

ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA: TEORİK ÇERÇEVE VE UYGULAMALAR

CROSS CLASSIFICATION: THEORETICAL FRAMEWORK AND APPLICATIONS

BEKİR ŞEN

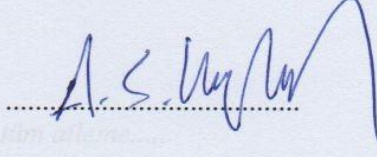
YRD. DOÇ. DR. YAKUP ÖZKAZANÇ
Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı için Öngördüğü
DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

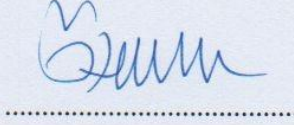
2016

BEKİR ŞEN'in hazırladığı “**Çapraz Sınıflandırma: Teorik Çerçeve ve Uygulamalar**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **ELEKTRİK ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. A. Salim Kayhan
Başkan



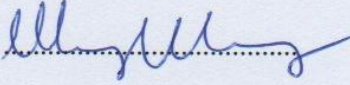
Yrd. Doç. Dr. Yakup Özkazanç
Danışman



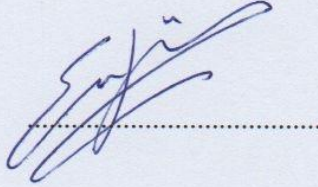
Prof. Dr. Ziya Telatar
Üye



Doç. Dr. İlkay Ulusoy
Üye



Yrd. Doç. Dr. S. Esen Yüksel
Üye



Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Salih Bülent ALTEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

beni sonuna kadar destekleyen tüm aileme.....



ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada,

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

16/12/2016

BEKİR ŞEN

ÖZET

ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA: TEORİK ÇERÇEVE VE UYGULAMALAR

Bekir ŞEN

Doktora, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Yakup Özkazanç

Aralık 2016, 110 sayfa

Örüntü tanımanın amacı karmaşık karar verme işlemlerine açıklık getirmek ve bunları hesaplamalı olarak gerçekleyebilmektir. Bunu yapabilmek için örüntü tanıma algoritmaları hangi sınıfa ait olduğu bulunmak istenen verinin özniteliklerini, veri kümesinde daha önceden kayıtlı özniteliklerle karşılaştırmakta ve karar vermektedir. Pratikte birçok probleme çözüm olan bu yaklaşım, veri kümesinde kayıtlı olan özniteliklerle ölçülen özniteliklerin farklı uzayların elemanları olduğu durumda kullanılamamaktadır. Veri kümesinde kayıtlı olan öznitelikler ile ölçülebilen özniteliklerin farklı olduğu durumlardaki sınıflandırma problemi 'çapraz sınıflandırma' olarak nitelendirilmiştir. Çapraz sınıflandırma, örüntü tanıma algoritmalarında kullanılacak öznitelikleri doğrudan ölçemediğimiz veya belirleyemediğimiz durumlarda sınıflandırma ve tanıma yapabilmeyi hedefleyen yeni bir yaklaşımdır.

Bu çalışma, istatistiksel uzaklık ölçütlerinin incelenmesi, doğrusal minimum ortalama karesel hata (DMOKH) kestiricisi tabanlı çapraz sınıflandırma, çapraz sınıflandırmada gürültülü öznitelik modellemesi ve Kanonik Korelasyon Analizi (KKA) tabanlı çapraz sınıflandırma yönteminin oluşturulması temel başlıklarını içermektedir.

Uzaklık ölçütleri istatistiksel örüntü tanıma ve sınıflandırma problemlerinin temel araçlarından birisidir. Birçok alanda kullanılan uzaklık ölçütleri, iki objenin birbirlerinden ne kadar ayrı olduğunu ifade etmek için kullanılır. Bhattacharyya Uzaklık ölçütü de sınıfların ayrıştırılabilirliğini belirtmekte sıklıkla kullanılan istatistiksel bir uzaklık ölçütüdür. Bu çalışmada, sınıfların ayrıştırılabilirliği ile ilgili sınır değerleri belirleyebilme özelliğinden dolayı çapraz sınıflandırma yaklaşımlarının incelenmesinde Bhattacharyya Uzaklık ölçütü kullanılmıştır.

