



**HİPERBOLİK BİR KISMİ DİFERANSİYEL
DENKLEMDE KATSAYI FONKSİYONU
İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Seda İĞRET ARAZ

**Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat SUBAŞI**

2017

Her Hakkı Saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**HİPERBOLİK BİR KISMI DİFERANSİYEL DENKLEMDE
KATSAYI FONKSİYONU İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Seda İĞRET ARAZ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

**HİPERBOLİK BİR KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMDE KATSAYI
FONKSİYONU İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Seda İĞRET ARAZ tarafından hazırlanan bu çalışma 24/02/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR

İmza: 

Üye(Danışmanı): Prof. Dr. Murat SUBAŞI

İmza: 

Üye: Prof. Dr. Şakir AYDOĞAN

İmza: 

Üye: Doç. Dr. Lütfi İNCİKABI

İmza: 

Üye: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT

İmza: 

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 02/03/2017 tarih ve 9/85 nolu kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

HİPERBOLİK BİR KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMDE KATSAYI FONKSİYONU İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Seda İĞRET ARAZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Bu tezde optimal kontrol teorisi göz önünde bulundurularak, bir hiperbolik problemde yer alan katsayı fonksiyonunun kontrol edilebilirliğine ilişkin teorik aşamalar ele alınmaktadır. İlk bölümde, hiperbolik denklemler ve optimal kontrol problemleri hakkında temel bilgiler verilmektedir. İkinci bölümde, tezde bahsedilen bazı matematiksel kavramların tanımlarına yer verilmektedir. Sonraki bölümde, ele alınan hiperbolik problem için genelleştirilmiş çözümün varlığı ve tekliği gösterilmektedir. Ayrıca optimal kontrol problemi için optimal çözümün var ve tek olduğu ispatlanmaktadır. Takip eden bölümlerde, amaç fonksiyonelinin gradyeni için gerekli olan eşlenik problem ve ikinci eşlenik problem elde edilmektedir. Ayrıca optimal çözüm için gerek şart verilmektedir. Son olarak optimal çözüme yakınsayacak bir minimalleştirici dizinin nasıl bulunacağından bahsedilmektedir.

2017, 80 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol, Hiperbolik problem, Frechet türev.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE COEFFICIENT FUNCTION IN A HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

Seda İĞRET ARAZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this thesis, considering optimal control theory, theoretical stages related to the controllability of the coefficient function taken place in a hyperbolic problem has been dealt with. In the first chapter, it has been given fundamental information about the optimal control problems and hyperbolic equations. In the second chapter, definitions of some mathematical concepts mentioned in this thesis have been given. In the next chapter, existence and uniqueness of the generalized solution for hyperbolic problem considered has been obtained. However, it has been demonstrated that the optimal solution for optimal control problem is exist and unique. In the following chapters, adjoint problem which is necessary for gradient of the cost functional and second adjoint problem has been acquired. Also, necessary condition for optimal solution has been presented. Finally, it has been refer from how minimizing sequence converges to optimal solution is found.

2017, 80 Pages

Keywords: Optimal control, Hyperbolic problem, Frechet derivative.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu alışmada, değerli bilgi, katkı ve desteğini benden esirgemeyen, fikirleri ile bana yol gösteren Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI'na yakın ilgi, teşvik ve yardımlarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan eşim ve aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, doktora öğrenimim süresince gerçekleştirdiğim çalışmaları burs vererek maddi açıdan destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na da teşekkürlerimi sunarım.

Seda İĞRET ARAZ

Őubat, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	15
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	28
3.1. Hiperbolik Problem için Genelleştirilmiş Çözüm	28
3.2. Optimal Çözümün Elde Edilmesi.....	49
3.2.1. Optimal Çözümün Varlığı ve Tekliği.....	50
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA.....	54
4.1. Eşlenik Problem ve Gradyen Hesabı.....	54
4.2. Gradyenin Lipschitz Sürekliliğinin Elde Edilmesi.....	71
4.3. Optimallik için Gerek Şart	75
4.4 Minimalleştirici Dizinin Kurulması	76
5. SONUÇ.....	78
KAYNAKLAR	79
ÖZGEÇMİŞ	81

SİMGELER DİZİNİ

\forall	Her yerde
$\Omega = (0, l) \times (0, T)$	\mathbb{R}^2 uzayında verilen bölge
$\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$	\mathbb{R}^2 uzayında verilen bölge
$L_1(0, l)$	$(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değeri integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(0, l)$	$(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$W_1^1(0, l)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_1(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonlar uzayı
$H^1(0, l)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$H^1(\Omega)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan ve aralığın uç noktalarında sıfır değerine sahip fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$o(\ \Delta q\ ^2)$	$\ \Delta q\ $ ifadesinden daha hızlı sıfıra giden terim

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Verilen bir t anında telin durumu	2
Şekil 1.2. Telin uç noktalarındaki gerilim kuvveti	2
Şekil 3.1 Optimal çözüm için varlık ve teklik şartları	52



1. GİRİŞ

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin önemli bir türü olan hiperbolik denklemler için, klasik bir örnek olarak dalga denklemleri verilebilir. Bu denklemler, fen ve mühendislik alanlarında oldukça ilgi çekici bir konu olup, uygulama alanları akışkanlar dinamiği, elektromanyetik, ses dalgaları ve farklı türdeki cisimlerin titreşimi şeklindedir. Dalga denkleminin çözümleri, fiziksel olarak bir ortamdaki elektrik ve manyetik kuvvetlerin dalgasını, bir ortamdaki ses yayılmasını, katılarda enine ve boyuna yer değiştirme dalgalarını vs. ifade etmektedir.

Dalga denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad (1.1)$$

şeklinde olup, denklemin türü hiperboliktir. Burada c pozitif reel bir sabit olup, t zaman değişkenini, Δ ise Laplace operatörünü temsil eder.

Bir boyutlu

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

ve iki boyutlu

$$u_{tt} - c^2 (u_{xx} + u_{yy}) = 0$$

dalga denklemlerinin çözümü olan u fonksiyonuna dalga fonksiyonu denir.

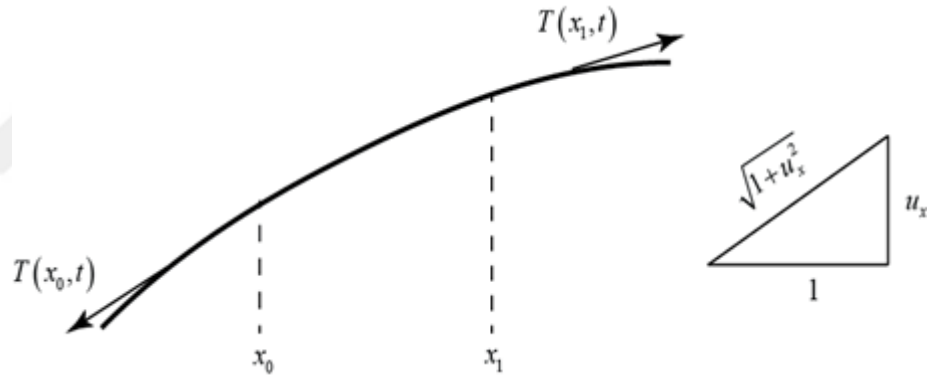
Şimdi dalga denklemini tanıtalım. Bunun için l uzunluğunda, enlemesine titreşimlere maruz kalan, esnek ve homojen bir teli veya yayı düşünelim. Örnek olarak, bir gitar

telini veya bir keman yayını göz önünde bulundurabiliriz. Verilen bir t anında, telin durumu Şekil 1.1 deki gibidir.



Şekil 1.1. Verilen bir t anında telin durumu

Herhangi bir t anında ve x konumunda, teldeki denge noktasına göre yer değişimini $u(x,t)$ fonksiyonu ile ifade edelim. Tel esnek olduğundan, gerilim kuvveti tel boyunca teğetsel olarak yönlendirilir (Şekil 1.2).



Şekil 1.2. Telin uç noktalarındaki gerilim kuvveti

$T(x,t)$ bu gerilim vektörünün büyüklüğü ve ρ telin yoğunluğu olsun. Tel homojen olduğu için, telin yoğunluğu sabittir. x_1 noktasındaki telin eğimi $u_x(x_1,t)$ fonksiyonudur.

Şimdi herhangi $x = x_0$ ve $x = x_1$ ($x_1 = x_0 + h$) noktaları arasında kalan tel parçası için Newton'un ikinci yasasını kullanalım.

Newton'un ikinci yasası, bir cismin üzerine uygulanan kuvvet ile cismin kütlesi ve bu

kuvvetin cisme kazandıracığı ivme arasındaki ilişkiyi vermektedir. Diğer bir deyişle, ΔF cisme uygulanan net kuvvet, m cismin kütlesi ve a ise cismin ivmesi olmak üzere,

$$\Delta F = ma \quad (1.2)$$

eşitliği yazılır.

Hareketi sadece enlemesine kabul ettiğimiz için uzunlamasına (x) olan net kuvvet

$$\Delta F = T(x_0 + h, t) \cos \theta(x_0 + h, t) - T(x_0, t) \cos \theta(x_0, t) = 0$$

olarak yazılıp, Şekil 1.2 de verilen üçgenden

$$\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x_0}^{x_1} = 0 \text{ (uzunlamasına)} \quad (1.3)$$

olduğu görülür.

Hareketin enlemesine olduğu durumda, telin bir parçasında oluşan gerilim için net kuvvet

$$\Delta F = T(x_0 + h, t) \sin \theta(x_0 + h, t) - T(x_0, t) \sin \theta(x_0, t)$$

şeklindedir. (1.2) formülü kullanılarak,

$$\Delta F = \rho(x_0 + h - x_0) u_{tt}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\rho(x_0 + h - x_0) = \rho h$ telin kütlesi, u_{tt} telin ivmesini ifade eder. Yukarıdaki son iki eşitlik birleştirilirse,

$$T(x_0 + h, t) \sin \theta(x_0 + h, t) - T(x_0, t) \sin \theta(x_0, t) = \rho h u_{tt} \quad (1.4)$$

yazılır. (1.4) eşitliği h ile bölünüp, $h \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(x_0 + h, t) \sin \theta(x_0 + h, t) - T(x_0, t) \sin \theta(x_0, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho h u_{tt}}{h}$$

ifadesi elde edilir. Bu eşitlik, türevin tanımından

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \sin \theta(x, t)] = \rho u_{tt} \quad (1.5)$$

şeklinde düzenlenir.

(1.5) eşitliği telin sadece bir parçası için değil, herhangi bir x noktasında yazıldığı düşünülürse

$$\frac{\partial}{\partial x} [T(x, t) \sin \theta(x, t)] = \rho u_{tt}$$

ve Şekil 1.2 de verilen üçgenden faydalanılırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[T(x, t) \frac{u_x}{\sqrt{1 + u_x^2}} \right] = \rho u_{tt} \quad (1.6)$$

şeklinde yazılır. (1.6) eşitliği (x_0, x_1) aralığında integrallenirse,

$$\frac{Tu_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \Big|_{x_0}^{x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \rho u_{tt} dx \text{ (enlemesine)} \quad (1.7)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi küçük hareketleri göz önünde bulunduralım. Bu durumda, u_x eğimi de küçük olacağından $\sqrt{1+u_x^2}$ değeri 1 olarak alınabilir. Çünkü

$$\sqrt{1+u_x^2} = 1 + \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{8}u_x^4 + O(u_x^6)$$

şeklinde olan Taylor açılımına göre u_x değeri küçük iken u_x^2 ve onun daha yüksek dereceden olan kuvvetleri daha küçük değerlere sahip olacaktır.

(1.3) denklemi, T geriliminin tel boyunca sabit olduğunu söyler. Bu gerilimin x konumunun yanı sıra t zaman değişkeninden de bağımsız olduğunu kabul edelim. (1.7) ile verilen eşitliğin türevi alındığında

$$(Tu_x)_x = \rho u_{tt}$$

yazılır. $c^2 = T/\rho$ denirse bu denklem,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (1.8)$$

ile ifade edilir.

Uygulamada $t \geq 0$ olmak üzere dalga denklemlerinin genel çözümlerini veya parametrelere bağlı çözümlerini bulmak kadar, $t = 0$ için u ve u_t fonksiyonlarının denklemle birlikte önceden verilmesi ve bu başlangıç verilerini sağlayan çözümün bulunması da önemlidir. Çünkü çoğunlukla uygulamalı bilim dallarının ortaya koyduğu

diferansiyel denklemlerle birlikte bazı başlangıç ve sınır koşulları doğal olarak ortaya çıkar.

(1.8) dalga denkleminde

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.9)$$

başlangıç şartları eklenirse, dalga denklemi ile birlikte bu probleme başlangıç değer problemi denir. Buna ek olarak, dalga fonksiyonunun tanımlı olduğu bölgenin sınırı üzerindeki değeri, yani

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.10)$$

şartlarının verilmesi halinde dalga denklemi ile birlikte bu probleme sınır değer problemi denir. Sınır şartlarına göre telin uçları sabit olduğundan, telin hızının sıfır olduğu anlaşılır. Dalga denklemi ile birlikte (1.9) başlangıç ve (1.10) sınır değerlerinin önceden verilmesi halinde bu probleme başlangıç-sınır değer problemi denir.

Dalga denkleminin çeşitli varyasyonları mevcuttur.

i. Eğer önemli ölçüde hava direnci (r) mevcut ise denkleme u_t ile orantılı ekstra bir terim eklenir ve denklem,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + ru_t = 0, \quad r > 0 \quad (1.11)$$

şekline dönüşür.

ii. Eğer sarmal bir teldeki gibi enlemesine esnek bir kuvvet varsa, u yer değişimiyle orantılı ekstra bir terim eklenir ve denklem,

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + qu = 0, \quad q > 0 \quad (1.12)$$

şekline dönüşür.

iii. Eğer dışarıdan uygulanan bir kuvvet varsa, ekstra bir terim ortaya çıkar, bu durumda da denklem

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x, t) \quad (1.13)$$

şekline dönüşür. Burada denklem, diğerlerinden farklı olarak homojen değildir.

Aynı dalga denklemi veya onun bir varyasyonu, esnek bir çubuğun titreşimi, bir borudaki ses dalgaları ve düz bir kanaldaki uzun su dalgaları gibi birçok dalga şeklindeki olayları da tanımlar.

