım 2.1.3: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde A ve B fuzzy kümeleri $A = \{(x, \mu_A(x)); x \in X\}$ ve $B = \{(x, \mu_B(x)); x \in X\}$ ile verilmiş olsun. Bu kabuller üzerine fuzzy kümeler uzayında temel küme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır.

1. $A = B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$,
2. $A \subseteq B \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$,
3. $\bar{A} = \{(x, 1 - \mu_A(x)); x \in X\}$,
4. $A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)); x \in X\} = \{(x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x)); x \in X\}$,
5. $A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)); x \in X\} = \{(x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)); x \in X\}$

(Zadeh, 1965).

Bu tanımlamalar ile birlikte fuzzy kümeler uzayında aşağıdaki temel küme özelliklerinin sağlandığı aşikârdır:

- a. $\bar{\bar{A}} = A$
- b. $A \cup B = B \cup A$,
- c. $A \cap B = B \cap A$.
- d. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
- e. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
- f. $A \cup A = A$,
- g. $A \cap A = A$.
- h. $A \cup (A \cap B) = A$,
- i. $A \cap (A \cup B) = A$,
- j. $A \cup \tilde{1} = \tilde{1}$,
- k. $A \cap \tilde{1} = A$,
- l. $A \cup \tilde{0} = A$,
- m. $A \cap \tilde{0} = \tilde{0}$.
- n. $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$,
- o. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(Zadeh, 1965).

Yukarıda bahsettiğimiz işlemlerin genelleştirilmesi olarak t -norm ve t -conorm tanımları sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir.

$a, b, c \in I$ olmak üzere bir t -norm aşağıdaki şartları sağlayan $t: I \times I \rightarrow I$ dönüşümüdür:

1. Birim Eleman: 1, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $t(1, a) = a$,
2. Monotonluk: $a \leq b \Rightarrow t(a, c) \leq t(b, c)$,
3. Değişme Özelliği: $t(a, b) = t(b, a)$,
4. Birleşme Özelliği $t(a, t(b, c)) = t(t(a, b), c)$ (Szmidt 2013).

Bu özelliklerden anlaşılacağı üzere t -norm monoton azalmayan dönüşümdür ve $t(a, 0) = 0$ ifadesini sağlar. Çok kullanılan t -normlara örnek olarak: minimum, cebirsel çarpma ve $t(a, b) = \max(0, a + b - 1)$ ile tanımlı Lukasiewicz t -normları verilebilir (Szmidt 2013).

Diğer taraftan, $a, b, c \in I$ olmak üzere bir t -conorm (diğer bir ifade ile s -norm) aşağıdaki şartları sağlayan $s: I \times I \rightarrow I$ dönüşümüdür:

1. Birim Eleman: 0, dönüşümün birim elemanıdır. Yani $s(0, a) = a$,
2. Monotonluk: $a \leq b \Rightarrow s(a, c) \leq s(b, c)$,
3. Değişme Özelliği: $s(a, b) = s(b, a)$,
4. Birleşme Özelliği $s(a, s(b, c)) = s(s(a, b), c)$ (Szmidt 2013).

Literatürde sıkça kullanılan t -conormlara örnek olarak: maximum, $s(a, b) = a + b - ab$ ile tanımlı olasılıksal çarpma ve $t(a, b) = \min(1, a + b)$ ile tanımlı Lukasiewicz t -conormları verilebilir. Bu tanımlamalar ile birlikte t -norm ve t -conorm tanımlarının $s(a, b) = 1 - t(1 - a, 1 - b)$ bağıntısı ile dual kavramlar olduğu kolayca görülür (Szmidt 2013).

Tanım 2.1.4: X boştan farklı bir küme ve $\alpha \in I$ olsun. $q: X \rightarrow I$ ve belirli $x \in X$

elemanı için üyelik fonksiyonu her $x' \in X$ için $q(x') = \begin{cases} \alpha & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases}$ ile tanımlanan fuzzy

kümeye X 'de fuzzy nokta denir. x noktasına bu fuzzy noktanın desteği ve α değerine de bu fuzzy noktanın değeri denir. Yukarıda tanımlanan fuzzy nokta q_x^α ile gösterilir. q_x^α fuzzy noktasının tümleyeni $q_x^{1-\alpha}$ ile gösterilir. A , X üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olmak üzere $q_{x_0}^{\alpha_0}$ fuzzy noktası eğer $\mu_A(x_0) > \alpha_0$ ise A fuzzy kümesine aittir denir. Bu durum $q_{x_0}^{\alpha_0} \in A$ ile gösterilir (Deng, 1982).

X kümesinde tanımlı tüm fuzzy noktalar kümesini FP^X ile gösterelim. Aşağıda fuzzy noktalar ile ilgili sıkça kullanılan özellikler verilmiştir. Bu özellikler ile daha detaylı bilgi için Deng (1980) ve Deng (1982) çalışmalarına başvurulabilir.

Teorem 2.1.5: X boştan farklı bir küme $A, A_i \in IFS^X$, $\alpha, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]$, $x, x_1, x_2 \in IFS^X$ olmak üzere

1. $A = \bigcup_{q_x^\alpha \in A} q_x^\alpha$,
2. $q_x^\alpha \in \bigcup_{i \in J} A_i \Rightarrow \exists i_0 \in J$ için $q_x^\alpha \in A_{i_0}$,
3. $q_x^\alpha \in \bigcap_{i \in J} A_i \Rightarrow \forall i \in J$ için $q_x^\alpha \in A_i$,
4. $q_{x_1}^{\alpha_1} = q_{x_2}^{\alpha_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ve $\alpha_1 < \alpha_2$,
5. $q_{x_1}^{\alpha_1} \in q_{x_2}^{\alpha_2}$ ve $\forall i \in J$ için $q_{x_2}^{\alpha_2} \in A_i \Rightarrow q_{x_1}^{\alpha_1} \in \bigcap_{i \in J} A_i$,
6. $q_{x_1}^{\alpha_1} \in \bar{A} \Leftrightarrow \exists \alpha_1 \in (0, 1 - \alpha_0)$ ($q_{x_0}^{\alpha_1} \notin A$) $\Leftrightarrow q_{x_0}^{1-\alpha_0} \leq \mu_A$,
7. $q_{x_1}^{\alpha_1} \in A \Rightarrow \exists \alpha > \alpha_1$ için $q_{x_1}^\alpha \in A$,
8. $A \neq \tilde{0} \Leftrightarrow \exists q_{x_1}^{\alpha_1} \in A$

(Deng, 1982).

Tanım 2.1.6: A , X kümesi üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere $supp(A) = \{x \in X; \mu_A(x) > 0\}$ crisp kümesine A kümesinin desteği (support) denir (Zimmermann, 2001).

Tanım 2.1.7: A , X kümesi üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere μ 'nün aldığı maksimum değere A fuzzy kümesinin yüksekliği denir. Eğer A fuzzy kümesinin yüksekliği 1 ise, yani $\exists x \in X$ için $\mu_A(x) = 1$ ise, A fuzzy kümesine, normal fuzzy küme denir (Dubois ve Prade, 1980).

Tanım 2.1.8: A , X kümesi üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere $A^\alpha = \{x \in X; \mu_A(x) \geq \alpha\}$ kümesine A fuzzy kümesinin α -seviye kümesi denir. $A, \mathbb{R}$ 'de tanımlandığında α -seviye kümesi bir kapalı aralıktır. Bu nedenle A^α , α -seviye kümesi $[\mu^-(\alpha), \mu^+(\alpha)]$ aralığı ile ifade edilir (Dubois ve Prade, 1980).

Tanım 2.1.9: A , X kümesi üzerinde bir fuzzy küme olmak üzere $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ şartını sağlıyorsa A 'ya fuzzy konveks denir. Diğer taraftan $\forall x, y \in X$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$ şartını sağlıyorsa A 'ya fuzzy konkav denir (Zadeh, 1965).

Tanım 2.1.10: $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı A fuzzy kümesi aşağıdaki şartları sağlıyor ise μ 'ye bir fuzzy sayı denir.

1. A , fuzzy konveks,
2. A , normal fuzzy küme,
3. A , üst yarı sürekli,
4. $\text{supp}(A) = \{x; \mu_A(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm fuzzy sayılarının kümesini FN ile gösterelim (Dubois ve Prade, 1980).

Tanım 2.1.11: A fuzzy kümesi her $t < 0$ için $\mu_A(t) \neq 0$ oluyor ise negatif olmayan (non-negatif) fuzzy sayı adını alır. FN 'deki tüm negatif olmayan fuzzy sayıların kümesini G ile gösterilecektir (Dubois ve Prade, 1980).

Tanım 2.1.12: A ve B iki fuzzy sayı olmak üzere $\forall t \in \mathbb{R}$ için $\mu_A(t) = \mu_B(t)$ ise A ve B fuzzy sayılarına eşit fuzzy sayılar denir (Dubois ve Prade, 1980).

Tanım 2.1.13: Fuzzy sayılar üzerinde aritmetik işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır. $x, y, z \in \mathbb{R}$ ve A ve B fuzzy sayı olsun. O halde;

1. $A+B(z) = \sup_{z=x+y} \{ \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \},$
2. $A-B(z) = \sup_{z=x-y} \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$
3. $A.B(z) = \sup_{z=x.y} \min(\mu_A(x), \mu_B(x)),$
4. $A/B(z) = \sup_{z=x/y} \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$

Fuzzy sayılar uzayında toplamsal ve çarpımsal birimler sırası ile aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\bar{0}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \bar{1}(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}.$$

$-A$ fuzzy sayısı $\bar{0} - A$ şeklinde tanımlanır. Fuzzy sayılar üzerinde aritmetik işlemlerin tanımına uygun olarak $(-\mu_A)(x) = \mu_A(-x)$ ve $A-B = A+(-B)$ şeklinde tanımlanır. A fuzzy sayısının mutlak değeri $|A|(x) = \begin{cases} \max(\mu_A(x), \mu_A(-x)), & x \geq 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$ şeklinde tanımlanır (Kaleva ve Seikkala, 1980).

Lemma 2.1.14 A ve B iki fuzzy sayı olmak üzere $A^\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $B^\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olsun. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

1. $(A+B)^\alpha = [a_1^\alpha + a_2^\alpha, b_1^\alpha + b_2^\alpha],$
2. $(A.B)^\alpha = [a_1^\alpha . a_2^\alpha, b_1^\alpha . b_2^\alpha],$
3. $(A-B)^\alpha = [a_1^\alpha - a_2^\alpha, b_1^\alpha - b_2^\alpha],$
4. $a_1^\alpha > 0$ ise $\left(\frac{\bar{1}}{A}\right)^\alpha = \left[\frac{1}{b_1^\alpha}, \frac{1}{a_1^\alpha}\right],$

$$5. (|A|)^\alpha = \left[\max\{0, a_1^\alpha, -b_1^\alpha\}, \max\{|a_1^\alpha|, |b_1^\alpha|\} \right]$$

(Kaleva ve Seikkala, 1980).

Aşağıdaki lemma verilen bir kapalı aralığın bir fuzzy sayının α – seviye kümesi olup olmadığına dair bir ölçü verir.

Önerme 2.1.15: $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $[a^\alpha, b^\alpha]$, boş olmayan kapalı aralıkların ailesi olsun. Eğer;

1. Tüm $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2$ için $[a^{\alpha_1}, b^{\alpha_1}] \supset [a^{\alpha_2}, b^{\alpha_2}]$,
 2. α 'ya yakınsayan, her artan $\{\alpha_k\} \subset (0,1]$ dizisi için
- $$\left[\lim_{k \rightarrow \infty} a^{\alpha_k}, \lim_{k \rightarrow \infty} b^{\alpha_k} \right] = [a^\alpha, b^\alpha] \text{ dır.}$$

Şartları sağlanıyorsa $[a^\alpha, b^\alpha]$ kapalı aralığı bir fuzzy sayının α – seviye kümesidir. Tersine eğer $[a^\alpha, b^\alpha]$ kapalı bir fuzzy sayının α – seviye kümesi ise yukarıdaki şartlar sağlanır (Kaleva ve Seikkala, 1980).

Literatürde fuzzy sayılar için birçok sıralama ölçüsü tanımlanmıştır. Aşağıda en sık kullanılan ölçülerden biri tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.16: FN fuzzy sayılar uzayında kısmi sıralama bağıntısı $\preceq$ aşağıdaki şekilde tanımlanır. $A, B \in FN$ olmak üzere $A^\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $B^\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olsun. O halde $A \preceq B$ ancak ve ancak $a_1^\alpha \leq a_2^\alpha$ ve $b_1^\alpha \leq b_2^\alpha$ dır. $A \preceq B$ bağıntısı μ_A üyelik fonksiyonunun $\mu_B(x)$ üyelik fonksiyonundan solda olduğu manasına gelir (Kaleva ve Seikkala, 1980).

Mizumoto ve Tanaka (1981), $\dot{\preceq}$ ve $\dot{\preceq}$ kısmi sıralama bağıntılarını aşağıdaki tanımlamıştır. $A, B \in FS^X$ olmak üzere $(A \dot{\vee} B)(x) = \sup_{x=\max(s,r)} \min(\mu_A(s), \mu_B(r))$ ve $(\mu \dot{\wedge} \eta)(x) = \sup_{x=\min(s,r)} \min(\mu_A(s), \mu_B(r))$ olarak tanımlansın. O halde $\dot{\preceq}$ ve $\dot{\preceq}$ bağıntıları

1. $A \dot{\preceq} B \Leftrightarrow A \dot{\vee} B = B$,
2. $A \dot{\preceq} B \Leftrightarrow A \dot{\wedge} B = A$.

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu kısmi sıralama bağıntıları konveks normal fuzzy sayılar kümesinde de geçerlidir. $A, B \in FS^X$ olmak üzere $A^\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $B^\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olsun. O halde aşağıdaki ifadelerin doğruluğu açık bir şekilde görülür:

1. $(A \wedge B)^\alpha = [\min(a_1^\alpha, a_2^\alpha), \min(b_1^\alpha, b_2^\alpha)]$,
2. $(A \vee B)^\alpha = [\max(a_1^\alpha, a_2^\alpha), \max(b_1^\alpha, b_2^\alpha)]$

Bu son ifadeler ile $\dot{\leq}$ ve $\dot{\leq}$ kısmi sıralama bağıntıları ile $\preceq$ kısmi sıralama bağıntısının birbirine denk olduğu görülür. FN 'de mutlak eşitsizlik $\prec$; $A^\alpha = [a_1^\alpha, b_1^\alpha]$ ve $B^\alpha = [a_2^\alpha, b_2^\alpha]$ olmak üzere $A \prec B \Leftrightarrow a_1^\alpha < a_2^\alpha$ ve $b_1^\alpha < b_2^\alpha$ şeklinde tanımlanır (Mizumoto ve Tanaka, 1981).

Tanım 2.1.17: $\{A_n\}$, FN 'de bir dizi olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n^\alpha = [a_n^\alpha, b_n^\alpha]$ olsun. Eğer $A^\alpha = [a^\alpha, b^\alpha]$ olacak şekilde $A \in FN$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha \rightarrow a^\alpha$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n^\alpha \rightarrow b^\alpha$ ise $\{A_n\}$ dizisi A 'ya yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ ile gösterilir. Bu şekilde tanımlanan yakınsaklığa α – seviye yakınsaklık denir. Ayrıca fuzzy sayı uzayında, üyelik fonksiyonlarının noktasal yakınsaklığı da tanımlanabilir. Fakat bu tanımın bazı dezavantajları vardır. Örneğin $c \in \mathbb{R}$ ve $|c| \leq 1$ için $\{A_n\} = \{c^n\}$ şeklinde tanımlanan dizi $\bar{0}$ fuzzy sayısına noktasal olarak yakınsamaz. Fakat bu dizi, $\tilde{0}$ kümesine yakınsar (Kaleva ve Seikkala, 1980).

2.2 Intuitionistic Fuzzy Küme

Tanım 2.2.1: X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde bir intuitionistic fuzzy küme (IFS), $\forall x \in X$ için $0 \leq \mu_A(x) + \eta_A(x) \leq 1$ şartını sağlayan $\mu_A : X \rightarrow I$, $\eta_A : X \rightarrow I$ fonksiyonlar olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in X\}$ kümesidir. Her $x \in X$ için $\mu_A(x)$ ve $\eta_A(x)$ sayıları sırasıyla x 'in A intuitionistic fuzzy kümesine üyelik derecesi ve üye olmama derecesi olarak adlandırılır. $B = \{(x, \mu_B(x)) : x \in X\}$ fuzzy kümesi için

$\eta_B(x) = 1 - \mu_B(x)$ olarak tanımlanarak bir intuitionistic fuzzy küme elde edilebilir (Atanassov, 1983).

Her bir $x \in X$ için A intuitionistic fuzzy kümesinde x ' intuitionistic fuzzy indeksi $\pi_A(x) = 1 - \mu_A(x) - \eta_A(x)$ ile tanımlanır. $\pi_A(x)$ belirsizlik (indeterminacy) veya tereddüt (hesitation) derecesi olarak adlandırılır. X kümesi üzerinde tanımlı tüm intuitionistic fuzzy kümelerin ailesini IFS^X ile gösterelim (Atanassov, 1983).

Şimdi sayılar teorisinde tanımlanan ve IFS kavramını daha iyi açıklayacak bir örnek verelim.

Örnek 2.2.2: n , 2'den büyük veya eşit bir doğal sayı olmak üzere $F(n) = \{x; 1 \leq x < n, (x, n) = 1\}$ olsun. Burada (x, n) ile n ile x 'in ortak bölenlerinin en büyüğü gösterilmektedir. $card(F(n)) = \varphi_n(n)$ diyelim. Benzer şekilde

$\varphi_\mu(n) = card(\{x; 1 < x \leq n, x/n\})$ olarak tanımlayalım Bu iki ifadeden yararlanarak

$n \geq 2$ için $V(n) = \left(\frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_\eta(n)}{n} \right)$ fonksiyonu tanımlanabilir. Açıkça

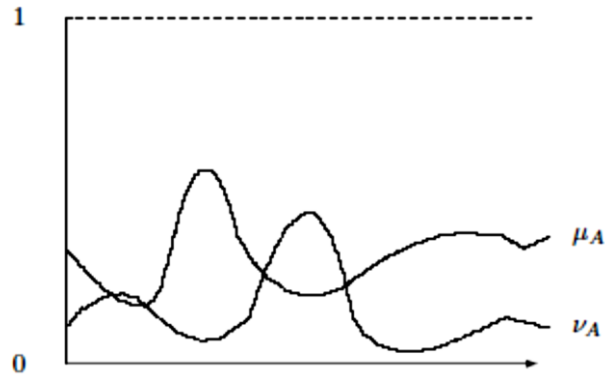
$0 \leq \frac{\varphi_\mu(n)}{n} + \frac{\varphi_\eta(n)}{n} \leq 1$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Örnek olarak $V(3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$,

$V(12) = \left(\frac{4}{12}, \frac{4}{12} \right)$, $V(15) = \left(\frac{3}{15}, \frac{8}{15} \right)$. V fonksiyonu her bir n doğal sayısı için

bölünebilme ve bölünememe derecelerini tanımlar. Böylece V fonksiyonundan

yararlanarak $\mathfrak{S}^* = \left\{ \left(n, \frac{\varphi_\mu(n)}{n}, \frac{\varphi_\eta(n)}{n} \right); n \in \mathbb{N} \right\}$ ile bir IFS tanımlanır (Atanassov, 2012).

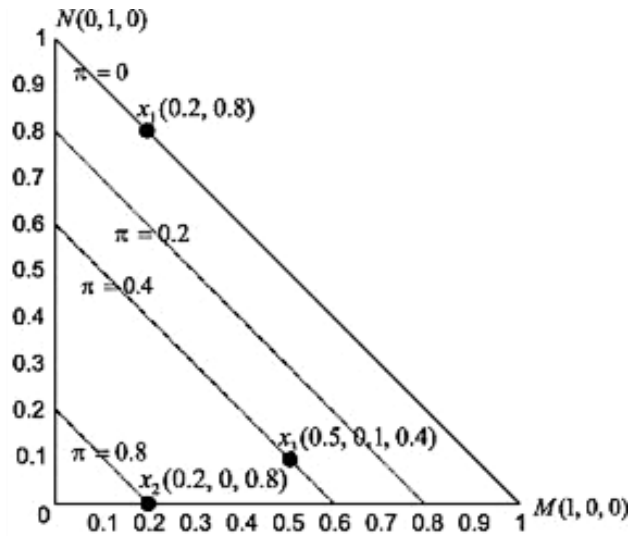
Bilindiği üzere fuzzy kümelerin tek bir geometrik gösterimi vardır. Buna karşın intuitionistic fuzzy kümeler birçok şekilde geometrik olarak gösterilebilir. Bunları kronolojik olarak sıralarsak ilk olarak, Atanassov tarafından verilen ve en sık kullanılan aşağıdaki gösterim verilebilir. Bu gösterim iki boyutludur ve ayrıca üyelik ve üye olmama derecelerinin ayrı ayrı olarak çizilir. $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in X\}$ bir IFS olmak üzere:



Şekil 2.1. Intuitionistic fuzzy kümelerin ayırık gösterimi (Atanassov, 2012).

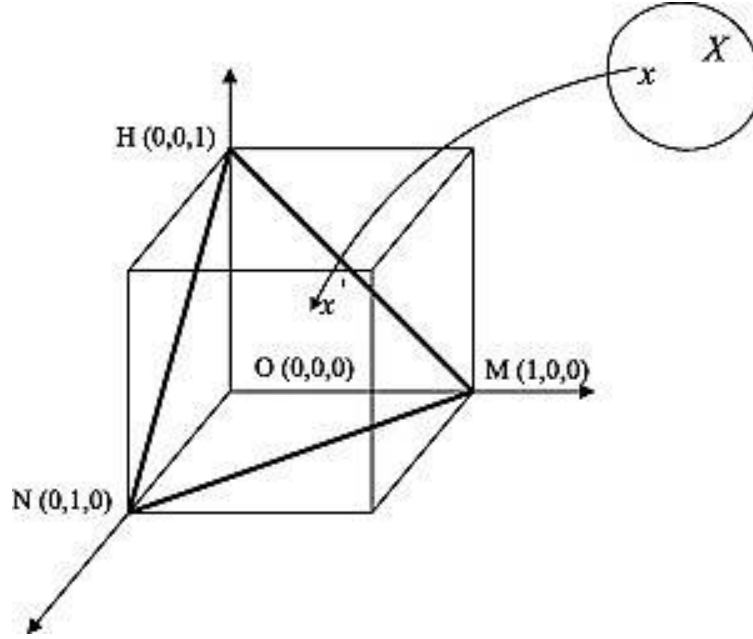
Atanassov, intuitionistic fuzzy kümelerin geometrik için bir diğer gösterim şeklini aşağıdaki örnekte görülebileceği üzere bir ikizkenar üçgen üzerinde kurmuştur.

Örnek 2.2.3: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ kümesi üzerinde tanımlanmış $A = \{(x_1, 0.2, 0.8), (x_2, 0.2, 0), (x_3, 0.5, 0.1)\}$ intuitionistic fuzzy kümesini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz. Aşağıdaki grafikte her bir IFS'ye ait üçüncü birleşenler belirsizlik derecesini göstermektedir. Burada MN doğrusuna paralel olan doğru üzerinde bulunan her bir IFS aynı belirsizlik derecesine sahiptir. Doğrular, orijine yaklaştıkça belirsizlik derecesi artmakta ve MN doğrusuna yaklaştıkça belirsizlik azalmaktadır (Szmıdt, 2014).



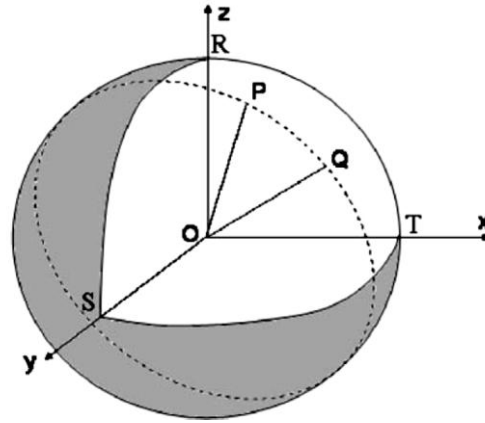
Şekil 2.2. Intuitionistic fuzzy kümelerin iki boyutlu gösterimi (Szmıdt, 2014).

Szmidt ve Kacprzyk 2000 çalışmasında üye olma ve üye olmama dereceleri ile birlikte belirsizlik derecesinin de eklenmesi ile IFS'lerin aşağıdaki şekilde birim küpün içindeki MNH üçgeni içerisinde gösterilebileceğini belirtmişlerdir. Burada MNH üçgeninin yüzeyinde bulunan noktaların koordinatları o noktanın IFS'ye üye olma, üye olmama ve belirsizlik derecelerini gösterir (Szmidt, 2014).



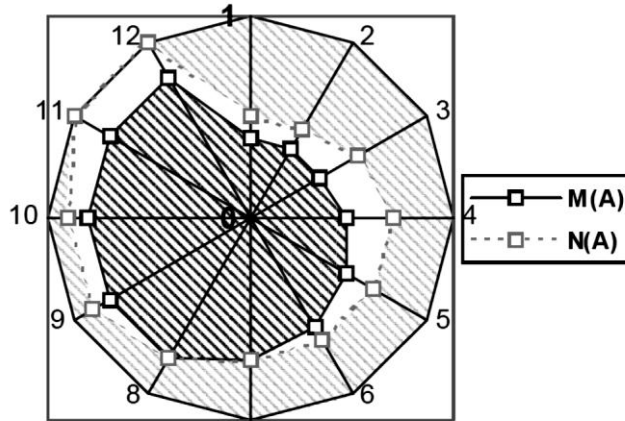
Şekil 2.3. Intuitionistic fuzzy kümelerin üç boyutlu gösterimi (Szmidt, 2014).

Intuitionistic fuzzy kümeler için bir diğer gösterim şekli Yang ve Chiclana (2009) tarafından tanımlanan küresel gösterimdir. Bu gösterimde bir A intuitionistic fuzzy kümesi $\mu_A(a) + \eta_A(a) + \pi_A(a) = 1$ olmasından yararlanılarak ve küre denklemi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ifadesinde $\mu_A(a) = x^2$, $\eta_A(x) = y^2$ ve $\pi_A(x) = z^2$ seçilerek elde edilen koordinatların bir küre üzerinde ifade edilmesi ile gösterilir. Yang ve Chiclana bu gösterimden yararlanarak intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde bazı uzaklık tanımları vermiştir (Yang ve Chiclana, 2009).



Şekil 2.4. Intuitionistic fuzzy kümelerin küresel gösterimi (Yang ve Chiclana, 2009).

Intuitionistic fuzzy kümeler için diğer bir gösterim yöntemi de Atanassova (2012) tarafından verilmiştir. Aşağıdaki şekilde görülebileceği üzere en içteki kısım bir intuitionistic fuzzy kümenin üyelik derecesini en dıştaki kısımda üye olmama derecesini göstermektedir. Arada kalan kısım ise belirsizlik derecesini belirtmektedir. Bu gösterim zaman serileri ile ifade edilen veriler, çoklu girişli (multivaried) veriler veya herhangi bir döngüsel özellik içeren veriler için uygundur (Atanassova, 2012).



Şekil 2.5. Intuitionistic fuzzy kümelerin radar kümesi gösterimi (Atanassova, 2012).

Intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde temel küme işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.2.4: A ve B , X üzerinde birer IFS olmak üzere;

1. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $\eta_A(x) \geq \eta_B(x)$
2. $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ ve $B \subset A$
3. $\bar{A} = \{(x, \eta_A(x), \mu_A(x)) : x \in X\}$
4. $A \cap B = \{(x, \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \max\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}) : x \in X\}$
5. $A \cup B = \{(x, \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \min\{\eta_A(x), \eta_B(x)\}) : x \in X\}$
6. $A + B = \{(x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \eta_A(x) \cdot \eta_B(x)) : x \in X\}$
7. $A \cdot B = \{(x, \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \eta_A(x) + \eta_B(x) - \eta_A(x) \cdot \eta_B(x)) : x \in X\}$

(Atanassov, 2012).

Bu işlemlere ait temel özellikleri aşağıdaki önermede vereceğiz.

Önerme 2.2.5: A, B, C X kümesi üzerinde birer IFS olmak üzere yukarıda tanımlanan işlemler aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. Değişme Özelliği:

$$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A, A + B = B + A, A \cdot B = B \cdot A$$

2. Birleşme Özelliği:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$(A + B) + C = A + (B + C), (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3. Dağılma Özelliği:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), (A \cap B) + C = (A + C) \cap (B + C)$$

$$(A \cap B) \cdot C = (A \cdot C) \cap (B \cdot C), (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cup B) + C = (A + C) \cup (B + C), (A \cup B) \cdot C = (A \cdot C) \cup (B \cdot C)$$

$$(A + B) \cdot C \subset (A \cdot C) + (B \cdot C), (A \cdot B) + C \supset (A + C) \cdot (B + C),$$

4. Tek Kuvvet:

$$A \cap A = A, A \cup A = A$$

5. Tümlemeye Ait Özellikler

$$\overline{\overline{A \cap B}} = A \cup B, \overline{\overline{A \cup B}} = A \cap B, \overline{\overline{A + B}} = A \cdot B, \overline{\overline{A \cdot B}} = A + B$$

(Atanassov, 2012).

Atanassov aynı çalışmasında her IFS'yi fuzzy kümeye (FS) ye çeviren ve gereklilik (necessity) ve olasılık (possibility) operatörlerini karşılayan iki operatör tanımlamıştır. A bir IFS olmak üzere $\Box A = \{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)); x \in X\}$ $\Diamond A = \{(x, 1 - \eta_A(x), \eta_A(x)); x \in X\}$ şeklinde tanımlanmıştır. Eğer burada söz konusu olan IFS küme klasik fuzzy kümeden elde edilmiş ise $\Box A = A = \Diamond A$ olur. Bu operatörlerin fuzzy küme teorisinde karşılığı bulunmamaktadır Şimdi bu operatörler ile ilginç özellikler kazanan iki bağıntı tanımlı vereceğiz. $A, B; X$ kümesi üzerinde birer IFS olmak üzere $\forall x \in X$ için

- i. $A \subseteq_{\Box} B$ ancak ve ancak $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$,
- ii. $A \subseteq_{\Diamond} B$ ancak ve ancak $\eta_A(x) \geq \eta_B(x)$.

Bu tanımlamalar ile birlikte aşağıdaki özelliklerin sağlandığı aşikârdır:

- 1. $A \subseteq_{\Box} B$ ancak ve ancak $\Box A \subseteq \Box B$
- 2. $A \subseteq_{\Diamond} B$ ancak ve ancak $\Diamond A \subseteq \Diamond B$
- 3. $A \subseteq_{\Box} B$ ve $A \subseteq_{\Diamond} B$ ancak ve ancak $A \subseteq B$

$\subseteq_{\Box}$ ve $\subseteq_{\Diamond}$ bağıntılarının IFS uzayında bir yarı-sıralama (quasi-orderings) olduğu fakat lineer sıralama olmadığı açıkça görülür (Atanassov, 2012).

Tanım 2.2.6: X boştan farklı bir küme ve $\alpha, \beta \in I$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olsun. Belirli $x \in X$ elemanı için üyelik fonksiyonu her $x' \in X$ için $\mu_q(x') = \begin{cases} \alpha & x = x' \\ 0 & x \neq x' \end{cases}$ ve üye olmama fonksiyonu $\eta_q(x') = \begin{cases} \beta & x = x' \\ 1 & x \neq x' \end{cases}$ ile tanımlanan intuitionistic fuzzy kümeye X 'de intuitionistic fuzzy nokta denir. x noktasına bu fuzzy noktanın desteği ve $\langle \alpha, \beta \rangle$ ikilisine de bu intuitionistic fuzzy noktanın değeri denir. Yukarıda tanımlanan fuzzy nokta $q_x^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ ile gösterilir. A, X üzerinde tanımlı bir IFS olmak üzere $q_{x_0}^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ intuitionistic fuzzy noktası için eğer $\mu_A(x_0) \geq \alpha$ ve $\eta_A(x_0) \leq \beta$ ise A intuitionistic fuzzy kümesine aittir denir. Bu durum $q_{x_0}^{\langle \alpha, \beta \rangle} \in A$ ile gösterilir (Lee ve Lee, 2000).

X üzerinde tanımlı tüm intuitionistic fuzzy noktaların kümesini IFP^X ile gösterelim. Intuitionistic fuzzy nokta kavramının tanımı itibariyle fuzzy noktaların özelliklerini (Teorem 2.1.5) sağladığı aşikârdır.

Tanım 2.2.7: Intuitionistic fuzzy sayı tanımı ilk olarak Burillo ve ark. (1994) tarafından aşağıdaki şartları sağlayan A intuitionistic fuzzy kümesi olarak tanımlanmıştır.

- i. A reel sayılar üzerinde tanımlanan bir intuitionistic fuzzy kümedir.
- ii. A normaldir. Yani en az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu_A(x_0) = 1$. (böylece $\eta_A(x) = 0$)
- iii. μ_A üyelik fonksiyonu fuzzy konvektir. Yani $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$ eşitsizliği sağlanır.
- iv. η_A üye olmama fonksiyonu fuzzy konkavdır. Yani $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $\eta_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{\eta_A(x_1), \eta_A(x_2)\}$ eşitsizliği sağlanır.

(Burillo ve ark., 1994).

Grzegorzewski (2003) intuitionistic fuzzy sayı kavramını tekrar tanımlamıştır. $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ intuitionistic fuzzy kümesi eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa fuzzy sayı olarak adlandırılır:

- I. A , if-normaldir. $\mu_A(x_0) = 1$ ve $\eta_A(x_1) = 1$ eşitliklerini sağlayan en az iki x_0, x_1 reel sayıları vardır.
- II. A , if-konvektir. Yani üyelik fonksiyonu fuzzy konveks ve üye olmama fonksiyonu fuzzy konkavdır.
- III. μ_A üyelik fonksiyonu üst yarı sürekli ve η_A üye olmama fonksiyonu alt yarı sürekli.
- IV. $supp(A) = cl(\{x; \mu_A(x) > 0, \eta_A(x) < 1\})$ kümesi $\mathbb{R}$ 'nin sınırlı bir alt kümesidir.

Yukarıdaki tanımlamaya göre A intuitionistic fuzzy sayısı için $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq b_3 \leq a_4 \leq b_4$ şartını sağlayan $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ sekiz reel sayı ve IFN'nin bölümleri olarak adlandırılan $f_A, g_A, h_A, k_A : \mathbb{R} \rightarrow I$; f_A ve k_A

azalmayan ve g_A , h_A artmayan fonksiyonları olmak üzere μ_A üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonu η_A , sırasıyla, aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \\ f_A(x), & a_1 \leq x < a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ g_A(x), & a_3 < x \leq a_4 \\ 0, & a_4 < x \end{cases}$$

ve

$$\eta_A(x) = \begin{cases} 1, & x < b_1 \\ h_A(x), & b_1 \leq x < b_2 \\ 0, & b_2 \leq x \leq b_3 \\ k_A(x), & b_3 < x \leq b_4 \\ 1, & b_4 < x \end{cases}.$$

Intuitionistic fuzzy sayılar kümesi IFN ile gösterilir (Grzegorzewski, 2003).

Tanım 2.2.8: $u = \{(x, \mu_u(x), \eta_u(x)); x \in \mathbb{R}\}$ üçgen şekilli intuitionistic fuzzy sayısı

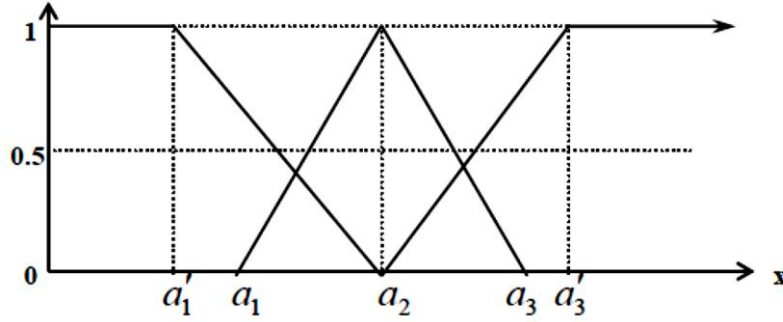
üyelik ve üye olmama fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış intuitionistic fuzzy sayıdır.

$$\mu_u(x) = \begin{cases} \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} & \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2, \\ \frac{\alpha_3 - x}{\alpha_3 - \alpha_2} & \alpha_2 \leq x \leq \alpha_3, \\ 0 & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

ve

$$\eta_u(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_2 - x}{\alpha_2 - \alpha'_1} & \alpha'_1 \leq x \leq \alpha_2, \\ \frac{x - \alpha_2}{\alpha'_3 - \alpha_2} & \alpha_2 \leq x \leq \alpha'_3, \\ 1 & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

Burada $\alpha'_1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha'_3$ şartını sağlayan reel sayılardır. α_1, α_3 sayılarına sırasıyla; üyelik fonksiyonunun sağ ve sol yayılımı ve α'_1, α'_3 sayılarına sırasıyla üye olmama fonksiyonunun sağ ve sol yayılımı olarak adlandırılır. Böylece bir TIFN (benzer şekilde IFN) $u = (\alpha_2; \alpha_1, \alpha_3, \alpha'_1, \alpha'_3)$ şeklinde ifade edilir (Mahapatra ve Roy, 2012).



Şekil 2.6. Üçgen şekilli IFN (Mahapatra ve Roy, 2012).

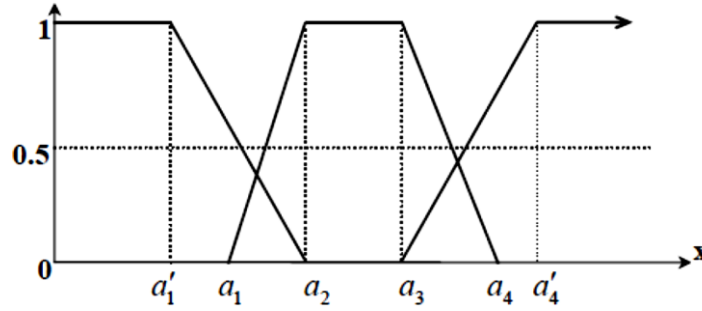
Tanım 2.2.9: $v = \{(x, \mu_v(x), \eta_v(x)); x \in \mathbb{R}\}$ yamuk (trapezoidal) şekilli intuitionistic fuzzy sayısı üyelik ve üye olmama fonksiyonu sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış intuitionistic fuzzy sayıdır.

$$\mu_u(x) = \begin{cases} \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} & \alpha_1 \leq x \leq \alpha_2, \\ 1 & \alpha_2 \leq x \leq \alpha_3 \\ \frac{\alpha_4 - x}{\alpha_4 - \alpha_3} & \alpha_3 \leq x \leq \alpha_4, \\ 0 & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

ve

$$\eta_u(x) = \begin{cases} \frac{\alpha_2 - x}{\alpha_2 - \alpha'_1} & \alpha'_1 \leq x \leq \alpha_2, \\ 0 & \alpha_2 \leq x \leq \alpha_3 \\ \frac{x - \alpha_3}{\alpha'_4 - \alpha_3} & \alpha_3 \leq x \leq \alpha'_4, \\ 1 & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

Burada $\alpha'_1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4 \leq \alpha'_4$ şartını sağlayan reel sayılardır. Bu kabuller ile beraber v yamuk intuitionistic fuzzy sayısı $v = (\alpha_2, \alpha_3; \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha'_1, \alpha'_3, \alpha'_4)$ şeklinde ifade edilebilir (Mahapatra ve Roy, 2012).



Şekil 2.7. Yamuk şekilli IFN (Mahapatra ve Roy, 2012).

Tanım 2.2.10: $\alpha, \beta; 0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan negatif olmayan reel sayılar olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in X\}$ intuitionistic fuzzy kümesinin (α, β) -seviye kümesi $A_{\alpha, \beta} = \{x; \mu_A(x) \geq \alpha, \eta_A(x) \leq \beta\}$ ile tanımlanır. Diğer bir ifade ile $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in X\}$ intuitionistic fuzzy kümesinin (α, β) - seviye kümesi A kümesine en az α derece ait ve en fazla β derece ait olmayan x elemanlarının oluşturduğu kümedir (Atanassov, 2012).

A intuitionistic fuzzy kümesinin α - seviye kümesi $A^\alpha = \{x; \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ve β - seviye kümesi $A_\beta = \{x; \eta_A(x) \leq \beta\}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımdan $A_{\alpha, \beta} = A^\alpha \cap A_\beta$ eşitliği kolayca görülür (Atanassov, 2012).

Önerme 2.2.11: X boştan farklı bir küme ve A ve B , X üzerinde tanımlı iki IFS ve $\alpha, \beta; 0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan negatif olmayan reel sayılar olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- i. Eğer $\alpha \geq \delta$ ve $\beta \leq \theta$ ise $A_{\alpha, \beta} \subseteq A_{\delta, \theta}$
- ii. $A_{1-\beta, \beta} \subseteq A_{\alpha, \beta} \subseteq A_{\alpha, 1-\alpha}$
- iii. $A \subseteq B$ ise $A_{\alpha, \beta} \subseteq B_{\alpha, \beta}$

- iv. $(A \cap B)_{\alpha, \beta} = A_{\alpha, \beta} \cap B_{\alpha, \beta}$
- v. $(A \cup B)_{\alpha, \beta} \supseteq A_{\alpha, \beta} \cup B_{\alpha, \beta}$ ($\alpha + \beta = 1$ ise eşitlik sağlanır.)
- vi. $(\bigcap A_i)_{\alpha, \beta} = \bigcap (A_i)_{\alpha, \beta}$
- vii. $A_{0,1} = X$

(Atanassov, 2012).

Aşağıdaki önerme bir küme ailesinin intuitionistic fuzzy sayının seviye kümesi olması için sağlaması gereken şartları belirtmektedir.

Önerme 2.2.12: $H \subseteq \mathbb{R} \times I \times I$ alt kümesi ve $0 \leq \alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \in I$, sayıları için $H_{\alpha, \beta} = \{x; (x, \alpha, \beta) \in H\}$ ile tanımlanmış $H_{\alpha, \beta}$ kümesinin tekil bir u intuitionistic fuzzy sayısının (α, β) –seviye kümesi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki dört şartın sağlanmasıdır.

- i. Her $\alpha, \beta \in I$ için; $H_{\alpha, \beta}$, $\mathbb{R}$ kümesinin boştan farklı, kapalı ve konveks bir alt kümesidir.
- ii. $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$, $0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1$ ($i=1,2$) şartını sağlayan her $\alpha_i, \beta_i \in I$ sayıları için, $H_{\alpha_1, \beta_1} \supseteq H_{\alpha_2, \beta_2}$
- iii. $\alpha_n \uparrow \alpha$ ve $\beta_n \downarrow \beta$ şartını sağlayan her $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq I$ dizi çifti için

$$H_{\alpha, \beta} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n, \beta_n} \text{ eşitliği sağlanır.}$$

- iv. $\alpha_n \downarrow 0$ ve $\beta_n \uparrow 1$ şartını sağlayan her $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq I$ dizi çifti için,

$$H_{0,1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n, \beta_n} \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Tersine, bir intuitionistic fuzzy sayının (α, β) –seviye kümesi (i)-(iv) şartlarını sağlar.

İspat: $u = \{(x, \mu_u(x), \eta_u(x)); x \in \mathbb{R}\}$ intuitionistic fuzzy kümesini üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonu sırası ile aşağıdaki şekilde tanımlanmış olarak seçelim

$$\mu_u(x) = \begin{cases} \vee r & , (x, r, \cdot) \in H \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$\eta_u(x) = \begin{cases} \wedge s & , (x, \cdot, s) \in H \\ 1 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}.$$

μ_u ve η_u tanımları gereği, her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \mu_u(x) + \eta_u(x) \leq 1$ şartının sağlandığı kolayca gösterilebilir. İddiamızı ispatlamak için, u 'nun bir IFN olduğunu ve u 'nun tekil olduğunu göstermeliyiz. Tanımlamalar gereği $H_{\alpha, \beta} = u_{\alpha, \beta}$ olduğu açıkça görülür.

1. İç içe aralıklar teoremi ve (i), (ii), (iii) şartları gereği $\alpha_n \uparrow 1$ $\beta_n \downarrow 0$ olan her bir $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq I$ dizi çifti için, $H_{1,0} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_{\alpha_n, \beta_n} \neq \emptyset$ ifadesi sağlanır. Yani. $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu_u(x_0) = 1$ ve $\eta_u(x_0) = 0$ eşitlikleri sağlanır. Diğer taraftan $H_{0,1} = \emptyset$ kabul edelim. Bu durumda doğruluğunu kabul ettiğimiz (iv). koşul gereği $\alpha_n \downarrow 0$ ve $\beta_n \uparrow 1$ şartlarını sağlayan her bir $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq I$ dizi çifti ve $n \in \mathbb{N}$ için. $H_{\alpha_n, \beta_n} = \emptyset$ dır. Fakat bu gene doğruluğunu kabul ettiğimiz (i). koşul ile çelişir.

II-III. (i.) koşul gereği, iyi bilindiği üzere μ_u ve η_u sırasıyla üst ve alt yarı sürekli ve u if-konvektir, yani μ_u fuzzy konveks ve η_u fuzzy konkavdır.

IV. u 'nun tanımı gereği $\text{supp}(u) = \text{cl}\{x; \mu_u(x) > 0, \eta_u(x) < 1\} \subseteq u_{0,1}$ ifadesi sağlanır. Böylece $\text{supp}(u)$, reel doğrunun sınırlı bir alt kümesi olduğu anlaşılır.

I, II, III, IV koşulları sağlandığından, u 'nun bir IFN olduğu anlaşılır. u 'nun tekilliğini göstermek için; $\alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan $\alpha, \beta \in I$ için $H_{\alpha, \beta} = v_{\alpha, \beta}$ eşitliğini sağlayan farklı bir $v = \{(x, \mu_v(x), \eta_v(x)); x \in \mathbb{R}, 0 \leq \mu_v(x) + \eta_v(x) \leq 1\}$ intuitionistic fuzzy sayısı olduğunu varsayalım. Intuitionistic fuzzy sayıların eşitliği tanımından ve $u \neq v$ ifadesinden. $\mu_u(x_0) \neq \mu_v(x_0)$ ve $\eta_u(x_0) \neq \eta_v(x_0)$ ifadelerinden en az birini sağlayacak $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır. $\mu_u(x_0) \neq \mu_v(x_0)$ olsun. O halde $\mu_u(x_0) = r_1$ ve $\mu_v(x_0) = r_2$ için, „genelliği kaybetmeden, $r_2 < r_1$ olduğunu kabul edelim. Böylece tüm $\beta \in I$ sayıları için $x_0 \notin u_{r_2, \beta}$

olur. Fakat bu durum $\alpha, \beta \in I$ sayıları için $u_{\alpha, \beta} = H_{\alpha, \beta} = v_{\alpha, \beta}$ olması ile çelişir. Böylece $u = v$ olduğu anlaşılır.

Tersine, u bir IFN olsun. O halde;

i. u if-normal olduğundan, En az bir $x_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu_A(x) = 1, \eta_A(x) = 0$ eşitlikleri sağlanır. Böylece, $\alpha, \beta \in I$ sayıları için $x_0 \in u_{\alpha, \beta}$ 'dır. Böylece $u_{\alpha, \beta}$ kümesi $\alpha, \beta \in I$ sayıları için boştan farklıdır. Diğer taraftan u is if-konveks olduğundan, her $\lambda \in I$ ve $x_1, x_2 \in u_{\alpha, \beta}$ sayıları için, üyelik fonksiyonu μ_u ve üye olmama fonksiyonu η_A sırasıyla aşağıdaki eşitsizlikleri sağlar $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \geq \alpha$ $\eta_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{\eta_A(x_1), \eta_A(x_2)\} \leq \beta$. Böylece $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in u_{\alpha, \beta}$ olduğu anlaşılır. Buradan $u_{\alpha, \beta}, \mathbb{R}$ 'nin konveks altkümesidir.

ii. $\alpha_1 < \alpha_2, \beta_1 > \beta_2, 0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1$ şartlarını sağlayan tüm $\alpha_i, \beta_i \in I$ sayıları ve $x_0 \in u_{\alpha_2, \beta_2}$ elemanları için $\mu(x_0) \leq \alpha_2 < \alpha_1$ ve $\eta(x_0) \geq \beta_2 > \beta_1$ eşitsizlikleri sağlandığından, $x_0 \in u_{\alpha_1, \beta_1}$ olduğu anlaşılır. Böylece $H_{\alpha_1, \beta_1} \supseteq H_{\alpha_2, \beta_2}$ ifadesi sağlanır.

iii. $\alpha_n \uparrow \alpha$ ve $\beta_n \downarrow \beta$ şartlarını sağlayan tüm $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq I$ dizi çiftleri için $\alpha_n \leq \alpha$ ve $\beta_n \geq \beta$ eşitsizlikleri sağlanır. Böylece (ii). koşulundan $u_{\alpha, \beta} \subseteq u_{\alpha_n, \beta_n}$ ifadesi elde edilir.

O halde $u_{\alpha, \beta} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n, \beta_n}$ (1)'dir. $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n, \beta_n}$ elemanı için $\mu(x_0) \geq \alpha_n$ ve $\eta(x_0) \leq \beta_n$ olduğundan. $\mu(x_0) \geq \sup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ ve $\eta(x_0) \leq \inf_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$. Böylece $\bigcap_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n, \beta_n} \subseteq u_{\alpha, \beta}$ (2)

ifadesi elde edilir. (1) ve (2) ifadelerinden eşitlik elde edilir.

iv. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \subseteq I$. $\alpha_n \downarrow 0$ ve $\beta_n \uparrow 1$ şartlarını sağlayan diziler olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \alpha_n$ ve $1 \geq \beta_n$ olduğundan $u_{0,1} \supseteq u_{\alpha_n, \beta_n}$ ifadesi elde edilir. Böylece

$u_{0,1} \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n, \beta_n}$ (3). Diğer taraftan, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} u_{\alpha_n, \beta_n}$ için $\mu(x_0) \geq \alpha_n$ ve $\eta(x_0) \leq \beta_n$

olduğundan $\mu(x_0) \geq \inf_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ ve $\eta(x_0) \leq \sup_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$ dir. Böylece (4) ifadesi elde edilir.

(3) ve (4) ifadelerinden eşitlik elde edilir.

$\alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan tüm $\alpha, \beta \in I$ için $u_{\alpha, \beta} \subseteq \text{supp}(u)$ ve $\text{supp}(u)$ kümesi reel sayılar uzayının sınırlı bir alt kümesi olduğundan, $u_{\alpha, \beta}$ sınırlıdır. Böylece $u_{\alpha, \beta}$ yi kapsayacak kapalı küme bulunabilir (Kutlu ve ark., 2015).

2.3. Fuzzy ve Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzaylarında Topoloji

Fuzzy kümeler üzerinde topoloji kavramı ilk olarak Chang (1968) tarafından verilmiştir. Chang 'in tanımında klasik topoloji kavramı fuzzy kümeler üzerine taşınmış ve topolojik diğer tanımlamalarda bu klasik yaklaşıma uygun olarak verilmiştir. Chang tarafından tanımlanan topolojinin eksik yönü sabit dönüşümlerin sürekli olmamasıdır. Bu problemi gidermek için sabit fuzzy kümelerin uzaya eklenmesi ile yeni bir topoloji tanımı Lowen tarafından verilmiştir. Topoloji kavramının bulanıklaştırılması Šostak (1983) tarafından yapılmıştır. Bu yeni yaklaşımda topoloji, bir fuzzy kümenin açıklık derecesini belirten bir dönüşüm olarak tanımlanmıştır. Yani bu tanımda açık küme kavramı yerine kümenin açıklık derecesi, kapalılık derecesi gibi kavramlar verilmiştir. Burada esas önemli nokta topolojinin kendisinde fuzzy kavramının kullanılmasıdır. Bu çalışmadan sonra topolojinin diğer temel kavramları için de benzer mantıkla yeni tanımlamalar yapılmıştır. Intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde Chang ve Šostak anlamında topolojik uzaylar sırası ile Çoker (1996), Demirci ve Çoker (1997) tarafından verilmiştir. Şimdi her iki kavrama ait temel tanımlamaları vereceğiz. İleriki bölümlerde bu uzaklık ve benzerlik ölçüleri tarafından kurulan topolojiler tanımlanacak ve temel bazı özellikler karşılaştırılmalı olarak incelenecektir.

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme ve $\tau \subseteq FS^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ailesine FS^X üzerinde Chang manasında fuzzy topoloji ve (X, τ) ikilisine de Chang manasında fuzzy topolojik uzay (kısaca CT-FS) denir.

- I. $\tilde{0}, \tilde{1} \in \tau$
- II. $A, B \in \tau$ için $A \cap B \in \tau$
- III. Herhangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq \tau$ alt ailesi için $\bigcup_{i \in J} A_i \in \tau$

τ ailesinin elamanlarına açık fuzzy kümeler denir. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \in FS^X$ olsun. Eğer $\bar{A} \in \tau$ ise A 'ya kapalı fuzzy küme denir. X in tüm kapalı fuzzy alt kümeleri τ' ile gösterilir (Chang, 1968).

Tanım 2.3.2: X ve Y boştan farklı iki küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

1. $A \in FS^X$ kümesinin f altındaki görüntüsü

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} (\mu_A(x)) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olmak üzere $f(A) = \{(y, f(\mu_A)(y)) : y \in Y\}$ ile tanımlanır.

2. $B \in FS^Y$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(\mu_B)(y) = \mu_B(f(y))$ olmak

üzere $f^{-1}(B) = \{(x, f^{-1}(\mu_B)(x)) : x \in X\}$ ile tanımlanır

(Chang, 1968).

Önerme 2.3.3: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A, A_1, A_2 \in FS^X$ ve $B, B_1, B_2 \in FS^Y$ olsun.

Bu takdirde

- a. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$. Eğer f fonksiyonu birebir ise eşitlik sağlanır,
- b. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$. Eğer f fonksiyonu örten ise eşitlik sağlanır,
- c. $A_1 \subseteq A_2$ ise $f(A_1) \subseteq f(A_2)$,
- d. $B_1 \subseteq B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,
- e. $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$,
- f. $f^{-1}(\bar{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$,
- g. $\{A_i, i \in J\} \subseteq FS^X$ olmak üzere $f\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \bigcup_{i \in J} f(A_i)$ ve $f\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in J} f(A_i)$,
- h. $\{B_i, i \in J\} \subseteq FS^Y$ olmak üzere $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} B_i\right) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i)$ ve

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \bigcap_{i \in J} f^{-1}(B_i)$$

(Ming ve Mao-Kang, 1997).

Tanım 2.3.4: (X, τ) ve (Y, τ^*) Chang manasında iki topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ olsun. Eğer $\forall B \in \tau^*$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne fuzzy sürekli dönüşüm denir (Chang, 1968).

Uyarı 2.3.5: Klasik topolojik uzayların aksine fuzzy topolojik uzaylarda sabit bir fonksiyondan üretilen I -fuzzy dönüşümünün fuzzy sürekli olması gerekmez (Lowen, 1976).

Bu önemli özelliği fuzzy topolojik uzaylarda elde etmek ve sabit fonksiyonların önemine dikkat çekmek için Lowen, Chang' in fuzzy topoloji tanımının birinci özelliğini değiştirerek aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 2.3.6: X boştan farklı bir küme ve $\tau \subseteq FS^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ailesine FS^X üzerinde Lowen manasında fuzzy topoloji ve (X, τ) ikilisine de Lowen manasında fuzzy topolojik uzay (kısaca LT-FS) denir.

- I. $a \in FS^X, \forall x \in X$ için $\mu_a(x) = a$ olmak üzere $a \in \tau$
- II. $A, B \in \tau$ için $A \cap B \in \tau$
- III. Her hangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq \tau$ alt ailesi için $\bigcup_{i \in J} A_i \in \tau$

(Lowen, 1976).

Tanım 2.3.7: (X, τ) Chang (veya Lowen) manasında bir fuzzy topolojik uzay olmak üzere $A \in FS^X$ olmak üzere

- a. $\text{int}(A) = \bigcup_{\substack{B \subset A \\ B \in \tau}} B$ fuzzy kümesi A fuzzy kümesinin içi olarak adlandırılır.
- b. $\text{cl}(A) = \bigcup_{\substack{A \subset B \\ B \in \tau}} B$ fuzzy kümesi A fuzzy kümesinin kapanışı olarak adlandırılır.

(Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Klasik topolojik uzaylarda bilinen iç ve kapanış özellikleri fuzzy topolojik uzaylarda da geçerlidir.

Önerme 2.3.8: (X, τ) ve (Y, τ^*) iki fuzzy topolojik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ olsun. O halde

- i. f fuzzy açıktır $\Leftrightarrow \forall A \in \tau$ için $f(A) \in \tau^*$
- ii. f fuzzy homeomorfizmdir $\Leftrightarrow f$ biyektif ve f fuzzy açık ve fuzzy süreklidir.

(Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Önerme 2.3.9: $(X, \tau), (Y, \tau^*), (Z, \tau^{**})$ Chang (veya Lowen) manasında fuzzy topolojik uzaylar ; $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau^*)$ ve $g : (Y, \tau^*) \rightarrow (Z, \tau^{**})$ olsun. O halde

- a. f ve g fuzzy sürekli $\Leftrightarrow g \circ f$ fuzzy süreklidir.
- b. f ve g fuzzy açıktır $\Leftrightarrow g \circ f$ fuzzy açıktır.
- c. f ve g fuzzy kapalıdır $\Leftrightarrow g \circ f$ fuzzy kapalıdır.
- d. f ve g fuzzy homeomorfizmdir $\Leftrightarrow g \circ f$ fuzzy homeomorfizmdir.

(Ying-Ming ve Mao-Kang, 1997).

Chang manasında topoloji kavramı intuitionistic fuzzy kümeler uzayına Çoker (1997) tarafından genelleştirilmiştir.

Tanım 2.3.10: X boştan farklı bir küme ve $\tau \subseteq IFS^X$ olsun. Eğer τ ailesi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa τ ailesine IFS^X üzerinde Chang manasında fuzzy topoloji ve (X, τ) ikilisine de Chang manasında intuitionistic fuzzy topolojik uzay (Kısaca CT-IFS) denir.

- I. $0, 1 \in \tau$
- II. $A, B \in \tau$ için $A \cap B \in \tau$
- III. Herhangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq \tau$ alt ailesi için $\bigcup_{i \in J} A_i \in \tau$

Tanımdan kolayca görülebileceği üzere; (X, τ) Chang manasında bir fuzzy topoloji ve $A \in \tau$ olmak üzere $A = \{(x, \mu_A(x), 1 - \mu_A(x)); x \in X\}$ şeklinde intuitionistic

fuzzy kümelerden oluşturulan τ_0 ailesi ile birlikte (X, τ_0) Chang manasında intuitionistic fuzzy topoloji oluşturur (Çoker, 1997).

Çoker, $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu altında bir intuitionistic fuzzy kümenin görüntüsünü ve ters görüntüsünü aşağıdaki şekilde tanımlamış ve bu görüntü kümelerinin sağladığı bazı temel özellikleri ifade ve ispat etmiştir.

Tanım 2.3.11: X ve Y boştan farklı iki küme ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

a. $A = \{(y, \mu_A(y), \eta_A(y)); y \in Y\} \in IFS^X$ kümesinin f altındaki görüntüsü

$$f(\mu_A)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} (\mu_A(x)) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

ve

$$f_-(\eta_A) = 1 - f((1 - \eta_A)(y)) = \begin{cases} \inf_{x \in f^{-1}(y)} (\eta_A(x)) & , \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 1 & , \quad f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

olmak üzere $f(A) = \{(y, f(\mu_A)(y), f_-(\eta_A)(y)); y \in Y\}$ ile tanımlanır.

b. $B \in IFS^Y$ kümesinin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(\mu_B)(x) = \mu_B(f(x))$ ve $f^{-1}(\eta_B)(x) = \eta_B(f(x))$ olmak üzere

$$f^{-1}(B) = \{(x, f^{-1}(\mu_B)(x), f^{-1}(\eta_B)(x)); x \in X\}$$

ile tanımlanır (Çoker, 1997).

Önerme 2.3.12: $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $A, A_1, A_2 \in IFS^X$ ve $B, B_1, B_2 \in IFS^Y$ olsun. Bu takdirde

- $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ (Eğer f fonksiyonu birebir ise eşitlik sağlanır.),
- $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ (Eğer f fonksiyonu örten ise eşitlik sağlanır.),
- $A_1 \subseteq A_2$ ise $f(A_1) \subseteq f(A_2)$,
- $B_1 \subseteq B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$,

e. $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)},$

f. $f^{-1}(\bar{B}) \subseteq \overline{f^{-1}(B)},$

g. $\{A_i, i \in J\} \subseteq IFS^X$ olmak üzere $f\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \bigcup_{i \in J} f(A_i)$ ve $f\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in J} f(A_i),$
(f fonksiyonu birebir ise eşitlik sağlanır.),

h. $\{B_i, i \in J\} \subseteq FS^Y$ olmak üzere $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} B_i\right) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(B_i)$ ve

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \bigcap_{i \in J} f^{-1}(B_i),$$

i. $f^{-1}(\tilde{0}) = \tilde{0}$ ve $f^{-1}(\tilde{1}) = \tilde{1},$

j. f fonksiyonu örten ise $f(\tilde{1}) = \tilde{1},$

k. $f(\tilde{0}) = \tilde{0}$

(Çoker, 1997).

Bu tanımlamalar ile birlikte Chang manasında tanımlanan intuitionistic fuzzy kümeler uzayında sürekli, açık fonksiyon, bir kümenin içi, kapanışı gibi tanımlar fuzzy kümeler uzayındaki gibi tanımlanır ve bu tanımların özellikleri de benzerdir.

Šostak (1983) fuzzy kavramının topolojide kullanıldığı yeni bir fuzzy topoloji kavramı tanımlamıştır. Chang 'in yapmış olduğu fuzzy topoloji tanımında bir fuzzy kümenin açıklık derecesi kavramı bulunmamaktadır. Šostak açıklık derecesini X boştan farklı kümesi için $\tau: FS^X \rightarrow I$ aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşüm olarak tanımlanmıştır:

1. $\tau(\tilde{0}) = \tau(\tilde{1}) = 1$

2. $\forall A_1, A_2 \in FS^X$ için $\tau(A_1 \cap A_2) \geq \tau(A_1) \wedge \tau(A_2)$

3. Herhangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq FS^X$ alt ailesi için

$$\tau\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} \tau(A_i).$$

Burada (X, τ) ikilisine X 'de bir Šostak manasında fuzzy topolojik uzay (kısaca ST-FS) denir. $A \in FS^X$ olmak üzere $\tau(A) \in I$ sayısına A 'nın açıklık derecesi denir (Šostak, 1983).

Benzer şekilde X 'de kapalılık derecesi aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathfrak{F}:FS^X \rightarrow I$ dönüşümü şeklinde tanımlanır.

1. $\mathfrak{F}(\tilde{0}) = \mathfrak{F}(\tilde{1}) = 1$
2. $\forall A_1, A_2 \in FS^X$ için $\mathfrak{F}(A_1 \cup A_2) \geq \mathfrak{F}(A_1) \wedge \mathfrak{F}(A_2)$
3. Herhangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq FS^X$ alt ailesi için $\mathfrak{F}(\bigcap_{i \in J} A_i) \geq \bigwedge_{i \in J} \mathfrak{F}(A_i)$.

(X, τ) , X 'de bir Šostak manasında fuzzy topolojik uzay olmak üzere her $A \in FS^X$ için $\mathfrak{F}(A) = \tau(\bar{A})$ ile tanımlanan $\mathfrak{F}:FS^X \rightarrow I$ dönüşümün bir kapalılık derecesi belirttiği aşikârdır (Šostak, 1983).

Tanım 2.3.14: $f: X \rightarrow Y$ biyektif fonksiyon ve $(X, \tau), (Y, \sigma)$ iki fuzzy topolojik uzay olsun. O halde

- a. $\forall B \in FS^Y$ için $\sigma(B) \leq \tau(f^{-1}(B))$ ise $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ dönüşümü süreklidir,
- b. $\forall A \in FS^X$ için $\tau(A) \leq \sigma(f(A))$ ise $f:(X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ dönüşümü açıktır denir.
- c. Eğer f dönüşümü sürekli ve açık ise f dönüşümüne I – fuzzy homeomorfizmadır denir.

(Šostak, 1983).

Tanım 2.3.15: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $A \in IFS^X$ olmak üzere A 'nın fuzzy kapanışı $A^c = \bigcap \{K \in I^X; \mathfrak{F}(K) > 0, A \subset K\}$ olarak tanımlanır. Benzer şekilde A 'nın fuzzy içi $A^\circ = \bigcup \{K \in I^X; \tau(K) > 0, K \subset A\}$ olarak tanımlanır (Šostak, 1983).

Çoker ve Demirci (1996) Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topoloji kavramını tanımlamışlardır. Bu tanımlı vermeden önce intuitionistic fuzzy ikili (çift) kavramını tanımlanacaktır.

Tanım 2.3.16: $a, b \in I = [0, 1]$ ve $a + b \leq 1$ olmak üzere $\langle a, b \rangle \in I \times I$ ikilisine intuitionistic fuzzy ikili denir. $\langle a_1, b_1 \rangle$ ve $\langle a_2, b_2 \rangle$ iki intuitionistic fuzzy ikili olmak üzere;

- i. $\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 \leq a_2$ ve $b_1 \geq b_2$
- ii. $\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 = a_2$ ve $b_1 = b_2$
- iii. $\{\langle a_i, b_i \rangle; i \in J\}$ bir fuzzy ikili ailesi olmak üzere; $\vee \langle a_i, b_i \rangle = \langle \vee a_i, \wedge b_i \rangle$ ve $\wedge \langle a_i, b_i \rangle = \langle \wedge a_i, \vee b_i \rangle$.
- iv. $\langle a, b \rangle$ 'nın tümleyeni $\overline{\langle a, b \rangle} = \langle b, a \rangle$
- v. $1^- = \langle 1, 0 \rangle$ ve $0^- = \langle 0, 1 \rangle$

ile tanımlanır. Tüm intuitionistic fuzzy ikililerin kümesini $I \otimes I$ ile gösterelim (Çoker ve Demirci, 1996).

Tanım 2.3.17: Boştan farklı X kümesi üzerinde tanımlanan Šostak manasında intuitionistic fuzzy topoloji (kısaca, ST-IFS) aşağıdaki şartları sağlayan τ intuitionistic fuzzy ailesidir. $\tau(A) = \langle \mu_\tau(A), \eta_\tau(A) \rangle$ olmak üzere;

- S1. $\tau(\underline{0}) = 1^-$ ve $\tau(\underline{1}) = 1^-$
- S2. Her $A_1, A_2 \in IFS^X$ için $\tau(A_1 \cap A_2) \geq \tau(A_1) \wedge \tau(A_2)$
- S3. Her $\{A_i; i \in J\} \subseteq IFS^X$ ailesi için $\tau\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (\tau(A_i))$.

Bu tanımlamalar ile birlikte (X, τ) ikilisine Šostak manasında intuitionistic fuzzy topolojik uzay denir. $A \in IFS^X$ olmak üzere, $\mu_\tau(A)$ sayısı A 'nın açıklık derecesi ve $\eta_\tau(A)$ sayısı da açık olmama derecesi isimlendirilir (Çoker ve Demirci, 1996).

Tanım 2.3.18: (X, τ) bir ST-IFS ve $\tau^*(A) = \tau(\bar{A}) = \langle \mu_\tau(\bar{A}), \eta_\tau(\bar{A}) \rangle$ ile tanımlanan τ^* intuitionistic fuzzy ailesi olmak üzere $\mu_{\tau^*}(A) = \mu_\tau(\bar{A})$ sayısına A 'nın kapalılık derecesi ve $\eta_{\tau^*}(A) = \eta_\tau(\bar{A})$ sayısına da A 'nın kapalı olmama derecesi denir (Çoker ve Demirci, 1996).

Önerme 2.3.19: Yukarıda tanımlanan τ^* intuitionistic fuzzy ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar;

- a. $\tau^*(0) = 1^-$ ve $\tau^*(1) = 1^-$
- b. Her $A_1, A_2 \in IFS^X$ için $\tau^*(A_1 \cup A_2) \geq \tau^*(A_1) \wedge \tau^*(A_2)$
- c. Her $\{A_i; i \in J\} \subseteq IFS^X$ ailesi için $\tau^*\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (\tau^*(A_i))$

(Çoker ve Demirci, 1996).

Literatürde Chang (CT-IFS) ve Šostak (ST-IFS) topolojiler için birçok dönüşüm formülü bulunmaktadır. En çok kullanılan metodu aşağıda verelim.

1. ST-IFS $\rightarrow$ CT-IFS: (X, τ) bir ST-IFS olmak üzere, her $(r, s) \in I \otimes I$ için $\tau_{(r,s)} = \{A \in IFS(X); \mu_\tau(A) \geq r, \eta_\tau(A) \leq s\}$ ile tanımlı $\tau_{(r,s)}$ ailesi bir CT-IFS uzaydır.
2. CT-IFS $\rightarrow$ ST-IFS: (X, T) bir CT-IFS ve $(r, s) \in I \otimes I$ olmak üzere,

$$T^{(r,s)}(A) = \begin{cases} 1^- & A \in \{0, 1\}, \\ \langle r, s \rangle & A \in T - \{0, 1\}, \\ 0^- & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $T^{(r,s)} : IFS(X) \rightarrow I \otimes I$ dönüşümü ile birlikte $(X, T^{(r,s)})$ bir ST-IFS tanımlar (Demirci, 1997).

Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topolojinin Chang manasındaki fuzzy topolojiden farkının anlaşılması için birkaç topolojik kavramın tanımını aşağıda vereceğiz. Demirci (1997), Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topolojideki iç ve kapanış tanımlarını aşağıdaki şekilde tanımlamış ve bunların temel özelliklerini incelemiştir.

Tanım 2.3.20: (X, τ) bir ST-IFS ve $A \in IFS^X$ olmak üzere A 'nın intuitionistic fuzzy kapanışı

$$cl(A) = \bigcap \{K \in IFS^X; \tau^*(K) > 0, A \subseteq K\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde A 'nın intuitionistic fuzzy içi

$$int(A) = \bigcup \{G \in I^X; \tau(G) > 0, G \subseteq A\}$$

olarak tanımlanır (Demirci, 1997).

Önerme 2.3.21: (X, τ) ST-TIFS ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

- a. $A \subseteq B \Rightarrow \text{int}(A) \subseteq \text{int}(B)$,
- b. $A \subseteq B \Rightarrow \text{cl}(A) \subseteq \text{cl}(B)$,
- c. $\overline{\text{int}(A)} = \text{cl}(\bar{A})$,
- d. $\overline{\text{cl}(A)} = \text{int}(\bar{A})$,
- e. $\text{int}(A) = \overline{\text{cl}(\bar{A})}$,
- f. $\text{cl}(A) = \overline{\text{int}(\bar{A})}$.
- g. $\text{int}(\tilde{1}) = \tilde{1}$
- h. $\text{int}(A) \subseteq A$
- i. $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$
- j. $\text{int}(A \cap B) \subseteq \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
- k. $\text{cl}(\tilde{0}) = \tilde{0}$
- l. $A \subseteq \text{cl}(A)$
- m. $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$
- n. $\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B) \subseteq \text{cl}(A \cup B)$

(Demirci, 1997).

Tanım 2.3.22: (X, τ) bir ST-IFS ve $A \in IFS^X$ olmak üzere A 'nın $\langle \alpha, \beta \rangle$ -seviye intuitionistic fuzzy kapanışı

$$\text{cl}_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) = \bigcap \{K \in IFS^X; \tau^*(K) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, A \subseteq K\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde A 'nın fuzzy içi

$$\text{int}_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) = \bigcup \{G \in I^X; \tau(G) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, G \subseteq A\}$$

olarak tanımlanır (Çoker, 1996).

$\langle \alpha, \beta \rangle$ -seviye intuitionistic fuzzy içi ve kapanışı $A, B \in IFS^X$ için aşağıdaki özellikleri sağlar

1. $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) \supseteq A$;
2. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) \subseteq A$,
3. $A \subseteq B$ ve $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle r, s \rangle$ ise $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) \subseteq cl_{\langle r, s \rangle}(A)$,
4. $A \subseteq B$ ve $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle r, s \rangle$ ise $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) \subseteq int_{\langle r, s \rangle}(A)$,
5. $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)) = cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)$,
6. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)) = int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)$,
7. $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A \cup B) = cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) \cup cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(B)$,
8. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A \cap B) = int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A) \cap int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(B)$,
9. $\overline{cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)} = int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(\bar{A})$,
10. $\overline{int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)} = cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(\bar{A})$

(Çoker, 1996).