DMOKH yöntemi çapraz sınıflandırmada kullanılabilecek en temel yöntemlerden biridir. Bu çalışmada DMOKH kestirici tanımlanmış ve çapraz sınıflandırma problemine uygulanmıştır.

Ölçülemeyen özniteliklerin doğrudan kestirilmesi esasına dayanan bu yöntemin başarımı ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Gürültülü öznitelik modeli, kestirim sonucunda ortaya çıkan hatanın, ölçülemeyen öznitelikler üzerinde gürültü olarak modellenmesi temeline dayanmaktadır. Bu model, kestirim sonrasında sınıflandırma performanslarının analitik olarak incelenmesine imkan sağlamaktadır. Bhattacharyya Uzaklık (BU) ile sınıflandırma performansı arasındaki bağıntı gürültülü öznitelik modeliyle ayrıntılı olarak incelenmiştir.

KKA metodolojisinin çapraz sınıflandırma için nasıl kullanılabileceği incelenmiş ve bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntemin öznitelik seçiminde sağladığı avantajlar sunulmuştur.

DMOKH kestiricisi kullanılarak yapılabilecek çapraz sınıflandırma ile KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yönteminin ilişkisi incelenmiş ve KKA tabanlı çapraz sınıflandırmanın eldeki tüm öznitelikler kullanıldığı durumda DMOKH yöntemiyle aynı performans değerini sağladığı gösterilmiştir.

Çalışmada sentetik ve gerçek veri kümeleri kullanılarak farklı çapraz tanıma problemleri ile uygulamalar çalışılmıştır. Önerilen yöntemler, eskizler üzerinden yüz tanıma problemine uygulanmış, sonuçlar literatürdeki diğer yöntemler ile karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir. Ayrıca, farklı mesafelerden elde edilmiş farklı çözünürlükteki yüz imgeleri üzerinde de önerilen çapraz sınıflandırma yöntemi ile yüz tanıma uygulaması yapılmış ve sonuçlar tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Örüntü Tanıma, Çapraz Sınıflandırma, Kanonik Korelasyon Analizi, Mesafe Ölçütleri, DMOKH kestiricisi, Yüz Tanıma, Eskiz Tanıma

ABSTRACT

CROSS CLASSIFICATION: THEORETICAL FRAMEWORK AND APPLICATIONS

Bekir ŞEN

**Doctor of Philosophy, Department of Electrical and
Electronics Engineering**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Yakup Özkazanç

December 2016, 110 pages

Pattern identification algorithms can be exploited for single-class or multi-class identification problems. In conventional applications, identification algorithms are based on functions of measured features. However in some cases, we already have an identification algorithm but the measured features are different from the expected features. In such cases, we can first estimate the needed features from the measured ones and then use the identification algorithm with the estimated features. This work proposes a framework for such Cross Classification problems.

This study can be grouped under four different headings. These can be summarized as follows; 1-distance measures, 2-Linear Minimum Mean Square Error (LMMSE) estimator based cross classification, 3-noisy feature modelling for cross classification and 4-Canonical Correlation Analysis base cross classification method.

Distance measure is one of the main instruments of statistical pattern recognition and classification problems. It is used to measure the separation of the two objects. Bhattacharyya Distance is one of the statistical distance measures used for class separability problems. This distance measure is utilised in this study for investigation of different cross classification approaches, because of its usability in limit values for classification.

LMMSE based method is one of the most basic methods used for the cross-classification. An LMMSE predictor based on the direct prediction of unmeasurable features principle is defined in this study and it is applied to the cross classification problems. The performance of this approach is investigated in detail.

The noisy feature model is based on modelling of the prediction errors as noise on unmeasurable features. This model enables the analytic study of the classification performances after prediction. The correlation between Bhattacharyya Distance and classification performance

is analysed using noisy feature model. The utilisation of CCA methodology for cross classification is investigated and a method is proposed in this work. Moreover, the advantages of this method for feature selection and reduction is presented.