Hiperbolik problemler

$$u_{xx} = CLu_{tt} + (CR + GL)u_t + GRu \quad (1.14)$$

denkleminle gösterilen bir taşıma hattındaki elektrik akımını bulma problemi şeklinde de karşımıza çıkabilir.

Burada, C birim uzunluk başına düşen kapasite(sığa), G birim uzunluk başına düşen akıntı direnci, R birim uzunluk başına düşen direnç ve L birim uzunluk başına düşen öz indüktansdır (Strauss 2008).

Ayrıca dalganın yayılışına etki eden ve enerji kaybına neden olan görünmeyen kuvvetlerin(sürtünme, ortamın yoğunluğu v.s.) bulunması halinde, γ ve β reel sabitler olmak üzere,

$$u_{tt} + \gamma u_t + \beta u - c^2 u_{xx} = F \quad (1.15)$$

telgraf denklemi veya bu denklemin daha özel bir hali olan

$$u_{tt} + \gamma u_t - c^2 u_{xx} = F \quad (1.16)$$

sönümlü dalga denklemi ile karşılaşılmaktadır.

Hiperbolik tip denklemler için optimal kontrol problemleri, mekanik sistemlerin titreşimi, çeşitli dalga süreçleri ve benzeri süreçler incelendiği zaman ortaya çıkar. Dalga denklemi ile ilgili optimal kontrol problemleri 1970'li yıllarda araştırılmaya başlanmıştır.

Optimal kontrol problemleri, bir amaç fonksiyoneli için mümkün olduğu kadar küçük değeri elde edecek, verilen uygun bir kümeye ait bir kontrol bulmaya dayanır. Amaç fonksiyoneli seçiminde problem için uygun bir model tercih edilir. Optimal kontrol, sistem dinamiğini hesaba katar ve genelde başlangıç verilerine bağlıdır. Aday kontrollerin, sistemi verilen bir zamanda verilen bir konuma yönlendirmesi amaçlanır (Gugat 2015).

Bir optimal kontrol problemi için

- ✓ Girdi-çıkı süreçleri olan bir sisteme,
- ✓ Kontrol edilen sistemin çıkışının gözlemine,
- ✓ Elde edilecek bir amaca

gereksinim vardır. Burada girdi kontrol değişkeni, çıktı sistemin konumu, sistemin gözlemi ise konuma bağlı bir dönüşümü (sıklıkla lineer bir operatörü) ifade eder.

Literatürde, hiperbolik denklemler için optimal kontrol problemleri farklı yönleriyle ele alınmıştır. Kontrolün sınırlarda, katsayıda ve denklemin sağ tarafında olması durumları farklı yazarlar tarafından çalışılmıştır (Tagiyev 2012; Hasanov 2014).

Bu çalışmalardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Tagiyev (2012), çalışmasında

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + q(x,t)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u|_{S_T} = 0$$

lineer hiperbolik denklemi için

$$J(v) = \alpha_0 \int_{Q_T} |u(x,t,v) - z_0(x,t)|^2 dxdt + \alpha_1 \int_{\Omega} |u(x,T,v) - z_1(x)|^2 dx$$

fonksiyoneli kullanarak $k(x) = (k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x))$ olmak üzere, $v = (k(x), q(x,t)) \in L_2(0,l) \times L_2(\Omega)$ katsayılarını kontrol etme problemini incelemiştir.

Herty *et al.* (2014), çalışmasında

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(w(x,t))}{\partial x} = h(w(x,t), x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T]$$

$$w(x,0) = w_0(x)$$

hiperbolik sistem için

$$J(w(\cdot, T); w_d(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |w(x, T) - w_d(x)|^2 dx$$

fonksiyoneli kullanarak $w_0(x) \in L_2(0, l)$ kontrol fonksiyonunu araştırmıştır.

Kröner (2011), çalışmasında

$$y_{tt} - A(u, y) = f$$

$$y(0) = y_0(u), \quad y_t(0) = y_1(u)$$

nonlineer hiperbolik denklemini için

$$J(u, y^1) = \int_0^T J_1(y^1(t)) dt + J_2(y^1(T)) + \frac{\alpha}{2} \|u\|_U^2$$

fonksiyoneli minimize edecek $u(t) \in L_2(0, T)$ fonksiyonunu kontrol etme problemini incelemiştir.

Majewski (2009), çalışmasında

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x, y) = \tilde{f}\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, u(x, y)\right)$$

$$z(x, 0) = z(0, y) = 0, \quad \forall x, y \in [0, 1]$$

nonlineer hiperbolik denklemini için

$$J^k(z(\cdot), u(\cdot)) = \int_p F^k(x, y, z(x, y), u(x, y)) dx dy, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

fonksiyonelini kullanarak $u(x, y) \in L_2(\Omega)$ fonksiyonunu kontrol etmiştir.

Serovajsky (2013), çalışmasında

$$y'' - \Delta y + |y'|^p y' = v, \quad (x, t) \in Q = \Omega \times (0, T)$$

$$y = 0, \quad (x, t) \in \Sigma = \partial\Omega \times (0, T)$$

$$y(x, 0) = 0, y'(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega$$

hiperbolik denklemi için

$$I(v) = \int_Q F(x, t; y[v](x, t), v(x, t)) dQ$$

fonksiyonelini kullanarak $v(x, t) \in L_2(\Omega)$ fonksiyonunu kontrol etme problemini incelemiştir.

Hasanov (2008), çalışmasında

$$u_{tt} = (k(x)u_x)_x + F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l)$$

$$-k(0)u_x(0, t) = f(t), k(l)u_x(l, t) = 0 \quad t \in (0, T)$$

probleminde

$$u(x, T) = \mu(x), \quad u_t(x, T) = v(x),$$

şartları olmak üzere,

$$J_1(w) = \int_0^l [u(x, T; w) - \mu(x)]^2 dx$$

$$J_2(w) = \int_0^l [u_t(x, T; w) - v(x)]^2 dx$$

$$J_3(w) = J_1(w) + J_2(w)$$

fonksiyonellerini minimum yapacak $w := \{F(x, t); f(t)\} \in L_2(\Omega) \times L_2(0, l)$ fonksiyon çiftini araştırmıştır.

Subaşı (2012), çalışmasında

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = F(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

hiperbolik denklemi için $\varphi(x) \in H^1(0, l)$ kontrol fonksiyonunu

$$J_\alpha(\varphi) = \int_0^l |u_t(x, T; \varphi) - y_1(x)|^2 dx + \int_0^l |u_x(x, T; \varphi) - y_2(x)|^2 dx + \alpha \int_0^l \varphi_x^2 dx$$

fonksiyonellerini kullanarak araştırmıştır.

Hasanov (2014), çalışmasında

$$u_{tt} = (a(x)u_x)_x + F(x)H(t), \quad (x, t) \in \Omega_T$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, l)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T)$$

problemi için

$$J(F) = \|u(x, T) - u_T\|_{L_2(0, l)}^2 + \alpha \|F\|_{L_2(0, l)}^2$$

fonksiyoneli kullanarak $F(x) \in L_2(0, l)$ fonksiyonunu kontrol etme problemini incelemiştir.

Bu çalışmaların çoğunda, çalışılan uzayın $L_2(\Omega)$ uzayı olduğunu belirtmiştik. Bu uzaya ait fonksiyonların süreksiz fonksiyonlar olabilecekleri bilindiğinden yukarıda bahsedilen çalışmalar karşımıza süreksiz kontrolleri de çıkarabilecektir.

Bu yüzden bu tez çalışmasında sürekli kontrollerle çalışabilmek amacıyla kontrol fonksiyonu $H^1(0, l)$ uzayından seçilmiştir. Dolayısıyla bu çalışma, yukarıdaki bahsettiğimiz çalışmalardan kontrol fonksiyonunun arandığı uzay ve bu uzay seçimi ile karşımıza çıkan işlemler bakımından oldukça farklıdır.

$H^1(0, l)$ uzayında zayıf çözümlerin aranması nedeniyle, bu uzayda elde edilecek olan zayıf yakınsaklık, $H^1(0, l)$ uzayının $L_2(0, l)$ uzayına kompakt gömülmesi sayesinde, $L_2(0, l)$ uzayındaki optimal çözüm için istenen güçlü yakınsaklığı

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|q^m(t) - q^*(t)\|_{L_2(0, T)} \rightarrow 0$$

sağlatmış olacaktır (Rellich-Kondrachov Teoremi).

Tezin ilerleyen bölümlerinde ele alınacak olan aşamalar şöyledir.

2. bölümde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan bir sonraki bölümlerde kullanacağımız teoremler ve lemmalar ile bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3.1. bölümde hiperbolik problemin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

3.2. bölümde optimal kontrol problemi tanıtılmış olup optimal çözümün varlığı ve tekliğine ait sonuçlar tartışılmıştır.

4. bölümde yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen bulgular verilmiştir.

4.1. bölümde tezin asıl katkısı olarak ifade edebileceğimiz, seçilen amaç fonksiyonelinin gradyeninin hesabı ve eşlenik problemin elde edilebilmesi konuları incelenmiştir.

4.2. bölümde bu amaç fonksiyonelinin gradyeninin sürekliliği ispatlanmıştır.

4.3. bölümde optimallik için gerek şart verilmiştir.

4.4. bölümde minimalleştirici dizi kurulması adımları ele alınarak nümerik incelemeler yapılmasına olanak sağlanmıştır.

5. bölümde ise bu çalışmanın önemi ortaya konulmuş olup, literatürde yer alan çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, bu çalışmada ileriki bölümlerde kullanılacak bazı tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir (Ladyzhenskaya 1985; Lebedev *et al.*1996; Thomas *et al.* 2005).

Tanım 2.1 (Fonksiyonel): $F \subset \mathbb{R}$ veya $F \subset \mathbb{C}$ olmak üzere X , F üzerinde bir vektör uzayı olsun. $J : X \rightarrow F$ operatörüne fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.2 (Süreklilik Fonksiyon): X ve Y iki metrik uzay ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ komşuluğu için $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. f fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyonuna sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.3 (Türev): f , (a, b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. Eğer

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa, bu limit değerine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi denir.

Tanım 2.4 (Dönüşüm): X ve Y boş olmayan iki küme ve f , X kümesinden Y kümesine bir bağıntı olsun. $\forall x \in X$ için $(x, y) \in f$ olacak şekilde bir tek $y \in Y$ varsa f bağıntısına X kümesinden Y kümesine bir dönüşüm denir.

Tanım 2.5 (Operatör): X ve Y iki vektör uzayı olsun. X vektör uzayından Y vektör uzayına tanımlı her dönüşüm operatör olarak adlandırılır.

Tanım 2.6 (Paralelkenar Kuralı): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımının indirgediği norm ise $\|\cdot\|$ şeklinde olsun. O zaman $\forall a, b \in X$ için paralelkenar kuralı ifadesi

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

eşitliği ile ifade edilir (Soykan 2012). Buradan hareketle

$$\|a+b\|^2 \leq 2\|a\|^2 + 2\|b\|^2$$

yazılabilir.

Tanım 2.7 (Lineer Operatör): X ve Y , F cismi üzerinde birer lineer uzay olsun. $T: X \rightarrow Y$ operatörü, her $\alpha, \beta \in F$ ve $x, y \in X$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüme lineer operatör denir.

Tanım 2.8 (Leibniz İntegral Kuralı): $F(x, t)$, $\frac{\partial}{\partial t} F(x, t)$ var ve sürekli olan bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx \right) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial t} F(x, t) dx + \frac{d}{dt} b(t) F(b(t), t) - \frac{d}{dt} a(t) F(a(t), t)$$

şeklindedir.

Tanım 2.9 (Yakınsaklık): (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X kümesinde bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine X kümesinde yakınsak ve x elemanına da dizinin limiti denir.

Tanım 2.10 (Cauchy Dizisi): $X = (X, d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > n_0$ olduğunda,

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.11 (Tam Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X kümesindeki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.12 (Normlu Uzay): X bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in F$ olmak üzere $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü için

- i. $\|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

özellikleri sağlanıyorsa bu dönüşüm X üzerinde norm adını alır ve bu $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir.

Tanım 2.13 (Prekompaktlık): (X, d) bir metrik uzay olsun. $F \subset X$ kümesinin kapanışı kompakt ise F kümesine prekompakttır denir.

Tanım 2.14 (Banach Uzay): $X = (X, \|\cdot\|)$, normlu lineer uzay olsun. X uzayı $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre tam uzay ise bu uzaya Banach uzayı denir.

Tanım 2.15 (Hilbert Uzayı): H bir iç çarpım uzayı ve $\|\cdot\|$ iç çarpım normu olsun. $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. Bu iç çarpım uzayı iç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre tam ise, X uzayına Hilbert uzayı denir.

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.16 (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X uzayına düzgün konveks uzay denir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım $x, y \in B_x = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon > 0$ için $\frac{x+y}{2}$ orta noktasının S_x den bir δ uzaklığında ve B_x kapalı birim yuvar içinde olduğunu ifade eder.

Örnek 2.17: Her H Hilbert uzayı düzgün konvekstir. Gerçekten her $x, y \in H$ için paralelkenar kuralından

$$\|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - \|x - y\|^2$$

şeklinde yazılır. $x \neq y$ olmak üzere $x, y \in B_H = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\|x + y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$$

olur. Şayet, $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}/4$ seçilirse

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olduğu görülür. O halde, H düzgün konveks bir uzaydır.

Tanım 2.18 (Sürekli Gömülme): X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer X uzayı, Y uzayının alt uzayı ve $\forall x \in X$ için $Ix = x$ ile tanımlanan $I : X \rightarrow Y$ operatörü sürekli ise X normlu uzayı Y normlu uzayına sürekli gömülür denir ve bu durum $X \rightarrow Y$ ile gösterilir.

Tanım 2.19 (Kompakt Gömülme): X ve Y Banach uzay ve X uzayı, Y uzayının alt uzayı olsun. Bu uzaylar için

- i. $\exists C$ sabiti için, $x \in X$ olmak üzere $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ ise,
- ii. X uzayındaki her sınırlı dizi, Y uzayında prekompakt ise

X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir ve bu durum $X \subset\subset Y$ ile gösterilir (Evans 1998).