Tanım 2.3.23: (X, τ_1) , (Y, τ_2) iki ST-IFS ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olmak üzere

- a. Her $B \in IFS^Y$ için $\tau_1(f^{-1}(B)) \geq \tau_2(B)$ ise f dönüşümüne intuitionistic fuzzy süreklidir denir (Çoker, 1996).
- b. Her $B \in IFS^Y$ için $\tau_1(f^{-1}(B)) = \tau_2(B)$ ise f dönüşümüne intuitionistic fuzzy güçlü süreklidir denir (Ramadan ve ark., 2005).
- c. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}(cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(B)) = B$ şartını sağlayan her $B \in IFS^Y$ için $\tau_1(f^{-1}(B)) \geq \langle \alpha, \beta \rangle$ ise f dönüşümüne $\langle \alpha, \beta \rangle$ - intuitionistic fuzzy yakın süreklidir denir (Ramadan ve ark., 2005).
- d. $\tau(B) \geq \langle \alpha, \beta \rangle$ şartını sağlayan her $B \in IFS^Y$ için $\tau_1(f^{-1}(B)) \geq \langle \alpha, \beta \rangle$ ise f dönüşümüne $\langle \alpha, \beta \rangle$ - intuitionistic fuzzy hemen hemen süreklidir denir (Ramadan ve ark., 2005).

- e. Her $A \in IFS^X$ için $\tau_2(f(A)) \geq \tau_2(A)$ ise f intuitionistic fuzzy açıktır denir (Çoker, 1996).
- f. Her $A, B \in IFS^Y$ için $\tau_2(A) \geq \tau_2(B)$ olmak üzere $\tau_1(f^{-1}(A)) \geq \tau_1(f^{-1}(B))$ eşitsizliği korunuyorsa f dönüşümüne intuitionistic fuzzy koruyucu (preserving) dönüşüm denir (Abbas, 2005).
- g. Her $A, B \in IFS^X$ için $\tau_1(A) \geq \tau_1(B)$ olmak üzere $\tau_2(f(A)) \geq \tau_2(f(B))$ eşitsizliği korunuyorsa f dönüşümüne intuitionistic fuzzy açık koruyucu (open preserving) dönüşüm denir (Abbas, 2005).

Önerme 2.3.24: $f : X \rightarrow Y$ intuitionistic fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere

- a. $A \in IFS^X$ için $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$,
- b. $B \in IFS^Y$ için $cl(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(cl(A))$,
- c. $B \in IFS^Y$ için $f^{-1}(int(A)) \subseteq int(f^{-1}(A))$

(Demirci, 1997).

Önerme 2.3.25: $f : X \rightarrow Y$ intuitionistic fuzzy açık fonksiyon ise $A \in IFS^X$ için $f(int(A)) \subseteq int(f(A))$ (Demirci, 1997).

Önerme 2.3.26: $f : X \rightarrow Y$ intuitionistic fuzzy sürekli fonksiyon ve $\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1$ olmak üzere

- a. $A \in IFS^X$ için $f(cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A)) \subseteq cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(f(A))$,
- b. $B \in IFS^Y$ için $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(f^{-1}(A)) \subseteq f^{-1}(cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}(A))$

(Ramadan ve ark., 2005).

3. FUZZY KÜMELER UZAYINDA UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİ

Uzaklık kavramı matematiğin ve mühendisliğin temel kavramlarından biridir. İki sayı veya durum arasındaki uzaklığı hesaplamak bu durumlar hakkındaki kıyaslamayı yapmamız için bize bir yol sunar. Fuzzy küme teorisi küme teorisi ve mantık alanlarında sunmuş olduğu yeni yaklaşımlar ile uzaklık kavramının ele alınmasında klasik yöntemlerin ötesinde yeni yöntemler sunulmasına olanak sağlamıştır. Diğer taraftan fuzzy küme teorisinin günlük durumları matematiksel olarak ifade ediş şeklini değiştirmesinden dolayı bu durumlar arasındaki uzaklık kavramında farklı şekillerde tanımlanması ihtiyacı doğmuştur. Daha açık bir ifade ile fuzzy küme olarak ifade ettiğimiz durumlar arasındaki uzaklık ve durumlar arasındaki fuzzy uzaklık ayrı kavramlardır. Mevcut literatür incelendiğinde her iki yaklaşım içinde birçok uzaklık veya daha matematiksel bir ifade ile metrik tanımlaması yapılmıştır. Tez çalışmamızın bu kısmında önce fuzzy metrik uzay kavramı detaylıca irdelenecek ve devamında ise fuzzy kümeler üzerinde tanımlanmış uzaklık ve benzerlik ölçüleri tanıtılacaktır.

3.1. Fuzzy Metrik Uzay Kavramı Üzerine Genel Bir İnceleme

Fuzzy küme teorisinin doğasında olan kavramların farklı yaklaşımlarla metrik uzay kavramına taşınması oldukça orijinal fikirler doğurmuş ve kendisine tıptan mühendisliğe alanda birçok uygulama imkânı bulmuştur. Bednar'ın (2005) belirttiği gibi fuzzy uzaklık kavramı temel olarak;

1. Bir metrik uzayın altkümeleri arasındaki klasik uzaklığın genelleştirilmesi
2. Fuzzy kümelerin üyelik fonksiyonları arasındaki uzaklık
3. Bir metrik uzayın fuzzy-metrik uzaya genelleştirilmesi ile tanımlanan fuzzy metrik

üç gruba ayrılabilir (Bednar, 2005).

Fuzzy kümeler uzayında uzaklık ve benzerlik ölçülerinden bahsedilmeden önce fuzzy kümeler uzayındaki metrik kavramının kronolojik gelişiminden uzunca bahsedilecektir. Belli başlı fuzzy metrik kavramlarını tanımlayacağımız bu bölüm 4.

Bölümde inceleyeceğimiz intuitionistic fuzzy kümeler uzayındaki metrik kavramı için bir temel oluşturacaktır.

Bilindiği üzere boştan farklı bir X kümesi üzerinde bir d metriği her $x, y, z \in X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümüdür

$$M1. \quad d(x, y) \geq 0$$

$$M2. \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M3. \quad d(x, y) = d(y, x)$$

$$M4. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

d , X üzerinde bir metrik olmak üzere (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir. Eğer d dönüşümü M1, M3, M4 şartlarını ve M2 şartının sadece yeter şart kısmını sağlıyorsa pseudo-metrik adını alır.

Fuzzy metrik kavramının atası sayılabilecek Menger uzayı kavramı Menger (1942) tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1: X boştan farklı bir küme, $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ bir t – norm, her $(x, y) \in X \times X$ çifti için $F_{xy}(0) = 0$ ve olmak üzere

$$i. \quad \text{Her } t > 0 \text{ için } F_{xy}(t) = 1 \Leftrightarrow x = y$$

$$ii. \quad \text{Her } x, y \in X \text{ için } F_{xy} = F_{yx}$$

$$iii. \quad \text{Her } x, y, z \in X \text{ için } F_{xy}(s+r) \geq \Delta(F_{xz}(s), F_{yz}(r))$$

şartlarını sağlayan sol yarı sürekli bir dağılım fonksiyonu olmak üzere (X, F, Δ) ile gösterilen uzaya Menger uzayı denir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Fuzzy metrik uzay denilince akla gelen ilk tanımlardan olan aşağıdaki tanım Kramosil ve Michalek (1975) tarafından tanımlanmıştır. Literatürde en çok çalışılan fuzzy metrik uzaylardan biri olan bu uzay, Menger uzayı ile yakından alakalıdır.

Tanım 3.1.2: X boştan farklı bir küme bir küme ve $M, X \times X \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olmak üzere $(X, M, *)$ üçlüsü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir fuzzy metrik olarak adlandırılır. $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere:

- i. $M(x, y, 0) = 0$,
- ii. Tüm $t > 0$ sayılar için $M(x, y, t) = 1$ ancak ve ancak $x = y$,
- iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- iv. $S: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tanımlı ölçülebilir ve $S(1, 1) = 1$ şartını sağlayan reel değerli fonksiyon olmak üzere $M(x, z, t + s) \geq S(M(x, y, t), M(y, z, s))$,
- v. $M(x, y, \cdot): [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ sol süreklidir

(Kramosil ve Michalek, 1975).

Tanımdan açıkça görüleceği üzere (i)-(iii) Şartları alışılmış metrik uzay tanımının özdeşlik, negatif olmama (non-negativity) ve simetri şartlarını karşılar. (iv) şartı ise zayıf bir üçgen eşitsizliği tanımı olarak ele alınabilir. (v) şartı ise belirli bir derecede uzaklığın bir limitin (sınırın) ötesinde ise, eşit veya daha uzak bir derecede, bu uzaklığın daha büyük bir sınırın ötesinde olduğu anlamına gelmektedir. Biraz daha net bir ifade ile bu durumu açıklarsak; $M(x, y, t)$, (X, d) metrik uzayında bulunan x ve y için $d(x, y)$ uzaklığının t 'den küçük olma derecesini ifade ediyorsa, $s \geq t$ için $M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$ olması gayet doğal bir durumdur. Böylece $M(x, y, \cdot)$ fonksiyonunun azalmayan fonksiyon olması gerektiği aşikârdır. Böyle bir fonksiyonun süreksizlik noktaları sayılabilir olduğundan bu tipin her noktasında, $M(x, y, \cdot)$ sol sürekli olarak tanımlanır. Sol süreklilik $M(x, y, t)$ sayısının x ve y arasındaki uzaklığın t 'den küçük olmasını simgelediğini anlatmak için seçtik. Açıkça görülür ki $M(x, y, \cdot)$ dönüşümü sağ yarı sürekli olarak da seçilebilir. Bu seçim ile $M(x, y, t)$, x ve y arasındaki söz konusu uzaklığın t 'den küçük veya t 'ye eşit olmasını simgeler (Kramosil ve Michalek, 1975).

George ve Veermani (1994), Kramosil ve Michalek tarafından tanımlanan metriği fuzzy metrik uzaylarda Hausdorff topoloji tanımlamak için yeniden tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.3: X boştan farklı bir küme bir küme, $*$ bir sürekli t -norm ve M , $X \times X \times [0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir fuzzy küme olmak üzere $(X, M, *)$ üçlüsü aşağıdaki

şartları sağlıyorsa bir fuzzy metrik olarak adlandırılır. $x, y, z \in X$ ve $t, s > 0$ olmak üzere:

- i. $M(x, y, t) > 0$
- ii. Tüm $t > 0$ sayılar için $M(x, y, t) = 1$ ancak ve ancak $x = y$
- iii. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$
- iv. $M(x, y, t) * M(y, z, s) = M(x, z, t + s)$
- v. $M(x, y, .) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ süreklidir (George ve Veermani, 1994).

Önerme 3.1.4: $M(x, y, .)$ dönüşümü tüm $x, y \in X$ için azalmayan dönüşümdür (George ve Veermani, 1994).

Örnek 3.1.5: $X = \mathbb{R}$ ve $a * b = ab$ olsun. $\forall x, y \in X$ ve $t \in (0, \infty)$ için tanımlanan

$M(x, y, t) = e^{\left(\frac{|x-y|}{t}\right)^{-1}}$ dönüşümü ile birlikte $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Yukarıdaki örnekte $\mathbb{R}$ yerine herhangi bir (X, d) metrik uzayı ve $|x-y|$ yerine $d(x, y)$ seçilebilir. Ayrıca yukarıdaki örnek $a * b = \min(a, b)$ ile tanımlı t – normu içinde bir fuzzy metrik uzay tanımlar (George ve Veermani, 1994).

Aşağıdaki örnek her metrik uzaydan bir fuzzy metrik uzay elde edebileceğimizi gösterir.

Örnek 3.1.6: (X, d) bir metrik uzay ve $a * b = ab$ (veya $a * b = \min(a, b)$) olsun. O

halde her $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için $M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(x, y)}$ ile tanımlı dönüşümü ile

birlikte $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzaydır. Bu tip uzaylara d metriğinden üretilmiş

fuzzy metrik uzay denir. Burada $k = m = n = 1$ seçilerek $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ elde

edilir. Bu şekilde tanımlanan fuzzy metrik uzaya d 'den elde edilmiş standart fuzzy metrik uzay denir (George ve Veermani, 1994).

Örnek 3.1.7: $X = \mathbb{N}$ ve $a * b = ab$ olmak üzere tüm $t > 0$ sayıları için

$$M(x, y, t) = \begin{cases} x/y & x \leq y \\ y/x & y \leq x \end{cases} \text{ ile tanımlı dönüşümü ile birlikte } (X, M, *) \text{ bir fuzzy metrik}$$

uzaydır. Burada dikkat edilmesi gereken bir durum yukarıda tanımlanan $M(x, y, t)$ için

$$M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)} \text{ olacak bir } d \text{ metriği yoktur. Ayrıca diğer örneklerden farklı}$$

olarak burada t – normu $a * b = \min(a, b)$ şeklinde alınırsa $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik tanımlamaz (George ve Veermani, 1994).

George ve Veermani (1994) çalışmalarının devamında tanımladıkları fuzzy metrik ile üretilen topoloji tanımını vermişlerdir.

Tanım 3.1.8: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay $x \in X$, $r \in (0, 1)$ ve $t > 0$ olmak üzere x merkezli r yarıçaplı açık yuvar $B(x, r, t) = \{y \in X; M(x, y, t) > 1 - r\}$ ile tanımlanır (George ve Veermani, 1994)

Sonuç 3.1.9: Her açık yuvar bir açık kümedir (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.10: $(X, M, *)$ bir fuzzy metrik uzay olmak üzere X üzerinde bu fuzzy metrik ile üretilen topoloji $x \in A \Leftrightarrow B(x, r, t) \subseteq A$ olacak $t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ sayıları mevcuttur şartını sağlayan A kümelerinin oluşturduğu τ ailesi X kümesi üzerinde bir topoloji belirtir (George ve Veermani, 1994).

Bu şekilde tanımlanan topoloji her zaman bir fuzzy topoloji belirtmez yani X üzerinde tanımlanan bu topoloji klasik (crisp) topolojidir. Bu tanıma göre $(X, M, *)$ bir Hausdorff uzaydır (George ve Veermani, 1994).

Sonuç 3.1.11: (X, d) bir metrik uzay ve $M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ olsun. O halde d 'den

üretilen τ_0 topolojisi ile M 'den üretilen τ topolojisi eşittir (George ve Veermani, 1994).

Erceg (1979), Kramosil ve Michalek tarafından tanımlanan fuzzy metrik uzaydan bağımsız olarak yeni bir fuzzy metrik uzay tanımı vermiştir. Bu yeni fuzzy metrikte fuzzy kümeler arasındaki uzaklık bir reel sayı olarak verilmektedir.

Tanım 3.1.12: Boştan farklı bir X kümesi üzerinde fuzzy pseudo-quasi metrik (kısaca fuzzy p.q metrik) aşağıdaki şartları sağlayan $\rho_{Erc} : FS^X \times FS^X \rightarrow [0, \infty]$ dönüşümüdür;

$$(M1) \quad \forall A \in FS^X \text{ ve } A \neq \tilde{0} \text{ için } \rho_{Erc}(\tilde{0}, A) = \infty$$

$$\forall A \in FS^X \text{ için } \rho_{Erc}(A, A) = 0$$

$$\forall A \in FS^X \text{ için } \rho_{Erc}(A, \tilde{0}) = 0$$

$$(M2) \quad \forall A, B, C \in FS^X \text{ için } \rho_{Erc}(A, B) \leq \rho_{Erc}(A, C) + \rho_{Erc}(C, B)$$

$$(M3) \quad (i) \quad A \subseteq B \Rightarrow \forall C \in FS^X \text{ için } \rho_{Erc}(A, C) \geq \rho_{Erc}(B, C)$$

$$(ii) \quad \forall A, A_\alpha \in FS^X \text{ için } \rho_{Erc}\left(A, \bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) \geq \bigvee_{\alpha} \rho_{Erc}(A, A_\alpha)$$

$$(M4) \quad \text{Herhangi bir indeks kümesi } \Delta \text{ için } A, A_\alpha \in FS^X \text{ olmak üzere eğer } B \in FS^X,$$

$$\alpha \in \Delta \text{ için } \rho(A_\alpha, B) < r \Rightarrow B \subseteq A \text{ ise o halde } \rho_{Erc}\left(\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha, D\right) < r \text{ olacak}$$

$$D \in FS^X \text{ vardır.}$$

(Erceg, 1979).

Erceg bu çalışmasının devamında fuzzy p.q metrik kullanarak Chang manasında fuzzy topoloji tanımlamıştır.

Tanım 3.1.13: $r \in (0, \infty)$ için $D_r(A) = \{B; \rho_{Erc}(A, B) < r\}$ ile tanımlanan $D_r : FS^X \rightarrow FS^X$ dönüşüm olmak üzere $\{D_r; r > 0\}$ ailesine ρ_{Erc} metriğine ilişkili komşuluk dönüşümleri denir (Erceg, 1979).

Teorem 3.1.14: ρ_{Erc} , boştan farklı bir X kümesi üzerinde fuzzy p.q. metrik ve ρ_{Erc} metriğine ilişkili komşuluk dönüşümleri D_r olmak üzere $\{D_r(A); A \in FS^X, r \in (0, \infty)\}$ kümesi X üzerinde Chang manasında bir fuzzy topoloji için bazdır (Erceg, 1979).

Tanım 3.1.15: X kümesi üzerinde fuzzy pseudo-metrik (kısaca fuzzy p. metrik) $r \in (0, \infty)$ için D_r ilişkili komşuluk dönüşümleri olmak üzere $D_r = D_r^{-1}$ şartını sağlayan fuzzy p.q. metriktir. Burada $D_r^{-1}(B) = \bigcap \{A; D_r(\bar{A}) \subseteq \bar{B}\}$ ile tanımlıdır (Erceg, 1979).

Deng (1980), fuzzy pseudo-metrik kavramını Erceg'ten farklı olarak fuzzy noktalar arasında tanımlamıştır.

Tanım 3.1.16: X boştan farklı bir küme $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (0, 1]$ ve $x, x_1, x_2, x_3 \in X$ olmak üzere $d_{Deng} : FP^X \times FP^X \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir fuzzy pseudo-metrik ve (X, d_{Deng}) uzayı da fuzzy pseudo-metrik uzay olarak adlandırılır.

- i. $\alpha \leq \alpha_0$ olmak üzere $d_{Deng}(q_x^\alpha, q_x^{\alpha_0}) = 0$
- ii. $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) = d_{Deng}(\overline{q_{x_2}^{\alpha_2}}, \overline{q_{x_1}^{\alpha_1}})$
- iii. $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_3}^{\alpha_3}) \leq d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) + d_{Deng}(q_{x_2}^{\alpha_2}, q_{x_3}^{\alpha_3})$
- iv. $r > 0$ olmak üzere $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) < r \Rightarrow \exists \alpha' > \alpha_1$ için $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha'}, q_{x_2}^{\alpha_2}) < r$

Eğer bu dönüşüm aşağıdaki beşinci şartı da sağlıyorsa fuzzy metrik uzay olarak adlandırılır

- v. $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ve $\alpha_1 \leq \alpha_2$

(Deng, 1982).

Örnek 3.1.17: X boştan farklı bir küme olmak üzere $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) = \max\{\alpha_1 - \alpha_2, 0\}$ ile tanımlı dönüşüm bir fuzzy pseudo-metriktir (Deng, 1982).

Örnek 3.1.18: $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) = \max\{\alpha_1 - \alpha_2, 0\} + |x_1 - x_2|$ ile tanımlı dönüşüm bir fuzzy metriktir (Deng, 1982).

Çalışmanın devamında Deng, fuzzy metrik uzaydan alışılmış metrik uzay arasındaki ilişki ifade etmiştir.

Teorem 3.1.19: Eğer Tanım 3.1.16 daki ii. şartı $d_{Deng}(q_{x_1}^{\alpha_1}, q_{x_2}^{\alpha_2}) = d_{Deng}(q_{x_2}^{\alpha_2}, q_{x_1}^{\alpha_1})$ olarak değiştirilirse (X, d_{Deng}) bir fuzzy pseudo-metrik uzay olur, ayrıca bu uzayın bölüm uzayı alışılmış bir (X, D_{Deng}) pseudo-metrik uzaya izometriktir (Deng, 1982).

Deng bu çalışmasının devamında tanımlamış olduğu fuzzy metriktan Chang manasında topoloji tanımlamıştır

Tanım 3.1.20: (X, d_{Deng}) bir p.s. fuzzy metrik ve $Q_{q_{x_0}}^r = \{q_x^\alpha : d_{Deng}(q_x^\alpha, q_{x_0}^{\alpha_0}) < r\}$ olmak üzere $q_{x_0}^{\alpha_0}$ merkezli r yarıçaplı yuvar $B(q_{x_0}^{\alpha_0}, r) = \bigcup_{q_x^\alpha \in Q_{q_{x_0}}^r} q_x^\alpha$ ile tanımlanır (Deng, 1982).

Tanım 3.1.21: $A \in FS^X$ olmak üzere A fuzzy açık olması için gerek ve yeter şart $\forall q_x^\alpha \in A$ için $\exists r > 0$ vardır öyle ki $B(q_x^\alpha, r) \subseteq A$ olmasıdır (Deng, 1982).

Teorem 3.1.22: $\tau_{Deng} = \{A \in FS^X : A \text{ fuzzy açık}\}$ ile birlikte (X, τ_{Deng}) bir CT-FS uzaydır (Deng, 1982).

Kaleva ve Seikkala (1984), metrik uzay kavramını iki nokta arasındaki uzaklığı non-negatif bir fuzzy sayı olarak ifade eden fuzzy metrik kavramına genişletmiştir. Bu yeni uzay tanımlanırken fuzzy sayılar kümesi üzerinde daha önce bahsettiğimiz sıralama ve toplama işlemlerini kullanarak klasik üçgen eşitliğine benzer bir üçgen eşitsizliği tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.23: X boştan farklı bir küme $d_{KS}: X \times X \rightarrow G$ bir dönüşüm ve $L: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ ve $R: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$; $L(0,0)=0$ ve $R(1,1)=1$ şartlarını sağlayan simetrik ve azalmayan dönüşümler olsun. $x, y \in X$ ve $0 < \alpha \leq 1$ için $(d(x, y))^\alpha = [\lambda_\alpha(x, y), \rho_\alpha(x, y)]$ olsun. Eğer

- i. $d_{KS}(x, y) = \bar{0} \Leftrightarrow x = y$
- ii. Her $x, y \in X$ için $d_{KS}(x, y) = d_{KS}(y, x)$
- iii. Tüm $x, y, z \in X$ için
 - 1. $s \leq \lambda_1(x, z)$, $t \leq \lambda_1(z, y)$ ve $s + t \leq \lambda_1(x, y)$ olmak üzere $d_{KS}(x, z)(s + t) \geq L(d_{KS}(x, z)(s), d_{KS}(z, y)(t))$
 - 2. $s \geq \lambda_1(x, z)$, $t \geq \lambda_1(z, y)$ ve $s + t \geq \lambda_1(x, y)$ olmak üzere $d_{KS}(x, z)(s + t) \geq R(d_{KS}(x, z)(s), d_{KS}(z, y)(t))$

şartlarını sağlayan (X, d_{KS}, L, R) dördlüsüne fuzzy metrik uzay ve d_{KS} dönüşümüne de fuzzy metrik denir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Alışılmış metrik uzaylar, fuzzy metrik uzayın özel bir halidir. Aslında negatif olmayan reel sayılar, G kümesine ait olduğundan ve örneğin $L(a, b) = 0$ ve

$$R(a, b) = \begin{cases} 0 & a = b = 0 \\ 1 & \text{diğer durumlar} \end{cases} \text{ olarak alındığı zaman alışılmış metrik uzayın üçgen}$$

eşitsizliği ile iii. şart sağlandığından bu durum açıkça görülür. L ve R dönüşümlerinin bu seçimi $\forall x, y \in X$ ve $t \geq 0$ için $d(x, y)(t) > 0$ şartının sağlandığı uzaylarda ise iii. şartın aşikâr şekilde sağlandığı açıktır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

iii. ile tanımlanan üçgen eşitsizliği olasılıksal metrik uzay tanımındaki Menger üçgen eşitsizliğine benzerdir. Olasılıksal metrik uzaylarda sıkça kullanılan aşağıdaki dönüşümler L ve R dönüşümleri için olası seçimlerdir.

- 1. $T_1(a, b) = \max(a + b - 1, 0)$ (Max(Toplam-1, 0)),
- 2. $T_2(a, b) = ab$ (Çarpım),
- 3. $T_3(a, b) = \min(a, b)$ (Min),

4. $T_4(a, b) = \max(a, b)$ (*Max*),
5. $T_5(a, b) = a + b - ab$ (*Toplam-Çarpım*),
6. $T_6(a, b) = \min(a + b, 1)$ (*Min(Toplam, 1)*).

Yukarıdaki T – dönüşümleri tüm $a, b \in [0, 1]$ için $i \geq j$ ise $T_i(a, b) \geq T_j(a, b)$ olacak şekilde sıralanmıştır. İyi bilindiği üzere Menger üçgen eşitsizliği şartı $T \geq \text{Max}$ olduğunda sağlanmayabilir. Bu durumun fuzzy metrik uzaylardaki eş durumu aşağıda belirtilmiştir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.24: (X, d_{KS}, L, R) bir fuzzy metrik uzay olsun.

1. Eğer $L \geq \text{Max}$ ise tüm $x, y \in X$ için $\lambda_1(x, y) = 0$,
2. Eğer $R \leq \text{Min}$ ise tüm $t > \lambda_1(x, y)$ için $d(x, y) = 0$

(Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.25: $R = \text{Max}$ dönüşümü ile beraber iii. (2) üçgen eşitsizliği tüm $\alpha \in (0, 1]$ ve $x, y, z \in X$ için $\rho_\alpha(x, y) \leq \rho_\alpha(x, z) + \rho_\alpha(z, y)$ üçgen eşitsizliğine eşittir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Önerme 3.1.26: $L = \text{Min}$ dönüşümü ile beraber iii. (2) üçgen eşitsizliği tüm $\alpha \in (0, 1]$ ve $x, y, z \in X$ için $\lambda_\alpha(x, y) \leq \lambda_\alpha(x, z) + \lambda_\alpha(z, y)$ üçgen eşitsizliğine eşittir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Teorem 3.1.27: $(X, d_{KS}, \text{Min}, \text{Max})$ fuzzy metrik uzayında iii. Üçgen eşitsizliği $d_{KS}(x, y) \preceq d_{KS}(x, z) + d_{KS}(z, y)$ eşitsizliğine denktir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Örnek 3.1.28: $X = FN$ olsun ve $d_{KS}(x, y) = \begin{cases} |x - y| & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$ şeklinde tanımlansın.

Lemma 2.2 den dolayı $d_{KS}(x, y) \in G$ 'dir ve $x \neq y$ için $x^\alpha = [x_1^\alpha, x_2^\alpha]$ ve $y^\alpha = [y_1^\alpha, y_2^\alpha]$ olmak üzere

$$d(x, y)^\alpha = \left[\max\{0, x_1^\alpha - y_2^\alpha, x_2^\alpha - y_1^\alpha\}, \max\{|x_1^\alpha - y_2^\alpha|, |x_2^\alpha - y_1^\alpha|\} \right] \mu_A(x_i).$$

olduğu açıktır. $L(a, b) = 0$ olarak seçilirse d 'nin $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ eşitsizliğini sağladığı kolayca görülür. Böylece (FN, d_{KS}, L, Max) bir fuzzy metrik uzaydır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

(X, F, Δ) bir Menger uzay olmak üzere $d : X \times X \rightarrow G$ dönüşümünü

$$d(x, y)(t) = \begin{cases} 0, & t < t_{xy} = \sup\{t; F_{xy}(t) = 0\} \\ 1 - F_{xy}(t), & t \geq t_{xy} \end{cases}$$

ile tanımlayalım. F_{xy} tanımından dolayı $d(x, y) \in G$ olduğu açıktır.

$R : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümünü $R(a, b) = 1 - \Delta(1 - a, 1 - b)$ olarak tanımlayalım. R dönüşümünün azalmayan oluşu ve Menger uzayı olmanın iii. şartından dolayı $1 - F_{xy}(s + r) \leq 1 - \Delta(F_{xz}(s), F_{zy}(r)) = R(1 - F_{xz}(s), 1 - F_{zy}(r))$ elde edilir. Böylelikle her Menger uzayının bir fuzzy metrik uzay olarak görülebileceği ispatlanır. Bunun tersi genel olarak tam anlamıyla açık değildir. Fakat (X, d, L, R) fuzzy metrik uzayında tüm

$x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} d(x, y)(t) = 0$ ise $F_{xy}(t) = \begin{cases} 0, & t < \lambda_1(x, y), \\ 1 - d(x, y)(t), & t \geq \lambda_1(x, y), \end{cases}$ ile tanımlı

ifade sürekli bir dağılım fonksiyonu tanımlar. Aslında $F_{xy}, [\lambda_1(x, y), \infty]$ aralığında

$d(x, y)$ artmayan olduğundan azalmayandır. Ayrıca $[\lambda_1(x, y), \infty]$ aralığında $d(x, y)$

sol sürekli olduğundan (artmayan üst-yarı sürekli bir dönüşüm olarak) sol sürekli ve

$\lim_{t \rightarrow \infty} d(x, y)(t) = 0$ olduğundan dolayı $\lim_{t \rightarrow \infty} F_{xy}(t) = 0$. $F_{xy}(0) = 0$ ve Menger uzayı olma

şartlarından i. ve ii. nin sağlandığı açıktır. Diğer taraftan, her $a \in [0, 1]$ için

$R(a, 1) = R(1, a) = 1$ ise $\Delta(a, b) = 1 - R(1 - a, 1 - b)$ ile tanımlı Δ için iii. şartında

sağlandığı açıktır (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Teorem 3.1.29: (X, d_{KS}, L, R) bir fuzzy metrik uzay olsun. $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için $N_x(\varepsilon, \alpha) = \{y \in X; \rho_\alpha(x, y) < \varepsilon\}$ ile tanımlanan kümeler X 'te metriklenabilir bir Hausdorff topoloji için yerel baz oluşturur. Bu topoloji d ile üretilen topoloji olarak isimlendirilir (Kaleva ve Seikkala, 1984).

Tanım 3.1.30: (X, d_{KS}, L, R) bir fuzzy metrik uzay olsun. O halde

1. X 'deki bir $\{x_n\}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{KS}(x_n, x) = \bar{0}$ yani tüm $0 < \alpha \leq 1$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^\alpha(x_n, x) = 0$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ yakınsıyor denir.
2. X 'deki bir $\{x_n\}$ için $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d_{KS}(x_n, x_m) = \bar{0}$ ise $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.
3. (X, d_{KS}, L, R) metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise (X, d_{KS}, L, R) uzayına tam uzay denir.
4. (X, d_{KS}, L, R) ve (X', d'_{KS}, L', R') fuzzy metrik uzaylar olsun. Eğer her $x, y \in X$ için $d_{KS}(x, y) = d'_{KS}(\phi(x), \phi(y))$ olacak bire bir $\phi: X \rightarrow X'$ dönüşümü var ise (X, d_{KS}, L, R) ve (X', d'_{KS}, L', R') fuzzy metrik uzaylarına izometrik ve $\phi: X \rightarrow X'$ dönüşümüne izometri denir. [13]
5. (X^*, d_{KS}^*, L, R) fuzzy metrik uzayının (X, d_{KS}, L, R) fuzzy metrik uzayının tamlaması olması için gerek ve yeter şart (X, d_{KS}, L, R) metrik uzayının (X^*, d_{KS}^*, L, R) fuzzy metrik uzayının yoğun bir alt kümesine izometrik olmasıdır

(Kaleva ve Seikkala, 1984).

Teorem 3.1.32: (X, d_{KS}, Min, Max) fuzzy metrik uzay ve tüm $x, y \in X$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{KS}(x, y)(t) = 0$ olsun. O halde (X, d_{KS}, Min, Max) tek bir izometri ile beraber tamlamaya sahiptir (Kaleva, 1985).

Tanım 3.1.33: $\{x_n\}$, (X, d_{KS}, Min, Max) fuzzy metrik uzayında bir dizi olsun. $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ X 'in sınırlı alt kümesi ise $\{x_n\}$ dizisine sınırlıdır denir (Syau, 1997).

Teorem 3.1.34: (X, d_{KS}, Min, Max) fuzzy metrik uzayında her yakınsak dizi sınırlıdır.

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, (X, d_{KS}, Min, Max) fuzzy metrik uzayında iki yakınsak dizi olsun. $\sim$ denklik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım. $\{x_n\} \sim \{y_n\} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot c$, X 'de yakınsak diziler uzayı ve c^* , $\sim$ denklik bağıntısına göre denklik sınıflarının koleksiyonu olsun. $x^*, y^* \in c^*$ ve $\{x_n\} \in x^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ve $\{y_n\} \in y^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ olsun. $d_{KS}^*(x^*, y^*) = d_{KS}(x, y)$ ile tanımlı $d_{KS}^*: c^* \times c^* \rightarrow G$ fuzzy metriği ile beraber $(c^*, d_{KS}^*, Min, Max)$ fuzzy metrik uzaydır (Syau, 1997).

Teorem 3.1.35: (X, d_{KS}, Min, Max) tam fuzzy metrik uzay olsun. O halde $(c^*, d_{KS}^*, Min, Max)$ tamdır (Syau, 1997).

Gerla ve Volpe (1986) fuzzy kümeler arasındaki uzaklığı α -seviye kümeleri üzerinden tanımlamıştır.

Tanım 3.1.36: (X, ρ) bir metrik uzay $A, B \in FS^X$ olmak üzere A ve B fuzzy kümeleri arasındaki uzaklık $\forall x \in X$ için $\rho(x, \emptyset) = 0$ olmak üzere $D_{GV}(A, B) = \int_0^1 \rho(A^\alpha, B^\alpha) d\alpha$ ile tanımlanan negatif olmayan reel sayıdır. Burada $\rho_{GV}(A^\alpha, B^\alpha)$ uzaklığı $\rho_{GV}(A^\alpha, B^\alpha) = \inf_{\substack{x \in A^\alpha \\ y \in B^\alpha}} \rho(x, y)$ ile tanımlıdır (Gerla ve Volpe, 1986).

Benzer bir yaklaşımla Bednar (2005) fuzzy kümeler arasındaki uzaklığı α -seviye kümeleri üzerinden bir fuzzy küme olarak aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.1.37: (X, ρ) bir metrik uzay $A, B \in FS^X$ olmak üzere A ve B fuzzy kümeleri arasındaki uzaklık $\mathbb{R}^+$ üzerinde üyelik fonksiyonu

$$\mu_{D_{Bed}(A,B)}(y) = \begin{cases} \sup \{ \alpha \in [0,1]; A^\alpha, B^\alpha \neq \emptyset, \rho(A^\alpha, B^\alpha) \leq y \}, & y \leq \lim_{\beta \rightarrow \min\{h(A), h(B)\}} \rho(A^\beta, B^\beta) \\ 0 & , \text{ diğ er durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $D_{Bed}(A, B)$ fuzzy kümesidir (Bednar, 2005).

Bednar (2005), Gerla ve Volpe tarafından tanımlanan uzaklığın FS^X uzayında bir metrik olmadığını iddia etmiştir. Aynı çalışmanın devamında $D_{Bed}(A, B)$ ile $D_{GV}(A, B)$ arasındaki farkı gösteren aşağıdaki teoremi vermiştir (Bednar, 2005).

Teorem 3.1.38: (X, ρ) bir metrik uzay A ve B , X üzerinde boştan farklı (crisp) kümeler olmak üzere

- a. $\rho(A, B) = D_{GV}(A, B)$
- b. $\mu_{D_{Bed}(A,B)}(y) = \begin{cases} 1, & y = \rho(M, N) \\ 0, & y \neq \rho(M, N) \end{cases}$

(Bednar, 2005).

Teorem 3.1.39: (X, ρ) bir metrik uzay A ve $B \in FS^X$ olmak üzere $D_{Bed}(A, B)$ bir konveks fuzzy kümedir ve $h(D_{Bed}(A, B)) = \sup_{x \in X} (D_{Bed}(A, B)(x))$ olmak üzere

$$\int_0^{h(D_{Bed}(A,B))} \inf \left((D_{Bed}(A, B))^\alpha \right) d\alpha = D_{GV}(A, B) \text{ eşitliği doğrudur (Bednar, 2005).}$$

Abu Osman (1983), fuzzy kümelerin üyelik fonksiyonları üzerinden uzaklıklarını tanımlamıştır.

Tanım 3.1.40: X boştan farklı bir küme olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için $d_{Abu}(A, B) = \sup_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$ ile tanımlanan $d_{Abu} : FS^X \times FS^X \rightarrow [0, 1]$ dönüşümüne fuzzy metrik ve (FS^X, d_{Abu}) fuzzy metrik uzay denir (Abu Osman, 1983).

Bednar, Abu Osman'ın tanımının uzaklık tanımlamak için mükemmel bir yol olmasına rağmen en az bir $x \in X$ $\mu_A(x) = 0$ ve $\mu_B(x) = 1$ olduğu sürece $d_{\infty}(A, B) = 1$ yani maksimum uzaklık olduğunu ve bu nedenle teknik uygulamalar için çok uygun olmadığını ve d_{Abu} dönüşümünün FS^X kümesini çok fazla ayırtlaştırdığını dile getirmiştir (Bednar, 2005).

Fuzzy kümeler arasındaki uzaklığı yine bir fuzzy küme olarak ifade eden uzaklık çeşitlerinden olan aşağıdaki iki tanım sırasıyla Dubois ve Prade (1980) ve Rosenfeld (1985) tarafından verilmiştir.

Tanım 3.1.41: (X, d) bir pseudo-metrik uzay ve $A, B \in FS^X$ olmak üzere A ve B fuzzy kümeler arasındaki fuzzy uzaklık üyelik fonksiyonu $\mu_{d_{DP}(A, B)}(r) = \sup_{d(a, b) = r} \{\min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}\}$ ile tanımlanan $d_{DP}(A, B) \in FS^{\mathbb{R}^+}$ fuzzy kümesidir (Dubois ve Prade, 1980).

Chaudhuri ve Rosenfeld (1999), bu tanımın fuzzy küme olmayan A ve B kümeleri için $d(a, b) = r$ olacak $a \in A$ ve $b \in B$ olduğu durumlarda $d_{DP}(A, B)(r) = 1$ ve diğer durumlarda ise $d_{DP}(A, B)(r) = 0$ olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca $d_{DP}(A, B)$ klasik manada bir metrik olmadığı açıktır. Yukarıdaki tanımın hafifçe düzeltilmiş hali Rosenfeld (1985) tarafından yapılmıştır.

Tanım 3.1.42: (X, d) bir pseudo-metrik uzay ve $A, B \in FS^X$ olmak üzere A ve B fuzzy kümeler arasındaki fuzzy uzaklık üyelik fonksiyonu $\mu_{d_{Ros}(A, B)}(r) = \sup_{d(a, b) \leq r} \{\min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}\}$ ile tanımlanan $d_{Ros}(A, B) \in FS^{\mathbb{R}^+}$ fuzzy kümesidir (Rosenfeld, 1985).

Aynı çalışmada Rosenfeld, fuzzy kümeler arasındaki ortalama uzaklığı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.43: (X, d) bir pseudo-metrik uzay ve $A, B \in FS^X$ olmak üzere A ve B fuzzy kümeler arasındaki ortalama uzaklık

$$d_{Ros(m)}(A, B) = \frac{\sum \sum_{a, b \in X} d(a, b) \min(\mu_A(a), \mu_B(b))}{\sum \sum_{a, b \in X} \min(\mu_A(a), \mu_B(b))}$$

ile tanımlanır (Rosenfeld, 1985).

Bilindiği üzere Hausdorff uzaklık bir metrik uzayın iki alt kümesinin bir birine olan uzaklığı için bir ölçüdür. Bu uzaklık metrik uzayın boştan farklı kompakt alt kümeleri üzerinden bir metrik uzaya dönüşür. Fuzzy kümeler arasındaki uzaklığın Hausdorff metrik ile ölçülmesi ilk olarak Dubois ve Prade (1983) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmanın sonrasında birçok araştırmacı fuzzy kümeler ve fuzzy sayılar arasındaki uzaklıkları Hausdorff metriği kullanarak tanımlamışlardır. Şimdi bu tanımlardan bazılarını kronolojik olarak incelemeye çalışılacaktır. Bir sonraki bölümde ise intuitionistic fuzzy sayılar kümesi için benzer bir tanımlı verilecektir.

Tanım 3.1.44: (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \subset X$ olmak üzere

$$H(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\}$$

ile tanımlanan $H : P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ metriğine (alışılmış) Hausdorff metrik denir. Yukarıdaki eşitliği $h(A, B) = \sup_{a \in A} \left\{ \inf_{b \in B} d(a, b) \right\}$ ve $h(B, A) = \sup_{b \in B} \left\{ \inf_{a \in A} d(a, b) \right\}$ olmak üzere $H(A, B) = \max \{h(A, B), h(B, A)\}$ ile de gösterebilir. Bu ikinci gösterim daha yaygın olarak kullanılmaktadır.

Hausdorff uzaklık görüntü işleme, örüntü tanıma gibi mühendisliğin birçok alanında uygulama alanı bulmuştur. Fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan Hausdorff uzaklıkları tarihsel sıralaması ile aşağıda vermeye çalışacağız.

Alışılmış Hausdorff uzaklık fuzzy kümeler üzerine ilk defa Dubois ve Prade (1983) tarafından aşağıdaki şekilde genişletilmiştir.

Tanım 3.1.45: (X, d) bir metrik uzay ve $A \in FS^X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $\mu_{(A)^\lambda}(a) = \sup\{\mu_A(b) : d(a, b) \leq \lambda\}$ üyelik fonksiyonu ile tanımlı $(A)^\lambda$, A fuzzy kümesinin λ genişlemesi olarak tanımlanır. $L(A, B) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : (A)^\lambda \supseteq B\}$ olarak tanımlanmak üzere $H_{DP}(A, B) = \max\{L(A, B), L(B, A)\}$ ile tanımlanan $H_{DP} : FS^X \times FS^X \rightarrow [0, +\infty)$ dönüşümü fuzzy kümeler arasındaki Hausdorff uzaklık olarak adlandırılır (Dubois ve Prade, 1983).

Fakat bu tanıma göre, $A, B \in FS^X$ için $\sup\{\mu_A(x) : x \in X\} \neq \sup\{\mu_B(x) : x \in X\}$ olduğu zaman $L(A, B)$ ve $L(B, A)$ tanımlanamayacağından $H_{DP}(A, B)$ de tanımlanamaz. Böylece $H_{DP}(A, B)$ uzaklığının tanımlı olabilmesi için A ve B fuzzy kümelerinin eşit yüksekliğe sahip olması gerektiği görülür. Bu durum, Dubois ve Prade'nin tanımının en büyük dezavantajıdır. Chaudhuri ve Rosenfeld, Dubois ve Prade'nin (1996) tanımındaki eksiklikleri kapatmak için bir dizi yeni Hausdorff uzaklık tanımı yapmışlardır.

(X, d) kompakt metrik uzay olmak üzere $D-FS^X$ ile X kümesi üzerinde tanımlanan ve üyelik fonksiyonları sonlu sayıda tekil değer alan fuzzy kümelerin ailesini gösterelim. Her bir fuzzy küme için sonlu sayıdaki üyelik değerlerinin oluşturduğu kümede sonludur. Bu kümeyi $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_m\}$ ile gösterelim. $C-FS^X$ ile de sayılamayan kompakt X kümesi üzerinde tanımlanan ve üyelik fonksiyonu sürekli olan tüm fuzzy kümelerin ailesini gösterelim (Fan, 1998).

Tanım 3.1.46: $D-FS^X$ ailesinin tüm elemanlarının üyelik fonksiyonlarının maksimum değerlerinin (yüksekliklerinin) eşit olduğunu ve her $A \in D-FS^X$ ve $t_k \in T$ için A_{t_k} , t_k - seviye kümesinin kompakt olduğunu kabul edelim. O halde $A, B \in D-FS^X$ için

$$H_{CR}^0(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^m t_k H(A_{t_k}, B_{t_k})}{\sum_{k=1}^m t_k}$$

ile tanımlanan H_{CR}^0 dönüşümü $D-FS^X$ üzerinde bir metriktir (Chaudhuri ve Rosenfeld, 1996).

Şimdi tüm fuzzy kümelerin aynı yüksekliğe sahip olmadığını varsayalım. O halde bazı fuzzy kümeler ve bazı üyelik değerleri için seviye kümeleri boş kümedir. Daha genel bir Hausdorff metrik tanımlamak için $A \in D-FS^X$ fuzzy kümesini üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A'}(x) = \begin{cases} 1 & , \mu_A(x) = \max_{y \in X} \mu_A(y), \\ \mu_A(x) & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlanan A' fuzzy kümesi olarak modifiye edilmiştir (Chaudhuri ve Rosenfeld, 1996).

Tanım 3.1.47: $|X|$, X kümesinin eleman sayısını, ε küçük pozitif bir sabit ve $A \in FS^X$ için $A_{t_k} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq t_k\}$ ile t_k - seviye kümesi olmak üzere $\forall A, B \in D-FS^X$ için

$$H_{CR}^1(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^m t_k H(A'_{t_k}, B'_{t_k})}{\sum_{k=1}^m t_k} + \varepsilon \frac{\sum_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|}{|X|}$$

ile tanımlanan H_{CR}^1 dönüşümü $D-FS^X$ üzerinde bir metriktir (Chaudhuri ve Rosenfeld, 1996).

Chaudhuri ve Rosenfeld, aynı çalışmada ayrık olmayan üyelik değerleri için metrik uzay tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.48: $\forall A, B \in C-FS^X$ için

$$H_{CR}^2(A, B) = \int_0^1 tH(A'_{t_k}, B'_{t_k}) dt + \varepsilon \frac{\int_X |\mu_A(x) - \mu_B(x)| dx}{\int_X dx}$$

ile tanımlanan H_{CR}^2 dönüşümü $C-FS^X$ üzerinde bir metriktir (Chaudhuri ve Rosenfeld, 1996).

H_{CR}^1 ve H_{CR}^2 metriklerinde yapılan A' 'ya dönüştürmenin A 'nın doğasını ciddi manada değiştirdiğini iddia eden Boxer (1997) yeni metrikler tanımlamıştır. t – seviye küme üzerinde boş ve diğer küme arasındaki Hausdorff uzaklığı tanımlamak için $X \cap X' = \emptyset$ şartını sağlayan yardımcı bir kompakt X' kümesi üzerinden $A \in FS^X$ fuzzy kümesinin genişlemesi olan $A^* \in FS^{X \cup X'}$ fuzzy kümesini üyelik fonksiyonu $\mu_{A^*}(x) = \begin{cases} \mu_A(x), & x \in X \\ 0, & x \in X' \end{cases}$ olacak şekilde tanımlamıştır. Boxer, çalışmasının devamında bu yeni genişlemeyi kullanarak aşağıdaki metrik tanımını vermiştir.

Tanım 3.1.49: Her $A \in D-FS^X$ ve $t_k \in T$ için $A_{t_k}^* = \{x \in X : \mu_A(x) \leq t_k\}$, t_k^* – seviye kümesinin kompakt olduğunu kabul edelim. $A, B \in D-FS^X$ için

$$H_{Box}^1(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^m (1+t_k) H(A_{t_k}^* \cup X', B_{t_k}^* \cup X')}{\sum_{k=1}^m (1+t_k)}$$

ile tanımlı H_{Box}^1 , $D-FS^X$ kümesi üzerinde bir metriktir (Boxer, 1997).

Tanım 3.1.50: $A, B \in C-FS^X$ için

$$H_{Box}^2(A, B) = \int_0^1 (1+t_k) H(A_{t_k}^* \cup X', B_{t_k}^* \cup X') dt$$

ile tanımlı H_{Box}^2 , $C-FS^X$ kümesi üzerinde bir metriktir (Boxer, 1997).

Boxer, H_{CR}^0 metriğinin klasik Hausdorff metriğine denk geldiğini fakat H_{Box}^1 metriğinin bu özelliği sağlamadığını bu durumda H_{CR}^0 metriğinin H_{Box}^1 metriği üzerinde önemli bir avantajı olduğunu belirtmiştir (Boxer, 1997).

Fan (1998), Boxer (1997) tarafından tanımlanan metrikler hakkında önemli bir hususta X' kümesinin seçimi olduğunu belirtmiştir. Örneğin iki boyutlu bir dijital görüntü için X kümesinin pikseller kümesi ve X' kümesinin de görüntünün sınırları olarak seçilmesi gayet mantıklı ve doğal bir yol olmasına rağmen daha genel X kümeleri için X' kümesinin seçiminin daha zor olduğunu ve X' kümesinin farklı seçimlerinin Boxer tarafından tanımlanan metriklerdeki uzaklık değerlerini ciddi manada etkilediğini savunmuştur. Bu zorluğun aşılması için Fan, X' kümesini kullanmadan iki metrik tanımlamıştır. Bilindiği üzere Euclidean uzaydaki boştan farklı kompakt alt kümeler uzayında tanımlanan alışılmış Hausdorff metrik H ve bu uzaydan seçilebilecek A ve B boştan farklı kompakt kümeler için $\sup H(A, B) = +\infty$ eşitliği sağlanmaktadır. Boş kümenin kendisi de kompakt olduğundan tüm A boştan farklı kompakt kümeleri için $H(\emptyset, \emptyset) = 0$ ve $H(A, \emptyset) = +\infty$ eşitlikleri elde edilir. Euclidean uzayda X kompakt metrik uzayı sınırlı olduğundan tüm $A, B \subset X$ için $\delta = \sup H(A, B)$ her zaman mevcuttur. Böylece Hausdorff metrik $H(\emptyset, \emptyset) = 0$ ve $H(A, \emptyset) = \delta$ olacak şekilde tüm kompakt alt kümeler uzayına genişletilebilir. Bu genişlemeyi kullanarak Fan aşağıdaki metrik uzayları tanımlamıştır (Fan, 1998).

Tanım 3.1.51: $\forall A \in D-FS^X$ ve $t_k \in T$ için $A_{t_k} = \{x \in X : \mu_A(x) \geq t_k\}$ ile tanımlanan t_k - seviye kümesi kompakt küme olmak üzere her $A, B \in D-FS^X$ ve $t_k \in T$ için

$$H_{Fan}^1(A, B) = \frac{\sum_{k=1}^m t_k H(A_{t_k}, B_{t_k})}{\sum_{k=1}^m t_k}$$

ile tanımlanan H_{Fan}^1 dönüşümü $D-FS^X$ üzerinde bir metriktir (Fan, 1998).

Tanım 3.1.52: $\forall A, B \in C - FS^X$ için

$$H_{Fan}^2(A, B) = \int_0^1 tH(A_{t_k}, B_{t_k}) dt$$

ile tanımlanan H_{Fan}^2 dönüşümü $C - FS^X$ üzerinde bir metriktir (Fan, 1998).

Hausdorff metriğin kullanıldığı yukarıdaki metrik tanımlarında görüldüğü üzere α –seviye kümelerinin kompakt oluşu ya da üyelik fonksiyonlarının normal oluşu (aynı yüksekliğe sahip olması) veya üst-yarı sürekli oluşu hayati önem taşımaktadır. Yukarıdaki tanımlanan metriklerdeki esas problem bu şartların sağlanmaması durumunda Hausdorff metriğin nasıl tanımlanabileceğidir. Fakat bu çalışmaların öncesinde Kloeden (1980), (X, d) lokal kompakt metrik uzayından $I = [0, 1]$ kapalı aralığına tanımlı tüm fonksiyonlar uzayında kompakt sendograf tanımını vermiş ve bu sendografların Hausdorff metriği ile uzaklıklarının bu fonksiyonlar uzayında bir metrik tanımladığını göstermiştir. Kloeden’in tanımındaki fonksiyonların fuzzy sayı olma şartlarına haiz bir üyelik fonksiyonu olarak kabul edilmesi durumunda Kloeden’in bu metrik tanımının fuzzy sayılar uzayı için oldukça uygun bir tanımlama olduğu görülür. Şimdi Kloeden’in sendograf metrik olarak tanımladığı metrik tanımı verilecektir ve bu metriğin bazı özellikleri hakkında etraflıca bilgi verilecektir. Tez çalışmamızın dördüncü bölümünde intuitionistic fuzzy sayılar uzayına sendograf metriği tanımlayacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 3.1.53: (X, d) lokal kompakt metrik uzay ve (C, h) uzayı;

$$H(A, B) = \max \{h^*(A, B), h^*(B, A)\},$$

$$h^*(A, B) = \max \{d(a, B) : a \in A\},$$

$$d(a, B) = \min \{d(a, b) : b \in B\}$$

şeklinde tanımlanan H Hausdorff metrik ile beraber X ’in boş olmayan tüm kompakt alt kümelerinin uzayı olsun. $I = [0, 1]$ aralığı olmak üzere $D_{\text{çar}}$, $X \times I$ ’da $D_{\text{çar}}((x_1, r_1), (x_2, r_2)) = \max \{d(x_1, x_2), |r_1 - r_2|\}$ ile tanımlı çarpım metriği olsun. O halde $(X \times I, D_{\text{çar}})$ lokal kompakt metrik uzaydır. H , $X \times I$ ’nin boştan farklı kompakt alt

kümeleri için Hausdorff metrik ve H^* ve H , h^* ve h 'a uygun olarak tanımlanmış olsun. $A: X \rightarrow I$ tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. A 'nın desteği (support) $supp(A) = \{x: A(x) > 0\}$ kümesidir (Kloeden, 1980).

A 'nın endografı $end(A) = \{(x, r): A(x) \geq r\}$ ve A 'nın desteklenmiş endografı veya kısaca sendografı (supported endograph) $send(A) = end(A) \cap supp(A) \times I$ şeklinde tanımlanır. $end(A)$ 'nın $X \times I$ 'nin kapalı alt kümesi oluşması için gerek ve yeter şart A 'nın X 'de üst yarı sürekli olmasıdır. Benzer şekilde $send(A)$ 'nın $X \times I$ 'nin kapalı alt kümesi oluşması için gerek ve yeter şart A 'nın X 'de üst yarı sürekli ve $supp(A)$ 'nın X 'in kapalı alt kümesi olmasıdır. $send(A)$ 'nın $X \times I$ 'nin kompakt alt kümesi oluşması için gerek ve yeter şart A 'nın X 'de üst yarı sürekli ve $supp(A)$ 'nın X 'in kompakt alt kümesi olmasıdır. Bu şartların fuzzy sayıların üyelik fonksiyonları tarafından sağlandığı açıktır (Kloeden, 1980).

$\mathfrak{F}$ ile $supp(A)$, $X \times I$ 'nin boştan farklı kompakt alt kümesi veya buna denk olacak A üst yarı sürekli ve $supp(A)$, X 'in kompakt alt kümesi olacak tüm $A: X \rightarrow I$ fonksiyonlarının koleksiyonunu gösterelim. $\mathfrak{F}$ 'de A ve B gibi her hangi iki fonksiyonun sendografları, $X \times I$ 'nin boş olmayan kompakt alt kümeleridir. Böylece A ve B fonksiyonlarının sendograflarının arasındaki Hausdorff uzaklık A ve B arasındaki uzaklık için bir ölçü verir. $A = B$ olması için gerek ve yeter şart $send(A) = send(B)$ olmasıdır. Bu uzaklık $\mathfrak{F}$ 'de bir metrik tanımlamak için kullanılabilir. Aşağıdaki teoremden $\mathfrak{F}$ 'deki bir dizinin Hausdorff metriğine göre sendograflarının yakınsaklığının, h Hausdorff metriği ile destek kümelerinin yakınsaklığı ile birlikte fonksiyonların kesin nümerik değerlerinin yakınsaklığı ile ilgili iki şartın, bu şartlar fonksiyonların düzgün yakınsamasından daha zayıftır, sağlanmasına denktir (Kloeden, 1980).

Kloeden tarafından ifade ve ispat edilen aşağıdaki teorem $\mathfrak{F}$ uzayındaki dizilerin yakınsaklığı için bir ölçü verir.

Teorem 3.1.54: $A \in \mathfrak{F}$ ve (A_n) , $\mathfrak{F}$ 'de bir dizi olsun. O halde $H(send(A_n), send(A)) \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart

1. $h(\text{supp}(A_n), \text{supp}(A)) \rightarrow 0$
2. Her $\varepsilon > 0$ için $n(\varepsilon)$ sayısı vardır öyle ki
 - a. Her $x \in X$ için $n > n(\varepsilon)$ olduğunda $A_n(x) < A(x_n) + \varepsilon$ ve $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak $x_n = x_n(x, \varepsilon) \in X$ dizisi bulunabilir.
 - b. Her $x \in \text{supp}A$ için $n \geq n(\varepsilon)$ olduğunda $A(x_n) < A_n(x) + \varepsilon$ ve $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak $x_n = x_n(x, \varepsilon) \in \text{supp}(A)$ dizisi bulunabilir

ifadelerinin sağlanmasıdır (Kloeden, 1980).

Kishore ve Parvaiz (2004), Kloeden'in teoremini genelleştirilmiş hali olan aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Tanım 3.1.55: $\mathfrak{G} = \{A: X \rightarrow I; \text{send}A, \text{kompakt ve boştan farklı}\}$ olmak üzere $A, B \in \mathfrak{G}$ ve $\varepsilon > 0$ için $S(A, B, \varepsilon)$ ifadesi “ $\forall x \in A$ için x ve ε ’na bağlı öyle bir $z = z(x, \varepsilon)$ vardır öyle ki $d(z, x) < \varepsilon$ ve $A(x) < B(z) + \varepsilon$ ’dur.” manasına gelmektedir (Kishore ve Parvaiz, 2004).

Teorem 3.1.56: $\varepsilon > 0$ ve $A, B \in \mathfrak{G}$ için aşağıdaki önermeler doğrudur

1. $h^*(\text{supp}(A), \text{supp}(B)) \leq H^*(\text{send}(A), \text{send}(B))$
2. $H^*(\text{send}(A), \text{send}(B)) < \varepsilon \Leftrightarrow S(A, B, \varepsilon)$ sağlanır.
3. $S(A, B, \varepsilon)$ sağlanması için gerek ve yeter şart $h^*(\text{supp}(A), \text{supp}(B)) < \varepsilon$ ve her bir $x \in X$ için $z = z(x, \varepsilon) \in X$ vardır öyle ki $d(z, x) < \varepsilon$ ve $A(x) < B(z) + \varepsilon$ olmasıdır.
4. $H(\text{send}(A), \text{send}(B)) < \varepsilon \Leftrightarrow S(A, B, \varepsilon)$ ve $S(B, A, \varepsilon)$ sağlanır.
5. Eğer $S(A, B, \varepsilon)$ ve $S(B, A, \varepsilon)$ sağlanıyorsa ve $h(\text{supp}(A), \text{supp}(B)) < \varepsilon$ ise $H(\text{send}(A), \text{send}(B)) = h(\text{supp}A, \text{supp}B)$ ’dır

(Kishore ve Parvaiz , 2004).

O. Kaleva, (1985) fuzzy sayı dizilerinin yakınsaklığını Hausdorff metriğine göre incelemiştir.

Tanım 3.1.57: (Y, d) metrik uzay ve $A, B, (Y, d)$ 'nin boştan farklı kompakt alt kümeleri olmak üzere A ve B arasındaki Hausdorff metriği (Tanım 3.1.53 'e denk olarak) $H(A, B) = \inf \{ \varepsilon; B \subset S_\varepsilon(A), A \subset S_\varepsilon(B) \}$ şeklinde tanımlanır (Kaleva, 1985).

Lemma 3.1.58: (Y, d) metrik uzay ve $A, B, (Y, d)$ 'nin boştan farklı kompakt alt kümeleri olmak üzere $H(A, B) = d(a, b)$ olacak $a \in A$ ve $b \in B$ vardır (Kaleva, 1985).

Lemma 3.1.59: $\{C_n\}$, Y 'nin kompakt alt kümelerinin azalmayan (artmayan) bir dizisi olsun. Eğer $\{C_n\}$ dizisinin Hausdorff metriği ile kompakt bir C kümesine yakınsayan bir alt dizisi var ise $n \rightarrow \infty$ iken $h(C_n, C) \rightarrow 0$ 'dır (Kaleva, 1985).

Bu kısımda bir dizi metriksel yakınsıyor denildiği zaman Hausdorff metriği kast edilecektir. $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, tüm $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve tüm $\lambda \in [0, 1]$ için $u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{u(x), u(y)\}$ sağlıyor ise $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ 'ya fuzzy konveks. $\alpha \in (0, 1]$ için $u^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n; u(x) \geq \alpha\}$ kümesine ise u 'nun α -seviye kümesi denir.

Yukarıda da ifade ettiğimiz gibi fuzzy sayılar sendograf ve endograf metriklerini tanımlamak için gerekli şartları sağladığından bu metrikleri fuzzy sayılar üzerinde tanımlanabilir. Nitekim bu metrikler fuzzy sayılar uzayı için tanımlanmış ve özellikleri birçok araştırmacı tarafından genişçe incelenmiştir.

Lemma 3.1.60: $A \in FN$ ise tüm $\alpha \in I = [0, 1]$ için A_α , boştan farklıdır ve konveks, kompakt kümedir (Kaleva, 1985).

Tanım 3.1.61: $A, B \in FN$ ve $\delta, \mathbb{R}^n \times I$ çarpım metriği olmak üzere $H_{send}(A, B) = H(send(A), send(B))$, şeklinde tanımlansın. Burada $H, \mathbb{R}^n \times I$ 'da Hausdorff metriğidir. Bu tanımda bir fuzzy sayının sendografı yerine endografı kullanarak $H_{end}(A, B) = H(end(A), end(B))$ ile endograf metriği tanımlanır (Kaleva, 1985).

$A, B \in FN$ ve $\dot{H}$, $\mathbb{R}^n$ de Hausdorff metriği olmak üzere $D_{\sup}(u, v) = \sup_{\alpha > 0} \dot{H}(u^\alpha, v^\alpha)$ ile tanımlanan metrik FN 'de bir başka metriktir. Tüm $\alpha \in (0, 1]$ için $\dot{H}(A_\alpha, B_\alpha) \leq \sup_{\substack{x \in A_\alpha \\ y \in B_\alpha}} d(x, y) \leq \sup_{\substack{x \in A_0 \\ y \in B_0}} d(x, y) = M$ olsun. A_0 ve B_0 kompakt olduğundan M ve doğal olarak $D_{\sup}(A, B)$ sonludur. $\dot{H}$ bir metrik olduğundan, D 'nin metrik aksiyomlarını sağladığı kolayca görülür (Kaleva, 1985).

$\{A_n\}$, FN 'de bir dizi olsun. Eğer tüm $\alpha \in (0, 1]$ için $n \rightarrow \infty$ iken $h(A_n^\alpha, A^\alpha) \rightarrow 0$ ise $\{A_n\}, A$ 'ya seviye yakınsaktır denir. (Kaleva, 1985).

$Con-FN = \{A \in FN; A, \text{konkav}\}$ diğer bir değişle $A \in Con-FN$ ise tüm $x, y \in A_0$, $\lambda \in I$ için $\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \mu_A(x) + (1-\lambda) \mu_A(y)$ dur. Eğer $u \in Con-FN$ ise A_0 kümesinin konveks ve konkavlığından $send(u)$ konvektir (Kaleva, 1985).

Teorem 3.1.62: Aşağıdaki önermeler sağlanır.

1. $(FN, D_{\sup})$ yakınsaklık, seviye yakınsaklığı gerektirir.
2. $(FN, D_{\sup})$ 'de yakınsaklık, (FN, H_{send}) yakınsaklığı gerektirir (Kaleva, 1985).

Lemma 3.1.63: $\{A_n\}, Con-FN$ 'de, $A \in Con-FN$ 'ye seviye yakınsayan bir dizi olsun.

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} H(A^0, A_n^0) = 0$ (Kaleva, 1985).

Lemma 3.1.64: $A \in Con-FN$ ve $\alpha \in I$ sabit olsun. O halde $g(\beta) = H(A_\beta, A_\alpha)$, α 'da süreklidir (Kaleva, 1985).

Sonuç 3.1.65: $g(\beta) = H(A_\beta, A_\alpha)$ süreklidir (Kaleva, 1985).

Lemma 3.1.66: $\{\alpha_n\}$ reel sayı dizisi $\alpha \in I$ 'ya yakınsasın o halde Lemma 2.1.4 'ün kabulleri altında $\lim_{n \rightarrow \infty} H(A_\alpha, A_{\alpha_n}) = 0$ 'dır (Kaleva, 1985).

Teorem 3.1.67: $\{A_n\} \subseteq \text{Con-FN}$ dizisi $A \in \text{Con-FN}$ 'ye seviye yakınsak olsun. O halde $\{A_n\}$, $(\text{Con-FN}, D_{\text{sup}})$ uzayında A 'ya yakınsar (Kaleva, 1985).

Teorem 3.1.68: $\text{Con-FN}^* = \{A \in \text{Con-FN} : A_1 \text{ tek bir eleman içerir}\}$ ve $\{A_n\}$, Con-FN^* 'de bir dizi olmak üzere eğer $\{A_n\}$, $(\text{Con-FN}^*, D_{\text{sup}})$ uzayında $A \in \text{Con-FN}^*$ noktasına yakınsak ise $\{A_n\}$ dizisi A 'ya seviye yakınsaktır (Kaleva, 1985).

Teorem 3.1.69: Con-FN^* uzayında seviye yakınsaklık , D_{sup} -yakınsaklık ve H_{send} -yakınsaklık bir birine denktir (Kaleva, 1985).

Sendograf metriğin topolojik özellikleri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Fan (2004), sendograf metriği ile beraber fuzzy sayılar uzayında kompaktlığı incelemiştir. Fan ve Wang (2010), endograf metriği kullanarak fuzzy sayıların supremum ve infimumunu hesaplamışlardır. Greco (2006) sendograf metrik ile göreceli kompaktlığı karakterize etmiştir. Yang ve Zhang (2009) endograf metriğin topolojik bazı özelliklerini incelemiştir. Congxin ve ark. (2009) fuzzy sayılar üzerinde tanımlanan sendograf metriğin özelliklerinin incelemiş ve bu uzayda iç içe aralıklar teoremi ve monoton yakınsaklık teoremlerini ispatlamışlardır. Fan ve Fan (2009), sendograf metrik ile beraber FN uzayının ayrılabilir fakat tam olmadığını belirtmiştir. Ayrıca endograf metrikler kompakt olmayan fuzzy sayılar uzayında endograf metrik ile beraber ayrılabilir ve tam olduğunu ispatlamıştır. Trutsching (2010), sendograf metriğin yakınsaklığının bazı özel uzaylar için karakterizasyonlarını tanımlamıştır. Li ve Fan (2010) sendograf metrik ile beraber tanımlanan FN uzayının, normlu bir lineer uzay oluşturmadığını göstermişlerdir.

Fuzzy sayılar uzayında uzaklıkların hesaplanması başta mühendislik ve tıp alanında olmak üzere fuzzy küme ve fuzzy mantığın uygulandığı tüm alanlarda büyük bir öneme sahiptir. Uygulamalarda genellikle fuzzifikasyonu yapılmak istenen kural tabanları, uygulanmak istenen işlemler (karşıtlık ayarı, gürültü kaldırma vb.) veya nesnelerin (resim, video, ses, vb) bir fuzzy sayı ile ifade edilmesi yaygın bir yöntemdir. Bu nedenle fuzzy sayılar arasındaki uzaklık hesaplamalarına dair olan çalışmalar genellikle bu uygulamaları da kapsayan çalışmalardır. Fuzzy sayılar uzayında sendograf ve endograf metrikten farklı metrik yaklaşımları aşağıda verilecektir. Öncelikle Diamond ve Kloeden (1999) tarafından tanımlanan aşağıdaki metriklerin tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.70: $A, B \in FN$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$d_{DK-p}(A, B) = \left(\int_0^1 H(A_\alpha, B_\alpha)^p d\alpha \right)^{1/p} \text{ ile tanımlanan } d_{DK-p} : FN \times FN \rightarrow [0, \infty)$$

dönüşümü bir metrik tanımlar (Diamond ve Kloeden, 1999).

Tanım 3.1.71: $A, B \in FN$ ve $1 \leq p < \infty$ ve

$$\delta_p(A_\alpha, B_\alpha) = \left(\int_0^1 |\chi_{A_\alpha}(x) - \chi_{B_\alpha}(x)| \mu(x) d\alpha \right)^{1/p} \text{ olmak üzere}$$

$$\rho_{DK-p}(A, B) = \left(\int_0^1 \delta_p(A_\alpha, B_\alpha)^p d\alpha \right)^{1/p} \text{ ile tanımlanan } \rho_{DK-p} : FN \times FN \rightarrow [0, \infty)$$

dönüşümü bir metrik tanımlar (Diamond ve Kloeden, 1999).

Sonuç 3.1.72: d_{DK-p} ve ρ_{DK-p} metrikleri FN üzerinde aynı topolojiyi tanımlar (Diamond ve Kloeden, 1999).

Voxman (1998), fuzzy sayılar uzayı için hem crisp değerli hem de fuzzy değerli metrikler tanımlamıştır. Bu tanımlara geçmeden önce Voxman'ın makalesinde kullandığı bazı tanım ve notasyonları belirtilecektir.

Bilindiği üzere bir A fuzzy sayısı $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fuzzy kümedir.

1. A , fuzzy konveks
2. A , normal fuzzy küme
3. A , üst yarı sürekli
4. $\text{supp}(A) = \{x; \mu_A(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı kompaktır.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı tüm fuzzy sayılarının kümesini FN ile gösterilsin. $A \in FN$ ve $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}; \mu_A(x) \geq \alpha\}$ ile tanımlı α -seviye kümesi olmak üzere A 'nın α -seviye gösterimi

$$L(\alpha) = \begin{cases} \inf \{x : x \in A_\alpha\} & , \alpha > 0 \\ \inf \{x : x \in \text{supp}(A)\} & , \alpha = 0 \end{cases}$$

ve

$$R(\alpha) = \begin{cases} \sup \{x : x \in A_\alpha\} & , \alpha > 0 \\ \sup \{x : x \in \text{supp}(A)\} & , \alpha = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $(L(\alpha), R(\alpha))$ ile gösterilen fonksiyon çiftidir. $\bar{A}$, A 'nın üyelik fonksiyonu $\mu_{\bar{A}} = 1 - \mu_A$ ile tanımlanan tümleyeni olmak üzere $\bar{A}$ fuzzy kümesinin α -seviye gösterimi

$$\bar{L}(\alpha) = \begin{cases} \inf \{x : \mu_{\bar{A}}(x) \leq \alpha\} & , 0 \leq \alpha < 1 \\ \inf \{x : x \in \text{supp}(A)\} & , \alpha = 1 \end{cases}$$

ve

$$\bar{R}(\alpha) = \begin{cases} \sup \{x : \mu_{\bar{A}}(x) \leq \alpha\} & , 0 \leq \alpha < 1 \\ \sup \{x : x \in \text{supp}(A)\} & , \alpha = 1 \end{cases}$$

olmak üzere $(\bar{L}(\alpha), \bar{R}(\alpha))$ ile gösterilen fonksiyon çiftidir (Voxman, 1998).

Tanım 3.1.73: $s : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tanımlanan s fonksiyonu eğer artan ve $s(0) = 0$

ve $s(1) = 1$ ise indirgen fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer $\int_0^1 s(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$ ise s

fonksiyonuna düzgün indirgen fonksiyon denir (Voxman, 1998).

Tanım 3.1.74: α – seviye gösterimi $(L(\alpha), R(\alpha))$ olan bir A fuzzy sayısı ve s indirgen fonksiyonu için

$$Val(A) = \int_0^1 s(\alpha) [L(\alpha) + R(\alpha)] d\alpha$$

ile tanımlanan $Val(A)$ sayısına A 'nın değeri denir. Bu kısımda $Val(A) \leq Val(B)$ olması durumunu kısaca $A \leq B$ ile göstereceğiz (Voxman, 1998).

Tanım 3.1.75: Her $A, B \in FN$ için $\rho_{vox}(A, B) = |Val(A) - Val(B)|$ ile tanımlı $\rho_{vox} : FN \times FN \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü FN üzerinde bir pseudo-metrik tanımlar. $\rho_{vox}(A, A) = 0$, $\rho_{vox}(A, B) = \rho_{vox}(B, A)$, $\rho_{vox}(A, C) = \rho_{vox}(A, B) + \rho_{vox}(B, C)$ şartlarının sağlandığı ve $A \neq B$ olmasına rağmen $\rho_{vox}(A, B) = 0$ olan fuzzy sayıların varlığı aşikârdır. Ayrıca s düzenli indirgen fonksiyon ve üyelik fonksiyonları sabit a , b reel sayıları için sırasıyla $\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$ ve $\mu_B(x) = \begin{cases} 1, & x = b \\ 0, & x \neq b \end{cases}$ olarak tanımlanan A ve B fuzzy kümeleri için $\rho_{vox}(A, B) = |a - b|$ yani alışılmış Euclid uzaklığı olduğu aşikârdır. (FN, ρ_{vox}) pseudo-metrik uzayında, her $A \in FN$ için $g(A) = Val(A)$ ile tanımlanan $g : FN \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğu aşikârdır. Böylece g fonksiyonunun fuzzy sayılar için anlamlı reel sayılar atadığı anlaşılır. Dahası g fonksiyonunu kullanarak oluşturacağımız $A \cong B \Leftrightarrow g(A) = g(B)$ ile tanımlı $\cong$ denklik bağıntısı ile birlikte oluşturulan denklik sınıfları $FN/\cong$ üzerinde tanımlanan $g^* : FN/\cong \rightarrow \mathbb{R}$ bölüm fonksiyonu $FN/\cong$ üzerinde bir metrik üretir (Voxman, 1998).