The relation between LMMSE based and CCA based cross classification is studied. The CCA based classification is presented to perform similar to LMMSE method when all features are employed. In this study we have also shown the applications of different cross-classification problems using synthetic and real data sets. The proposed methods are applied to face recognition from sketches problem and the results are presented with comparisons to other methods in literature. In addition, the presented cross classification method is used for the face recognition from facial pictures captured from different distances problem and the results are discussed.

Keywords: Cross Classification, Canonical Correlation Analysis, Distance Measures, LMMSE Estimator, Face Recognition, Sketch Recognition

TEŞEKKÜR

Bu tezin oluşmasında sağladığı değerli fikir ve yardımlar, gösterdiği anlayış ve sabır dolayısıyla sayın Yrd. Doç. Dr. Yakup Özkazanç'a teşekkür ederim. Bilgi ve deneyimlerini paylaşan değerli jüri üyelerine teşekkür ederim.

Tez çalışmasının ilk aşamalarında değerli fikirlerini benimle paylaşan Yrd. Doç. Dr. Semih Bingöl'e teşekkür ederim.

Desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen ve beni daima destekleyen eşime, anneme ve babama teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
ÇİZELGELER	viii
ŞEKİLLER	ix
SÖZLÜKÇE	xi
SİMGELER VE KISALTMALAR	xiii
1 GİRİŞ	1
1.1 Çapraz Sınıflandırma Nedir?	2
1.2 İçerik	3
1.3 Tezin Katkısı	4
2 SINIFLAR ARASI UZAKLIK ÖLÇÜTLERİ	6
2.1 Gauss Dağılımları ve Bhattacharyya Uzaklığı	8
2.2 Tersinir ve Türevlenebilir Dönüşümler ve Bhattacharyya Uzaklığı	12
3 DMOKH KESTİRİMİ İLE ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA	15
3.1 Öznitelik Kestirimi	15
3.2 Doğrusal Minimum Ortalama Karesel Hata (DMOKH) Kestiricisi	16
3.3 Çapraz Sınıflandırma İçin Yöntem	18
3.4 DMOKH Kestiricisi ve Sınıf Dağılımları	19
3.5 Önerilen Çapraz Sınıflandırma Yönteminin Performans Sınırları	26
4 ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA İÇİN GÜRÜLTÜ MODELİ	30
4.1 Gürültü Modeli ve Sınıflandırma Performansı	30
5 ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA İÇİN KKA YAKLAŞIMI	36
5.1 Kanonik Korelasyon Analizi	36
5.2 KKA ile Öznitelik Belirleme ve Öznitelik İndirgeme	41

5.3	KKA ile Çapraz Sınıflandırma	43
6	UYGULAMALAR	47
6.1	IRIS Veri Kümesi Uygulaması	48
6.2	CMU Veri Seti Yüz Tanıma Uygulaması	57
6.3	Genetik İşaretleyiciler ile Etnik Köken Belirleme Uygulaması	63
6.4	YDNA ve Otozomal Veri Kümesi ile Haplogrup Belirleme Uygulaması	70
6.5	Düşük Çözünürlüklü İmgelerden Yüz Tanıma Uygulaması	73
6.6	Eskizden Yüz Tanıma Problemi	80
6.6.1	KKA ile Eskiz Tanıma Yöntemi	81
6.6.2	KKA ile Eskiz Tanıma Uygulaması	83
6.7	Güvenlik Kamerası Yüz Tanıma Problemi	87
6.7.1	KKA ile Güvenlik Kamerasında Yüz Tanıma Yöntemi	88
6.7.2	KKA ile Farklı Çözünürlükte Yüz Tanıma Uygulaması	91
7	SONUÇLAR	97
	KAYNAKLAR	106
	ÖZGEÇMİŞ	106
A	EK	109
B	EK	110