Tanım 2.20 (Kapalı Küme): $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesindeki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları A kümesinde ise A kümesine X uzayında kapalı küme denir.

Tanım 2.21 (Kompakt Küme): $(X, \| \cdot \|)$ bir normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. A içindeki her dizinin A kümesinde bir limit noktası varsa A kümesine X uzayında kompakt küme denir.

Tanım 2.22 (Yoğun Küme): A ve B , X metrik uzayının iki alt kümesi olsun. Eğer $B \subset \bar{A}$ oluyorsa A kümesine B kümesinde yoğundur denir. Eğer $B = \bar{A}$ ise o zaman A kümesine B kümesinde her yerde yoğundur denir.

Tanım 2.23 (Konveks Küme): $X \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in X$$

şartı sağlanıyorsa X kümesine konveks küme adı verilir.

Tanım 2.24 (Aşağıdan Yarı Süreklilik): $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in X$ ve her $x_n \rightarrow x_0$ dizisi için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

ise f fonksiyonuna x_0 noktasında aşağıdan yarı sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.25 (Lipschitz Süreklilik): $X = (X, d)$, bir metrik uzayı ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$|f(x) - f(y)| \leq Ld(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ sabiti varsa f fonksiyonu X kümesinde Lipschitz süreklidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan en küçük L sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Tanım 2.26 (Gradyen – Frechet Türevi): Q kümesinde tanımlanan $J(q)$ fonksiyoneli için,

$$\Delta J(q) = J(q + \Delta q) - J(q) = \langle J'(q), \Delta q \rangle_Q + o(\|\Delta q\|_Q^2)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele $q \in Q$ elemanında Frechet anlamında diferensiyellenen fonksiyonel, $J'(q)$ elemanına ise $J(q)$ fonksiyonelinin gradyeni veya Frechet türevi denir.

Teorem 2.1 Q , B -Banach uzayının konveks alt kümesi, $J(q)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $Q_* = \left\{ q \in Q : J(q) = J_* = \inf_Q J(q) \right\}$ kümesi $J(q)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde her $q_* \in Q_*$ ve her $q \in Q$ için $\langle J'(q_*), q - q_* \rangle_B \geq 0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

Lemma 2.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada norm, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 2.3 (ε -Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a, b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.27 (Kuvvetli Yakınsaklık): H Hilbert uzay ve (x_n) de H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_H = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, (x_n) dizisi $x \in H$ elemanına kuvvetli yakınsıyor denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{k} x$ ile gösterilir. Buradaki $x \in X$ elemanına, (x_n) dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.28 (Zayıf Yakınsaklık): (x_n) , H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle_H = \langle x, y \rangle_H$$

ise (x_n) dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyor denir ve bu durum $x_n \xrightarrow{z} x$ ile gösterilir. Burada $x \in H$ elemanına (x_n) dizisinin zayıf limiti denir.

Tanım 2.29 (Zayıf Süreklilik): X ve Y Banach uzayı ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in X$ noktasına zayıf yakınsayan $(x_n) \in X$ dizisi için $f(x_n)$ dizisi $f(x_0)$ elemanına zayıf yakınsıyorsa f dönüşümü x_0 noktasında zayıf süreklidir denir.

Tanım 2.30 (Aşağıdan Zayıf Yarı Süreklilik): A , X Banach uzayının bir alt kümesi ve $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in A$ elemanına zayıf yakınsayan her $(x_n) \in A$ dizisi için

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında aşağıdan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.31: $L_2(0, l)$,

$$\int_0^l |f|^2 dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm $f : 0, l \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların kümesidir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2(0, l)} = \int_0^l f(x) g(x) dx,$$

$$\|f\|_{L_2(0, l)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2(0, l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_2(0, l)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

Örnek 2.32: $f(x) = (x-c)^{-\beta}$ fonksiyonlarının denklik sınıfı $x \in I = (c, l)$ için $\beta < \frac{1}{2}$ olduğunda $L_2(I)$ uzayının elemanı olur.

Tanım 2.33: $L_2(\Omega)$,

$$\iint_{\Omega} |f|^2 d\Omega < \infty$$

şartını sağlayan tüm $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_{\Omega} f(x, t) g(x, t) dx dt,$$

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{L_2(\Omega)}}$$

ile tanımlanır.

$L_2(\Omega)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.34: $H^1(0, l)$, Hilbert uzayı olup kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır.

Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{H^1(0, l)} = \int_0^l \left(f(x) g(x) + \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|f\|_{H^1(0, l)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^1(0, l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.35: $H^1(\Omega)$ Hilbert uzayı olup, kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \iint_{\Omega} \left(f(x,t)g(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{H^1(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.36: $D \subset R^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $|z| < \sigma$ şartını sağlayan tüm z ler için $1 \leq p < \infty$ iken $\|f(x+z) - f(x)\|_{L_p(D)} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma > 0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir.

Lemma 2.4 (Cauchy – Bunyakovski Eşitsizliği): $f, g \in L_2(\Omega)$ elemanları için,

$$\left| \iint_{\Omega} fg dxdt \right| \leq \left(\iint_{\Omega} f^2 dxdt \right)^{1/2} \cdot \left(\iint_{\Omega} g^2 dxdt \right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 2.5 (L^p uzayları için gömme teoremi): $mes(\Omega) = \int_{\Omega} 1d\Omega < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$

olsun. Eğer $f \in L_q(\Omega)$ ise o zaman $f \in L_p(\Omega)$ olur ve

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq (mes(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L_q(\Omega)}$$

yazılır. Bu yüzden

$$L_q(\Omega) \rightarrow L_p(\Omega)$$

olduğu görülür. Eğer $f \in L_\infty(\Omega)$ ise o zaman

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

yazılır. Sonuç olarak, eğer $1 \leq p < \infty$ için $f \in L_q(\Omega)$ ise ve her p için

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq K$$

olacak şekilde bir K sabiti varsa, o halde

$$f \in L_\infty(\Omega)$$

olup

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \leq K$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 2.6 (Rellich-Kondrachov Teoremi): Ω, \mathbb{R}^n de bir bölge olsun ve Ω_0, Ω bölgesinin bir alt bölgesi olsun. $\chi(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$ bölgesinin gömülmeleri için mümkün hedef uzaylarından herhangi biri olsun, yani $1 \leq k \leq n, \Omega^k, \mathbb{R}^n$ de bir k boyutlu düzleme sahip Ω nın kesişimi olmak üzere, $\chi(\Omega), C_B^j(\Omega), C^{j,\lambda}(\bar{\Omega}), L^q(\Omega^k)$ veya $W^{j,q}(\Omega^k)$ formunda bir uzaydır.

$i_{\Omega_0} : u \rightarrow u|_{\Omega_0}$ sınırlı lineer operatörü $\chi(\Omega)$ den $\chi(\Omega_0)$ e sınırlı olduğu için

$$\left[\text{aşlında } \|i_{\Omega_0} u; X(\Omega_0)\| \leq \|u; X(\Omega)\| \right],$$

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \chi(\Omega) \quad (1)$$

formundaki bir gömülme

$$W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \chi(\Omega_0) \quad (2)$$

gömülmesi bu kısıtla oluşturulabilir ve (2), (1) sürekli gömülmeye sahiptir (Adams 1975).



3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezde incelenecek olan hiperbolik problemin genelleştirilmiş çözümünden bahsedilerek, optimal çözüme ait gerekli aşamalar verilecektir.

3.1. Hiperbolik Problem için Genelleştirilmiş Çözüm

Hiperbolik problemin genelleştirilmiş çözümünü vermeden önce, bu problemi ve problemde yer alan notasyonları tanıtalım.

$\Omega := (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde tanımlı

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0, \quad (x, t) \in \Omega \quad (3.1.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad x \in (0, l) \quad (3.1.2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T) \quad (3.1.3)$$

hiperbolik başlangıç-sınır değer problemini göz önüne alalım.

(3.1.1) denklemi, homojen malzemeden yapılmış, uçları kenetlenmiş l uzunluğundaki bir telin titreşim sürecini tanımlar. Hiperbolik denklemde yer alan $u(x, t)$ fonksiyonu (3.1.1) denkleminin çözümü olup, telin t anında ve x noktasındaki yer değiştirmesini ifade eder. Denklemdaki $q(x)$ fonksiyonu kontrol fonksiyonudur ve $q(x)u$ terimi tele etki eden enlemesine esnek kuvvet anlamına gelir.

$\varphi_1(x)$ fonksiyonu sistemin başlangıç konumunu ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonu sistemin başlangıç hızını ifade eder. Ayrıca $u(0,t)$ ve $u(l,t)$ fonksiyonları da telin uç noktalardaki konumlarıdır (Tikhonov and Samarskii 1963).

$q(x)$ kontrol fonksiyonunu $H^1(0,l)$ uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi olan

$$Q := \left\{ q(x) : q(x) \in H^1(0,l), 0 \leq q_1 \leq q(x) \leq q_2, 0 \leq q_3 \leq \frac{dq(x)}{dx} \leq q_4, \forall x \in (0,l) \right\} \quad (3.1.4)$$

kümesinden seçelim.

Kontrol fonksiyonu $H^1(0,l)$ uzayından seçilip, bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle q_1, q_2 \rangle_{H^1(0,l)} = \int_0^l \left[q_1 q_2 + \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} \right] dx$$

ve

$$\|q\|_{H^1(0,l)} = \left\{ \int_0^l \left[q^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tezde sıklıkla karşılaşılabacak olan

$$J_\alpha(q) = \int_0^l [u(x,T;q) - y(x)]^2 dx + \alpha \|q - r\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (3.1.5)$$

fonksiyoneli amaç fonksiyoneli olarak adlandırılır. Bu fonksiyonelde yer alan $u(x,T;q)$ fonksiyonu (3.1.1)-(3.1.3) probleminin $q \in Q$ elemanına karşılık gelen çözümü ve $y(x) \in L_2(0,l)$ fonksiyonu ise $t=T$ anında çözümün yakın olması istenilen hedef fonksiyonudur.

Amaç fonksiyonelindeki $\alpha > 0$ sayısı regülerleştirme parametresi olup, nümerik incelemeler yapılırken tek çözüm elde etmede önemli bir rol oynar. Ayrıca $\alpha \|q-r\|_{H^1(0,l)}^2$ terimi, minimalleştirme sürecinde çok büyük kontrollerden kaçınmak amacıyla, $\|u(x,T)-y(x)\|_{L_2(0,l)}$ ve $\alpha \|q-r\|_{H^1(0,l)}^2$ normları arasında denge kurmada kullanılır. Amaç fonksiyonelinde yer alan $r(x)$ fonksiyonu ise başlangıç tahmini olarak tanımlanır.

Böylece ele alınan optimal kontrol problemi için $\alpha=0$ seçilmesi durumunda karşılaşılabilecek olan kararsızlık durumu, yeterince küçük α değerleri kullanılarak seçilecek olan (3.1.5) fonksiyonelinin kullanılması ile ortadan kaldırılabilir.

Benzer regülerleştirme terimini içeren fonksiyonellerin minimalleştirilmesi daha önce incelenmiştir (Subaşı 2002, 2004).

(3.1.1)-(3.1.5) optimal kontrol problemi, final anında $u(x,T;q)$ fonksiyonunun $y(x)$ hedef fonksiyonuna yeteri kadar yakın olmasını sağlayacak $q(x)$ fonksiyonunu yani tele uygulanacak enlemesine esnek kuvveti kontrol etme problemidir, matematiksel anlamda

$$J_{\alpha^*} = \inf J_{\alpha}(q) = J_{\alpha}(q^*) \quad (3.1.6)$$

eşitliğini sağlayan $q(x)$ fonksiyonunu araştırma problemidir.

Daha özel olarak Q kümesinden seçilen q_* kontrolünün (3.1.6) eşitliğini sağlayacak en uygun çözüm olduğunu göstermek için gerekli şartların sağlandığını ispatlamak bu çalışmanın asıl hedefi olacaktır.

(3.1.1)-(3.1.6) problemi hakkında bilgi verdikten sonra, şimdi (3.1.1) denklemini ile verilen

$$u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0$$

eşitliğinin Ω bölgesinin her noktasında sağlanması için (3.1.1)-(3.1.3) probleminin genelleştirilmiş çözümünü araştıralım.

Bunun için eşitliğin her iki tarafı, şartları daha sonra belirlenecek olan $\eta = \eta(x, t)$ fonksiyonu ile çarpılarak Ω bölgesinde integrallenirse

$$\int_0^T \int_0^l (u_{tt} - u_{xx} + q(x)u) \eta dx dt = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikteki her bir terim için kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l u_{tt} \eta dx dt &= \int_0^l \int_0^T u_{tt} \eta dt dx \\ &= \int_0^l u_t \eta \Big|_0^T dx - \int_0^l \int_0^T u_t \eta_t dt dx \\ &= \int_0^l u_t(x, T) \eta(x, T) dx - \int_0^l u_t(x, 0) \eta(x, 0) dx - \int_0^l \int_0^T u_t \eta_t dt dx \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada başlangıç şartlarından $u_t(x, 0) = \varphi_2(x)$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca ileride kullanılacak yukarıdaki eşitlikte $\eta(x, T) = 0$ kabulü ile birlikte yukarıdaki eşitlik

$$\int_0^T \int_0^l u_{tt} \eta dx dt = - \int_0^l \varphi_2(x) \eta(x,0) dx - \int_0^l \int_0^T u_t \eta_t dt dx$$

şekline dönüşür. Benzer şekilde ikinci terim için de kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l u_{xx} \eta dx dt &= \int_0^T u_x \eta \Big|_0^l dt - \int_0^T \int_0^l u_x \eta_x dx dt \\ &= \int_0^T u_x(l,t) \eta(l,t) dt - \int_0^T u_x(0,t) \eta(0,t) dt - \int_0^T \int_0^l u_x \eta_x dx dt \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada $\eta(0,t) = \eta(l,t) = 0$ kabulünü de göz önüne alırsak son eşitlik

$$\int_0^T \int_0^l u_{xx} \eta dx dt = - \int_0^T \int_0^l u_x \eta_x dx dt$$

şeklinde yeniden yazılır. Bu ifadeler birleştirilirse,

$$\int_0^T \int_0^l (-u_t \eta_t + u_x \eta_x + q(x) u \eta) dx dt = \int_0^l \varphi_2(x) \eta(x,0) dx \quad (3.1.7)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (3.1.1)-(3.1.3) probleminin genelleştirilmiş çözümü veya zayıf çözümü olarak adlandırılır.