Voxman, fuzzy sayıların Delgado ve ark. (1998) tarafından tanımlanan diğer karakterizasyonları ile fuzzy sayılar arasındaki uzaklığı daha iyi bir şekilde belirlemek için kullanılabileceğini belirtmiştir. Şimdi belirsizlik (ambiguity) ve bulanıklık (fuzziness) olarak isimlendirilen bu karakterizasyonların tanımlarını verelim.

Tanım 3.1.76: s bir indirgen fonksiyon ve $A \in FN$ için $(L(\alpha), R(\alpha))$ A fuzzy sayısının α -seviye gösterimi olmak üzere A 'nın belirsizliği (ambiguity) $Amb(A) = \int_0^1 s(\alpha)[R(\alpha) - L(\alpha)]d\alpha$ ile tanımlı reel sayıdır (Voxman, 1998).

Tanım 3.1.77: s bir indirgen fonksiyon ve $A \in FN$ için $(L(\alpha), R(\alpha))$ A fuzzy sayısının α -seviye gösterimi ve $\text{supp}(A) = [p, q]$ olmak üzere A 'nın bulanıklığı (fuzziness)

$$Fuz(A) = \int_0^1 s(\alpha)[q - p]d\alpha - \left[\int_{1/2}^1 s(\alpha)[\bar{L}(\alpha) - p]d\alpha + \int_{1/2}^1 s(\alpha)[R(\alpha) - L(\alpha)]d\alpha \right. \\ \left. + \int_{1/2}^1 s(\alpha)[q - \bar{R}(\alpha)]d\alpha + \int_0^{1/2} s(\alpha)[L(\alpha) - p]d\alpha + \int_0^{1/2} s(\alpha)[\bar{R}(\alpha) - \bar{L}(\alpha)]d\alpha \right. \\ \left. + \int_0^{1/2} s(\alpha)[q - R(\alpha)]d\alpha \right]$$

ile tanımlı reel sayıdır. Esasında bir A fuzzy sayısının bulanıklığı A fuzzy sayısının tümleyeni olan $\bar{A}$ 'dan olan farkının ölçüsüdür (Voxman, 1998).

$Val(A), Amb(A), Fuz(A)$ parametrelerini kullanarak FN üzerinde

$$\phi_{\text{vox}}(A, B) = \sqrt{(Val(A) - Val(B))^2 + (Amb(A) - Amb(B))^2 + (Fuz(A) - Fuz(B))^2}$$

şeklinde tanımlanan ϕ_{vox} bir pseudo-metrik belirtir (Voxman, 1998).

$h(A) = (Val(A), Amb(A), Fuz(A))$ ile tanımlı $h: FN \rightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü (FN, ϕ_{vox}) pseudo-metrik uzayında süreklidir. Diğer taraftan h ile $A \dot{\equiv} B \Leftrightarrow h(A) = h(B)$ şeklinde tanımlayacağımız denklik bağıntısının oluşturduğu $FN/\dot{\equiv}$ denklik sınıfları ile fuzzy kümeler göreceli olarak daha küçük bir özel denklik sınıfı içinde yer bulur. Bu sayede h tarafından oluşturulan denklik sınıflarına uyan $\mathbb{R}^3$ 'teki noktalar fuzzy sayıların Euclidean gösterimi için güzel bir yol verir (Voxman, 1998).

Çalışmasının devamında Voxman, (FN, ϕ_{vox}) uzayının bazı topolojik özelliklerini vermiştir.

Teorem 3.1.78: (FN, ϕ_{vox}) uzayı yol bağlantılıdır (Voxman, 1998).

Teorem 3.1.79: C , $\mathbb{R}$ 'nin kompakt bir altkümesi olmak üzere $E = \{A \in FN : \text{supp}(A) \subseteq C\}$ kümesi de kompakttır (Voxman, 1998).

Teorem 3.1.80: (FN, ϕ_{vox}) uzayı ayrılabilir (Voxman, 1998).

Aynı çalışmanın devamında Voxman, fuzzy sayılar kümesi için Hausdorff metrik kullanılarak tanımlanan bir metrik uzay ailesi tanımlamıştır.

Tanım 3.1.81: Her $A, B \in FN$ ve s bir indirgen fonksiyon olmak üzere $D_{\text{vox}(s)}(A, B) = \sup_{\alpha \in (0,1]} \{s(\alpha)H(A_\alpha, B_\alpha)\}$ ile tanımlanan $D_{\text{vox}(s)} : FN \times FN \rightarrow [0, \infty)$

dönüşümü FN uzayı için bir metrik belirtir (Voxman, 1998).

Voxman (1998) sıklıkla belirttiği ve diğer araştırmacılar tarafından kullanılacak olan “ne olduğundan tam olarak emin olmadığımız sayılar arasındaki uzaklığı nasıl kesin olarak ölçebiliriz?” sorusuna cevap olarak fuzzy sayılar arasında fuzzy bir uzaklık tanımlamıştır.

Tanım 3.1.82: $A, B \in FN$ olmak üzere $\Delta_{\text{vox}}(A, B)(z) = \sup_{|x-y|=z} \{\min \mu_A(x), \eta_A(x)\}$ ile tanımlanan $\Delta_{\text{vox}} : FN \times FN \rightarrow FN$ dönüşümüne fuzzy uzaklık fonksiyonu denir.

$\Delta_{\text{vox}}(A, B)$ fuzzy sayısının α -seviye gösterimini $(L(\alpha), R(\alpha))$ ve sırasıyla A, B fuzzy sayılarının α -seviye gösterimlerini de $(A(\alpha), B(\alpha))$ ve $(C(\alpha), D(\alpha))$ ile gösterelim. Bu notasyonlar ile birlikte

$$L(\alpha) = \begin{cases} \max\{C(\alpha) - B(\alpha), 0\}, & \frac{1}{2}(A(1) + B(1)) \leq \frac{1}{2}(C(1) + D(1)) \\ \max\{A(\alpha) - D(\alpha), 0\}, & \frac{1}{2}(C(1) + D(1)) \leq \frac{1}{2}(A(1) + B(1)) \end{cases}$$

ve

$$R(\alpha) = \max\{B(\alpha) - A(\alpha), D(\alpha) - A(\alpha)\}$$

eşitliklerinin sağlandığı açıktır. $A \leq B \Leftrightarrow Val(A) \leq Val(B)$ sıralamasını kullanarak $A, B, C \in FN$ için $\Delta_{vox}(A, B) \leq \Delta_{vox}(A, C) + \Delta_{vox}(C, B)$ üçgen eşitsizliğinin sağlandığı açıktır (Voxman, 1998).

Görüldüğü üzere fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan metrikler nitelik ve nicelik bakımından zengin bir araştırma yelpazesi sunmaktadır. Bu metriklerin topolojik özelliklerinin incelenmesi ve diğer fuzzy metrik uzaylar ile aralarındaki ilişkilerin belirlenmesi güncel bir araştırma konusudur. Şimdi fuzzy uzaklık kavramına farklı bir bakış açısı getiren fuzzy uzaklık ölçüsü ve akabinde fuzzy benzerlik ölçüsü kavramlarını tanıtacağız.

3.2. Fuzzy Uzaklık ve Benzerlik Ölçüleri

İki nesne veya durum arasındaki benzerliği (ya da benzememeyi, aykırılığı) saptamak mühendislik, tıp gibi disiplinler için olduğu kadar sosyal bilimlerde de temel bir araştırma konusudur. Bu nedenle bu konu hakkındaki bugünkü manadaki çalışmaların kökenleri geçmiş yüzyılın başlarına kadar uzanmaktadır. Genellikle durumlar ve nesneler arasındaki uzaklık hesabına dayanan bu ölçümler fuzzy küme teorisinde de kendine geniş bir çalışma alanı bulmuştur. Birçok farklı teorik ve uygulamalı yaklaşım günden güne konunun popülaritesini arttırmaktadır. Bu bölümün önceki kısmında da genişçe incelediğimiz üzere iki fuzzy küme arasındaki uzaklık ölçüleri bu fuzzy kümelerin ifade ettiği durumlar veya nesneler arasındaki uzaklığın bir ölçüsüdür. Uzaklık kavramı ile dual kavramlar olan benzerlik ölçüsü bu durumlar veya nesneler arasındaki benzerlik hakkında bir fikir sahibi olmamızı sağlar. Konunun geniş uygulama alanı araştırmacıları genel bir benzerlik ve uzaklık ölçüsü tanımlamak için heveslendirmiştir. Nitekim 2007 yılında Zadeh ‘in belirttiği gibi “genel geçer bir benzerlik tanımı yapmak” hala ilgi çekici bir alandır. Uzaklık ve benzerlik ölçülerini birçok araştırmacı farklı yaklaşımlar ile incelemişlerdir. Bu yaklaşımları genel manada üç grup altında toplanabilir. Bunlar;

1. Küme Kuramlı Benzerlik Ölçüleri
2. Fuzzy İmplikatör Tabanlı Benzerlik Ölçüleri
3. Uzaklık Tabanlı Benzerlik Ölçüleri

olarak sıralanabilir. Şimdi ilk iki tip ölçüden kısaca ve tezimizin esas konularından olan üçüncü tip ölçülerden de uzunca bahsedilecektir.

I. Küme Kuramlı Benzerlik Ölçüleri

1950 yılında yayınlanan makalesinde Attneave, eğimi ve alanı değişebilen dikdörtgenler grubunda benzerlik algısını araştırmıştır. Sonuçlar Euclidean model uzaklıklar ile tutarsızlıklar arz etse de $d(A, B) = |A_1 - B_1| + |A_2 - B_2|$ ile tanımlı uzaklık ölçüsü ile parçalı uyumluluk gösterir. Burada uzayın iki boyutu alanı ve eğim açısını belirtir. Pek çok başka örnek uzaklık aksiyomlarının, benzerlik ölçülerinin özelliklerini sağlayacak gereksiz katılıkta sistemi sonuç verecek şekilde düzenlenmiştir. Bilhassa, üçgen eşitsizliği gibi uzaklık ölçülerinin özelliklerini deneysel olarak karar verilen benzerlik ölçülerine dayatmaya çalışmak epistemolojik olarak gereksizdir. Bu durum uzaklık tabanlı olmayan benzerlik ölçülerini tanımlama ihtiyacı doğurmuştur (Beg ve Ashraf, 2009). Şimdi bu tip ölçülere birkaç örnek verilecektir.

1. Herhangi A, B kümeleri için ve $\alpha, \beta, \theta > 0$ için

$$S(A, B) = \theta f(A \cap B) - \alpha f(A - B) - \beta f(B - A)$$

olarak tanımlanan ifade bir benzerlik ölçüsüdür. Burada f genellikle kardinaliteyi temsil eder (Tversky, 1977).

2. Herhangi A, B kümeleri için ve $\alpha, \beta, \theta > 0$ için

$$S(A, B) = f(A \cap B) + f(A - B) + f(B - A)$$

olarak tanımlanan ifade bir benzerlik ölçüsüdür. Bu tanıma göre $S(A, B)$ değeri $[0, 1]$ aralığındadır (Tversky, 1977).

3. $A, B \in FS^X$ için üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A \square B}(x) = \max \left\{ \min \{ \mu_A(x), 1 - \mu_B(x) \}, \min \{ \mu_B(x), 1 - \mu_A(x) \} \right\}$$

ile tanımlı $A \square B = \{ (x, \mu_{A \square B}(x)); x \in X \}$ ve $|A \square B| = \sum_{x \in X} \mu_{A \square B}(x)$ olmak üzere fuzzy

Restle modeli benzerlik ölçüsü $S(A, B) = 1 - |A \square B|$ ile tanımlıdır (Zwick ve ark., 1987).

4. Fuzzy Gregson modeli benzerlik ölçüsü $S(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$ ile tanımlıdır

(Zwick ve ark., 1987).

5. Fuzzy Enta modeli benzerlik ölçüsü $S(A, B) = \sup_{x \in X} \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_B(x) \} \}$ ile tanımlıdır (Zwick ve ark., 1987).

6. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in FS^X$ olmak üzere $S(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{A \cup B}(x_i) \mu_{A \cap B}(x_i)}{\sum_{i=1}^n (\mu_{A \cup B}(x_i))^2}$

(Tong ve ark., 2005).

7. $X = [a, b]$ ve $A, B \in FS^X$ olmak üzere $S(A, B) = \frac{\int_a^b \mu_{A \cup B}(x) \mu_{A \cap B}(x) dx}{\int_a^b \mu_{A \cup B}(x) dx}$ (Tong

ve ark., 2005).

8. Chen tipi benzerlik ölçüsü $S(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \mu_B(x_i)}{\max \left\{ \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i))^2, \sum_{i=1}^n (\mu_B(x_i))^2 \right\}}$

ile tanımlanır (Chen, 1992).

II. Fuzzy İmplikatör Tabanlı Benzerlik Ölçüleri

Fuzzy mantıksal operatör tabanlı benzerlik ölçüleri fuzzy kümeler arasındaki benzerliğin hesaplanmasında güçlü bir araçtır. Bu ölçümlerde farklı implikasyon (çıkarım) operatörleri kullanılmasıyla otürü uzaklık tabanlı benzerlik ölçüleri ve küme kuramsal ölçüleri kadar geniş kapsamlıdır (Beg ve Ashraf, 2009).

Tanım 3.2.1: Bir fuzzy I implikatör $I(0,1) = I(0,0) = I(1,1) = 1$ ve $I(1,0) = 0$ şartının sağlayan $[0,1]$ üzerinde bir ikili işlemdir. Bazı meşhur implikatörler $x, y \in [0,1]$ olmak üzere

1. Lukasiewicz implikatörü $I_w(x, y) = \min \{1 - x + y, 1\}$

2. Kleene-Dienes implikatörü $I_M(x, y) = \max\{1 - x, y\}$

3. Reichenbach implikatörü $I_P(x, y) = 1 - x + xy$

olarak verilebilir. Bu tanımlama ile birlikte $A, B \in FS^X$ ve T bir t – norm olmak üzere fuzzy implikatör tabanlı bir benzerlik ölçüsü

$$S_{I,T}(A, B) = \inf_{x \in X} T(I(\mu_A(x), \mu_B(x)), I(\mu_B(x), \mu_A(x)))$$

ile tanımlıdır (Beg ve Ashraf, 2009).

III. Uzaklık Tabanlı Benzerlik Ölçüleri

Wang (1982) gibi benzerlik ölçülerini konu alan çalışmalar yapılmış olsa da Liu (1992) tarafından verilen fuzzy uzaklık, benzerlik ve entropi tanımlamaları sonrasında yapılan çalışmalar için temel oluşturmuştur. Bu bölümde önce fuzzy kümeler ve sayılar için verilen bu ölçüleri, sonraki bölümde ise intuitionistic fuzzy kümeler ve sayılar için verilen ölçüleri incelenecektir. Ayrıca ileriki bölümlerde tanımlanacak ve özellikleri genişçe incelenecektir temporal intuitionistic fuzzy küme kavramı içinde bu tanımlama genişletilecektir.

Fuzzy kümenin bulanıklığının bir ölçüsü olan entropi kavramı ise uzaklık ve benzerlik kavramları ile yakından alakalıdır. Entropi kavramı Liu ‘nun çalışması öncesinde De Luce ve Termini (1972), Kauffmann (1975), Loo (1977), Yager (1982) gibi araştırmacılar tarafından etraflıca incelenmiştir (Liu, 1992).

Aşağıda Liu tarafından verilen uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü ve entropi tanımlamalarını ve bunlar arasındaki ilişkileri verilecektir. Liu, bu tanımlamaları FS^X uzayının aşağıdaki şartları sağlayan FS^{X*} alt kümelerinde tanımlamıştır.

$$1. P(X) \subset FS^{X*},$$

$$2. \forall x \in X \text{ için } \mu_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \text{ olmak üzere } \frac{1}{2} \in FS^{X*},$$

$$3. \forall A, B \in FS^{X*} \text{ için } A \cup B \in FS^{X*}.$$

Bu şartlara bakıldığında FS^X kümesinin de FS^{X*} olarak seçilebileceği görülmektedir (Liu, 1992).

Tanım 3.2.2: Aşağıdaki şartları sağlayan $e_{Liu} : FS^{X*} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü FS^{X*} üzerinde bir fuzzy entropi olarak adlandırılır.

$$E1. \quad \forall D \in P(X) \text{ için } e_{Liu}(D) = 0$$

$$E2. \quad e_{Liu}\left(\frac{1}{2}\right) = \max_{A \in FS^{X*}} e_{Liu}(A)$$

$$E3. \quad A, B \in FS^{X*} \text{ için } \mu_A(x) \geq \frac{1}{2} \text{ ise } \mu_B(x) \geq \mu_A(x) \text{ veya } \mu_A(x) \leq \frac{1}{2} \text{ ise}$$

$$\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \text{ şartlarından biri sağlanıyorsa } e_{Liu}(A) \geq e_{Liu}(B)$$

$$E4. \quad \text{Her } A \in FS^{X*} \text{ için } e_{Liu}(A) = e_{Liu}(\bar{A})$$

(Liu, 1992).

Örnek 3.2.3: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A \in FS^X$ olmak üzere $A_{yakın}, A_{uzak} \in P(X)$ kümesinin üyelik fonksiyonu

$$\mu_{A_{yakın}}(x) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) > \frac{1}{2} \\ 0, & \mu_A(x) \leq \frac{1}{2} \end{cases}, \quad \mu_{A_{uzak}}(x) = \begin{cases} 1, & \mu_A(x) \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \mu_A(x) > \frac{1}{2} \end{cases}$$

ile tanımlansın. O halde $\omega \geq 1$ için $e_{Kaff}(A) = \left(\sum_{i=1}^n \left| \mu_A(x_i) - \mu_{A_{yakın}}(x_i) \right|^\omega \right)^{\frac{1}{\omega}}$ ile tanımlanan e_{Kaff} dönüşümü bir entropidir (Kauffmann, 1975).

Örnek 3.2.4: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere her $A \in FS^X$ ve $p \in \{1, 2, \dots\}$ için

$d_p(A, \bar{A}) = \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{\bar{A}}(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlanan d_p uzaklığı ile birlikte

$e_{Yager}(A) = 1 - \frac{d_p(A, \bar{A})}{n^{\frac{1}{p}}}$ dönüşümü bir entropidir (Yager, 1982).

Örnek 3.2.5: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere her $A \in FS^X$ ve $c_i \in \mathbb{R}^+$ için

$$f_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

- i. $f_i(0) = f_i(1) = 0$,
- ii. Her $a \in [0, 1]$ için $f_i(a) = f_i(1-a)$,
- iii. $f_i, \left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında monoton artan,

şartlarını sağlayan fonksiyon ve $F : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $F(0) = 0$ olan pozitif tanımlı artan fonksiyon olmak üzere $e_{Loo}(A) = F\left(\sum_{i=1}^n c_i f_i(\mu_A(x_i))\right)$ ile tanımlanan e_{Loo} dönüşümü bir entropidir (Loo, 1977).

Tanım 3.2.6: $d_{Liu} : FS^{X*} \times FS^{X*} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa uzaklık ölçüsü adını alır.

$$D1. \text{ Her } A, B \in FS^{X*} \text{ için } d_{Liu}(A, B) = d_{Liu}(B, A),$$

$$D2. \text{ Her } A \in FS^{X*} \text{ için } d_{Liu}(A, A) = 0,$$

$$D3. \text{ Her } A \in P(X) \text{ için } d_{Liu}(A, \bar{A}) = \max_{B, C \in FS^{X*}} d_{Liu}(B, C)$$

$$D4. \text{ Her } A, B, C \in FS^{X*} \text{ için eğer } A \subset B \subset C \text{ ise } d_{Liu}(A, B) \leq d_{Liu}(A, C) \text{ ve}$$

$$d_{Liu}(B, C) \leq d_{Liu}(A, C).$$

D4 şartının;

$$D4^*: \quad \text{Her } A, B, C, D \in FS^{X^*} \text{ için eğer } A \subset B \subset C \subset D \text{ ise} \\ d_{Liu}(B, C) \leq d_{Liu}(A, D)$$

ifadesine denk olduğu aşikârdır (Liu, 1992).

Tanım 3.2.7: $s_{Liu} : FS^{X^*} \times FS^{X^*} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa benzerlik ölçüsü adını alır.

$$S1. \quad \text{Her } A, B \in FS^{X^*} \text{ için } s_{Liu}(A, B) = s_{Liu}(B, A),$$

$$S2. \quad \text{Her } D \in P(X) \text{ için } s_{Liu}(D, \bar{D}) = 0,$$

$$S3. \quad \text{Her } A \in FS^{X^*} \text{ için } s_{Liu}(A, A) = \max_{B, C \in FS^{X^*}} s_{Liu}(B, C)$$

$$S4. \quad \text{Her } A, B, C \in FS^{X^*} \text{ için eğer } A \subset B \subset C \text{ ise } s_{Liu}(A, B) \geq s_{Liu}(A, C) \text{ ve} \\ s_{Liu}(B, C) \geq s_{Liu}(A, C).$$

S4 şartının

$$S4' : \text{Her } A, B, C, D \in FS^{X^*} \text{ için eğer } A \subset B \subset C \subset D \text{ ise } s_{Liu}(B, C) \geq s_{Liu}(A, D)$$

ifadesine denk olduğu aşikârdır (Liu, 1992).

Tanım 3.2.8: FS^{X^*} üzerindeki bir e_{Liu} entropisi için $e_{Liu}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ şartı sağlanıyorsa e_{Liu}

entropisine normal entropi denir. FS^{X^*} üzerindeki bir d_{Liu} uzaklık ölçüsü için

$$\max_{A, B \in FS^{X^*}} d_{Liu}(A, B) = 1 \text{ ise şartı sağlanıyorsa } d_{Liu} \text{ uzaklık ölçüsüne normal uzaklık ölçüsü}$$

denir. Benzer şekilde FS^{X^*} üzerindeki bir s_{Liu} benzerlik ölçüsü için

$$\max_{A, B \in FS^{X^*}} s_{Liu}(A, B) = 1 \text{ ise şartı sağlanıyorsa } s_{Liu} \text{ benzerlik ölçüsüne normal benzerlik}$$

ölçüsü denir (Liu, 1992).

Önerme 3.2.9: FS^{X*} üzerindeki her e_{Liu} entropisinden (d_{Liu} uzaklık ölçüsünden, s_{Liu} benzerlik ölçüsünden) normal bir entropi (uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü) elde edilebilir (Liu, 1992).

Liu (1992) entropi, uzaklık ölçüsü ve benzerlik ölçüsü arasındaki bazı bağıntıları aşağıdaki şekilde vermiştir.

Önerme 3.2.10: Tüm benzerlik ve uzaklık ölçüleri arasında bire bir eşleme vardır. d bir uzaklık ölçüsü olmak üzere d uzaklık ölçüsünün eş benzerlik ölçüsü olan s ile birlikte $d + s = 1$ eşitliğini sağlar (Liu, 1992).

Önerme 3.2.11: s , FS^{X*} üzerinde bir benzerlik ölçüsü olmak üzere her $A \in FS^{X*}$ için $e(A) = s(A, \bar{A})$ ile tanımlanan dönüşüm FS^{X*} üzerinde bir entropidir (Liu, 1992).

Önerme 3.2.12: d , FS^{X*} üzerinde bir uzaklık ölçüsü olmak üzere her $A \in FS^{X*}$ için $e(A) = 1 - d(A, \bar{A})$ ile tanımlanan dönüşüm FS^{X*} üzerinde bir entropidir (Liu, 1992).

Son iki önermede tanımlanan entropilere sırasıyla benzerlik ölçüsünden üretilen ve uzaklık ölçüsünden üretilen entropiler denir. Sırasıyla $e\langle s \rangle$, $e'\langle s \rangle$ ile gösterilir.

Liu'nun (1992) çalışmasından sonra yapılan çalışmalarda özellikleri sık sık incelenen σ – entropi, alt σ – entropi, σ – uzaklık ölçüsü, alt σ – uzaklık ölçüsü, σ – benzerlik ölçüsü ve alt σ – benzerlik ölçüsü tanımlarını vereceğiz ve bunlar arasındaki ilişkilerden bahsedilecektir. Liu bu tanımları verirken ki motivasyonu çalışmasında şöyle açıklamıştır. Bilindiği üzere entropi bir A fuzzy kümesinin entropisi bu fuzzy kümenin bulanıklığının (fuzziness) bir ölçüsüdür. Eğer A fuzzy kümesinin tanımlandığı X kümesini $D, \bar{D} \in P(X)$ olacak şekilde D ve $\bar{D}$ ayrık parçalarına ayırırsak $A \cap D$ fuzzy kümesinin (ki burada kasıt $A \cap \chi_D$ fuzzy kümesidir, fakat notasyonun daha kolay anlaşılabilmesi için $A \cap D$ tercih edilecektir.) bulanıklığı D kümesi üzerindedir. Benzer şekilde $A \cap \bar{D}$ bulanıklığı $\bar{D}$ kümesi üzerindedir. O halde

A 'nın bulanıklığını bu iki bulanıklık değerinin toplamı olarak ifade etmek gayet doğal bir yöntemdir (Liu, 1992).

Tanım 3.2.13: e , FS^{X^*} üzerinde bir entropi olmak üzere herhangi bir $A \in FS^{X^*}$ için her $D \in P(X)$ için $e(A) = e(A \cap D) + e(A \cap \bar{D})$ eşitliği sağlanıyorsa e entropisi σ – entropi olarak isimlendirilir (Liu, 1992).

Örnek 3.2.14: Örnek 3.2.3 deki entropi için $\omega = 1$ olduğunda, Örnek 3.2.4 deki entropi için $p = 1$ olduğunda ve Örnek 3.2.5 teki entropi için c herhangi bir sabit olmak üzere $F(x) = cx$ olduğunda birer σ – entropi tanımlanır (Liu, 1992).

Tanım 3.2.15: $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu eğer artan ve $F(0) = 0$ şartlarını sağlıyorsa bir F – fonksiyonu adını alır. Eğer e , FS^{X^*} üzerinde bir entropi ve F bir F – fonksiyonu ise $F\langle e \rangle$ 'nin bir FS^{X^*} üzerinde bir entropi olduğu açıktır. Eğer $\hat{e} = F\langle e \rangle$ olacak bir $\hat{e}$, σ – entropisi var ise e entropisine FS^{X^*} üzerinde bir alt σ – entropi denir (Liu, 1992).

Örnek 3.2.16: Örnek 3.2.3 de tanımlanan $e_{Kaff}(A) = \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{A_{near}}(x_i)| \right)^{\frac{1}{\omega}}$ entropisinin her $\omega \geq 1$ için $F(x) = x^{\frac{1}{\omega}}$ ile tanımlı F – fonksiyonu ve bu fonksiyona uygun olan ve her $A \in FS^{X^*}$ için $\hat{e}(A) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{\hat{A}}(x_i)|^{\omega}$ ile tanımlı σ – entropisi ile birlikte bir alt σ – entropi olduğu açıktır (Liu, 1992).

Örnek 3.2.17: Örnek 3.2.4 de tanımlanan $e_{Yager}(A) = 1 - \frac{D_p(A, \bar{A})}{n^{\frac{1}{p}}}$ entropisinin her $p = 1, 2, \dots$ için $F(x) = 1 - (1 - x)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı F – fonksiyonu ve bu fonksiyona uygun

olan ve her $A \in FS^{X^*}$ için $\hat{e}(A) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{\bar{A}}(x_i)|^p$ ile tanımlı σ – entropisi ile birlikte bir alt σ – entropi olduğu açıktır (Liu, 1992).

Önerme 3.2.18: FS^{X^*} üzerinde tanımlanan e entropisinin σ – entropi olması için gerek ve yeter şart her $A, B \in FS^{X^*}$ için $e(A \cup B) + e(A \cap B) = e(A) + e(B)$ eşitliğinin sağlanmasıdır (Liu, 1992).

Tanım 3.2.19: d , FS^{X^*} üzerinde bir uzaklık ölçüsü olmak üzere her $A, B \in FS^{X^*}$ ve her $D \in P(X)$ için $d(A, B) = d(A \cap D, B \cap D) + d(A \cap \bar{D}, B \cap \bar{D})$ eşitliği sağlanıyorsa d uzaklık ölçüsü σ – uzaklık ölçüsü olarak isimlendirilir (Liu, 1992).

Tanım 3.2.20: Eğer d , FS^{X^*} üzerinde bir uzaklık ölçüsü ve F bir F – fonksiyonu ise $F \langle d \rangle$ ’nin bir FS^{X^*} üzerinde bir uzaklık ölçüsü olduğu açıktır. Eğer $\hat{d} = F \langle d \rangle$ olacak bir $\hat{d}$, σ – uzaklık ölçüsü var ise d uzaklık ölçüsü FS^{X^*} üzerinde bir alt σ – uzaklık ölçüsü denir (Liu, 1992).

Örnek 3.2.21: Her $A, B \in FS^{X^*}$ ve $p = 1, 2, \dots$ için

$$d_p(A, B) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
 ile tanımlı uzaklık ölçüsü $F(x) = x^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı

F – fonksiyonu ve bu fonksiyona uygun olan ve her $A, B \in FS^{X^*}$ için

$$\hat{d}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p$$
 ile tanımlı σ – uzaklık ölçüsü ile birlikte bir alt σ –

uzaklık ölçüsü olduğu açıktır (Liu, 1992).

Tanım 3.2.22: s , FS^{X^*} üzerinde bir uzaklık ölçüsü olmak üzere her $A, B \in FS^{X^*}$ ve her $D \in P(X)$ için $s(A, B) = s(A \cap D, B \cup \bar{D}) + s(A \cap \bar{D}, B \cup D)$ eşitliği sağlanıyorsa s benzerlik ölçüsü σ – benzerlik ölçüsü olarak isimlendirilir (Liu, 1992).

Önerme 3.2.23: s , FS^{X^*} üzerinde bir uzaklık ölçüsünün σ – benzerlik ölçüsü olması için gerek ve yeter şart her $A, B \in FS^{X^*}$ ve her $D \in P(X)$ için $s(A, B) = s(A \cap D, B \cup \bar{D}) + s(A \cup D, B \cap \bar{D})$ olmasıdır (Liu, 1992).

Tanım 3.2.24: Eğer s , FS^{X^*} üzerinde bir benzerlik ölçüsü ve F bir F – fonksiyonu ise $F\langle d \rangle$ ’nin bir FS^{X^*} üzerinde bir benzerlik ölçüsü olduğu açıktır. Eğer $\hat{s} = F\langle s \rangle$ olacak bir $\hat{s}$, σ – benzerlik ölçüsü var ise s benzerlik ölçüsüne FS^{X^*} üzerinde bir alt σ – benzerlik ölçüsü denir (Liu, 1992).

Bu tanımlar arasındaki bağıntılar aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.2.25: Eğer s , FS^{X^*} üzerinde bir σ – benzerlik ölçüsü ise $d\langle s \rangle$ ’te FS^{X^*} üzerinde bir σ – uzaklık ölçüsüdür (Liu, 1992).

Teorem 3.2.26: Eğer d , FS^{X^*} üzerinde bir σ – uzaklık ölçüsü ise $s\langle d \rangle$ ’te FS^{X^*} üzerinde bir σ – benzerlik ölçüsüdür (Liu, 1992).

Teorem 3.2.27: Eğer s , FS^{X^*} üzerinde bir σ – benzerlik ölçüsü ise $e\langle s \rangle$ ’te FS^{X^*} üzerinde bir σ – entropidir (Liu, 1992).

Son üç teoremin alt σ – entropi, alt σ – uzaklık ölçüsü ve alt σ – uzaklık ölçüsü benzerlik ölçüsü arasında da sağlandığı aşikârdır (Liu, 1992).

Yukarıda tanımladığımız ölçüler dışında uygulamalarda sıklıkla kullanılan diğer entropilere, uzaklık ölçülerine ve benzerlik ölçülerine örnekler verelim.

Fuzzy Uzaklık Ölçüleri

Bölümün başında bahsedilen reel sayı değerli fuzzy metrik uzayları birer uzaklık ölçüsü sayılabileceği gibi aşağıda uygulamalarda sıklıkla kullanılan diğer uzaklık ölçüleri verilmiştir. Burada $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in FS^X$ olmak üzere:

1. Hamming Uzaklığı: $d_{Ham} (A, B) = \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$ (Szmidt, 2014).
2. Normalleştirilmiş Hamming Uzaklığı: $d_{n-Ham} (A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$ (Szmidt, 2014).
3. Eucliden Uzaklık: $d_{Euc} (A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2}$ (Szmidt, 2014).
4. Minkowski Uzaklık: $d_p (A, B) = \left(\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^p \right)^{\frac{1}{p}}$ ($p \geq 1$) (Szmidt, 2014).
5. Supremum Uzaklık: $d_{sup} (A, B) = \sup_{x \in X} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|$ (Szmidt, 2014).
6. $d_{supp} (A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + \left| |\text{supp}(A)| - |\text{supp}(B)| \right|$ (Lee ve ark., 2006).
7. $d_{PK} (A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)}$ (Pappis ve Karacapilidis, 1993).
8. $d_{FX} (A) =$

$$\sum_{i=1}^n \left(2 - (1 - \mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)) e^{\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)} - (1 - \mu_B(x_i) + \mu_A(x_i)) e^{\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)} \right)$$
(Fan ve Xie, 1999).
9. $D_{Bhan} (A, B) =$

$$\sum_{i=1}^n \left((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \ln \frac{1 + \mu_A(x_i)}{1 + \mu_B(x_i)} + (\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)) \ln \frac{2 - \mu_A(x_i)}{2 - \mu_B(x_i)} \right)$$
(Bhandari, 1993).
10. $D_{Wang} (A, B) =$

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i)\mu_B(x_i)) + (1-\mu_A(x_i))(1-\mu_B(x_i)))}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i)^2(1-\mu_A(x_i))^2) \sum_{i=1}^n (\mu_B(x_i)^2(1-\mu_B(x_i))^2)}}$$

(Wang, 1997).

$$11. \quad D_{Bhat}(A, B) = \left[1 - \int_x \sqrt{\frac{\mu_A(x)}{|A|} - \frac{\mu_B(x)}{|B|}} dx \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Dubois ve Prade, 1980}).$$

Uzaklık Tabanlı Benzerlik Ölçüleri:

$$1. \quad s(A, B) = \frac{1}{1 + d(A, B)} \quad (\text{Koczy, 2000}).$$

$$2. \quad s(A, B) = e^{-\alpha d(A, B)} \quad (\text{Williams ve Steele, 2002}).$$

$$3. \quad s(A, B) = 1 - d_r(A, B), \quad r = 1, 2, \infty \quad (\text{Santini, 1997}).$$

5. d bir uzaklık ölçüsü $A \in FS^X$ olmak üzere

$$s(A, A_{yakın}) = 4 - 2d(A \cap A_{yakın}, \tilde{0}) - 2d(A \cup A_{yakın}, \tilde{1})$$

ile tanımlı ölçü A fuzzy kümesi ile $A_{yakın}$ crisp kümesi arasında bir benzerlik ölçüsüdür (Lee ve ark., 2006).

6. d bir uzaklık ölçüsü $A \in FS^X$ olmak üzere

$$s(A, A_{yakın}) = 4 - 2d(A \cap \bar{A}_{yakın}, \tilde{0}) - 2d(A \cup \bar{A}_{yakın}, \tilde{1})$$

ile tanımlı ölçü A fuzzy kümesi ile $A_{yakın}$ crisp kümesi arasında bir benzerlik ölçüsüdür. 5. ve 6. Tanımlanan benzerlik ölçüleri entropiden üretilmiş benzerlik ölçüleridir (Lee ve ark., 2006).

Entropiler:

1. $e_{DT}(A) = -k \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) \log(\mu_A(x_i)) + ((1 - \mu_A(x_i)) \log(1 - \mu_A(x_i))))$ (De Luca ve Termini, 1972).

2. $e_{Yager}(A) = 1 - \frac{d_p(A, \bar{A})}{n^{\frac{1}{p}}}$ (Yager, 1979).

3. $e_{Kosko}(A) = \frac{d_p(A, A_{yakın})}{d_p(A, A_{uzak})}$ (Kosko, 1986).

4. $e_{PP}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mu_A(x_i) e^{(1-\mu_A(x_i))} + ((1 - \mu_A(x_i)) e^{\mu_A(x_i)}))$ (Pal ve Pal, 1992).

5. $e_{FMX-1}(A) = \frac{d(A \cup \bar{A}, \tilde{1})}{d(A \cap \bar{A}, \tilde{1})}$ (Fan ve ark, 2001).

6. $e_{FMX-2}(A) = \frac{d(A \cup \bar{A}, \tilde{0})}{d(A \cap \bar{A}, \tilde{0})}$ (Fan ve ark, 2001).

7. $e_{FMX-3}(A) = \frac{d(A \cup \bar{A}, \tilde{1})}{d(A \cup \bar{A}, \tilde{0})}$ (Fan ve ark, 2001).

8. $e_{FMX-3}(A) = \frac{d(A \cap \bar{A}, \tilde{1})}{d(A \cap \bar{A}, \tilde{0})}$ (Fan ve ark, 2001).

9. $S(t) = -t \ln(t) - (1-t) \ln(1-t)$ olmak üzere

$$e_{LL}(A) = \sum_{i=1}^n S\left(\frac{1}{2} \mu_A(x_i) + 1 - \sup_{x \neq x_i} \mu_A(x)\right)$$

(Li ve Liu, 2007).

10. $e_{HY-1}(A) = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - e^{(-\mu_{\bar{A}}(x_i))}) \chi_{[\mu_A(x_i) \geq \frac{1}{2}]}(x_i) + ((1 - e^{\mu_A(x_i)}) \chi_{[\mu_A(x_i) < \frac{1}{2}]}(x_i))}{n(1 - e^{-\frac{1}{2}})}$

(Hwang ve Yang, 2008).

11. X boştan farklı kümesi için

$$e_{HY-2}(A) = \frac{\int_{x \in X} \left[\left(1 - e^{(-\mu_A(x))}\right) \chi_{[\mu_A(x) \geq \frac{1}{2}]}(x) + \left(1 - e^{\mu_A(x)}\right) \chi_{[\mu_A(x) < \frac{1}{2}]}(x) \right] dx}{\left(1 - e^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

(Hwang ve Yang, 2008).

12. d bir σ – uzaklık ölçüsü olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için

$$e_1(A) = 2d\left((A \cap A_{uzak}), \tilde{0}\right) + 2d\left((A \cup A_{uzak}), \tilde{1}\right)$$

ile tanımlı ifade fuzzy entropidir (Lee ve ark., 2006).

13. d bir σ – uzaklık ölçüsü olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için

$$e_2(A) = 2d\left((A \cap A_{yakın}), \tilde{0}\right) + 2d\left((A \cup A_{yakın}), \tilde{1}\right) - 2$$

ile tanımlı ifade fuzzy entropidir (Lee ve ark., 2006).

Benzerlik ölçüleri ile ilgili bir diğer sınıflandırma aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 3.2.28: FS^X 'te tanımlı bir s benzerlik ölçüsüne eğer her $A, B \in FS^X$ için $s(A, B) = s(\bar{A}, \bar{B})$ şartını sağlıyorsa yakınlık (proximity) ölçüsü adını alır (Fan ve Xie, 1999).

Örnek 3.2.29: Pappis (1999) tarafından her $A, B \in FS^X$ için tanımlanan $s(A, B) = 1 - \sup_{x \in X} |\mu_A(x) - \mu_B(x)|$ ile tanımlanan benzerlik ölçüsü bir yakınlık ölçüsüdür (Fan ve Xie, 1999).

Örnek 3.2.30: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için

$$s(A, B) = 1 - \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan benzerlik ölçüsü bir yakınlık ölçüsüdür (Fan ve Xie, 1999).

Örnek 3.2.31: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için Bhandari ve Pal tarafından tanımlanan benzerlik ölçüsü

$$s(A, B) =$$

$$1 - \frac{1}{n^2 \ln 2} \sum_{i=1}^n \left((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \cdot \ln \frac{1 + \mu_A(x_i)}{1 + \mu_B(x_i)} + (\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)) \cdot \ln \frac{2 - \mu_A(x_i)}{2 - \mu_B(x_i)} \right)$$

bir yakınlık ölçüsüdür (Fan ve Xie, 1999).

Örnek 3.2.32: s , FS^X üzerinde bir benzerlik ölçüsü olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için

1. $s_1(A, B) = \min \{s(A, B), s(\bar{A}, \bar{B})\}$,
2. $s_2(A, B) = \frac{1}{2} \left(\min \{s(A, B) + s(\bar{A}, \bar{B})\} \right)$.

ile tanımlı benzerlik ölçüleri yakınlık ölçüleridir (Fan ve Xie, 1999).

Yakınlık ölçüsü tarafından sağlandığı halde genel olarak benzerlik ölçülerinin sağlamayan iki önemli özellik aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.2.33: s , FS^X üzerinde bir benzerlik ölçüsü ve $A, B \in FS^X$ için

1. $s(A, B) \geq \varepsilon$ ise her $C \in FS^X$ için $s(A \cup C, B \cup C) \geq \varepsilon$
2. $s(A, B) \geq \varepsilon$ ise her $C \in FS^X$ için $s(A \cap C, B \cap C) \geq \varepsilon$

Benzer özellik σ – benzerlik ölçüleri tarafından da sağlanır (Fan ve Xie, 1999).

Teorem 3.2.34: s , FS^X üzerinde bir σ – benzerlik ölçüsü ve $A, B \in FS^{X*}$ için bir olmak üzere

1. Eğer $A, B \in FS^X$ için $s(A, B) \geq \varepsilon$ ise her $C \in FS^{X*}$ için $s(A \cup C, B \cup C) \geq \varepsilon$
2. Eğer $A, B \in FS^{X*}$ için $s(A, B) \geq \varepsilon$ ise her $C \in FS^{X*}$ için $s(A \cap C, B \cap C) \geq \varepsilon$

(Fan ve Xie, 1999).

Fakat bu özellik her benzerlik ölçüsü tarafından sağlanmayabilir.

Örnek 3.2.35: X sonlu bir küme olmak üzere

$$s(A, B) = \begin{cases} 1 & A = B = \tilde{1} \\ \frac{\sum_{x \in X} \min \{ \mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x) \}}{\sum_{x \in X} \max \{ \mu_{\bar{A}}(x), \mu_{\bar{B}}(x) \}} & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı benzerlik ölçüsü $X = \{x_1, x_2\}$ olmak üzere $A = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.5)\}$, $B = \{(x_1, 0.8), (x_2, 0.4)\}$, $C = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.8)\}$ fuzzy kümeleri üzerinden hesaplanan $s(A, B) = 0.7$ ve $s(A \cup C, B \cup C) = 0.667$ benzerlik değerlerinden $s(A, B) > s(A \cup C, B \cup C)$ eşitsizliği elde edilir. Bu da son iki teoremden belirtilen özelliklerin s benzerlik ölçüsü tarafından sağlanmadığını ispatlar (Fan ve Xie, 1999).

Literatürde entropi, uzaklık ölçüsü ve benzerlik ölçüsü ile alakalı ve uygulamalarda sıklıkla kullanılan diğer bir ölçüde kapsama (inclusion) ölçüsüdür. Bu tanım ilk olarak Sinha ve Dougherty (1993) tarafından verilmiştir. Fakat literatürde en sık kullanılan kapsama ölçüsü tanımı bir önceki tanımın modifiye edilmiş hali olan ve Young (1996) tarafından altkümelik (subsethood) ölçüsü adı altında verilen tanımdır. Şimdi bu ölçüden kısaca bahsedilecek ve entropi ile olan ilişkileri verilecektir.

Tanım 3.2.36: $Inc : FS^X \times FS^X \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü eğer her $A, B \in FS^X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir kapsama ölçüsü adını alır.

$$I1. \quad Inc(\tilde{1}, \tilde{0}) = 0$$

$$I1*. \quad Inc(A, \bar{A}) = 0 \Leftrightarrow A \in P(X)$$

$$I2. \quad Inc(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$I3. \quad \text{Her } A, B, C \in FS^X \text{ için } A \subseteq B \subseteq C \text{ ise } Inc(C, A) \leq Inc(B, A),$$

$$Inc(C, A) \leq Inc(C, B) \text{ (Young, 1996).}$$

Örnek 3.2.37:

1- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere

$$Inc_1(A, B) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\}}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)} & A \neq \tilde{0} \\ 1 & A = \tilde{0} \end{cases}$$

ile tanımlı $Inc_1 : FS^X \times FS^X \rightarrow [0,1]$ dönüşümü kapsama ölçüsüdür (Zeng ve ark., 2006).

2- $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere $Inc_2(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min\{1, 1 - \mu_A(x_i) + \mu_A(x_i)\}$ ile tanımlı $Inc_2 : FS^X \times FS^X \rightarrow [0,1]$ dönüşümü kapsama ölçüsüdür (Zeng ve ark., 2006).

3- $X = [a, b]$ kapalı aralığı olmak üzere

$$Inc_3(A, B) = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |\mu_A(x) - \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)| dx \quad \text{tanımlı} \quad Inc_3 : FS^X \times FS^X \rightarrow [0,1]$$

dönüşümü kapsama ölçüsüdür (Zeng ve ark., 2006).

Teorem 3.2.38: Inc , FS^X üzerinde bir kapsama ölçüsü olmak üzere her $A \in FS^X$ için

$$e_{Inc}(A) = Inc\left(\frac{1 + |\mu_A(x) - \mu_{\bar{A}}(x)|}{2}, \frac{1 - |\mu_A(x) - \mu_{\bar{A}}(x)|}{2}\right) \quad \text{ile tanımlı } e_{Inc} \text{ dönüşümü bir}$$

entropidir (Zeng ve ark., 2006).

Teorem 3.2.39: e , FS^X üzerinde bir entropi olmak üzere her $A, B \in FS^X$ için

$$Inc_e(A, B) = e\left(\frac{1 + |\mu_A(x) - \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)|}{2}\right) \quad \text{ile tanımlı } Inc_e \text{ dönüşümü bir kapsama}$$

ölçüsüdür (Zeng ve ark., 2006).

4. INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER UZAYINDA UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİ

Atanassov'un IFS teorisi tanımının ele alınan durum hakkındaki bilgilerin bipolar durumlarını (üyelik- üye olmama, olumlu - olumsuz vb.) barındırmasından dolayı belirsizlik (vagueness) kavramının ele alınması bakımından son derece uygun görülmüş ve birçok uygulama alanı bulmuştur. IFS teorisinin (FS teoride olduğu gibi) uygulama alanlarının arasında önemli yere sahip olan benzerlik (similarity), örüntü tanıma (pattern recognition) gibi kavramlar temel olarak IFS'ler arasındaki uzaklık kavramına dayanmaktadır. Bu nedenle IFS'ler arası uzaklık ölçüsü kavramı IFS teorideki temel problemlerden biri olmuştur. Önceki bölümde olduğu gibi bu bölümde de öncelikle intuitionistic fuzzy kümeler uzayında tanımlanan metrik kavramları tanıtılacak ve intuitionistic fuzzy sayılar (kümeler) uzayında sendograf metrik tanımı yapılacak ve bu metriğin bazı özellikleri incelenecektir. Bölümün devamında intuitionistic fuzzy kümeler uzayında uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü ve entropi kavramları tanımlanacak ve bazı özellikleri verilecektir.

4.1. Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzayında Metrik Kavramı

Park (2004), intuitionistic fuzzy kümeler uzayında metrik kavramını George ve Veermani yaklaşımı ile tanımlamış ve bazı temel özellikleri ifade ve ispat etmiştir.

Tanım 4.1.1: X boştan farklı bir küme, $\tilde{T}$ bir t - norm ve $\underline{T}$ bir t - conorm olsun. M ve N , $x, y, z \in X$, $s, t > 0$ için aşağıdaki şartları sağlayan $X \times X \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlanmış fuzzy kümeler olmak üzere $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ sıralı beşlisine intuitionistic fuzzy metrik uzay denir.

- $M(x, y, t) + N(x, y, t) \leq 1,$
- $M(x, y, t) > 0,$
- $M(x, y, t) = 1$ ancak ve ancak $x = y,$

- d. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
- e. $\tilde{T}(M(x, y, t), M(y, z, s)) \leq M(x, z, t + s)$
- f. $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli,
- g. $N(x, y, t) \geq 0$,
- h. $N(x, y, t) = 0$ ancak ve ancak $x = y$,
- i. $N(x, y, t) = N(y, x, t)$,
- j. $\underline{T}(N(x, y, t), N(y, z, s)) \geq N(x, z, t + s)$,
- k. $N(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ sürekli.

Bu kabuller altında (M, N) ikilisine X üzerinde tanımlı intuitionistic fuzzy metrik denir. $M(x, y, t)$ ve $N(x, y, t)$ sayılarına sırasıyla x ve y 'nin t kadar yakın olma ve yakın olmama derecesi denir (Park, 2004).

Örnek 4.1.2: $(X, M, \tilde{T})$ bir fuzzy metrik uzay ve her $x, y \in X$ için $\underline{T}(x, y) = 1 - (\tilde{T}((1-x), (1-y)))$ ile tanımlı $*$ t -normu ile ilişkili $\diamond$ t -conormu olmak üzere $(X, M, 1-M, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzaydır (Park, 2004).

Önerme 4.1.3: i. $\tilde{T}$, t -normu ve $\underline{T}$, t -conormu ilişkili değilse M ve N bir önceki

örnekteki gibi tanımlanmak üzere $\mu_M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $\mu_N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$

olacak X üzerinde tanımlı bir d metriği yoktur (Park, 2004).

ii. (indirgenmiş intuitionistic fuzzy metrik) (X, d) bir metrik uzay, her $a, b \in [0, 1]$ için $\tilde{T}(a, b) = ab$, $\underline{T}(a, b) = \min\{1, a + b\}$ ile tanımlı olsun. Üyelik fonksiyonları her

$h, k, m, n \in \mathbb{R}^+$ için $\mu_{M_d}(x, y, t) = \frac{ht^n}{ht^n + md(x, y)}$ ve $\mu_{N_d}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt^n + md(x, y)}$ ile

tanımlı M_d ve $N_d \in FS^{X^2 \times (0, \infty)}$ fuzzy kümeleri olmak üzere $(X, M_d, N_d, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzaydır. Burada $\tilde{T}(a, b) = \min\{a, b\}$ ve $\underline{T}(a, b) = \max\{a, b\}$

alındığında da $(X, M_d, N_d, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzaydır. Özel olarak

$h = k = m = n = 1$ alındığında ise $\mu_{M_d}(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve

$\mu_{N_d}(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{t + d(x, y)}$ elde edilir. Bu tanımlamalara göre elde edilen

$(X, M_d, N_d, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayı standart intuitionistic fuzzy metrik uzayı denir (Park, 2004).

iii. $X = \mathbb{N}$, her $a, b \in [0, 1]$ için $\tilde{T}(a, b) = \max\{0, a + b - 1\}$, $\underline{T}(a, b) = a + b - ab$ olmak üzere $M, N \in FS^{X \times X \times (0, \infty)}$ kümelerinin üyelik fonksiyonları her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için

$$\mu_M(x, y, t) = \begin{cases} \frac{x}{y} & x \leq y, \\ \frac{y}{x} & y \leq x \end{cases}$$

ve

$$\mu_N(x, y, t) = \begin{cases} \frac{y-x}{y} & x \leq y, \\ \frac{x-y}{x} & y \leq x \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu tanımlamalarla beraber $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzaydır (Park, 2004).

Park, çalışmasının devamında intuitionistic fuzzy metrikten üretilen topoloji tanımını vermiştir.

Tanım 4.1.4: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzay, $r \in (0, 1)$, $t > 0$ ve $x \in X$ olmak üzere $B(x, r, t) = \{y \in X, M(x, y, t) > 1 - r, N(x, y, t) < r\}$ kümesi t 'ye göre x merkezli r yarıçaplı açık yuvar olarak isimlendirilir (Park, 2004).

Teorem 4.1.5: $B(x, r, t)$ açık yuvarı açık kümedir (Park, 2004).

Tanım 4.1.6: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzay olmak üzere $B_{M,N} = \{B(x, r, t): x \in X, t > 0, r \in (0, 1)\}$ bazıyla üretilen $\tau_{M,N}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir. $B_{M,N} = \left\{ B\left(x, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right): n = 1, 2, \dots \right\}$ ailesi $\tau_{M,N}$ için bir yerel baz olduğundan $\tau_{M,N}$ birinci sayılabilir uzaydır (Park, 2004).

Teorem 4.1.7: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayı Hausdorff uzaydır (Park, 2004).

Teorem 4.1.8: (X, d) bir metrik uzay, $\mu_M(x, y, t) = \frac{t}{t + d(x, y)}$ ve $k \in \mathbb{R}^+$ için $\mu_N(x, y, t) = \frac{d(x, y)}{kt + d(x, y)}$ olarak tanımlanmak üzere d metriğinden üretilen τ_d topolojisi ve $\tau_{M,N}$ topolojisi eşittir (Park, 2004).

Park çalışmasının devamında intuitionistic fuzzy metrik uzayın bazı özelliklerini aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 4.1.9: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayı olmak üzere $A \subseteq X$ eğer her $x, y \in A$ için $M(x, y, t) > 1 - r$ ve $N(x, y, t) < r$ olacak şekilde $t > 0$ ve $r \in (0, 1)$ sayıları mevcut ise A kümesine IF-sınırlıdır denir (Park, 2004).

Teorem 4.1.10: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$, d metriğinden üretilmiş intuitionistic fuzzy metrik olmak üzere A kümesi IF-sınırlı olması için gerek ve yeter şart A kümesinin sınırlı olmasıdır (Park, 2004).

Teorem 4.1.11: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayının her kompakt alt kümesi IF-sınırlıdır (Park, 2004).

Teorem 4.1.13: Intuitionistic fuzzy metrik uzayda her kompakt küme kapalı ve sınırlıdır (Park, 2004).

Tanım 4.1.14: X kümesinde tanımlı bir $\{x_n\}$ dizisinin x 'e yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ iken $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ ve $N(x_n, x, t) \rightarrow 0$ olmasıdır (Park, 2004).

Tanım 4.1.15: $(X, M, N, \tilde{T}, \tilde{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzay olmak üzere

- a. $\{x_n\}$, X de bir dizi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ için $n, m \geq n_0$ iken $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ ve $N(x_n, x_m, t) < \varepsilon$ olacak $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.
- b. $(X, M, N, \tilde{T}, \tilde{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayında her bir Cauchy dizisi $\tau_{M, N}$ topolojisine göre yakınsak ise $(X, M, N, \tilde{T}, \tilde{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayına tamdır denir (Park, 2004).

Teorem 4.1.16: (Baire Teoremi) $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}, (X, M, N, \tilde{T}, \tilde{T})$ tam intuitionistic fuzzy metrik uzayının yoğun açık altkümelerinin bir dizisi ise $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ kümesi X 'de yoğundur (Park, 2004).

Teorem 4.1.17: Ayrılabilir her intuitionistic fuzzy metrik uzayı ikinci sayılabilir (Park, 2004).

Teorem 4.1.18: (Düzgün limit teoremi) $f_n : X \rightarrow Y$, X topolojik uzayında $(Y, M, N, \tilde{T}, \tilde{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayına sürekli fonksiyonların bir dizisi olmak üzere eğer $\{f_n\}$ dizisi $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna düzgün yakınsak ise f süreklidir (Park, 2004).

Gregori ve ark. (2006), Hausdorff intuitionistic fuzzy metriği tanımlamışlardır.

Tanım 4.1.19: $P_0(X)$, $F_0(X)$ ve $K_0(X)$ sırasıyla X 'in boş olmayan altkümelerin kümesi, boş olmayan sonlu kümelerin kümesini ve $(X, \tau_{M,N})$ uzayının boş olmayan kompakt alt kümelerini gösterebilirsin. $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzay olmak üzere $K_0(X) \times K_0(X) \times (0, \infty)$ üzerinde her $A, B \in K_0(X)$ ve $t > 0$ için

$$H_M(A, B, t) = \min \left\{ \inf_{a \in A} M(a, B, t), \inf_{b \in B} M(A, b, t) \right\}$$

ve

$$H_N(A, B, t) = \max \left\{ \sup_{a \in A} N(a, B, t), \sup_{b \in B} N(A, b, t) \right\}$$

ile tanımlanan H_M ve H_N ile birlikte $(X, H_M, H_N, \tilde{T}, \underline{T})$ sıralı beşlisine $K_0(X)$ kümesi üzerinde Hausdorff intuitionistic fuzzy metrik denir (Gregori ve ark., 2006).

Önerme 4.1.20: (X, d) bir metrik uzay olmak üzere standart intuitionistic fuzzy metriktan elde edilen standart intuitionistic fuzzy metrikle üretilen $(X, H_{M_d}, H_{N_d}, \tilde{T}, \underline{T})$ Hausdorff intuitionistic fuzzy metriği ile $K_0(X)$ üzerinde tanımlı H_d Hausdorff metriği ile üretilen $(X, H_d, H_d, \tilde{T}, \underline{T})$ standart intuitionistic fuzzy metriği denktir (Efe ve Yıldız, 2006).

Örnek 4.1.21: $d, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı Euclidean metrik olmak üzere $A = [a_1, a_2]$ ve $B = [b_1, b_2]$ iki kompakt aralık olsun. O halde $H_d(A, B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$ ve Önerme 4.1.20'den dolayı tüm $t > 0$ için

$$H_{M_d}(A, B, t) = \frac{t}{t + \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}$$

ve

$$H_{N_d}(A, B, t) = \frac{\max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}{t + \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}}$$

şeklindedir (Efe ve Yıldız, 2006).

Örnek 4.1.22: d , X kümesi üzerinde tanımlı diskret metrik olmak üzere A ve B kümeleri X kümesinin boştan farklı, sonlu ve $A \neq B$ şartını sağlayan iki alt kümesi olsun. O halde $H_d(A, B) = 1$ ve Önerme 4.1.20'den dolayı tüm $t > 0$ için

$$H_{M_d}(A, B, t) = \frac{t}{t+1} \text{ ve } H_{N_d}(A, B, t) = \frac{1}{t+1} \text{ şeklinde tanımlanır (Efe ve Yıldız, 2006).}$$

Teorem 4.1.23: $(X, M, N, *, \diamond)$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzay olmak üzere $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ uzayının tam olması için gerek ve yeter şart $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ uzayının tam olmasıdır (Efe ve Yıldız, 2006).

Tanım 4.1.24: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere eğer her bir $0 < r < 1$ ve $t > 0$ için $A \subseteq \bigcup_{x \in S} B_{M,N}(x, r, t)$ olacak sonlu $S \subseteq A$ kümesi var ise A kümesine ön kompakt (precompact) denir (Saadati ve Park, 2006).

Teorem 4.1.25: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzay olmak üzere $(K_0(X), H_M, H_N, *, \diamond)$ uzayının ön kompakt olması için gerek ve yeter şart $(X, M, N, *, \diamond)$ uzayının ön kompakt olmasıdır (Efe ve Yıldız, 2006).

Tanım 4.1.26: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ ve $(Y, M', N', \tilde{T}', \underline{T}')$ iki intuitionistic fuzzy metrik uzay olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $t > 0$ için $M(x, y, t) = M'(f(x), f(y), t)$ ve $N(x, y, t) = N'(f(x), f(y), t)$ ise izometri denir. X ve Y arasında bir izometri tanımlı ise X ve Y kümelerine izometrik denir (Alaca ve ark., 2006).

Teorem 4.1.27: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayı ve $(Y, M', N', \tilde{T}', \underline{T}')$ tam intuitionistic fuzzy metrik uzayının yoğun bir alt uzayına izometrik ise $(X, M, N, *, \diamond)$ uzayının tamlaması $(Y, M', N', \tilde{T}', \underline{T}')$ uzayıdır denir (Alaca ve ark., 2006).

Lemma 4.1.28: $(X, M, N, \tilde{T}', \underline{T}')$ intuitionistic fuzzy metrik uzayının iki tamlaması $(Y_1, M'_1, N'_1, \tilde{T}'_1, \underline{T}'_1)$ ve $(Y_2, M'_2, N'_2, \tilde{T}'_2, \underline{T}'_2)$ ise Y_1 ve Y_2 kümeleri izometriktir. Böylece eğer bir intuitionistic fuzzy metrik uzayının tamlaması var ise bu tamlama izometri farkıyla sabittir (Alaca ve ark., 2006).

Lemma 4.1.29: $(Y, M', N', \tilde{T}', \underline{T}')$ bir intuitionistic fuzzy metrik uzay ve X , Y 'nin yoğun bir altkümresi ise $F_0(X)$, ve böylece $K_0(X)$, $(K_0(Y), H_{M'}, H_{N'}, \tilde{T}', \underline{T}')$ uzayında yoğundur (Alaca ve ark., 2006).

Teorem 4.1.30: $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ intuitionistic fuzzy metrik uzayı olmak üzere $(K_0(Y), H_M, H_N, \tilde{T}, \underline{T})$ uzayının tamlanabilir olması için gerek ve yeter şart $(X, M, N, \tilde{T}, \underline{T})$ uzayının tamlanabilir olmasıdır (Alaca ve ark., 2006).

Melliani ve ark. (2015) intuitionistic fuzzy kümeler arasında metrik kavramını tanımlamıştır.

Tanım 4.1.31: X boştan farklı bir küme olmak üzere her $A, B, C \in IFS^X$ aşağıdaki şartları sağlayan $d: IFS^X \times IFS^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dönüşümüne $IFS(X)$ üzerinde intuitionistic fuzzy metrik denir.

1. $d(A, B) \geq 0$
2. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $d(A, B) = d(B, A)$
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

$(IFS(X), d)$ ikilisine intuitionistic fuzzy metrik uzay denir (Melliani ve ark., 2015).

Şimdi intuitionistic fuzzy sayılar uzayında d_p ve d_∞ metriklerinin tanımını verelim.

Tanım 4.1.32: Her $A \in IFN$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$[A]_l^+(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

$$[A]_r^+(\alpha) = \sup \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

$$[A]_l^-(\alpha) = \inf \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \leq \alpha\},$$

$$[A]_r^-(\alpha) = \sup \{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \leq \alpha\}$$

olarak tanımlanmak üzere, her $A, B \in IFN$ için

$$d_p(A, B) = \left(\frac{1}{4} \int_0^1 \left| [A]_r^+(\alpha) - [B]_r^+(\alpha) \right|^p .d\alpha + \frac{1}{4} \int_0^1 \left| [A]_l^+(\alpha) - [B]_l^+(\alpha) \right|^p .d\alpha \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \int_0^1 \left| [A]_r^-(\alpha) - [B]_r^-(\alpha) \right|^p .d\alpha + \frac{1}{4} \int_0^1 \left| [A]_l^-(\alpha) - [B]_l^-(\alpha) \right|^p .d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$d_\infty(A, B) = \frac{1}{4} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| [A]_r^+(\alpha) - [B]_r^+(\alpha) \right| + \frac{1}{4} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| [A]_l^+(\alpha) - [B]_l^+(\alpha) \right| \\ + \frac{1}{4} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| [A]_r^-(\alpha) - [B]_r^-(\alpha) \right| + \frac{1}{4} \sup_{\alpha \in [0,1]} \left| [A]_l^-(\alpha) - [B]_l^-(\alpha) \right|$$

olarak tanımlanmak üzere (IFN, d_p) ve (IFN, d_∞) uzayları intuitionistic fuzzy metrik uzaydır (Melliani ve ark., 2015).

Melliani ve ark., çalışmalarının devamında IFN kümesinde d_p metrik ile üretilen topoloji tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 4.1.33: $A \in IFN$ ve $r > 0$ için A merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar ve kapalı yuvar sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$i. B(A, r) = \{A' \in IFN : d_p(A, A') < r\}$$

$$ii. B[A, r] = \{A' \in IFN : d_p(A, A') \leq r\}$$

$G \subseteq IFN$ olmak üzere $\forall A \in G$ için $B(A, r) \subseteq G$ olacak $r > 0$ bulunabiliyorsa G 'ye açık küme denir. Böylece G 'nin açık olması için G 'deki her bir intuitionistic fuzzy nokta için bu nokta merkezli ve G tarafından kapsanan bir açık yuvarın bulunmasının gerek ve yeter şart olduğu görülür. Bu tanımlamalar ile beraber (IFN, d_p) uzayının tüm açık yuvarlarının oluşturduğu ailenin Chang manasında intuitionistic fuzzy topoloji tanımlayacağı aşikârdır (Melliani ve ark., 2015).

Teorem 4.1.34: $p \in [0, +\infty]$ için (IFN, d_p) tam uzaydır (Melliani ve ark., 2015).

Teorem 4.1.35: $p \in [1, +\infty)$ için (IFN, d_p) uzayı ayrılabilir (Melliani ve ark., 2015).

Teorem 4.1.36: (IFN, d_∞) uzayı ayrılabilir uzay değildir (Melliani ve ark., 2015).

Guha ve Chakraborty (2010) “Eğer bir sayının ne olduğu hakkında kesin bir fikrimiz yoksa bu tip sayılar arasındaki uzaklıklar hakkında nasıl kesin ifadeler kullanabiliriz” fikrinden yola çıkarak, $IFN \times IFN$ kartezyen çarpım kümesinden IFN kümesine bir metrik tanımlamışlardır.

Bilindiği üzere A intuitionistic fuzzy sayısı $a \leq b \leq m \leq a' \leq b'$ şartını sağlayan reel sayılar ve IFN 'nin bölümleri olarak adlandırılan $f_A, g_A, h_A, k_A : \mathbb{R} \rightarrow I$; f_A ve k_A azalmayan ve g_A, h_A artmayan fonksiyonları olmak üzere μ_A üyelik fonksiyonu ve üye olmama fonksiyonu η_A , sırasıyla, aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < m - a \\ f_A(x), & m - a \leq x < m \\ 1, & x = m \\ g_A(x), & m < x \leq m + a \\ 0, & x > m + a \end{cases}$$

ve

$$\eta_A(x) = \begin{cases} 1, & x < m - a' \\ h_A(x), & m - a' \leq x < m \\ 0, & x = m \\ k_A(x), & m < x \leq m + b' \\ 1, & x > m + b' \end{cases}$$

Bu şekilde tanımlanan A intuitionistic fuzzy sayısı $A = (m; a, b, a', b')$ ile gösterilir (Guha ve Chakraborty, 2010).

Tanım 4.1.37: $A = (m_1; \alpha_1, \beta_1; \alpha'_1, \beta'_1) \in IFN$ ve $\varepsilon \in [0, 1]$ olmak üzere A 'nın ε - kesim kümesi $(A)_\varepsilon = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)); \mu_A(x) \geq \varepsilon, \eta_A(x) \leq 1 - \varepsilon\}$ ile tanımlanır. A , IFN 'sinin ε - kesim gösterimi $[A]_\varepsilon = \{[A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)]; [A_{1-\eta}^L(\varepsilon), A_{1-\eta}^R(\varepsilon)]\}$ aralık çifti ile gösterilir. Burada;

$$A_\mu^R(\varepsilon) = \begin{cases} \sup \{x; x \in \mu_\varepsilon\} & , \quad \varepsilon > 0 \\ \sup \{x; x \in [m - \alpha, m + \alpha]\}, & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$A_\mu^L(\varepsilon) = \begin{cases} \inf \{x; x \in \mu_\varepsilon\} & , \quad \varepsilon > 0 \\ \inf \{x; x \in [m - \alpha, m + \alpha]\}, & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$A_{1-\eta}^L(\varepsilon) = \begin{cases} \inf \{x; x \in \eta_\varepsilon\} & , \quad 1 - \varepsilon > 0 \\ \inf \{x; x \in [m - \alpha, m + \alpha]\}, & 1 - \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$A_{1-\eta}^R(\varepsilon) = \begin{cases} \sup \{x; x \in \eta_\varepsilon\} & , \quad 1 - \varepsilon > 0 \\ \sup \{x; x \in [m - \alpha, m + \alpha]\}, & 1 - \varepsilon = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Guha ve Chakraborty, 2010).

Tanım 4.1.38: $A = (m_1; \alpha_1, \beta_1; \alpha'_1, \beta'_1)$, $B = (m_2; \alpha_2, \beta_2; \alpha'_2, \beta'_2) \in IFN$ ve A, B 'nin ε - kesim gösterimleri sırası ile

$$\begin{aligned} [A]_\varepsilon &= \{[A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)]; [A_{1-\eta}^L(\varepsilon), A_{1-\eta}^R(\varepsilon)]\} \\ [B]_\varepsilon &= \{[B_\mu^L(\varepsilon), B_\mu^R(\varepsilon)]; [B_{1-\eta}^L(\varepsilon), B_{1-\eta}^R(\varepsilon)]\} \end{aligned}$$

olsun. A ve B arasındaki uzaklık ölçüsü $d_{A,B} = (d; \theta_1, \sigma_1; \theta_2, \sigma_2)$ ile gösterilen burada d , $d_{A,B}$ 'nin orta noktası ve θ_1 , σ_1 ve θ_2 , σ_2 sayı çiftleri sırası ile $d_{A,B}$ 'nin sol ve sağ yayılımını gösterirler. d , θ_1 , σ_1 sayılarını hesaplamak için A ve B 'nin arasındaki uzaklık ölçüsünün üyelik fonksiyonunu formülize etmemiz gerekir. Açıkça görülür ki A ve B 'nin üyelik fonksiyonlarının ε -kesim gösterimleri sırası ile $[A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)]$ ve $[B_\mu^L(\varepsilon), B_\mu^R(\varepsilon)]$ dir. Bu gösterimler arasındaki uzaklık aşağıdaki uzaklıklardan biridir.

a) Eğer $m_1 \geq m_2$ ise $[A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)] - [B_\mu^L(\varepsilon), B_\mu^R(\varepsilon)]$

b) Eğer $m_1 < m_2$ ise $[B_\mu^L(\varepsilon), B_\mu^R(\varepsilon)] - [A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)]$

Bu iki notasyonu bir araya getirmek için $\lambda = \begin{cases} 1, & m_1 \geq m_2 \\ 0, & m_1 < m_2 \end{cases}$

$$\lambda([A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)] - [B_\mu^L(\varepsilon), B_\mu^R(\varepsilon)]) + (1 - \lambda)([B_\mu^L(\varepsilon), B_\mu^R(\varepsilon)] - [A_\mu^L(\varepsilon), A_\mu^R(\varepsilon)]) \\ = [L_\mu(\varepsilon), R_\mu(\varepsilon)] \text{ ifadesi verilebilir. Burada } L_\mu(\varepsilon) \text{ ve } R_\mu(\varepsilon) \text{ sırası ile}$$

$$L_\mu(\varepsilon) = \lambda((A_\mu^L(\varepsilon) - B_\mu^L(\varepsilon)) + (A_\mu^R(\varepsilon) - B_\mu^R(\varepsilon))) + (B_\mu^L(\varepsilon) - A_\mu^R(\varepsilon)) \\ R_\mu(\varepsilon) = \lambda((A_\mu^L(\varepsilon) - B_\mu^L(\varepsilon)) + (A_\mu^R(\varepsilon) - B_\mu^R(\varepsilon))) + (B_\mu^R(\varepsilon) - A_\mu^L(\varepsilon))$$

ifadeleri ile gösterilir. Böylece

$$[d_\mu^L(\varepsilon), d_\mu^R(\varepsilon)] = \begin{cases} [L_\mu(\varepsilon), R_\mu(\varepsilon)] & , L_\mu(\varepsilon) \geq 0 \\ [0, |L_\mu(\varepsilon)| \vee R_\mu(\varepsilon)] & , L_\mu(\varepsilon) \leq 0 \leq R_\mu(\varepsilon) \end{cases}$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifadeden θ_1, σ_1 sayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\theta_1 = d_\mu^L(1) - \max \left\{ \int_0^1 d_\mu^L(\varepsilon) . d\varepsilon, 0 \right\}, \quad \sigma_1 = \int_0^1 d_\mu^L(\varepsilon) . d\varepsilon - d_\mu^R(1)$$

Benzer şekilde θ_2, σ_2 sayıları aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\theta_1 = d_{1-\eta}^L(1) - \max \left\{ \int_0^1 d_{1-\eta}^L(\varepsilon) . d\varepsilon, 0 \right\}, \quad \sigma_1 = \int_0^1 d_{1-\eta}^L(\varepsilon) . d\varepsilon - d_{1-\eta}^R(1)$$

Burada

$$L_{1-\eta}(\varepsilon) = \lambda((A_{1-\eta}^L(\varepsilon) - B_{1-\eta}^L(\varepsilon)) + (A_{1-\eta}^R(\varepsilon) - B_{1-\eta}^R(\varepsilon))) + (B_{1-\eta}^L(\varepsilon) - A_{1-\eta}^R(\varepsilon)) \\ R_{1-\eta}(\varepsilon) = \lambda((A_{1-\eta}^L(\varepsilon) - B_{1-\eta}^L(\varepsilon)) + (A_{1-\eta}^R(\varepsilon) - B_{1-\eta}^R(\varepsilon))) + (B_{1-\eta}^R(\varepsilon) - A_{1-\eta}^L(\varepsilon))$$

olarak tanımlanmak üzere $d_{A,B}$ 'nin üye olmama fonksiyonunun ε – kesim kümesi

$$\left[d_{1-\eta}^L(\varepsilon), d_{1-\eta}^R(\varepsilon) \right] = \begin{cases} \left[L_{1-\eta}(\varepsilon), R_{1-\eta}(\varepsilon) \right] & , \quad L_{1-\eta}(\varepsilon) \geq 0 \\ \left[0, |L_{1-\eta}(\varepsilon)| \vee R_{1-\eta}(\varepsilon) \right] & , \quad L_{1-\eta}(\varepsilon) \leq 0 \leq R_{1-\eta}(\varepsilon) \end{cases}$$

ile tanımlanır. Böylece $d = d_{\mu}^L(1) = d_{\mu}^R(1) = d_{1-\eta}^L(1) = d_{1-\eta}^R(1)$ olmak üzere A ve B IFN'leri arasındaki uzaklık $d_{A,B} = (d; \theta_1, \sigma_1; \theta_2, \sigma_2)$ ile ifade edilir (Guha ve Chakraborty, 2010).