ÇİZELGELER

Sayfa

Çizelge 3.1 Birleştirilmiş Veri Kümeleri için Ortalama Değer Vektörleri ve Eşdeğişinti Matrisleri	24
Çizelge 3.2 DMOKH Kestirim Sonrası Ortalama Değer Vektörleri ve Eşdeğişinti Matrisleri	25
Çizelge 6.1 Test ve Kestirilen Görüntülerin 1.Sınıfı Olan Mahalanobis Uzaklıkları	61
Çizelge 6.2 Test ve Kestirilen Görüntülerin 2.Sınıfı Olan Mahalanobis Uzaklıkları	61
Çizelge 6.3 Eskiz Tanıma Başarı Oranı Karşılaştırması	86
Çizelge 6.4 Farklı Çözünürlükte Yüz Tanıma için Rank-1, Rank-3 ve Rank-5 Tanıma Oranları	94

ŞEKİLLER

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 Sınıf-1 ve Sınıf-2'ye Ait Verilerin Dağılımı	19
Şekil 3.2 Ölçülebilen(y), Gerçek(x) ve Kestirilen(x_{est}) Değerlerin Olasılık Dağılımları	27
Şekil 3.3 Hata($x - x_{est}$)'nın Olasılık Dağılımı	29
Şekil 5.1 Kanonik Korelasyon Analizi	37
Şekil 5.2 Kanonik Korelasyon Analizi İle Öznitelik Belirleme	43
Şekil 5.3 KKA ile Çapraz Tanıma Yöntemi	44
Şekil 6.1 İki Tür Süsen Bitkisinin Çanak Yaprak (X Veri Kümesi) Öznitelikleri	50
Şekil 6.2 İki Tür Süsen Bitkisinin Taç Yaprak (Y Veri Kümesi) Öznitelikleri .	51
Şekil 6.3 Kestirilen (x_{est}) Veri Kümesi Öznitelikleri	52
Şekil 6.4 Her İki Tür Süsen Bitkisinin X Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı	53
Şekil 6.5 Her İki Tür Süsen Bitkisinin Y Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı .	54
Şekil 6.6 Her İki Tür Süsen Bitkisinin x_{est} Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı ($KS_{x_{est}}$) ve X Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı (KS_x)	55
Şekil 6.7 CMU Veri Kümesinden Örnekler	57
Şekil 6.8 Ön-Normal ve Sol-Normal Test Görüntü Örnekleri	59
Şekil 6.9 Genetik Veriler ile Etnik Köken Belirleme Probleminde Sınıflandırma Hata Oranın Kullanılan Öznitelik Sayısına Göre Değişimi	64
Şekil 6.10 Otozomal Veri Kümesinin İlk 2 Öznitelik Değerleri ve Kestirimi Değerleri	66
Şekil 6.11 U Ara Uzayına Aktarılmış Genetik Verilerin İlk 2 Öznitelik Değerleri	67
Şekil 6.12 Otozomal Veri Kümesinin İlk 2 Öznitelik Değerlerinin ve Kestirimlerinin Ortalama Karesel Hatası	68
Şekil 6.13 U Ara Uzayına Aktarılmış Genetik Verilerin İlk 2 Öznitelik Değerlerinin ve Kestirimlerinin Ortalama Karesel Hatası	68
Şekil 6.14 Genetik Veriler ile Y-DNA Haplogrubu Belirleme Hata Oranı	71
Şekil 6.15 Örnek Bireye Ait 10 Farklı Açıdan Elde Edilmiş Yüksek Çözünürlüklü Yüz İmgeleri	73
Şekil 6.16 Örnek Bireye Ait 10 Farklı Açıdan Elde Edilmiş Düşük Çözünürlüklü Yüz İmgeleri	74
Şekil 6.17 Düşük Çözünürlük ve Farklı Açılardan Yüz Tanımda 'Birini Dışarda Bırak' Stratejisi ile 20 Sınıfın Sınıflandırma Hata Oranı	76