(3.1.1)-(3.1.3) probleminin genelleştirilmiş çözümü denildiği zaman,

$$\eta(x,T) = 0, \eta(0,t) = 0, \eta(l,t) = 0 \quad (3.1.8)$$

kabulleri ile birlikte, her $\eta \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ fonksiyonu için (3.1.7) eşitliğini sağlayan $u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ fonksiyonunu bulma işlemi anlaşılmalıdır. Ayrıca bu çözüm

$$\varphi_1(x) \in H^1(0,l), \varphi_2(x) \in L_2(0,l) \quad (3.1.9)$$

şartları altında mevcuttur.

(3.1.1)-(3.1.3) probleminin (3.1.7) anlamında bir çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.1.1: (3.1.9) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her bir $q(x) \in Q$ fonksiyonu için (3.1.1)-(3.1.3) başlangıç sınır değer probleminin bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\varphi_1\|_{H^1(0,l)}^2 + \|\varphi_2\|_{L_2(0,l)}^2 \right) \quad (3.1.10)$$

veya bu eşitsizliğe denk olarak,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_1 \quad (3.1.11)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: (3.1.1) denkleminin her iki tarafı u_t fonksiyonu ile çarpılıp $(0,l)$ aralığında integralenirse,

$$\int_0^l [u_{tt} - u_{xx} + q(x)u] u_t dx = 0$$

şeklinde yazılır. Burada, integralde yer alan ikinci terim yerine yazılacak olan

$$(u_x)_x u_t = (u_x u_t)_x - u_x u_{xt} \quad (3.1.12)$$

özdeşliğinden yararlanılırsa, yukarıdaki eşitliğin

$$\int_0^l (u_t u_t + u_x u_{xt} + q(x) u u_t) dx = \int_0^l (u_x u_t)_x dx$$

biçiminde olduğu görülür. Ayrıca,

$$u_t u_t + u_x u_{xt} + q(x) u u_t = \frac{1}{2} \left[(u_t)^2 + (u_x)^2 + q(x) (u)^2 \right]_t$$

olduğu da göz önüne alınırsa, yukarıda verilen integral eşitliği

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^l \left[(u_t)^2 + (u_x)^2 + q(x) u^2 \right] dx \right\} = (u_x u_t) \Big|_{x=0}^{x=l} \quad (3.1.13)$$

olarak yazılır.

(3.1.3) sınır şartlarından $u_t(0,t) = u_t(l,t) = 0$ olacağından, son eşitlik

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_0^l \left[(u_t)^2 + (u_x)^2 + q(x) u^2 \right] dx \right\} = 0$$

şekline dönüşür. Bu eşitliğin her iki tarafı $(0,t)$ aralığında integrallenirse,

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[(u_t(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2 + q(x) (u(x,t))^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[(u_t(x,0))^2 + (u_x(x,0))^2 + q(x) (u(x,0))^2 \right] dx \quad (3.1.14)$$

olduğu görülür.

Şimdi,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l \left[(u_t(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2 + q(x) (u(x,t))^2 \right] dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan, $u(x, t)$ fonksiyonunun $(0, l)$ aralığındaki enerji normunu ifade eden $J(t)$ integrali

$$J(t) := \sqrt{E(t)} = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(u_t(x, t))^2 + (u_x(x, t))^2 + q(x)(u(x, t))^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (3.1.15)$$

şeklindedir. $t > 0$ değişkenine bağlı bu norm,

$$\|u\|_E := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(u_t(x, t))^2 + (u_x(x, t))^2 + q(x)(u(x, t))^2 \right] dx \right\}^{1/2}, \quad t > 0$$

olarak gösterilir (Hasanov 2010).

Böylece, enerji normunun ifadesinden (3.1.14) eşitliği,

$$J^2(t) = J^2(0), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.16)$$

olarak yeniden yazılabilir.

Burada,

$$J(0) := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(u_t(x, 0))^2 + (u_x(x, 0))^2 + q(x)(u(x, 0))^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (3.1.17)$$

şeklindedir.

Şimdi teoremin ispatına devam etmek için işimize yarayacak bir lemma verelim.

Lemma 3.1.2: (3.1.1) - (3.1.3) problemleri için (3.1.9) şartı sağlanıyorsa,

$$\|u\|_{L_2(0, l)} \leq \sqrt{\frac{2}{q_1}} J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.18)$$

$$\|u_x\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{2}J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.19)$$

$$\|u_t\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{2}J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.20)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat:

$$\int_0^l [u(x,t)]^2 dx = \int_0^l \frac{1}{q(x)} q(x) (u(x,t))^2 dx$$

yazılıp, bu eşitlikte paydada yer alan $q(x)$ fonksiyonu q_1 ile küçültülüp eşitliğin sağ tarafı büyütülürse ve enerji normunun tanımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^l [u(x,t)]^2 dx &\leq \frac{1}{q_1} \int_0^l q(x) (u(x,t))^2 dx \\ &\leq \frac{1}{q_1} \int_0^l \left[(u_t(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2 + q(x) (u(x,t))^2 \right] dx \\ &\leq \frac{2}{q_1} E(t) \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{q_1}} J(t) \end{aligned}$$

(3.1.18) eşitsizliği elde edilmiş olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \int_0^l [u_x(x,t)]^2 dx &\leq \int_0^l \left[(u_t(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2 + q(x) (u(x,t))^2 \right] dx \\ &:= 2E(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılırsa ve enerji normunun tanımından faydalanılırsa

$$\|u_x\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}J(t), \quad t \in [0, T]$$

(3.1.19) eşitsizliği ispatlanmış olur.

Ayrıca

$$\begin{aligned} \int_0^l [u_t(x,t)]^2 dx &\leq \int_0^l \left[(u_t(x,t))^2 + (u_x(x,t))^2 + q(x)(u(x,t))^2 \right] dx \\ &:= 2E(t) \end{aligned}$$

yazılır ve enerji normunun tanımından

$$\|u_t\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}J(t), \quad t \in [0, T]$$

(3.1.20) eşitsizliği gösterilmiş olur.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. (3.1.17) eşitliğinde $q(x)$ fonksiyonu büyütülürse,

$$J(0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^l [u_t(x,0)]^2 dx + \int_0^l [u_x(x,0)]^2 dx + q_2 \int_0^l [u(x,0)]^2 dx \right)^{1/2} \quad (3.1.21)$$

eşitsizliği yazılır. $c_2 = \max\{1, q_2\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} J(0) &\leq \sqrt{\frac{c_2}{2}} \left(\int_0^l [u_t(x,0)]^2 dx + \int_0^l [u_x(x,0)]^2 dx + \int_0^l [u(x,0)]^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{c_2}{2}} \left(\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 + \|u(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

ifadesi,

$$J(0) \leq \sqrt{\frac{c_2}{2}} \left(\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u(x,0)\|_{L_2(0,l)} \right) \quad (3.1.23)$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1.18) eşitsizliği ve (3.1.23) ifadesinden faydalanılırsa,

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \frac{3c_2}{q_1} \left(\|u(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 \right) \quad (3.1.24)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.19) eşitsizliği ve (3.1.23) ifadesinden faydalanılırsa,

$$\|u_x(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{c_2} \left(\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u(x,0)\|_{L_2(0,l)} \right), t \in [0, T]$$

olduğu görülür ve paralelkenar kuralından

$$\|u_x(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq 3c_2 \left(\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 \right) \quad (3.1.25)$$

biçiminde yazılır.

(3.1.20) eşitsizliği ve (3.1.23) ifadesinden faydalanılırsa,

$$\|u_t(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{c_2} \left(\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u(x,0)\|_{L_2(0,l)} \right), t \in [0, T]$$

şeklinde yazılır ve paralelkenar kuralı uygulanırsa

$$\|u_t(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq 3c_2 \left(\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + \|u(x,0)\|_{L_2(0,l)}^2 \right) \quad (3.1.26)$$

bulunur.

(3.1.24), (3.1.25) ve (3.1.26) ifadeleri taraf tarafa toplanırrsa,

$$\begin{aligned} & \|u(x,t)\|_{L_2(0,t)}^2 + \|u_t(x,t)\|_{L_2(0,t)}^2 + \|u_x(x,t)\|_{L_2(0,t)}^2 \\ & \leq c_3 \left(\|u(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 + \|u_t(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

eşitsizliği yazılır. Burada $c_3 = \max \left\{ 3c_2, \frac{3c_2}{q_1} \right\}$ şeklindedir.

Diğer taraftan, (3.1.27) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan her bir terimin yerine, (3.1.2) başlangıç şartlarından hareketle,

$$\|u(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 = \|\varphi_1\|_{L_2(0,t)}^2$$

$$\|u_t(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 = \|\varphi_2\|_{L_2(0,t)}^2$$

ve

$$\|u_x(x,0)\|_{L_2(0,t)}^2 = \|\varphi_1'\|_{L_2(0,t)}^2$$

ifadeleri yazılırsa, (3.1.27) eşitsizliği

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^1(0,t)}^2 \leq c_3 \left(\|\varphi_1\|_{L_2(0,t)}^2 + \|\varphi_2\|_{L_2(0,t)}^2 + \|\varphi_1'\|_{L_2(0,t)}^2 \right)$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Bu eşitsizlik

$$\|u(\cdot,t)\|_{H^1(0,t)}^2 \leq c_3 \left(\|\varphi_1\|_{H^1(0,t)}^2 + \|\varphi_2\|_{L_2(0,t)}^2 \right)$$

olarak yazılır ve $(0,T)$ aralığında integrallenirse

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_4 \left(\|\varphi_1\|_{H^1(0,l)}^2 + \|\varphi_2\|_{L_2(0,l)}^2 \right), \quad c_4 = c_3 T \quad (3.1.28)$$

kestirimi bulunur.

Sağ taraftaki normlar bilinen değerler olduğundan, (3.1.28) eşitsizliği

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq c_5 \quad (3.1.29)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $c_5 = c_1$ denirse, Teorem 3.1.1 ispatlanmış olur.

Şimdi zayıf çözümün tekliğini gösterelim. Bunun için, öncelikle bu problemin u_1 ve u_2 gibi iki zayıf çözümünün olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\begin{aligned} (u_1)_t - (u_1)_{xx} + q(x)u_1 &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \\ u_1(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad (u_1)_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad x \in (0, l) \\ (u_1)(0, t) &= 0, \quad (u_1)(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (u_2)_t - (u_2)_{xx} + q(x)u_2 &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \\ u_2(x, 0) &= \varphi_1(x), \quad (u_2)_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad x \in (0, l) \\ (u_2)(0, t) &= 0, \quad (u_2)(l, t) = 0, \quad t \in (0, T] \end{aligned}$$

problemleri elde edilir. Buradan $s = u_1 - u_2$ farkı için

$$\begin{aligned} s_t - s_{xx} + q(x)s &= 0, \quad (x, t) \in \Omega \\ s(x, 0) &= 0, \quad s_t(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l) \end{aligned}$$

$$s(0,t) = 0, \quad s(l,t) = 0, \quad t \in (0,T)$$

problemi yazılır. (3.1.10) eşitsizliğinin ispatına benzer işlemler kullanılarak bu problemin (3.1.7) anlamındaki çözümü için

$$\|s\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq 0$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan $s = 0$ olduğundan zayıf çözüm tektir (Ladyzhenskaya 1985).

Şimdi ileriki bölümlerde kullanacağımız bazı kestirimleri değerlendirelim.

Öncelikle (3.1.1)-(3.1.3) problemi için fark problemini oluşturalım. Bunun için q elemanına δq artımı verelim ve $q + \delta q$ elemanına karşılık gelen hiperbolik probleminin çözümünü $u_\delta(x,t) = u(x,t; q + \delta q)$ ile gösterelim. O halde

$$(u_\delta)_t - (u_\delta)_{xx} + (q + \delta q)u_\delta = 0, \quad (x,t) \in \Omega$$

$$u_\delta(x,0) = \varphi_1(x), \quad (u_\delta)_t(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in (0,l)$$

$$(u_\delta)(0,t) = 0, \quad (u_\delta)(l,t) = 0, \quad t \in (0,T)$$

problemi yazılır.

$\delta u(x,t) = u(x,t; q + \delta q) - u(x,t; q)$ olmak üzere yukarıdaki problem (3.1.1)-(3.1.3) probleminin çıkarılırsa,

$$\delta u_t - \delta u_{xx} + (q + \delta q)\delta u + \delta q u = 0, \quad (x,t) \in \Omega \quad (3.1.30)$$

$$\delta u(x,0) = 0, \quad \delta u_t(x,0) = 0, \quad x \in (0,l) \quad (3.1.31)$$

$$\delta u(0,t) = 0, \quad \delta u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T) \quad (3.1.32)$$

fark problemi elde edilir.

Bu fark probleminin çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıda bir teorem verelim.

Teorem 3.1.3: $\delta u(x,t)$, (3.1.30)-(3.1.32) probleminin çözümü olsun. O zaman bu fonksiyon için,

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_6 \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (3.1.33)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: (3.1.30) denkleminin her iki tarafı δu_t fonksiyonu ile çarpılıp, $(0,l)$ aralığında integrallenirse,

$$\int_0^l [\delta u_{tt} - \delta u_{xx} + (q + \delta q) \delta u + \delta q u] \delta u_t dx = 0$$

eşitliği yazılır. Burada integralde yer alan ikinci terim yerine

$$\delta u_{xx} \delta u_t = (\delta u_x \delta u_t)_x - \delta u_x \delta u_{xt} \quad (3.1.34)$$

özdeşliğinden yararlanılırsa, yukarıdaki eşitlik

$$\int_0^l (\delta u_{tt} \delta u_t + \delta u_x \delta u_{xt} + (q + \delta q) \delta u \delta u_t + \delta q u \delta u_t) dx = \int_0^l (\delta u_x \delta u_t)_x dx$$

şeklinde yeniden yazılır. Ayrıca,

$$\delta u_t \delta u_t + \delta u_x \delta u_x + (q + \delta q) \delta u \delta u_t = \frac{1}{2} \left[(\delta u_t)^2 + (\delta u_x)^2 + (q + \delta q) (\delta u)^2 \right]_t$$

olduğu da kullanılarak,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[(\delta u_t)^2 + (\delta u_x)^2 + (q + \delta q) (\delta u)^2 \right] dx \right\} = - \int_0^l \delta q u \delta u_t dx + (\delta u_x \delta u_t) \Big|_{x=0}^{x=l} \quad (3.1.35)$$

eşitliği elde edilir.