Önerme 4.1.39: Üçgen intuitionistic fuzzy sayılar arasındaki intuitionistic uzaklık gene bir üçgen intuitionistic fuzzy sayıdır (Guha ve Chakraborty, 2010).

Çalışmalarının devamında Guha ve Chakraborty, tanımladıkları bu yeni ölçünün metrik şartlarını sağladığını göstermişlerdir.

Teorem 4.1.40: Tanım 4.1.38. de tanımlanan uzaklık ölçüsü aşağıdaki şartları (metrik uzay olma şartlarını) sağlar.

1. Tanım 4.1.38. de tanımlanan uzaklık ölçüsü negatif olmayan bir IFN' dir,
2. Her $A, B \in IFN$ için $d_{A,B} = d_{B,A}$,
3. Her $A, B, C \in IFN$ için $d_{A,B} + d_{B,C} \geq d_{A,C}$

(Guha ve Chakraborty, 2010).

4.2. Intuitionistic Fuzzy Sayılar Uzayında Sendograf Metrik

Çalışmamızın bu kısmında fuzzy sayılar için tanımlanan sendograf ve endograf metrik tanımları intuitionistic fuzzy sayılar uzayına taşınacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.2.1: $A = \{(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ bir IFN olmak üzere A 'nın $end(A)$ ile gösterilen endografı (endograph):

$$end(A) = \{(x, r, s); \mu(x) \geq r, \eta(x) \leq s, 0 \leq r + s \leq 1\}$$

ve diğer taraftan $send(A)$ ile gösterilen desteklenmiş endografi (supported endograph, kısaca A 'nın sendografı)

$$send(A) = \{(x, r, s); x \in suppA; 0 \leq r \leq \mu(x), \eta(x) \leq s \leq 1, 0 \leq r + s \leq 1\}$$

kümeleri ile tanımlanır. Bu tanımlamalardan aşağıdaki eşitlik açıkça görülür.

$$send(A) = end(A) \cap (supp(A) \times I \times I)$$

μ_A üst yarı sürekli, η_A alt yarı sürekli ve $supp(A)$, $\mathbb{R}$ 'nin kapalı ve sınırlı alt kümesi olduğundan, $send(A)$ kümesinin $\mathbb{R}^3$ uzayının kompakt bir alt kümesi olduğu anlaşılır (Kutlu ve ark., 2015).

Tanım 4.2.2: d_m , $\mathbb{R} \times I \times I$ üzerinde

$$d_m((x_1, r_1, s_1), (x_2, r_2, s_2)) = \max\{|x_1 - x_2|, |r_1 - r_2|, |s_1 - s_2|\}$$

ile tanımlı çarpım metriği, $A, B \in IFN$ ve H ;

$$H(send(A), send(B)) = \max\{H^*(send(A), send(B)), H^*(send(B), send(A))\}$$

ile tanımlı Hausdorff metrik

$$H^*(send(A), send(B)) = \max\{d(x, send(B)); x \in send(A)\}$$

ve

$$d(x, send(B)) = \min\{d_p(x, y); y \in send(B)\}$$

olmak üzere

$$D_{send}(A, B) = H(send(A), send(B))$$

ile tanımlı D_{send} metriğine sendograf metrik denir (Kutlu ve ark., 2015).

Fuzzy sayılar uzayında olduğu gibi $D_{send}(A, B)$ ifadesinin intuitionistic fuzzy sayılar uzayında metrik tanımladığı aşikârdır.

Teorem 4.2.3: (IFN, D_{send}) uzayı ayrılabiliridir.

İspat: $0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n = 1$ ve $0 = \beta_n \leq \beta_{n-1} \leq \dots \leq \beta_1 = 1$ $[0, 1]$ aralığının aşağıdaki şartları sağlayan iki ayrışımı olsun:

- i. $i = 1, 2, \dots, n$ için α_i ve β_i rasyonel sayılar,

ii. $i = 1, 2, \dots, n$ ve $\varepsilon > 0$ için $|\alpha_i - \alpha_{i-1}| < \varepsilon$ ve $|\beta_i - \beta_{i-1}| < \varepsilon$

iii. $i = 1, 2, \dots, n$ için $0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1$

$A \in IFN$ olmak üzere üye olma ve üye olmama dereceleri sırasıyla aşağıdaki şekilde tanımlanmış ϕ intuitionistic fuzzy kümesini tanımlayalım:

$$\mu_{\phi}(x) = \begin{cases} \alpha_i & , \alpha_{i-1} < \mu_A(x) < \alpha_i \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{cases},$$

ve

$$\eta_{\phi}(x) = \begin{cases} \beta_i & , \beta_i < \mu_A(x) < \beta_{i-1} \\ 1 & , \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ϕ 'nin tanımından her $x \in \mathbb{R}$ için $0 \leq \mu_{\phi}(x) + \eta_{\phi}(x) \leq 1$ şartının sağlandığı açıktır.

$A \in IFN$ olduğundan, ϕ IFN olma şartlarını sağlar. Diğer taraftan $supp(A) = supp(\phi)$ ve $D_{send}(A, \phi) \leq \varepsilon$ olduğu tanımlamalardan açıktır. Bu şekilde tanımlanacak tüm ϕ intuitionistic fuzzy sayıların kümesini IFN ile gösterelim. ϕ intuitionistic fuzzy sayıların tanımından IFN kümesinin IFN kümesinin sayılabilir yoğun alt kümesi olduğu görülür. Buradan (E_{IFN}, D_{send}) ayrılabilir olduğu anlaşılır (Kutlu ve ark., 2015).

Tanım 4.2.4: $\{A_n\}$ bir intuitionistic fuzzy sayı dizisi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $supp(A_n) \subset (a, b)$ olacak bir $(a, b) \subset \mathbb{R}$ aralığı bulunabiliyorsa $\{A_n\}$ dizisine support sınırlı dizi denir (Kutlu ve ark., 2015).

Kloeden'in IFN dizilerinin yakınsaklığını belirlemede kullanılan teoreminin IFN uzayına genelleştirilmesi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 4.2.5: $A \in IFN$ ve $\{A_n\}$ bir IFN dizisi olmak üzere. $D_{send}(A_n, A) \rightarrow 0$ olması için gerek ve yeter şart

1. h $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı Hausdorff metrik olmak üzere $h(supp(A_n), supp(A)) \rightarrow 0$,
2. Her $\varepsilon > 0$ için, aşağıdaki iki şartı sağlayacak şekilde $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

a. Her $x \in \mathbb{R}$ ve $n \geq n(\varepsilon)$ için $\mu_{A_n}(x) < \mu_A(x_n) + \varepsilon$, $\eta_{A_n}(x) > \eta_A(x_n) - \varepsilon$ ve $|x_n - x| < \varepsilon$ şartlarını sağlayacak $x_n = x_n(x, \varepsilon) \in \mathbb{R}$ dizisi mevcuttur.

b. Her $x \in \text{supp}(A)$ ve $n \geq n(\varepsilon)$ için $\mu_A(x) < \mu_{A_n}(x_n) + \varepsilon$, $\eta_A(x) > \eta_{A_n}(x_n) - \varepsilon$ ve $|x_n - x| < \varepsilon$ şartlarını sağlayacak $(x_n) = (x_n)(x, \varepsilon) \subset \text{supp}(A_n)$ dizisi mevcuttur (Kutlu ve ark., 2015).

İspat: Bu teoremin ispatı Kloeden (1978) çalışmasına benzer olarak yapılabilir. Burada verilecek olan ispatta bu çalışmalardaki ispatlara bazı minör eklemeler yapılmıştır.

$\Rightarrow$: $D_{\text{send}}(A_n, A) \rightarrow 0$ olsun. Bu durumda (1.), (2a.) ve (2b.) şartlarının sağlandığı gösterilecektir.

1. $A, B \in IFN$ ve $\varepsilon > 0$ için $D_{\text{send}}(A, B) < \varepsilon$ olsun, O halde sendograf metriğin tanımı gereği $H^*(\text{send}(A), \text{send}(B)) < \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir. $\text{supp}(A)$ kompakt bir küme olduğundan $h^*(\text{supp}(A), \text{supp}(B)) = d(x_a, \text{supp}(A))$ şartını sağlayan $x_a \in \text{supp}(A)$ elemanı mevcuttur. Böylece $(x_a, 0, 1) \in \text{send}(A)$ olduğu anlaşılır. Buradan,

$$d((x_a, 0, 1), \text{send}(B)) \leq H^*(\text{send}(A), \text{send}(B)) < \varepsilon.$$

eşitsizliği elde edilir. $\text{send}(B)$ kompakt olduğundan,

$d_m((x_a, 0, 1), (x_b, r_b, s_b)) = d((x_a, 0, 1), \text{send}(B)) < \varepsilon$ şartını sağlayacak $(x_b, r_b, s_b) \in \text{send}(B)$ elemanı mevcuttur. Buradan

$$d_m((x_a, 0, 1), (x_b, r_b, s_b)) = d((x_a, 0, 1), \text{send}(B)) < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikten $|x_a - x_b| < \varepsilon$, $|0 - r_b| < \varepsilon$ ve $|1 - s_b| < \varepsilon$ ifadeleri elde edilir. $x_b \in \text{supp}(B)$ olduğundan

$$h^*(\text{supp}(A), \text{supp}(B)) = d(x_a, \text{supp}(A)) \leq d(x_a, x_b) < \varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir.

$h^*(\text{supp}(B), \text{supp}(A)) < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlandığı yukarıdaki ifade de A ve B nin roller değiştirilerek elde edilebilir. Bu son iki eşitliğin beraber değerlendirilmesi ile $h(\text{supp}(A), \text{supp}(B)) < \varepsilon$ eşitsizliği elde edilir.

2a. $D_{\text{send}}(A_n, A) \rightarrow 0$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0(\varepsilon)$ iken

$$H^*(send(A_n), send(A)) \leq D_{send}(A_n, A) < \varepsilon$$

olacak $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcuttur. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $n < n_0(\varepsilon)$ için $x_n = x$ olarak tanımlansın. Eğer $n \geq n_0(\varepsilon)$ ve $x \notin supp(A_n)$ ise $\mu_{A_n}(x) = 0 < \mu_A(x) + \varepsilon$ ve $\eta_{A_n}(x) = 1 > \eta_A(x) - \varepsilon$ eşitsizlikleri elde edilir. Diğer taraftan $\mu_A(x) \geq 0$ ve $\eta_A(x) \leq 1$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x$ olarak seçilebilir. Diğer taraftan, eğer $n \geq n_0(\varepsilon)$ ve $x \in supp(A_n)$ ise $(x, \mu_{A_n}(x), \eta_{A_n}(x)) \in send(A_n)$ ve $d((x, \mu_{A_n}(x), \eta_{A_n}(x)), send(A)) \leq H^*(send(A_n), send(A)) < \varepsilon$ ifadeleri sağlanır. $send(A)$ kompakt olduğundan,

$$d_m((x, \mu_{A_n}(x), \eta_{A_n}(x)), (x_n, r_n, s_n)) = d((x, \mu_{A_n}(x), \eta_{A_n}(x)), send(A)) < \varepsilon$$

olacak $(x_n, r_n, s_n) \in send(A)$ mevcuttur. Böylece, $|x_n - x| < \varepsilon$, $|\mu_{A_n}(x) - r_n| < \varepsilon$, $|\eta_{A_n}(x) - s_n| < \varepsilon$ ifadelerinin sağlandığı anlaşılır. Diğer taraftan $(x_n, r_n, s_n) \in send(A)$ olduğundan $\mu_A(x_n) \geq r_n$ ve $\eta_A(x_n) \leq s_n$ olur. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x| < \varepsilon$, $\mu_{A_n}(x) < r_n + \varepsilon \leq \mu_A(x_n) + \varepsilon$ ve $\eta_{A_n}(x) > s_n - \varepsilon \leq \eta_A(x_n) - \varepsilon$ ifadelerinin sağlandığı yani (2a) şartının sağlandığı görülür.

2b. $D_{send}(A_n, A) \rightarrow 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $n \geq n_0(\varepsilon)$ iken $H^*(send(A), send(B)) \leq D_{send}(A_n, A) < \varepsilon$ olacak $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcuttur. $x \in supp(A)$ olsun. O halde $(x, \mu_A(x), \eta_A(x)) \in send(A)$. Böylece $n \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$d((x, \mu_{A_n}(x), \eta_{A_n}(x)), send(A)) \leq H^*(send(A_n), send(A)) < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. $send(A_n)$ kompakt olduğundan,

$$d_m((x, \mu_A(x), \eta_A(x)), (x_n, r_n, s_n)) = d((x, \mu_A(x), \eta_A(x)), send(A_n)) < \varepsilon$$

olacak yani $|x_n - x| < \varepsilon$, $|\mu_A(x) - r_n| < \varepsilon$, $|\eta_A(x) - s_n| < \varepsilon$ eşitsizlikleri sağlanacak şekilde $(x_n, r_n, s_n) \in send(A_n)$ elemanı mevcuttur. Böylece $n \geq n_0(\varepsilon)$ için $\mu_A(x) < r_n + \varepsilon \leq \mu_{A_n}(x_n) + \varepsilon$ ve $\eta_A(x) > s_n - \varepsilon \leq \eta_{A_n}(x_n) - \varepsilon$ olduğu aşikârdır.

$\Leftarrow$: (1), (2a), (2b) şartlarının bazı A intuitionistic fuzzy sayıları ve bazı $\{A_n\}$ intuitionistic fuzzy sayı dizileri için sağlandığını kabul edelim. $D_{send}(A_n, A) \rightarrow 0$ olduğunu göstereceğiz.

A. Şart (1)'den, herhangi $\delta > 0$ için $n \geq n_0$ iken

$$h^*(supp(A_n), supp(A)) \leq h(supp(A_n), supp(A)) < \delta$$

yani $U_\delta(supp(A))$, $supp(A)$ kümesinin δ - komşuluğunu göstermek üzere $supp(A_n) \subset U_\delta(supp(A))$ olacak $n' = n'(\delta) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Böylece her $n \geq n'$ için $supp(A_n \times I \times I) \subset U_\delta(supp(A \times I \times I))$ ifadesi sağlanır. Diğer taraftan, (2a) şartından, her $x \in \mathbb{R}$ ve $\delta > 0$ için $n = n(\delta)$ olmak üzere $|x_n - x| < \delta$, $\mu_{A_n}(x) < \mu_A(x_n) + \delta$ ve $\eta_{A_n}(x) > \eta_A(x_n) - \delta$ ifadelerini sağlayacak $(x_n) = x_n(x, \delta)$ dizisi mevcuttur. Yani her $x \in U_\delta(x_n)$ için $n \geq n(\delta)$ iken $[0, \mu_{A_n}(x)] \subset [0, \mu_A(x_n) + \delta]$ ve $[\eta_{A_n}(x), 1] \subset [\eta_A(x_n) - \delta, 1]$ ifadeleri sağlanır. Böylece her $n \geq n(\delta)$ ve $x \in \mathbb{R}$ için $\{x\} \times [0, \mu_A(x_n)] \times [\eta_A(x_n), 1] \subset U_\delta(x_n) \times [0, \mu_A(x_n) + \delta] \times [\eta_A(x_n) - \delta, 1] \subset U_\delta(\{x_n\} \times [0, \mu_A(x_n)] \times [\eta_A(x_n), 1]) \subset U_\delta\left(\bigcup_{y \in \mathbb{R}} \{y\} \times [0, \mu_{A_n}(x)] \times [\eta_A(x_n), 1]\right) = U_\delta(end(A))$ ifadesi sağlanır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $end(A)$ kapalı bir küme ve $supp(A) \times I \times I \subset \mathbb{R} \times I \times I$ 'nin kompakt bir alt kümesi ve de $(supp(A) \times I \times I) \cap (\mathbb{R} \times I \times I) \neq \emptyset$ olduğundan $\delta = \delta(end(A_n), supp(A) \times I \times I, \varepsilon) > 0$ için $U_\delta(end(A_n)) \cap U_\delta(supp(A) \times I \times I) \neq \emptyset$ ve $U_\delta(end(A_n)) \cap U_\delta(supp(A) \times I \times I) \subset U_\varepsilon(end(A_n) \cap (supp(A) \times I \times I))$ ifadeleri sağlanır. Böylece $n \geq n_2(\varepsilon) = \max\{n(\delta), n'(\delta)\}$ için $send(A_n) = end(A_n) \cap (supp(A_n) \times I \times I) \subset U_\delta(end(A_n)) \cap U_\delta(supp(A_n) \times I \times I) \subset U_\varepsilon(end(A_n) \cap (supp(A_n) \times I \times I)) = U_\varepsilon(send(A))$ olduğu görülür. Buradan $n \geq n_2(\varepsilon)$ için $H^*(send(A_n), send(A)) < \varepsilon$ olduğu anlaşılır.

B. (2b) şartından her $x \in supp(A)$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \geq n(\varepsilon)$ iken $\mu_A(x) < \mu_{A_n}(x_n) + \varepsilon$, $\eta_A(x) > \eta_{A_n}(x_n) - \varepsilon$ ve $|x_n - x| < \varepsilon$ şartlarını sağlayacak $\{x_n\} \subset supp(A)$ dizisi

bulunabilir. $\{x_n, \mu_{A_n}(x_n), \eta_{A_n}(x_n)\} \in \text{send}(A)$ olduğundan $n \geq n(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} \{x\} \times [0, \mu_A(x)] \times [\eta_A(x), 1] &\subset U_\varepsilon(x_n) \times [0, \mu_{A_n}(x_n) + \varepsilon] \times [\eta_{A_n}(x_n) - \varepsilon, 1] \subset \\ U_\varepsilon(\{x_n\} \times [0, \mu_{A_n}(x_n)] \times [\eta_{A_n}(x_n), 1]) &\subset U_\varepsilon(\text{send}(A)) \text{ İfadesi elde edilir. Böylece} \\ \text{send}(A) = \bigcup_{x \in \text{supp}(A)} \{x\} \times [0, \mu_{A_n}(x)] \times [\eta_{A_n}(x), 1] &\subset U_\varepsilon(\text{send}(A_n)) \text{ yani her } n \geq n(\varepsilon) \text{ için} \end{aligned}$$

$H^*(\text{send}(A), \text{send}(A_n)) < \varepsilon$ ifadesi sağlanır. (A) ve (B) deki sonuçlar birleştirilerek $D_{\text{send}}(A_n, A) \rightarrow 0$ olduğu görülür (Kutlu ve ark., 2015).

Sonuç 4.2.6: IFN ‘deki her yakınsak dizi, support sınırlıdır (Kutlu ve ark., 2015).

İspat: $\{A_n\}$ IFN dizisi A IFNsine yakınsak olsun. Yani $\lim_{n \rightarrow \infty} D_{\text{send}}(A_n, A) = 0$ olsun.

Teorem 4.2.5’ten, $\lim_{n \rightarrow \infty} (h(\text{supp}(A_n), \text{supp}(A))) = 0$ ifadesi elde edilir. Böylece $\text{supp}(A_n)$ dizisinin $\text{supp}(A)$ kümesine yakınsadığı anlaşılır Böylece $n \in \mathbb{N}$ için $\text{supp}(A_n)$ sınırlı olduğu görülür. Tanım 4.2.4.’ten $\{A_n\}$ support sınırlı dizi olduğu anlaşılır (Kutlu ve ark., 2015).

IFN uzayı sendograf metrikle beraber tam uzay değildir. Bu durumu göstermek için aşağıdaki örnek verilecektir.

Örnek 4.2.7: A_n IFN dizisi $n \in \mathbb{N}$ için üye olma derecesi μ_{A_n} ve üye olmama derecesi η_{A_n} sırasıyla aşağıdaki şekilde olacak şekilde tanımlansın.

$$\mu_{A_n}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2n} & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{1}{2n} & , 1 < x \leq 2 \\ 0 & , 2 < x \end{cases}$$

ve

$$\eta_{A_n}(x) = \begin{cases} 1 & , x < 0 \\ \frac{1}{4n} & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , x = 1 \\ \frac{1}{4n} & , 1 < x \leq 2 \\ 1 & , 2 < x \end{cases}$$

$A \in IFN$ benzer şekilde üye olma derecesi μ_A ve üye olmama derecesi η_A sırasıyla

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x \neq 1 \end{cases}$$

ve

$$\eta_A(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

olacak şekilde tanımlansın. A_n dizisinin sendograf metriğe göre bir Cauchy dizisi olduğu aşikârdır. Ayrıca bu dizi A intuitionistic fuzzy sayısına endograf metriğe göre yakınsamasına rağmen $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\text{supp}(A_n), \text{supp}(A)) \neq 0$ olduğundan sendograf metriğe göre A intuitionistic fuzzy sayısına yakınsamaz. Böylelikle A_n dizisinin yakınsak olmadığı görülür (Kutlu ve ark., 2015).

Bu örnekten anlaşılaçağı üzere (IFN, D_{send}) uzayı tam değildir. Aşağıdaki teorem ile bu uzayın tamlaması verilecektir.

Teorem 4.2.8: $IFN^* = \{[a, b] \times \{0\} \times \{1\} \cup \text{send}(A); A \in IFN, A_{0,1} \subseteq [a, b]\}$ olarak tanımlanmak üzere (IFN^*, D_{send}) uzayı (IFN, D_{send}) uzayının tamlamasıdır (Kutlu ve ark., 2015).

İspat: İddianın ispatlanması için $cl(IFN) = IFN^*$ ve IFN^* tam olduğu gösterilmelidir.

I. IFN^* kümesinin elemanlarının Önerme 2.2.11 şartlarından (i), (ii), (iii) şartlarını sağladığı fakat genel olarak (iv) şartı sağlamadığı aşikârdır. Yani herhangi $A \in IFN$ ve $A^* \in IFN^*$ için $A_{0,1} \subseteq A_{0,1}^*$ ifadesi sağlanır. IFN^* kümesinin elemanları (i), (ii), (iii) şartlarını sağladığından, Her $A^* \in IFN^*$ elemanı için bir $A \in IFN$ kümesinden $(0,1)$ -

seviye kümesinde ayrılır. Buradan, $A \in IFN$ için $A^* \neq send(A)$ ise $0 \leq \varepsilon' + \varepsilon'' \leq 1$ şartını sağlayan tüm $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$ için $A' = A \cup (A_{0,1} \times [0, \varepsilon] \times [\varepsilon'', 1])$ ile tanımlayalım.

Böylece A' tek bir $B \in IFN$ için $A' = send(B)$ eşitliğini sağlar. Böylece $D_{send}(A, A') \leq \min\{\varepsilon', \varepsilon''\}$ olduğu anlaşılır. Böylece $cl\{IFN\} = IFN^*$ olduğu anlaşılır.

II. $\{A_n^*\}$, IFN^* uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için, $n, m \geq n_0$ iken

$D_{send}(A_n^*, A_m^*) \leq \varepsilon$ olacak $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Yani $H(send(A_n^*), send(A_m^*)) \leq \varepsilon$.

Her $n \in \mathbb{N}$ için A_n^* 'nin üye olma ve üye olmama fonksiyonları bir IFN 'yi karşıladığından sırasıyla üst yarı sürekli ve alt yarı sürekli, Buradan $send(A_n^*)$

kapalıdır. Böylece $\{send(A_n^*)\}$ dizisi Hausdorff metrik ile beraber C^3 uzayına göre bir

Cauchy dizisidir. (C^3, H) uzayı tam uzay olduğundan, $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\left\{\bigcup_{m \geq n}^{\infty} send(A_m^*)\right\}$

kümesi C^3 aittir ve $n \geq n_0$ iken $H(send(A_n^*), A^*) < \varepsilon$ olacak $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur.

Şimdi $A^* \in E_{IFN}^*$ olduğunu göstermeliyiz. Bu iddiayı kanıtlamak için A^* kümesinin Önerme 2.2.11 şartlarından (i), (ii), (iii) şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $(A_n^*)_{\alpha, \beta}$ boştan farklı, kapalı ve konveks küme olduğundan,

$(A^*)_{\alpha, \beta} = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\left\{\bigcup_{m \geq n}^{\infty} (A_m^*)_{\alpha, \beta}\right\}$ boştan farklı, kapalı ve konveks küme olduğu aşikârdır.

ii. A^* 'nin tanımından, $i = 1, 2$ için $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ $0 \leq \alpha_i + \beta_i \leq 1$ şartlarını sağlayan her $\alpha_i, \beta_i \in I$ için, $A_{\alpha_1, \beta_1}^* \supseteq A_{\alpha_2, \beta_2}^*$ ifadesi elde edilir.

iii. $\alpha_m \uparrow \alpha$ ve $\beta_m \downarrow \beta$ şartlarını sağlayan $\{\alpha_m\}, \{\beta_m\} \subseteq I$ dizileri için,

$(A_n^*)_{\alpha, \beta} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n^*)_{\alpha_n, \beta_n}$ ve $D_{send}(A_n^*, A_n^*) \rightarrow 0$ olduğundan, $(A^*)_{\alpha, \beta} = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\left\{\bigcup_{m \geq n}^{\infty} (A_m^*)_{\alpha, \beta}\right\}$

$= \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\left\{\bigcup_{m \geq n}^{\infty} \left\{\bigcap_{k=1}^{\infty} (A_m^*)_{\alpha_k, \beta_k}\right\}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A^*)_{\alpha_k, \beta_k}$ ifadesi elde edilir. Böylece iddia ispatlanmış

olur (Kutlu ve ark., 2015).

4.3. Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzayında Uzaklık ve Benzerlik Ölçüleri

Bir önceki bölümde fuzzy kümeler uzayında tanımlanan entropi, uzaklık, benzerlik ve kapsama ölçüleri geniş bir literatür kapsamında incelenmişti. Bu kısımda ise intuitionistic fuzzy kümeler uzayında tanımlı entropi, uzaklık, benzerlik ve kapsama ölçülerinden bahsedilecektir. Atanassov tarafından tanımlanan intuitionistic fuzzy küme kavramının incelenen durumların bipolar yönlerinin ifade edilmesine olanak sağlaması bu tanımın özellikle mühendislik uygulamalarında fuzzy küme ve fuzzy kümenin diğer genişlemelerine nazaran daha kullanışlı olmasına sebep olmaktadır. Güncel literatüre bakıldığında intuitionistic fuzzy küme kavramının özellikle de intuitionistic fuzzy kümeler arasında tanımlanan uzaklık ve benzerlik ölçülerinin çeşitli alanlardaki uygulamalarının oluşturduğu çalışmaların sayısının her geçen gün arttığı görülmektedir. Bu kısımda yukarıda bahsi geçen ölçüler mümkün olduğu kadar geniş bir yelpazede verilmeye çalışılacaktır. Bu kısımda verilecek ölçülerin temel özelliği direkt olarak intuitionistic fuzzy kümenin tanımlandığı kümenin elemanlarının arasındaki uzaklık yerine bu elemanların bahsi geçen intuitionistic fuzzy kümelerle ait üyelik ve üye olmama değerleri arasında bir kıyaslama olmasıdır. Bu yaklaşım daha geniş bir çalışma alanı doğurmaktadır. Bu bağlamda intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan ilk ölçü (normun) Atanassov tarafından tanımlanan aşağıda tanımı verilen normdur.

Tanım 4.3.1: X boştan farklı bir küme ve $A \in IFS^X$ olmak üzere her $x \in X$ için $\sigma_{1,A}(x) = \mu_A(x) + \eta_A(x)$ ile tanımlanan dönüşüm bir (pseudo) norm tanımlar. $\sigma_{1,A}(x)$ değeri x 'in A intuitionistic fuzzy kümesince tanımlılık derecesi olarak adlandırılır (Atanassov, 2012).

Bu yaklaşımla tanımlanabilecek diğer normlarda aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 4.3.2: X boştan farklı bir küme ve $A \in IFS^X$ olmak üzere her $x \in X$ için $\sigma_{2,A}(x) = \sqrt{\mu_A(x)^2 + \eta_A(x)^2}$ ile tanımlanan dönüşüm bir (pseudo) norm tanımlar (Atanassov, 2012).

Tanım 4.3.3: (Cantor Tipindeki Intuitionistic fuzzy norm): X boştan farklı bir küme $A \in IFS^X$ ve her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 0.a_1a_2\dots$ ve $\eta_A(x) = 0.b_1b_2\dots$ olmak üzere $\|x\|_{\mu,\eta} = 0.a_1b_1a_2b_2\dots$ ve $\|x\|_{\eta,\mu} = 0.b_1a_1b_2a_2\dots$ ile tanımlanan dönüşümler birer (pseudo) norm tanımlar. Daha sonra üzerinde genişçe durulacak olan ve uzaklık benzerlik ölçülerinde üye olma ve üye olmama dereceleri ile birlikte belirsizlik derecesinin de eklenmesi şeklinde özetlenebilecek olan Szmidt-Kacprzyk yaklaşımı ile yukarıda tanımlanan norm sayısı $\pi_A(x) = 0.c_1c_2\dots$ olduğu kabul edilerek

$$\|x\|_{\mu,\eta,\pi} = 0.a_1b_1c_1a_2b_2c_2\dots$$

$$\|x\|_{\mu,\pi,\eta} = 0.a_1c_1b_1a_2c_2b_2\dots$$

$$\|x\|_{\eta,\mu,\pi} = 0.b_1a_1c_1b_2a_2c_2\dots$$

$$\|x\|_{\eta,\pi,\mu} = 0.b_1c_1a_1b_2c_2a_2\dots$$

$$\|x\|_{\pi,\mu,\eta} = 0.c_1a_1b_1c_2a_2b_2\dots$$

$$\|x\|_{\pi,\eta,\mu} = 0.c_1b_1a_1c_2b_2a_2\dots$$

şeklinde altıya çıkarılabilir (Atanassov, 2012).

Bu kısımda inceleyeceğimiz son norm Tanev (1995) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanan normdur.

Tanım 4.3.4: X boştan farklı bir küme ve $A \in IFS^X$ olmak üzere her $x \in X$ için $\sigma_{3,A}(x) = \frac{\mu_A(x) + 1 - \eta_A(x)}{2}$ ile tanımlanan dönüşüm bir (pseudo) norm tanımlar (Tanev, 1995).

Intuitionistic fuzzy kümeler için uzaklık ölçülerinin ilk örnekleri Atanassov (1991) tarafından verilmiş olmasına rağmen uzaklık ve benzerlik ölçülerinin Liu manasında aksiyomatik tanımları Dengfen ve Chuntian (2002), Liang ve Shi (2003), Mitchell (2003), Hung ve Yang (2008) tarafından verilmiştir. İlk olarak Hung ve Yang

(2008) tarafından verilen uzaklık ölçüsü tanımını ve sıkça kullanılan uzaklık ölçüsü çeşitleri verilecektir.

Tanım 4.3.5: $d : IFS^X \times IFS^X \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir uzaklık ölçüsü olarak adlandırılır.

- I. Her $A, B \in IFS^X$ için $d(A, B) = d(B, A)$,
- II. Her $A \in IFS^X$ için $d(A, A) = 0$,
- III. Her D crisp kümesi için $d(D, D^c) = \max_{A, B \in IFS^X} d(A, B)$,
- IV. $A \subseteq B \subseteq C$ şartını sağlayan her $A, B, C \in IFS^X$ için $d(A, B) \leq d(A, C)$ ve $d(B, C) \leq d(A, C)$

(Hung ve Yang, 2008).

Atanassov (1999) yayınladığı çalışmasında aşağıdaki uzaklık ölçülerini tanımlamıştır. $A = \{(x_i, \mu_A(x), \eta_A(x)); x_i \in X\}$ ve $B = \{(x_i, \mu_B(x), \eta_B(x)); x_i \in X\}$,

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı iki IFS olmak üzere:

Hamming uzaklık:

$$d_A(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)$$

Normalleştirilmiş Hamming uzaklık:

$$l_A(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)$$

Euclidean uzaklık:

$$e_A(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2)}$$

Normalleştirilmiş Euclidean uzaklık:

$$q_A(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2)}$$

(Atanassov 1999).

Szmidt ve Kacprzyk (2000), IFS'ler arasındaki uzaklığı Atanassov'un tanımlamalarında üyelik ve üye olmama parametrelerine, belirsizlik (hesitation)

parametresinin de eklenmesi ile tanımlanan aşağıdaki uzaklık ölçülerini vermiştir. Bu çalışmada $A = \{(x_i, \mu_A(x_i), \eta_A(x_i)); x_i \in X\}$ ve $B = \{(x_i, \mu_B(x), \eta_B(x)); x_i \in X\}$, $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesi üzerinde tanımlı iki IFS olmak üzere;

Hamming uzaklığı

$$d_{SK}(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|)$$

Normalleştirilmiş Hamming uzaklığı

$$l_{SK}(A, B) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|)$$

Euclidean uzaklığı

$$e_{SK}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2 + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2)}$$

Normalleştirilmiş Euclidean uzaklığı

$$q_{SK}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2 + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2)}$$

şeklinde tanımlamıştır. Szmidt ve Kacprzyk (2000), Atanassov'un gerçek uzaklıkların ortogonal düzleme izdüşümleri olan uzaklık ölçümlerine nazaran, üç boyutlu uzaydaki üç parametreyi de kullanılarak hesaplanan uzaklık ölçümlerinin daha doğru sonuçlar verdiğini savunmuşlardır (Szmidt ve Kacprzyk, 2000).

Örnek 4.3.6: $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ kümesi üzerinde tanımlı iki IFS

$$A = \{(1, 0.5, 0.3), (2, 0.2, 0.6), (3, 0, 1), (4, 0.3, 0.2), (5, 0.2, 0.2), (6, 1, 0), (7, 0, 1)\}$$

$$B = \{(1, 0.2, 0.6), (2, 0, 1), (3, 0, 1), (4, 0.3, 0.2), (5, 0.5, 0.2), (6, 0, 1), (7, 0.9, 0)\}$$

olmak üzere A ve B IFS'lerini aşağıdaki şekilde üç parametreye bağlı olarak, üye olma derecesi - üye olmama derecesi - belirsizlik derecesi, gösterebiliriz.

$$A = \{(0.5, 0.3, 0.2)_1, (0.2, 0.6, 0.2)_2, (0, 1, 0)_3, (0.3, 0.2, 0.5)_4, (0.2, 0.2, 0.6)_5, (1, 0, 0)_6, (0, 1, 0)_7\}$$

$$B = \{(0.2, 0.6, 0.2)_1, (0, 1, 0)_2, (0, 1, 0)_3, (0.3, 0.2, 0.5)_4, (0.5, 0.2, 0.3)_5, (0, 1, 0)_6, (0.9, 0, 0.1)_7\}$$

A ve B arasındaki uzaklıklar üyelik ve üye olmama parametrelerine göre aşağıdaki şekilde elde edilir. Elde edilen bu değerleri aşağıdaki çizelge ile karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4.1. Hamming, N. Hamming, Euclidean, N. Euclidean uzaklık ölçüleri ile elde edilen uzaklıklar (Szmıdt ve Kacprzyk, 2000)

Uzaklık Ölçüsü	Atanassov	Szmıdt-Kacprzyk
Hamming	2.7	3
Normalleştirilmiş Hamming	0.39	0.43
Euclidean	1.46	1.49
Normalleştirilmiş Euclidean	0.55	0.56

Szmıdt ve Kacprzyk, iki parametre yardımı ile hesapladığımız uzaklık ölçülerinin gerçek uzaklıkların ortogonal izdüşümleri olduğundan daha düşük çıktığını ve gerçeğe uygun olan uzaklık ölçüsünün üç parametre ile hesaplanan uzaklık ölçüleri olduğunu savunmuştur (Szmıdt ve Kacprzyk, 2000).

Deschrijver ve ark. (2004) $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlı Hamming ve Euclidean uzaklıklar ile Szmıdt ve Kacprzyk tarafından tanımlanan üç parametrelı Hamming ve Euclidean uzaklıkların topolojik olarak denk olduğunu ispatlamışlardır. $\mathbb{R}^2$ 'de tanımlı Hamming ve Euclidean uzaklıkları sırası ile l_E ve d_E ile gösterelim.

Teorem 4.3.7: $d_1, d_2 \in \{d_E, d_{SK}, l_E, l_{SK}\}$ olmak üzere d_1 ve d_2 tarafından üretilen topolojileri sırası ile τ_{d_1} ve τ_{d_2} ile gösterelim. O halde $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$ eşitliği sağlanır (Deschrijver ve ark., 2004).

Grzegorzewski (2004), IFS'ler arasında Hausdorff metrikten yararlanarak aşağıdaki uzaklık ölçülerini tanımlamış ve bu uzaklık ölçülerini diğer bazı uzaklık ölçüleri ile karşılaştırmıştır. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

Hamming uzaklık:

$$d_G(A, B) = \sum_{i=1}^n \max \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \}$$

Normalleştirilmiş Hamming uzaklığı:

$$l_G(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \}$$

Euclidean uzaklık:

$$e_G(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \max \left\{ \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right)^2, \left(\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right)^2 \right\}}$$

Normalleştirilmiş Euclidean uzaklık:

$$q_G(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \left\{ \left(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right)^2, \left(\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right)^2 \right\}}$$

(Grzegorzewski, 2004).

Açıkça görülür ki, Grzegorzewski tarafından üretilen bu metrikler uygulamada büyük kolaylıklar sağlar. Fakat gerçek durumda açıklık kavuşturamadığı bazı durumlar vardır. Bu durumlara örnek olarak aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.3.8: $X = \{x_1\}$ olmak üzere A, B, C ; X üzerinde $A = \{(x_1, 1, 0)\}$, $B = \{(x_1, 0, 0)\}$, $C = \{(x_1, 0, 1)\}$ ile tanımlı üç IFS olsun. Bu üç IFS'yi on kişinin oy kullandığı bir model olarak yorumlarsak A , tüm oyların x_1 adayının lehinde verildiği durumu C tüm oyların x_1 adayının aleyhinde verildiği durumu ve B , bazı oyların x_1 adayının lehinde ve kalanının aleyhinde verildiği durumu gösterebilir. Haklı sebeplere dayanarak A ve B arasındaki uzaklığın A ve C arasındaki uzaklıktan daha az olmasını bekleriz. Fakat Grzegorzewski tarafından tanımlanan metriklere göre bu uzaklıklar birbirine eşittir (Szmıdt ve Kacprzyk, 2009).

Szmıdt ve Kacprzyk (2009), Grzegorzewski'nin yukarıda vermiş olduğu normalleştirilmiş Hamming uzaklık ölçüsüne belirsizlik derecesini de ekleyerek farklı bir uzaklık ölçüsü tanımlamış ve bu yeni uzaklık ölçüsü ile Grzegorzewski tarafından tanımlanan uzaklık ölçünü karşılaştırmıştır. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$l_{H-SK}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \left\{ \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|, \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right|, \left| \pi_A(x_i) - \pi_B(x_i) \right| \right\}.$$

Szmıdt ve Kacprzyk, tek elemanlı kümeler üzerinde tanımlı IFS'ler arasındaki Hausdorff ve Hamming uzaklıkların eşit olması gerektiğini savunmuşlar ve $X = \{x\}$ kümesi üzerinde tanımlı A ve B IFS'leri için aşağıdaki eşitliği doğrulamışlardır;

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right|, \left| \eta_A(x) - \eta_B(x) \right|, \left| \pi_A(x) - \pi_B(x) \right| \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| + \left| \eta_A(x) - \eta_B(x) \right| + \left| \pi_A(x) - \pi_B(x) \right| \right) \end{aligned}$$

Örnek 4.3.9: $X = \{x\}$ olmak üzere X üzerinde üç parametrelili gösterimleri ile

$$A = \left\{ (1, 0, 0)_x \right\}, B = \left\{ (0, 1, 0)_x \right\}, D = \left\{ (0, 0, 1)_x \right\}, G = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)_x \right\}, E = \left\{ \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right)_x \right\}$$

IFS'leri tanımlanmış olsun. Buradan

$$l_{H-SK}(A, B) = \max \{ |1-0|, |0-1|, |0-0| \} = 1,$$

$$l_{H-SK}(A, D) = \max \{ |1-0|, |0-0|, |0-1| \} = 1,$$

$$l_{H-SK}(B, D) = \max \{ |0-0|, |1-0|, |0-1| \} = 1,$$

$$l_{H-SK}(A, G) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, |0-0| \right\} = \frac{1}{2},$$

$$l_{H-SK}(A, E) = \max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{3}{4},$$

$$l_{H-SK}(B, G) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, \left| 1 - \frac{1}{2} \right|, |0-0| \right\} = \frac{1}{2},$$

$$l_{H-SK}(B, E) = \max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{3}{4},$$

$$l_{H-SK}(D, G) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, \left\| 0 - \frac{1}{2} \right\|, |1-0| \right\} = 1,$$

$$l_{H-SK}(D, E) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{4} \right|, \left| 1 - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{1}{2},$$

$$l_{H-SK}(G, E) = \max \left\{ \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right|, \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{1}{2},$$

Szmidt ve Kacprzyk elde ettikleri bu uzaklıkları üç parametre ile tanımlanan Hamming uzaklık ile karşılaştırmışlar ve sonuçların eşit olduğunu göstermişlerdir.

$$d_{SK}(A, B) = \frac{1}{2} (|1-0| + |0-1| + |0-0|) = 1,$$

$$d_{SK}(A, D) = \frac{1}{2} (|1-0| + |0-0| + |0-1|) = 1,$$

$$d_{SK}(B, D) = \frac{1}{2} (|0-0| + |1-0| + |0-1|) = 1,$$

$$d_{SK}(A, G) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{2} \right| + \left| 0 - \frac{1}{2} \right| + |0 - 0| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_{SK}(A, E) = \frac{1}{2} \left(\left| 1 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right) = \frac{3}{4},$$

$$d_{SK}(B, G) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{2} \right| + \left| 1 - \frac{1}{2} \right| + |0 - 0| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_{SK}(B, E) = \frac{1}{2} \left(\left| 1 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right) = \frac{3}{4},$$

$$d_{SK}(D, G) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{2} \right| + \left\| 0 - \frac{1}{2} \right\| + |1 - 0| \right) = 1,$$

$$d_{SK}(D, E) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left| 1 - \frac{1}{2} \right| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_{SK}(G, E) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right) = \frac{1}{2},$$

(Szmidt ve Kacprzyk, 2009).

Aynı çalışmada Szmidt ve Kacprzyk, Grzegorzewski tarafından tanımlanan Hausdorff uzaklıkların bu şartı sağlamadıklarını aşağıdaki örnek ile göstermişlerdir.

Örnek 4.3.10: $X = \{x\}$ olmak üzere X üzerinde iki parametrelili gösterimleri ile

$$A = \left\{ \left(x, 1, 0 \right) \right\}, B = \left\{ \left(x, 0, 1 \right) \right\}, D = \left\{ \left(x, 0, 0 \right) \right\}, G = \left\{ \left(x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}, E = \left\{ \left(x, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right) \right\} \text{ IFS'leri}$$

için

$$l_G(A, B) = \max \{ |1 - 0|, |0 - 1| \} = 1,$$

$$l_G(A, D) = \max \{ |1 - 0|, |0 - 0| \} = 1,$$

$$l_G(B, D) = \max \{ |0 - 0|, |1 - 0| \} = 1,$$

$$l_G(A, G) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{1}{2},$$

$$l_G(A, E) = \max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{4} \right| \right\} = \frac{3}{4},$$

$$l_G(B, G) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, \left| 1 - \frac{1}{2} \right| \right\} = \frac{1}{2},$$

$$l_G(B, E) = \max \left\{ \left| 1 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{4} \right| \right\} = \frac{3}{4},$$

$$l_G(D, G) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{2} \right|, \left\| 0 - \frac{1}{2} \right\| \right\} = \frac{1}{2},$$

$$l_G(D, E) = \max \left\{ \left| 0 - \frac{1}{4} \right|, \left| 0 - \frac{1}{4} \right| \right\} = \frac{1}{4},$$

$$l_G(G, E) = \max \left\{ \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right|, \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| \right\} = \frac{1}{4}$$

Diğer taraftan Atanassov tarafından tanımlanan Hamming uzaklık ölçüsü ile bu IFS'ler arası uzaklık aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$d_A(A, B) = \frac{1}{2}(|1-0| + |0-1|) = 1,$$

$$d_A(A, D) = \frac{1}{2}(|1-0| + |0-0|) = \frac{1}{2},$$

$$d_A(B, D) = \frac{1}{2}\{|0-0|, |1-0|\} = \frac{1}{2},$$

$$d_A(A, G) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{2} \right| + \left| 0 - \frac{1}{2} \right| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_A(A, E) = \frac{1}{2} \left(\left| 1 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_A(B, G) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{2} \right| + \left| 1 - \frac{1}{2} \right| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_A(B, E) = \frac{1}{2} \left(\left| 1 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_A(D, G) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{2} \right| + \left\| 0 - \frac{1}{2} \right\| \right) = \frac{1}{2},$$

$$d_A(D, E) = \frac{1}{2} \left(\left| 0 - \frac{1}{4} \right| + \left| 0 - \frac{1}{4} \right| \right) = \frac{1}{4},$$

$$d_A(G, E) = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right| \right) = \frac{1}{4}$$

Bu hesaplamalara göre; $l_G(A, D) \neq d_A(A, D)$, $l_G(B, D) \neq d_A(B, D)$, $l_G(A, E) \neq d_A(A, E)$, $l_G(B, E) \neq d_A(B, E)$ ifadeleri elde edilir. Böylece Grzegorzewski tarafından tanımlanan uzaklığın Atanassov tarafından tanımlanan Hamming uzaklık ile örtüşmediği görülür. Bu ise sağlanması gereken bir şarttır. Szmidt ve Kacprzyk bu nedenle IFS'ler arasındaki uzaklıkların üç parametrelilik olarak hesaplanması gerektiğini savunmuşlardır (Szmidt ve Kacprzyk, 2009).

Yang ve Chiclana (2012), Grzegorzewski tarafından tanımlanan diğer uzaklık ölçülerini belirsizlik derecesini de ekleyerek tekrar tanımlamışlardır. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

Hamming uzaklık:

$$d_{YC}(A, B) = \sum_{i=1}^n \max \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \}$$

Normalleştirilmiş Hamming uzaklığı: (Bu uzaklık aynı zamanda Szmidt ve Kacprzyk tarafından tanımlanmıştır.)

$$l_{YC}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \}$$

Euclidean uzaklık:

$$e_{YC}(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \max \{ (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2, (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2, (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 \}}$$

Normalleştirilmiş Euclidean uzaklık:

$$q_{YC}(A, B) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max \{ (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2, (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2, (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 \}}$$

(Yang ve Chiclana, 2012).

Wang ve Xin (2005) Szmidt ve Kacprzyk tarafından tanımlanan uzaklık ölçüsünün bazı durumları yorumlamakta yetersiz kaldığı düşüncesi ile aşağıdaki uzaklık ölçülerini vermişlerdir. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$1. \quad d_{WX-1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|}{4} \right)$$

$$+ \frac{\max \left\{ \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|, \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right| \right\}}{2} \right)$$

2. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$ ve $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $0 \leq \omega_i \leq 1$ olmak üzere

$$d_{WX-2}(A, B) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{\left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right| + \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right|}{4} \right. \\ \left. + \frac{\max \left\{ \left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|, \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right| \right\}}{2} \right)$$

$$3. \quad d_{WX-3}(A, B) = \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right| + \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right|}{2} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Wang ve Xin, 2005).

Lu ve Wang (2003), aşağıdaki uzaklık ölçüsünü tanımlamıştır.

$$1. \quad d_{LW}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)) - (\mu_B(x_i) - \eta_B(x_i))}{4} \right. \\ \left. + \frac{\left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right| + \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right| + \left| \pi_A(x_i) - \pi_B(x_i) \right|}{4} \right)$$

(Lu ve Wang, 2003).

Huang ve ark. (2005), Atanassov ve Grzegorzewski tarafından verilen tanımların birleştirilmesi ile aşağıdaki uzaklık ölçülerini vermişlerdir. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$1. \quad d_{HLW-1}(A, B) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\left(\left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right|^p + \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right|^p \right)}{2n} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (p \geq 1)$$

$$2. \quad d_{HLW-2}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)) - (\mu_B(x_i) - \eta_B(x_i))}{4} \right. \\ \left. + \frac{\left| \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) \right| + \left| \eta_A(x_i) - \eta_B(x_i) \right| + \left| \pi_A(x_i) - \pi_B(x_i) \right|}{4} \right)$$

3. $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_1 \geq \lambda_2$ olmak üzere;

$$d_{HLW-3}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\lambda_1 \max \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \} \right. \\ \left. + \lambda_2 \min \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \} \right)$$

4. $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ve $p \geq 1$ olmak üzere;

$$d_{HLW-4}(A, B) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \left(\lambda_1 \max \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p \} \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda_2 \min \{ |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p \} \right) \right)^{\frac{1}{p}}$$

5.
$$d_{HLW-5}(A, B) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{2 + \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|) \right)^p},$$

6.
$$d_{HLW-6}(A, B) = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 2(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{2n + \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)},$$

7.
$$d_{HLW-7}(A, B) = \frac{2 \sum_{i=1}^n \left(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{(2n)^{\frac{1}{p}} + \sum_{i=1}^n \left(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}}$$

(Huang ve ark., 2005).

Hung ve Yang (2004), intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki Hausdorff uzaklığına bağlı olan aşağıdaki uzaklığı tanımlamıştır. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$, $I_A(x_i) = [\mu_A(x_i), 1 - \eta_A(x_i)]$ ve $I_B(x_i) = [\mu_B(x_i), 1 - \eta_B(x_i)]$ olarak tanımlanmak ve $H(I_A(x_i), I_B(x_i))$, $I_A(x_i)$ ve $I_B(x_i)$ arasındaki Hausdorff uzaklık olmak üzere intuitionistic fuzzy kümeler arasında

$$d_{HY-H1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(I_A(x_i), I_B(x_i))$$

ile tanımlı bir uzaklık ölçüsüdür (Hung ve Yang, 2004).

Hung ve Yang (2006), d_p metriğine dayanan aşağıdaki şekilde tanımlı uzaklık ölçüsünü vermiştir. $I_A(x_i) = [\mu_A(x_i), 1 - \eta_A(x_i)]$ ve $I_B(x_i) = [\mu_B(x_i), 1 - \eta_B(x_i)]$ olmak üzere

$$L_{HY}^p(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_p(I_A(x_i), I_B(x_i))$$

Son olarak verilen dört metriğin ortak özelliği uzaklık hesaplamalarının IFS'lerin sadece üyelik ve üye olmama parametreleri üzerinden yapılıyor oluşudur. Bu son dört tanımlamada tereddüt (hesitation) parametresi hesaplama dâhil edilmemiştir (Hung ve Yang, 2006).

Vlachos ve Sergiadis (2007), aykırılık (discrimination) derecesi kavramına dayalı aşağıdaki uzaklık ölçüsünü tanımlamıştır. Bu tanıma göre A intuitionistic fuzzy kümesinin B 'den aykırılığının ölçüsü $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$l_{vs}(A, B) = \sum_{i=1}^n \left[\mu_A(x_i) \ln \frac{\mu_A(x_i)}{\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)} + \eta_A(x_i) \ln \frac{\eta_A(x_i)}{\eta_A(x_i) + \eta_B(x_i)} \right]$$

ile tanımlanır. Bu ölçünün simetrik olmadığı aşikârdır. Bu ölçüyü kullanarak $d_{vs}(A, B) = l_{vs}(A, B) + l_{vs}(B, A)$ eşitliği ile tanımlanan d_{vs} bir uzaklık ölçüsüdür (Vlachos ve Sergiadis, 2007).

Xu (2007), birçok alanda, örneğin çoklu karar verme problemlerinde, değişkenlerin farklı önem derecelerine sahip olduğunu ve bunun uzaklığı hesaplarken dikkate alınması gerektiğini belirtmiş ve önceki çalışmalarda verilen uzaklık ölçülerini ağırlık değerleri ekleyerek tekrar tanımlamıştır. $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

1. $\alpha > 0$, $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere

$$d_{X-1}(A, B)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \left(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^\alpha + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^\alpha + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^\alpha \right) \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

2. $X = [a, b]$, $\omega: X \rightarrow [0, 1]$ ve $\int_a^b \omega(x) = 1$ olmak üzere

$$d_{X-2}(A, B)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i \left(\int_a^b \left| \mu_A(x_i) - \mu_A(x_i) \right|^\alpha + \left| \eta_A(x_i) - \eta_A(x_i) \right|^\alpha + \left| \pi_A(x_i) - \pi_A(x_i) \right|^\alpha \right) dx \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

(Xu, 2007).

Benzer yaklaşımla Xu ve Chen (2008), aşağıdaki uzaklık ölçülerini tanımlamıştır.

$$\begin{aligned} 3. \quad d_{XC-1}(A, B) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \max \left\{ \left| \mu_A(x_i) - \mu_A(x_i) \right|, \left| \eta_A(x_i) - \eta_A(x_i) \right| \right\} \\ 4. \quad d_{XC-2}(A, B) &= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \max \left\{ \left(\mu_A(x_i) - \mu_A(x_i) \right)^2, \left(\eta_A(x_i) - \eta_A(x_i) \right)^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ 5. \quad d_{XC-3}(A, B) &= \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_i \max \left\{ \left(\mu_A(x_i) - \mu_A(x_i) \right)^\alpha, \left(\eta_A(x_i) - \eta_A(x_i) \right)^\alpha \right\} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ 6. \quad d_{XC-4}(A, B) &= \left(\int_a^b \omega(x) \max \left\{ \left(\mu_A(x) - \mu_A(x) \right)^2, \left(\eta_A(x) - \eta_A(x) \right)^2 \right\} dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ 7. \quad d_{XC-5}(A, B) &= \left(\int_a^b \omega(x) \max \left\{ \left(\mu_A(x) - \mu_A(x) \right)^\alpha, \left(\eta_A(x) - \eta_A(x) \right)^\alpha \right\} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ 8. \quad d_{WX-6}(A, B) &= \int_a^b \omega(x) \left(\frac{\left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right| + \left| \eta_A(x) - \eta_B(x) \right|}{4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\max \left\{ \left| \mu_A(x) - \mu_B(x) \right|, \left| \eta_A(x) - \eta_B(x) \right| \right\}}{2} \right) dx \end{aligned}$$

(Xu ve Chen, 2008).

Chaira ve Ray (2008), ayrılık (divergence) ölçüsüne bağlı iki uzaklık ölçüsü tanımlamış ve bu ölçüleri görüntü işleme alanında kenar tanımlama üzerinde performansını incelemiştir. Chaira ve Ray tarafından tanımlanan ayrılık ölçüsü aşağıda verilmiştir. Burada x_{ij} , $n \times n$ boyutundaki bir resmin i . satırı ve j . sütunundaki pikseli temsil etmektedir.

$$div_{CR}(A, B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(1 - \left(\left(1 - \mu_A(x_{ij}) \right) e^{\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij})} \right) - \mu_A(x_{ij}) e^{\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij})} \right)$$

Tanımlanan bu ölçünün simetrik olmadığı aşikârdır. Bu ölçü yardımı ile aşağıdaki iki uzaklık ölçüsü tanımlanabilir.

$$\begin{aligned}
1. \quad d_{CR-1}(A, B) &= div_{CR}(A, B) + div_{CR}(B, A) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(2 - \left(1 - \left(1 - \mu_A(x_{ij}) + \mu_B(x_{ij}) \right) e^{\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij})} \right) - \left(1 - \mu_B(x_{ij}) + \mu_A(x_{ij}) \right) e^{\mu_B(x_{ij}) - \mu_A(x_{ij})} \right) \\
2. \quad d_{CR-1}(A, B) &= \\
&\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(2 - \left[\left(1 - \left(\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij}) \right) + \left(\pi_B(x_{ij}) - \pi_A(x_{ij}) \right) \right) e^{\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij}) - (\pi_B(x_{ij}) - \pi_A(x_{ij}))} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(1 - \left(\pi_B(x_{ij}) - \pi_A(x_{ij}) \right) + \left(\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij}) \right) \right) e^{\pi_B(x_{ij}) - \pi_A(x_{ij}) - (\mu_A(x_{ij}) - \mu_B(x_{ij}))} \right] \right)
\end{aligned}$$

(Chaira ve Ray, 2008).

Yang ve Chiclana (2009), intuitionistic fuzzy kümelerin küresel gösterimlerini tanımlamış ve bu gösterimden yararlanarak bazı uzaklık ölçüleri tanımlamışlardır.

$$\begin{aligned}
1. \quad d_{YC(s)-1}(A, B) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \arccos \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\mu_A(x_i)^2 - \mu_B(x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\eta_A(x_i)^2 - \eta_B(x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\pi_A(x_i)^2 - \pi_B(x_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} \\
2. \quad d_{YC(s)-2}(A, B) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \arccos \left\{ \left[\left(\mu_A(x_i) \mu_B(x_i) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\eta_A(x_i) \eta_B(x_i) \right)^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(\pi_A(x_i) \pi_B(x_i) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

(Yang ve Chiclana, 2009).

Tcvetkov ve ark. (2010) bazı ağırlıklı uzaklık ölçülerini tanımlamışlardır.

$X_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}\}$ ve $A_n, B_n \in IFS^{X_n}$ olmak üzere $g : X_n \rightarrow [0, 1]$ ve

$\sum_{i=1}^n g(x_i^{(n)}) \leq 1$ olarak tanımlansın. Bu tanımlamalarla birlikte

$$\begin{aligned}
1. \quad d_{TSK-1}(A_n, B_n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n g(x_i^{(n)}) \left(\left| \mu_A(x_i^{(n)}) - \mu_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \eta_A(x_i^{(n)}) - \eta_B(x_i^{(n)}) \right| \right. \\
&\quad \left. + \left| \pi_A(x_i^{(n)}) - \pi_B(x_i^{(n)}) \right| \right)
\end{aligned}$$

2. $d_{TSK-2}(A_n, B_n) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n g(x_i^{(n)}) \left(\left| \mu_A(x_i^{(n)}) - \mu_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \eta_A(x_i^{(n)}) - \eta_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \pi_A(x_i^{(n)}) - \pi_B(x_i^{(n)}) \right| \right)$
3. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için X_i 'ler Her $i \neq j$ için $X_i \cap X_j = \emptyset$ şartını sağlayan boştan

farklı kümeler , $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$, $g : X \rightarrow (0, 1]$ olmak üzere

$$d_{TSK-3}(A_n, B_n) = \frac{1}{2|X|} \sum_{i=1}^n \int_{X_i} g(x_i^{(n)}) \left(\left| \mu_A(x_i^{(n)}) - \mu_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \eta_A(x_i^{(n)}) - \eta_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \pi_A(x_i^{(n)}) - \pi_B(x_i^{(n)}) \right| \right) dx$$

4. d_{TSK-3} ölçüsünün kabulleri ile birlikte

$$d_{TSK-4}^i(A_n, B_n) = \frac{1}{2|X_i|} \int_{X_i} g(x_i^{(n)}) \left(\left| \mu_A(x_i^{(n)}) - \mu_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \eta_A(x_i^{(n)}) - \eta_B(x_i^{(n)}) \right| + \left| \pi_A(x_i^{(n)}) - \pi_B(x_i^{(n)}) \right| \right) dx$$

(Tcvetkov ve ark., 2010).

Zhang (2013) farklı bir yaklaşım ile bazı yeni uzaklık ölçüleri tanımlamıştır.

1. $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $(\mu_A, 1 - \eta_A, \mu_B, 1 - \eta_B)$ sıralı dörtlüsünü azalan olarak tekrar sıralanması ile elde edilecek yeni sıralı dörtlüyü (a, b, c, d) ile göstereyim.

$U = a - d$, $I = b - c$ olmak üzere

$$d_{Z-1}(A, B) = \begin{cases} \frac{(U - I)}{2}, & 1 - \eta_A \geq \mu_B \\ \frac{(U + I)}{2}, & 1 - \eta_A < \mu_B \end{cases}$$

ile tanımlı $d_{Zhang-1}$ bir uzaklık ölçüsüdür.

2. $A, B \in IFS^X$ olmak üzere genelliği kaybetmeden bu intuitionistic fuzzy kümeleri

$$m_A = \frac{\mu_A + 1 - \eta_A}{2} \quad \text{ve} \quad m_B = \frac{\mu_B + 1 - \eta_B}{2} \quad \text{olarak tanımlanmak üzere}$$

$(\mu_{\tilde{A}}, m_A, 1 - \eta_A)$ ve $(\mu_{\tilde{B}}, m_B, 1 - \eta_B)$ simetrik üçgen şekilli intuitionistic fuzzy sayılarına çevrilir. Burada

$$\mu_{\tilde{A}} = \begin{cases} \frac{t-\mu_A(t)}{\mu_A(t)-\mu_B(t)} & , \quad \mu_A(t) \leq t \leq m_A(t) \\ \frac{1-t-\eta_A(t)}{1-m_A(t)-\eta_A(t)} & , \quad m_A(t) \leq t \leq 1-\eta_A(t) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlıdır ve $\mu_{\tilde{B}}$ benzer şekilde tanımlanabilir. Bu tanımlamalar ile birlikte

$$I = \int_0^1 \min\{\mu_{\tilde{A}}(t), \mu_{\tilde{B}}(t)\} dt$$

ve

$$U = \int_0^{m_A} \max\{\mu_{\tilde{A}}(t), \mu_{\tilde{B}}(t)\} dt + |\mu_B(t) - \mu_A(t)| + \int_{m_B}^1 \max\{\mu_{\tilde{A}}(t), \mu_{\tilde{B}}(t)\} dt$$

olarak tanımlanmak üzere $d_{Zhang-2}(A, B) = U - I$ bir uzaklık ölçüsüdür (Zhang, 2013).

Boran ve Akay (2014) iki intuitionistic fuzzy kümeler için iki uzaklık ölçüsü tanımlamış ve bu ölçüleri örüntü tanıma alanındaki performansını incelemiştir.

$t = 2, 3, 4, \dots$, $p = 1, 2, 3, \dots$ ve $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere

1. $d_{BA-1}(A, B) = \left(\frac{1}{2n(t+1)^p} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)) \right|^p + \left| t(\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\} \right)^{\frac{1}{p}}$
2. $d_{BA-1}(A, B) = \left(\frac{1}{2(t+1)^p} \sum_{i=1}^n \omega_i \left\{ \left| t(\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) - (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)) \right|^p + \left| t(\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)) - (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) \right|^p \right\} \right)^{\frac{1}{p}}$

(Boran ve Akay, 2014)

Du ve Hu (2015) yığınım (aggregation) dönüşümünden yardımı ile n-tane uzaklık ölçüsünden bir uzaklık ölçüsü elde etmişlerdir. Şimdi yığınım dönüşümünün tanımı verilecektir.

Tanım 4.3.11: $f:[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir yığınım dönüşümü adını alır.

1. $f(0,0,...,0)=0$ ve $f(1,1,...,1)=1$
2. Her $i \in \{1,2,...,n\}$ için $x_i \leq y_i$ olmak üzere $f(x_1,x_2,...,x_n) \leq f(y_1,y_2,...,y_n)$

(Beliakov ve ark., 2007).

Tanım 4.3.12: f bir yığınım fonksiyonu olmak üzere

- a. $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ olacak $x_1,x_2,...,x_n \in (0,1]$ sayıları mevcut ise f yığınım fonksiyonuna sıfır bölgenli denir.
- b. $f(x_1,x_2,...,x_n)=0$ olması durumunda $x_1,x_2,...,x_n$ sayılarından en az biri sıfır ise f yığınım fonksiyonuna sıfır bölensiz denir.
- c. $\min\{x_1,x_2,...,x_n\} \leq f(x_1,x_2,...,x_n) \leq \max\{x_1,x_2,...,x_n\}$ ise f yığınım fonksiyonuna averaj dönüşümü denir (Bustince ve ark., 2012).

Teorem 4.3.13: $d_1, d_2, ..., d_n$ n-tane uzaklık ölçüsü ve f sıfır bölensiz bir yığınım dönüşümü olmak üzere $d_{DH-f}(A,B) = f(d_1(A,B), d_2(A,B), ..., d_n(A,B))$ ile tanımlı dönüşüm bir uzaklık ölçüsüdür (Du ve Hu, 2015).

Grzegorzewski (2009) IFN tanımını yaptığı çalışmasında IFN'ler arasında bir uzaklık ölçüsü vermiştir. Bu ölçü sayılamaz kümeler üzerinde de tanımlı bir ölçü olduğundan önemlidir. Burada A bir IFN olmak üzere

$$A_L^+ = \inf \{x \in \mathbb{R}; \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

$$A_U^+ = \sup \{x \in \mathbb{R}; \mu_A(x) \geq \alpha\},$$

$$A_L^- = \inf \{x \in \mathbb{R}; \eta_A(x) \leq 1-\alpha\},$$

$$A_U^- = \sup \{x \in \mathbb{R}; \eta_A(x) \leq 1-\alpha\}$$

olarak tanımlanmak üzere d_p metriği $A, B \in E_{IFN}$ ve

$1 \leq p < \infty$ için :

$$d_p(A, B) = \left(\frac{1}{4} \int_0^1 |A_L^+(\alpha) - B_L^+(\alpha)|^p d\alpha + \frac{1}{4} \int_0^1 |A_U^+(\alpha) - B_U^+(\alpha)|^p d\alpha + \frac{1}{4} \int_0^1 |A_L^-(\alpha) - B_L^-(\alpha)|^p d\alpha + \frac{1}{4} \int_0^1 |A_U^-(\alpha) - B_U^-(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}},$$

$p = \infty$ için:

$$d_p(A, B) = \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_L^+(\alpha) - B_L^+(\alpha)| + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_U^+(\alpha) - B_U^+(\alpha)| + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_L^-(\alpha) - B_L^-(\alpha)| + \frac{1}{4} \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_U^-(\alpha) - B_U^-(\alpha)|$$
 ifadeleri ile tanımlanır.

Diğer taraftan yukarıda tanımlanan crisp kümeler kullanılarak ρ_p metriği

$1 \leq p < \infty$ için:

$$\rho_p(A, B) = \max \left\{ \left(\int_0^1 |A_L^+(\alpha) - B_L^+(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_0^1 |A_U^+(\alpha) - B_U^+(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_0^1 |A_L^-(\alpha) - B_L^-(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\int_0^1 |A_U^-(\alpha) - B_U^-(\alpha)|^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$p = \infty$ için:

$$d_p(A, B) = \max \left\{ \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_L^+(\alpha) - B_L^+(\alpha)|, \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_U^+(\alpha) - B_U^+(\alpha)|, \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_L^-(\alpha) - B_L^-(\alpha)|, \sup_{0 < \alpha \leq 1} |A_U^-(\alpha) - B_U^-(\alpha)| \right\}$$
 ifadeleri ile tanımlanır (Grzegorzewski, 2009).

Grzegorzewski (2009), $1 \leq p < \infty$ için (IFN, d_p) , (IFN, ρ_p) uzaylarının birer metrik uzay olduğunu göstermiştir. Aynı çalışmada Grzegorzewski, IFN uzayında iki sıralama tanımlamıştır. $\Psi \subseteq IFN$ olmak üzere $A, B \in \Psi$, $H = L(\Psi)$ ve d 'de E_{IFN} uzayında bir metrik olmak üzere $\Psi \times \Psi$ uzayında $A \succ_L B \Leftrightarrow d(A, H) \geq d(B, H)$ ve $G = U(\Psi)$ olmak üzere $A \succ_U B \Leftrightarrow d(A, G) \leq d(B, G)$. Bu tanımlarda $L(\Psi)$, Ψ ailesinin alt horizonu olarak adlandırılan ve herhangi bir $A \in \Psi$ için $\sup(\sup(L(\Psi))) \leq \inf(\sup(A))$ şartını sağlayan IFN ve benzer şekilde $U(\Psi)$ Ψ ailesinin üst horizonu olarak adlandırılan ve herhangi bir $A \in \Psi$ için $\inf(\sup(L(\Psi))) \leq \sup(\sup(A))$ şartını sağlayan IFN' dir (Grzegorzewski, 2009).

Sonuç olarak bu uzaklık ölçülerinin hangisinin bir diğerinden daha iyi sonuçlar verdiğini söylemek güçtür. Böyle bir yargıya ancak üzerinde çalıştığımız problemin karakteristiğini belirleyen veriler ve spesifik gereklilikler belirlendikten sonra varılabilir. Yukarıdaki ifadelerden çıkarılabilecek bir diğer sonuç ise IFN' ler için tanımlanan metriklerin azlığıdır. Bu konunun ayrıntılı olarak incelenmesi teori ve uygulama için yeni çalışma alanları doğuracaktır.

Benzerlik ölçüsü tanımı temelde Liu (1992) tanımına sadık kalınarak birkaç farklı şekilde tanımlanmıştır. Bu kısımda bu tanımlar kronolojik sırası ile incelenecektir.

Dengfeng ve Chuntian (2002) intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki benzerlik ölçüsünün aksiyomlarını vermiştir.

Tanım 4.3.14: X boştan farklı bir küme $S : IFS^X \times IFS^X \rightarrow [0,1]$ olmak üzere S dönüşümü her $A, B, C \in IFS^X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir benzerlik ölçüsü adını alır.

$$S1. 0 \leq S(A, B) \leq 1$$

$$S2. A = B \text{ ise } S(A, B) = 1$$

$$S3. S(A, B) = S(B, A)$$

$$S4. A \subseteq B \subseteq C \text{ ise } S(A, C) \leq S(A, B) \text{ ve } S(A, C) \leq S(B, C)$$

(Dengfeng ve Chuntian, 2002).

Aynı çalışmada Dengfeng ve Chuntian aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamıştır.

$$1. \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, A, B \in IFS^X, \varphi_A(i) = \frac{\mu_A(x_i) + 1 - \eta_A(x_i)}{2}, p \geq 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{DC-1}(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (\varphi_A(i) - \varphi_B(i))^p}$$

$$2. \quad X = [a, b], A, B \in IFS^X, \varphi_A(i) = \frac{\mu_A(x_i) + 1 - \eta_A(x_i)}{2}, p \geq 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{DC-2}(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{b-a}} \sqrt[p]{\int_a^b (\varphi_A(i) - \varphi_B(i))^p dx}$$

3. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $\varphi_A(i) = \frac{\mu_A(x_i) + 1 - \eta_A(x_i)}{2}$, $p \geq 1$ $\omega_i \in [0, 1]$ ve

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{DC-3}(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i (\varphi_A(i) - \varphi_B(i))^p}$$

4. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$, $\varphi_A(i) = \frac{\mu_A(x_i) + 1 - \eta_A(x_i)}{2}$, $p \geq 1$, $\omega: X \rightarrow [0, 1]$ ve

$$\int_a^b \omega(x) dx = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{DC-4}(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\int_a^b \omega(x) (\varphi_A(i) - \varphi_B(i))^p dx}$$

(Dengfeng ve Chuntian, 2002).

Mitchell (2003), Dengfeng ve Chuntian tanımının örüntü tanıma alanındaki bazı durumların incelenmesinde yetersiz kaldığını savunmuş ve aşağıdaki tanım ve ölçüleri vermiştir.

Tanım 4.3.15: X boştan farklı bir küme $S: IFS^X \times IFS^X \rightarrow [0, 1]$ olmak üzere S dönüşümü her $A, B, C \in IFS^X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir benzerlik ölçüsü adını alır.

S1. $0 \leq S(A, B) \leq 1$

S2. $A = B$ ancak ve ancak $S(A, B) = 1$

S3. $S(A, B) = S(B, A)$

S4. $A \subseteq B \subseteq C$ ise $S(A, C) \leq S(A, B)$ ve $S(A, C) \leq S(B, C)$

(Mitchell, 2003).

Bu tanımda Mitchell'in, Dengfeng ve Chuntian'ın tanımının 2. Maddesini değiştirdiği görülmektedir. Bu şartlara ek olarak Li ve ark. (2007) benzerlik ölçülerinin daha mutlak ve kusursuz olması için aşağıdaki şartı da sağlaması gerektiğini belirtmişlerdir.

S5. A bir crisp küme ise $S(A, \bar{A}) = 0$ (Li ve ark., 2007)

Hung ve Yang (2008), benzerlik ölçüsü tanımını Liu yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

X boştan farklı bir küme $S : IFS^X \times IFS^X \rightarrow [0,1]$ olmak üzere S dönüşümü her $A, B, C \in IFS^X$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir benzerlik ölçüsü adını alır.