Şekil 6.18	Düşük Çözünürlük ve Farklı Açılardan Yüz Tanımada 'Birini Dışarda Bırak' Stratejisi ile 40 Sınıfın Sınıflandırma Hata Oranı	77
Şekil 6.19	Düşük Çözünürlük ve Farklı Açılardan Yüz Tanımada 'Beşini Dışarda Bırak' Stratejisi ile 40 Sınıfın Sınıflandırma Hata Oranı . . .	78
Şekil 6.20	KKA ile Eskiz Tanıma Eğitim ve Test Basamakları Gösterimi	81
Şekil 6.21	(a) CUHK Yüz Eskiz Veri Kümesi, (b) AR Yüz Eskiz Veri Kümesi .	84
Şekil 6.22	Döndürme-Ölçekleme ve Koordinat Sabitleme Sonrası Örnekler . .	85
Şekil 6.23	KKA ile Farklı Çözünürlükte Yüz Tanıma İşlem Basamakları Gösterimi	89
Şekil 6.24	1m Mesafeden Elde Edilmiş Görüntü Örnekleri	91
Şekil 6.25	150 m Mesafeden Elde Edilmiş Görüntü Örnekleri	92
Şekil 6.26	Önişleme Sonrası YÇ Yüz Görüntüsü Örnekleri	92
Şekil 6.27	Önişleme Sonrası DÇ Yüz Görüntüsü Örnekleri	93
Şekil 6.28	Farklı Mesafe Yüz Tanıma İçin, TBA ve Önerilen Yöntemin Tüm Rank Değerleri Başarım Oranları	95
Şekil 6.29	Farklı Mesafe Yüz Tanıma İçin, TBA ve Önerilen Yöntemin Rank-5 Tanıma Oranları	96

SÖZLÜKÇE

Alan Uyarlaması	Domain Adaptation
Aşağı Örnekleme	Downsampling
Beklenen Değer	Expected Value
Benzerlik	Similarity
Bhattacharyya Katsayısı	Bhattacharyya Coefficient
Bhattacharyya Uzaklığı	Bhattacharyya Distance
Birini Dışarıda Bırakma	Leave One Out
Çalışma Çerçevesi	Framework
Çapraz Sınıflandırma	Cross Classification
Doğrusal Minimum Ortalama Karesel Hata	Linear Minimum Mean Square Error
En Yakın Ortalama Sınıflandırıcı	Nearest Mean Classifier
Görerek-Eskiz	View Sketch
Güdümlü Öğrenme	Supervised Learning
Güdümsüz Öğrenme	Unsupervised Learning
Iraksama	Divergence
İlinti	Correlation
Kanonik Korelasyon	Canonical Correlation
Kanonik Korelasyon Analizi	Canonical Correlation Analysis
Kapalı Form	Closed Form
Karar Kuramı	Decision Theory
Karesel Sınıflandırıcı	Quadratic Classifier
Katsayı	Coefficient
Kompozit-Eskiz	Composite Sketch
Kriminal-Eskiz	Forensic Sketch
Makine Öğrenimi	Machine Learning
Maliyet Fonksiyonu	Cost Function
Matris Evirme Denkliği	Matrix Inversion Lemma
Minimum Ortalama Karesel Hata	Minimum Mean Square Error
Olasılık Dağılım Fonksiyonu	Probability Distribution Function
Ortalama Karesel Hata	Mean Square Error
Örüntü Tanıma	Pattern Recognition
Öznitelik	Feature

Önsel Olasılık
Sınıflandırma
Sonsal Olasılık
Sürekli Konveks Reel
Temel Bileşenler
Temel Bileşenler Analizi
Tersinir
Türevsel Eşyapı Dönüşümü
Uzaklık Ölçütü
Üçgen Eşitsizliği
Yakın Kızılötesi
Yukarı Örneklem

Prior Probability
Classification
Posterior Probability
Continuous Convex Real
Principal Components
Principal Components Analysis
Invertible
Diffeomorphism
Distance Measure
Triangle Inequality
Near-Infrared
Upsampling



SİMGELER VE KISALTMALAR

BK	Bhattacharyya Katsayısı
BU	Bhattacharyya Uzaklığı
CHUK Veri Kümesi	CUHK Face Sketch Database
CMU Veri Kümesi	Carnegie Mellon University Face Images Data Set
ÇS	Çapraz Sınıflandırma
DÇ	Düşük Çözünürlük
DMOKH	Doğrusal Minimum Ortalama Karesel Hata
KKA	Kanonik Korelasyon Analizi
KS	Karesel Sınıflandırıcı
MOKH	Minimum Ortalama Karesel Hata
μ_x	X Veri Kümesi Ortalama Değer Vektörü
η	Gürültü
ODF	Olasılık Dağılım Fonksiyonu
OKH	Ortalama Karesel Hata
P_x	X Veri Kümesi Eşdeğişinti Matrisi
SÇ	Süper Çözünürlük
TBA	Temel Bileşenler Analizi
YÇ	Yüksek Çözünürlük