Fark probleminden, $\delta u(0, t) = \delta u(l, t) = 0$ olduğundan $\delta u_t(0, t) = \delta u_t(l, t) = 0$ şeklinde bulunup, bu eşitliğin her iki tarafı $(0, t)$ aralığında integrallenirse,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta u_t(x, t))^2 + (\delta u_x(x, t))^2 + (q + \delta q) (\delta u(x, t))^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta u_t(x, 0))^2 + (\delta u_x(x, 0))^2 + (q + \delta q) (\delta u(x, 0))^2 \right] dx - \int_0^t \int_0^l \delta q u \delta u_t dx dt \end{aligned} \quad (3.1.36)$$

olduğu görülür. Fark probleminden, $\delta u_t(x, 0) = 0, \delta u_x(x, 0) = 0, \delta u(x, 0) = 0$ olduğu bilindiğinden,

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta u_t(x, t))^2 + (\delta u_x(x, t))^2 + (q + \delta q) (\delta u(x, t))^2 \right] dx = - \int_0^t \int_0^l \delta q u \delta u_t dx dt$$

ifadesi elde edilir. Şimdi,

$$\delta E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta u_t(x, t))^2 + (\delta u_x(x, t))^2 + (q + \delta q) (\delta u(x, t))^2 \right] dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\delta J(t)$ integrali, $\delta u(x, t)$ fonksiyonunun $(0, l)$ aralığındaki enerji normu olmak üzere

$$\delta J(t) := \sqrt{\delta E(t)} = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta u_t(x,t))^2 + (\delta u_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta u(x,t))^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (3.1.37)$$

yazılır ve $t > 0$ değişkenine bağlı bu norm,

$$\|u\|_{\delta E} := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta u_t(x,t))^2 + (\delta u_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(u(x,t))^2 \right] dx \right\}^{1/2}, \quad t > 0$$

olarak gösterilir.

Buradan, (3.1.36) eşitliği $\delta J(t)$ fonksiyonu cinsinden

$$\delta J^2(t) = \delta J^2(0) - \int_0^t \int_0^l \delta q u \delta u_t dx dt, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.38)$$

şeklinde yazılabilir.

Fark probleminde

$$\delta J(0) := 0 \quad (3.1.39)$$

olduğu görülür.

Teoremin ispatına devam etmek için aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 3.1.4: (3.1.30) - (3.1.32) problemi için

$$\|\delta u_x\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2} \delta J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.40)$$

$$\|\delta u_t\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2} \delta J(t), \quad t \in [0, T] \quad (3.1.41)$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat:

$$\int_0^l [\delta u_x(x,t)]^2 dx \leq \int_0^l \left[(\delta u_t(x,t))^2 + (\delta u_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta u(x,t))^2 \right] dx$$

$$:= 2\delta E(t)$$

yazılıp, enerji integralinin tanımından

$$\|\delta u_x\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2\delta J(t)}, \quad t \in [0, T]$$

(3.1.40) eşitsizliği ispatlanır.

Benzer şekilde

$$\int_0^l [\delta u_t(x,t)]^2 dx \leq \int_0^l \left[(\delta u_t(x,t))^2 + (\delta u_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta u(x,t))^2 \right] dx$$

$$:= 2\delta E(t)$$

şeklinde yazılıp, enerji integralinin tanımından

$$\|\delta u_t\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2\delta J(t)}, \quad t \in [0, T]$$

(3.1.40) eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim ve $\delta J(t)$ için bir kestirim yazalım:

$$\delta J^2(t) = - \int_0^t \int_0^l \delta q u \delta u_t dx dt, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.42)$$

eşitliğinin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevi alınır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
2\delta J(t)\delta J'(t) &= -\int_0^l \delta q u(\cdot, t) \delta u_t(\cdot, t) dx + \int_0^l \delta q u(\cdot, 0) \delta u_t(\cdot, 0) dx \\
&\leq \int_0^l |\delta q| |u(\cdot, t)| |\delta u_t(\cdot, t)| dx \\
&\leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} |\delta q| \right) \|u\|_{L_2(0,t)} \underbrace{\|\delta u_t\|_{L_2(0,t)}}_{\leq \sqrt{2}\delta J(t)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \|u\|_{L_2(0,t)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $2\delta J(t) \neq 0$ ile bölünüp, $(0, t)$ aralığında integrallenirse, yukarıdaki eşitsizlik

$$\delta J(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^t \|u\|_{L_2(0,\tau)} d\tau, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.43)$$

şeklinde yeniden yazılır.

Şimdi $\|\delta u\|_{L_2(0,t)}$ için bir kestirim yazalım:

$$\|\delta u\|_{L_2(0,t)}^2 = \int_0^t [\delta u(\cdot, \tau)]^2 dx, \quad t \in [0, T] \quad (3.1.44)$$

Bu eşitliğin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevi alınır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}
2\|\delta u\|_{L_2(0,t)} \frac{\partial}{\partial t} \|\delta u\|_{L_2(0,t)} &= 2 \int_0^t [\delta u(\cdot, t)] \frac{\partial}{\partial t} [\delta u(\cdot, t)] dx \\
&\leq 2\|\delta u\|_{L_2(0,t)} \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial t} \delta u \right\|_{L_2(0,t)}}_{\leq \sqrt{2}\delta J(t)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $2\|\delta u\|_{L_2(0,t)} \neq 0$ ifadesine bölünürse ve $(0, t)$ aralığında integrallenirse,

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)} \leq \|\delta u(\cdot, 0)\|_{L_2(0,t)} + \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^t \int_0^\tau \|u(\cdot, s)\|_{L_2(0,t)} ds d\tau \quad (3.1.45)$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta u(\cdot, 0) = 0$ olduğu bilindiğinden, bu eşitsizlik

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)} \leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^t \int_0^\tau \|u(\cdot, s)\|_{L_2(0,t)} ds d\tau$$

biçiminde yazılır. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade için,

$$\int_0^t \int_0^\tau u(s) ds d\tau = \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau$$

özdeşliğinden yararlanılırsa, yukarıdaki eşitsizlik

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(0,t)} \leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^t (t - \tau) \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,t)} d\tau \quad (3.1.46)$$

şeklinde düzenlenir. Ayrıca, Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden,

$$\left| \int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,t)} d\tau \right| \leq \left(\int_0^t 1 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,t)}^2 d\tau \right)^{1/2}, \quad t > 0$$

olup, (3.1.46) formülünün sağ tarafında yer alan integral için ise

$$\int_0^t (t-\tau) \|u\|_{L_2(0,l)} d\tau \leq \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad t > 0 \quad (3.1.47)$$

formülü yazılabilir.

(3.1.47) formülü, (3.1.46) eşitsizliğinde değerlendirilirse,

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \right)^2 \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right)^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (3.1.48)$$

kestirimi bulunur. Öte yandan,

$$\|\delta q\|_{W_1^1(0,l)}^2 = \left(\int_0^l (|\delta q| + |\delta q'|) dx \right)^2, \quad q \in L_1(0,l), \quad q' \in L_1(0,l)$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikten ve Teorem 2.5 den faydalanılarak

$$\begin{aligned} \|\delta q\|_{W_1^1(0,l)}^2 &\leq (\sqrt{l})^2 \left(\|\delta q\|_{L_2(0,l)} + \|\delta q'\|_{L_2(0,l)} \right)^2 \\ &\leq 2l \left(\|\delta q\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\delta q'\|_{L_2(0,l)}^2 \right) \\ &\leq 2l \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \end{aligned} \quad (3.1.49)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.49) eşitsizliğinden faydalanılarak (3.1.48) eşitsizliği,

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{t^3}{3} 2l \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (3.1.50)$$

şeklinde düzenlenir. Ayrıca (3.1.10) eşitsizliğinden

$$\|u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_1$$

olduğu bilindiğinden,

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq 2lc_1 \frac{t^3}{3} \|\delta q\|_{H^1(0, l)}^2$$

eşitsizliği yazılır. Burada, $c_6 = 2lc_1 \frac{t^3}{3}$ olarak alınır,

$$\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_6 \|\delta q\|_{H^1(0, l)}^2 \quad (3.1.51)$$

olduğu ispatlanır.

3.2. Optimal Çözümün Elde Edilmesi

Optimal kontrol problemlerinin, bir amaç fonksiyoneli minimalleştirecek uygun bir kümeye ait bir kontrol bulmaya dayandığı bilinmektedir.

Tezde incelenecek olan optimal kontrol problemi için amaç; final anında sistemin çözümünü, hedeflenen değere uygun bir normda en yakın yapacak olan $q(x)$ katsayı fonksiyonunu belirlemektir.

Bu optimal kontrol probleminde optimal çözümün var ve tek olduğunun gösterilmesi, optimallik için gerek şartın elde edilmesi, minimalleştirici dizi kurulması bu tezde yer alan amaçlardandır.

Hiperbolik denklem içeren optimal kontrol problemi

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\alpha(u_*, q_*) = \min_{(u,q) \in H^1(\Omega) \times H^1(0,l)} J_\alpha(u, q), \\ u_{tt} - u_{xx} + q(x)u = 0 \\ u(x,0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_2(x) \\ u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

şeklinde olup, burada ulaşılmak istenen asıl hedef, (3.2.1) problemi için $(u, q) \in H^1(\Omega) \times H^1(0, l)$ elemanının bulunmasıdır.

3.2.1. Optimal Çözümün Varlığı ve Tekliği

Optimal kontrol problemlerinde, başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin mevcut olmasını garanti edecek bir analitik yapıya ihtiyaç duyulur. Buna dayanarak optimal kontrol problemleri ile çalışılır.

Bu yüzden optimal çözümün varlığını ve tekliğini göstermek için Goebel (1979)' in çalışmasında yer alan teoremden faydalanılacaktır.

Teorem 3.2.1.1: H uzayı düzgün konveks Banach uzayı, Q kümesi H uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi olsun. Ayrıca $J(q)$ fonksiyonelinin Q kümesi üzerinde tanımlanan aşağıdan sınırlı ve aşağıdan yarı sürekliliği fonksiyonel olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ verilen sayılar olmak üzere, öyle bir $G \in H$ yoğun altkümesi vardır ki, $\forall r \in G$ için

$$J_\alpha(q) = J(q) + \alpha \|q - r\|_H^\beta \quad (3.2.1.1)$$

fonksiyoneli Q kümesi üzerinde en küçük değerini alır.

Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(q)$ fonksiyoneli en küçük değerini Q kümesi üzerinde bir tek noktada alır (Goebel 1979).

Bu tezde incelenen minimalleştirme problemi için Goebel'in teoreminin şartlarının sağlandığını göstermeden önce $J(q)$ fonksiyonelinin sürekliliğini incelememiz gerekecektir.

O halde $J(q)$ fonksiyonelinin sürekliliğini inceleyelim.

$$J(q) = \int_0^l [u(x, T) - y(x)]^2 dx \quad (3.2.1.2)$$

fonksiyoneline $q \in Q$ kontrolüne $\delta q \in Q$ artımı verilirse, $J(q)$ fonksiyonelinin $q \in Q$ elemanı üzerindeki artımı

$$J(q + \delta q) = \int_0^l [u(x, T) + \delta u(x, T) - y(x)]^2 dx$$

şeklinde olur. Bu artım için

$$\begin{aligned} \delta J(q) &= J(q + \delta q) - J(q) \\ &= \int_0^l \delta u(x, T) 2[u(x, T) - y(x)] dx + \int_0^l [\delta u(x, T)]^2 dx \end{aligned}$$

formülü yazılabilir. Burada Cauchy-Bunyakovski eşitsizliği uygulanırsa

$$\delta J(q) \leq \|\delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)} \cdot \|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, l)} + \|\delta u(x, T)\|_{L_2(0, l)}^2 \quad (3.2.1.3)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca (3.1.33) kestirimi ve $\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, l)}$ normunun bilinen değer olduğu bilgisi kullanılırsa,

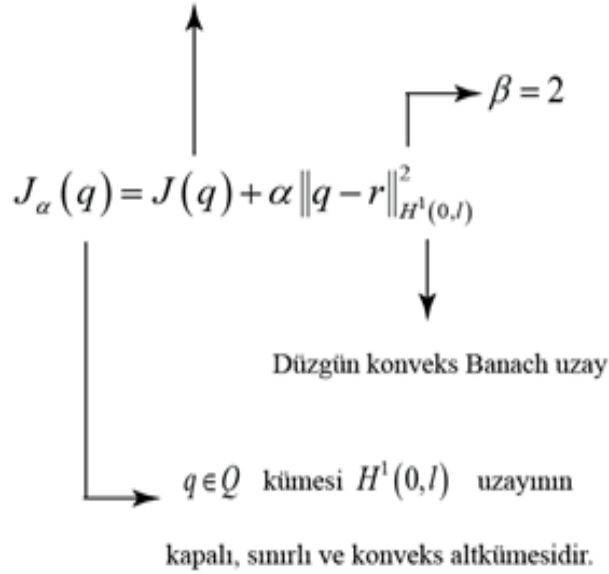
$$|\delta J(q)| \leq c_7 \left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)} + \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \right) \quad (3.2.1.4)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $c_7 > 0$ sayısı δq artımından bağımsızdır. Bu eşitsizlikten faydalanarak $J(q)$ fonksiyonelinin Q kümesinde sürekli olduğu söylenebilir.

Sürekli fonksiyoneller hem aşağıdan hem yukarıdan yarı sürekli olduğundan, $J(q)$ fonksiyoneli aşağıdan yarı sürekli olacaktır.

Öte yandan her $q \in Q$ için $J(q) \geq 0$ olacağından, bu fonksiyonel aşağıdan sınırlıdır.

Aşağıdan sınırlı ve aşağıdan yarı sürekli



Şekil 3.1. Optimal çözüm için varlık ve teklik şartları

Gerçekten de tezde ele alınan problem için yapılan seçimlerin Goebel'in teoremine uygun olduğu yukarıda verilen şekilden görülebilir:

- $H^1(0,l)$ uzayı düzenli konveks Banach uzayıdır (Clarkson 1936).