S1. Her $A, B \in IFS^X$ için $S(A, B) = S(B, A)$,

S2. Her A crisp kümesi için $S(A, \bar{A}) = 0$,

S3. $S(A, A) = \max_{B, C \in IFS^X} S(B, C)$,

S4. $A \subseteq B \subseteq C$ ise $S(A, C) \leq S(A, B)$ ve $S(A, C) \leq S(B, C)$

(Hung ve Yang, 2008).

Mitchell (2003), Dengfeng ve Chuntian'ın tanımladığı benzerlik ölçüsünün modifiye edilmiş hali olan aşağıdaki uzaklık ölçüsünü tanımlamıştır.

$$S_M(A, B) = \frac{1}{2} (S_{DC-4}(A, B) + S_{DC-4}(\varphi_A, \varphi_B))$$

(Mitchell, 2003).

Liang ve Shi (2003), Dengfeng ve Chuntian benzerlik ölçülerinin açığını kapatacak olan aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamışlardır.

$$1. \quad X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad , \quad A, B \in IFS^X \quad , \quad \varphi_{\mu_{AB}}(i) = \frac{\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)}{2} \quad ,$$

$$\varphi_{\eta_{AB}}(i) = \left| \frac{1 - \eta_A(x_i)}{2} - \frac{1 - \eta_B(x_i)}{2} \right| \text{ ve } p \geq 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{LS-1}(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (\varphi_{\mu_{AB}}(i) + \varphi_{\eta_{AB}}(i))^p}$$

2. Yukarıdaki kabuller ile beraber

$$m_A(x_i) = \frac{\mu_A(x_i) + 1 - \eta_A(x_i)}{2} ,$$

$$m_{A1}(x_i) = \frac{\mu_A(x_i) + m_A(x_i)}{2}$$

$$m_{A2}(x_i) = \frac{m_A(x_i) + 1 - \eta_A(x_i)}{2} ,$$

$$\varphi_{S_1}(i) = \frac{|m_{A_1}(x_i) - m_{B_1}(x_i)|}{2},$$

$$\varphi_{S_2}(i) = \frac{|m_{A_2}(x_i) - m_{B_2}(x_i)|}{2}$$

olarak tanımlanmak üzere

$$S_{LS-2}(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (\varphi_{S_1}(i) + \varphi_{S_2}(i))^p}.$$

$$3. \quad \varphi_1(i) = \varphi_{S_1}(i) + \varphi_{S_2}(i), \quad \varphi_2(i) = \varphi_A(i) - \varphi_B(i), \quad l_A(i) = \frac{(1 - \mu_A(x_i) - \eta_A(x_i))}{2},$$

$$l_B(i) = \frac{(1 - \mu_B(x_i) - \eta_B(x_i))}{2}, \quad \varphi_3(i) = \max\{l_A(i), l_B(i)\} - \min\{l_A(i), l_B(i)\},$$

$w_m \in [0, 1]$ ve $\sum_{m=1}^3 w_m = 1$ olarak tanımlanmak üzere

$$S_{LS-3}(A, B) = 1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{m=1}^3 w_m \varphi_m(i) \right)^p}$$

4. 3. maddenin kabulleri ile birlikte $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere

$$S_{LS-4}(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\sum_{m=1}^3 w_m \varphi_m(i) \right)^p}$$

5. 3. maddedeki tanımlamalar ile birlikte $X = [a, b]$, $\omega: X \rightarrow [0, 1]$ ve

$$\int_a^b \omega(x) dx = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{LS-5}(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\int_a^b \omega(x) \left(\sum_{m=1}^3 w_m \varphi_m(i) \right)^p dx}$$

(Liang ve Shi, 2003)

Chen (1995), Hong ve Kim (1999), Fan ve Zhangyan (2001), Li ve ark. (2002) vague kümeler için bazı benzerlik ölçülerini tanımlamıştır. Bilindiği üzere vague kümeler ve intuitionistic fuzzy kümeler eş kavramlardır. Bu nedenle bu ölçüler intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki benzerlik ölçüleri arasında verilebilir.

1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere,

$$S_{Chen-1}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)| + |\mu_B(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{2n}$$

2. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $\alpha \geq \beta \geq 0 \geq \gamma$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$

ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere

$$S_{Chen-2}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \left| \left(\alpha (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) + \beta (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)) + \gamma (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)) \right) \right|}{\alpha - \beta}$$

(Chen, 1995).

3. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere,

$$S_{HK-1}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{2n}$$

4. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve

$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$ olmak üzere,

$$S_{HK-2}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i \left| \left(\alpha (\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)) + \beta (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)) + \gamma (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)) \right) \right|}{\alpha + \beta + \gamma}$$

$$5. S_{HK-3}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{2n}$$

(Hong ve Kim, 1999).

6. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere,

$$S_{FZ-1}(A, B) = 1 - \frac{1}{4n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i) - (\mu_B(x_i) - \eta_B(x_i))| + |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \right)$$

(Fan ve Zhangyan, 2001).

7. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere,

$$S_{LZD-1}(A, B) = 1 - \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2 \right)}{2n}}$$

(Li ve ark., 2002).

Hung ve Yang (2006), intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki Hausdorff uzaklığına bağlı olan aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamıştır. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$, $I_A(x_i) = [\mu_A(x_i), 1 - \eta_A(x_i)]$ ve $I_B(x_i) = [\mu_B(x_i), 1 - \eta_B(x_i)]$ olarak tanımlanmak ve $H(I_A(x_i), I_B(x_i))$, $I_A(x_i)$ ve $I_B(x_i)$ arasındaki Hausdorff uzaklık olmak üzere intuitionistic fuzzy kümeler arasında

$$d_{HY-H1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n H(I_A(x_i), I_B(x_i)) \quad (\text{Hung ve Yang, 2004}),$$

$$d_{HY-1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_p(I_A(x_i), I_B(x_i)) \quad (\text{Hung ve Yang, 2006})$$

ile tanımlı bir uzaklık ölçüsü olmak üzere

$$1. S_{HY-H1}(A, B) = \frac{e^{d_{HY-H1}(A, B)} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

$$2. S_{HY-H2}(A, B) = \frac{1 - d_{HY-H1}(A, B)}{1 + d_{HY-H1}(A, B)},$$

(Hung ve Yang, 2004)

$$3. S_{HY-H3}(A, B) = \frac{2^{\frac{1}{p}} - d_{HY-1}(A, B)}{2^{\frac{1}{p}}}$$

$$4. S_{HY-H4}(A, B) = \frac{e^{-d_{HY-1}(A, B)} - e^{-\frac{1}{2^p}}}{1 - e^{-\frac{1}{2^p}}}$$

$$5. S_{HY-H5}(A, B) = \frac{2^{\frac{1}{p}} - d_{HY-1}(A, B)}{2^{\frac{1}{p}} (1 + d_{HY-1}(A, B))},$$

(Hung ve Yang, 2006).

Liu (2005) intuitionistic fuzzy kümeler ve bu kümelere bağlı kalmak üzere intuitionistic fuzzy kümelerin tanımlandığı uzayın elemanları arasındaki bazı ağırlıklı benzerlik ölçülerini tanımlamıştır.

1. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$S_{Liu-1}(A, B) =$$

$$1 - \sqrt[p]{\int_a^b \frac{1}{2(b-a)} \left(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^p \right) dx}$$

2. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$, $\omega: X \rightarrow [0, 1]$ ve $\int_a^b \omega(x) dx = 1$ ve $\alpha \geq \beta \geq 0 \geq \gamma$

olmak üzere olmak üzere

$$S_{Liu-2}(A, B) = 1 - \left(\int_a^b \omega(x) \left[\alpha \cdot |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p + \beta \cdot |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p + \gamma \cdot |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \right)$$

3. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i, x_j \in X$, her $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $A_k \in IFS^X$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$S_{Liu-3}(x_i, x_j) =$$

$$1 - \sqrt[p]{\frac{1}{2m} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2} |\mu_{A_k}(x_i) - \mu_{A_k}(x_j)| + |\eta_{A_k}(x_i) - \eta_{A_k}(x_j)| + |\pi_{A_k}(x_i) - \pi_{A_k}(x_j)| \right)^p}$$

4. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i, x_j \in X$, her $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $A_k \in IFS^X$, $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $p \geq 1$ her $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve

$$\sum_{i=1}^m \omega_i = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{Liu-4}(x_i, x_j) = 1 - \left(\sum_{k=1}^m \omega_k \left[\left(\alpha \cdot \left| \mu_{A_k}(x_i) - \mu_{A_k}(x_j) \right|^p \right) + \left(\beta \cdot \left| \eta_{A_k}(x_i) - \eta_{A_k}(x_j) \right|^p \right) + \left(\gamma \cdot \left| \pi_{A_k}(x_i) - \pi_{A_k}(x_j) \right|^p \right) \right] \right)^{\frac{1}{p}}$$

(Liu, 2005).

Zhang ve Fu (2006), aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamışlardır. Bu ölçüler Yusoff ve ark. (2011) tarafından (4.) modifiye edilmiştir.

1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $\delta_{ZF-A}(x_i) = \mu_A(x_i) + (\pi_A(x_i))\mu_A(x_i)$
 $\alpha_{ZF-A}(x_i) = \eta_A(x_i) + (\pi_A(x_i))\eta_A(x_i)$ olmak üzere

$$S_{ZF-1}(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\delta_{ZF-A}(x_i) - \delta_{ZF-B}(x_i)| + |\alpha_{ZF-A}(x_i) - \alpha_{ZF-B}(x_i)|$$

2. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve $\sum_{i=1}^n \omega_i = 1$

olmak üzere

$$S_{ZF-2}(A, B) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left(1 - \frac{|\delta_{ZF-A}(x_i) - \delta_{ZF-B}(x_i)|}{2} + \frac{|\alpha_{ZF-A}(x_i) - \alpha_{ZF-B}(x_i)|}{2} \right)$$

3. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$S_{ZF-3}(A, B) = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |\delta_{ZF-A}(x) - \delta_{ZF-B}(x)| + |\alpha_{ZF-A}(x) - \alpha_{ZF-B}(x)| dx$$

(Zhang ve Fu, 2006).

4. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $\delta_{ZF-A}(x_i) = \mu_A(x_i) + (\pi_A(x_i))\mu_A(x_i)$
 $\alpha_{ZF-A}(x_i) = \eta_A(x_i) + (\pi_A(x_i))\eta_A(x_i)$, $\beta_{ZF-A}(x_i) = 1 - \delta_{ZF-A}(x_i) - \alpha_{ZF-A}(x_i)$

olmak üzere

$$S_{ZF(mod)-1}(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n |\delta_{ZF-A}(x_i) - \delta_{ZF-B}(x_i)| + |\alpha_{ZF-A}(x_i) - \alpha_{ZF-B}(x_i)| \\ + |\beta_{ZF-A}(x_i) - \beta_{ZF-B}(x_i)|$$

(Yusoff ve ark., 2011).

Park ve ark. (2007) belirsizlik ölçüsünü de hesaplamaya katan aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamıştır. Belirsizlik ölçüsünün benzerlik ölçüsüne katılmasının

belirsizlik derecesinin büyük olduğu bazı problemlerin ele alınmasında daha gerçekçi sonuçlar vereceği aşikârdır.

1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$S_{PPKL-1}(A, B) =$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt[p]{n}} \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \right)^p}$$

2. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$S_{PPKL-2}(A, B) =$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt[p]{b-a}} \sqrt[p]{\int_a^b \left(\frac{1}{2} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| + |\eta_A(x) - \eta_B(x)| + |\pi_A(x) - \pi_B(x)| \right)^p dx}$$

3. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $p \geq 1$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{PPKL-3}(A, B) =$$

$$1 - \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \omega_i \left(\frac{1}{2} |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \right)^p}$$

4. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$, $p \geq 1$, $\omega: X \rightarrow [0, 1]$ ve $\int_a^b \omega(x) dx = 1$ olmak üzere

$$S_{PPKL-4}(A, B) =$$

$$1 - \sqrt[p]{\int_a^b \omega(x) \left(\frac{1}{2} |\mu_A(x) - \mu_B(x)| + |\eta_A(x) - \eta_B(x)| + |\pi_A(x) - \pi_B(x)| \right)^p dx}$$

(Park ve ark, 2007).

Hung ve Yang (2008) aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamıştır.

$$1. S_{HY-1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\min \{ \mu_A(x_i), \mu_B(x_i) \} + \min \{ \eta_A(x_i), \eta_B(x_i) \}}{\max \{ \mu_A(x_i), \mu_B(x_i) \} + \max \{ \eta_A(x_i), \eta_B(x_i) \}}$$

$$2. S_{HY-2}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{2} (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{n}$$

$$\begin{aligned}
3. \quad S_{HY-3}(A, B) &= \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} + \min\{\eta_A(x_i), \eta_B(x_i)\}}{\sum_{i=1}^n \max\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} + \max\{\eta_A(x_i), \eta_B(x_i)\}} \\
4. \quad S_{HY-4}(A, B) &= 1 - \frac{1}{2} \left(\max |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + \max |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| \right) \\
5. \quad S_{HY-5}(A, B) &= 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)}{\sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) + \eta_B(x_i)|)} \\
6. \quad S_{HY-6}(A, B) &= 1 - \frac{1 - e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|) \right)}}{1 - e^{(-n)}} \\
7. \quad S_{HY-7}(A, B) &= 1 - \frac{1 - e^{\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)}| + |\sqrt{\eta_A(x_i)} - \sqrt{\eta_B(x_i)}|) \right)}}{1 - e^{(-n)}}
\end{aligned}$$

(Hung ve Yang, 2008).

Ye (2011), kosinüs benzerlik ölçüsü adını verdiği aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamıştır.

1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$S_{Ye-1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\mu_A(x_i) \mu_B(x_i) + \eta_A(x_i) \eta_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A(x_i)^2 + \mu_B(x_i)^2} + \sqrt{\eta_A(x_i)^2 + \eta_B(x_i)^2}}$$

2. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$, $p \geq 1$, her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $\omega_i \in [0, 1]$ ve

$$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \text{ olmak üzere}$$

$$S_{Ye-2}(A, B) = \sum_{i=1}^n \omega_i \frac{\mu_A(x_i) \mu_B(x_i) + \eta_A(x_i) \eta_B(x_i)}{\sqrt{\mu_A(x_i)^2 + \mu_B(x_i)^2} + \sqrt{\eta_A(x_i)^2 + \eta_B(x_i)^2}}$$

(Ye, 2011).

Fakat Hwang ve Yang (2012), Ye tarafından tanımlanan ölçülerinin benzerlik ölçüsü olma aksiyomlarının ilkinin bazı durumlarda sağlamadığını göstermişler ve bu ölçülerini aşağıdaki şekilde modifiye etmişlerdir.

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $\varphi_A(x_i) = \frac{1 + \mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)}{2}$ olarak

tanımlanmak üzere

$$1. C_{HwY}^*(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_A(x_i)\varphi_B(x_i) + \eta_A(x_i)\eta_B(x_i)}{\sqrt{\varphi_A(x_i)^2 + \eta_A(x_i)^2} \sqrt{\varphi_B(x_i)^2 + \eta_B(x_i)^2}}$$

$$2. C_{HwY}^{**}(x_i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(1 - \mu_A(x_i))(1 - \mu_B(x_i)) + (1 - \eta_A(x_i))(1 - \eta_B(x_i))}{\sqrt{(1 - \mu_A(x_i))^2 + (1 - \eta_A(x_i))^2} \sqrt{(1 - \mu_B(x_i))^2 + (1 - \eta_B(x_i))^2}}$$

ifadelerini tanımlayalım. Bu tanımlamalar ile birlikte Ye'nin benzerlik ölçüsünün

modifiye edilmiş hali $S_{HwY}(A, B) = \frac{1}{3}(S_{Ye-1}(A, B) + C_{HwY}^*(A, B) + C_{HwY}^{**}(A, B))$ ile

tanımlanır (Hwang ve Yang, 2012).

Julian ve ark. (2012) aşağıdaki benzerlik ölçüsünü tanımlamıştır.

1. $X = [a, b]$, $A, B \in IFS^X$, $p \geq 1$, $\omega: X \rightarrow [0, 1]$ ve $\int_a^b \omega(x) dx = 1$ olmak üzere

$$S_{JHL-1}(A, B) = 1 - \sqrt[p]{\int_a^b \omega(x) |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|^p dx} - \sqrt[p]{\int_a^b \omega(x) |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|^p dx}$$

(Julian ve ark., 2012).

Intarapaiboon (2014) aşağıdaki benzerlik ölçüsünü tanımlamıştır.

$$1. S_{Intarapaiboon-1}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} + \min\{1 - \eta_A(x_i), 1 - \eta_B(x_i)\}}{\max\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} + \max\{1 - \eta_A(x_i), 1 - \eta_B(x_i)\}}$$

$$2. S_{Intarapaiboon-2}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\mu_A(x_i) + (1 - \eta_A(x_i)))}{(\mu_B(x_i) + (1 - \eta_B(x_i)))}$$

$$3. S_{Intarapaiboon-3}(A, B) = \sqrt{S_{Intarapaiboon-i}(A, A \cup B) \cdot S_{Intarapaiboon-i}(B, A \cup B)} (i = 1, 2)$$

(Intarapaiboon, 2014).

Intuitionistic fuzzy kümeler arasında benzerlik ölçülerinin özelliklerini iki parametrelili ve üç parametrelili olma bağlamında bir çok çalışmada inceleyen Szmidi ve Kacprzyk (Örneğin; Szmidi ve Kacprzyk; 1999, 2003, 2004a, 2004b, 2006, 2007, 2009, 2010) benzerlik ölçülerinde belirsizlik derecesinin (hesitation degree) kullanılmasının iki parametreye dayalı olan benzerlik ölçülerinin açıklığa kavuşturamadığı durumların ele alınmasında etkili bir yol olduğunu ifade etmişlerdir.

Bu kapsamda Szmidt ve Kacprzyk tarafından tanımlanan d_{SK} , l_{SK} , e_{SK} , q_{SK} ve l_{H-SK} uzaklık ölçülerinin birden çıkarılması ile elde edilen benzerlik ölçülerinin yanında intuitionistic fuzzy kümenin tümleyeni tanımına bağlı olan aşağıdaki benzerlik ölçülerini tanımlamıştır.

$$1. S_{SK(rule)-1}(A, B) = \frac{l_{SK}(A, B)}{l_{SK}(A, \bar{B})}$$

$$2. f(l_{SK}(A, B), l_{SK}(A, \bar{B})) = \frac{l_{SK}(A, B)}{l_{SK}(A, B) + l_{SK}(A, \bar{B})} \text{ olmak üzere}$$

$$S_{SK(rule)-2}(A, B) = \frac{1 - f(l_{SK}(A, B), l_{SK}(A, \bar{B}))}{1 + f(l_{SK}(A, B), l_{SK}(A, \bar{B}))}$$

$$3. S_{SK(rule)-3}(A, B) = \frac{1 - f(l_{SK}(A, B), l_{SK}(A, \bar{B}))^2}{1 + f(l_{SK}(A, B), l_{SK}(A, \bar{B}))^2}$$

$$4. S_{SK(rule)-4}(A, B) = \frac{e^{-f(l_{SK}(A, B), l_{SK}(A, \bar{B}))} - e^{-1}}{1 - e^{-1}}$$

(Szmidt ve Kacprzyk, 2004).

Aynı çalışmasında Szmidt ve Kacprzyk, burada kullanılan l_{SK} uzaklık ölçüsü yerine q_{SK} uzaklık ölçüsünde kullanılabileceğini belirtmiştir (Szmidt ve Kacprzyk, 2004).

Çalışmamızın 3. Bölümünde de belirtildiği üzere uzaklık ve benzerlik kavramları dual kavramlardır. Yani uzaklık ölçülerinden çeşitli yollar ile benzerlik ölçüleri elde edilebilir. Tam tersi benzerlik ölçülerinden uzaklık ölçüsü elde etmek içinde geçerlidir. Du ve Hu (2015), fuzzy değilleme dönüşümü ve yığınım dönüşümleri ile bu ilişkiyi genellemiştir.

Tanım 4.3.16: $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir fuzzy değilleme (fuzzy negation) adını alır.

$$N1. N(0) = 1, N(1) = 0$$

$$N2. a \leq b \text{ ise } N(b) \leq N(a)$$

Eğer N , tüm $a \in [0,1]$ için

- a. $N(N(a)) = a$ şartını sağlıyorsa fuzzy güçlü (strong) değilme,
 - b. $x = 0 \Leftrightarrow N(x) = 1$ şartını sağlıyorsa fuzzy dolmayan (non-filling) değilme,
 - c. $x = 1 \Leftrightarrow N(x) = 0$ şartını sağlıyorsa fuzzy kaybolmayan (non-vanishing) değilme,
- adını alır (Du ve Hu, 2015).

Literatürde birçok fuzzy değilme tanımlanmıştır. Bunlar arasında en çok kullanılanları aşağıda belirtilmiştir.

1. $\lambda \in (-1, +\infty)$ olmak üzere $N_1(x) = \frac{1-x}{1+\lambda x}$
2. $\omega \in (0, +\infty)$ olmak üzere $N_2(x) = \sqrt[\omega]{1-x^\omega}$
3. $N_3(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos \pi x)$
4. $N_4(x) = 1 - x$
5. $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $N_5(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \theta \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$

$g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ sabit olmayan monoton azalan fonksiyon olmak üzere

$N(x) = \frac{g(x) - g(1)}{g(0) - g(1)}$ ile tanımlı dönüşüm bir fuzzy değilmedir. Eğer g mutlak

(strictly) monoton azalan bir fonksiyon ise $N(x) = \frac{g(x) - g(1)}{g(0) - g(1)}$ fuzzy değilme

dönüşümü fuzzy kaybolmayan ve fuzzy dolmayan değilmedir (Du ve Hu, 2015).

Teorem 4.3.17: X boştan farklı bir küme $A, B \in IFS^X$, $d(A, B)$ A ve B kümeleri arasında uzaklık ölçüsü ve N fuzzy dolmayan değilme olmak üzere $S_N(A, B) = N(d(A, B))$ ile tanımlı dönüşüm bir benzerlik ölçüsüdür. Tersine $s(A, B)$ A ve B kümeleri arasında benzerlik ölçüsü ve N fuzzy kaybolmayan değilme olmak üzere $d_N(A, B) = N(s(A, B))$ ile tanımlı dönüşüm bir benzerlik ölçüsüdür. Eğer N fuzzy güçlü değilme ise $d(A, B) = N(s_N(A, B))$ ve $s(A, B) = N(d_N(A, B))$ eşitlikleri sağlanır (Du ve Hu, 2015).

Uzaklık ölçülerinden benzerlik ölçüsü oluşturmanın bir diğer yolu da fuzzy implikasyon kullanmaktır. Literatürde tanımlanmış olan birçok fuzzy implikasyon yardımı ile mevcut uzaklık ölçülerinden daha etkili benzerlik ölçülerinin tanımlanmasına imkân vermektedir. Bu yeni tanımlama daha yeni ve geniş bir çalışma alanı doğurmaktadır.

Teorem 4.3.18: X boştan farklı bir küme $A, B \in IFS^X$, $d(A, B)$ A ve B kümeleri arasında uzaklık ölçüsü ve I , her $x, y \in [0, 1]$ için $x \leq y \Leftrightarrow I(x, y) = 1$ şartını sağlayan bir fuzzy implikasyon dönüşümü olmak üzere $S_1(A, B) = I(d(A, B), 0)$ ile tanımlı dönüşüm bir A ve B intuitionistic fuzzy kümeleri arasında benzerlik ölçüsüdür (Du ve Hu, 2015).

Du ve Hu'nun (2015) uzaklık ölçülerinden benzerlik ölçüsü elde etmek için önerdiği bir diğer yol ise n tane uzaklık ölçüsü kullanılarak oluşturulan n tane benzerlik ölçüsünden yığınım fonksiyonu yardımı ile yeni bir uzaklık ölçüsü oluşturmaktır.

Önerme 4.3.19: f bir n -yığınım fonksiyonu ve N 'de fuzzy güçlü değilme olmak üzere $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = N(f(N(x_1), N(x_2), \dots, N(x_n)))$ ile tanımlı f_d bir n -yığınım fonksiyonudur ve bu yığınım fonksiyonu f yığınım fonksiyonunun N 'ye bağlı dual yığınım fonksiyonu olarak adlandırılır (Du ve Hu, 2015).

Teorem 4.3.20: $d_1, d_2, \dots, d_n$, n tane uzaklık ölçüsü ve $s_1, s_2, \dots, s_n$ sırası ile bu uzaklık ölçülerinden N fuzzy güçlü değilmesi ile elde edilmiş benzerlik ölçüleri olmak üzere $s_d(A, B) = f_d(s_1(A, B), s_2(A, B), \dots, s_n(A, B))$ ile tanımlı $s_d(A, B)$, A ve B intuitionistic fuzzy kümeleri arasında bir benzerlik ölçüsüdür. Ayrıca $s_d(A, B) = N(d_f(A, B))$ eşitliği de sağlanır (Du ve Hu, 2015).

Çalışmamızın 3. Bölümünde de genişçe bahsettiğimiz üzere fuzzy kümeler ve intuitionistic fuzzy kümeler için önemli bir diğer ölçü entropidir. Literatürde entropi bir intuitionistic fuzzy kümenin tanımlılığının ya da belirsizliğinin bir ölçüsü olarak kabul edilir. Tanımının önemi ve spesifitesi açısından benzerlik ve uzaklık ölçüleri ile yakından ilişkilendirilen entropi hakkında kronolojik sıralamaya bağlı kalınmaya

çalışılarak genişçe bir literatür çalışması sunulacaktır. Intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde ilk olarak Burillo ve Bustince (1996) tarafından tanımlanmıştır. Entropi kavramına diğer bir yaklaşım, Szmidt ve Kacprzyk (2001) tarafından De Luca ve Termini (1972) yaklaşımı ile tanımlanan entropi tanımıdır. Bu tanım sonraki yıllarda diğer araştırmacılar tarafından farklı şekillerde ele alınmış ve geniş uygulama alanı bulmuştur. Şimdi bu tanımlamalar ve bu tanımların benzerlik ve uzaklık ölçüleri ile olan ilişkileri literatür kapsamında incelenecektir.

Burillo ve Bustince (1996), intuitionistic fuzzy kümenin fuzzy küme olmanın ne kadar uzağında olduğunun bir ölçüsü olan entropi tanımını vermiştir.

Tanım 4.3.21: X boştan farklı bir küme olmak üzere her $A \in IFS^X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $E_{BB} : IFS^X \rightarrow [0,1]$ dönüşümüne IFS^X üzerinde bir entropi denir.

$$E^*1. \quad A \in FS^X \Leftrightarrow E(A) = 0 ,$$

$$E^*2. \quad E(A) = 1 \Leftrightarrow \text{her } x \in X \text{ için } \mu_A(x) = \eta_A(x) = 0 ,$$

$$E^*3. \quad E(A) \geq E(B) \Leftrightarrow \text{her } x \in X \text{ için } \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \text{ ve } \eta_A(x) \leq \eta_B(x) ,$$

$$E^*4. \quad E(A) = E(\bar{A})$$

(Burillo ve Bustince, 1996).

Burillo ve Bustince tarafından tanımlanan bu entropi ölçüsü için bazı örnekler verelim.

$$1. \quad E_{BB-1}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi_A(x_i) ,$$

$$2. \quad E_{BB-2}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - (\mu_A(x_i) + \eta_A(x_i))^k \right); \quad k = 2, 3, \dots, \infty ,$$

$$3. \quad E_{BB-3}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\pi_A(x_i) e^{-\pi_A(x_i)} \right) ,$$

$$4. \quad E_{BB-4}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\pi_A(x_i) \sin \left(\frac{\pi}{2} (\mu_A(x) + \eta_A(x)) \right) \right) ,$$

(Burillo ve Bustince, 1996).

Szmidt ve Kacprzyk (2001), intuitionistic fuzzy kümenin crisp küme olmanın ne kadar uzağında olduğunun bir ölçüsü olan entropi tanımını vermiştir.

Tanım 4.3.22: X boştan farklı bir küme olmak üzere her $A \in IFS^X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $E : IFS^X \rightarrow [0,1]$ dönüşümüne IFS^X üzerinde bir entropi denir.

E1. A bir crisp kümedir $\Leftrightarrow E(A) = 0$,

E2. $E(A) = 1 \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu_A(x) = \eta_A(x)$,

E3. $E(A) \leq E(B) \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $\mu_B(x) \leq \eta_B(x)$ olmak üzere $\mu_A(x) \geq \mu_B(x)$ ve $\eta_A(x) \leq \eta_B(x)$ veya $\mu_B(x) \geq \eta_B(x)$ olmak üzere $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $\eta_A(x) \geq \eta_B(x)$,

E4. $E(A) = E(\bar{A})$,

(Szmıdt ve Kacprzyk, 2001).

Şimdi literatürde tanımlı bazı entropiler verilecektir.

1. d , IFS^X uzayında bir uzaklık ölçüsü, $A \in IFS^X$ için üzere

$$E_{SK-1}(A) = \frac{d(A, A_{yakın})}{d(A, A_{uzak})}$$

(Szmıdt ve Kacprzyk, 2001).

2. $E_{CL-1}(A) = \frac{\sum_{i=1}^n |\mu_{yakın}(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\eta_{yakın}(x_i) - \eta_A(x_i)| + |\pi_{yakın}(x_i) - \pi_A(x_i)|}{\sum_{i=1}^n |\mu_{uzak}(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\eta_{uzak}(x_i) - \eta_A(x_i)| + |\pi_{uzak}(x_i) - \pi_A(x_i)|}$

3. $E_{CL-2}(A) =$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\mu_{yakın}(x_i) - \mu_A(x_i))^2 + (\eta_{yakın}(x_i) - \eta_A(x_i))^2 + (\pi_{yakın}(x_i) - \pi_A(x_i))^2}{\sum_{i=1}^n (\mu_{uzak}(x_i) - \mu_A(x_i))^2 + (\eta_{uzak}(x_i) - \eta_A(x_i))^2 + (\pi_{uzak}(x_i) - \pi_A(x_i))^2}}$$

4. $E_{CL-3}(A) =$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \frac{|\mu_{yakın}(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\eta_{yakın}(x_i) - \eta_A(x_i)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_{yakın}(x_i) - \mu_A(x_i)|, |\eta_{yakın}(x_i) - \eta_A(x_i)|\}}{2}}{\sum_{i=1}^n \frac{|\mu_{uzak}(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\eta_{uzak}(x_i) - \eta_A(x_i)|}{4} + \frac{\max\{|\mu_{uzak}(x_i) - \mu_A(x_i)|, |\eta_{uzak}(x_i) - \eta_A(x_i)|\}}{2}}$$

$$5. \quad E_{CL-4}(A) = \frac{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\mu_{yakın}(x_i) - \mu_A(x_i)|}{2} + \frac{|\eta_{yakın}(x_i) - \eta_A(x_i)|}{2} \right)^p}}{\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n \left(\frac{|\mu_{uzak}(x_i) - \mu_A(x_i)|}{2} + \frac{|\eta_{uzak}(x_i) - \eta_A(x_i)|}{2} \right)^p}}$$

(Chen ve Li, 2010).

$$6. \quad E_{SK-2}(A) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)|$$

(Szmidt ve Kacprzyk, 2007)

$$7. \quad E_{ZL-1} = 1 - \frac{1}{a-b} \int_a^b |\mu_A(x) - \eta_A(x)| dx$$

$$8. \quad E_{ZL-2} = \frac{\int_a^b \mu_A(x) \wedge \eta_A(x) dx}{\int_a^b \mu_A(x) \vee \eta_A(x) dx}$$

(Zeng ve Li, 2006).

$$9. \quad E_{VS-1} = \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(x_i), \eta_A(x_i)\} + \min\{1 - \mu_A(x_i), 1 - \eta_A(x_i)\}}{\sum_{i=1}^n \max\{\mu_A(x_i), \eta_A(x_i)\} + \max\{1 - \mu_A(x_i), 1 - \eta_A(x_i)\}}$$

$$10. \quad E_{VS-2}(A) = 1 - \frac{1}{2n \ln 2} D_{VS}(A, \bar{A})$$

$$11. \quad E_{VS-3}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_A(x_i)\eta_A(x_i) + \pi_A(x)^2}{\mu_A(x_i)^2 + \eta_A(x_i)^2 + \pi_A(x)^2}$$

(Vlachos ve Sergiadis, 2007).

$$12. \quad E_{Li-1}(A) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(|\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)|^3 + |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)| \right)$$

(Li ve ark., 2012).

$$13. \quad E_{GS-1}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)| \right) \frac{1 + \pi_A(x_i)}{2}$$

(Guo ve Song, 2014)

$$14. \quad E_{Huang-1}(A) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i)^2 - \eta_A(x_i)^2|$$

$$15. \ E_{Huang-2}(A) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i)^2 - \eta_A(x_i)^2|^p}$$

$$16. \ E_{Huang-3}(A) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)|^p}$$

$$17. \ E_{Huang-4}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1 - |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)| + \pi_A(x)}{1 + |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)| + \pi_A(x)}$$

$$18. \ E_{Huang-5}(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)| + \pi_A(x) |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)|$$

(Huang, 2007)

$$19. \ E_{Hung-1}(A) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)|$$

$$20. \ E_{Hung-2}(A) = 1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} |\mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)|^2}$$

(Hung, 2003).

$$21. \ E_{Ye-1}(A) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sin\left(\frac{\pi[1 + \mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)]}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi[1 - \mu_A(x_i) + \eta_A(x_i)]}{4} - 1\right) \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

$$22. \ E_{Ye-2}(A) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\cos\left(\frac{\pi[1 + \mu_A(x_i) - \eta_A(x_i)]}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi[1 - \mu_A(x_i) + \eta_A(x_i)]}{4} - 1\right) \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

(Ye, 2010).

Intuitionistic fuzzy kümeler için bir diğer olasılıklı (probabilistic) entropi tanımı Hung ve Yang (2006) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Tanım 4.3.23: X boştan farklı bir küme olmak üzere $A \in IFS^X$ için aşağıdaki şartları sağlayan $E_{HY} : IFS^X \rightarrow [0,1]$ dönüşümüne olasılıklı (probabilistic) entropi denir.

$$HY1. \ A \text{ crisp küme ise } E_{HY}(A) = 0,$$

$$HY2. \ \mu_{A'} = \eta_{A'} = \pi_{A'} = \frac{1}{3} \text{ ise } E_{HY}(A') = \max\{E_{HY}(A); A \in IFS^X\},$$

HY3. Eğer $A \leq_f B$ yani $\max\{\mu_A, \eta_B\} \leq \frac{1}{3}$ için $\mu_A \leq \mu_B$, $\eta_A \leq \eta_B$ ve

$\max\{\mu_A, \eta_B\} \geq \frac{1}{3}$ için $\mu_A \geq \mu_B$ ve $\eta_A \geq \eta_B$ ise $E_{HY}(A) \leq E_{HY}(B)$,

HY4. $E_{HY}(A) = E_{HY}(\bar{A})$

(Hung ve Yang, 2006).

Hung ve Yang, aynı çalışmasında $\alpha > 0$ ve $0 < \beta < 1$ olmak üzere aşağıdaki olasılıklı entropileri tanımlamıştır.

1. $E_{HY-1}^\alpha(A) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} \sum_{i=1}^n [1 - (\mu_A(x_i) + \eta_A(x_i) + \pi_A(x_i))] & , \alpha \neq 1 \\ \sum_{i=1}^n -(\mu_A(x_i) \log \mu_A(x_i) + \eta_A(x_i) \log \eta_A(x_i) + \pi_A(x_i) \log \pi_A(x_i)) & , \alpha = 1 \end{cases}$$
2. $E_{HY-2}^\beta(A) = \frac{1}{1-\beta} \sum_{i=1}^n \log(\mu_A(x_i)^\beta + \eta_A(x_i)^\beta + \pi_A(x_i)^\beta)$

(Hung ve Yang, 2006).

Hung ve Yang tarafından tanımlanan bu entropi birçok özelliği incelenmediğinden ve tanımın barındırdığı özellikler nedeniyle ilginç ve bakir bir alan teşkil etmektedir.

Lv ve Guo (2010), uzaklık, benzerlik ölçüleri ve Szmidt ve Kacprzyk manasında tanımlanan entropi kavramları arasındaki ilişkileri incelemiştir.

Teorem 4.3.24: X boştan farklı bir küme ve S , IFS^X üzerinde bir uzaklık ölçüsü olmak üzere $E_1(A) = s(A \cup \bar{A}, A \cap \bar{A})$ ile tanımlanan E_1 , IFS^X üzerinde bir entropidir (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.25: X boştan farklı bir küme, $A \in IFS^X$ olmak üzere $g^*(A) = \{(x, |\mu_A(A) - \eta_A(A)|, 1 - |\mu_A(A) - \eta_A(A)|); x \in X\}$ olarak tanımlansın. Ayrıca üyelik ve üye olmama için fonksiyonları sırası ile $\alpha, \beta \in [0,1]$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere $\mu_{[\alpha, \beta]_X}(x) = \alpha$ ve $\eta_{[\alpha, \beta]_X}(x) = \beta$ ile tanımlı $[\alpha, \beta]_X$ intuitionistic fuzzy kümesini

tanımlayalım. Bu tanımlamalar ile birlikte S , IFS^X üzerinde bir uzaklık ölçüsü olmak üzere

$$E_2(A) = S([0,1], g^*(A))$$

ve

$$E_3(A) = S([0,1], \overline{g^*(A)})$$

ile tanımlı E_2 ve E_3 dönüşümleri birer entropidir. Ayrıca S benzerlik ölçüsü $S(A, B) = S(\overline{A}, \overline{B})$ şartını tüm $A, B \in IFS^X$ için sağlıyorsa $E_2(A, B) = E_3(A, B)$ eşitliği sağlanır (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.26: X boştan farklı bir küme, her $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ için $f_i : [0,1] \rightarrow [0,1]$, her $t \in [0,1]$ için

- a. $f_i(t) \in [0,1]$
- b. $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = f_4(t) = 1 \Leftrightarrow t=1$ ve $f_1(t) = f_2(t) = f_3(t) = f_4(t) = 0 \Leftrightarrow t=0$
- c. $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$ için $f_i(t_1) \leq f_i(t_2)$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar ve $A \in IFS^X$ olmak üzere ϕ_1^* ve ϕ_2^* intuitionistic fuzzy kümeleri

$$\phi_1^*(A) = \left\{ \left(x, 0.5 - 0.5 f_1(|\mu_A(A) - \eta_A(A)|), 0.5 + 0.5 f_2(|\mu_A(A) - \eta_A(A)|) \right); x \in X \right\}$$

$$\phi_2^*(A) = \left\{ \left(x, 0.5 + 0.5 f_3(|\mu_A(A) - \eta_A(A)|), 0.5 - 0.5 f_4(|\mu_A(A) - \eta_A(A)|) \right); x \in X \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu tanımlamalar ile birlikte

$$E_4(A) = S(\phi_1^*(A), \phi_2^*(A))$$

İle tanımlanan E_4 bir entropidir (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.27: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $u_1^*(A, B)$ ve $u_2^*(A, B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\begin{aligned}\mu_{u_1^*(A,B)}(x) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \min \{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \} \\ \eta_{u_1^*(A,B)}(x) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \max \{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \} \\ \mu_{u_2^*(A,B)}(x) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \max \{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \} \\ \eta_{u_2^*(A,B)}(x) &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \min \{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy kümeler ve E bir entropi olmak üzere

$$S_1(A) = \frac{E(u_2^*(A, B))}{E(u_1^*(A, B))}$$

ile tanımlanan S_1 bir dönüşümü bir benzerlik ölçüsüdür (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.28: X boştan farklı bir küme, her $i \in \{1, 2\}$ için $f_i : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, her $t_1, t_2, t_3, t_4 \in [0, 1]$ için

- a. $f_i(t_1, t_2) \in [0, 1]$
- b. $f_1(t_1, t_2) \leq f_2(t_1, t_2)$
- c. $t_1 \leq t_2$ ve $t_3 \leq t_4$ olmak üzere $f_i(t_1, t_3) \leq f_i(t_2, t_4)$
- d. $f_1(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2) = 1 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 1$ ve $f_1(t_1, t_2) = f_2(t_1, t_2) = 0 \Leftrightarrow t_1 = t_2 = 0$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $H^*(A, B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\begin{aligned}\mu_{u_1^*(A,B)}(x) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} f_1(|\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)|) \\ \eta_{u_1^*(A,B)}(x) &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} f_2(|\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)|)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy küme olsun. E bir entropi olmak üzere yukarıdaki tanımlamalar ile birlikte

$$S_2(A) = E(H^*(A, B))$$

ile tanımlanan S_1 bir dönüşümü bir benzerlik ölçüsüdür (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.29: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $\Psi^*(A, B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{\Psi^*(A, B)}(x) = \frac{1}{2} \min \{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \}$$

$$\eta_{\Psi^*(A, B)}(x) = 1 - \frac{1}{2} \max \{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy küme ve E bir entropi olmak üzere

$$d_1(A, B) = E(\Psi^*(A, B))$$

ile tanımlanan d_1 bir dönüşümü bir uzaklık ölçüsüdür (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.30: X boştan farklı bir küme ve E bir entropi olmak üzere

$$d_2(A, B) = E(u_1^*(A, B) - u_2^*(A, B))$$

ile tanımlanan d_2 bir dönüşümü bir uzaklık ölçüsüdür (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.31: X boştan farklı bir küme ve d bir uzaklık ölçüsü, $A \in IFS^X$ ve

$$h^*(A) = \left\{ \left(x, \frac{1}{2} |\mu_A(x) - \eta_B(x)|, 1 - \frac{1}{2} |\mu_A(x) - \eta_B(x)| \right); x \in X \right\} \text{ ile tanımlı intuitionistic}$$

fuzzy küme olmak üzere $E_5(A) = d(h^*(A), \overline{h^*(A)})$ ile tanımlanan E_5 bir dönüşümü bir entropidir (Lv ve Guo, 2010).

Teorem 4.3.32: X boştan farklı bir küme ve d bir intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü, $A \in IFS^X$ olmak üzere $E_6(A) = d([0, 1]_x, g^*(A))$ ve $E_7(A) = d([0, 1]_x, \overline{g^*(A)})$ ile

tanımlanan E_6 ve E_7 dönüşümleri birer bir entropidir. Her $A, B \in IFS^X$ için $d(A, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$ ise $E_6(A) = E_7(A)$ eşitliği sağlanır (Lv ve Guo, 2010).

Li ve ark. (2012), benzerlik ölçüsü ve entropi arasındaki bazı ilişkileri aşağıdaki şekilde belirtmiştir.

Teorem 4.3.33: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $g^{**}(A, B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{g^{**}(A, B)}(x) = \frac{1 + \left(\min \left\{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \right\} \right)^2}{2}$$

$$\eta_{g^{**}(A, B)}(x) = \frac{1 + \left(\max \left\{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|, |\eta_A(x) - \eta_B(x)| \right\} \right)^2}{2}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy küme ve E bir entropi olmak üzere $S_{g^{**}}(A, B) = E(g^{**}(A, B))$ ve $\bar{S}_{g^{**}}(A, B) = E(\overline{g^{**}(A, B)})$ ile tanımlanan $S_{g^{**}}$ ve $\bar{S}_{g^{**}}$ dönüşümleri birer benzerlik ölçüsüdür (Li ve ark., 2012).

Teorem 4.3.34: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $g_p^{**}(A, B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{g_p^{**}(A, B)}(x) = \frac{1 + \left(\min \left\{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^p, |\eta_A(x) - \eta_B(x)|^p \right\} \right)^2}{2}$$

$$\eta_{g_p^{**}(A, B)}(x) = \frac{1 + \left(\max \left\{ |\mu_A(x) - \mu_B(x)|^p, |\eta_A(x) - \eta_B(x)|^p \right\} \right)^2}{2}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy küme ve E bir entropi olmak üzere $S_{g_p^{**}}(A, B) = E(g_p^{**}(A, B))$ ve $\bar{S}_{g_p^{**}}(A, B) = E(\overline{g_p^{**}(A, B)})$ ile tanımlanan $S_{g_p^{**}}$ ve $\bar{S}_{g_p^{**}}$ dönüşümleri birer benzerlik ölçüsüdür (Li ve ark., 2012).

Teorem 4.3.35: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $U^*(A)$ ve $V^*(B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{U^*(A)}(x) = \frac{1 - |\mu_A(x) - \eta_A(x)|}{2}$$

$$\eta_{U^*(A)}(x) = \frac{1 + |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^2}{2}$$

$$\mu_{V^*(A)}(x) = \frac{1 + |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^3}{2}$$

$$\eta_{V^*(A)}(x) = \frac{1 - |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^2}{2}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy kümeler ve S bir benzerlik ölçüsü olmak üzere $S_{U^*V^*}(A) = S(U^*(A), V^*(A))$, $\overline{S_{U^*V^*}}(A) = S(\overline{U^*(A)}, \overline{V^*(A)})$ ile tanımlanan $S_{U^*V^*}$ ve $\overline{S_{U^*V^*}}$ dönüşümleri birer entropidir (Li ve ark, 2012).

Teorem 4.3.36: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $U_p^{**}(A)$ ve $V_p^{**}(B)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{U_p^{**}(A)}(x) = \frac{1 - |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^p}{2}$$

$$\eta_{U_p^{**}(A)}(x) = \frac{1 + |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^{2p}}{2}$$

$$\mu_{V_p^{**}(A)}(x) = \frac{1 + |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^{3p}}{2}$$

$$\eta_{V_p^{**}(A)}(x) = \frac{1 - |\mu_A(x) - \eta_A(x)|^{2p}}{2}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy kümeler ve S bir benzerlik ölçüsü olmak üzere $S_{U_p^{**}V_p^{**}}(A) = S(U_p^{**}(A), V_p^{**}(A))$, $\overline{S_{U_p^{**}V_p^{**}}}(A) = S(\overline{U_p^{**}(A)}, \overline{V_p^{**}(A)})$ ile tanımlanan $S_{U_p^{**}V_p^{**}}$ ve $\overline{S_{U_p^{**}V_p^{**}}}$ dönüşümleri birer entropidir (Li ve ark., 2012).

Li ve ark. (2012) bu çalışmalarında $E = \{E; E, IFS^X \text{ üzerinde bir entropi}\}$ ve $S = \{S; S, IFS^X \text{ üzerinde bir benzerlik ölçüsü}\}$ aileleri arasında belirli şartları sağlamak üzere dönüşümlerin bulunduğunu aşağıdaki şekilde belirtmişlerdir.

Teorem 4.3.37: $M : IFS^X \rightarrow IFS^X$ ve $N : IFS^X \rightarrow IFS^X$ aşağıdaki şartları sağlayan dönüşümler olsun.

1. A bir crisp küme ise $M(A)$ ve $N(A)$ birer crisp küme ve $M(A) \cup N(A) = X$
2. $M(A) = N(A) \Leftrightarrow \mu_A = \eta_A$

3. Her $x \in X$ için $|\mu_A(x) - \eta_A(x)| \geq |\mu_B(x) - \eta_B(x)|$ ise aşağıdaki dört durumdan biri sağlanır.

- i. $N(A) \subseteq N(B) \subseteq M(B) \subseteq M(A)$
 - ii. $N(A) \subseteq M(B) \subseteq N(B) \subseteq M(A)$
 - iii. $N(A) \supseteq N(B) \supseteq M(B) \supseteq M(A)$
 - iv. $N(A) \supseteq M(B) \supseteq N(B) \supseteq M(A)$
4. $N(A) = N(\bar{A})$ ve $M(A) = M(\bar{A})$

Υ , bu dört şartı sağlayan (M, N) dönüşüm çiftlerinin kümesi olsun. O halde her $(M, N) \in \Upsilon$ için $F_{MN} : S \rightarrow E$ dönüşümü mevcuttur (Li ve ark., 2012).

Teorem 4.3.38: $f : IFS^X \times IFS^X \rightarrow IFS^X$ aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşüm olsun.

- 1. A bir crisp küme olmak üzere $f(A, \bar{A})$ bir crisp kümedir.
- 2. $\mu_{f(A,B)} = \eta_{f(A,B)}$
- 3. $f(A, B) = f(B, A)$
- 4. Eğer $A \subseteq B \subseteq C$ olmak üzere $f(A, C) \leq f(A, B)$ ve $f(A, C) \leq f(B, C)$

L yukarıdaki dört şartı sağlayan f dönüşümlerinin kümesi olmak üzere her $f \in L$ için $G_f : E \rightarrow S$ dönüşümü mevcuttur (Li ve ark., 2012).

Fuzzy kümelerde olduğu gibi intuitionistic fuzzy kümelerde de uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü ve entropi kavramları ile yakından alakalı bir diğer ölçü kapsama (inclusion, subthood) ölçüsüdür. Bu ölçü intuitionistic fuzzy kümeler için ilk kez Cornelis ve Kerre (2003) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.3.39: $Inc : IFS^X \times IFS^X \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir kapsama ölçüsü adını alır.

- 1. Her $A, B \in IFS^X$ için $Inc(A, B) = Inc(\bar{A}, \bar{B})$
- 2. Her $A, B \in IFS^X$ için $Inc(A, B \cap C) = \inf \{Inc(A, B), Inc(A, C)\}$

3. Her $A, B \in IFS^X$ için $Inc(A, B) = Inc(B, A)$

4. a. $Inc(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$

b. $Inc(A, B) = 1 \Leftrightarrow \exists x \in X$ için $\langle \mu_A(x), \eta_A(x) \rangle = \langle 1, 0 \rangle$ ve $\langle \mu_B(x), \eta_B(x) \rangle = \langle 0, 1 \rangle$

c. Her $A, B \in P(X)$ için $Inc(A, B) \in \{\langle x, y \rangle : x = 1 - y\}$

(Cornelis ve Kerre, 2003).

Zhang ve ark. (2012), kapsama ölçüsü tanımını Young (1996) yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

$I : IFS^X \times IFS^X \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir kapsama ölçüsü adını alır.

$$1. \quad I(\tilde{1}, \tilde{0}) = 0,$$

$$2. \quad I(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$3. \quad A \subseteq B \subseteq C \text{ ise } I(C, A) \leq I(B, A) \text{ ve } I(C, A) \leq I(C, B).$$

(Zhang ve ark., 2012).

Zhang ve ark. (2012) aşağıdaki iki kapsama ölçüsünü tanımlamış ve kapsama ölçüsünün diğer ölçüler ile ilişkilerini incelemiştir. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$1. \quad I_{ZHL-1}(A, B) =$$

$$1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \mu_A(x_i) - \min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} \right| + \left| \max\{\eta_A(x_i), \eta_B(x_i)\} - \eta_A(x_i) \right| \right\}$$

$$2. \quad I_{ZHL-1}(A, B) =$$

$$1 - \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \mu_A(x_i) - \min\{\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)\} \right|^2 + \left| \max\{\eta_A(x_i), \eta_B(x_i)\} - \eta_A(x_i) \right|^2 \right\}}$$

(Zhang ve ark., 2012).

Zhang ve ark. (2012) aşağıdaki kapsama ölçülerini tanımlamıştır. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve

$A, B \in IFS^X$ olmak üzere

$$1. \quad I_{ZDZS-1}(A, B) =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i) + \eta_B(x_i) - \eta_A(x_i)}{|\mu_B(x_i) - \mu_A(x_i)| + |\eta_B(x_i) - \eta_A(x_i)|} \right] + 1 & , \quad \text{diğer durumlar} \\ 1 & , \quad \begin{array}{l} \mu_B(x_i) = \mu_A(x_i), \\ \eta_B(x_i) = \eta_A(x_i) \end{array} \end{array} \right.$$

(Zhang ve ark., 2012).

$f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ monoton artan ve $f(0,0)=0$, $f(1,0)=0$, $f(1,1)=1$ şartlarını sağlayan bir fonksiyon I , I_1 ve I_2 birer fuzzy kapsama ölçüsü ve $*$ bir t -norm olmak üzere

$$2. \quad I_{ZDZS-2}(A, B) = (I_1(\mu_A, \mu_B), I_2(1-\eta_A, 1-\eta_B))$$

$$3. \quad I_{ZDZS-3}(A, B) = f(I_1(\mu_A, \mu_B), I_2(1-\eta_A, 1-\eta_B))$$

$$4. \quad I, IFS^X \text{ üzerinde bir kapsama ölçüsü olmak üzere}$$

$$I_{ZDZS-4}(A, B) = I(A, B) \wedge I(\bar{B}, \bar{A})$$

$$5. \quad I_{ZDZS-5}(A, B) = I(A, B) \cdot I(\bar{B}, \bar{A})$$

$$6. \quad I_{ZDZS-6}(A, B) = I_1(A, B) \wedge I_2(A, B)$$

$$7. \quad I_{ZDZS-7}(A, B) = *(I_1(A, B), I_2(A, B))$$

$$8. \quad I_{ZDZS-8}(A, B) = \frac{I_1(A, B) + I_2(A, B)}{2}$$

(Zhang ve ark., 2012).

Teorem 4.3.40: X boştan farklı bir küme, $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $H_I^{**}(A)$ üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{H_I^{**}(A)}(x) = \frac{1 - \left[\frac{1}{2} (|\mu_A(x) - \mu_{A \cap B}(x)| + |\eta_A(x) - \eta_{A \cap B}(x)|) \right]^2}{2}$$

$$\mu_{H_I^{**}(A)}(x) = \frac{1 + \frac{1}{2} (|\mu_A(x) - \mu_{A \cap B}(x)| + |\eta_A(x) - \eta_{A \cap B}(x)|)}{2}$$

şeklinde tanımlanan intuitionistic fuzzy küme ve E bir entropi olmak üzere $I_{H_1^{**}}(A) = E(H_2^{**}(A, B))$ ile tanımlanan $I_{H_1^{**}}$ dönüşümü bir kapsama ölçüsüdür (Zhang ve ark., 2012).

Teorem 4.3.41: I , IFS^X üzerinde bir kapsama ölçüsü ve $A \in IFS^X$ olmak üzere $E_I(A) = (I(A \cup \bar{A}, A \cap \bar{A}))$ ile tanımlanan E_I , IFS^X üzerinde bir entropidir (Zhang ve ark., 2012).

Teorem 4.3.42: I , IFS^X üzerinde bir kapsama ölçüsü, $*$ bir t -norm ve $A, B \in IFS^X$ olmak üzere $S_I(A) = *(I(A, B), I(B, A))$ ile tanımlanan S_I , IFS^X üzerinde bir benzerlik ölçüsüdür (Zhang ve ark., 2012).

4.4. Intuitionistic Fuzzy Kümeler Uzayında Uzaklık ve Benzerlik Ölçülerinden Üretilen Šostak Manasındaki Topolojik Uzay ve Bazı Özellikleri

Çalışmamızın bu kısmında intuitionistic fuzzy kümeler uzayında uzaklık ve benzerlik ölçülerinden üretilen Šostak manasındaki topolojik uzay ve bazı özellikleri incelenecektir. Mevcut literatür incelendiğinde uzaklık ve benzerlik ölçüleri ile tanımlanan tek topolojinin Deschrijver ve ark. (2004) tarafından tanımlanan ve sadece uzaklık ölçüsüne dayanan Chang manasındaki topoloji olduğu görülür. Uzaklık ve benzerlik ölçülerinden elde edilecek topoloji ve bu topolojinin özelliklerinin araştırmacılar için geniş bir araştırma alanı olacağı açıktır. Bu bölümde bu açığı kapatmak için önce Deschrijver ve Kerre tarafından verilen Chang manasındaki topoloji revize edilecek sonrasında ise uzaklık ve benzerlik ölçülerinin kullanılarak Šostak manasında intuitionistic fuzzy topoloji tanımlanacaktır. Ayrıca tanımlanan bu topolojiler karşılaştırılacak ve bu topolojilerde ayırma aksiyomları incelenecektir.

Tanım 4.4.1: d , IFS^X üzerinde tanımlanan bir uzaklık ölçüsü olmak üzere, $\max_{A, B \in IFS^X} d(A, B) = 1$ ise, d uzaklık ölçüsüne normal uzaklık ölçüsü denir. Benzer

şekilde, s IFS^X üzerinde tanımlanan bir benzerlik ölçüsü olmak üzere $\max_{A,B \in IFS(X)} s(A,B)=1$, s benzerlik ölçüsüne normal benzerlik ölçüsü denir (Liu, 1992).

Liu bu çalışmasında her d uzaklık ölçüsü için $d+s=1$ eşitliği ile tanımlı bir s benzerlik ölçüsü tanımlanabileceğini belirtmiştir. Diğer taraftan Du ve Hu (2015), bu eşitliği güçlü değıllemeler vasıtası ile mesela $\lambda \geq 0$ için $s(A,B) = \frac{1-d(A,B)}{1+\lambda.d(A,B)}$ ile tanımlı Sugeno değıllemesi ile $d+s \leq 1$ eşitsizliğine dönüştürülebileceğini ifade etmiştir. $d+s \leq 1$ şartını sağlayan benzerlik ölçüsü s 'yi d uzaklık ölçüsü ile fuzzy uyumlu olarak adlandıralım. Sugeno değıllemesi için $\lambda=0$ iken s 'nin d ile klasik uyumlu olduğu açıktır.

Deschrijver ve ark. (2004) iki ve üç parametre ile tanımlı Hamming ve Euclidean uzaklık ölçülerinin topolojik olarak denk olduğunu göstermiştir.

Aşağıdaki tanımda Deschrijver ve ark. (2004) verdiği tanımı fuzzy nokta tanımı kullanarak yeniden tanımlanacaktır.

Tanım 4.4.2: X boştan farklı bir küme ve d IFS^X üzerinde tanımlı bir uzaklık ölçüsü olsun. Intuitionistic fuzzy nokta $q_x^{(\alpha,\beta)}$ ve $\varepsilon > 0$ için $B(q_x^{(\alpha',\beta')}, \varepsilon) = \{q_z^{(\alpha,\beta)}; d(q_x^{(\alpha,\beta)}, q_z^{(\alpha,\beta)}) < \varepsilon\}$ ile tanımlı kümeye açık yuvar denir ve $B(q_x^{(\alpha,\beta)}, \varepsilon)$ ile gösterilir. Burada $q_x^{(\alpha,\beta)}$ IFS^X üzerinde tanımlı intuitionistic fuzzy noktadır. $A \in IFS^X$ olmak üzere eğer $q_x^{(\alpha,\beta)} \in A$ ve $\varepsilon > 0$ için $A = \bigcup_{q_x^{(\alpha,\beta)} \in A} B(q_x^{(\alpha,\beta)}, \varepsilon)$ ise

A kümesine intuitionistic açık küme denir. Bu tanımlamalar ile beraber klasik topolojide olduğu gibi bu şekilde tanımlanan açık kümelerin ailesi IFS^X üzerinde Chang manasında bir intuitionistic fuzzy topoloji oluşturur. Bu topoloji d uzaklık ölçüsü ile üretilen Chang manasında intuitionistic fuzzy topoloji olarak isimlendirilir.

Görüldüğü üzere bu tanımlamada benzerlik ölçüsü kullanılmamıştır. Aşağıdaki teoremden uzaklık ve benzerlik ölçülerinin kullanılması ile bir ST-IFS tanımlanabileceği ispatlanacaktır.

Teorem 4.4.3: IFS^X üzerinde tanımlı d bir uzaklık ölçüsü ve s, d ile fuzzy uyumlu, bir benzerlik ölçüsü olmak üzere $\tau_{(d,s)}(A) = \langle \mu_{\tau_{(d,s)}}(A), \eta_{\tau_{(d,s)}}(A) \rangle$ açık olma ve açık olmama dereceleri sırası ile

$$\mu_{\tau_{(d,s)}}(A) = \begin{cases} 1 & A \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \\ \max_{A \subset D} d(A, D) & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$\eta_{\tau_{(d,s)}}(A) = \begin{cases} 0 & A \in \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \\ \min_{A \subset D} s(A, D) & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $\tau_{(d,s)} : IFS(X) \rightarrow I \otimes I$ dönüşümü ile beraber $(X, \tau_{(d,s)})$ bir ST-IFS'dir.

İspat: İddianın ispatlanması için $\tau_{(d,s)}$ dönüşümünün Tanım 2.3.17'nin şartlarını

S1: $\tau_{(d,s)}$ tanımından aşikârdır.

S2: $A, B \in IFS^X$ olmak üzere. $\tau_{(d,s)}(A \cap B) \geq \tau_{(d,s)}(A) \wedge \tau_{(d,s)}(B)$ yani

$\mu_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \geq \mu_{\tau_{(d,s)}}(A) \wedge \mu_{\tau_{(d,s)}}(B)$ ve $\eta_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \leq \eta_{\tau_{(d,s)}}(A) \vee \eta_{\tau_{(d,s)}}(B)$ olduğunu

göstermeliyiz. A veya B 'nin $\tilde{0}$ veya $\tilde{1}$ eşit olma durumu aşikârdır. Bu nedenle genelliği bozmadan $A, B \notin \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ kabul edelim. O halde

$\mu_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) = \max_{A \cap B \subset D} d(A, D) = d(A, D^*)$ ve $A \subseteq A \cap B \subseteq D^*$ olduğundan, uzaklık

ölçüsü tanımının (d4) şartından dolayı $d(A, D^*) \leq d(A \cap B, D^*)$ eşitsizlikleri elde

edilir. Böylece $\mu_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \geq \mu_{\tau_{(d,s)}}(A)$ eşitsizliği elde edilir. Yukarıdaki ifadede A

yerine B yazılarak $\mu_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \geq \mu_{\tau_{(d,s)}}(B)$ eşitsizliği kolayca elde edilir. Bu son iki

eşitsizlikten $\mu_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \geq \mu_{\tau_{(d,s)}}(A) \wedge \mu_{\tau_{(d,s)}}(B)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Diğer

tarafтан, $\eta_{\tau_{(d,s)}}(A) = \min_{A \subset E} s(A, E) = s(A, E^*)$ olsun. $A \cap B \subseteq A \subseteq E^*$ olduğundan ve

benzerlik ölçüsü tanımının 4. Şartından dolayı, $s(A \cap B, E^*) \leq s(A, E^*)$ eşitsizliği elde

edilir. Buna ek olarak, $E^{**} \in \{E; E \in IFS^X, E \subset A\}$ IFSSi için

$s(A \cap B, E^{**}) \leq s(A \cap B, E^*)$. Böylece $\eta_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \leq \eta_{\tau_{(d,s)}}(A)$ eşitsizliği elde edilir.

Yukarıdaki ifadede A yerine B yazılarak $\eta_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \leq \eta_{\tau_{(d,s)}}(B)$ eşitsizliği kolayca elde edilir. Bu son iki eşitsizlikten $\eta_{\tau_{(d,s)}}(A \cap B) \leq \eta_{\tau_{(d,s)}}(A) \vee \eta_{\tau_{(d,s)}}(B)$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Böylece $\tau_{(d,s)}(A \cap B) \leq \tau_{(d,s)}(A) \wedge \tau_{(d,s)}(B)$ eşitsizliği elde edilir.

S3: Herhangi bir indeks kümesi J için $\{A_i, i \in J\} \subseteq IFS^X$ olmak üzere

$$\mu_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} \left(\mu_{\tau_{(d,s)}}(A_i)\right) \quad \text{ve} \quad \eta_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \leq \bigvee_{i \in J} \left(\eta_{\tau_{(d,s)}}(A_i)\right) \quad \text{eşitsizliklerinin}$$

sağlandığını gösterelim. $\bigcup_{i \in J} A_i = \tilde{1}$ veya $\bigcup_{i \in J} A_i = \tilde{0}$ olması durumu açıktır. Diğer taraftan

$$\mu_{\tau_{(d,s)}} \text{ tanımı gereği, } \mu_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \max_{A_i \subset D} d(A, D) \text{ şeklinde ifade edilebilir. Buradan her}$$

$i \in J$ $A_i \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i \subset D$ olduğundan $\mu_{\tau_{(d,s)}}(A_i) \leq \mu_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right)$ elde edilir. Son eşitsizlikten

$$\bigwedge_{i \in J} \left(\mu_{\tau_{(d,s)}}(A_i)\right) \leq \mu_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \quad \text{eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan}$$

$$\eta_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \min_{A \subset E} s\left(\bigcup_{i \in J} A_i, E\right) = s\left(\bigcup_{i \in J} A_i, E^*\right) \text{ olsun. } E^* \subset A_i \subset \bigcup_{i \in J} A_i \text{ olduğundan ve}$$

benzerlik ölçüsü tanımının 4. Şartından dolayı her $i \in J$ için $s\left(\bigcup_{i \in J} A_i, E^*\right) \leq s(A_i, E^*)$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki son iki eşitsizlikten $\eta_{\tau_{(d,s)}}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \leq \bigvee_{i \in J} \left(\eta_{\tau_{(d,s)}}(A_i)\right)$ olduğu

anlaşılır. $\square$

Yukarıdaki tanımlamalar ile birlikte $(X, \tau_{(d,s)})$ ikilisine d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüleri ile tanımlanmış ST-IFS denir.

Örnek 4.4.4: d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüleri $\langle r^*, s^* \rangle \in I \otimes I$ olmak üzere sırası ile

$$d(A, B) = \begin{cases} 0 & , \quad A = B \\ 1 & , \quad A \in P(X) \text{ ve } A = \bar{B} \\ r^* & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ve

$$s(A, B) = \begin{cases} 1 & , \quad A = B \\ 0 & , \quad A \in P(X) \text{ ve } A = \bar{B} \\ s^* & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu tanımlamalar ile birlikte d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüleri ile tanımlanmış ST-IFS

$$\tau_{(d,s)}(A) = \begin{cases} 1^- & , \quad A \in P(X) \\ \langle r^*, s^* \rangle & , \quad \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Bu tanımlamalara uygun olarak d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüleri ile tanımlanmış seviye CT-IFS uzayı

$$\left(\tau_{(d,s)} \right)_{(r,s)} = \left\{ A \in IFS^X ; \mu_{\tau_{(d,s)}}(A) \geq r, \eta_{\tau_{(d,s)}}(A) \leq s \right\} = \begin{cases} IFS^X, & (r, s) \leq (r^*, s^*), \\ P(X), & (r, s) > (r^*, s^*) \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Diğer taraftan d uzaklık ölçüsü ile tanımlı CT-IFS $\tau_d = IFS^X$ şeklindedir. Buradan d ile üretilen CT-IFS ve d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüleri ile tanımlanmış seviye CT-IFS uzaylarının her zaman birbirine eşit olmadığı görülür.

Srivastava ve Singh (2011), α – ve α^* – ayırma aksiyomlarını ST-IFS uzayları için tanımlamıştır. Aşağıda bu tanımlar (α, β) – ayırma aksiyomları adı altında yeniden ele alınacaktır.

Tanım 4.4.5: $\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \otimes I_1$ olmak üzere:

1. Eğer her $q_x^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ ve $q_y^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ IFPleri için

a. $\tau(U) \geq \langle \alpha, \beta \rangle$

b. $q_x^{\langle \alpha, \beta \rangle} \in U$, $q_y^{\langle \alpha, \beta \rangle} \notin U$ veya $q_x^{\langle \alpha, \beta \rangle} \notin U$, $q_y^{\langle \alpha, \beta \rangle} \in U$

şartlarını sağlayacak $U \in IFS^X$ var ise (X, τ) ST-IFS $(\alpha, \beta) - T_0$ ST-TIFS olarak adlandırılır.

2. Eğer her $q_x^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ ve $q_y^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ IFPleri için

a. $\tau(U) \geq \langle \alpha, \beta \rangle$, $\tau(V) \geq \langle \alpha, \beta \rangle$

$$\text{b. } q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \in U, q_y^{\langle\alpha,\beta\rangle} \notin U \text{ ve } q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \notin V, q_y^{\langle\alpha,\beta\rangle} \in V$$

şartlarını sağlayacak $U, V \in IFS^X$ var ise (X, τ) ST-IFS $(\alpha, \beta) - T_1$ ST-TIFS olarak adlandırılır.

3. Eğer her $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ ve $q_y^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ IFPleri için

$$\text{a. } \tau(U) \geq \langle\alpha, \beta\rangle, \tau(V) \geq \langle\alpha, \beta\rangle$$

$$\text{b. } x_{(r,s)} \in U, y_{(r^*,s^*)} \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

şartlarını sağlayacak $U, V \in IFS^X$ var ise (X, τ) ST-IFS $(\alpha, \beta) - T_2$ ST-TIFS olarak adlandırılır.

Teorem 4.4.6: $(X, \tau_{(d,s)})$ d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüsü ile tanımlı ST-IFS olmak üzere ayırık her $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ ve $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}$ IFPleri için $\tau_{(d,s)}(U) \geq \langle\alpha'', \beta''\rangle$, $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \in U$, $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle} \notin U$ veya $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \notin U$, $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle} \in U$ şartlarını sağlayacak $U \in IFS^X$ ve $\langle\alpha, \beta\rangle \in I_0 \otimes I_1$ intuitionistic fuzzy çifti vardır. Yani bir $\langle\alpha'', \beta''\rangle \in I_0 \otimes I_1$ için (X, τ) ST-IFS, $(\alpha'', \beta'') - T_0$ ST-TIFSdir.

İspat: $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ ve $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}$ ayırık IFP olduğu için $d(q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}, q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}) > \varepsilon$ ve $s(q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}, q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}) < \varepsilon^*$ olacak $\varepsilon > 0$ ve $\varepsilon^* > 0$ sayıları mevcuttur. Buradan, $q_z^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ IFP olmak üzere $U = \bigcup \left\{ q_z^{\langle\alpha,\beta\rangle}; d(q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}, q_z^{\langle\alpha,\beta\rangle}) < \frac{\varepsilon}{2}, s(q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}, q_z^{\langle\alpha,\beta\rangle}) > \frac{\varepsilon^*}{2} \right\}$ ile tanımlansın, Buradan $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \in U$ ve $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle} \notin U$ olduğu aşikârdır. Diğer taraftan $\tau_{(d,s)}$ tanımından, $\tau_{(d,s)}(U) \geq \left\langle \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^*}{2} \right\rangle$ bulunur. Buradan $\langle\alpha, \beta\rangle$ intuitionistic fuzzy çiftini $\langle\alpha, \beta\rangle \leq \left\langle \frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon^*}{2} \right\rangle$ olacak şekilde seçebiliriz.

Sonuç 4.4.7: $(X, \tau_{(d,s)})$ d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüsü ile tanımlı ST-IFS olmak üzere ayırık her $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ ve $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}$ IFPleri için $\tau_{(d,s)}(U) \geq \langle\alpha, \beta\rangle$, $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \in U$,

$q_y^{\langle\alpha,\beta\rangle} \notin U$ ve $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle} \notin V$, $q_y^{\langle\alpha,\beta\rangle} \in V$ şartlarını sağlayacak $U, V \in IFS^X$ ve $\langle\alpha,\beta\rangle \in I_0 \otimes I_1$ intuitionistic fuzzy çifti vardır. Yani bir $\langle\alpha,\beta\rangle \in I_0 \otimes I_1$ için (X, τ) ST-IFS, $(\alpha, \beta) - T_0$ ST-TIFSdir.

Sonuç 4.4.8: $(X, \tau_{(d,s)})$ d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüsü ile tanımlı ST-IFS olmak üzere her $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ ve $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}$ ayrık IFPleri için $\langle\alpha'',\beta''\rangle \in I_0 \otimes I_1$ Teorem 4.4.6 and Sonuç 4.4.7. ifadeleri sağlayan intuitionistic fuzzy çifti olmak üzere $\inf \alpha'' \in I_0$ and $\sup \beta'' \in I_1$ ise $(X, \tau_{(d,s)})$ ise $(\alpha, \beta) - T_0$ ve $(\alpha, \beta) - T_1$ ST-IFS uzaydır.

Sonuç 4.4.9: $(X, \tau_{(d,s)})$ d uzaklık ölçüsü ve s benzerlik ölçüsü ile tanımlı ST-IFS olmak üzere her $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$, $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}$, $q_z^{\langle\alpha'',\beta''\rangle}$ IFPleri için $d(q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}, q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}) \leq d(q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}, q_z^{\langle\alpha'',\beta''\rangle}) + d(q_z^{\langle\alpha'',\beta''\rangle}, q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle})$ şartı sağlanıyorsa her $q_x^{\langle\alpha,\beta\rangle}$ ve $q_y^{\langle\alpha',\beta'\rangle}$ ayrık IFPleri için $\tau(U) \geq \langle\alpha^*, \beta^*\rangle$, $\tau(V) \geq \langle\alpha^*, \beta^*\rangle$ ve $U \cap V = \emptyset$ şartlarını sağlayacak $U, V \in IFS^X$ ve $\langle\alpha^*, \beta^*\rangle \in I_0 \otimes I_1$ intuitionistic fuzzy çifti mevcuttur.

5. TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER VE TEMPORAL INTUITONISTIC FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR

Bu kısımda Atanassov (1991) tarafından tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy küme kavramı, Šostak ve Chang manasında temporal intuitionistic fuzzy topoloji tanımları incelenecektir. Bilindiği üzere gerçek dünyaya ait kavramlar genellikle zamana bağlıdır. Yani bu kavramların incelenen özellikleri zamana bağlı olarak değişiklik gösterebileceğinden kavramların matematiksel olarak daha iyi ele alınması içi üyelik ve üye olmama dereceleri tanımlandığı uzayın elemanına ve verilen zaman kümesindeki bir zaman anına bağlı olan yeni intuitionistic fuzzy küme tanımının kurulması ihtiyacı doğmuştur. Atanassov bu eksikliği gidermek için 1991 yılında temporal intuitionistic fuzzy küme adı verilen yeni bir küme teorisi tanımlamıştır. Bu alanda geçmiş senelerde birçok çalışma yapılmıştır. Oldukça yeni bir çalışma alanı olan temporal intuitionistic fuzzy küme teorisinde temel birçok matematiksel tanımlama yapılmamıştır. Bunlardan en önemlisi temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzay kavramıdır. Bu kısmın sonunda literatürdeki bu açık kapatılacak ve temporal intuitionistic fuzzy topoloji kavramı hem Chang hem de Šostak manasında tanımlanacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

5.1. Temporal Intuitionistic Fuzzy Kümeler için Temel Tanımlamalar

Tanım 5.1.1: X boştan farklı bir küme T bir zaman kümesi ve $\mu_A : X \times T \rightarrow [0,1]$, $\eta_A : X \times T \rightarrow [0,1]$ her $(x,t) \in X \times T$ için $\mu_A(x,t) + \eta_A(x,t) \leq 1$ şartını sağlayan dönüşümler olmak üzere

$$A(T) = \{(x, \mu_A(x,t), \eta_A(x,t)) : (x,t) \in X \times T\}$$

kümesine bir temporal intuitionistic fuzzy küme denir. Burada $\mu_A(x,t)$, $x \in X$ 'in t anındaki üye olma derecesi ve $\eta_A(x,t)$, $x \in X$ 'in t anındaki üye olmama derecesi olarak adlandırılır. Yazımını kolaylaştırmak için $A(T)$ yerine A tercih edilecektir. X ve T üzerinde tanımlanan tüm temporal intuitionistic fuzzy kümelerin kümesini

$TIFS^{(x,T)}$ ile gösterelim. Açıkça görüleceği üzere her bir intuitionistic fuzzy küme tekil bir zaman kümesi aracılığı ile temporal intuitionistic fuzzy küme olarak ifade edilir. Ayrıca intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan tüm işlemler ve operatörlerde temporal intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanır (Atanassov, 1991).

Tanım 5.1.2: T' ve T'' sonlu ayrık elemanlı zaman kümeleri veya zaman aralıkları ve X boştan farklı bir küme olmak üzere,

$$A(T') = \{(x, \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : (x, t) \in X \times T'\}$$

ve

$$B(T'') = \{(x, \mu_B(x, t), \eta_B(x, t)) : (x, t) \in X \times T''\}$$

Temporal intuitionistic fuzzy kümeleri için $\bar{\mu}_A$, $\bar{\mu}_B$, $\bar{\eta}_A$ ve $\bar{\eta}_B$ aşağıdaki şekilde tanımlanmak üzere

$$\bar{\mu}_A(x, t) = \begin{cases} \mu_A(x, t), & t \in T' \\ 0, & t \in T'' - T', \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_B(x, t) = \begin{cases} \mu_B(x, t), & t \in T'' \\ 0, & t \in T' - T'', \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_A(x, t) = \begin{cases} \eta_A(x, t), & t \in T' \\ 1, & t \in T'' - T', \end{cases}$$

$$\bar{\eta}_B(x, t) = \begin{cases} \eta_B(x, t), & t \in T'' \\ 1, & t \in T' - T'', \end{cases}$$

A ve B temporal intuitionistic fuzzy kümelerinin kesişimi ve birleşimi sırası ile

$$A(T') \cap B(T'') =$$

$$\{(x, \min(\bar{\mu}_A(x, t), \bar{\mu}_B(x, t)), \max(\bar{\eta}_A(x, t), \bar{\eta}_B(x, t))) : (x, t) \in X \times (T' \cup T'')\},$$

$$A(T') \cup B(T'') =$$

$$\{(x, \max(\bar{\mu}_A(x, t), \bar{\mu}_B(x, t)), \min(\bar{\eta}_A(x, t), \bar{\eta}_B(x, t))) : (x, t) \in X \times (T' \cup T'')\}$$

şeklinde tanımlanır. Öte yandan temporal intuitionistic fuzzy kümeler için alt küme tanımı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$A(T') \subseteq B(T'') \Leftrightarrow$ Her bir $(x, t) \in X \times (T' \cup T'')$ için $\bar{\mu}_A(x, t) \leq \bar{\mu}_B(x, t)$ ve $\bar{\eta}_A(x, t) \geq \bar{\eta}_B(x, t)$

$T' = T''$ olması durumunda $\bar{\mu}_A(x, t) = \mu_A(x, t)$, $\bar{\mu}_B(x, t) = \mu_B(x, t)$, $\bar{\eta}_A(x, t) = \eta_A(x, t)$, $\bar{\eta}_B(x, t) = \eta_B(x, t)$ ifadelerinin sağlandığı aşikârdır (Atanassov, 1991).

J bir index kümesi ve her bir $i \in J$ için T_i bir zaman kümesi olmak üzere $T = \bigcup_{i \in J} T_i$ olsun. Şimdi yukarıda verilen birleşim ve kesişim işlemlerini

$F = \{A_i(T_i) = (x, \mu_{A_i}(x, t), \eta_{A_i}(x, t)) : x \in X \times T_i, i \in J\}$ ailesi için genişletelim.

$$\bigcup_{i \in J} A(T_i) = \left\{ (x, \max_{i \in J} (\bar{\mu}_{A_i}(x, t)), \min_{i \in J} (\bar{\eta}_{A_i}(x, t))) : (x, t) \in X \times T \right\},$$

$$\bigcap_{i \in J} A(T_i) = \left\{ (x, \min_{i \in J} (\bar{\mu}_{A_i}(x, t)), \max_{i \in J} (\bar{\eta}_{A_i}(x, t))) : (x, t) \in X \times T \right\}.$$

Burada $\bar{\mu}_{A_j}$ ve $\bar{\eta}_{A_j}$ dönüşümleri

$$\bar{\mu}_{A_j}(x, t) = \begin{cases} \mu_{A_j}(x, t), & \text{if } t \in T_j \\ 0, & \text{if } t \in T - T_j, \end{cases}$$

ve

$$\bar{\eta}_{A_j}(x, t) = \begin{cases} \eta_{A_j}(x, t), & t \in T_j \\ 1, & t \in T - T_j. \end{cases}$$

olarak tanımlanmıştır.

Her bir $(x, t) \in X \times T$ için üye olma ve üye olmama dereceleri sırası ile $\mu_{0_-}(x, t) = 0$, $\eta_{0_-}(x, t) = 1$ ve $\mu_{1_-}(x, t) = 1$, $\eta_{1_-}(x, t) = 0$ şeklinde tanımlı $0_-^t(T) = \{(x, 0, 1) : (x, t) \in X \times T\}$ ve $1_-^t(T) = \{(x, 1, 0) : (x, t) \in X \times T\}$ temporal intuitionistic fuzzy kümelerini kısaca, sırası ile 0_-^t ve 1_-^t sembolleri ile göstereyim.

Literatürde temporal intuitionistic fuzzy kümeler için birçok operatör tanımlanmıştır. Bunlara örnek olarak aşağıdaki operatörler verilir.

Atanassov (1991) kapanış ve iç operatörleri olarak tanımladığı aşağıdaki operatörleri tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemiştir.

Tanım 5.1.3: X boştan farklı bir küme, T bir zaman kümesi ve $A \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere

$$C^*(A) = \left\{ \left(x, \max_{t \in T} \mu_A(x), \min_{t \in T} \eta_A(x) \right) : (x, t) \in X \times T \right\}$$

$$I^*(A) = \left\{ \left(x, \min_{t \in T} \mu_A(x), \max_{t \in T} \eta_A(x) \right) : (x, t) \in X \times T \right\}$$

Bu operatörlerin bir TIFS'yi IFS kümeye çevirdiği tanımından kolayca görülür. C^* ve I^* operatörlerinin aşağıdaki şartları sağladığı kolayca gösterilir (Atanassov, 1991).

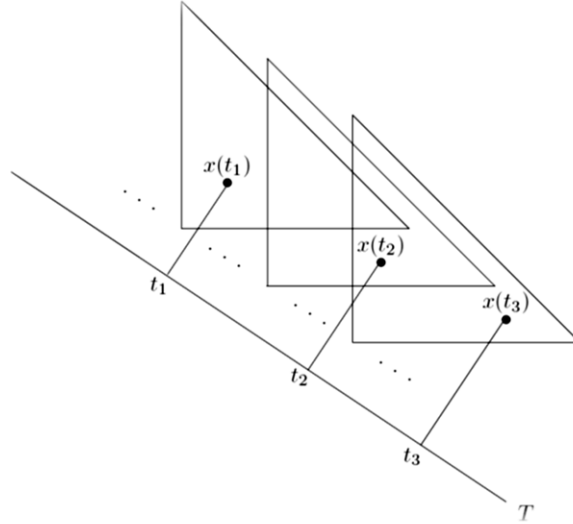
Teorem 5.1.4: $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere

1. $C^*(C^*(A)) = C^*(A),$
2. $C^*(I^*(A)) = I^*(A),$
3. $I^*(C^*(A)) = C^*(A),$
4. $I^*(I^*(A)) = I^*(A),$
5. $C(C^*(A)) = C^*(C(A)),$
6. $I(I^*(A)) = I^*(I(A)),$
7. $I^*(A \cap B) = I^*(A) \cap I^*(B),$
8. $I^*(A \cup B) \supset I^*(A) \cup I^*(B),$
9. $C^*(A \cap B) \subset C^*(A) \cap C^*(B),$
10. $C^*(A \cup B) = C^*(A) \cup C^*(B),$
11. $\overline{C^*(\bar{A})} = I^*(A)$

(Atanassov, 1991).

Atanassov, C , I operatörleri ile C^* ve I^* operatörleri arasındaki farkın C^* ve I^* operatörlerinin her bir $x \in X$ için en yüksek ve en düşük değerlendirmeleri bir zaman skalasında değerlendirme imkânı sunarken, C , I operatörlerinin belirli bir

$x \in X$ için benzer değerlendirmeler üzerinden en yüksek ve en düşük değerlendirmeleri hesaplaması ve bunu yaparken zaman skalasını göz önünde bulundurmaması olarak belirtmiştir. Ayrıca Atanassov, temporal intuitionistic fuzzy kümelerin geometrik gösterimi için aşağıdaki şemayı vermiştir.



Şekil 5.1. TIFS'nin geometrik gösterimi (Atanassov, 1991).

Parvathi ve Geetha (2009) temporal intuitionistic fuzzy kümeler için bazı yeni operatörler tanımlamıştır.

Tanım 5.1.5: $A(T')$ ve $B(T'')$ birer temporal intuitionistic fuzzy kümeler olmak üzere max-min operatörü $\mapsto$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$A(T') \mapsto B(T'') =$$

$$\left\{ \left((x, t), \max \{ \bar{\eta}_A(x, t), \bar{\mu}_B(x, t) \}, \min \{ \bar{\eta}_B(x, t), \bar{\mu}_A(x, t) \} \right) : (x, t) \in X \times (T' \cup T'') \right\}$$

Tanım 5.1.6: $A \in TIFS^{(X, T)}$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin (α, β) -seviye kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$N_{(\alpha, \beta)}(A) = \left\{ \left((x, t), \mu_A(x, t), \eta_A(x, t) \right) : (x, t) \in X \times T, \mu_A(x, t) \geq \alpha, \eta_A(x, t) \leq \beta \right\}$$

Benzer şekilde A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin üye olma derecesi ile üretilen α -seviye kümesi

$$N^{\alpha}(A) = \{((x, t), \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : (x, t) \in X \times T, \mu_A(x, t) \geq \alpha\}$$

ve A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin üye olmama derecesi ile üretilen β -seviye kümesi

$$N_{\beta}(A) = \{((x, t), \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : (x, t) \in X \times T, \eta_A(x, t) \leq \beta\}$$

ile tanımlanır. Bu üç tanım arasında aşağıdaki $N_{(\alpha, \beta)}(A) \subset \left\{ \begin{matrix} N^{\alpha}(A) \\ N_{\beta}(A) \end{matrix} \right\} \subset A$ ilişkisi

aşikârdır (Parvathi ve Geetha, 2009).

Parvathi ve Geetha tarafından verilen bu seviye kümesi tanımı fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümelerdeki seviye kümesinden farklı olarak seviye kümesini bir temporal küme olarak tanımlamaktadır. Bu kısımda fuzzy ve intuitionistic fuzzy küme kuramlarındaki seviye kümesi yaklaşımı ile yeni bir seviye kümesi tanımlanacak ve özellikleri incelenecektir.

Parvathi ve Geetha (2009) intuitionistic fuzzy kümelerde de benzeri tanımlı aşağıdaki operatörleri tanımlamış ve bu yeni operatörlerin temporal intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan diğer operatörler ile ilişkilerini incelemiştir.

Tanım 5.1.7: A bir temporal intuitionistic fuzzy küme $\alpha, \beta \in [0, 1]$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere $G_{\alpha, \beta}^*$ operatörü

$$G_{\alpha, \beta}^*(A) = \{((x, t), \alpha \cdot \mu_A(x, t), \beta \cdot \eta_A(x, t)) : (x, t) \in X \times T\}$$

ile tanımlıdır. Parvathi ve Geetha (2009) bu operatörün aşağıdaki özellikleri sağladığını ispatlamıştır.

1. $G_{\alpha, \beta}^*(A)$ bir TIFS'dir,
2. $\alpha \leq \gamma$ ise $G_{\alpha, \beta}^*(A) \subset G_{\gamma, \beta}^*(A)$,
3. $\beta \leq \gamma$ ise $G_{\alpha, \beta}^*(A) \supset G_{\alpha, \gamma}^*(A)$,
4. $\gamma, \lambda \in [0, 1]$ olmak üzere $G_{\alpha, \beta}^*(G_{\gamma, \lambda}^*(A)) = G_{\alpha, \gamma, \beta, \lambda}^*(A) = G_{\gamma, \lambda}^*(G_{\alpha, \beta}^*(A))$,
5. $G_{\alpha, \beta}^*(C^*(A)) = C^*(G_{\alpha, \beta}^*(A))$,

6. $G_{\alpha,\beta}^* (I^* (A)) = I^* (G_{\alpha,\beta}^* (A)),$
7. $\overline{G_{\alpha,\beta}^* (A)} = G_{\alpha,\beta}^* (\overline{A})$
8. $G_{\alpha,\beta}^* (A(T') \mapsto B(T'')) = G_{\alpha,\beta}^* (A(T')) \mapsto G_{\alpha,\beta}^* (B(T''))$
9. $N_{\alpha,\beta} (A(T') \mapsto B(T'')) = N_{\alpha,\beta} (A(T')) \mapsto N_{\alpha,\beta} (B(T''))$
10. $N^\alpha (A(T') \mapsto B(T'')) = N^\alpha (A(T')) \mapsto N^\alpha (B(T''))$
11. $N_\beta (A(T') \mapsto B(T'')) = N_\beta (A(T')) \mapsto N_\beta (B(T''))$

(Parvathi ve Geetha, 2009).

Yılmaz ve Çuvalcıoğlu (2014), temporal intuitionistic fuzzy kümeler için bazı yeni seviye operatörleri tanımlamış ve bu operatörlerin özelliklerini incelemiştir.

Tanım 5.1.8: $A(T')$ ve $B(T'')$ iki temporal intuitionistic fuzzy küme olmak üzere

1. $N_B(A) =$

$$\{(x, \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : \mu_A(x, t) \geq \mu_B(x, t), \eta_A(x, t) \leq \eta_B(x, t), X \in X \times (T' \cup T'')\}$$

2. $N_B^*(A) =$

$$\{(x, \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : \mu_A(x, t) \leq \mu_B(x, t), \eta_A(x, t) \geq \eta_B(x, t), X \in X \times (T' \cup T'')\}$$

(Yılmaz ve Çuvalcıoğlu, 2014).

Burada tanımlanan seviye operatörlerinin hem üyelik hem de üye olmama derecelerini de içerdiği görülmektedir. Şimdi bu tanımlamalara benzer olarak klasik yaklaşımla seviye kümeleri tanımlayacağız.

Tanım 5.1.9: $A \in TIFS^{(X,T)}$ ve $t \in T$ için $\alpha_t, \beta_t \in [0,1]$ ve $\alpha_t + \beta_t \leq 1$ olmak üzere A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin (α_t, β_t) -temporal seviye kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$A_{(\alpha_t, \beta_t)} = \{x : (x, t) \in X \times T, \mu_A(x, t) \geq \alpha_t, \eta_A(x, t) \leq \beta_t\}$$

Benzer şekilde A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin üye olma derecesi ile üretilen α_t – temporal seviye kümesi

$$A^{\alpha_t} = \{x : (x, t) \in X \times T, \mu_A(x, t) \geq \alpha_t\}$$

ve A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin üye olmama derecesi ile üretilen β – seviye kümesi

$$A_{\beta_t} = \{x : (x, t) \in X \times T, \eta_A(x, t) \leq \beta_t\}$$

ile tanımlanır.

Önerme 5.1.10: $A \in TIFS^{(X, T')}$, $B \in TIFS^{(X, T'')}$, $t \in T' \cup T''$ için $\alpha_t, \beta_t \in [0, 1]$ ve $\alpha_t + \beta_t \leq 1$ olmak üzere

- i. $A \subseteq B$ ise $A_{(\alpha_t, \beta_t)} \subseteq B_{(\alpha_t, \beta_t)}$
- ii. $\langle \alpha_t, \beta_t \rangle \geq \langle \delta_t, \gamma_t \rangle$ ise $A_{(\alpha_t, \beta_t)} \subseteq A_{(\delta_t, \gamma_t)}$
- iii. $\alpha_t \geq \delta_t$ ise $A^{\delta_t} \supseteq A^{\alpha_t}$
- iv. $\beta_t \geq \gamma_t$ ise $A_{\beta_t} \supseteq A_{\gamma_t}$
- v. $A_{(\alpha_t, \beta_t)} \subseteq A^{\alpha_t}$
- vi. $A_{(\alpha_t, \beta_t)} \subseteq A_{\beta_t}$

İspat: i. $A \subseteq B$ ise her $x \in X$ ve $t \in T' \cup T''$ için $\bar{\mu}_B(x, t) \geq \bar{\mu}_A(x, t)$ ve $\bar{\eta}_B(x, t) \leq \bar{\eta}_A(x, t)$ dir. $\forall x \in A_{(\alpha_t, \beta_t)}$ için $\bar{\mu}_B(x, t) \geq \bar{\mu}_A(x, t) \geq \alpha_t$ ve $\beta_t \leq \bar{\eta}_B(x, t) \leq \bar{\eta}_A(x, t)$ olduğundan $x \in B_{(\alpha_t, \beta_t)}$ elde edilir. Buradan $A_{(\alpha_t, \beta_t)} \subseteq B_{(\alpha_t, \beta_t)}$ olduğu anlaşılır. Diğer durumlar benzer şekilde ispatlanır.

5.2. Temporal Intuitionistic Fuzzy Topolojik Uzaylar

Intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde, fuzzy kümelerde olduğu gibi, temel olarak iki farklı yaklaşımla topoloji tanımlanmaktadır. Bunlar klasik yaklaşım olan Chang manasında intuitionistic fuzzy topoloji ve açık fuzzy küme tanımlamak yerine intuitionistic fuzzy kümenin açıklığının tanımlandığı Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topolojiler olarak isimlendirilir. Bölüm 2 de detaylıca incelenen bu konu ile alakalı literatür incelendiğinde bu yaklaşımların ayrı ayrı genişçe bir literatürün olduğu görülmektedir. Tez çalışmamızın bu kısmında her iki yaklaşım temporal intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanacaktır. Šostak manasında tanımlanacak olan yeni topoloji için klasik topolojide iç, kapanış, süreklilik, kompaktlık kavramlarına denk tanımlamalar yapılacaktır.

Tanım 5.2.1: Boştan farklı bir X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy kümelerin bir ailesi τ aşağıdaki şartları sağlıyorsa Chang manasında temporal intuitionistic fuzzy topoloji (kısaca CT-TIFS) adını alır.

- i. Her $t \in T$ için $1_-^t, 0_-^t \in \tau$,
- ii. Her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için $A \cap B \in \tau$,
- iii. Herhangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq \tau$ alt ailesi için $\bigcup_{i \in J} A_i \in \tau$

Chang manasında tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzay için temel topolojik kavramlar klasik topolojidekine benzer olarak tanımlanır.

Tanım 5.2.2: Boştan farklı bir X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde $\tau_t(A) = \langle \mu_{\tau_t}(A), \eta_{\tau_t}(A) \rangle$ ile tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy küme ailesi τ_t her $t \in T$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topoloji adını alır.

- (ST1). $\tau_t(0_-^t) = 1_-$ ve $\tau_t(1_-^t) = 1_-$,
- (ST2). Her $A_1, A_2 \in TIFS^{(X,T)}$ için $\tau_t(A_1 \cap A_2) \geq \tau_t(A_1) \wedge \tau_t(A_2)$,

(ST3). Herhangi bir J indeks kümesi ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq TIFS^{(X,T)}$ alt ailesi için

$$\tau_t\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (\tau_t(A_i)) .$$

Bu tanımlamalar ile birlikte (X, τ_t) ikilisi Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzay adını alır. $A \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere $\mu_{\tau_t}(A)$, A 'nın t anındaki anlık açık olma derecesi ve $\eta_{\tau_t}(A)$, A 'nın t anındaki anlık açık olmama derecesi olarak isimlendirilir. Bu tanımda dikkat edilmesi gereken noktalardan biri açık olma ve açık olmama derecelerinin zamana bağlı olarak değişmesidir. Ayrıca tek elemanlı zaman kümeleri için bu tanımın Çoker (1996) tarafından tanımlanan Šostak manasındaki intuitionistic fuzzy topoloji tanımına denktir.

Tanım 5.2.3: Boştan farklı bir X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde $\tau_t^*(A) = \langle \mu_{\tau_t^*}(A), \eta_{\tau_t^*}(A) \rangle$ ile tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy küme ailesi τ_t^* her $t \in T$ için

- i. $\tau_t^*(0_-^t) = 1^-$ ve $\tau_t^*(1_-^t) = 1^-$,
- ii. Her $A_1, A_2 \in TIFS^{(X,T)}$ için $\tau_t^*(A_1 \cup A_2) \geq \tau_t(A_1) \wedge \tau_t(A_2)$
- iii. $\{A_i; i \in J\} \subseteq TIFS^{(X,T)}$ için $\tau_t^*\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (\tau_t^*(A_i))$.

şartlarını sağlıyorsa $\mu_{\tau_t^*}(A)$, A 'nın t anındaki anlık kapalı olma ve $\eta_{\tau_t^*}(A)$, A 'nın t anındaki anlık kapalı olmama derecesi olarak isimlendirilir. (X, τ_t) Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzay olmak üzere $\tau_t^*(A) = \langle \mu_{\tau_t^*}(A), \eta_{\tau_t^*}(A) \rangle = \langle \mu_{\tau_t}(\bar{A}), \eta_{\tau_t}(\bar{A}) \rangle$ ile tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy ailesinin bir temporal intuitionistic fuzzy kapalılık derecesi tanımladığı aşikârdır.

$TIFS^{(X,T)}$ üzerinde tanımlı Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topolojiden $TIFS^{(X,T)}$ üzerinde tanımlı Šostak manasında intuitionistic fuzzy topoloji tanımlamak için aşağıdaki metot kullanılır.

Teorem 5.2.4: (X, τ_t) , boştan farklı X kümesi ve zaman kümesi T üzerinde bir ST-TIFS olmak üzere Her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $\bigwedge \tau_t(A) = \bigwedge_{t \in T} \tau_t(A)$
 $= \left\langle \min_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A), \max_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A) \right\rangle$ ile tanımlı $(X, \bigwedge \tau_t)$ $TIFS^{(X,T)}$ üzerinde bir Šostak manasında intuitionistic fuzzy topoloji tanımlar.

İspat: (1) (X, τ_t) , boştan farklı X kümesi ve zaman kümesi T üzerinde bir ST-TIFS olduğundan her $t \in T$ için $\tau_t(0_-^t) = 1^-$ ve $\tau_t(1_-^t) = 1^-$ dir. Buradan $\bigwedge_{t \in T} \tau_t(0_-^t) = \bigwedge_{t \in T} 1^- = \left\langle \bigwedge_{t \in T} 1, \bigvee_{t \in T} 0 \right\rangle = \langle 1, 0 \rangle$ ve $\bigwedge_{t \in T} \tau_t(1_-^t) = \bigwedge_{t \in T} 1^- = \left\langle \bigwedge_{t \in T} 1, \bigvee_{t \in T} 0 \right\rangle = \langle 1, 0 \rangle$ yani $\bigwedge \tau_t(0_-^t) = 1^-$ ve $\bigwedge \tau_t(1_-^t) = 1^-$ elde edilir.

(2) (X, τ_t) bir ST-TIFS olduğundan her $t \in T$ ve $A_1, A_2 \in TIFS^{(X,T)}$ için $\tau_t(A_1 \cap A_2) \geq \tau_t(A_1) \wedge \tau_t(A_2)$ daha açık bir ifade ile

$$\left\langle \mu_{\tau_t}(A_1 \cap A_2), \eta_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \right\rangle \geq \left\langle \mu_{\tau_t}(A_1), \eta_{\tau_t}(A_1) \right\rangle \wedge \left\langle \mu_{\tau_t}(A_2), \eta_{\tau_t}(A_2) \right\rangle$$

oldüğundan $\mu_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \geq \mu_{\tau_t}(A_1) \wedge \mu_{\tau_t}(A_2)$ (*) ve $\eta_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \leq \eta_{\tau_t}(A_1) \vee \eta_{\tau_t}(A_2)$

(**) ifadeleri elde edilir. Diğer taraftan $\bigwedge \tau_t$ ifadesinin tanımından dolayı

$$\bigwedge \tau_t(A_1 \cap A_2) = \bigwedge_{t \in T} \tau_t(A_1 \cap A_2) = \left\langle \min_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_1 \cap A_2), \max_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \right\rangle$$

ile tanımlıdır. (*) ve (**) eşitsizliklerine sırası ile $\bigwedge$ ve $\bigvee$ işlemleri uygulanırsa

$$\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \geq \bigwedge_{t \in T} (\mu_{\tau_t}(A_1) \wedge \mu_{\tau_t}(A_2)) = \left(\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_1) \right) \wedge \left(\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_2) \right)$$

ve

$$\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \leq \bigvee_{t \in T} (\eta_{\tau_t}(A_1) \vee \eta_{\tau_t}(A_2)) = \left(\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_1) \right) \vee \left(\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_2) \right)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_1 \cap A_2), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_1 \cap A_2) \right\rangle &\geq \left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_1) \wedge \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_2), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_1) \vee \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_2) \right\rangle \\ &= \left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_1), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_1) \right\rangle \wedge \left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A_2), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_2) \right\rangle \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifadeden $\wedge \tau_t$ ifadesinin tanımından $\wedge \tau_t(A_1 \cap A_2) \geq (\wedge \tau_t(A_1)) \wedge (\wedge \tau_t(A_2))$ ifadesi elde edilir. Daha kısa bir ifade ile $A_1, A_2 \in TIFS^{(X,T)}$ ve her $t \in T$ için $\tau_t(A_1 \cap A_2) \geq \tau_t(A_1) \wedge \tau_t(A_2)$ olduğundan $\bigwedge_{t \in T} \tau_t(A_1 \cap A_2) \geq \bigwedge_{t \in T} (\tau_t(A_1) \wedge \tau_t(A_2)) = \bigwedge_{t \in T} \tau_t(A_1) \wedge \bigwedge_{t \in T} \tau_t(A_2)$ ifadesi elde edilir. Son eşitsizlik $\wedge \tau_t(A_1 \cap A_2) \geq (\wedge \tau_t(A_1)) \wedge (\wedge \tau_t(A_2))$ ifadesinin sağlandığını gösterir.

(3) (X, τ_t) bir ST-TIFS olduğundan her $t \in T$ ve $\{A_i, i \in J\} \subseteq TIFS^{(X,T)}$ için

$\tau_t\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} \tau_t(A_i)$ daha açık bir ifade ile

$\left\langle \mu_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right), \eta_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \right\rangle \geq \bigwedge_{i \in J} \left\langle \mu_{\tau_t}(A_i), \eta_{\tau_t}(A_i) \right\rangle = \left\langle \bigwedge_{i \in J} \mu_{\tau_t}(A_i), \bigvee_{i \in J} \eta_{\tau_t}(A_i) \right\rangle$ dir. Buradan

$\mu_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} \mu_{\tau_t}$ ve $\eta_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \leq \bigvee_{i \in J} \eta_{\tau_t}(A_i)$ eşitsizlikleri elde edilir. Son iki

eşitsizliğe sırası ile $\bigwedge_{t \in T}$ ve $\bigvee_{t \in T}$ işlemleri uygulanırsa $\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{t \in T} \left(\bigwedge_{i \in J} \mu_{\tau_t}\right)$ ve

$\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \leq \bigvee_{t \in T} \left(\bigvee_{i \in J} \eta_{\tau_t}(A_i)\right)$ ifadeleri elde edilir. Son iki eşitsizlik

$\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} \left(\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}\right)$ ve $\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \leq \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_i)\right)$ olarak ifade

edilebileceğinden $\left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \right\rangle \geq \left\langle \bigwedge_{i \in J} \left(\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}\right), \bigvee_{i \in J} \left(\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A_i)\right) \right\rangle$ ifadesi

elde edilir. $\wedge \tau_t$ ifadesinin tanımından $\wedge \tau_t\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) \geq \bigwedge_{i \in J} (\wedge \tau_t(A_i))$ eşitsizliği elde edilir.

Böylece $\wedge \tau_t$ dönüşümünün Šostak manasında intuitionistic fuzzy topoloji olmanın üçüncü şartını sağladığı görülür.

Örnek 5.2.5: $X = \{x_1, x_2\}$ ve $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ olmak üzere $A_1, A_2 \in TIFS^{(X,T)}$ kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

A_1	x_1	x_2
t_1	(0.23, 0.35)	(0.32, 0.51)
t_2	(0.71, 0.1)	(0.43, 0.25)
t_2	(0.01, 0.95)	(0.93, 0)

ve

A_2	x_1	x_2
t_1	(0.33, 0.33)	(0.77, 0.14)
t_2	(0.8, 0.2)	(0.51, 0.35)
t_2	(0.11, 0.45)	(0.25, 0.25)

Bu tablolardaki her hücrenin içindeki ikililerin ilk bileşeni o andaki üye olma derecesini ve ikinci bileşende o andaki üye olmama derecesini göstermektedir. Şimdi $\tau_t : TIFS(X) \rightarrow I \times I$, $\tau_{t_i}(A) = \langle \mu_{\tau_{t_i}}(A), \eta_{\tau_{t_i}}(A) \rangle$ intuitionistic fuzzy ailesinin açık olma ve açık olmama derecelerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\mu_{\tau_{t_i}}(A) = \begin{cases} 1, & A = \underline{0}^t, \underline{1}^t \\ \left(\mu_{A_1}(x, t_i) \right)^{\frac{1}{2^i}}, & A = A_1, \\ \left(\mu_{A_2}(x, t_i) \right)^{\frac{1}{3^i}}, & A = A_2, \\ \left(\max \{ \mu_{A_1}(x, t_i), \mu_{A_2}(x, t_i) \} \right)^{\frac{1}{2^i}}, & A = A_1 \vee A_2, \\ 0, & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

ve

$$\eta_{\tau_{t_i}}(A) = \begin{cases} 0, & A = \underline{0}^t, \underline{1}^t \\ \frac{\eta_{\tau_{t_i}}(A_1)^{\frac{1}{2^i}}}{2^i}, & A = A_1, \\ \frac{(\eta_{\tau_{t_i}}(A_2))^{\frac{1}{4^i}}}{3^i}, & A = A_2, \\ \frac{1}{2 \cdot i} \cdot \min\{\eta_{\tau_{t_i}}(A_1), \eta_{\tau_{t_i}}(A_2)\} & A = A_2 \vee A_1 \\ 1, & \text{diğer durumlar;} \end{cases}$$

ST-TIFS uzayının tanımından (X, τ_t) ikilisinin Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topoloji olduğu görülür. Aşağıdaki tabloda A_1 , A_2 , $A_1 \vee A_2$ TIFSlerinin τ_t Šostak manasındaki topolojisine göre açık olma ve açık olmama derecelerini gösterilmiştir.

	$\mu_{\tau_{t_i}}(A_1)$	$\eta_{\tau_{t_i}}(A_1)$	$\mu_{\tau_{t_i}}(A_2)$	$\eta_{\tau_{t_i}}(A_2)$	$\mu_{\tau_{t_i}}(A_1 \vee A_2)$	$\eta_{\tau_{t_i}}(A_1 \vee A_2)$
t_1	0.47958	0.2958	0.68399	0.23805	0.57446	0.165
t_2	0.84507	0.14059	0.91049	0.078567	0.94574	0.025
t_2	0.56234	0.1242	0.99732	0	0.75888	0.05625

Topolojide tanımlanan iç ve kapanış tanımları temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzaylara aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 5.2.6: (X, τ_t) bir ST-TIFS ve $A \in TIFS^{(X, T)}$. A TIFSsinin t anında τ_t temporal intuitionistic fuzzy topolojisine uygun anlık kapanış ve anlık iç kümeleri sırası ile

$$\text{cl}^t(A) = \bigcap \{K \in TIFS(X); \tau_t^*(K) > 0^-, A \subseteq K\}$$

ve

$$\text{int}^t(A) = \bigcup \{K \in TIFS(X); \tau_t(K) > 0^-, K \subseteq A\}.$$

ile tanımlanır. Diğer taraftan $\alpha + \beta \leq 1$ şartını sağlayan $\alpha \in (0,1] = I_0$, $\beta \in [0,1) = I_1$ reel sayılar olmak üzere A TIFSsinin t anında (α, β) -anlık kapanış ve (α, β) -anlık iç kümeleri sırası ile

$$cl_{(\alpha, \beta)}^t(A) = \bigcap \{K \in TIFS(X); \tau_t^*(K) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, A \subseteq K\}$$

ve

$$int_{(\alpha, \beta)}^t(A) = \bigcup \{K \in TIFS(X); \tau_t(K) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, K \subseteq A\}$$

ile tanımlanır.

Önerme 5.2.7: (X, τ) ST-TIFS ve $A, B \in TIFS^{(X, \tau)}$ olmak üzere

- a. $A \subseteq B \Rightarrow int^t(A) \subseteq int^t(B)$,
- b. $A \subseteq B \Rightarrow cl^t(A) \subseteq cl^t(B)$,
- c. $\overline{int^t(A)} = cl^t(\bar{A})$,
- d. $\overline{cl^t(A)} = int^t(\bar{A})$,
- e. $int^t(A) = \overline{cl^t(\bar{A})}$,
- f. $cl^t(A) = \overline{int^t(\bar{A})}$,
- g. $int^t(1_-^t) = 1_-^t$,
- h. $int^t(A) \subseteq A$,
- i. $int^t(int^t(A)) = int^t(A)$,
- j. $int^t(A \cap B) \subseteq int^t(A) \cap int^t(B)$,
- k. $cl^t(0_-^t) = 0_-^t$,
- l. $A \subseteq cl^t(A)$,
- m. $cl^t(cl^t(A)) = cl^t(A)$,
- n. $cl^t(A) \cup cl^t(B) \subseteq cl^t(A \cup B)$.

Önerme 5.2.8: $\langle \alpha, \beta \rangle$ -seviye anlık intuitionistic fuzzy içi ve kapanışı $A, B \in TIFS^{(X,T)}$

için aşağıdaki özellikleri sağlar

1. $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \supseteq A$,
2. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \subseteq A$,
3. $A \subseteq B$ ve $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle r, s \rangle$ ise $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \subseteq cl_{\langle r, s \rangle}^t(A)$,
4. $A \subseteq B$ ve $\langle \alpha, \beta \rangle \leq \langle r, s \rangle$ ise $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \subseteq int_{\langle r, s \rangle}^t(A)$,
5. $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)) = cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)$,
6. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)) = int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)$,
7. $cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A \cup B) = cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \cup cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(B)$,
8. $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A \cap B) = int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \cap int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(B)$,
9. $\overline{cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)} = int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(\bar{A})$,
10. $\overline{int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)} = cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(\bar{A})$.

Önerme 5.2.9: (X, τ_t) , X boştan farklı kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlı bir ST-TIFS olmak üzere $\bigwedge_{t \in T} (cl^t(A))$ ve $\bigvee_{t \in T} (int^t(A))$ ifadeleri $(X, \wedge \tau_t)$ Šostak manasındaki topolojiye göre sırası ile kapanış $cl(A)$ ve içine $int(A)$ kümelerine eşittir.

İspat: 1) $(X, \wedge \tau_t)$ üzerinde $cl(A) = \bigcap \{K \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t^*(K) > 0^-, A \subseteq K\}$ olarak tanımlanır. Buradaki $\{K \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t^*(K) > 0, A \subseteq K\}$ ailesini C^* ile gösterelim. Diğer taraftan $cl^t(A) = \bigcap \{K \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t^*(K) > 0^-, A \subseteq K\}$ ifadesinden $\{K \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t^*(K) > \tilde{0}, A \subseteq K\}$ ailesini C_t^* ile gösterelim. $\forall K \in C^*$ için $\wedge \tau_t^*(K) > 0$ ve $A \subseteq K$ olduğundan her $t \in T$ için $\tau_t^*(K) > 0$ yazılır. Buradan her $t \in T$ için $K \in C_t^*$ diğer bir ifade ile $C^* \subseteq C_t^*$ elde edilir. Burada her iki tarafa kesişim işlemi

uygulanırsa $\bigcap_{K \in C_t^*} K \subseteq \bigcap_{K \in C^*} K$ diğ er bir ifade ile her $t \in T$ için $cl^t(A) \subseteq cl(A)$ elde edilir.

Son ifadeye $t \in T$ üzerinden kesişim iş lemi uygulanırsa $\bigcap_{t \in T} cl^t(A) \subseteq \bigcap_{t \in T} cl(A)$ buradan

$\bigcap_{t \in T} cl^t(A) \subseteq cl(A)$ (1) elde edilir. Diğ er taraftan

$\bigcap_{t \in T} cl^t(A) = \bigcap_{t \in T} \bigcap \{K \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t^*(L) > 0^-, A \subseteq K\}$ olduğ undan buradaki

$\bigcap \{K \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t^*(L) > 0^-, A \subseteq K\}$ kümesini gösterim kolaylığı için K_t^* ile gösterelim. Buradan $\bigcap_{t \in T} cl^t(A) = \bigcap_{t \in T} K_t^*$ yazılır. Buradan her $t \in T$ için ve τ_t^* kapalılık

derecesinin tanımından $\tau_t^*\left(\bigcap_{t \in T} K_t^*\right) \geq \bigwedge_{t \in T} \tau_t^*(K_t^*) > 0$ olduğ undan $\bigcap_{t \in T} K_t^* \in C^*$ olduğ u

anlaşılır. Diğ er taraftan $cl(A) = \bigcap_{K \in C^*} K$ olarak tanımlandığı ndan $cl(A) \subseteq \bigcap_{t \in T} K_t^*$ yani

$cl(A) \subseteq \bigcap_{t \in T} cl^t(A)$ (2) ifadesi elde edilir. (1) ve (2) den $cl(A) = \bigcap_{t \in T} cl^t(A)$ eşitliği elde

edilir.

(2) $(X, \wedge \tau_t)$ üzerinde $\text{int}(A) = \bigcup \{L \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A\}$ olarak

tanımlanır. Burada $\{L \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A\}$ ailesini G^* ile gösterelim.

Diğ er taraftan $\text{int}^t(A) = \bigcup \{L \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A\}$ olarak tanımlandığı ndan

$\{L \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A\}$ ailesini G_t^* ile gösterelim. $\forall L \in G^*$ için $\wedge \tau_t(L) > 0^-$

oldüğ undan her $t \in T$ için $\tau_t(L) > 0^-$ olduğ u anlaşılır. Buradan $L \in G_t^*$ yani $G^* \subseteq G_t^*$

olur. Buradan $\bigcup_{L \in G^*} L \subseteq \bigcup_{L \in G_t^*} L$ diğ er bir ifade ile her $t \in T$ için $\text{int}(A) \subseteq \text{int}^t(A)$ olduğ u

görölür. Son ifadeye $t \in T$ üzerinden birleşim iş lemi uygulanırsa

$\bigcup_{t \in T} \text{int}(A) \subseteq \bigcup_{t \in T} \text{int}^t(A)$ yani $\text{int}(A) \subseteq \bigcup_{t \in T} \text{int}^t(A)$ (1) ifadesi elde edilir. Diğ er taraftan

$\bigcup_{t \in T} \text{int}^t(A) = \bigcup_{t \in T} L_t^*$ olsun. Her $t \in T$ için $\tau_t\left(\bigcup_{t \in T} L_t^*\right) \geq \bigwedge_{t \in T} \tau_t(L_t^*) > 0$ elde edilir. Buradan

$\bigcup_{t \in T} L_t^* \in G^*$ olduğu anlaşılır. Böylece $\bigcup_{t \in T} L_t^* \subseteq \bigcup_{L \in G^*} L$ yani $\bigcup_{t \in T} \text{int}^t(A) \subseteq \text{int}(A)$ (2) ifadesi elde edilir. (1) ve (2) den $\bigcup_{t \in T} \text{int}^t(A) = \text{int}(A)$ eşitliği elde edilir.

Önerme 5.2.10: (X, τ_t) X boştan farklı kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlı bir ST-TIFS olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ ve $t \in T$ için

- (i) $A \subseteq cl^t(A) \subseteq cl_{(\alpha, \beta)}^t(A)$,
- (ii) $\text{int}_{(\alpha, \beta)}^t(A) \subseteq \text{int}^t(A) \subseteq A$,
- (iii) $\tau_t^*(A) > 0^-$ olmak üzere $cl^t(A) = \bigcap_{(\alpha, \beta) \in I_0 \times I_1} cl_{(\alpha, \beta)}^t(A)$,
- (iv) $\tau_t(A) > 0^-$ olmak üzere $\text{int}^t(A) = \bigcup_{(\alpha, \beta) \in I_0 \times I_1} \text{int}_{(\alpha, \beta)}^t(A)$.

İspat: (i) $cl_{(\alpha, \beta)}^t(A) = \bigcap \{K \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t^*(K) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, A \subseteq K\}$ ifadesi için $\{K \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t^*(K) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, A \subseteq K\}$ ailesini $C_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^*$ ile gösterelim. Diğer taraftan $cl^t(A) = \bigcap \{K \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t^*(K) > 0^-, A \subseteq K\}$ ifadesi için $\{K \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t^*(K) > 0^-, A \subseteq K\}$ ailesini C_t^* ile gösterelim. Her $K \in C_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^*$ için $\tau_t^*(K) \geq \langle \alpha, \beta \rangle > 0^-$ olduğundan $K \in C_t^*$ olur. Buradan $C_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^* \subseteq C_t^*$ ifadesi elde edilir. Buradan $\bigcap_{K \in C_t} K \subseteq \bigcap_{K \in C_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^*} K$ yani $cl^t(A) \subseteq cl_{(\alpha, \beta)}^t(A)$ ifadesi elde edilir.

(ii) $\text{int}_{(\alpha, \beta)}^t(A) = \bigcup \{L \in TIFS(X); \tau_t(L) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, L \subseteq A\}$ ifadesi için $\{L \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t(L) \geq \langle \alpha, \beta \rangle, L \subseteq A\}$ ailesini $G_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^*$ ile gösterelim. Diğer taraftan $\text{int}^t(A) = \bigcup \{L \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A\}$ ifadesi için $\{L \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A\}$ ailesini G_t^* ile gösterelim. Her $L \in G_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^*$ için $\tau_t(L) \geq \langle \alpha, \beta \rangle > 0^-$ olduğundan $L \in G_t^*$ yani $G_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^* \subseteq G_t^*$ elde edilir. Böylece

$\bigcup_{L \in G_{\langle \alpha, \beta \rangle, t}^*} L \subseteq \bigcup_{L \in G_t^*} L$ yani $\text{int}_{(\alpha, \beta)}^t(A) \subseteq \text{int}^t(A)$ elde edilir.

(iii) (i)'den her $\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1$ için $cl^t(A) \subseteq cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)$ olduğundan $cl^t(A) \subseteq \bigcap_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)$

(*) ifadesi elde edilir. $\tau_t^*(A) > 0^-$ olduğundan Tanım 5.2.6'dan $cl^t(A) = A$ eşitliği elde edilir. Diğer taraftan $\tau_t^*(A) > 0^-$ olduğundan en az bir $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in I_0 \times I_1$ için $\tau_t^*(A) \geq \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$ ve Tanım 5.2.6'dan $cl_{\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle}^t(A) = A$ ifadeleri sağlanır. Buradan

$$cl_{\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle}^t(A) \supseteq \bigcap_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \text{ olduğundan } cl^t(A) \supseteq \bigcap_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \quad (**)$$

elde edilir. (*) ve (**) ifadesinden $cl^t(A) = \bigcap_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} cl_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A)$ eşitliği elde edilir.

(iv) (ii) den $\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1$ için $int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \subseteq int^t(A)$ olduğundan

$$\bigcup_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \subseteq int^t(A) \quad (***)$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan $\tau_t(A) > 0^-$ olduğundan $int^t(A) = A$ 'dır. Ayrıca $\tau_t(A) > 0^-$ olduğundan en az bir $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in I_0 \times I_1$

için $\tau_t(A) \geq \langle \alpha_0, \beta_0 \rangle$ ve Tanım 5.2.6'dan $int_{\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle}^t(A) = A$ ifadeleri sağlanır. Buradan

$$int_{\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle}^t(A) = int^t(A) \text{ eşitliği elde edilir. } int_{\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle}^t(A) \subseteq \bigcup_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \text{ olduğundan}$$

$$int^t(A) \subseteq \bigcup_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \quad (****)$$

$$int^t(A) = \bigcup_{\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1} int_{\langle \alpha, \beta \rangle}^t(A) \text{ eşitliğinin sağlandığı görülür.}$$

Topoloji ve analizin temel tanımlarından olan bir fonksiyonun sürekliliği Šostak manasında temporal intuitionistic fuzzy topoloji uzayında aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 5.2.11. (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) sırasıyla X, Y boştan farklı kümeleri T' ve T'' zaman kümesi üzerinde tanımlı ST-TIFSler ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere

(i) $B \in TIFS^{(Y, T')}$ temporal intuitionistic fuzzy kümesinin f altında t anındaki ters görüntüsü $f^{-1}(B) = \{(x, \bar{\mu}_B(f(x), t), \bar{\eta}_B(f(x), t)) : x \in X\}$ ile tanımlıdır. Burada

$$\bar{\mu}_B(f(x), t) = \begin{cases} \mu_B(f(x), t) & , \quad t \in T'' \\ 0 & , \quad t \in T' - T'' \end{cases}$$

ve

$$\bar{\eta}_B(f(x), t) = \begin{cases} \eta_B(f(x), t) & , \quad t \in T'' \\ 1 & , \quad t \in T' - T'' \end{cases}$$

ile tanımlıdır.

(ii) $A \in TIFS^{(X, T')}$ temporal intuitionistic fuzzy kümesinin f altında t anındaki görüntüsü $f(A) = \{(y, f(\bar{\mu}_A)(y, t), f_-(\bar{\eta}_A)(y, t)) : y \in Y\}$ Burada $f(\bar{\mu}_A)$ ve $f_-(\bar{\eta}_A)$ sırasıyla:

$$f(\bar{\mu}_A)(y, t) = \begin{cases} f(\mu_A)(y, t), & t \in T' \\ 0 & , \quad t \in T'' - T' \end{cases}$$

ve

$$f_-(\bar{\eta}_A)(y, t) = \begin{cases} 1 - f(1 - \eta_A)(y, t), & t \in T' \\ 1 & , \quad t \in T'' - T' \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Eğer $T' = T''$ ise $f^{-1}(B) = \{(x, \mu_B(f(x), t), \eta_B(f(x), t)) : x \in X\}$ ve $f(A) = \{(y, f(\mu_A)(y, t), f_-(\eta_A)(y, t)) : y \in Y\}$ olduğu görülür

(X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) sırasıyla X , Y boştan farklı kümeleri, T zaman kümesi üzerinde tanımlı ST-TIFSler ve $t \in T$ ve her $B \in TIFS^{(Y, T)}$ için $\tau_t(f^{-1}(B)) \geq \phi_t(B)$ ise f , temporal intuitionistic fuzzy süreklidir denir.

Eğer her $t \in T$ anında f temporal intuitionistic fuzzy sürekli ise f genel (overall) intuitionistic fuzzy sürekli olarak isimlendirilir.

Diğer taraftan $t \in T$ ve her $A \in TIFS^{(X, T')}$ için $\phi_t(f(A)) \geq \tau_t(A)$ ise f t anında temporal intuitionistic fuzzy açık fonksiyon olarak isimlendirilir. Eğer f her $t \in T$ için temporal intuitionistic fuzzy açık fonksiyon ise, f , genel (overall) intuitionistic fuzzy açık fonksiyon olarak isimlendirilir.

Tek elemanlı zaman kümeleri için temporal intuitionistic fuzzy kümeler intuitionistic fuzzy kümelere denk olduğundan, $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun görüntü, ters görüntü, temporal intuitionistic fuzzy süreklilik ve temporal intuitionistic fuzzy açık fonksiyonların özellikleri tekil zaman anları (veya tek elemanlı zaman kümeleri) için intuitionistic fuzzy küme teorisine denk olarak korunur. Bunlara ek olarak, genel

intuitionistic fuzzy sürekli ve genel intuitionistic fuzzy açık fonksiyonlar ile ilgili bazı önerme ve teoremleri vereceğiz.

Örnek 5.2.12: $X = \{a, b, c, d\}$ ve $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ zaman kümesi olmak üzere $A \in TIFS^{(X,T)}$ aşağıdaki şekilde tanımlansın:

A	t_1	t_2	t_3
a	$\langle 0.1, 0.2 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$
b	$\langle 0.5, 0.1 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$
c	$\langle 0.3, 0.3 \rangle$	$\langle 0.5, 0.3 \rangle$	$\langle 0.1, 0.1 \rangle$
d	$\langle 0.4, 0.5 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2 \rangle$	$\langle 0, 0 \rangle$

(X, τ_t) ve (X, ϕ_t) ST-TIFSleri $\tau_t : TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ ve $\phi_t : TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ aşağıdaki şekilde tanımlanmak üzere:

τ_t	t_1	t_2	t_3
$0_-^t, 1_-^t$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$
A	$\langle 0.4, 0.3 \rangle$	$\langle 0.8, 0.1 \rangle$	$\langle 0.3, 0.2 \rangle$
Diğer durumlar	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$

ve

ϕ_t	t_1	t_2	t_3
$0_-^t, 1_-^t$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$	$\langle 1, 0 \rangle$
A	$\langle 0.7, 0.1 \rangle$	$\langle 0.2, 0.5 \rangle$	$\langle 0.6, 0.4 \rangle$
Diğer durumlar	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$	$\langle 0, 1 \rangle$

$I_m : X \rightarrow X$ birim dönüşüm olmak üzere, I_m, t_2 anında temporal intuitionistic fuzzy sürekli olmasına rağmen t_1 ve t_3 anlarında temporal intuitionistic fuzzy sürekli değildir. Diğer taraftan, I_m temporal t_1 anında temporal intuitionistic fuzzy açık olmasına rağmen t_2 ve t_3 anlarında temporal intuitionistic fuzzy açık fonksiyon değildir.

Teorem 5.2.13: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) sırasıyla X, Y boştan farklı kümeler, T zaman kümesi üzerinde tanımlı ST-TIFSler ve $f : X \rightarrow Y$ genel intuitionistic fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $(X, \wedge \tau_t)$ ve $(Y, \wedge \phi_t)$ ST-IFSlerine uygun olarak intuitionistic fuzzy süreklidir.

İspat: $f : X \rightarrow Y$ her $t \in T$ için intuitionistic fuzzy sürekli dönüşüm olduğundan her $t \in T$ ve $B \in TIFS^{(Y, T)}$ için $\tau_t(f^{-1}(B)) \geq \phi_t(B)$ olur. Bu ifadeden $\mu_{\tau_t}(f^{-1}(B)) \geq \mu_{\phi_t}(B)$ ve $\eta_{\tau_t}(f^{-1}(B)) \leq \eta_{\phi_t}(B)$ ifadeleri elde edilir. Buradan $\bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(f^{-1}(B)) \geq \bigwedge_{t \in T} \mu_{\phi_t}(B)$ ve $\bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(f^{-1}(B)) \leq \bigvee_{t \in T} \eta_{\phi_t}(B)$ ifadeleri elde edilir. Son iki eşitsizlikten $\left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(f^{-1}(B)), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(f^{-1}(B)) \right\rangle \geq \left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\phi_t}(B), \bigvee_{t \in T} \eta_{\phi_t}(B) \right\rangle$ ifadesi elde edilir. Bu son ifadeden $\wedge \tau_t(f^{-1}(B)) \geq \wedge \phi_t(B)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $f : X \rightarrow Y, (X, \wedge \tau_t)$ ve $(Y, \wedge \phi_t)$ ST-IFSlerine uygun olarak intuitionistic fuzzy sürekli dönüşüm olduğu anlaşılır.

Teorem 5.2.14: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) sırasıyla X, Y boştan farklı kümeler, T zaman kümesi üzerinde tanımlı ST-TIFSler ve $f : X \rightarrow Y$ genel intuitionistic fuzzy açık fonksiyon olmak üzere. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu $(X, \wedge \tau_t)$ ve $(Y, \wedge \phi_t)$ ST-IFSlerine uygun olarak intuitionistic fuzzy açık fonksiyondur.

İspat: $f : X \rightarrow Y$, genel intuitionistic fuzzy açık fonksiyon olmak üzere her bir $t \in T$ ve $A \in TIFS^{(X, T)}$ için $\phi_t(f(A)) \geq \tau_t(A)$ ifadesi sağlanır. Bu ifadeden $\mu_{\phi_t}(f(A)) \geq \mu_{\tau_t}(A)$ ve $\eta_{\phi_t}(f(A)) \leq \eta_{\tau_t}(A)$ ifadeleri elde edilir. Buradan

$\bigwedge_{t \in T} \mu_{\phi_t}(f(A)) \geq \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A)$ ve $\bigvee_{t \in T} \eta_{\phi_t}(f(A)) \leq \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A)$ ifadeleri elde edilir. Son iki eşitsizlikten $\left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\phi_t}(f(A)), \bigvee_{t \in T} \eta_{\phi_t}(f(A)) \right\rangle \geq \left\langle \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A), \bigvee_{t \in T} \eta_{\tau_t}(A) \right\rangle$ ifadesi elde edilir. Bu son ifadeden $\bigwedge_{t \in T} \mu_{\phi_t}(f(A)) \geq \bigwedge_{t \in T} \mu_{\tau_t}(A)$ eşitsizliği elde edilir. Böylece $f: X \rightarrow Y$, $(X, \wedge_{\tau_t})$ ve $(Y, \wedge_{\phi_t})$ ST-IFSlerine uygun olarak intuitionistic fuzzy açık dönüşüm olduğu anlaşılır.

Önerme 5.2.15: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve T zaman kümesi üzerinde birer ST-TIFS ve $f: X \rightarrow Y$ genel intuitionistic fuzzy sürekli dönüşüm olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

- a. Her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $f(cl(A)) \subseteq cl(f(A))$
- b. Her $B \in TIFS^{(Y,T)}$ için $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl(B))$
- c. Her $B \in TIFS^{(Y,T)}$ için $f^{-1}(int(B)) \subseteq int(f^{-1}(B))$.

İspat: a. $f^{-1}(cl(f(A))) = f^{-1}\left(\bigcap \{K \in TIFS^{(Y,T)} : \wedge_{\phi_t}^*(K) > 0^-, f(A) \subseteq K\}\right) = \bigcap \{f^{-1}(K) \in TIFS^{(X,T)} : \wedge_{\phi_t}^*(K) > 0^-, A \subseteq f^{-1}(K)\} \supseteq \bigcap \{f^{-1}(K) \in TIFS^{(X,T)} : \wedge_{\tau_t}^*(f^{-1}(K)) > 0^-, A \subseteq f^{-1}(K)\} \supseteq \bigcap \{G \in TIFS^{(X,T)} : \wedge_{\tau_t}^*(G) > 0^-, A \subseteq G\} = cl(A)$
Buradan $cl(f(A)) \supseteq f(cl(A))$

b. Her $B \in TIFS(Y, T)$ için $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(f(cl(f^{-1}(B))))$ olduğundan a. şıkkındaki ifadeden dolayı $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(f(cl(f^{-1}(B)))) \subseteq f^{-1}(cl(f(f^{-1}(B))))$ ifadesi elde edilir. Buradan $cl(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl(B))$ olur.

c. Her $B \in TIFS(Y, T)$ için $f^{-1}(int(B)) = f^{-1}\left(\bigcup \{L : L \in TIFS^{(Y,T)} : \wedge_{\phi_t}(L) > 0^-, L \subseteq B\}\right) = f^{-1}\left(\bigcup \{L : L \in TIFS^{(Y,T)} : \wedge_{\phi_t}(L) > 0^-, L \subseteq B\}\right)$

$$\begin{aligned} &\subseteq \left(\bigcup \left\{ f^{-1}(L) : L \in TIFS^{(Y,T)} : \wedge \tau_t(f^{-1}(L)) > 0^-, f^{-1}(L) \subseteq f^{-1}(B) \right\} \right) \\ &\subseteq \left(\bigcup \left\{ G : G \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t(G) > 0^-, G \subseteq f^{-1}(B) \right\} \right) = \text{int}(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

Önerme 5.2.16: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve T zaman kümesi üzerinde birer ST-TIFS ve $f : X \rightarrow Y$ genel intuitionistic fuzzy açık dönüşüm olmak üzere $A \in TIFS^{(X,T')}$ için $f(\text{int}(A)) \subseteq \text{int}(f(A))$

$$\begin{aligned} \text{İspat. } f(\text{int}(A)) &= f\left(\bigcup \left\{ L : L \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t(L) > 0^-, L \subseteq A \right\}\right) \\ &= \left(\bigcup \left\{ f(L) : L \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \tau_t(L) > 0^-, f(L) \subseteq f(A) \right\}\right) \\ &\subseteq \left(\bigcup \left\{ f(L) : L \in TIFS^{(X,T)} : \wedge \phi_t(f(L)) > 0^-, f(L) \subseteq f(A) \right\}\right) \\ &\subseteq \left(\bigcup \left\{ G \in TIFS^{(Y,T)} : \wedge \phi_t(G) > 0^-, G \subseteq f(A) \right\}\right) = \text{int}(f(A)). \end{aligned}$$

Sonuç 5.2.17: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve T zaman kümesi üzerinde birer ST-TIFS ve $f : X \rightarrow Y$ temporal intuitionistic fuzzy sürekli dönüşüm olmak üzere aşağıdaki önermeler her $\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1$ için sağlanır:

- a. Her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $f(cl_{(\alpha,\beta)}^t(A)) \subseteq cl_{(\alpha,\beta)}^t(f(A))$
- b. Her $B \in TIFS^{(Y,T)}$ için $cl_{(\alpha,\beta)}^t(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl_{(\alpha,\beta)}^t(B))$
- c. Her $B \in TIFS^{(Y,T)}$ için $f^{-1}(\text{int}_{(\alpha,\beta)}^t(B)) \subseteq \text{int}_{(\alpha,\beta)}^t(f^{-1}(B))$

Sonuç 5.2.18: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve T zaman kümesi üzerinde birer ST-TIFS ve $f : X \rightarrow Y$ genel intuitionistic fuzzy açık dönüşüm olmak üzere $A \in TIFS^{(X,T')}$ ve $\langle \alpha, \beta \rangle \in I_0 \times I_1$ için $f(\text{int}_{(\alpha,\beta)}^t(A)) \subseteq \text{int}_{(\alpha,\beta)}^t(f(A))$

Sonuç 5.2.19: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve T zaman kümesi üzerinde birer ST-TIFS ve $f : X \rightarrow Y$ temporal intuitionistic fuzzy sürekli dönüşüm olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

- a. Her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $f(cl^t(A)) \subseteq cl^t(f(A))$
- b. Her $B \in TIFS^{(Y,T)}$ için $cl^t(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(cl^t(B))$
- c. Her $B \in TIFS^{(Y,T)}$ için $f^{-1}(int^t(B)) \subseteq int^t(f^{-1}(B))$

Sonuç 5.2.20: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve T zaman kümesi üzerinde birer ST-TIFS ve $f: X \rightarrow Y$ genel intuitionistic fuzzy açık dönüşüm olmak üzere $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $f(int^t(A)) \subseteq int^t(f(A))$

5.3. Šostak Manasında Temporal Intuitionistic Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık

Bu kısımda Šostak manasında tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzaylarda bazı kompaktlık tanımları verilecek ve bazı temel özellikleri incelenecektir.

Tanım 5.3.1. (X, τ_t) boştan farklı X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlanan ST-TIFS, $t_0 \in T$ için $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0}) \in I_0 \times I_1$ ve $\alpha^{t_0} + \beta^{t_0} \leq 1$ olmak üzere, $G_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})} = \{G \in TIFS^{(X,T)} : \tau_{t_0}(G) > (\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})\}$ 'de $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_{\sim}^{t_0}$ şartını sağlayan her $\{G_i : i \in J\}$ ailesi için $\bigcup_{i \in J^*} G_i = 1_{\sim}^{t_0}$ şartını sağlayacak J 'nin sonlu bir J^* alt kümesi mevcut ise (X, τ_t) uzayına t_0 anında $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ –temporal IF-kompakt ST-TIFS denir.

Bu tanımın tek elemanlı zaman kümeleri için Ramadan ve ark, (2004) tarafından tanımlanan Šostak manasında intuitionistic fuzzy kompakt uzaylara denk olduğu aşikârdır. Fakat Tanım 5.3.1 de tanımladığımız kompaktlık tanımının gerek ele alınan kümenin zamana bağlı olarak değişmesi, gerekse tanımlanan topolojinin açıklık ve açık olmama derecelerinin zamana bağlı olması nedeniyle gerek mezkûr tanımın gerekse bundan sonraki kompaktlık tanımlarının zamana bağlı olması bu kompaktlık tanımlarından daha genel olduğunu gösterir. Aşağıda Ramadan ve ark. (2004),

tarafından intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan diğer kompaktlık tanımlarını Šostak manasındaki temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzaylara genişletilmiştir.

Tanım 5.3.2: Her $t \in T$ için aşağıdaki şartlar sağlayan

(a) Her $t \in T$ için $\alpha^t + \beta^t \leq 1$

(b) Her $t \in T$ için $(X, \tau_t), (\alpha^t, \beta^t)$ – temporal IF-kompakt ST-TIFS

$\langle \alpha^t, \beta^t \rangle \in (0,1] \times [0,1)$ çifti var ise $(X, \tau_t), (\alpha^t, \beta^t)$ –genel IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

Tanım 5.3.3: $\alpha^*: T \rightarrow (0,1]$ ve $\beta^*: T \rightarrow [0,1)$:

(a) Her $t \in T$ için, $\alpha^*(t) + \beta^*(t) \leq 1$

(b) Her $t \in T$ için $(X, \tau_t), (\alpha^*(t), \beta^*(t))$ – temporal IF-kompakt ST-TIFS.

şartlarını sağlayan sürekli dönüşümler ise $(X, \tau_t), (\alpha^*, \beta^*)$ –sürekli IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

Ramadan ve ark. (2004), tarafından Šostak manasında intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan diğer kompaktlık tanımları aşağıdaki şekilde Šostak manasındaki temporal intuitionistic fuzzy kümeler uzayına aktarılır.

Tanım 5.3.4: (X, τ_t) boştan farklı X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlı ST-TIFS olmak üzere,

(i) Her $t_0 \in T$ için $\alpha^{t_0} + \beta^{t_0} \leq 1$ şartını sağlayan $\langle \alpha^{t_0}, \beta^{t_0} \rangle \in (0,1] \times [0,1)$ çifti için

$G_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})} = \{G \in TIFS(X, T) : \tau_{t_0}(G) > (\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})\}$ ‘de $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_{t_0}^-$ şartını sağlayan her

$\{G_i : i \in J\}$ ailesi için $\bigcup_{i \in J^*} \text{int}_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})} \left(cl_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})}(G_i) \right) = 1_{t_0}^-$ şartını sağlayan J ‘nin sonlu bir

J^* altkümesi mevcut ise (X, τ_t) uzayı t_0 anında $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ – temporal yakın (nearly) IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

(ii) Her $t \in T$ için

(a) $\alpha^t + \beta^t \leq 1,$

(b) (X, τ_t) , (α^t, β^t) – temporal yakın IF-kompakt ST-TIFS, şartlarını sağlayacak $\langle \alpha^t, \beta^t \rangle \in (0,1] \times [0,1)$ var ise (X, τ_t) , (α^t, β^t) – genel yakın (overall nearly) IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

(iii) $\alpha^* : T \rightarrow (0,1]$ ve $\beta^* : T \rightarrow [0,1)$ aşağıdaki şartları sağlayan sürekli dönüşümler olmak üzere

(a) Her $t \in T$ için $\alpha^*(t) + \beta^*(t) \leq 1$,

(b) Her $t \in T$ için (X, τ_t) is $(\alpha^*(t), \beta^*(t))$ – temporal yakın IF-kompakt ST-TIFS

(X, τ_t) uzayı, (α^*, β^*) – sürekli yakın (continuous nearly) IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

Tanım 5.3.5: (X, τ_t) boştan farklı X kümesi ve T zaman kümesi üzerinde tanımlı ST-TIFS olmak üzere;

(I) Her $t_0 \in T$ için $\alpha^{t_0} + \beta^{t_0} \leq 1$ şartını sağlayan $\langle \alpha^{t_0}, \beta^{t_0} \rangle \in (0,1] \times [0,1)$ çifti için $G_{(\alpha^t, \beta^t)} = \{G \in TIFS(X, T) : \tau_{t_0}(G) > (\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})\}$ ‘de $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_{t_0}^-$ şartını sağlayan her

$\{G_i : i \in J\}$ ailesi için $\bigcup_{i \in J^*} \left(cl_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})}(G_i) \right) = 1_{t_0}^-$ şartını sağlayan J ‘nin sonlu bir J^*

altkümesi mevcut ise (X, τ_t) uzayı t_0 anında $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ – temporal hemen hemen IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

(II) Her $t \in T$ için

(a) $\alpha^t + \beta^t \leq 1$,

(b) (X, τ_t) , (α^t, β^t) – temporal hemen hemen IF-kompakt ST-TIFS,

şartlarını sağlayacak $\langle \alpha^t, \beta^t \rangle \in (0,1] \times [0,1)$ var ise (X, τ_t) , (α^*, β^*) – genel hemen hemen (overall almost) IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

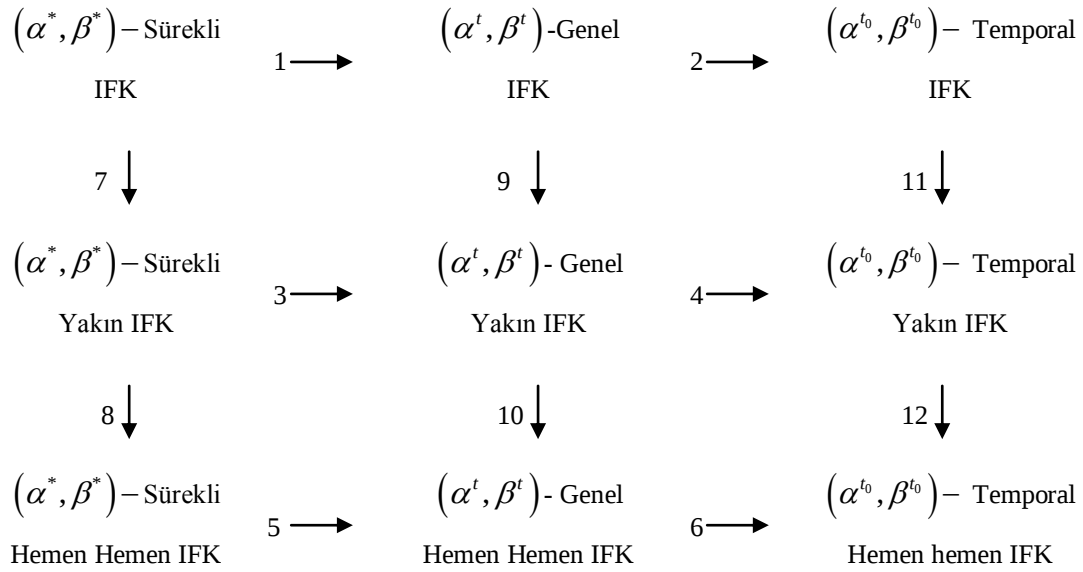
(III) $\alpha^* : T \rightarrow (0,1]$ ve $\beta^* : T \rightarrow [0,1)$ aşağıdaki şartları sağlayan sürekli dönüşümler olmak üzere

(a) Her $t \in T$ için $\alpha^*(t) + \beta^*(t) \leq 1$,

(b) Her $t \in T$ için (X, τ_t) is $(\alpha^*(t), \beta^*(t))$ –temporal hemen hemen IF-kompakt ST-TIFS

(X, τ_t) uzayı, (α^*, β^*) –sürekli hemen hemen (continuous almost) IF-kompakt ST-TIFS olarak isimlendirilir.

Önerme 5.3.6: (X, τ_t) bir ST-TIFS olmak üzere bu uzay üzerindeki kompaktlık tanımları ile ilgili ilişki aşağıdaki şekildedir: (IFK: Intuitionistic Fuzzy Kompaktlık)



İspat: 1 ve 2 (benzer şekilde 3, 4, 5, 6) ilişkilerinin gerçekleştiği tanım gereği açıktır. Şimdi 7. ilişkinin gerçekleştiğini gösterelim. (X, τ_t) , $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ – sürekli IF kompakt ST-TIFS olmak üzere $\alpha^*: T \rightarrow I_0$ ve $\beta^*: T \rightarrow I_1$ dönüşümler ve $t \in T$ olmak üzere $\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle$ -IF çifti için $G_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} = \{G \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t(G) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle\}$ ‘de $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_-^t$ ifadesini sağlayacak her $\{G_i : i \in J\}$ ailesi için J ’nin $\bigcup_{i \in J^*} G_i = 1_-^t$ şartını sağlayacak sonlu bir J^* alt kümesi mevcuttur. $\tau_t(G_i) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle$ olduğundan $G_i = \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}(G_i)$ ifadesi elde edilir. Diğer taraftan $G_i = \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}(G_i) \subseteq \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} \left(cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}(G_i) \right)$ olduğundan $1_-^t = \bigcup_{i \in J^*} G_i \subseteq \bigcup_{i \in J^*} \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} \left(cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}(G_i) \right)$ ifadesi elde edilir. Son ifadeden $1_-^t = \bigcup_{i \in J^*} \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} \left(cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}(G_i) \right)$ ifadesi elde edilir.

Böylece J^* kümesinin J 'nin istenen şartlara haiz olan sonlu alt kümesi olduğu anlaşılır. Buradan (X, τ_t) , $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ – sürekli yakın IF kompakt ST-TIFS olduğu görülür. Şimdi 9. İlişkinin gerçekleştiğini gösterelim. (X, τ_t) , $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ – sürekli yakın IF kompakt ST-TIFS olmak üzere $\alpha^*: T \rightarrow I_0$ ve $\beta^*: T \rightarrow I_1$ sürekli dönüşümler ve $t \in T$ olmak üzere $\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle$ -IF çifti için $G_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} = \{G \in TIFS^{(X,T)} : \tau_t(G) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle\}$ 'de $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_-^t$ ifadesini sağlayacak her $\{G_i : i \in J\}$ ailesi için J 'nin $\bigcup_{G \in G_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}} \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} \left(cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} (G) \right) = 1_-^t$ şartını sağlayacak sonlu bir J^* alt kümesi mevcuttur. $G_i = \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} (G_i) \subseteq \text{int}_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} \left(cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} (G_i) \right) \subseteq cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} (G_i)$ olduğundan $\bigcup_{i \in J^*} cl_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} (G_i) = 1_-^t$ ifadesi sağlanır. Buradan (X, τ_t) , $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ – sürekli hemen hemen IF kompakt ST-TIFS olduğu anlaşılır. 9, 10, 11 ve 12. ilişkilerinin sağlandığı da 7. ve 8. ilişkilerin sağlandığı şekilde gösterilir.