1. GİRİŞ

Örüntü tanımanın amacı karmaşık karar verme işlemlerine açıklık getirmek ve geliştirilen yaklaşımları sayısal hesaplama sistemleri üzerinde çalıştırabilmektir [1]. Bu karar verme işlemleri, karmaşık veri kümeleri içerisindeki belirli örüntüleri bulma, öğrenme veya tanıma şeklinde olabilmektedir. Örüntü tanıma; etiketli verilerden güdümlü öğrenme (supervised learning) yöntemi ile yapılabildiği gibi, etiketsiz veriler aracılığı ile güdümsüz öğrenme (unsupervised learning) yöntemi ile de yapılabilmektedir [2]. Örüntü tanıma yaklaşımları genel olarak yapısal (structural) ve istatistiksel (statistical) örüntü tanıma olarak iki alt gruba ayrılmıştır [3]. Sayısal verilere dönüştürülebilen ve ölçülebilen bilgilerin belirli bir düzende oluşturduğu veri kümelerine örüntü denir. Örüntü, aynı zamanda kaotik olmayan, karmaşa içermeyen yapısal veri seti anlamındadır [4]. Makine öğreniminin bir alt dalı olan örüntü tanıma, günümüzde oldukça yaygın kullanım alanları bulmaktadır. Biyoloji, adli bilimler, uzaktan algılama vb. disiplinler örüntü tanımanın sıklıkla kullandığı alanlardandır.

İstatistiksel örüntü tanıma yöntemleri öznitelikleri (features) yapısal örüntü tanıma yöntemleri ise basit yapıları (primitives) kullanarak örüntüleri tanımaya çalışırlar. İstatistiksel örüntü tanıma yaklaşımında, örüntüler bir öznitelik uzayında vektör olarak tanımlanırlar. Bu vektörler, karar kuramı (decision theory) yaklaşımları ile öznitelik uzayında ayrıştırılır veya gruplanırlar [2, 5]. Yapısal örüntü tanıma ise, hiyerarşik bir bakış açısından örüntüleri tanımaya çalışır. Şekil, uzunluk gibi morfolojik özellikler ile tanımlanan basit ve küçük yapılar karmaşık örüntüleri tanımlamakta kullanılır. Tanıma ve gruplama işlemleri bu yapılar üzerinden yapılır. Yapısal örüntü tanıma yöntemleri, jenerik olmayan ve yeni bir alana uygulanması zor yöntemlerdir. Tanıma ve sınıflandırma işlemlerinde kullanılacak yapılar alan bilgisi birikimi gerektirmektedir [5]. Bu çalışmada çapraz tanıma problemi, güdümlü öğrenme tabanlı istatistiksel tanıma yöntemleri çerçevesi içinde ele alınmış ve alan bilgisi olmadan kolaylıkla uygulamaya geçirilebilecek genel bir teorik çerçeve oluşturulmuştur.

Bu çalışmada çapraz sınıflandırma problemleri için genel bir çerçeve çizilmesi planlandığından, istatistiksel örüntü tanıma yöntemleri tercih edilmiştir. Geleneksel istatistiksel yöntemler, tanıma yapabilmek için, hangi sınıfa ait olduğu bulunmak istenen verinin özniteliklerini, veri kümesinde daha önceden kayıtlı özniteliklerle karşılaştırmakta ve karar vermektedir. Pratikte birçok probleme çözüm olan bu yöntem, veri kümesinde kayıtlı olan özniteliklerle ölçülen/çıkarılan özniteliklerin farklı uzayların elemanları olduğu durumlarda kullanılamamaktadır. Çapraz tanıma olarak tanımlanan bu yaklaşım, örüntü tanıma algoritmalarında kullanılacak öznitelikleri doğrudan ölçemediğimiz veya belirleyemediğimiz durumlarda sınıflandırma ve tanıma yapabilmeyi hedeflemektedir.