- Q kümesi, $H^1(0,l)$ uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesidir (Yosida 1980).
- $J(q)$ fonksiyoneli Q kümesi üzerinde aşağıdan yarı sürekli ve aşağıdan sınırlıdır.
- Son olarak $J_\alpha(q)$ fonksiyoneli için $\beta = 2$ dir.

Böylece yukarıda verilen teoremin şartlarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla optimal çözüm vardır ve tektir.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde optimallik için gerek şartın elde edilmesinde önemli rol oynayan gradyenin sürekliliği kavramından ve minimalleştirici dizinin kurulması süreçlerinden bahsedilecektir.

4.1. Eşlenik Problem ve Gradyen Hesabı

Tezde ele alınan problem için gerekli olan optimallik şartını elde ederken Teorem 2.1 den faydalanılacaktır (Vasilyev 1981). Optimallik şartını yazabilmek için amaç fonksiyonelinin Frechet türevinin diferansiyellenebilirliğinin gösterilmesi ve bunun için de öncelikle bu türevin hesaplanması gerekir. Türevin bulunması ise eşlenik problemin yanı sıra ikinci eşlenik problem elde etmeyi gerektirecektir.

(3.1.1)-(3.1.6) optimal kontrol probleminin eşlenik problemini ve (3.1.5) amaç fonksiyonelinin Frechet türevini belirlemek için önce

$$\tilde{J}_\alpha(q) = \int_0^l [u(x, T; q) - y(x)]^2 dx + \alpha \|q - r\|_{H^1(0, l)}^2 + \int_0^T \int_0^l \eta [u_{tt} - u_{xx} + q(x)u] dx dt$$

birleştirilmiş fonksiyoneli oluşturulur. $q \in Q$ kontrolüne δq artımı; q kontrolüne karşılık gelen u çözümüne ise δu artımı verilirse bu artımlara karşılık fonksiyoneldeki artımın,

$$\begin{aligned} \tilde{J}_\alpha(q + \delta q) &= \int_0^l [u(x, T) + \delta u(x, T) - y(x)]^2 dx + \alpha \|q + \delta q - r\|_{H^1(0, l)}^2 \\ &+ \int_0^T \int_0^l \eta [(u + \delta u)_{tt} - (u + \delta u)_{xx} + (q(x) + \delta q(x))(u + \delta u)] dx dt \end{aligned}$$

şeklinde olduğu görülür.

$$\delta \tilde{J}_\alpha(q) = \tilde{J}_\alpha(q + \delta q) - \tilde{J}_\alpha(q)$$

fark fonksiyoneli olmak üzere,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_\alpha(q) &= \int_0^l \delta u(x, T) 2[u(x, T) - y(x)] dx + \int_0^l [\delta u(x, T)]^2 dx \\ &+ \alpha \|q + \delta q - r\|_{H^1(0, l)}^2 - \alpha \|q - r\|_{H^1(0, l)}^2 \\ &+ \int_0^T \int_0^l \eta \left[(\delta u)_{tt} - (\delta u)_{xx} + q(x) \delta u + \delta q u + \delta q \delta u \right] dx dt \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

eşitliği yazılır. Bu eşitlikte yer alan

$$\|q + \delta q - r\|_{H^1(0, l)}^2 - \|q - r\|_{H^1(0, l)}^2$$

terimi

$$\begin{aligned} \|q + \delta q - r\|_{H^1(0, l)}^2 - \|q - r\|_{H^1(0, l)}^2 &= \int_0^l \left[(q + \delta q - r)^2 + (q' + \delta q' - r')^2 - (q - r)^2 - (q' - r')^2 \right] dx \\ &= \int_0^l \left[2(q - r) \delta q + 2(q' - r') \delta q' \right] dx + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0, l)}^2\right) \\ &= 2 \langle q - r, \delta q \rangle_{H^1(0, l)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0, l)}^2\right) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenir.

Artım fonksiyonelinin son terimine kısmi integrasyon uygulandığında $\eta(x, T) = 0$ şartı ve fark probleminde yer alan şartlar göz önünde bulundurularak

$$\int_0^T \int_0^l \eta \delta u_{tt} dx dt = \int_0^T \int_0^l \delta u \eta_{tt} dx dt - \int_0^l \delta u(x, T) \eta_t(x, T) dx$$

ve

$$\int_0^T \int_0^l \eta \delta u_{xx} dx dt = - \int_0^T \delta u(l,t) \eta_x(l,t) dt + \int_0^T \delta u(0,t) \eta_x(0,t) dt + \int_0^T \int_0^l \delta u \eta_{xx} dx dt$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeler artım fonksiyoneline yazılırsa,

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_\alpha(q) &= \int_0^l \delta u(x,T) 2[u(x,T) - y(x) - \eta_t(x,T)] dx \\ &+ \int_0^T \int_0^l \delta u [\eta_{tt} - \eta_{xx} + q(x)\eta] dx dt + \int_0^T \int_0^l \delta q [u\eta + \delta u \eta] dx dt \\ &+ 2\alpha \langle q - r, \delta q \rangle_{H^1(0,l)} + o(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

eşitliği elde edilir. δq ve δu artımları keyfi olduğundan, $\delta \tilde{J}_\alpha(q) = 0$ stasyonerlik koşulu için

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - \eta_{xx} + q(x)\eta &= 0 \\ \eta(x,T) &= 0 \\ \eta(0,t) = \eta(l,t) &= 0 \\ \eta_t(x,T) &= 2[u(x,T) - y(x)] \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

şartlarının sağlanması gerekir. Buradaki şartların tamamı eşlenik problemi oluşturur.

(4.1.3) probleminde yer alan $\eta \in C^1([0,T], L_2(0,l)) \cap C^0([0,T], H^1(0,l))$ fonksiyonu

eşlenik sınır değer probleminin çözümüdür ve $\forall \gamma \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l [-\eta_t \gamma_t + \eta_x \gamma_x + q(x)\eta \gamma] dx dt &= \int_0^l \eta_t(x,0) \gamma(x,0) dx \\ &- 2 \int_0^l [u(x,T) - y(x)] \gamma(x,T) dx \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

eşitliğini sağlar.

Şimdi bu çözümün var ve sınırlı olduğunu göstermek için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.1.1: Her bir $q(x)$ fonksiyonu için eşlenik problemin bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_8 \left(\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, l)}^2 \right) \quad (4.1.5)$$

veya sağ taraftaki norm değeri bilindiğinden bu eşitsizliğe denk olarak,

$$\|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_9 \quad (4.1.6)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: (4.1.3) eşlenik probleminde yer alan

$$\eta_{tt} - \eta_{xx} + q(x)\eta = 0$$

denkleminin her iki tarafı η_t fonksiyonu ile çarpılıp $(0, l)$ aralığında integrallenirse,

$$\int_0^l [\eta_{tt} - \eta_{xx} + q(x)\eta] \eta_t dx = 0 \quad (4.1.7)$$

eşitliği yazılır. Burada, (4.1.7) integral eşitliği

$$(\eta_x)_x \eta_t = (\eta_x \eta_t)_x - \eta_x \eta_{xt} \quad (4.1.8)$$

özdeşliğinden yararlanılarak,

$$\int_0^l (\eta_{tt} \eta_t + \eta_x \eta_{xt} + q(x)\eta \eta_t) dx = \int_0^l (\eta_x \eta_t)_x dx$$

biçiminde yeniden düzenlenir. Ayrıca,

$$\eta_{tt}\eta_t + \eta_x\eta_{xt} + q(x)\eta\eta_t = \frac{1}{2}\left[(\eta_t)^2 + (\eta_x)^2 + q(x)(\eta)^2\right],$$

olduğu da kullanılırsa, yukarıdaki eşitliğin

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[(\eta_t)^2 + (\eta_x)^2 + q(x)\eta^2 \right] dx \right\} = (\eta_x\eta_t) \Big|_{x=0}^{x=l} \quad (4.1.9)$$

şeklinde olduğu görülür. $\eta(0,t) = \eta(l,t) = 0$ şartları $\eta_t(0,t) = \eta_t(l,t) = 0$ sonucunu ortaya çıkaracağından ve bu eşitliğin her iki tarafı (t,T) aralığında integrallenirse,

$$\frac{1}{2} \int_0^l \left[[\eta_t(x,t)]^2 + [\eta_x(x,t)]^2 + q(x)[\eta(x,t)]^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[[\eta_t(x,T)]^2 + [\eta_x(x,T)]^2 + q(x)[\eta(x,T)]^2 \right] dx \quad (4.1.10)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi,

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l \left[[\eta_t(x,t)]^2 + [\eta_x(x,t)]^2 + q(x)[\eta(x,t)]^2 \right] dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Ayrıca, $\eta(x,t)$ fonksiyonunun $(0,l)$ aralığındaki enerji normunu

$$J(t) := \sqrt{E(t)} = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[[\eta_t(x,t)]^2 + [\eta_x(x,t)]^2 + q(x)[\eta(x,t)]^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (4.1.11)$$

şeklinde ifade edelim. $t > 0$ değişkenine bağlı bu norm,

$$\|\eta\|_E := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[[\eta_t(x,t)]^2 + [\eta_x(x,t)]^2 + q(x)[\eta(x,t)]^2 \right] dx \right\}^{1/2}$$

olarak gösterilir.

(4.1.10) eşitliği $J(t)$ integrali cinsinden

$$J^2(t) = J^2(T), \quad t \in [t, T] \quad (4.1.12)$$

olarak yeniden yazılabilir.

(4.1.12) eşitliğinde,

$$J(T) := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l [\eta_t(x, T)]^2 dx \right\}^{1/2} \quad (4.1.13)$$

biçimindedir.

Şimdi teoremin ispatında kullanacağımız bir lemma verelim.

Lemma 4.1.2: (4.1.3) eşlenik problemi için,

$$\|\eta_x\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{2}J(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.1.14)$$

$$\|\eta_t\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{2}J(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.1.15)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\int_0^l [\eta_x(x,t)]^2 dx \leq \int_0^l \left[[\eta_t(x,t)]^2 + [\eta_x(x,t)]^2 + q(x)[\eta(x,t)]^2 \right] dx$$

$$:= 2E(t)$$

şeklinde olup, enerji integralinin tanımından

$$\|\eta_x\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2J(t)}, \quad t \in [0, T]$$

(4.1.14) eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\int_0^l [\eta_t(x,t)]^2 dx \leq \int_0^l \left[[\eta_t(x,t)]^2 + [\eta_x(x,t)]^2 + q(x)[\eta(x,t)]^2 \right] dx$$

$$:= 2E(t)$$

eşitsizliğinden hareketle, enerji normunu da kullanarak

$$\|\eta_t\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2J(t)}, \quad t \in [0, T]$$

(4.1.15) eşitsizliği bulunur.

Ayrıca (4.1.3) eşlenik problemi için,

$$\|\eta_x\|_{L_2(0,T)} \leq \sqrt{2J(T)}, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.16)$$

$$\|\eta_t\|_{L_2(0,T)} \leq \sqrt{2J(T)}, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.17)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Şimdi teoremin ispatına geri dönelim ve $\|\eta\|_{L_2(0,t)}$ için bir kestirim yazalım:

$$\|\eta\|_{L_2(0,t)}^2 = \int_0^t [\eta(x,t)]^2 dx, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.18)$$

eşitliğin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevi alınır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} -2\|\eta\|_{L_2(0,t)} \|\eta'\|_{L_2(0,t)} &= -2 \int_0^t \eta(x,t) \eta_t(x,t) dx \\ &\leq 2\|\eta\|_{L_2(0,t)} \|\eta_t\|_{L_2(0,t)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $2\|\eta\| \neq 0$ ile bölünüp, sağ tarafta (4.1.17) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$-\|\eta'\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}J(T)$$

ifadesi elde edilir. $\eta(x, T) = 0$ olmak üzere, bu eşitsizliğin her iki tarafı $[t, T]$ aralığında integrallenirse,

$$\|\eta(x,t)\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}(T-t)J(T) \quad (4.1.19)$$

eşitsizliği bulunur ve (4.1.13) eşitliği bu eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\|\eta(x,t)\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}(T-t) \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t [\eta_t(x,T)]^2 dx \right\}^{1/2}$$

şeklinde yazılır. Eşlenik problemde yer alan

$$\eta_t(x,T) = 2[u(x,T) - y(x)]$$

şartı da kullanılarak, $c_8 = \frac{4T^3}{3}$ olmak üzere,

$$\|\eta(x, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_8 \left(\|u(x, T) - y(x)\|_{L_2(0, l)}^2 \right)$$

eşitsizliği veya sağ taraftaki normun değeri bilindiğinden bu eşitsizliğe denk olarak

$$\|\eta(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq c_9 \quad (4.1.20)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Böylece Teorem 4.1.1 ispatlanmış oldu.

Amaç fonksiyonelinin gradyeninin sürekliliğinin ispatında işimize yarayacak olan bir diğer işlem de, eşlenik problem için fark problemini oluşturmak ve bu problemin çözümüne ilişkin bir kestirim yazmaktır.

Bunun için eşlenik problemde $q \in L_2(0, l)$ elemanına δq artımı verelim. O halde eşlenik probleminin artımı

$$\eta_{\delta}{}_{tt} - \eta_{\delta}{}_{xx} + q + \delta q \eta_{\delta} = 0, (x, t) \in \Omega_T = (0, l) \times 0, T \subset \mathbb{R}^2$$

$$\eta_{\delta}(x, T) = 0, (\eta_{\delta})_t(x, T) = 2[u_{\delta}(x, T) - y(x)], x \in (0, l)$$

$$\eta_{\delta}(0, t) = 0, \eta_{\delta}(l, t) = 0, t \in (0, T]$$

şeklinde olup, bu problem eşlenik problemden çıkarılırsa,

$$\delta\eta_{tt} - \delta\eta_{xx} + q + \delta q \delta\eta + \delta q\eta = 0, (x, t) \in \Omega_T = (0, l) \times 0, T \subset \mathbb{R}^2 \quad (4.1.21)$$

$$\delta\eta(x,T) = 0, \quad \delta\eta_t(x,T) = 2\delta u(x,T), \quad x \in (0,l) \quad (4.1.22)$$

$$\delta\eta(0,t) = 0, \quad \delta\eta(l,t) = 0, \quad t \in (0,T) \quad (4.1.23)$$

eşlenik fark problemi elde edilir.