Tanım 5.3.7: Yukarıda tanımlanan kompaktlık tanımlarındaki $\text{int}_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})}$, $cl_{(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})}$

TIFSlerini sırasıyla int^t , cl^t TIFSleri ile değiştirerek bazı yeni kompaktlık tanımları elde edilir. Bu yeni kompaktlık tanımlarını sırası ile

- (1) Temporal IF-kompaktlık,
- (2) Genel IF-kompaktlık
- (3) Sürekli IF-kompaktlık
- (4) Temporal yakın IF-kompaktlık,
- (5) Genel yakın IF-kompaktlık
- (6) Sürekli yakın IF-kompaktlık
- (7) Temporal hemen hemen IF-kompaktlık,
- (8) Genel hemen hemen IF-kompaktlık
- (9) Sürekli hemen hemen IF-kompaktlık

tanımlamaları elde edilir. Bu tanımların mezkûr özellikleri sağladığı ve mezkûr kompaktlık tanımlarından daha genel olduğu aşikârdır.

Şimdi bir TIFS'nin Šostak manasında tanımlanan temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzayındaki kompaktlığına dair tanımlamalar verilecektir.

Tanım 5.3.8: X boştan farklı bir küme T bir zaman kümesi ve (X, τ_t) Šostak manasında tanımlı temporal intuitionistic fuzzy topolojik uzay, $t \in T$ için $\langle \alpha^t, \beta^t \rangle \in I_0 \times I_1$, $\alpha^t + \beta^t \leq 1$ şartını sağlayan intuitionistic fuzzy çift ve $A \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere şartını sağlayan $G_{(\alpha^t, \beta^t)}(A) = \{G \in TIFS^{(X,T)}; \tau_t(G) > (\alpha^t, \beta^t)\}$ ‘de $A \subseteq \bigcup_{i \in J} G_i$ şartını sağlayan $\{G_i : i \in J\}$ ailesine A ’nın t anındaki (α^t, β^t) – temporal örtüsü denir. Bu $\{G_i : i \in J\}$ ailesi için $A \subseteq \bigcup_{i \in J^*} G_i$ şartını koruyan J ‘nin J^* sonlu alt kümesi var ise $\{G_i : i \in J^*\}$ ailesine $\{G_i : i \in J\}$ ailesinin t anındaki sonlu (α^t, β^t) – alt örtüsü denir.

Tanım 5.3.9: (X, τ_t) bir ST-TIFS ve $A \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere:

(I) $t_0 \in T$ için $\langle \alpha^{t_0}, \beta^{t_0} \rangle \in I_0 \times I_1$, $\alpha^{t_0} + \beta^{t_0} \leq 1$ şartını sağlayan intuitionistic fuzzy çift olmak üzere t_0 anında A ’nın her $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ – temporal örtüsü sonlu $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ – temporal alt örtüye sahip ise A ’ya t_0 anında $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ – temporal kompakt TIFS denir.

(II) Her $t \in T$ için

- a. $\alpha^t + \beta^t \leq 1$,
- b. $A, (\alpha^t, \beta^t)$ – temporal kompakt,

şartlarını sağlayan $\langle \alpha^t, \beta^t \rangle \in I_0 \times I_1$ intuitionistic fuzzy çiftleri bulunabiliyorsa A ’ya (α^t, β^t) –genel IF-kompakt TIFS denir.

(III) Her $t \in T$ için

- a. Her $t \in T$ için $\alpha^*(t) + \beta^*(t) \leq 1$
- b. Her $t \in T$ için $A, (\alpha^*(t), \beta^*(t))$ – temporal IF-kompakt

şartlarını sağlayan $\alpha^* : T \rightarrow (0,1]$ ve $\beta^* : T \rightarrow [0,1)$ sürekli dönüşümleri mevcut ise A ’ya (α^*, β^*) –sürekli IF-kompakt TIFS denir.

Bu tanımlamalar ile birlikte aşağıdaki önermenin sağladığı açıktır.

Önerme 5.3.10: (X, τ_t) bir ST-TIFS ve $A \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere Tanım 5.3.9 da verilen üç kompaktlık arasındaki ilişki için: (α^*, β^*) – sürekli IF-kompakt TIFS $\Rightarrow$ (α^t, β^t) – genel IF-kompakt TIFS $\Rightarrow$ $(\alpha^{t_0}, \beta^{t_0})$ – temporal IF-kompakt TIFS şeklindedir.

Teorem 5.3.11: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve zaman kümesi T , üzerinde tanımlı ST-TIFSler ve $f: X \rightarrow Y$ örten ve temporal intuitionistic fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere, (X, τ_t) (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt ((α^t, β^t) – genel IF kompakt, (α^t, β^t) – temporal IF kompakt) ise (Y, ϕ_t) ST-TIFS uzayı da (α^*, β^*) – sürekli IF kompakttır. ((α^t, β^t) – genel IF kompakttır, (α^t, β^t) – temporal IF kompakttır).

İspat: (X, τ_t) , (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt ST-TIFS olduğundan $\alpha^*: T \rightarrow I_0$ ve $\beta^*: T \rightarrow I_1$ sürekli dönüşümleri mevcuttur. Her $t \in T$ olmak üzere $\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle$ -IF çifti için $G_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} = \{G \in TIFS^{(Y,T)} : \phi_t(G) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle\}$ 'de $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_-^t$ ifadesini sağlayacak her $\{G_i : i \in J\}$ ailesinin $\bigcup_{i \in J^*} G_i = 1_-^t$ şartını sağlayacak sonlu bir J^* alt kümesini bulmamız gerekmektedir. f örten ve IF sürekli fonksiyon olduğundan

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} G_i\right) = \bigcup_{i \in J} f^{-1}(G_i) \text{ ve } \tau_t(f^{-1}(G_i)) \geq \phi_t(G_i) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle \text{ ifadeleri elde edilir.}$$

Diğer taraftan, (X, τ_t) , (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt ST-TIFS olduğundan $\{f^{-1}(G_i) : i \in J\}$ ailesinin $\bigcup_{i \in J^{**}} G_i = 1_-^t$ şartını sağlayacak J^{**} sonlu bir alt ailesi mevcuttur. f örten olduğundan $f\left(\bigcup_{i \in J^{**}} f^{-1}(G_i)\right) = \bigcup_{i \in J^{**}} f(f^{-1}(G_i)) = \bigcup_{i \in J^{**}} G_i = 1_-^t$ olduğu

görülmür. Buradan $\bigcup_{i \in J} G_i = 1_-^t$ şartını sağlayan $\{G_i : i \in J\}$ ailesi için $\bigcup_{i \in J^{**}} G_i = 1_-^t$ şartını

koruyan J 'nin sonlu alt kümesinin J^{**} olduğu anlaşılır. Böylece (Y, ϕ_t) 'nin (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt ST-TIFS olduğu anlaşılır. Diğer durumlar benzer şekilde gösterilir.

Teorem 5.3.12: (X, τ_t) ve (Y, ϕ_t) X, Y boştan farklı kümeleri ve zaman kümesi T , üzerinde tanımlı ST-TIFSler ve $f: X \rightarrow Y$ örten ve temporal intuitionistic fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere, $A \in TIFS^{(X, T)}$ temporal intuitionistic fuzzy kümesi (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt $((\alpha^t, \beta^t)$ – genel IF kompakt, (α^t, β^t) – temporal IF kompakt) TIFS ise $f(A)$ temporal intuitionistic fuzzy kümesinde (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt $((\alpha^t, \beta^t)$ – genel IF kompakt, (α^t, β^t) – temporal IF kompakt) temporal intuitionistic fuzzy kümesidir.

İspat: $A \in TIFS^{(X, T)}$, (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt TIFS olduğundan $\alpha^*: T \rightarrow I_0$ ve $\beta^*: T \rightarrow I_1$ sürekli dönüşümleri mevcuttur. Şimdi $f(A) \in TIFS^{(Y, T)}$ temporal intuitionistic fuzzy kümesinin (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt olduğunu gösterelim. Her $t \in T$ olmak üzere $\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle$ -IF çifti için

$$G_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle} = \{G \in TIFS^{(Y, T)} : \phi_t(G) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle\} \text{ 'de } f(A) \subseteq \bigcup_{G \in G_{\langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle}} G \text{ ifadesini}$$

sağlayacak her $\{G_i : i \in J\}$ ailesi için $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{i \in J} G_i\right) \subseteq$

$\bigcup_{i \in J} f^{-1}(G_i)$ ifadesi sağlanır. Diğer taraftan f , intuitionistic fuzzy sürekli olduğundan

$$\tau_t(f^{-1}(G_i)) \geq \phi_t(G_i) > \langle \alpha^*(t), \beta^*(t) \rangle \text{ eşitsizliği elde edilir. Buradan } \{f^{-1}(G_i) : i \in J\}$$

ailesi için $A \subseteq \bigcup_{i \in J} f^{-1}(G_i)$ olduğundan J 'nin sonlu bir kümesi J^* için $A \subseteq \bigcup_{i \in J^*} f^{-1}(G_i)$

$$\text{ifadesi sağlanır. Bu son ifadeden } f(A) \subseteq f\left(\bigcup_{i \in J^*} f^{-1}(G_i)\right) = \bigcup_{i \in J^*} f(f^{-1}(G_i)) \subseteq \bigcup_{i \in J^*} G_i$$

ifadesi elde edilir. Buradan $\{G_i : i \in J^*\}$ sonlu ailesi için $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in J^*} G_i$ elde edilir.

Buradan $f(A)$ 'nın (α^*, β^*) – sürekli IF kompakt olduğu anlaşılır.

6. TEMPORAL INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER UZAYINDA UZAKLIK VE BENZERLİK ÖLÇÜLERİ

Bu bölümde temporal intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde uzaklık, benzerlik, entropi ve kapsama ölçüleri tanımlanacaktır. Önceki bölümlerde bu ölçülerin fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler üzerindeki tanımlamaları ve özellikleri incelenmiştir. Atanassov' un (1991) tanımladığı temporal intuitionistic fuzzy kümelerin üye olma ve üye olmama derecelerinin zamana ve konuma bağlı olarak değişmesi fikrinin hava durumu, ekonomi, görüntü ve video işleme gibi dinamik alanlardaki uygulamalarda kullanılması bakımından zengin bir çalışma alanı doğurduğu aşîkârdır. Diğer taraftan, geçmiş bölümlerde de vurgulandığı üzere benzerlik ve uzaklık ölçüleri bahsi geçen konular üzerinde birçok farklı şekilde kullanılmış ve efektif sonuçlar elde edilmiştir. Bu iki fikrin birleştirilmesi ile elde edilecek temporal intuitionistic ölçülerin literatürde hala tanımlanmamış olması büyük bir eksiklik oluşturmaktadır. Bu iki fikrin birleştirilmesi fikri, dinamik alanlarda kullanılacak olan ölçülerinde dinamik hale getirilmesi yani zamana bağlı olarak değişmesi fikrinin doğal bir sonucudur. Bu bölümde, öncelikle Liu (1992) anlamında benzerlik ve uzaklık ölçüsü tanımlamaları verilecek ve bu ölçülerin nasıl tanımlanması gerektiği ile ilgili temel fikirler araştırılacaktır. Ayrıca mezkûr ölçüler ile yakından alakalı olan entropi ve kapsama ölçüsü kavramları temporal intuitionistic fuzzy küme uzayına taşınacaktır. Bu bağlamda ihtiyaç duyulan diğer bazı temel kavramlarda temporal intuitionistic fuzzy kümeler uzayında tanımlanacaktır.

X boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi olmak üzere temporal intuitionistic fuzzy kümeler uzayını $TIFS^{(X,T)}$ ile gösterelim. Liu (1992) anlamında temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 6.1: Bir $t \in T$ anı için tanımlı $d_t : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü adını alır

$$D1. \text{ Her } A, B \in TIFS^{(X,T)} \text{ için } d_t(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B,$$

D2. Her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için $d_t(A, B) = d_t(B, A)$,

D3. Her A crisp kümesi için $d_t(A, \bar{A}) = \max_{B, C \in TIFS^{(X,T)}} d_t(B, C)$

D4. $A, B, C \in TIFS^{(X,T)}$ için $A \subseteq B \subseteq C$ olmak üzere $d_t(A, C) \geq d_t(A, B)$ ve $d_t(A, C) \geq d_t(B, C)$.

Eğer yukarıda verilen şartlar her bir $t \in T$ için sağlanacak şekilde $d : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dönüşümü tanımlanabiliyorsa bu dönüşüme genel (overall) intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü denir. Zaman kümesinin kesikli ve aralık olması bakımından temporal intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki uzaklık ölçüleri aşağıdaki şekillerde tanımlanır.

Teorem 6.2: X boştan farklı sonlu bir küme ve $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ sonlu bir zaman olmak üzere $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ üzerinde

$$A(T) = \{(x, \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : (x, t) \in X \times T\}$$

ve

$$B(T) = \{(x, \mu_B(x, t), \eta_B(x, t)) : (x, t) \in X \times T\}$$

ile tanımlı olsunlar. Buradan $t \in T$ ve $i = 1, 2, 3, 4$ için $d_t^i(A, B)$ dönüşümleri

$$1. d_{t_0}^1(A, B) = \sqrt{\sum_{x \in X} \left((\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0))^2 + (\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0))^2 \right)},$$

$$2. d_{t_0}^2(A, B) = \sum_{x \in X} (|\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0)| + |\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0)|),$$

$$3. d_{t_0}^3(A, B) = \sum_{x \in E} \left(\max \{ |\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0)|, |\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0)| \} \right),$$

$$4. d_{t_0}^4(A, B) = \sqrt{\sum_{x \in E} \max \left\{ (\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0))^2, (\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0))^2 \right\}}$$

ile tanımlı olmak üzere $d_i(A, B) = \max_{t \in T} (d_t^i(A, B))$ ile tanımlı d_i dönüşümleri temporal

intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde bir genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsüdür.

Diğer taraftan bu ölçülere belirsizlik derecesinin de eklenmesi ile

$$5. D_{t_0}^1(A, B) =$$

$$\sqrt{\sum_{x \in X} \left((\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0))^2 + (\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0))^2 + (\pi_A(x, t_0) - \pi_B(x, t_0))^2 \right)}$$

$$6. D_{t_0}^2(A, B) = \sum_{x \in X} (|\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0)| + |\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0)| + |\pi_A(x, t_0) - \pi_B(x, t_0)|)$$

$$7. D_{t_0}^3(A, B) =$$

$$\sum_{x \in E} \max \{ |\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0)|, |\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0)|, |\pi_A(x, t_0) - \pi_B(x, t_0)| \}$$

$$8. D_{t_0}^4(A, B) =$$

$$\sqrt{\sum_{x \in E} \max \left\{ (\mu_A(x, t_0) - \mu_B(x, t_0))^2, (\eta_A(x, t_0) - \eta_B(x, t_0))^2, (\pi_A(x, t_0) - \pi_B(x, t_0))^2 \right\}}$$

temporal uzaklık ölçüleri elde edilir. Bu ölçülerin tek elemanlı zaman kümeleri için birer intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü oluşturduğu açıktır.

İspat: Guha ve Chakraborty (2010), Grzegorzewski (2003), Szmidt ve Kacprzyk (2000, 2009), Szmidt (2014), Huang ve ark. (2005), Yang ve Chiclana (2012) çalışmalarında da görülebileceği üzere yukarıda tanımlanan $d_t^i(A, B)$ ölçüleri intuitionistic fuzzy uzaklık ölçülerine zaman parametresinin de eklenmesi ile elde edilmiştir. Yani bu ölçüler aynı zamanda her bir $t \in T$ tekil zaman anı için intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleridir. Şimdi $d_t^1(A, B)$ kullanılarak üretilen $d_1(A, B) = \max_{t \in T} (d_t^1(A, B))$ ifadesinin genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü olduğunu gösterelim.

D1: d_1 'in tanımından her $t \in T$ için $d_1(A, B) \geq d_t^1(A, B) \geq 0$ olduğundan $d_1(A, B) \geq 0$ ifadesi elde edilir.

D2: d_t^1 her $t \in T$ ve $A \in TIFS^{(X, T)}$ için $d_t^1(A, A) = 0$ ifadesini sağladığından $d_1(A, A) = 0$ ifadesi elde edilir.

D3: d_t^1 uzaklık ölçüsü her $t \in T$ ve $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ için , $d_t^1(A, B) = d_t^1(B, A)$ ifadesi sağladığından $d_1(A, B) = \max_{t \in T} (d_t^1(A, B)) = \max_{t \in T} (d_t^1(B, A)) = d_1(B, A)$ ifadesi elde edilir.

D4: $A, B, C \in TIFS^{(X, T)}$ için $A \subseteq B \subseteq C$ olmak üzere TIFSlerin altküme olma tanımından her $(x, t) \in X \times T$ için $\mu_A(x, t) \geq \mu_B(x, t) \geq \mu_C(x, t)$ ve

$\eta_A(x, t) \leq \eta_B(x, t) \leq \eta_C(x, t)$ eşitsizlikleri elde edilir. Son iki eşitsizlikten her $t \in T$ için $d_1^t(A, C) \geq d_1^t(A, B)$ ve $d_1^t(A, C) \geq d_1^t(B, C)$ eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $d_1(A, C) \geq d_1(A, B)$ ve $d_1(A, C) \geq d_1(B, C)$ eşitsizlikleri elde edilir. Diğer durumlarda benzer şekilde ispatlanır.

Yukarıdaki tanımda kullanılan her bir d_t^i ölçüsü temporal intuitionistic fuzzy kümenin $t \in T$ anındaki temporal uzaklığı için bir ölçü verir. Diğer taraftan bu ölçülerin maksimumlarından elde edilen d_i ölçüleri temporal intuitionistic fuzzy kümeler arasında bir genel (overall) uzaklık ölçüsü tanımlar. Bu iki tanımlama kullanıldığı uygulamaya göre farklı önem dereceleri kazanır. Yani temporal intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki temporal uzaklık anlık değişimlere duyarlı bir uzaklık olduğundan temporal intuitionistic fuzzy kümelerin temsil ettiği durumlar arasındaki anlık değişimlerin bir ölçüsü iken genel uzaklık ise totalde ifade edilen durumun genel uzaklığı ifade etmektedir. Bu ise uygulamada umulan yararın sağlanması için birden fazla yol sunar.

Örnek 6.3: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ve $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ olmak üzere A ve B TIFSlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
t_1	(0.23, 0.35)	(0.07, 0.63)	(0.26, 0.42)	(0.37, 0.23)	(0.12, 0.84)
t_2	(0.26, 0.32)	(0.1, 0.55)	(0.33, 0.25)	(0.42, 0.22)	(0.15, 0.53)
t_3	(0.35, 0.12)	(0.32, 0.32)	(0.43, 0.23)	(0.52, 0.33)	(0.23, 0.36)
t_4	(0.51, 0.23)	(0.4, 0.25)	(0.56, 0.2)	(0.14, 0.45)	(0.72, 0.13)

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
t_1	(0.32, 0.61)	(0.08, 0.63)	(0.31, 0.5)	(0.13, 0.38)	(0.44, 0.42)
t_2	(0.26, 0.32)	(0.29, 0.35)	(0.89, 0.05)	(0.02, 0.22)	(0.45, 0.23)
t_3	(0.30, 0.42)	(0.63, 0.02)	(0.03, 0.03)	(0.36, 0.04)	(0.25, 0.56)
t_4	(0.17, 0.63)	(0.43, 0.25)	(0.36, 0.64)	(0.22, 0.55)	(0.82, 0.17)

Bu tablolardaki her bir hücrede bulunan sıralı ikililer x_i noktasının t_i anındaki üye olma ve üye olmama derecelerini göstermektedir. Yukarıda tanımlı A ve B TIFSleri arasındaki genel uzaklığın aşağıdaki çizelge ile sunulmuştur.

Çizelge 6.1. Temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri ile elde edilen genel intuitionistic fuzzy uzaklık dereceleri

Temporal Uzaklık				
Ölçüsü/ Genel Uzaklık Ölçüsü	$d_t^1(A, B)$	$d_t^2(A, B)$	$d_t^3(A, B)$	$d_t^4(A, B)$
$d_i(A, B)$	0.87733	2.23	1.5	0.77692
Temporal Uzaklık				
Ölçüsü/ Genel Uzaklık Ölçüsü	$D_t^1(A, B)$	$D_t^1(A, B)$	$D_t^1(A, B)$	$D_t^1(A, B)$
$d_i(A, B)$	1.1411	3.76	1.88	0.89275

Yukarıda tanımlanan ölçülerin TIFSlerin tanımlandığı kümenin ve zaman kümesinin eleman sayısının çarpımına bölünmesi ile normalize edilir. Bu yolla bu verilerin yorumlanması için daha etkili sayılar elde edilirken diğer taraftan bölmenin etkisi ile küçülen değerlerin hassaslığını kaybedeceği aşikârdır.

Sonsuz elemanlı bir X kümesi ve sonsuz elemanlı bir zaman kümesi üzerinde tanımlanacak uzaklık ölçüleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Önerme 6.4: X sonsuz bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_i, \dots\}$ (veya bir aralık) bir zaman kümesi olsun. Burada her $t_k, t_{k+1} \in T$ için $t_k \leq t_{k+1}$ olduğunu kabul edelim. Diğer taraftan $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ kümeleri;

$$A(T) = \left\{ (x, \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)) : (x, t) \in X \times T \right\}$$

ve

$$B(T) = \left\{ (x, \mu_B(x, t), \eta_B(x, t)) : (x, t) \in X \times T \right\}$$

ile tanımlı olsun. Bu tanımlamalar ile birlikte aşağıdaki şekilde tanımlanan ifadeler $TIFS^{(X, T)}$ üzerinde genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsüdür.

$$1. d_1^*(A, B) = \sup_{t \in T} \left\{ \max \left\{ \sup_{x \in X} |\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t)|, \sup_{x \in X} |\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t)| \right\} \right\}$$

$$2. d_2^*(A, B) = \sup_{t \in T} \left\{ \sup_{x \in X} (|\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t)| + |\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t)|) \right\}$$

$$3. d_3^*(A, B) = \sup_{t \in T} \sqrt{\sup_{x \in X} \left((\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t))^2 + (\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t))^2 \right)}$$

$$4. D_1^*(A, B) =$$

$$\sup_{t \in T} \left\{ \max \left\{ \sup_{x \in X} |\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t)|, \sup_{x \in X} |\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t)|, \sup_{x \in X} |\pi_A(x, t) - \pi_B(x, t)| \right\} \right\}$$

$$5. D_2^*(A, B) =$$

$$\sup_{t \in T} \left(\sup_{x \in X} (|\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t)| + |\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t)| + |\pi_A(x, t) - \pi_B(x, t)|) \right)$$

$$6. D_3^*(A, B) =$$

$$\sup_{t \in T' \cup T''} \sqrt{\sup_{x \in X} \left((\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t))^2 + (\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t))^2 + (\pi_A(x, t) - \pi_B(x, t))^2 \right)}$$

Önerme 6.5: X sonsuz elemanlı bir küme ve $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ ve $t_1 < t_2$ olmak üzere $T = [t_1, t_2]$ bir zaman aralığı (veya sonsuz elemanlı bir zaman kümesi) olmak üzere $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ ve $t \in T = [t_1, t_2]$ için:

$$1. D^{***}_1(A, B) = \sup_{t \in T} \left\{ \int_X (\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t)) . dx + \left| \int_X (\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t)) . dx \right| \right\}$$

$$2. D^{***}_2(A, B) =$$

$$\sup_{t \in T} \left\{ \left| \int_X (\mu_A(x, t) - \mu_B(x, t)) . dx \right| + \left| \int_X (\eta_A(x, t) - \eta_B(x, t)) . dx \right| + \left| \int_X (\pi_A(x, t) - \pi_B(x, t)) . dt \right| \right\}$$

ile tanımlı ifadeler $TIFS^{(X, T)}$ üzerinde bir genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü belirtir.

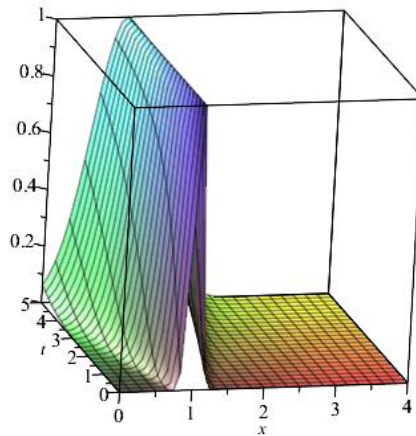
Örnek 6.6: $X = [0, 4]$ ve $T = [0, 5]$ olmak üzere uygulamalarda sıkça kullanılan intuitionistic fuzzy kümelerden ilham alınarak üretilen iki TIFS sırası ile aşağıdaki

şekilde tanımlanmış olsun. Her $(x, t) \in X \times T$ için $\mu_A(x, t) = e^{-10 \frac{(x-1)^2}{t+1}}$ ve

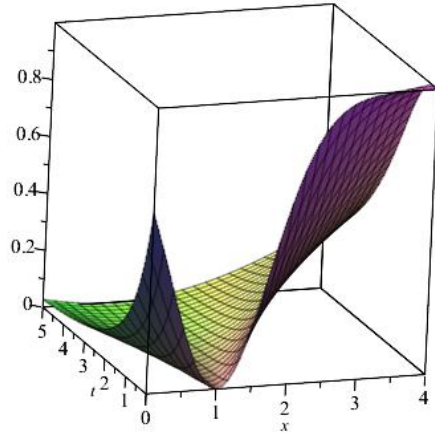
$\eta_A(x, t) = 1 - e^{-\frac{(x-1)^2}{t+1}}$ olmak üzere $A(T) = \{((x, t), \mu_A(x, t), \eta_A(x, t)); (x, t) \in X \times T\}$;

$\mu_B(x, t) = \frac{1}{1 + e^{-t \cdot (x-2)^2}}$ ve $\eta_B(x, t) = \frac{e^{-t \cdot (x-2)^2}}{2 + e^{-t \cdot (x-2)^2}}$ olmak üzere

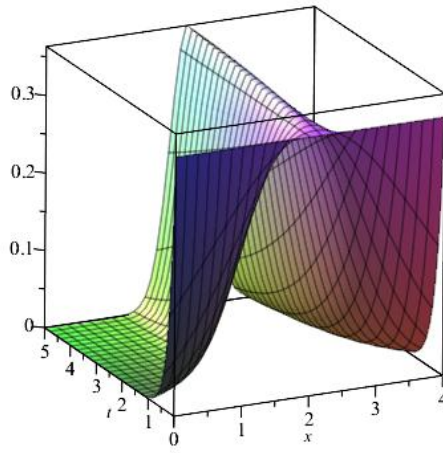
$B(T) = \{((x, t), \mu_B(x, t), \eta_B(x, t)); (x, t) \in E \times T\}$ ile tanımlansın. Aşağıda sırası ile μ_A , η_A , μ_B ve η_B fonksiyonlarının 3d-grafikleri verilecektir:



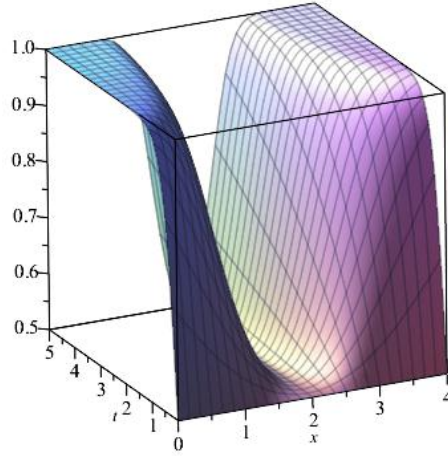
Şekil 6.1. μ_A temporal intuitionistic üyelik fonksiyonunun grafiği.



Şekil 6.2. η_A temporal intuitionistic üye olmama fonksiyonunun grafiği.

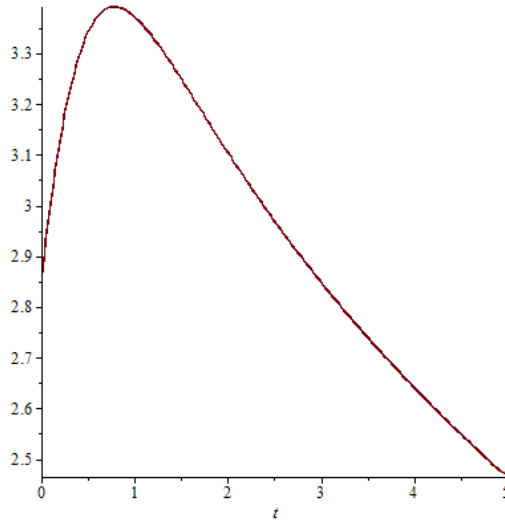


Şekil 6.3. μ_B temporal intuitionistic üye olma fonksiyonunun grafiği.

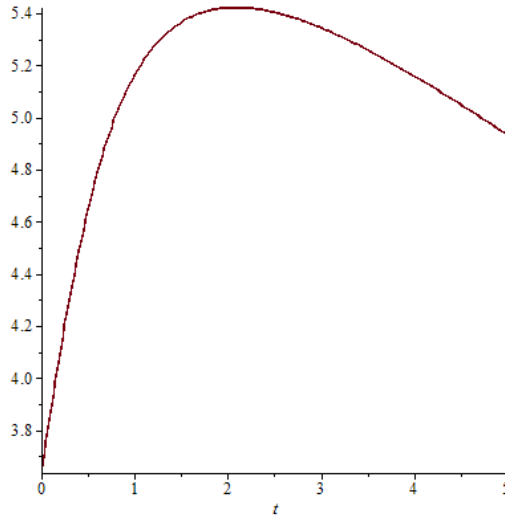


Şekil 6.4. η_B temporal intuitionistic üye olmama fonksiyonunun grafiği.

A ve B TIFSleri arasındaki uzaklığın D_1^{***} ve D_2^{***} ile temporal olarak ölçülmesi sonucu elde edilen grafik Şekil 6.5. ve Şekil 6.6. ile verilmiştir.



Şekil 6.5. D_1^{***} ile ölçülen temporal uzaklığın zamana göre değişimi.



Şekil 6.6. D_2^{***} ile ölçülen temporal uzaklığın zamana göre değişimi.

İlk grafik D_1^{***} ile ölçülen uzaklığın zamana göre değişimini ve ikinci grafikte D_2^{***} ile ölçülen uzaklığın zamana göre değişimini göstermektedir. Bu uzaklıkların kullanılması ile $d_{D_1^{***}}(A, B) = \max_{t \in T} \{D_1^{***}(A, B)\} = 3,391$ ve $d_{D_2^{***}}(A, B) = \max_{t \in T} \{D_2^{***}(A, B)\} = 5,415$ genel uzaklıkları elde edilir. Bu noktada önemli bir husus ise D_2^{***} temporal uzaklık ölçüsünün D_1^{***} uzaklık ölçüsüne nazaran yüksek belirsizlik dereceleri için daha dayanıklı ve güvenilir oluşudur. Szmidt ve Kacprzyk (2009) intuitionistic fuzzy kümeler için belirttiği gibi temporal intuitionistic fuzzy kümeler arasındaki hem temporal hem de genel uzaklık ölçüleri için verilerin yüksek belirsizlik dereceleri içermesi durumunda üç parametrelili uzaklık ölçülerinin iki parametrelili uzaklık ölçülerine nazaran daha doğru sonuçlar vereceği aşikârdır.

Temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri ve genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri arasında mezkûr yolla tanımlanan bağıntıyı genelleştirmek için Du ve Xu (2015) çalışmalarında verdiği çıkarım fonksiyonun kullanıldığı yol aşağıdaki şekilde kullanılır.

Teorem 6.7: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sonlu bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için $d_t : TIFS^{(X, T)} \times TIFS^{(X, T)} \rightarrow [0, 1]$ bir normal temporal

intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri olsun. f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için

$$d(A, B) = f(d_{t_1}(A, B), d_{t_2}(A, B), \dots, d_{t_n}(A, B))$$

ile tanımlı $d: TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsüdür.

İspat: Tanım 6.1. gereği her $t \in T$ için gereği d_t bir intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü olduğundan Teorem 5.3.13 gereği $d(A, B) = f(d_{t_1}(A, B), d_{t_2}(A, B), \dots, d_{t_n}(A, B))$ bir intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsüdür. Burada her bir $t \in T$ için d_t temporal uzaklığı ifade ettiğinden bu ölçüler ile üretilen d uzaklık ölçüsü de genel uzaklığı yansıtmaktadır.

Yukarıda belirtilen yaklaşım ile beraber intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan tüm uzaklık ölçüleri, tanım kümesini $TIFS^{(X,T)}$ uzayı kabul edilerek tek bir andaki temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçülerine dönüştürülür. Bu işlemden sonra çıkarım fonksiyonu veya diğer istatistiksel metotlar vasıtası ile de genel bir yargı belirten genel intuitionistic fuzzy uzaklık ölçümleri elde edilir. Bu yöntemin yararlarından biri de uygulamalardaki değişken yapıları için istenilen anda en uygun uzaklık ölçüsünün seçilebilecek olması ve bir ölçü kısıtlamasından bağımsız olarak daha iyi analizler yapılabilecek olmasıdır. Bu bağlamda kullanılabilecek temel çıkarım fonksiyonları $\max$, $\min$ ve ortalama değer fonksiyonları olarak verilebilir. Ayrıca problemin ihtiyacına göre bu çıkarım fonksiyonları da çeşitlenebilir.

Fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler için önceki bölümlerde detaylıca incelenen benzerlik ölçüsü kavramı Liu (1992) yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 6.8: X boştan farklı bir kümesi T bir zaman kümesi olmak üzere $s_t: TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü sabit bir $t \in T$ anı ve her $A, B, C \in TIFS^{(X,T)}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa temporal intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü adını alır.

$$S1. \text{ Her } A, B \in TIFS^{(X,T)} \text{ için } s_t(A, B) = s_t(B, A),$$

S2. Her A crisp kümesi için $s_t(A, \bar{A}) = 0$,

S3. Her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $s_t(A, A) = \max_{B, C \in TIFS^{(X,T)}} s_t(B, C)$,

S4. $A, B, C \in TIFS^{(X,T)}$ için $A \subseteq B \subseteq C$ ise $s_t(A, C) \leq s_t(A, B)$ ve $s_t(A, C) \leq s_t(B, C)$

Bu tanımlamalar altında $s_t(A, B)$ sayısına A ve B 'nin temporal intuitionistic fuzzy benzerlik derecesi denir. Tıpkı uzaklık ölçülerinde olduğu gibi benzerlik ölçüsü kavramında da temporal ve genel olarak iki kısımda incelenebilir. Bu kısımda genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü yukarıda verilen şartları her bir $t \in T$ için sağlayan $s: TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümüdür. Bu yaklaşıma uygun olarak tanımlanabilecek temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü örnekleri verelim. Bu ölçülerin literatürde tanımlı olan intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerinin tanım kümesinin $TIFS^{(X,T)}$ olarak değiştirilmesi ile elde edildiği açıktır.

1. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, ve $t_0 \in T$ ve $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere,

$$S_2^{t_0}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left(\left| \mu_A(x_i, t_0) - \mu_B(x_i, t_0) \right|^{t_0} + \left| \eta_A(x_i, t_0) - \eta_B(x_i, t_0) \right|^{t_0} \right)^{\frac{1}{t_0}}}{2n}$$

2. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, ve $t_0 \in T$ ve $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere, her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için $\omega_{(i,j)} \in [0,1]$ ve her bir $j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$

$\sum_{i=1}^n \omega_{(i,j_0)} = 1$ olmak üzere,

$$S_3^{t_{j_0}}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_{(i,j_0)} \left(\left| \mu_A(x_i, t_{j_0}) - \mu_B(x_i, t_{j_0}) \right| + \left| \eta_A(x_i, t_{j_0}) - \eta_B(x_i, t_{j_0}) \right| \right)}{2n}$$

3. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, ve $t_0 \in T$ ve $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere, her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için $\omega_{(i,j)} \in [0,1]$ ve her bir $j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$

$\sum_{i=1}^n \omega_{(i,j_0)} = 1$ olmak üzere,

$$S_3^{t_{j_0}}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_{(i, j_0)} \left(\left| \mu_A(x_i, t_{j_0}) - \mu_B(x_i, t_{j_0}) \right| + \left| \eta_A(x_i, t_{j_0}) - \eta_B(x_i, t_{j_0}) \right| \right)}{2n}$$

4. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$, ve $t_0 \in T$ ve $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ olmak üzere, her $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$ için $\omega_{(i, j)} \in [0, 1]$ ve her bir $j_0 \in \{1, 2, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^n \omega_{(i, j_0)} = 1 \text{ olmak üzere,}$$

$$S_4^{t_{j_0}}(A, B) =$$

$$1 - \frac{\sum_{i=1}^n \omega_{(i, j_0)} \left(\left| \mu_A(x_i, t_{j_0}) - \mu_B(x_i, t_{j_0}) \right| + \left| \eta_A(x_i, t_{j_0}) - \eta_B(x_i, t_{j_0}) \right| + \left| \pi_A(x_i, t_{j_0}) - \pi_B(x_i, t_{j_0}) \right| \right)}{2n}$$

$$5. \quad S_5^{t_0}(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\min\{\mu_A(x_i, t_0), \mu_B(x_i, t_0)\} + \min\{\eta_A(x_i, t_0), \eta_B(x_i, t_0)\}}{\max\{\mu_A(x_i, t_0), \mu_B(x_i, t_0)\} + \max\{\eta_A(x_i, t_0), \eta_B(x_i, t_0)\}}$$

$$6. \quad S_5^{t_0}(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n 1 - \frac{1}{2} \left(\left| \mu_A(x_i, t_0) - \mu_B(x_i, t_0) \right| + \left| \eta_A(x_i, t_0) - \eta_B(x_i, t_0) \right| \right)}{n}$$

$$7. \quad S_5^{t_0}(A, B) = \frac{1}{n} \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(x_i, t_0), \mu_B(x_i, t_0)\} + \min\{\eta_A(x_i, t_0), \eta_B(x_i, t_0)\}}{\sum_{i=1}^n \max\{\mu_A(x_i, t_0), \mu_B(x_i, t_0)\} + \max\{\eta_A(x_i, t_0), \eta_B(x_i, t_0)\}}$$

$$8. \quad S_5^{t_0}(A, B) = 1 - \frac{1}{2} \left(\max \left| \mu_A(x_i, t_0) - \mu_B(x_i, t_0) \right| + \max \left| \eta_A(x_i, t_0) - \eta_B(x_i, t_0) \right| \right)$$

$$9. \quad S_5^{t_0}(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n \left(\left| \mu_A(x_i, t_0) - \mu_B(x_i, t_0) \right| + \left| \eta_A(x_i, t_0) - \eta_B(x_i, t_0) \right| \right)}{\sum_{i=1}^n \left(\left| \mu_A(x_i, t_0) + \mu_B(x_i, t_0) \right| + \left| \eta_A(x_i, t_0) + \eta_B(x_i, t_0) \right| \right)}$$

Burada benzerliğin, seçilen temporal intuitionistic fuzzy kümeler ile beraber t anına da bağlı olduğu aşikârdır. Yani A ve B arasındaki benzerlik derecesinin ölçümünde A ve B TIFSlerinin zamanla değişecek olması ve kullanılacak benzerlik ölçüsünün kıyas mekanizmasının zamanla değişebilecek olmasından dolayı böyle bir tanımlama yapmak kaçınılmazdır. Bu yaklaşım, reel dünya uygulamaları için daha

geniş bir uygulama imkânı sunar. Temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerinden genel (overall) benzerlik ölçüsü elde etmek için birçok farklı metot tanımlanabilir. Bunlar arasında en belirgin olanı S_i^t bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü olmak üzere $S(A, B) = \max_{t \in T} \{S_i^t(A, B)\}$ ile verilebilir. Daha genel olarak bu ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 6.9: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sonlu bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için $s_t : TIFS^{(X, T)} \times TIFS^{(X, T)} \rightarrow [0, 1]$ bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri olsun. f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere her $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ için

$$s(A, B) = f(s_{t_1}(A, B), s_{t_2}(A, B), \dots, s_{t_n}(A, B))$$

ile tanımlı $s : TIFS^{(X, T)} \times TIFS^{(X, T)} \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür.

İspat: S1. Her $t \in T$ için s_t bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü olduğundan her A bir crisp kümesi için $s_t(A, \bar{A}) = 0$ ifadesi sağlanır. f çıkarım fonksiyonunun tanımından her A bir crisp kümesi için $s(A, \bar{A}) = f(s_{t_1}(A, \bar{A}), s_{t_2}(A, \bar{A}), \dots, s_{t_n}(A, \bar{A})) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$ ifadesi elde edilir.

S2. Her $t \in T$ için s_t bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü olduğundan $A = B$ ancak ve ancak $s_t(A, B) = 1$ şartı sağlanır. Buradan $A = B$ ancak ve ancak $s(A, B) = f(s_{t_1}(A, B), s_{t_2}(A, B), \dots, s_{t_n}(A, B)) = f(1, 1, \dots, 1) = 1$ ifadesi elde edilir.

S3. Her $t \in T$ için s_t bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü olduğundan her $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ için $s_t(A, B) = s_t(B, A)$ şartı sağlanır. Buradan her $A, B \in TIFS^{(X, T)}$ için $s(A, B) = f(s_{t_1}(A, B), s_{t_2}(A, B), \dots, s_{t_n}(A, B)) = f(s_{t_1}(B, A), s_{t_2}(B, A), \dots, s_{t_n}(B, A)) = s(B, A)$ ifadesi elde edilir. Buradan $s(A, B) = s(B, A)$ olduğu anlaşılır.

S4. Her $t \in T$ için s_t bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü olduğundan $A \subseteq B \subseteq C$ şartını sağlayan her $A, B, C \in TIFS^{(X,T)}$ için $s_t(A, C) \leq s_t(A, B)$ ve $s_t(A, C) \leq s_t(B, C)$ eşitsizlikleri sağlanır. f çıkarım fonksiyonunu olduğundan $s(A, C) = f(s_{t_1}(A, C), s_{t_2}(A, C), \dots, s_{t_n}(A, C)) \leq f(s_{t_1}(A, B), s_{t_2}(A, B), \dots, s_{t_n}(A, B)) = s(A, B)$ ve benzer şekilde $s(A, C) = f(s_{t_1}(A, C), s_{t_2}(A, C), \dots, s_{t_n}(A, C)) \leq f(s_{t_1}(B, C), s_{t_2}(B, C), \dots, s_{t_n}(B, C)) = s(B, C)$ ifadeleri elde edilir.

Uzaklık ölçüleri için belirtildiği gibi yukarıda belirtilen yaklaşım ile beraber intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan tüm benzerlik ölçüleri de, tanım kümesini $TIFS^{(X,T)}$ uzayı kabul ederek tek bir andaki temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerine dönüştürülebilir. Bu işlemten sonra çıkarım fonksiyonu gibi bazı metotlar vasıtası ile de genel bir yargı belirten genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçümleri elde edilir. Reel dünya uygulamalarda kullanılan verilerin en genel özelliği zaman ile mevcut özelliklerin değişebilecek oluşudur. Bu bağlamda en dikkat çeken özellik ise belirsizlik durumunun kimi zaman artacak oluşudur. Bu durumda belirsizlik derecesinin de katıldığı benzerlik ölçülerinin kullanılmasının önem kazanacağı aşikârdır.

Fuzzy ve intuitionistic uzaklık ve benzerlik kavramları dual kavramlardır. Yani uzaklık ölçülerinden çeşitli yollar ile benzerlik ölçüleri elde edilebilir. Tam tersi benzerlik ölçülerinden uzaklık ölçüsü elde etmek içinde geçerlidir. Du ve Hu (2015), fuzzy değilleme dönüşümü ve yığınım dönüşümleri ile bu ilişkiyi genellemiştir. Bu özellik temporal intuitionistic fuzzy kümeler içinde geçerlidir. Bu kısımdaki eksik bazı temel tanımlamaların temporal intuitionistic fuzzy kümeler için genelleştirilmemiş olmasıdır. Bu kavramlardan bazıları temporal intuitionistic fuzzy kümeler için genelleştirilecektir.

Tanım 6.10: T bir zaman kümesi ve $t \in T$ için $N_t : [0,1] \rightarrow [0,1]$ dönüşümü eğer aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir t anında bir temporal fuzzy değilleme adını alır.

$$N1. N_t(0) = 1, N_t(1) = 0$$

$$N2. a \leq b \text{ ise } N_t(b) \leq N_t(a)$$

Eğer N_t , $t \in T$ ve tüm $a \in [0,1]$ için

- $N_t(N_t(a)) = a$ şartını sağlıyorsa t anında temporal fuzzy güçlü (strong) değilleme,
- $x = 0 \Leftrightarrow N_t(x) = 1$ şartını sağlıyorsa t anında temporal fuzzy dolmayan (non-filling) değilleme,
- $x = 1 \Leftrightarrow N_t(x) = 0$ şartını sağlıyorsa t anında temporal fuzzy kaybolmayan (non-vanishing) değilleme,

adını alır.

Bu tanımlamadaki yenilik değilleme kavramının da zamanla değişecek olmasıdır. Zaman kavramının eklenmesi ile kullanılan uzaklık ölçüsü ile beraber değillemenin de değişecek olması uzaklık ölçüsünden benzerlik ölçüsü elde etmek için sınırsız seçenek sunmaktadır.

Literatürdeki fuzzy değillemelere zaman değişkeni eklenerek aşağıdaki temporal fuzzy değillemeler elde edilir.

1. Sugeno Tipi Temporal Fuzzy Deęillemesi: $\lambda_t \in (-1, +\infty)$ olmak üzere

$$N_{1,\lambda_t}(x) = \frac{1-x}{1+\lambda_t x}$$

2. Yager Tipi Temporal Fuzzy Deęillemesi: $\lambda_t \in (0, +\infty)$ olmak üzere

$$N_{2,\lambda_t}(x) = \sqrt[\lambda_t]{1-x^{\lambda_t}}$$

3. Eřik (Threshold) Tipi Temporal Fuzzy Deęillemesi:

$$N_{3,\lambda_t}(x) = \begin{cases} 1, & x \leq \lambda_t \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Du ve Xu (2015) tarafından verilen ve uzaklık ölçülerinden benzerlik ölçüsü elde etmenin genel bir yolunu veren teoremlere zaman parametrelerinin de eklenmesi ile aşağıdaki teoremler elde edilir. Bu teoremlerin ispatları Du ve Xu (2015) çalışmasındaki gibi yapılabilir.

Teorem 6.11: X boştan farklı bir küme, T zaman kümesi $A, B \in TIFS^{(X,T)}$, d^t temporal uzaklık ölçüsü ve N_t temporal fuzzy dolmayan değilleme olmak üzere $S_{N_t}(A, B) = N_t(d^t(A, B))$ ile tanımlı dönüşüm bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür. Tersine s^t bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü ve N_t temporal fuzzy kaybolmayan değilleme olmak üzere $d_{N_t}(A, B) = N_t(s^t(A, B))$ ile tanımlı dönüşüm bir temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür. Eğer N_t temporal fuzzy güçlü değilleme ise $d^t(A, B) = N^t(s_{N_t}(A, B))$ ve $s^t(A, B) = N_t(d_{N_t}^t(A, B))$ eşitlikleri sağlanır.

Bu teorem genel intuitionistic fuzzy uzaklık ve benzerlik ölçüleri için Du ve Xu (2015) yaklaşımı ile aşağıdaki şekilde korunur. Burada esas olan uzaklık ölçümünden genel bir benzerlik ölçüsünün elde edilecek olmasıdır.

Teorem 6.12: X boştan farklı bir küme, T zaman kümesi $A, B \in TIFS^{(X,T)}$, d genel uzaklık ölçüsü ve N fuzzy dolmayan değilleme olmak üzere $S_N(A, B) = N(d(A, B))$ ile tanımlı dönüşüm bir genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür. Tersine s bir genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsü ve N fuzzy kaybolmayan değilleme olmak üzere $d_N(A, B) = N(s(A, B))$ ile tanımlı dönüşüm bir genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür. Eğer N fuzzy güçlü değilleme ise $d(A, B) = N(s_N(A, B))$ ve $s(A, B) = N(d_N(A, B))$ eşitlikleri sağlanır.

Du ve Xu (2015) çalışmasında geçen bir diğer teorem temporal intuitionistic fuzzy uzaylara aşağıdaki şekilde genellenebilir.

Teorem 6.13: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sonlu bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için $d_t : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ bir temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri olsun. f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu ve N_t temporal fuzzy dolmayan değilleme olmak üzere her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için

$$s(A, B) = f\left(s_{N_{t_1}}(A, B), s_{N_{t_2}}(A, B), \dots, s_{N_{t_n}}(A, B)\right)$$

ile tanımlı $s: TIFS^{(X, T)} \times TIFS^{(X, T)} \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür.

İspat: Teorem 6.11 den her $t \in T$ için s_{N_t} bir benzerlik ölçüsüdür. Diğer taraftan Teorem 6.9'dan ifadenin sağlandığı görülür.

Literatürde Fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler için bu kümenin crisp kümeden farkının ölçüsü olan entropi tanımı temporal intuitionistic fuzzy kümeler içinde tanımlanacaktır. Reel dünya problemlerinde karşımıza çıkan zamansal değişkenlik ölçülmesi istenen bu farkı sürekli bir şekilde değiştirmektedir. Szmidt ve Kacprzyk (2007) tarafından verilen tanımına uygun olarak temporal intuitionistic fuzzy kümeler için temporal ve genel entropi aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 6.14: X boştan farklı bir küme ve T zaman kümesi olmak üzere $e^t: TIFS^{(X, T)} \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü sabit bir $t \in T$ ve her $A \in TIFS^{(X, T)}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa t anında bir temporal intuitionistic fuzzy entropi denir.

$$E1. A \text{ bir crisp kümedir} \Leftrightarrow e^t(A) = 0,$$

$$E2. e^t(A) = 1 \Leftrightarrow \text{her } x \in X \text{ ve } t \in T \text{ için } \mu_A(x, t) = \eta_A(x, t)$$

$$E3. e^t(A) \leq e^t(B) \Leftrightarrow \text{her } x \in X \text{ ve } t \in T \text{ için}$$

$$i. \quad \mu_B(x, t) \leq \eta_B(x, t) \text{ ise } \mu_A(x, t) \geq \mu_B(x, t) \text{ ve } \eta_A(x, t) \leq \eta_B(x, t)$$

$$ii. \quad \mu_B(x, t) \geq \eta_B(x, t) \text{ ise } \mu_A(x, t) \leq \mu_B(x, t) \text{ ve } \eta_A(x, t) \geq \eta_B(x, t)$$

$$E4. e^t(A) = e^t(\overline{A}).$$

Bu tanımla birlikte $e^t(A)$ değeri A temporal intuitionistic fuzzy kümesinin t anında crisp küme olmanın ne kadar uzağında olduğunu ifade eder. Diğer bir yaklaşım ile E1 şartını

$$E1*. A \text{ bir fuzzy kümedir} \Leftrightarrow e^t(A) = 0$$

ile değiştirerek temporal intuitionistic fuzzy kümenin t anında fuzzy kümeden ne kadar farklı olduğuna dair bir diğer ölçü tanımlanabilir. Bu ikinci ölçüyü tip-2 temporal entropi olarak adlandıralım.

Diğer taraftan eğer $e: TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü her bir $t \in T$ için yukarıda verilen şartları sağlıyorsa bu dönüşüme genel intuitionistic fuzzy entropi denir. Her $t \in T$ için $e^t: TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümleri birer temporal intuitionistic fuzzy entropi olmak üzere $e(A) = \sup_{t \in T} \{e^t(A)\}$ ile tanımlı $e: TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy entropidir.

Teorem 6.15: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sonlu bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için $e_t: TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ bir temporal intuitionistic fuzzy entropi olsun. f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için

$$e(A) = f(e_{t_1}(A), e_{t_2}(A), \dots, e_{t_n}(A))$$

ile tanımlı $e: TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy entropidir.

İspat: E1. Her $t \in T$ için e_t bir temporal intuitionistic fuzzy entropi olduğundan A bir crisp kümedir $\Leftrightarrow e^t(A) = 0$ şartı tüm $t \in T$ için sağlanır. Buradan f çıkarım fonksiyonunun tanımından A bir crisp kümedir $\Leftrightarrow e(A) = f(e_{t_1}(A), e_{t_2}(A), \dots, e_{t_n}(A)) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$ ifadesi elde edilir.

E2. Her $t \in T$ için e_t bir temporal intuitionistic fuzzy entropi olduğundan $e^t(A) = 1 \Leftrightarrow$ her $x \in X$ ve $t \in T$ için $\mu_A(x, t) = \eta_A(x, t)$ şartı tüm $t \in T$ için sağlanır. Buradan f çıkarım fonksiyonunun tanımından $e(A) = f(e_{t_1}(A), e_{t_2}(A), \dots, e_{t_n}(A)) = f(1, 1, \dots, 1) = 1 \Leftrightarrow$ her $x \in X$ ve $t \in T$ için $\mu_A(x, t) = \eta_A(x, t)$ ifadesi elde edilir.

E3. Her $t \in T$ için e_t bir temporal intuitionistic fuzzy entropi olduğundan $e^t(A) \leq e^t(B) \Leftrightarrow$ her $x \in X$ ve $t \in T$ için

$$\text{i.} \quad \mu_B(x, t) \leq \eta_B(x, t) \text{ ise } \mu_A(x, t) \geq \mu_B(x, t) \text{ ve } \eta_A(x, t) \leq \eta_B(x, t)$$

$$\text{ii.} \quad \mu_B(x, t) \geq \eta_B(x, t) \text{ ise } \mu_A(x, t) \leq \mu_B(x, t) \text{ ve } \eta_A(x, t) \geq \eta_B(x, t)$$

Şartı tüm $t \in T$ için sağlanır. Buradan f çıkarım fonksiyonunun tanımından

$$e(A) = f(e_{t_1}(A), e_{t_2}(A), \dots, e_{t_n}(A)) \leq f(e_{t_1}(B), e_{t_2}(B), \dots, e_{t_n}(B)) = e(B)$$

$$\text{i.} \quad \mu_B(x, t) \leq \eta_B(x, t) \text{ ise } \mu_A(x, t) \geq \mu_B(x, t) \text{ ve } \eta_A(x, t) \leq \eta_B(x, t)$$

$$\text{ii.} \quad \mu_B(x, t) \geq \eta_B(x, t) \text{ ise } \mu_A(x, t) \leq \mu_B(x, t) \text{ ve } \eta_A(x, t) \geq \eta_B(x, t)$$

ifadesi elde edilir.

E4. Her $t \in T$ için e_t bir temporal intuitionistic fuzzy entropi olduğundan

$$\begin{aligned} e^t(A) = e^t(\bar{A}) \text{ olduğundan } e(A) &= f(e_{t_1}(A), e_{t_2}(A), \dots, e_{t_n}(A)) = \\ &= f(e_{t_1}(\bar{A}), e_{t_2}(\bar{A}), \dots, e_{t_n}(\bar{A})) = e(\bar{A}) \text{ elde edilir. Buradan } e(A) = e(\bar{A}) \text{ olduğu} \\ &\text{anlaşılır.} \end{aligned}$$

Literatürde fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler için sırasıyla Szmidt ve Kacprzyk (2007), Vlachos ve Sergiadis (2007) Li ve ark. (2012), Guo ve Song (2014), Huang (2007), Hung (2003), Ye (2010), Zeng ve Li (2006) tarafından tanımlanan entropiler ufak bazı modifikasyonlar ile aşağıdaki şekilde temporal intuitionistic fuzzy entropilere dönüştürülebilir.

Önerme 6.16: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi olmak

üzere aşağıdaki ifadeler $TIFS^{(X, T)}$ üzerinde birer temporal entropidir.

$$1. \quad E_{SK}^t(A) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t)|$$

$$2. \quad E_{VS-1}^t = \frac{\sum_{i=1}^n \min\{\mu_A(x_i, t), \eta_A(x_i, t)\} + \min\{1 - \mu_A(x_i, t), 1 - \eta_A(x_i, t)\}}{\sum_{i=1}^n \max\{\mu_A(x_i, t), \eta_A(x_i, t)\} + \max\{1 - \mu_A(x_i, t), 1 - \eta_A(x_i, t)\}}$$

$$3. \quad E_{VS-2}^t(A) = \sum_{i=1}^n \frac{2\mu_A(x_i, t)\eta_A(x_i, t) + \pi_A(x_i, t)^2}{\mu_A(x_i, t)^2 + \eta_A(x_i, t)^2 + \pi_A(x_i, t)^2}$$

$$4. E_{Li-1}^t(A) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right|^3 + \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right| \right)$$

$$5. E_{GS-1}^t(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right| \right) \frac{1 + \pi_A(x_i, t)}{2}$$

$$6. E_{Huang-1}^t(A) = 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \mu_A(x_i, t)^2 - \eta_A(x_i, t)^2 \right|$$

$$7. E_{Huang-2}^t(A) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \mu_A(x_i, t)^2 - \eta_A(x_i, t)^2 \right|^p}$$

$$8. E_{Huang-3}^t(A) = 1 - \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right|^p}$$

$$9. E_{Huang-4}^t(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1 - \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right| + \pi_A(x_i, t)}{1 + \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right| + \pi_A(x_i, t)}$$

$$10. E_{Huang-5}^t(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 - \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right| + \pi_A(x_i, t) \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right|$$

$$11. E_{Hung-1}^t(A) = 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right|$$

$$12. E_{Hung-2}^t(A) = 1 - \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left| \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t) \right|^2}$$

$$13. E_{Ye-1}^t(A) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sin \left(\frac{\pi [1 + \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t)]}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi [1 - \mu_A(x_i, t) + \eta_A(x_i, t)]}{4} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

$$14. E_{Ye-2}^t(A) =$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\cos \left(\frac{\pi [1 + \mu_A(x_i, t) - \eta_A(x_i, t)]}{4} \right) + \cos \left(\frac{\pi [1 - \mu_A(x_i, t) + \eta_A(x_i, t)]}{4} - 1 \right) \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right)$$

$X = [a, b]$ kapalı aralığı ise;

$$15. E_{ZL-1}^t = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \mu_A(x, t) - \eta_A(x, t) \right| dx$$

$$16. \quad E_{zL-1}^t = \frac{\int_a^b \mu_A(x,t) \wedge \eta_A(x,t) dx}{\int_a^b \mu_A(x,t) \vee \eta_A(x,t) dx}$$

İspat: Ölçüler için verilen referanslardaki şekilde kolayca ispatlanır.

Fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümelerde uzaklık ölçüsü, benzerlik ölçüsü ve entropi kavramları ile yakından alakalı bir diğer ölçü kapsama (inclusion, subsethood) ölçüsüdür. Bu ölçü intuitionistic fuzzy kümeler için ilk kez Cornelis ve Kerre (2003) tarafından tanımlanmıştır. Şimdi bir temporal intuitionistic fuzzy kümenin bir diğer temporal intuitionistic fuzzy kümesini kapsamasının ölçüsü olan ve temporal kapsama ölçüsü olarak adlandırılacak aşağıdaki dönüşüm tanımlanacaktır.

Tanım 6.17: X boştan farklı bir küme ve T zaman kümesi olmak üzere için $I_t : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü sabit bir $t \in T$ anı ve her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü adını alır.

$$I1. \quad I_t(\tilde{1}, \tilde{0}) = 0,$$

$$I2. \quad I_t(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$I3. \quad A \subseteq B \text{ ve } C \in TIFS^{(X,T)} \text{ ise } I_t(C, A) \leq I_t(C, B) \text{ ve } I_t(B, C) \leq I_t(A, C)$$

Diğer taraftan her $t \in T$ anı ve $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için yukarıda verilen şartları sağlayan $I : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümüne bir genel intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü adı verilir. Her bir $t \in T$ anı için $I_t : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ bir temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü olmak üzere $I(A, B) = \sup_{t \in T} \{I_t(A, B)\}$ ile tanımlı $I : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsüdür. Fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler için Zhang ve ark. (2007, 2012) tarafından tanımlanan kapsama ölçüleri diğer ölçüler için olduğu gibi ufak modifikasyonlar ile temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçülerine dönüştürülebilir.

Önerme 6.18: $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi olmak

üzere aşağıdaki ifadeler $TIFS^{(X,T)}$ üzerinde birer temporal kapsama ölçüsüdür.

$A, B \in TIFS^{(X,T)}$ olmak üzere

$$1. I_{ZHL-1}(A, B) =$$

$$1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \mu_A(x_i, t) - \min \{ \mu_A(x_i, t), \mu_B(x_i, t) \} \right| + \left| \max \{ \eta_A(x_i, t), \eta_B(x_i, t) \} - \eta_A(x_i, t) \right| \right\}$$

$$2. I_{ZHL-1}(A, B) =$$

$$1 - \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left\{ \left| \mu_A(x_i, t) - \min \{ \mu_A(x_i, t), \mu_B(x_i, t) \} \right|^2 + \left| \max \{ \eta_A(x_i, t), \eta_B(x_i, t) \} - \eta_A(x_i, t) \right|^2 \right\}}$$

$$3. I_{ZDS-1}(A, B) =$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left[\frac{\mu_B(x_i, t) - \mu_A(x_i, t) + \eta_B(x_i, t) - \eta_A(x_i, t)}{|\mu_B(x_i, t) - \mu_A(x_i, t)| + |\eta_B(x_i, t) - \eta_A(x_i, t)|} \right] + 1 & , \quad \text{diğer durumlar} \\ 1 & , \quad \begin{matrix} \mu_B(x_i, t) = \mu_A(x_i, t), \\ \eta_B(x_i, t) = \eta_A(x_i, t) \end{matrix} \end{cases}$$

Sonlu elemanlı bir zaman kümesi için diğer ölçüler için verilen teorem aşağıdaki şekilde temporal intuitionistic kapsama ölçüsü ve genel intuitionistic kapsama ölçüsü içinde verilebilir.

Teorem 6.19: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ sonlu bir zaman kümesi

olmak üzere her $t \in T$ için $I_t : TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0, 1]$ bir temporal intuitionistic

fuzzy kapsama ölçüleri olsun. f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere her

$A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için

$$I(A, B) = f(I_{t_1}(A), I_{t_2}(A), \dots, I_{t_n}(A))$$

ile tanımlı $I: TIFS^{(X,T)} \times TIFS^{(X,T)} \rightarrow [0,1]$ dönüşümü bir genel intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsüdür.

İspat: I1. Her $t \in T$ için $I^t(\tilde{1}, \tilde{0}) = 0$ olduğundan

$$I(\tilde{1}, \tilde{0}) = f(I_{t_1}(\tilde{1}, \tilde{0}), I_{t_2}(\tilde{1}, \tilde{0}), \dots, I_{t_n}(\tilde{1}, \tilde{0})) = (0, 0, \dots, 0) = 0 \text{ olduğundan I1 sağlanır.}$$

I2. Her $t \in T$ için e_t bir temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü olduğundan

$$I_t(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ şartı sağlanır. Buradan } I(A, B) = f(I_{t_1}(A, B), I_{t_2}(A, B), \dots, I_{t_n}(A, B)) = (1, 1, \dots, 1) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ ifadesi elde edilir.}$$

I3. Her $t \in T$ için e_t bir temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü olduğundan

$A \subseteq B$ ve $C \in TIFS^{(X,T)}$ ise $I_t(C, A) \leq I_t(C, B)$ ve $I_t(B, C) \leq I_t(A, C)$ ifadeleri elde edilir. Buradan f çıkarım fonksiyonu tanımından yararlanarak $I(C, A) =$

$$f(I_{t_1}(C, A), I_{t_2}(C, A), \dots, I_{t_n}(C, A)) \leq f(I_{t_1}(C, B), I_{t_2}(C, B), \dots, I_{t_n}(C, B)) = I(C, B)$$

$$\text{ve } I(B, C) = f(I_{t_1}(B, C), I_{t_2}(B, C), \dots, I_{t_n}(B, C)) \leq$$

$$f(I_{t_1}(A, C), I_{t_2}(A, C), \dots, I_{t_n}(A, C)) = I(A, C) \text{ ifadeleri elde edilir.}$$

Bu ölçüler arasındaki ilişkilerin fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan şekilde korunur. Bu tip ölçüler için tez çalışmasının üçüncü ve dördüncü bölümlerinde verilen ilişkiler temporal intuitionistic fuzzy ve genel intuitionistic fuzzy ölçüler içinde korunur. Bu ilişkilerden bazıları temporal intuitionistic fuzzy için aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir. Bu bağlamda verilebilecek ilk ilişki Liu (1992) tarafından verilen aşağıdaki ilişkidir.

Teorem 6.20: X boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için s^t bir temporal intuitionistic benzerlik ölçüsü olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $e^t(A) = s^t(A, \bar{A})$ ile tanımlanan dönüşüm bir temporal intuitionistic fuzzy entropidir.

İspat: Önerme 3.2.11'den açıktır.

Teorem 6.21: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için s^t bir uzaklık ölçüsü ve f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $e(A) = f(s^{t_1}(A, \bar{A}), s^{t_2}(A, \bar{A}), \dots, s^{t_n}(A, \bar{A}))$ ile tanımlanan dönüşüm bir genel intuitionistic fuzzy entropidir.

İspat: Önerme 3.2.11 ve Teorem 6.15'den açıktır.

Fuzzy entropi ve fuzzy uzaklık ölçüsü arasında Liu (1992) tanımlanan bir diğer ilişki temporal intuitionistic fuzzy entropi ve temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüleri için temporal fuzzy dolmayan değillemenin de kullanılması ile aşağıdaki şekilde genişletilir.

Teorem 6.22: X boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için d^t bir temporal intuitionistic fuzzy uzaklık ölçüsü ve N_t temporal fuzzy dolmayan değilleme olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $e^t(A) = N_t(d^t(A, \bar{A}))$ ile tanımlanan dönüşüm bir temporal intuitionistic fuzzy entropidir.

İspat: Teorem 6.11 ve Teorem 6.20'den açıktır.

Teorem 6.23: X boştan farklı bir küme ve $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için d^t bir uzaklık ölçüsü, f sıfır bölensiz bir çıkarım fonksiyonu ve N_t temporal fuzzy dolmayan değilleme olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $e(A) = f(N_{t_1}(d^{t_1}(A, \bar{A})), N_{t_2}(d^{t_2}(A, \bar{A})), \dots, N_{t_n}(d^{t_n}(A, \bar{A})))$ ile tanımlanan dönüşüm bir genel intuitionistic fuzzy entropidir.

İspat: Teorem 6.22 ve Teorem 6.15'ten açıktır.

Intuitionistic fuzzy kapsama ölçüleri için sırasıyla intuitionistic fuzzy entropi ve intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri arasında Zhang ve ark. (2012) ve Zhang ve ark. (2007) tarafından verilen ilişkiler aşağıdaki şekilde temporal intuitionistic fuzzy ölçüler için genişletilmiştir.

Teorem 6.24: X boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi olmak üzere her $t \in T$ için I^t bir temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü olmak üzere her $A \in TIFS^{(X,T)}$ için $E_I^t(A) = \left(I^t(A \cup \bar{A}, A \cap \bar{A}) \right)$ ile tanımlanan E_I^t , temporal intuitionistic fuzzy entropidir.

İspat: Teorem 4.3.40'tan açıktır.

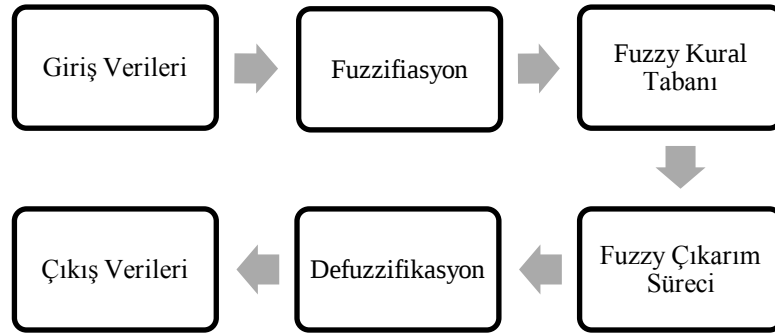
Teorem 6.25: X boştan farklı bir küme ve T bir zaman kümesi ve $*$ bir t – norm ve olmak üzere her $t \in T$ için I^t bir temporal intuitionistic fuzzy kapsama ölçüsü olmak üzere her $A, B \in TIFS^{(X,T)}$ için $S_I^t(A) = * \left(I^t(A, B), I^t(B, A) \right)$ ile tanımlanan S_I^t , temporal intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüsüdür.

İspat: Teorem 4.3.41'den açıktır.

Yukarıdaki teoremlerle de görüldüğü üzere fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümeler için tanımlanan uzaklık, benzerlik, kapsama ölçüleri ile entropi arasındaki temel ilişkiler ve tanımlamalar temporal intuitionistic fuzzy kümeler için de korunmaktadır. Bununla beraber temporal intuitionistic fuzzy kümeler için bu ölçüler temporal ve genel (overall) olarak iki ayrı grupta değerlendirilebilmektedir. Bu yöntemin avantajı doğası zamanla değişen tüm veriler için öncelikle anlık daha sonra da genel olarak değerlendirmelerin yapılabilecek oluşudur. Böylelikle zamana bağlı olarak değişen veriler için bu ölçülerin kullanıldığı uygulamalarda daha esnek ve optimal sonuca yönelik modifikasyonlar yapılabilecektir.

7. UZAKLIK VE BENZERLIK ÖLÇÜLERİNİN BAZI UYGULAMALARI

Fuzzy küme teorisi matematik alanında olduğu kadar mühendislik, tıp, sosyal ve beşeri bilimler alanlarında da büyük yenilikler getirmiştir. Ele alınacak durumun matematiksel olarak modellenmesi ve bu durumlar hakkında fuzzy mantık kuralları çerçevesinde çıkarımlar yapılması güncelliğini koruyan alanlardır. Sayısı günden güne artan bu çalışmalarda temel işleyiş ele alınan durumun fuzzifikasyonu (veya intuitionistic fuzzifikasyonu), bu işlemin ardından araştırılan durumundan istenilen özelliğe göre uygulanacak fuzzy süreç (fuzzy operatör, benzerlik, uzaklık, vb...) ve defuzzikasyon süreci olarak özetlenebilir. Bu süreci aşağıdaki grafik ile görselleştirebiliriz (Şekil 7.1.).



Şekil 7.1. Fuzzy sistemlerin temel işlem şeması.

Diğer taraftan Atanassov' un kurmuş olduğu intuitionistic fuzzy küme teorisi ile beraber sadece olumlu durumların veya niceliklerin değil olumsuz durumların ve bu iki duruma bağlı olarak doğal bir şekilde ortaya çıkan belirsizliklerin de hesaba katılması uygulamalardaki doğruluk oranını gözle görülür şekilde arttığı gözlemlenmektedir.

Bu kısımda intuitionistic fuzzy kümelerde tanımlanan uzaklık ve benzerlik ölçülerinin gürültüye maruz kalan görüntüler üzerindeki performansının analizi gerçekleştirilecektir. Bilindiği üzere görüntü ve sinyal işleme alanında gürültü istenmeyen ve görüntünün veya sinyalin kalitesini bozan veri manasına gelmektedir. Bu tanımlamadan anlaşılacağı üzere reel dünyadan alınan görüntülerin veya sinyallerin tamamında gürültü kaçınılmaz bir parametredir. Bu kısmın başında öncelikle gürültü

çeşitleri ve görüntüye olan etkileri tanıtılacak bu kısımdan sonraki bölümde ise seçilen bazı benzerlik ölçüleri ile gürültülü ve gürültüsüz görüntüler arasındaki benzerlik ölçülecektir.

7.1. Görüntü İşleme Alanında Gürültü ve Çeşitleri

Gürültü sinyal işleme, görüntü işleme veya haberleşme gibi alanlarda sinyalin, görüntünün veya verinin kalitesini düşüren istenmeyen ses, piksel veya veri manasına gelmektedir (Marita, 2012). Görüntü ve sesler genellikle çevresel faktörlerden kaynaklanan gürültüler içerir. İletim süreci, donanımsal veya yazılımsal hatalar, radyoaktif etmenler gibi birçok faktör görüntülerde gürültüye neden olabilmektedir. Ayrıca gürültü, görüntünün elde edilmesi işlemindeki hatalardan meydana gelmekte gerçek görüntüde olması gereken piksel değerlerini verilmesini engellemektedir (Dasgupta, 2014). Bunun özellikle medikal görüntü yorumlamada hatalara neden olabileceği gayet açıktır. Diğer taraftan bir görüntü tabanından belirli bir görüntüye benzer olan görüntülerin tespit edilmesi görüntü işleme ve örüntü tanıma alanlarının temel konularından biridir (Marita, 2012). Uygulamalarda ve literatürde birçok nedenden kaynaklanan birçok gürültü tipi tanımlanmıştır. Şimdi bu gürültü tarzlarından en sık rastlanılan üçü tanıtılacaktır.

Tanım 7.1.1: (Tuz ve Biber (Salt and Pepper) Tipi Gürültü) Tuz ve biber tipi gürültü dürtü (impulse) gürültüsü olarak da isimlendirilir (Singh ve Jain, 2013). Tuz ve biber tipi gürültü modelinde, yalnızca iki muhtemel değer olasıdır, bu değerler a ve b olarak isimlendirilebilir ve bu iki değerinde elde edilmesi olasılığı 0.1 'den küçüktür. 8 bit/piksel görüntü için, biber gürültüsü için tipik yoğunluk 0'a ve tuz gürültüsü içinde tipik yoğunluk değeri 255'e yakındır (Marita, 2012). Tuz ve biber tipi gürültünün ihtimali yoğunluk fonksiyonu (Probability Density Function)

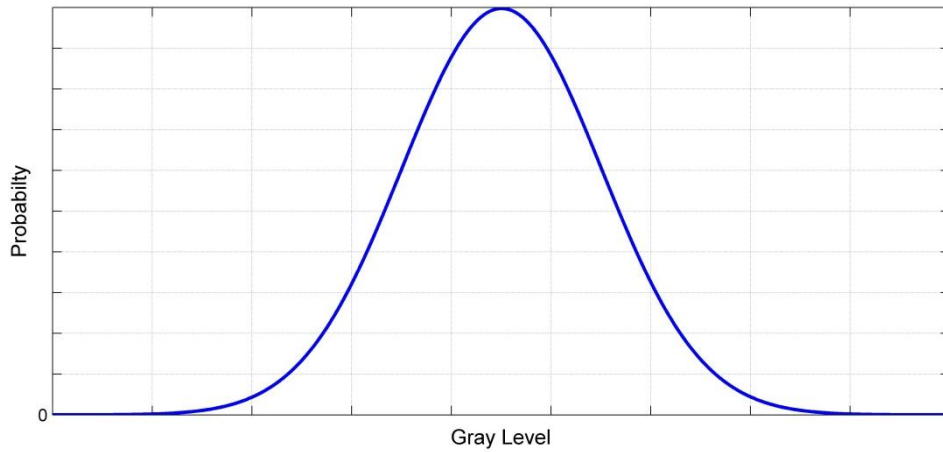
$$PDF_{tuz\&biber}(g) = \begin{cases} A, & g = a("biber") \\ B, & g = b("tuz") \end{cases}$$

ile tanımlıdır. Burada g , gri seviyesidir, eğer $b > a$ ise gri seviyesi b görüntüde beyaz nokta ve tersi durumda ise gri seviyesi a görüntüde siyah bir nokta olarak belirir (Singh ve Jain, 2013). Tuz ve biber gürültüsü kamera sensöründeki arızalarından, hafıza hücrelerindeki hatalardan veya görüntü dijitalleştirilmesi veya iletimi sırasında meydana gelen senkronizasyon hatalarından ortaya çıkar (Marita, 2012).

Tanım 7.1.2: (Gauss Tipi Gürültü) Gauss tipi gürültü Şekil 7.2 de verildiği üzere Gauss ihtimali yoğunluk fonksiyonuna sahiptir (Marita, 2012). Gauss tipi gürültü istatistiksel bir gürültü olup ihtimali yoğunluk fonksiyonu Gauss dağılım fonksiyonuna eşittir. Diğer bir ifade ile gürültülü piksel değerleri, Gauss dağılımına sahiptir (Singh ve Jain, 2013). Gauss tipi gürültünün ihtimali yoğunluk fonksiyonu

$$PDF_{Gauss}(g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(g-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

ile tanımlıdır. Burada g = gri seviyesi, μ = ortalama, σ = standart sapmadır.



Şekil. 7.2. Gauss tipi gürültü için ihtimali yoğunluk fonksiyonunun grafiği ($\mu=0.1$, $\sigma=0.2$).

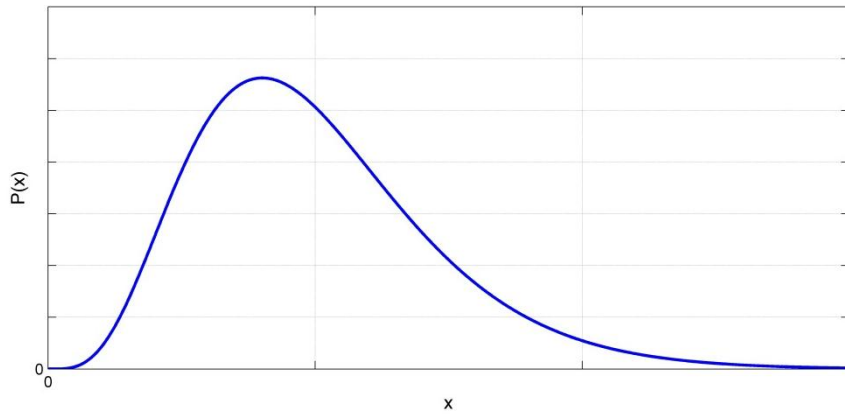
Gauss gürültü tipi, gürültüye sebebiyet veren doğal süreçleri (mesela, radyasyonun doğasından kaynaklanan gürültü, optik sinyallerin elektriksel sinyallere dönüştürülmesi sırasındaki gürültüler veya sensor-edinimi sırasında meydana gelen

elektrik sinyali amplifikasyonu sonucu oluşan elektrik gürültü vb.) modellemek için kullanışlı bir yoldur (Marita, 2012).

Tanım 7.1.3: (Benek (Speckle) Tipi Gürültü) Benek tipi gürültü ultrason gibi lenssiz (coherent) görüntüleme sistemleri ile elde edilen görüntülerde oluşan bir gürültü tipidir. Benek tipi gürültü fonksiyonun ihtimali yoğunluk fonksiyonu dağılımı ile tanımlıdır,

$$P(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!a^\alpha} e^{-\frac{z}{a}} \text{ Burada } z \text{ gri seviye ve varyans } a^2\alpha \text{ ile tanımlıdır (Singh ve Jain, 2013).}$$

Benek tipi gürültünün ihtimali yoğunluk fonksiyonunun grafiği Şekil 7.3. de verilmiştir.



Şekil. 7.3. Benek tipi gürültü için ihtimali yoğunluk fonksiyonunun grafiği.

Diğer gürültü tiplerinin aditif gürültü olmasına rağmen, benek tipi gürültü ise lenssiz görüntüleme sistemlerinden oluşan bir multiplikatif bir gürültüdür. Benek gürültüsü, doğal yüzeyler tarafından geri saçılan ahenkli dalgaların sensöre faz dışında gelmesi yüzünden kaynaklanır. Bu tür gürültü tıbbi ultrason görüntülemenin doğal bir özelliğidir ve bu nedenle ultrason görüntüleme yönteminin tanısal değerini etkileyen görüntü çözünürlüğünü ve kontrastını azaltacağından istenmeyen bir durumdur. (Singh ve Jain, 2013) Fakat tıp literatüründe, benek gürültüsü "doku" olarak değerlendirildiğinde muhtemelen yararlı tanı bilgileri içerebilir. Burada benek gürültüsünün arzu edilen derecede yumuşatılması tercihen uzmanın bilgisine ve yazılıma bağlıdır. Otomatik segmentasyon için, farklı görüntü bölgeleri arasındaki sınırların netliğinin sürdürülme genellikle benekli dokunun düzeltilmesi için tercih edilir (Sudha ve ark., 2009).

7.2. Gürültü Eklenmiş Görüntüler Üzerinde Fuzzy ve Intuitionistic Fuzzy Benzerlik Ölçülerinin Performans Analizi

Bu kısımda çeşitli tip ve seviyelerde gürültü uygulanan görüntülerin orijinal halleri ile olan benzerlik değerleri hesaplanacaktır. Gürültü eklenmiş görüntüler üzerinde kullanılacak benzerlik ölçülerini aşağıdaki şekilde seçilmiştir. Bu benzerlik ölçüleri seçilirken literatürde sıklıkla kullanılan ölçüler olmaları dikkate alınmıştır.

$$1. \quad S_{W_1}^1(A, B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}$$

$$2. \quad S_{W_2}^1(A, B) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (1 - |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|)$$

(Wang, 1997).

$$3. \quad S_{PK1}^1(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}{\sum_{i=1}^n \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i))}$$

$$4. \quad S_{PK2}^1(A, B) = 1 - \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|)$$

$$5. \quad S_{PK3}^1(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)|}$$

(Pappis ve Kacapilidis, 1993).

$$6. \quad sim_H^2(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)$$

$$7. \quad sim_E^2(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2)$$

$$8. \quad sim_{mult}^2(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((\mu_A(x_i) \cdot \mu_B(x_i)) + (\eta_A(x_i) \cdot \eta_B(x_i))) /$$

$$\sqrt{((\mu_A(x_i))^2 + (\eta_A(x_i))^2) \cdot ((\mu_B(x_i))^2 + (\eta_B(x_i))^2)}$$

(Szmidt, 2014).

$$9. S_{PK1}^2(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) + \min(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i))}{\sum_{i=1}^n \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) + \max(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i))}$$

$$10. S_{PK2}^2(A, B) = 1 - \frac{1}{2} \cdot (\max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|) + \max(|\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|))$$

$$11. S_{PK3}^2(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) + \eta_B(x_i)|}$$

$$12. S_{HY1}^2(A, B) = 1 - \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)$$

$$13. S_{HY2}^2(A, B) = 1 - \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|)\right)}{1 - \exp(-n)} \right)$$

$$14. S_{HY3}^2(A, B) = 1 - \left(\frac{1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (|\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)}| + |\sqrt{\eta_A(x_i)} - \sqrt{\eta_B(x_i)}|)\right)}{1 - \exp(-n)} \right)$$

(Hung ve Yang, 2004, 2007, 2008) ve (Szmidt, 2014).

$$15. sim_H^3(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|)$$

$$16. sim_E^3(A, B) = 1 - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left((\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i))^2 + (\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i))^2 + (\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i))^2 \right)$$

$$17. sim_{mult}^3(A, B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((\mu_A(x_i) \cdot \mu_B(x_i)) + (\eta_A(x_i) \cdot \eta_B(x_i)) + (\pi_A(x_i) \cdot \pi_B(x_i)) \right) / \left[\left((\mu_A(x_i))^2 + (\eta_A(x_i))^2 \right) \cdot \left((\mu_B(x_i))^2 + (\eta_B(x_i))^2 \right) + \left((\pi_B(x_i))^2 + (\pi_A(x_i))^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$18. S_{PK1}^3(A, B) = \frac{\sum_{i=1}^n \min(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) + \min(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i)) + \min(\pi_A(x_i), \pi_B(x_i))}{\sum_{i=1}^n \max(\mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) + \max(\eta_A(x_i), \eta_B(x_i)) + \max(\pi_A(x_i), \pi_B(x_i))}$$

$$19. S_{PK2}^3(A, B) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \left(\max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|) \right. \\ \left. + \max(|\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|) + \max(|\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|) \right)$$

$$20. S_{PK3}^3(A, B) = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|}{\sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) + \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) + \eta_B(x_i)| + |\pi_A(x_i) + \pi_B(x_i)|}$$

$$21. S_{HY1}^3(A, B) = 1 - \sum_{i=1}^n \max(|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)|, |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|, |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)|)$$

$$22. S_{HY2}^3(A, B) = 1 - \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (|\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)| + |\eta_A(x_i) - \eta_B(x_i)|) \right) \right. \\ \left. + |\pi_A(x_i) - \pi_B(x_i)| \right] / (1 - \exp(-n))$$

$$23. S_{HY3}^2(A, B) = 1 - \left(1 - \exp \left(-\frac{1}{3} \sum_{i=1}^n (|\sqrt{\mu_A(x_i)} - \sqrt{\mu_B(x_i)}| + |\sqrt{\eta_A(x_i)} - \sqrt{\eta_B(x_i)}|) \right) \right. \\ \left. + |\sqrt{\pi_A(x_i)} - \sqrt{\pi_B(x_i)}| \right) / (1 - \exp(-n))$$

(Szmids, 2014), (Chaira ve Ray, 2008), (Guha ve Chakraborty, 2010), (Bustince ve ark., 2007).

Bu kısımda yukarıda tanıtılan görüntüye uygulanan üç gürültü çeşidinin çeşitli seviyelerde uygulanması ile elde edilen gürültülü görüntüler ile orjinal görüntü arasındaki benzerlik hesaplanacaktır. Bilindiği üzere $M \times N$ piksel ihtiva eden A görüntüsü için, eğer L sayıda gri seviyesi verilmişse (genelde bu sayı 256'dır) g belli bir pikselin grilik seviyesini göstermek üzere 0 ve $L-1$ arasında değer alır. Buradan A görüntüsünü her bir pikselin gri seviyesine bağlı olarak bir intuitionistic fuzzy küme olarak ifade edebiliriz. $i \in \{1, \dots, M\}$ ve $j \in \{1, \dots, N\}$ olmak üzere

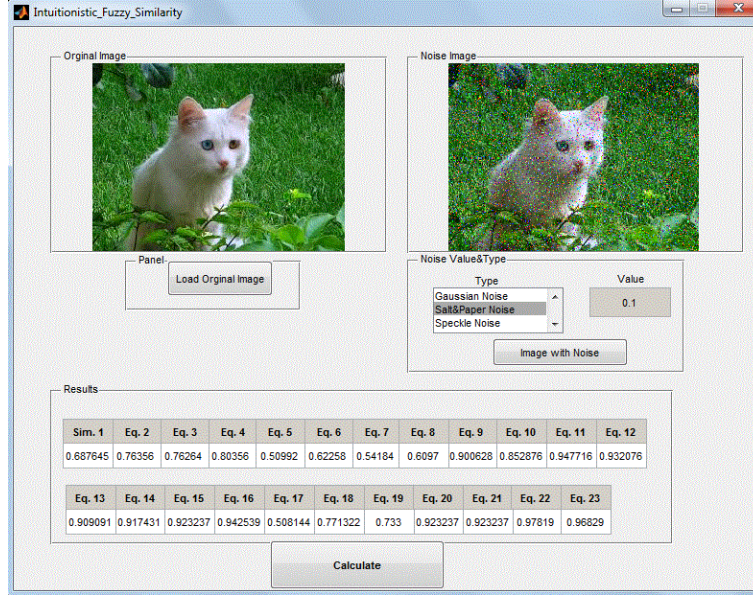
$$A = \left\{ \left(g_{i,j}, \mu_A(g_{i,j}), \eta_A(g_{i,j}) \right); g_{i,j} \in \{0, \dots, L-1\} \right\}$$

Burada $\mu_A(g_{i,j})$ ve $\eta_A(g_{i,j})$ değerleri sırası ile (i, j) . pikselinin A görüntüsüne belli bir kural çerçevesinde üye olma ve üye olmama derecelerini göstermektedir. Bu tanımlamaya göre μ_A ve η_A fonksiyonlarının görüntüye belli bir kural çerçevesinde üye olma ve üye olmama derecelerini gösteren dönüşümler olarak tanımlandığı açıktır. Genellikle bir pikselin üye olma derecesi pikselin sahip olduğu parlaklık ile ölçülür fuzzy görüntü işlemeden daha karmaşık olarak intuitionistic fuzzy görüntü işleme alanında üye olmama derecesi de hesaplanır. Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde üyelik değerlerini elde etmek için genellikle normalleştirilmiş yoğunluğun kullanıldığı görülmektedir yani $g \in \{0, \dots, L-1\}$ gri seviyesinin üye olma derecesi üzere

$\mu_A(g) = \frac{g}{L-1}$ ile hesaplanmaktadır. Diğer taraftan üye olmama derecesini tanımlamak için birçok yol kullanılmaktadır. Bu yöntemler arasında en sık kullanılanlarından birisi

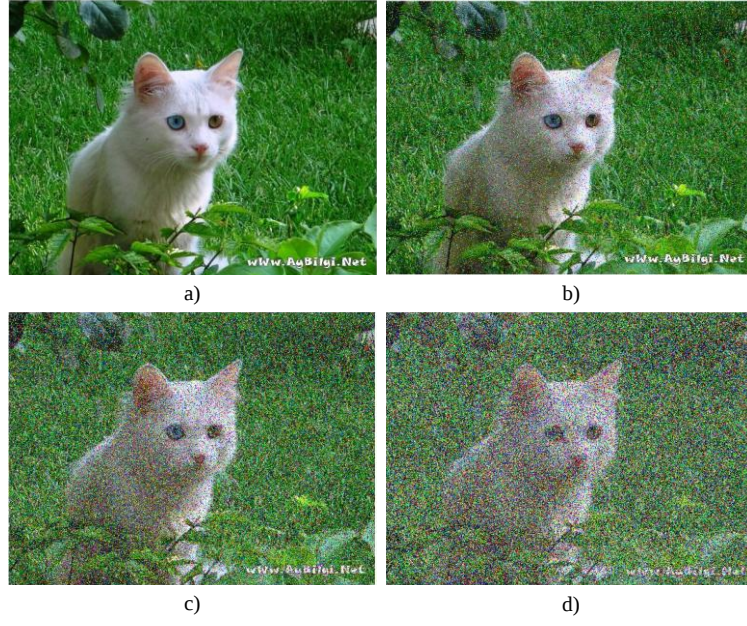
$\lambda > 0$ için $\eta_A(g) = \frac{1 - \mu_A(g)}{1 + \lambda \mu_A(g)}$ ile tanımlı Sugeno tipi intuitionistic fuzzy üreteçtir.

Bu çalışmada kullanılan görüntü önce 500×500 boyutunda gri seviye matrisine dönüştürülmüş ardından her üç gürültü tipinden 0.1, 0.3 ve 0.7 seviyelerinde uygulanarak gürültü eklenmiş görüntüler elde edilmiştir. Görüntünün orijinali ve gürültü eklenmiş görüntüler yukarıda bahsedilen şekilde intuitionistic fuzzy kümelere dönüştürülmüştür. Sonraki kısımda ise yukarıda seçilen 23 benzerlik ölçüsü kullanılarak benzerlik dereceleri hesaplanmıştır. Bu işi daha görsel açıdan ifade etmek ve kullanım kolaylığı sağlamak için Matlab[®] yazılımı kullanılarak grafiksel kullanıcı arayüzü (graphical user interface, kısaca GUI) tasarlanmıştır. Bu arayüz sayesinde her iki görüntüde (orijinal ve gürültü eklenmiş olan) aynı anda görülebilmekte ve gürültünün oluşturduğu tahribat daha iyi anlaşılmaktadır. Ayrıca GUI de eklenen özellik ile gürültü tipi ve gürültü derecesi kolayca değiştirilebilmektedir.

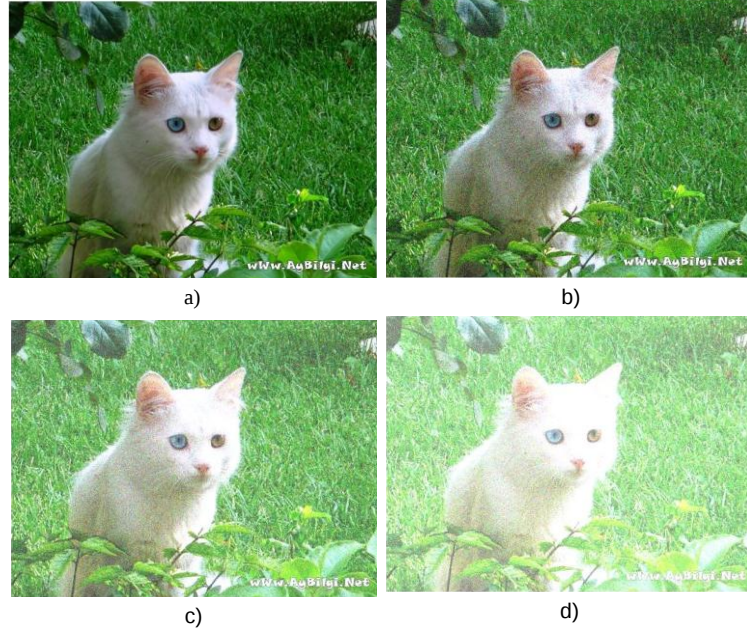


Şekil 7.4. Tasarlanan grafiksel kullanıcı arayüzü (GUI).

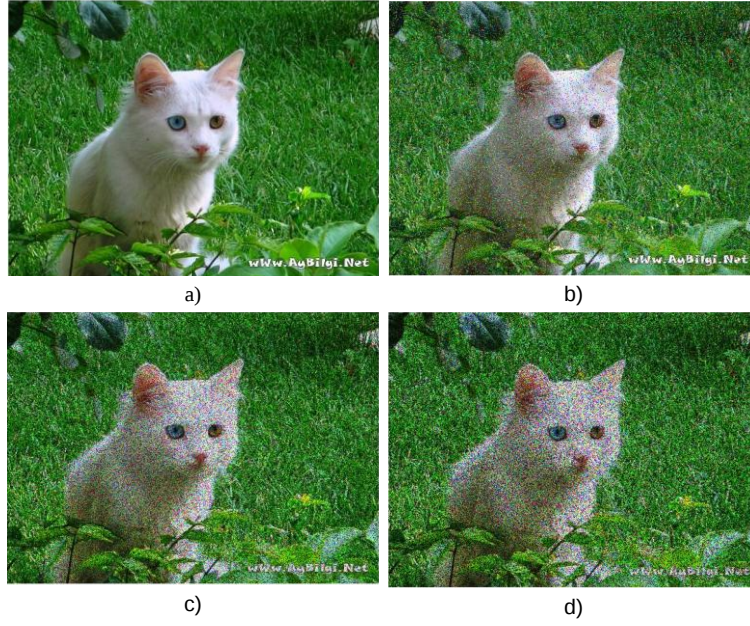
Tuz ve biber, Gauss ve benek gürültü tipleri için gürültü derecesi $[0,1]$ aralığından seçilebilir. Fakat daha anlamlı durumlar $[0.1, 0.8]$ aralığında oluşmaktadır. Gürültü seviyesi arttıkça resimdeki deformasyonda artmaktadır. Gürültü çeşitlerinin ve gürültü seviyelerinin görüntüler üzerindeki etkileri Şekil 7.5., Şekil 7.6. ve Şekil 7.7. ile görülür.



Şekil 7.5. Tuz ve biber tipi gürültü uygulanmış görüntü a) orijinal b) (G.S.) 0.1, c) (G.S.) 0.3 ve d) (G.S.) 0.7.



Şekil 7.6. Gauss tipi gürültü uygulanmış görüntü a) orijinal b) (G.S.) 0.1, c) (G.S.) 0.3 ve d) (G.S.) 0.7.



Şekil 7.7. Benek tipi gürültü uygulanmış görüntü a) orijinal b) (G.S.) 0.1, c) (G.S.) 0.3 ve d) (G.S.) 0.7.

Seçilen gürültü çeşitleri, reel dünya uygulamalarında karşılaşılan gürültü çeşitleri olduğundan uygulayacağımız simülasyon gerçek uygulamalarda da benzer sonuçlar verecektir. Aşağıdaki tablolarda gürültü tipi ve gürültü seviyesi belirtilen görüntülerin orijinal görüntüler ile olan benzerlikleri kullanılan benzerlik ölçüsüne göre verilmiştir. Çizelge 7.1. de fuzzy benzerlik ölçülerinin performansı gösterilmiştir.

Çizelge 7.1. Fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri

Gürültü Tipi	Gürültü Seviyesi	Benzerlik Çeşidi				
		1	2	3	4	5
Gauss	0.1	0.4287	0.6119	0.5244	0.6119	0.3119
	0.3	0.3356	0.5165	0.3363	0.5165	0.4966
	0.7	0.2454	0.5475	0.2102	0.5475	0.6524
Tuz ve Biber	0.1	0.6876	0.5635	0.7626	0.7035	0.4099
	0.3	0.5330	0.5869	0.6989	0.5869	0.3772
	0.7	0.3808	0.5115	0.4980	0.4115	0.3350
Benek	0.1	0.3418	0.7594	0.5013	0.7594	0.3321
	0.3	0.2619	0.6830	0.3727	0.6830	0.4569
	0.7	0.2297	0.6517	0.3170	0.6517	0.5185

Diğer taraftan Çizelge 7.2. ve Çizelge 7.3., Çizelge 7.4., Çizelge 7.5. çizelgelerinde sırası ile iki parametrelili ve üç parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerinden elde edilen benzerlik değerleri sunulmuştur.

Çizelge 7.2. İki parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri

Gürültü Tipi	Gürültü Seviyesi	Benzerlik Çeşidi			
		6	7	8	9
Gauss	0.1	0.7070	0.7489	0, 7210	0.7666
	0.3	0.5508	0.5400	0,6050	0.5301
	0.7	0.4248	0.3861	0.3546	0.3244
Tuz ve Biber	0.1	0.7225	0.7418	0.8097	0.7506
	0.3	0.6215	0.6862	0.7952	0.6996
	0.7	0.5200	0.5298	0.7772	0.6204
Benek	0.1	0.8129	0.7073	0.7813	0.8117
	0.3	0.6976	0.5327	0.6983	0.6841
	0.7	0.5002	0.4536	0.6000	0.5235

Çizelge 7.3. İki parametrelı intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri

Gürültü Tipi	Gürültü Seviyesi	Benzerlik Çeşidi				
		10	11	12	13	14
Gauss	0.1	0.0608	0.7363	0.6466	0.6878	0.8272
	0.3	0.0052	0.6741	0.5517	0.5546	0.7102
	0.7	0.0052	0.5213	0.4725	0.4901	0.5733
Tuz ve Biber	0.1	0.0528	0.9477	0.9307	0.9090	0.8174
	0.3	0.0052	0.8232	0.7949	0.7323	0.6963
	0.7	0.0052	0.6670	0.6589	0.5001	0.4523
Benek	0.1	0.0313	0.7770	0.7008	0.8235	0.7339
	0.3	0.0052	0.6550	0.6765	0.6320	0.6126
	0.7	0.0052	0.5889	0.5265	0.4904	0.4057

Çizelge 7.4. Üç parametrelı intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri

Gürültü Tipi	Gürültü Seviyesi	Benzerlik Çeşidi			
		15	16	17	18
Gauss	0.1	0.8447	0.7357	0.8115	0.8746
	0.3	0.7485	0.6612	0.6742	0.7489
	0.7	0.7357	0.5932	0.5058	0.6109
Tuz ve Biber	0.1	0.9233	0.9425	0.9081	0.9713
	0.3	0.7679	0.8270	0.6359	0.7919
	0.7	0.6140	0.7125	0.5242	0.6300
Benek	0.1	0.9506	0.9319	0.8701	0.9594
	0.3	0.7647	0.7740	0.7592	0.8471
	0.7	0.5068	0.7138	0.6247	0.6941

Çizelge 7.5. Üç parametrelili intuitionistic fuzzy benzerlik ölçüleri ile elde edilen benzerlik dereceleri

Gürültü Tipi	Gürültü Seviyesi	Benzerlik Çeşidi				
		19	20	21	22	23
Gauss	0.1	0.8447	0.9447	0.844	0.9676	0.7566
	0.3	0.7498	0.8085	0.648	0.8301	0.6201
	0.7	0.4217	0.5327	0.535	0.5124	0.5844
Tuz ve Biber	0.1	0.8730	0.9232	0.923	0.9581	0.8682
	0.3	0.6801	0.7679	0.767	0.8203	0.7396
	0.7	0.5208	0.6137	0.613	0.5906	0.5004
Benek	0.1	0.8007	0.87063	0.8705	0.9487	0.9208
	0.3	0.6801	0.7647	0.6064	0.7440	0.8127
	0.7	0.5241	0.50687	0.506	0.5361	0.6915

Bu çizelgelerden gürültü derecesinin artmasının benzerlik derecesini azalttığını anlaşılmaktadır. Bunun yanında, görüntüdeki gürültü seviyesinin belirsizlik derecesi ile doğru orantılı olduğu ve bu yüzden özellikle yüksek gürültülü seviyeli görüntülerde üç parametrelili benzerlik ölçülerinin daha etkin olduğu görülmüştür. Aynı gürültü tipi ve gürültü seviyesinde, intuitionistic fuzzy benzerlik ölçülerinin fuzzy benzerlik ölçülerinden daha iyi tespit yaptığı ve gürültüye daha dayanıklı olduğu anlaşılır. Bununla beraber bazı benzerlik ölçülerinin (mesela 10. benzerlik ölçüsü) gürültü eklenmiş görüntüler üzerinde performansının iyi olmadığı gözlemlenmektedir.

KAYNAKLAR

- Abbas, S.E., 2005. On intuitionistic fuzzy compactness. *Information Sciences*, **173** (1): 75-91.
- Abdullah, L., Ismail W. K. W., 2012. Hamming distance in intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets: a comparative analysis. *Advances in Compt. Math. and its Appl.*, **1** (1): 7-11.
- Abu Safiya, A.S., A.A., Warner, M.W., 1996. Higher separation axioms in bifuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **79**: 367–372.
- Alaca C., Efe, H., 2006. On intuitionistic fuzzy Banach space. *Int.l J. of Pure and Applied Math.*, **32** (3): 345-361.
- Angelov, P., 1995. Crispification: defuzzification of intuitionistic fuzzy sets. *BUSEFAL*, **64**: 51-55.
- Ansari, A. Q., Siddiqui, S. A., Alvi, J. A., 2004. Matematical techniques to convert intuitionistic fuzzy sets into fuzzy sets. *Notes on IFS*, **10** (1): 13-17.
- Ansari, A. Q., Philip J., Siddiqui, S. A., Alvi, J. A., 2010. Fuzzification of intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. of Compt. Cognit.*, **8** (3): 51-52.
- Atanassov, K. T., 1986. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **20** (1): 87-96.
- Atanassov, K. T., 1988. Two operators on intuitionistic fuzzy sets. *Comptes Rendusde l'Academie bulgare des Sciences*, **41** (5): 35–38.
- Atanassov, K. T., 1989. More on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **33**: 37-45.
- Atanassov, K. T., 1998. Temporal intuitionistic fuzzy graphs. *Notes on IFS*, **4** (4): 59-61.
- Atanassov, K. T., 2001. Temporal intuitionistic fuzzy relations. *Flexible Query Answering Sys., Physica-Verlag*:153-160.
- Atanassov, K. T., 2003. Intuitionistic fuzzy sets past, present and future *EUSFLAT Conf.*: 12-19.
- Atanassov, K. T., Kacprzyk, Szmidt, E., Todorova, L. P., 2003. On separability of intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems—IFSA 2003*: 285-292.

- Atanassov, K. T., 2004. Temporal intuitionistic fuzzy sets (review and new results). *Proc. of the Thirty Second Spring of the Union of Bulg. Mathematicians*, 5 (8): 79–88.
- Atanassov, K. T., 2005. Answer to D. Dubois, S. Gottwald, P. Hajek, Kacprzyk J. , H. Prade's paper "Terminological difficulties in fuzzy set theory- the case of "Intuitionistic Fuzzy Set". *Fuzzy Sets and Systems*, 156: 496-499.
- Atanassov, K. T., Trifonov T., 2005. Towards combining two constructions of intuitionistic fuzzy sets. *Notes on IFS*, 11 (2): 1-11.
- Atanassov, K. T., 2010. Cantor's norms for intuitionistic fuzzy sets. *Issues in IFS and Gen. Nets*, 8: 36–39.
- Atanassov, K.T., 2011. On two topological operators over intuitionistic fuzzy sets. *Issues in IFS and Gen. Nets*, 8: 1–7.
- Atanassov, K.T., 2012. *On Intuitionistic Fuzzy Sets*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.No:54, Berlin. 324.
- Atanassova, V., 2010. Representation of fuzzy and intuitionistic fuzzy data by Radar charts. *Notes on IFS*, 16 (1): 21–26.
- Aygün H., Abbas, S. E., 2007. Some good extensions of compactness in Šostak's L-fuzzy topology, *Hacettepe J. of Math. and Stat.*, 36 (2): 115-125.
- Aytar, S., 2004. Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers. *Information Sciences*, 165: 129-138.
- Baccour, L., Alimi A. M., John, R. I., 2011. Relationship between intuitionistic fuzzy similarity measures. *IEEE Int. Conf. on Fuzzy Syst.*: 971-975.
- Baccour, L., Alimi A. M., John, R. I., 2013. Similarity measures for intuitionistic fuzzy sets: State of the art. *J. of Intelligent & Fuzzy Syst.* 24: 37-49.
- Baets, B. D., Janssens, S., Meyer, H. D., 2009. On the transitivity of a parametric family of cardinality-based similarity measures. *Int. J. of Approx. Reasoning*, 50: 104-116.
- Bayramov, S., Aras, Ç. G., 2004. *Genel Topoloji*. Çağlayan Kitapevi, İstanbul.
- Bednar, J., 2005. Fuzzy distances. *Kybernetika*, 41 (3): 336-344.
- Beg I., Ashraf S., 2009. Similarity measures for fuzzy sets. *Appl. And Comput. Math.*, 8 (2): 192-202.

- Beigi, M. A., Hajjari, T., Khani, E. G., 2015. A new index for fuzzy distance measure, ***Appl. Math. Inf. Sci.***, **9** (6): 3017-3025.
- Bloch, I., 1999. On fuzzy distances and their use in image processing under imprecision, ***Pattern Recognition***, **32**: 1873-1895.
- Boran, F. E., Genç, S., Akay, D., 2011. Personel selection based on intuitionistic fuzzy set. ***Human Factors and Erg.s in Man. & Ser. Ind.s***, **21**: 193-503.
- Boran, F. E., Akay, D., 2014. A biparametric similarity measure on intuitionistic fuzzy sets with applications to pattern recognition. ***Information Sciences***, **255**: 45-57.
- Boxer, L., 1997. On Hausdorff-like metrics for fuzzy sets. ***Pattern Recognition Letters***, **18**: 115-118.
- Brass, P., 2002. On the nonexistence of Hausdorff-like metrics for fuzzy sets. ***Pattern Recognition Letters***, **23**: 39-43.
- Burillo, H., Bustince, H., 1996. Entropy on intuitionistic fuzzy sets and on interval-valued fuzzy sets. ***Fuzzy Sets and Systems***, **78**: 305-316.
- Burillo, P., Bustince, H., Mohedano, V., 1994. Some definition of intuitionistic fuzzy number". first properties. ***Pro. of the 1st Workshop on Fuzzy Based Expert Syst.***: 53-55.
- Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., Orduna, R., 2007. Image thresholding computation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. ***J. of Comp.Intelligence and Int. Inf.***, **7** (2): 187-194.
- Çağman N., Deli İ., 2013. Similarity measures of intuitionistic fuzzy soft sets and their decision making, arXiv:math/1301.0456v3. <http://arxiv.org/abs/1301.0456v3>.
- Chaira, T., Ray, A. K., 2008. A new measure using intuitionistic fuzzy set theory and its application to edge detection. ***Applied Soft Computing***, **8**: 919-927.
- Chakrabarthy K., Biswas R., Nanda S., 1998. On fuzzy metric spaces. ***Fuzzy Sets and Systems***, **99**: 111-114.
- Chakraborty, C., Chakraborty, D., 2006. A theoretical development on a fuzzy distance measure for fuzzy numbers, ***Math. and Comp. Model.***, **43**: 254-261.
- Chang, C. G., Wang, D. W., Liu, Y. C., Qi, B.K., 2006. Fuzzy similarity measure based case retrieval method. ***Pro. of the 5th Int. Conf. on Meac. Learning and Cyber.***, Dalian: 2030-2034.

- Chang, C.L., 1968. Fuzzy topological spaces. *J. Math. Anal. and Appl.*, **24** (1): 182-190.
- Chattopadhyay K.C., Samanta, S.K., 1993. Fuzzy topology: Fuzzy closure operator, fuzzy compactness and fuzzy connectedness. *Fuzzy Sets and Systems*, **54**: 207-212.
- Chattopadhyay, K.C., Hazra R.N., Samanta S.K., 1992. Gradation of Openness: Fuzzy Topology. *Fuzzy Sets and Systems*, **49**: 237-242.
- Chaudhuri, B. B., Rosenfeld A., 1999. A modified Hausdorff distance between fuzzy sets. *Information Sciences*, **118**: 159-171.
- Chaudhuri, B. B., Rosenfeld A., 1999. On a metric distance between fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, **17**: 1157-1160.
- Chen, L. H., Tu, C. C., 2015. Time-validating based Atanassov's intuitionistic fuzzy decision-making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **23** (4): 743-756.
- Chen, S. H., Wang, C. C., 2006. Fuzzy distance of trapezoidal fuzzy numbers. *9th Joint Int. Con. on Information Sciences*,
- Chen, S. H., Wang, C. C., 2008. Properties of fuzzy distance of LR type fuzzy numbers. *Proc. of 7th Int. Conf. On Meachine Learning And Cybernetics*, Kumming: 3591-3594.
- Chen, S. M., 1995. Measures of similarity between vague set, *Fuzzy Sets and Systems*, **74**: 217-223.
- Chen, S.M., 1995. Measures of similarity between vague sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **74** (2): 217-223.
- Chen, S.M., 1997. Similarity measure between vague sets and between elements. *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, **27** (1): 153-158.
- Chen, T. Y., 2007. A note on distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric. *Fuzzy Sets and Systems*, **158**: 2523-2525.
- Chen, T. Y., Li, C. H., 2010. Determining objective weights with intuitionistic fuzzy entropy measyres: a comparative analysis. *Information Sciences*, **180**: 4207-4222.
- Cheng, C. H., 1998. A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method. *Fuzzy Sets and Systems*, **95**: 307-317.

- Çoker, D., Eş, A., H., 1995. On fuzzy compactness in intuitionistic fuzzy topological spaces. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **3** (4): 899-909.
- Çoker, D., Demirci M., 1996. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces in Šostak's sense. *Busefal*, **67**: 67–76.
- Çoker, D., 1997. An introduction to intuitionistic fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **88** (1): 81-89.
- Congxin, W., Hongliang, L., Xuekun, R., 2009. A note on the sendograph metric of fuzzy numbers. *Information Sciences*, **179**: 3410-3417.
- Cornelis, C., Kerre, E., 2003. Inclusion measure in intuitionistic fuzzy set theory. *Sym. and Quant. Appr. to Reas. with Unc.* Springer Berlin Heidelberg: 345-356.
- Couso, I., Garrido L., Sanchez, L., 2013. Similarity and dissimilarity measures between fuzzy sets: a formal relational study, *Information Sciences*, **229**: 35-46.
- Dasgupta, P. B., 2014. Analytical comparison of noise reduction filters for image restoration using SNR estimation. *Int. J. of Comp. Trends and Tech.*, **17** (3): 121-124.
- De Luca, A., Termini, S. 1972. A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory, *Inform. Control*, **20**: 30-35.
- De, S. K., Biswas R., Roy, R. A., 2000. Some operations on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **114**: 477-484.
- Demirci, M., 1997. On several types of compactness in smooth topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **90** (1): 83-88.
- Deng, G., Jiang Y., Fu, J., 2015. Monotonic similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and their relationship with entropy and inclusion measure. *Information Sciences*, **316**: 348-369.
- Deng, Z., 1982. Fuzzy pseudo-metric spaces. *J. of Math. Anal. and App.*, **86**: 74-95.
- Deschrijver, G., Cornelis, C., Kerre, E. E., 2004. On the representation of intuitionistic fuzzy t-norms and t-conorms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **12** (1): 45-61.
- Deschrijver, G., Kerre, E. E., 2003. On the relationship between some extensions of fuzzy set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, **133**: 227-235.
- Diamond, P., Kloeden, P., 1989. Characterization of compact subsets of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **29**: 341-348.

- Diamond, P., Kloeden P., 1994. *Metric spaces of fuzzy sets*. World Scientific. Singapore. 178.
- Diamond, P., Kloeden, P., 1999. Metric spaces of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **100**: 63-71.
- Diamond, P., 1988. Fuzzy least squares. *Information sciences*, **46**: 141-157.
- Du, W. S., Hu, B. Q., 2015. Aggregation distance measure and its induced similarity measure between intuitionistic fuzzy sets. *Pattern Recog. Lett.*, **60**: 65-71.
- Dubey, D., Mehra, A., 2011. Linear programming with triangular intuitionistic fuzzy numbers. *EUSFLAT-LFA*, 563-569.
- Dubois, D., Gottwald, S., Hajek, P., Kacprzyk, J., Prade, H., 2005. Terminological difficulties in fuzzy set theory- the case of “Intuitionistic Fuzzy Set”. *Fuzzy Sets and Systems*, **156**: 485-491.
- Dymova, L., Sevastjanov, P., 2010. An interpretation of intuitionistic fuzzy sets in terms of evidence theory: decision making aspect. *Knowledge-Based Systems*, **23**: 772-782.
- Efe, H., Yıldız, C., 2006. On the Hausdorff intuitionistic fuzzy metric on compact sets. *Int. J. of Pure and Applied Math.*, **31** (2): 143-155.
- El-Arish, I. M. H., 2003. Completely continuous functions in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Czech. Math. Journal*, **53** (128): 793-803.
- Erceg, M. A., 1979. Metric spaces in fuzzy set theory. *J. of Math. Anal. and Appl.*, **69**: 205-230.
- Ertürk, R., Demirci, M. 1998. On the compactness in fuzzy topological spaces in Šostak’s sense. *Matematicki Vesnik*, **50** (3): 75–81.
- Eş, A. H., Çoker, D., 1997. On several types of degree of fuzzy compactness, *Fuzzy Sets and Systems*, **87**: 349-359.
- Fan, J. I., 1998. Note on Hausdorff-like metrics for fuzzy sets. *Pattern Recognition Letters*, **19**: 793-796.
- Fan, J., Xie, W.X., Pei, J., 1999. Subsethood measure: new definitions. *Fuzzy Sets and Systems*, **106**: 201-209.
- Fan, J., Xie, W.X., 1999. Distance measure and induced fuzzy entropy. *Fuzzy Sets and Systems*, **104**: 305-314.

- Fan, J., Xie, W., 1999. Some notes on similarity measure and proximity measure. *Fuzzy Sets and Systems*, **101**: 403-412.
- Fan, J., Ma, Y.L., Xie, W.X., 2001. On some properties of distance measures. *Fuzzy Sets and Systems*, **117**: 355-361.
- Fan, J. L., Ma, Y. L., 2002. Some new fuzzy entropy formulas, *Fuzzy sets and Systems*, **128**: 277-284
- Fan, T., 2004. On the compactness of fuzzy numbers with sendograph metric. *Fuzzy Sets and Systems*, **143**: 471-477,
- Fan, T., Wang, G., 2004. Endographic approach on supremum and infimum of fuzzy numbers, *Information Sciences*, **159**: 221-231,
- Fan, T., 2008. On the compactness of fuzzy number space with respect to endograph metric. *5th Int. Conf. on Fuzzy Systems and Know. Discovery*: 362-366.
- Fan, T., Fan, L., 2009. On the completions of fuzzy number space with respect to sendograph metric. *FSKD.09 Proc. of the 6th Int. Conf. on Fuzzy Systems and Knowledge Dis.*, **6**: 353-357,
- Fang, J., 2006. Sums of L -Fuzzy Topological Spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **157**: 739- 754.
- Fang, J., Yue, Y., 2007. Base and Subbase in I -Fuzzy Topological Spaces. *J.Math Res. Exposition*, **26**: 89-95.
- Farhadina, B., 2013. A theoretical development on the entropy of interval-valued fuzzy sets based on the intuitionistic distance and its relationship with similarity measure. *Knowledge-Based Systems*, **30**: 79-84.
- Fashandi, H., Peters, J. F., 2013. Crisp and Fuzzy Topological Interior and Closure Operators with Inclusion Degree: Theory and Applications. *Fundamenta Informaticae*, **122**: 207-225.
- George, A., Veermani, P., 1997. On some results of analysis for fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **90**: 365-368.
- Gerla, G., Volpe R., 1986. The definition of distance and diameter in fuzzy set theory. *Stutia Univ. Babes-Bolyai Math.* **31**: 21-26.
- Goetschel, R., Voxman, W., 1983. Topological properties of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, **10**: 87-99.

- Gonzales, R. C., Woods, R. E., 2002. **Digital Image Processing**, Prentice Hall. New Jersey, USA. 966.
- Greco, G. H., 2006. Sendograph metric and relatively compact sets of fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, 157: 286-291.
- Gregori, V., Veermani, P., 1994. On some results in fuzzy metric spaces. **Fuzzy Sets and Systems**, 64: 395-399.
- Gregori, V., Romaguera S., 2000. Some properties of fuzzy metric spaces. **Fuzzy Sets and Systems**, 115: 485-489.
- Gregori V., Romaguera, S., 2004. Charancterizing completable fuzzy metric spaces. **Fuzzy Sets and Systems**, 144: 411-420.
- Gregori, V., Romaguera S., Veermani, P., 2006. A note on intuitionistic fuzzy metric space. **Chaos Solitons and Fractals**, 28: 902-905.
- Gregori, V., Morillas S., Sapena, A., 2011. Examples of fuzzy metrics and applications. **Fuzzy Sets and Systems**, 170: 95-111.
- Grzegorzewsky, P., 2003. Distances and Orderings in a Family of Intuitionistic Fuzzy Numbers. **Proc. of the EUSFLAT Conference**: 223–227.
- Grzegorzewski, P., Mrowka, E., 2004. Subsethood measure for intuitionistic fuzzy sets. **Proc. of IEEE International Conference on Fuzzy Systems**, 1: 139 – 142.
- Grzegorzewsky, P., 2004. Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric. **Fuzzy Sets and Systems** 148: 319-328.
- Guha, D., Chakraborty, D., 2010. A theoretical development of distance measure for intuitionistic fuzzy numbers, **Int. J. of Math. and Math. Sci.**: 1-25.
- Guo, K., Song, Q., 2014. On the entropy for Atanassov's intuitionistic fuzzy sets: an interpretation from the perspective of amount of knowledge. **Applied Soft Computing**, 24: 328-340.
- Hadjistoykov, P. P., Atanassov, K. T., 2014. On temporal intuitionistic fuzzy cognitive maps. **Comptes rendus de l'academie bulgare des sciences**, 67(9): 1233-1240.
- Hai, X. Y., Xing, L. H., Biao, S. K., 2011. The cut sets, decomposition theorems and representation theorems on intuitionistic fuzzy sets and interval valued fuzzy sets. **Science China Information Sciences**, 54: 91-110.

- Hajjari, T., 2010. Measuring distance of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers. *AIP Conference Proceedings*, **1309**: 346-356.
- Hanci J., Misik, L., Toth, J. T., 2010. Cluster points of sequences of fuzzy real numbers. *Soft Comput.*, **14**: 399-404.
- Hazra, R.N., Samanta, S. K., Chattopadhyay, K.C., 1992. Fuzzy topology redefined, *Fuzzy Sets and Systems*, **45**: 79–82.
- Höhle, A., Šostak, A., 1995. A general theory of fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **73**: 131–149.
- Hong, D.H., Kim, C., 1999. A note on similarity measures between vague sets and between elements. *Information Sciences*, **115** (4): 83–96.
- Huang, G., Liu, Y., Wang, X., 2005. New Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Proceedings of fourth international conference on machine learning and cybernetics*, Guangzhou: 18-21.
- Huang, G. S., 2007. A new fuzzy entropy for intuitionistic fuzzy sets. . *Proc. of Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, FSKD 2007*: 57 – 61.
- Hung ,W. L., Yang, M. S., 2004. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on Hausdorff distance. *Pattern Recognition Letters*, **23**: 1603-1611.
- Hung, W. L., Yang, M. S., 2005. On the J- divergence of intuitionistic fuzzy sets with its application to pattern recognition. *Information Sciences*, **178**: 1641-1650.
- Hung, W. L., Yang, M. S., 2006. Fuzzy entropy on intuitionistic fuzzy sets. *Int. Jour. Of Intell. Syst.* **21**: 443-451.
- Hung, W. L., Yang, M. S., 2007. Similarity measures of intuitionistic fuzzy sets based on L_p metric. *International Journal of Approximate Reasoning*, **46**: 120-136.
- Hung, W. L., Yang, M. S., 2008. On Similarity Measures Between Intuitionistic Fuzzy Sets. *International Journal of Intelligent Systems*, **23**: 364-383.
- Hwang, C. M., Yang, M. S., Modified cosine similarity measure between intuitionistic fuzzy sets. *Artificial Intelligence and Computational Intelligence*. Springer Berlin Heidelberg: 285-293.
- Hwang, C.H., Yang, M.S., 2008. On entropy of fuzzy sets. *International Journal of Uncertainty*, **16** (4): 519-527.

- Intrapai boon P., 2014. New similarity measures for intuitionistic fuzzy sets. *Applied Math. Sci.*, **8** (45): 2239-2250.
- Jain, R. Murthy, S. N. J., Chen, P.L., 1995. Similarity measures for databases. *Proceedings of 1995 IEEE*: 1247-1254.
- Johanyak, Z. S., Kovacs, S., 2005. Distance based similarity measures of fuzzy sets. *Proceedings of SAMI* : 265-276.
- Joshi, D., Kumar, S., 2014. Intuitionistic fuzzy entropy and distance measure based TOPSIS method for multi-criteria decision making. *Egyptian Informatics Journal*, **15**: 97-104.
- Julian, P., Hung K. C., Lin, S. J., 2012. On the Mitchell similarity measure and its application to pattern recognition. *Pattern Recog. Lett.*, **33**: 1219-1223.
- Kaleva, O., Seikkala, S., 1980. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **12**: 215-229.
- Kaleva, O., 1985. Completion of fuzzy metric spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **109**: 194-198
- Kaleva, O., 1986. On the convergence of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **17**: 53-65.
- Kaleva, O., 2008. A comment on the completion of fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **159**: 2190-2192.
- Kaleva, O., Kauhanen J., 2014. A note on compactness in a fuzzy metric space. *Fuzzy Sets and Systems*, **238**: 135-139.
- Kandil, A., Nouh, A.A., El-Sheikh S.A., 1995. On fuzzy bitopological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **74**: 353–363.
- Kaufmann, A., 1975. *Introduction to the Theory of Fuzzy Sets*. Academic Press, New York.
- Khatibi, V., Montazer, G. A., 2009. Intuitionistic fuzzy set vs. fuzzy set application in medical pattern recognition, *Artificial Intelligence in Medicine*, **47**: 43-52.
- Kim Y. I., Lee K. H., 2001. A pseudo metric on fuzzy sets based on the satisfaction function with viewpoint. *The 10th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, **2**: 654-657.
- Kim, Y. C., Abbas, S. E., 2003. Some good extensions of compactness, *Jour. of Korean Inst. of Intell. Syst.*, **13** (5): 614-620.

- Kim, Y. C., Abbas, S. E., 2005. Connectedness in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Commun. Korean Math. Soc.*, **20** (1): 117-134.
- Kimi J. T., Lee, S. J, 2014. Intuitionistic Smooth Bitopological Spaces and Continuity. *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, **14**: 49-56.
- Kishore, M.V.K.R., Parvaiz, M., 2004. On supported endographs and fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **148**: 329-332.
- Kloeden, P.E., 1980. Compact supported sendographs and fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* **4**: 193–201.
- Koczy, L. T., Hirota, K., 1993. Ordering, distance and closeness of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **59**: 281-293.
- Kosko, B., 1986. Fuzzy entropy and conditioning. *Information Sciences*, **40**: 165-174.
- Kovacs, L., Ratsaby 2014, J., A new pseudo-metric for fuzzy sets, A New Pseudo-metric for Fuzzy Sets. *Artificial Intelligence and Soft Computing*: 205-206.
- Kramosil I., Michalek J., 1975. Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika*, **11** (5): 336-344.
- Kupka, J., 2011. On fuzzifications of discrete dynamical systems. *Information Sciences*, **181**: 2858-2872.
- Kutlu F., Fan, T., Bilgin, T., 2015. Sendograph metric on intuitionistic fuzzy number space, *Notes on IFS*, **21** (4): 23-33.
- Kutukcu, S., 2007. Topics in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Journal of Computational Analysis and Applications*, **9** (2): 173-180.
- Lee, E.P., 2004. Semiopen sets on intuitionistic fuzzy topological spaces in Šostak's sense. *J. Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, **14** (2): 234-238
- Lee, S. H., Kim, J. M., Choi, Y. K., 2006. Similarity measure construction using fuzzy entropy and distance measure. *Computational Intelligence*: 952-958.
- Lee, S. H., Park, H., Park, W. J., 2008. Similarity computation between fuzzy set and crisp set with similarity measure based on distance. *Information Retrieval Technology*: 644-649.
- Lee, S. H., Pedrycz W., Sohn, G., 2009. Desing of similarity and dissimilarity measures for fuzzy sets on the basis of distance measure. *International Journal of Fuzzy Systems*, **11** (2): 67-72.

- Lee, S. J., Lee E.P., 2000. The category of intuitionistic fuzzy topological spaces. **Bull. Korean Math. Soc.**, **37**: 63-76.
- Lee, S. J., Kim, J. T., 2012. Some properties of intuitionistic fuzzy bitopological spaces. **Soft Computing and Intelligent Systems (SCIS) and 13th International Symposium on Advanced Intelligent Systems (ISIS), 2012 Joint 6th International Conference on. IEEE**:1040-1045.
- Li, J., Deng, G., Li, H., Zeng, W., 2012. The relationship between similarity measure and entropy of intuitionistic fuzzy sets. **Information Sciences**, **188**: 314-321.
- Li, Y., Olson, D. L., Qin Z., 2007. Similarity measures between intuitionistic fuzzy (vague) sets: A comparative analysis. **Pattern Recog. Lett.**, **28**: 278-285.
- Li, Y., Qin, K., He, X., 2013. Relations among similarity measures, subethood measure and fuzzy entropy. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, **6** (3): 411-422.
- Liang, C., Yan C., 2014. Base and subbase in intuitionistic *I*-fuzzy topological spaces, **Hacettepe Jour. of Math. and Stat.**, **43** (2): 227-243.
- Liang, Z., Shi, P., 2003. Similarity measures on intuitionistic fuzzy sets. **Pattern Recogn. Lett.** **24** (15): 2687–2693.
- Liu X., 1992. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. **Fuzzy Sets and Systems**, **52**: 305-318.
- Liu, H. W., 2005. New similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and between element. **Mathematical and Computer Modelling**, **42**: 61-70.
- Liu, X., 1992. Entropy, distance measure and similarity measure of fuzzy sets and their relations. **Fuzzy and Systems**, **52**: 305-318.
- Lowen, R., 1976. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. **Jour. of Math. Anal. and Appl.**, **56**: 621-633.
- Lupianez, F. G., 2006. Nets and filters in intuitionistic fuzzy topological spaces, **Information Sciences**, **176**: 2396-2404.
- Lv Y., Guo, S., 2010. Relationships among fuzzy entropy, similarity measure and distance measure of intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Information and Engineering**, **78**: 539-548.

- Mahapatra, G. S., Roy, T. K., 2009. Reliability evaluation using triangular intuitionistic fuzzy numbers arithmetic operations. *World Academy of Science, Engineering and Technology*, **50**: 574-581.
- Marinov, E., Szmidt, E., Kacprzyk, J., Tsvetkov, R., 2012. A modified weighted Hausdorff between intuitionistic fuzzy sets. *Proc. of 6th IEEE Int. Conf. Intelligent Syst.*, 138 - 141.
- Marita, T., 2012. Image Processing - Laboratory 10: Noise modeling and digital image filtering. *Laboratory Notes*, <http://users.utcluj.ro/~tmarita/IPL/IPLab/PI-L10e.pdf>.
- Melliani, S., Elomari, M., Chadli, L. S., Ettoussi, R., 2015. Intuitionistic fuzzy metric space. *Notes on IFS*, **21** (1): 43-53.
- Melo-Pinto, P., Couto, P., Bustince, H., Barrenechea, E., Pagola, M., 2013. Image segmentation using Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Expert Systems with Applications*, **40**: 15-26
- Min, W. K., Park, C., 2005. Some results on intuitionistic fuzzy topological spaces defined by intuitionistic gradation of openness. *Commun Korean Math Soc.*, **20** (4): 791-801.
- Minana J. J., Šostak, A., 2015. Fuzzyfying topology induced by a strong fuzzy metric. *Fuzzy Sets and Systems*, **64**: 395-399.
- Ming, H. C., 1985. Fuzzy topological spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **110**:141-178.
- Mizumoto, M., Tanaka, K., 1981. Fuzzy sets and their operations. *Inform. Cont.*, **48** (1), 30-48.
- Mondal, T.K., Samanta, S.K., 2002. On intuitionistic gradation of openness. *Fuzzy Sets and Systems*, **131**: 323-336.
- Nanda, S., 1989. On sequence of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems* **33** (1): 123-126.
- Nguyen, H., 2016. A novel similarity/dissimilarity measure for intuitionistic fuzzy sets and its application in pattern recognition. *Expert Systems with Application*, **45**: 97-107.

- Pal, N. R., Bustince H., Pagola, M., Mukherjee, U. K., Goswami, D. P., Beliakov, G., 2013. Uncertainties with Atanassov's intuitionistic fuzzy sets: fuzziness and lack of knowledge. *Information Sciences*, **228**: 61-74.
- Papakostas, G. A., Hatzimichailidis, A. G., Kaburllos, V. G., 2013. Distance and similarity measures between intuitionistic fuzzy sets: a comparative analysis from a pattern recognition point of view. *Pattern Recog. Lett.*, **34**: 1609-1622.
- Pappis, C. P., Karacapilidis, N.I., 1993. A comparative assessment of measures of similarity of fuzzy values. *Fuzzy Sets Systems*, **56** (2): 171–174.
- Park, C. K., Min W. K., Kim M. H., 2003. α – Compactness in Smooth Topological Spaces. *IJMMS*, **46**:2897-2906.
- Park, J. H., 2004. Intuitionistic fuzzy metric spaces. *Chaos Solitions and Fractals*, **22**: 1039-1046.
- Park, J. H., Park, J. S., Kwun Y. C., Lim K. 2007. New similarity measures on intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Inf. and Eng.*, **40**: 22-30.
- Park, J. H., 2009. Some properties and theorems on intuitionistic fuzzy metric space, *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*, **9** (2): 137-140.
- Parkhedkar, S. R., Dubey, Y. K., 2013. Brain tumour detection of MR images using intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. of Comp.App.* : 30-35.
- Parvahati, R., Malahati, C., 2012. Arithmetic operations on symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy number. *International Journal of Soft Computing and Engineering*, **2** (2): 268-273.
- Parvathi, R., Atanassova, V., 2012. Intuitionistic fuzzy statistical tools for filters in image processing. *6th IEEE International Conference Intelligent Systems*: 150 - 152.
- Parvathi, R., Geetha, S. P., 2009. A note on properties of temporal intuitionistic fuzzy sets, *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, **15** (1): 42–48.
- Parvathi, R., Malathi, C., 2012. Arithmetic operations on symmetric trapezoidal intuitionistic fuzzy numbers. *Int. Jour. of Soft. Comp. and Eng.*, **2** (2): 268-273.
- Puri M. L., 1986. Fuzzy random variables. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **144**: 409-422.

- Ramadan, A. A., Abbas, S.E., Abd el-latif, A. A., 2004. Compactness in fuzzy topological spaces. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*: 19-32.
- Ramadan, A.A., Kim, Y.C., Abbas, S.E., 2005. Compactness in intuitionistic gradation of openness. *The Journal of Fuzzy Mathematics*, **13** (3): 581-600.
- Roldan, A., Martinez-Moreno, J., Roldan, C., 2013. On interrelationships between fuzzy metric structures. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, **10** (2): 133-150.
- Roopkumar, R., Kalaivani, C., 2010. Continuity of intuitionistic fuzzy proper functions on intuitionistic smooth fuzzy topological spaces. *Notes on IFS*, **16** (3): 1-21.
- Saadati, R., 2005. On the intuitionistic fuzzy topological (metric and normed) spaces. arXiv:math/0501149. <http://arxiv.org/abs/math/0501149>.
- Saadati, R., Park, J. H., 2006. Intuitionistic fuzzy Euclidean normed spaces. *Communications in Mathematical Analysis*, **1** (2): 85-90.
- Santini, S., Jain, R., 1999. Similarity measures. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Int.*, **21** (2): 871-883.
- Sebastian, S., Philip, J., 2014. I-fuzzification of fuzzy sets. *J. of Chemical, Biological and Physical Sci.*, **4** (3):2519-2523.
- Seikh, M. R., Nayak, P., Pal, M., 2012. Generalized triangular fuzzy number in intuitionistic fuzzy environment. *International Journal of Engineering Research and Development*, **5**: 08-13.
- Sharma, M. K., Dangwal, R., Sharma V., Kumar V., 2013. Similarity measure of interval valued vague sets to multiple attribute decision making. *Int. Jour. Of App. or Innvation in Eng. & Managment*, **2** (4): 318-330.
- Sharma, P. K., (α, β) – cut of intuitionistic fuzzy modules. *Int. J. of Math.Sci. and App.*, **1** (3): 1489-1492.
- Shojaei, H., 2014. Notes and examples on intuitionistic fuzzy metric space. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **8**: 187-192.
- Singh, P., Jain, L., 2013. Noise reduction in ultrasound images using wavelet and spatial filtering techniques. *Proceedings of the 2nd International Conference on Information Management in the Knowledge Economy*: 58-63.
- Šostak, A., 1985. On a fuzzy topological structure. *Rend Circ. Mat. Palermo Supp.*, **11** (2): 89-103.

- Šostak, A., 1989. Two decades of fuzzy topology: basic ideas notions and results. *Russian Math. Surveys*, **44** (6): 125-186.
- Šostak, A., 1996. Basic structures of fuzzy topology. *J.Math. Sci.*, **78**: 662-701.
- Srivastava R., Singh A. K., 2011. On α – and α^* – Separation axioms in intuitionistic fuzzy topological spaces. *Notes on IFS*, **17** (2): 35-43.
- Sudha, S., Suresh, G. R., Sukanesh, R., 2009. Speckle noise reduction in ultrasound images by wavelet thresholding based on weighted variance. *International Journal of Computer Theory and Engineering*, **1** (1): 1793-8201
- Syau, Y., 1997. Sequences in a fuzzy metric space. *Computers Math. Applic.*, **33** (6): 73-76.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2000. Distances between intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **114**: 505-518.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2001. Entropy for intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **118**: 467-477.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2005. Distances between intuitionistic fuzzy sets and their applications in reasoning. *Studies in Comp. Int.*, **2**: 101-116.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2006. New measures of entropy for intuitionistic fuzzy sets. *Notes on IFS*, **11** (2): 12-20.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2007. Some problems with entropy measures for Atanassov intuitionistic fuzzy sets. *Applications of Fuzzy Sets Theory*, **4578**:291-297.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2008. Dilemmas with distances between intuitionistic fuzzy sets: straightforward approaches may not work. *Studies in Comp. Intelligence*, **109**: 415-430.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2009. A note on the Hausdorff distance between Atanassov's intuitionistic fuzzy set, *NIFS*, **15**: 1-12.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., 2011. Intuitionistic fuzzy sets - two and three term representations in the context of a Hausdorff distance. *ACTA Universitatis Matthiae Belii*, **19**: 53-62.
- Szmidt, E., Kacprzyk, J., Bujnowski, P., 2014. How to measure the amount of knowledge conveyed by Atanassov's intuitionistic fuzzy sets. *Information Sciences*, **257**: 276–285.

- Szmidt, E., 2014. *Distances and Similarity in Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer International Publishing, Switzerland. 148.
- Tanev, D., 1995. On an intuitionistic fuzzy norm. *Notes on IFS*, **1** (1): 25–26.
- Tcvetkov, R. T., Szmidt E., Kacprzyk, J., 2010. On some issues related to the distances between the Atanassov intuitionistic fuzzy sets described on universe with weights. *NIFS*, **16** (2): 22-30.
- Tong, X. J., Zhang S. M., Zhou, L., Huang Q. M., 2005. Similarity and nearness of fuzzy sets. *Proceedings of the Fourth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, Guangzhou: 2668-2670.
- Tran, L., Duckstein, L., 2002. Comparison of fuzzy numbers using a fuzzy distance measure. *Fuzzy Sets and Systems*, **130**: 331-341.
- Trutsching, W., 2010. Characterization of the sendograph-convergence of fuzzy sets by means of their L_p and levelwise convergence. *Fuzzy Sets and Systems*, **16**: 1064-1077.
- Tung, C. T., Liu S., Wang, B. S., 2013. A comment on “On the Mitchell similarity measure and its application to pattern recognition”. *Pattern Recog. Lett.*, **34**: 453-455.
- Tversky, A., 1977. Features of similarity. *Psychological Review*, **84** (4): 327-352.
- Varol, B. P., Aygün, H., 2012. Intuitionistic fuzzy metric groups. *International Journal of Fuzzy Systems*, **14** (3): 454-461.
- Veermani, V., Batulan, R., 2010. Some characterisations of α – cut in intuitionistic fuzzy set theory. <http://vixra.org/pdf/1004.0112v1.pdf>.
- Vlachos, I. K., Sergiadis, G. D., 2007. Intuitionistic fuzzy information- applications to pattern recognition. *Pattern Recog. Lett.*, **28**: 197-206.
- Vlachos, I. K., Sergiadis, G.D., 2008. Intuitionistic fuzzy image processing. *StudFuzz*, **210**: 383-414.
- Voxman, W., 1998. Some remarks on distance between fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, **100**: 353-365.
- Wang, G., He, Y. Y., 2000. Intuitionistic fuzzy sets and L -fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **110**: 271-274.
- Wang, G., Chen L., 2005. Some characterization theorems on induced $I(L)$ -topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **154**:141-150.

- Wang, W. J., 1997. New similarity measures on fuzzy sets and on elements. *Fuzzy Sets and Systems*, **85**: 305-309.
- Wang, X. F., Wang J. Q., Yang, W. E., 2012. General fuzzy number intuitionistic fuzzy arithmetic aggregation operators based on fuzzy structured element. *Control and Decision Conference (CCDC), IEEE*: 2640-2645.
- Warner, M.W., Mclean, R. G., 1993. On compact Hausdorff L -fuzzy spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **56**: 103-110.
- Williams, J., Steele N., 2002. Difference, distance and similarity as a basis for fuzzy decision support based on prototypical decision classes. *Fuzzy Sets and Systems*, **104**: 35-46.
- Wu, C., Li, H., Xuekun R., 2009. A note on the sendograph metric on fuzzy numbers. *Information Sciences*, **179**: 3410-3417.
- Xia, M., Xu Z., 2010. Some new similarity measures for intuitionistic fuzzy values and their application in group decision making. *J. Syst. Sci. Syst. Eng.*, **19** (4): 430-452.
- Xu, R., Li, C., 2001. Multidimensional least-squares fitting with a fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, **119**: 215-223.
- Xu, Z., 2007. Some similarity measures of intuitionistic fuzzy sets and their applications to multiple attribute decision making. *Fuzzy Optim. Decis. Making*, **6**: 109-121.
- Xu, Z. S., Chen, J., 2008. An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets. *Fuzziness and Knowledge-Based Systems.*, **16** (4): 529-555.
- Yang, Z., Zhang, L. 2009. Topological structure of fuzzy sets with endograph metric. *Fuzzy Sets and Systems*, **160**: 2937-2946.
- Yang, Y., Chiclana, F., 2012. Consistency of 2D and 3D distances of intuitionistic fuzzy sets. *Expert Syst. with App.*, **39**: 8665-8670.
- Yang, Y., Chiclana, F., 2012. Intuitionistic fuzzy sets: spherical representation and distances. *Int. J. of Int. Syst.*, **24**: 399-420.
- Ye, J., 2010. Two effective measures of intuitionistic fuzzy entropy. *Computing*, **87** (1): 55-62.
- Ye, J., 2011. Cosine similarity measures for intuitionistic fuzzy sets and their applications. *Math. And Comp. Modell.*, **53**: 91-97.

- Yıldız, C., Sharma, S., Kutukcu, S., 2010. On some theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces. *Missouri J. Math. Sci.*, **22**(1):44-49.
- Yılmaz, S., Çuvalcıoğlu, G., 2014. On level operators for temporal intuitionistic fuzzy sets. *Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets*, **20**: 6–15.
- Ying-Ming, L., Mao-Kang, L., 1997. *Fuzzy Topology*, World Scientific, Singapore. 364.
- Yong, D., Wenkang, S., Feng, D., Qi, L., 2004. A new similarity measure of generalized fuzzy numbers and its application to pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*, **25**: 875-883.
- Young, V. R., 1996. Fuzzy subsethood. *Fuzzy Sets and Systems*, **77**: 371-384.
- Yue, Y., Fang J., 2005. Generated I - fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **154** (1):103-117.
- Yue, Y., 2007. Lattice-valued induced fuzzy topological spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, **15** (1): 1461-1471
- Yusoff, B., Taib I., Abdullah L., Wahab A., 2011. A new similarity measures on intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. of Compt. and Math.Sci.* **5**(2): 70-77.
- Zadeh, L. A., 1965. Fuzzy sets. *Inform. Contr.*, **8**: 338-353.
- Zadeh, L.A., 1971. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences*, **3**: 177–200.
- Zeng, W., Li H. X., 2006. Inclusion measures, similarity measures and the fuzziness of fuzzy sets and their relations. *International Journal of Intelligent Systems*, **21**: 639-653.
- Zeng, W., Feng, Q., Li, H. X., 2006. Relationship between inclusion measure and entropy of fuzzy sets. *Rough Sets and Knowledge Technology*: 333-340.
- Zeng W., Guo, P., 2008. Normalized distance, similarity measure, inclusion measure and entropy of interval-valued fuzzy sets and their relationship. *Information Sci.*, **178**: 1334-1342.
- Zeng, S., 2013. Some intuitionistic fuzzy weighted distance measures and their application to group decision making. *Group Decis. Negot.*, **22**: 281-298.
- Zhang, C., Fu, H., 2006. Similarity measures on three kinds of fuzzy sets. *Pattern Recog. Lett.*, **27**: 1307-1317.

- Zhang, D., Ouyang, H., Lee, E. S., Yager, R. R., 1993. On the convergence of fuzzy sets and the completeness of the space of fuzzy sets. *J. of Math. Anal. and App.*, **172**: 274-288.
- Zhang, D., 2011. A natural topology for fuzzy numbers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **264**: 344-353.
- Zhang, H., Dong, M., Zhang, W., Song, X., 2007. Inclusion measure and similarity measure of intuitionistic and interval-valued fuzzy sets. *Proceedings of the 2007 International Conference on Intelligent Systems and Knowledge Engineering (ISKE2007)*: 1-7.
- Zhang, H., Yu, L., 2013. New distance measures between intuitionistic fuzzy sets and interval-valued fuzzy sets. *Information Sciences*, **245**: 181-196.
- Zhang Q., Huang, Y., Xing, H., Liu, F., 2012. Distance measure, information entropy and inclusion measure of intuitionistic fuzzy sets and their relations. *Int. Jour. of Adv. in Comp. Tech.*, **4**(15): 480-487.
- Zhang, Q., Liu F., Wu, L., Luo, S., 2012. Information entropy, similarity measures and inclusion measure of intuitionistic fuzzy sets. *Inf. Comp. and App.*, **307**: 392-398.
- Zimmermann, H. J., 2001. *Fuzzy Set Theory and its Applications*, Springer. U.S.A., New York. 514.

ÖZ GEÇMİŞ

1986 yılında Van'da dünyaya gelen Fatih KUTLU ilköğrenimini Ulupamir Köyü İlköğretim Okulu'nda, Ortaöğrenimini ise Ankara Bahçelievler Cumhuriyet Lisesi'nde tamamladı. 2004 yılında İnönü Üniversitesi Adıyaman Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2008 yılında buradan mezun oldu. Aynı sene Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2011 yılında buradan mezun oldu. Ayrıca 2009 yılı Nisan ayından 2010 yılı Kasım ayına kadar Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde araştırma görevlisi olarak çalıştı. 2010 yılı Kasım ayından itibaren Yüzüncü Yıl Üniversitesi Erciş Meslek Yüksekokulu'nda öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.

YÜZÜNCÜ YIL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
LİSANSÜSTÜ TEZ ORJİNALLİK RAPORU

Tarih: 19/10/2016

Tez Başlığı / Konusu: Fuzzy, Intuitionistic Fuzzy ve Temporal Intuitionistic Fuzzy Küme Teorisinde Uzaklık - Benzerlik Ölçüleri ve Topolojik Özellikler/ Fuzzy, intuitionistic fuzzy ve temporal intuitionistic fuzzy kümeler teorisinde tanımlanan uzaklık ve benzerlik ölçülerinin ve bu ölçülerin topolojik özelliklerinin incelenmesi

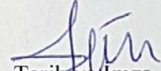
Yukarıda başlığı/konusu belirlenen tez çalışmamın Kapak sayfası, Giriş, Ana bölümler ve Sonuç bölümlerinden oluşan toplam 233 sayfalık kısmına ilişkin, 29/09/2016 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından Unplag intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtreleme uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 5.03 (beş nokta sıfır üç) dir.

Uygulanan filtreler aşağıda verilmiştir:

- Kabul ve onay sayfası hariç,
- Teşekkür hariç,
- İçindekiler hariç,
- Simge ve kısaltmalar hariç,
- Gereç ve yöntemler hariç,
- Kaynakça hariç,
- Alıntılar hariç,
- Tezden çıkan yayınlar hariç,
- 7 kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç (Limit inatch size to 7 words)

Yüzüncü Yıl Üniversitesi Lisansüstü Tez Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılmasına İlişkin Yönergeyi inceledim ve bu yönergede belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini bilgilerinize arz ederim.


Tarih ve İmza
19/10/2016

Adı Soyadı: Fatih KUTLU

Öğrenci No:1191110283

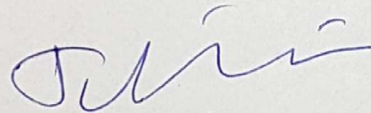
Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Statüsü: Y. Lisans ☐

Doktora ☒

DANIŞMAN ONAYI
UYGUNDUR



(Unvan, Ad Soyad, İmza)
Prof. Dr. Tunay BİLGİN

ENSTİTÜ ONAYI
UYGUNDUR

(Unvan, Ad Soyad, İmza)