Şimdi eşlenik fark probleminde yer alan $\delta\eta(x,t)$ fonksiyonu için bir değerlendirme yazalım.

Teorem 4.1.3: Her bir $q(x)$ fonksiyonu için eşlenik fark probleminin bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\delta\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{10} \left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \right) \quad (4.1.24)$$

kestirimi geçerlidir.

İspat: (4.1.21) denkleminin her iki tarafını $\delta\eta_t$ fonksiyonu ile çarpıp $(0,l)$ aralığında integralleyelim.

$$\int_0^l \left[\delta\eta_{tt} - \delta\eta_{xx} + (q + \delta q)\delta\eta + \delta q\eta \right] \delta\eta_t dx = 0$$

Burada, integral eşitliği

$$\delta\eta_{xx} \delta\eta_t = (\delta\eta_x \delta\eta_t)_x - \delta\eta_x \delta\eta_{xt} \quad (4.1.25)$$

özdeşliğinden yararlanılarak,

$$\int_0^l (\delta\eta_{tt} \delta\eta_t + \delta\eta_x \delta\eta_{xt} + (q + \delta q)\delta\eta \delta\eta_t + \delta q\eta \delta\eta_t) dx = \int_0^l (\delta\eta_x \delta\eta_t)_x dx$$

şeklinde yeniden yazılır ve

$$\delta\eta_{tt}\delta\eta_t + \delta\eta_x\delta\eta_{xt} + \delta\eta\delta\eta_t = \frac{1}{2}\left[(\delta\eta_t)^2 + (\delta\eta_x)^2 + (\delta\eta)^2\right]$$

olduğu da kullanılırsa,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[(\delta\eta_t)^2 + (\delta\eta_x)^2 + (\delta\eta)^2 \right] dx \right\} = - \int_0^l \delta q \eta \delta\eta_t dx + (\delta\eta_x \delta\eta_t) \Big|_{x=0}^{x=l} \quad (4.1.26)$$

eşitliği elde edilir.

Eşlenik fark probleminde yer alan $\delta\eta(0,t) = \delta\eta(l,t) = 0$ şartlarından hareketle $\delta\eta_t(0,t) = \delta\eta_t(l,t) = 0$ olacağı açıktır. Böylece, yukarıdaki eşitlik

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^l \left[(\delta\eta_t)^2 + (\delta\eta_x)^2 + (q + \delta q) \delta\eta^2 \right] dx \right\} = - \int_0^l \delta q \eta \delta\eta_t dx$$

şeklinde yeniden düzenlenir ve bu eşitliğin her iki tarafı (t, T) aralığında integrallenirse,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta\eta_t(x, T))^2 + (\delta\eta_x(x, T))^2 + (q + \delta q) (\delta\eta(x, T))^2 \right] dx - \\ & \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta\eta_t(x, t))^2 + (\delta\eta_x(x, t))^2 + (q + \delta q) (\delta\eta(x, t))^2 \right] dx = - \int_t^T \int_0^l \delta q \eta \delta\eta_t dx dt \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca $\delta\eta(x, T) = 0$ olduğundan $\delta\eta_x(x, T) = 0$ elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta\eta_t(x, t))^2 + (\delta\eta_x(x, t))^2 + (q + \delta q) (\delta\eta(x, t))^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l (\delta\eta_t(x, T))^2 dx \\ & = - \int_t^T \int_0^l \delta q \eta \delta\eta_t dx dt \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi,

$$\delta E(t) := \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta \eta_t(x,t))^2 + (\delta \eta_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta \eta(x,t))^2 \right] dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım . $\delta \eta(x,t)$ fonksiyonunun $(0,l)$ aralığındaki enerji normunu

$$\delta J(t) := \sqrt{\delta E(t)} = \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta \eta_t(x,t))^2 + (\delta \eta_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta \eta(x,t))^2 \right] dx \right\}^{1/2} \quad (4.1.28)$$

şeklinde yazalım. Burada $t > 0$ değişkenine bağlı bu norm

$$\|u\|_{\delta E} := \left\{ \frac{1}{2} \int_0^l \left[(\delta \eta_t(x,t))^2 + (\delta \eta_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta \eta(x,t))^2 \right] dx \right\}^{1/2}, \quad t > 0$$

ile gösterilir.

Böylece, (4.1.27) eşitliği, $\delta J(t)$ integralinin tanımından hareketle

$$-\delta J^2(t) = -\delta J^2(T) - \int_t^T \int_0^l \delta q \eta \delta \eta dx dt, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.29)$$

biçiminde yazılabilir.

Burada,

$$\delta J(T) := \sqrt{2 \left(\int_0^l [\delta u(\cdot, T)]^2 dx \right)^{1/2}}$$

şeklindedir.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirebilmek için bir lemma verelim.

Lemma 4.1.4: (4.1.21) - (4.1.23) problemi için,

$$\|\delta\eta_x\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}\delta J(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.1.30)$$

$$\|\delta\eta_t\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}\delta J(t), \quad t \in [0, T] \quad (4.1.31)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} \int_0^l [\delta\eta_x(x,t)]^2 dx &\leq \int_0^l \left[(\delta\eta_t(x,t))^2 + (\delta\eta_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta\eta(x,t))^2 \right] dx \\ &:= 2\delta E(t) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde enerji normunun tanımı kullanılırsa,

$$\|\delta\eta_x\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}\delta J(t), \quad t \in [0, T]$$

yazılabileceğinden (4.1.30) eşitsizliği ispatlanır.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \int_0^l [\delta\eta_t(x,t)]^2 dx &\leq \int_0^l \left[(\delta\eta_t(x,t))^2 + (\delta\eta_x(x,t))^2 + (q + \delta q)(\delta\eta(x,t))^2 \right] dx \\ &:= 2\delta E(t) \end{aligned}$$

ve

$$\|\delta\eta_t\|_{L_2(0,t)} \leq \sqrt{2}\delta J(t), \quad t \in [0, T]$$

ifadelerinden de (4.1.31) eşitsizliği ispatlanır.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim ve $\delta J(t)$ için bir değerlendirme yapalım:

$$-\delta J^2 = -\int_0^t \int_0^l \delta q \eta \delta \eta_t dx dt, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.32)$$

eşitliğinin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevi alınır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} -2\delta J(t) \delta J'(t) &= -\int_0^l \delta q \eta(\cdot, T) \delta \eta_t(\cdot, T) dx + \int_0^l \delta q \eta(\cdot, t) \delta \eta_t(\cdot, t) dx \\ &\leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \|\eta\|_{L_2(0,l)} \underbrace{\|\delta \eta_t\|_{L_2(0,l)}}_{\leq \sqrt{2} \delta J(t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \|\eta\|_{L_2(0,l)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan, yukarıdaki eşitsizlik $2\delta J(t) \neq 0$ fonksiyonu ile bölünürse,

$$-\delta J'(t) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \|\eta\|_{L_2(0,l)}$$

ve (t, T) aralığında integrallenirse,

$$\delta J(t) \leq \delta J(T) + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^T \|\eta\|_{L_2(0,l)} dt, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.33)$$

şeklinde düzenlenir.

Şimdi de $\|\delta \eta\|_{L_2(0,l)}$ için bir değerlendirme yapalım:

$$\|\delta\eta\|_{L_2(0,l)}^2 = \int_0^l [\delta\eta(\cdot, t)]^2 dx, \quad t \in [0, T] \quad (4.1.34)$$

eşitliğinin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevi alınır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} -2\|\delta\eta\|_{L_2(0,l)} \frac{\partial}{\partial t} \|\delta\eta\|_{L_2(0,l)} &= -2 \int_0^l [\delta\eta(\cdot, t)] \frac{\partial}{\partial t} [\delta\eta(\cdot, t)] dx \\ &\leq 2\|\delta\eta\|_{L_2(0,l)} \underbrace{\left\| \frac{\partial}{\partial t} \delta\eta \right\|_{L_2(0,l)}}_{\leq \sqrt{2}\delta J(t)} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $2\|\delta\eta\|_{L_2(0,l)} \neq 0$ ifadesine bölünürse,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \|\delta\eta\|_{L_2(0,l)} \leq \sqrt{2}\delta J(t)$$

ifadesi yazılır ve $\delta J(t)$ fonksiyonu bu eşitsizlikte yazılırsa,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \|\delta\eta\|_{L_2(0,l)} \leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^T \|\eta\|_{L_2(0,l)} dt + 2 \left(\int_0^l [\delta u(\cdot, T)]^2 dx \right)^{1/2}$$

olduğu görülür. Son eşitsizliğin her iki yanını (t, T) aralığında integralleyelim.

$$\|\delta\eta(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} - \|\delta\eta(\cdot, T)\|_{L_2(0,l)} \leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^t \int_0^\tau \|\eta(\cdot, s)\|_{L_2(0,l)} ds d\tau + 2(T-t) \left(\int_0^l [\delta u(\cdot, T)]^2 dx \right)^{1/2}$$

Ayrıca eşlenik problem için fark probleminden $\delta\eta(\cdot, T) = 0$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\|\delta\eta(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)} \leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \int_0^t \int_0^\tau \|\eta(\cdot, s)\|_{L_2(0,l)} ds d\tau + 2(T-t) \left(\int_0^l [\delta u(\cdot, T)]^2 dx \right)^{1/2} \quad (4.1.35)$$

veya bu eşitsizliğe denk olarak

$$\|\delta\eta(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq 2 \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right)^2 \int_0^t \int_0^\tau \|\eta(\cdot, s)\|_{L_2(0,l)}^2 ds d\tau + 4(T-t)^2 \int_0^l \delta u^2(\cdot, T) dx$$

şeklinde yazılır. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ifade için,

$$\int_0^t \int_0^\tau \eta(x) ds d\tau = \int_0^t (t-\tau) \eta(\tau) d\tau$$

özdeşliği ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\int_0^t \int_0^l \eta(x, \tau)^2 dx d\tau \leq \left(\int_0^t 1 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \int_0^l \eta(x, \tau)^2 dx d\tau \right)^{1/2}, \quad t > 0$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\int_0^t \|\eta\|_{L_2(0,l)} d\tau \leq \sqrt{t} \|\eta\|_{L_2(\Omega)}, \quad t > 0 \quad (4.1.36)$$

ve

$$\int_0^t (t-\tau) \|\eta\|_{L_2(0,l)} d\tau \leq \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}} \|\eta\|_{L_2(\Omega)}, \quad t > 0 \quad (4.1.37)$$

formülleri yazılabilir. Dolayısıyla,

$$\|\delta\eta(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \underbrace{2 \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right)^2}_{\leq 2l \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2} \underbrace{\int_0^t (t-\tau) \|\eta(\cdot, \tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau}_{\leq \frac{t^3}{3} \|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2} + \frac{4(T-t)^2 t^3 c_1 2l}{3} \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (4.1.38)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.1.6) eşitsizliğinden

$$\|\eta(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_9$$

olduğu bilgisi kullanılırsa,

$$\|\delta\eta(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \left[\frac{8lc_1(T-t)^2 t^3}{3} + 4lc_9 \frac{t^3}{3} \right] \|\delta q\|_{H^1(0,t)}^2 \quad (4.1.39)$$

değerlendirmesi elde edilir. (4.1.28) eşitsizliğinde $c_{10} = \frac{8lc_1(T-t)^2 t^3}{3} + 4lc_9 \frac{t^3}{3}$ alınırsa,

$$\|\delta\eta(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{10} \|\delta q\|_{H^1(0,t)}^2$$

olduğu görülür.

Böylece Teorem 4.1.3 ispatlanmış oldu.

Şimdi gradyen hesabına geri dönelim. (4.1.2) artım fonksiyoneli

$$\delta\tilde{J}_\alpha(q) = \int_0^T \int_0^l \delta q \delta u \eta dx dt + \int_0^T \int_0^l \delta q u \eta dx dt + 2\alpha \langle q - r, \delta q \rangle_{H^1(0,t)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0,t)}^2\right) \quad (4.1.40)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral için, $c_{11} = 2lc_6c_9$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l \delta q \delta u \eta dx dt &\leq \left(\max_{0 \leq x \leq l} \delta q \right) \|\delta u\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \\ &\leq c_{11} \|\delta q\|_{H^1(0,t)}^2 \end{aligned}$$

değerlendirmesi geçerlidir. Böylece (4.1.40) eşitliği

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{J}_\alpha(q) &= \langle u\eta, \delta q \rangle_{L_2(\Omega)} + 2\alpha \langle q-r, \delta q \rangle_{H^1(0,l)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2\right) \\
&= \left\langle \int_0^T u\eta dt, \delta q \right\rangle_{L_2(0,l)} + 2\alpha \langle q-r, \delta q \rangle_{H^1(0,l)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2\right) \\
&= \langle \xi, \delta q \rangle_{H^1(0,l)} + 2\alpha \langle q-r, \delta q \rangle_{H^1(0,l)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2\right) \\
&= \langle \xi + 2\alpha(q-r), \delta q \rangle_{H^1(0,l)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2\right)
\end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenir. $H^1(0,l)$ uzayında Frechet türevin

$$\delta\tilde{J}_\alpha(q) = \left\langle \tilde{J}'_\alpha(q), \delta q \right\rangle_{H^1(0,l)} + o\left(\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2\right) \quad (4.1.41)$$

şeklinde olan tanım gereği fonksiyonelin gradyeni

$$\tilde{J}'_\alpha(q) = \xi + 2\alpha(q-r) \quad (4.1.42)$$

olarak elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafında yer alan $\xi(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned}
-\xi'' + \xi &= \int_0^T u\eta dt \\
\xi'(0) &= \xi'(l) = 0
\end{aligned} \quad (4.1.43)$$

denkleminin çözümüdür.

(4.1.43) ile ifade edilen problem, $J_\alpha(q)$ fonksiyonelinin Frechet türevini $H^1(0,l)$ uzayında hesaplayabilmek için, ihtiyaç duyulmuş olan ikinci eşlenik problemidir.

4.2. Gradyenin Lipschitz Sürekliliğinin Elde Edilmesi

Optimallik için gerek şartın elde edilmesinde fonksiyonelin gradyeninin Lipschitz sürekliliği oldukça önemlidir.

Bu yüzden gradyenin sürekliliğini göstermek için bir teorem verelim.

Teorem 4.2.1: (4.1.42) ile verilen $J'_\alpha(q)$ gradyeni Lipschitz süreklidir; yani

$$\|J'_\alpha(q + \delta q) - J'_\alpha(q)\|_{H^1(0,l)}^2 \leq c_{12} \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (4.2.1)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $c_{12} = [4c_{13} \cdot c_{10} + 4c_9 \cdot c_6 + 8\alpha^2] > 0$ Lipschitz sabiti vardır. Bu eşitsizliğin sağlanmasıyla fonksiyonelin gradyeninin sürekli olduğu söylenebilir.

İspat: Bunun için öncelikle (4.1.42) ile verilen fonksiyonelin gradyeninde yer alan $q \in Q$ fonksiyonuna $\delta q \in Q$ artımı verelim. Dolayısıyla fonksiyonelin gradyeninin artımı

$$J'_\alpha(q + \delta q) = \xi_\delta + 2\alpha(q + \delta q - r) \quad (4.2.2)$$

şeklinde olacaktır.

$$J'_\alpha(q) = \xi + 2\alpha(q - r) \quad (4.2.3)$$

olup, bu iki eşitliğin farkı alınır, $\delta\xi = \xi_\delta - \xi$ olmak üzere

$$\delta J'_\alpha(q) = \delta\xi + 2\alpha\delta q \quad (4.2.4)$$

ifadesi elde edilir. $H^1(0,l)$ uzayında her iki tarafın normu alınır, son eşitlik

$$\|\delta J'_\alpha(q)\|_{H^1(0,l)}^2 = \left[\|\delta\xi + 2\alpha\delta q\|_{H^1(0,l)} \right]^2$$

şeklinde yazılır. Paralelkenar kuralından yukarıdaki eşitlik

$$\|\delta J'_\alpha(q)\|_{H^1(0,l)}^2 \leq 2\|\delta\xi\|_{H^1(0,l)}^2 + 8\alpha^2\|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (4.2.5)$$

biçiminde düzenlenebilir.

(4.2.5) eşitsizliği incelendiğinde, bu eşitsizliğin sağ tarafında bulunan $\delta\xi(x)$ fonksiyonu için δq artımına bağlı bir kestirim yazmamız gerekecektir.

Bu yüzden bu ilişkiyi belirlemek için, ikinci eşlenik probleme artım verelim ve

$$\begin{aligned} -\xi''_\delta + \xi_\delta &= \int_0^T u_\delta \eta_\delta dt \\ \xi'_\delta(0) &= 0, \quad \xi'_\delta(l) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

problemi, ikinci eşlenik problemden çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} -\delta\xi'' + \delta\xi &= \int_0^T [u_\delta \delta\eta - u\delta\eta] dt \\ \delta\xi'(0) &= 0, \quad \delta\xi'(l) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

problemi elde edilir ve bazı düzenlemelerden sonra artım problemi

$$\begin{aligned} -\delta\xi'' + \delta\xi &= \int_0^T [u_\delta \delta\eta - \delta u \eta] dt \\ \delta\xi'(0) &= 0, \quad \delta\xi'(l) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

şekline dönüşür. Bu problemin $H^1(0,l)$ uzayında bir çözümü vardır ve bu çözüm

$$\|\delta\xi(x)\|_{H^1(0,l)} \leq \left\| \int_0^T [u_\delta \delta\eta + \delta u \eta] dt \right\|_{L_2(0,l)} \quad (4.2.9)$$

ifadesini sağlar. Şimdi (4.2.9) eşitsizliğine paralelkenar kuralını uygulayalım ve bu ifadeyi yeniden düzenleyelim. Bu durumda

$$\|\delta\xi(x)\|_{H^1(0,l)}^2 \leq 2\|u_\delta\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} [\|\delta\eta\|_{L_2(0,l)}^2] + 2\|\eta\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot \max_{0 \leq t \leq T} [\|\delta u(\cdot, t)\|_{L_2(0,l)}^2] \quad (4.2.10)$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan da anlaşılacağı üzere $\delta\xi(x)$ fonksiyonuna ilişkin bir kestirim yazmak için (4.2.10) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan u_δ , $\delta\eta$, η ve δu fonksiyonları için elde edilen kestirimleri kullanmak yeterli olacaktır. Bu fonksiyonlardan $\delta\eta$, η ve δu için gerekli kestirimler bulunmuştu. Burada (4.2.10) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan u_δ fonksiyonu için bir kestirim yazılması gerekir. (3.1.11) eşitsizliğinden

$$\|u_\delta\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c_{13} \quad (4.2.11)$$

olduğu kolaylıkla söylenebilir. O halde (4.2.11), (4.1.24), (4.1.6) ve (3.1.33) kestirimleri (4.2.10) eşitsizliğinde yerine yazılarak $\delta\xi(x)$ fonksiyonuna ait bir kestirim elde edilecektir.

Böylece (4.2.10) eşitsizliği

$$\|\delta\xi(x)\|_{H^1(0,l)}^2 \leq [2c_{13} \cdot c_{10} + 2c_9 \cdot c_6] \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \quad (4.2.12)$$

şeklinde olacaktır. Bu eşitsizlik de (4.2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \|\delta J'_\alpha(q)\|_{H^1(0,l)}^2 &\leq 2[2c_{13} \cdot c_{10} + 2c_9 \cdot c_6] \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 + 8\alpha^2 \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \\ &\leq [4c_{13} \cdot c_{10} + 4c_9 \cdot c_6 + 8\alpha^2] \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \\ &\leq c_{14} \|\delta q\|_{H^1(0,l)}^2 \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

olduğu görülür.

Burada $c_{12} = c_{14}$ alınırsa Teorem 4.2.1 ispat elde edilmiş olur.

Böylece $J'_\alpha(q)$ gradyeninin Q kümesinde sürekli olduğu ve $c_{12} > 0$ sabiti ile Lipschitz eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş oldu.

4.3. Optimallik için Gerek Şart

Bu bölümde, $q_* \in Q$ elemanının optimal çözüm olabilmesi için aşağıdaki ifadeyi gerek şart olarak ifade edebiliriz.

Vasilyev (1981)' in çalışmasından yola çıkarak, Q kümesi $H^1(0, l)$ Banach uzayının konveks alt kümesi, $J_\alpha(q)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve

$$Q_* = \left\{ q \in Q : J_\alpha(q) = J_\alpha^* = \inf_Q J_\alpha(q) \right\} \quad (4.3.1)$$

kümesi $J_\alpha(q)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olduğundan her $q_* \in Q_*$ ve her $q \in Q$ için

$$\langle J'_\alpha(q_*), q - q_* \rangle_{H^1(0, l)} \geq 0 \quad (4.3.2)$$

şartı optimallik için gerek şarttır. O halde bu tezde ele alınan problem için gerek şart

$$\langle \xi_* + 2\alpha(q_* - r), q - q_* \rangle_{H^1(0, l)} \geq 0 \quad (4.3.3)$$

şeklindedir.

Burada ξ_* fonksiyonu q_* elemanına karşılık ikinci eşlenik problemin çözümüdür.

4.4. Minimalleştirici Dizinin Kurulması

Şimdi, önceki bölümde verilen gradyen formülü kullanılarak, varlığı ve tekliğini ispat ettiğimiz optimal çözüme yakınsayacak bir minimalleştirici dizinin nasıl bulunacağını verelim.

Bunun için bir $q_0 \in Q$ başlangıç elemanı seçilir ve $m \geq 0$ için aşağıdaki adımlarla bir önceki q_m fonksiyon değerinden q_{m+1} hesaplanır.

1. (3.1.1)-(3.1.3) probleminin (3.1.11) anlamındaki u_m çözümü elde edilir.
2. u_m fonksiyonu kullanılarak, (4.1.3) eşlenik probleminin (4.1.4) anlamındaki η_m çözümü elde edilir.
3. u_m ve η_m fonksiyonlarını kullanılarak (4.1.40) ifadesindeki ikinci eşlenik problem için ξ_m çözümü elde edilir.
4. ξ_m fonksiyonu kullanılarak $J'_\alpha(q_m)$ gradyeni hesaplanır.
- 5.

$$q_{m+1} = q_m - \beta_m J'_\alpha(q_m) \quad (4.4.1)$$

elemanı bulunur ve q_1 elemanı bulunduktan sonra tekrar 1. aşamaya dönülerek sonraki elemanlar aynı prosedür ile hesaplanır.

Bu elemanın $J_\alpha(q)$ fonksiyonelinin minimalleştiricisi olması için, aşağıdaki eşitsizlik sağlanacak şekilde

$$J_{\alpha}(q_{m+1}) - J_{\alpha}(q_m) = \beta_m \left[-\|J'_{\alpha}(q_m)\|^2 + \frac{o(\beta_m)}{\beta_m} \right] < 0 \quad (4.4.2)$$

keyfi $\beta_m > 0$ sayıları seçilir.

Yeteri kadar küçük β_k sayıları için $\frac{o(\beta_k)}{\beta_k} \rightarrow 0$ olacağından (4.4.2) ile verilen eşitliğin sağ tarafının sıfırdan küçük olacağı açıktır. Bu durum da

$$J_{\alpha}(q_{m+1}) < J_{\alpha}(q_m) \quad (4.4.3)$$

eşitsizliğini gerektirecektir.

Böylece, (4.4.1) ile oluşturulacak olan $\{q_m\}$ dizisi $J_{\alpha}(q)$ fonksiyoneli için Q kümesinde bir minimalleştirici dizidir.

5. SONUÇ

Bu tezde hiperbolik bir denklemin katsayı fonksiyonu, H^1 uzayında kontrol fonksiyonu olarak seçildiğinde, çözümün belirli bir final anında istenilen bir hedefe yaklaştırılması problemi ele alınmıştır. Tezde optimal çözümün varlığı ve tekliği ayrıca bir kontrolün optimal olması için gerek şartın bulunması amaçlanmıştır.

Bu amaca ulaşmak için de (4.1.3) ve (4.1.43) ile verilen iki eşlenik problemin çözülmesinin ve bu çözümlerden ortaya çıkan ξ fonksiyonunun $\langle \xi_* + 2\alpha(q_* - r), q - q_* \rangle_{H^1(0,l)} \geq 0$ eşitsizliğini sağlamanın gerekliliği sonucuna ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

- Adams A.R., 1975. Sobolev Spaces, Academic Press, 140, 143 p, New York.
- Aksoy, A.G. and Khamsi M.A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, 8-9, New York.
- Clarkson, J.A., 1936. Uniformly Convex Spaces, Transactions of the American Mathematical Society, 40 (3), 415-420.
- Evans, L.C., 1998. Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 19, 271-272.
- Gugat, M., 2015. Optimal Boundary Control and Boundary Stabilization of Hyperbolic Systems, Springer, 1-2.
- Goebel, M., 1979. On Existence of Optimal Control. Math. Nachr., 93 (1), 67-73.
- Hasanov, A., 2008. Simultaneous determination of the source terms in a linear hyperbolic problem from the final overdetermination: weak solution approach, Journal of Applied Mathematics, 74 (1), 1-19.
- Hasanov, A., 2010. Kısmi Türevli Denklemler. Literatür Yayıncılık, 430 s, İstanbul.
- Hasanov, A. and Mukanova B., 2014. Relationship between representation formulas for unique regularized solutions of inverse source problems with final overdetermination and singular value decomposition of input-output operators, IMA Journal of Applied Mathematics, 80 (3), 1-21.
- Herty, M., Kurganov A. and Kurochkin D., 2014. Numerical Method for Optimal Control Problems Governed by Nonlinear Hyperbolic Systems of Pdes, Communications in Mathematical Sciences, 13 (1), 15-48.
- Kröner, A., 2011. Adaptive Finite Element Methods for Optimal Control of Second Order Hyperbolic Equations, Computational Methods in Applied Mathematics, 11 (2), 214-240.
- Ladyzhenskaya, O.A., 1985. Boundary Value Problems in Mathematical Physics, Springer-Verlag, 322 p, New York..
- Lebedev, L.P., Vorovich I.I. and Gladwell G.M.L., 1996. Functional Analysis Applications in Mechanics and Inverse Problems, Kluwer Academic Publishers, 55-56, New York.
- Majewski, M., 2009. Stability Analysis of an Optimal Control Problem for a Hyperbolic Equation, Journal of Optimization Theory and Applications, 141 (1), 127-146.
- Serovajsky, S., 2013. Optimal Control for Systems Described by Hyperbolic Equation with Strong Nonlinearity, Journal of Applied Analysis and Computation, 3 (2), 183-195.
- Soykan, Y., 2012. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayınları, 304-305, Ankara.
- Strauss, W. A., 2008. Partial Differential Equations an Introduction, John Wiley&Sons, 11-13, United State of America.
- Subaşı, M., 2002. An optimal control problem governed by the potential of a linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 131 (1), 95-106.
- Subaşı, M., 2004. A Variational method of optimal control problems for nonlinear Schrödinger equation. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 20 (1), 82-89.

- Subaşı M., 2012. On the Regularized Solutions of Optimal Control Problem in a Hyperbolic System, *Abstract and Applied Analysis*, 2012(2012), 12 p.
- Tagiyev, R.K., 2012. On Optimal Control of the Hyperbolic Equation Coefficients, *Automation and Remote Control*, 73(7), 1145-1155.
- Thomas, G.B., Weir M.D. and Hass J.R., 2005. *Calculus*, Addison-Wesley, 805 p, United States.
- Tikhonov, A. N. and Samarskii A. A., 1963. *Equations of Mathematical Physics*. Dover Publications, 765 p, New York.
- Vasilyev, F.P., 1981. *Ekstremal Problemlerin Çözüm Metotları*. Nauka, 400 s, Moskova.
- Yosida, K., 1980. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, 624 p, New York.



ÖZGEÇMİŞ

1987 yılında Şanlıurfa'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Şanlıurfa'da tamamladı. 2006 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yükseköğrenimine başlayarak, 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında yüksek lisans eğitime başlayıp 2012 yılında yüksek lisans mezunu oldu. Yine aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında doktora öğrenimine başladı.

Halen Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.