Çapraz tanıma problemi, yüz-eskiz tanıma, farklı duruşlar altında yüz tanıma, farklı çözünürlüklerdeki güvenlik kameralarından yüz tanıma gibi pratik problemlerde karşımıza çıkabilmektedir. Bu pratik problemler özellikle sonraki yıllarda çokça çalışılmış olmasına karşın [6, 7, 8], farklı problemlerde hızlı ve etkin bir şekilde uygulanacak genel bir çalışma çerçevesi ortaya konulamamıştır. Bu çalışmada, çapraz tanıma problemi tanımlanmış ve genel bir çalışma yapısı sunabilmek için problemin çözümüne yönelik farklı yaklaşımlar ortaya konularak konu incelenmiştir.

Çapraz sınıflandırma, çözmeye çalıştığı problem bakımından diğer sınıflandırma problemlerine benzese de kullandığı yöntem ve yaklaşımlar bakımından diğer sınıflandırma yöntemlerinden ayrılmaktadır. Bu bölümde, Çapraz Sınıflandırma problemi tanımlandıktan sonra çözüm yaklaşımı kısaca sunulacak ve çalışmanın literatüre olan katkısı tanımlanacaktır.

1.1 Çapraz Sınıflandırma Nedir?

Standart örüntü tanıma yöntemleri, doğrudan ölçülen öznitelikler veya bu özniteliklerin indirgenmiş alt kümeleri üzerinden örüntüyü tanımaya çalışmaktadır. Standart örüntü tanıma probleminde, tanınmak istenen örüntünün ölçülen öznitelikleri ile veri kümesinde kayıtlı öznitelikler aynı uzayda tanımlanmış vektörlerdir. Çapraz tanıma olarak sunulan problemde ise durum daha farklıdır.

Çapraz tanımda amaç; tanınmak veya sınıflandırılmak istenen objenin ölçülebilen öznitelikleri veri kümesinde kayıtlı öznitelik uzayından farklı bir öznitelik uzayının elemanları olduğu durumda da tanıma/sınıflandırma yapabilmektir. Bu amaca ulaşabilmek için tanıma yapılacak uzay üzerine, tanınacak objenin yanı sıra veri kümesinde kayıtlı özniteliklerin de dönüştürülmesi gerekmektedir. Ölçülen öznitelik uzayında tanıma yapmayıp, veri kümesinde kayıtlı öznitelik uzayında veya tanımlanacak yeni bir uzayda tanıma yapma yaklaşımını Çapraz Sınıflandırma (ÇS) olarak tanımlıyoruz.

Çapraz sınıflandırma, veri kümesinde kayıtlı öznitelik veya ölçülen öznitelik uzayında yapılabildiği gibi yeni tanımlanacak ara uzaylarda da yapılabilir. Bu tez kapsamında, seçilen bir ara uzay üzerinde çapraz sınıflandırmaya yönelik yaklaşımlar ortaya konulmuştur.

Herhangi iki nicelik veya iki küme arasında uzaklık ölçümünün veya karşılaştırmanın anlamlı olabilmesi için niceliklerin aynı türden olması gerekir. Çapraz sınıflandırma yöntemi, farklı olan öznitelikleri belirli yöntemler ile ortak bir uzaya indirgedikten sonra sınıflandırma yapmayı hedeflemektedir. Çapraz sınıflandırma yapabilmek için ölçülebilen özniteliklerden sınıflandırıcının tanımlandığı uzaya geçişin açıkça tanımlanmış olması gerekmektedir. X uzayı sınıflandırıcının tanımlandığı uzayı, Y uzayı ise doğrudan ölçülebilen özniteliklerin

tanımlandığı uzayı ifade ederse, çapraz sınıflandırma yaklaşımı üç temel unsur ile ifade edilebilir;

- Y uzayında elde edilen özniteliklerin, X uzayına veya bir ara uzaya aktarılması (Öznitelik kestirimi)
- X uzayına veya ara uzaya aktarılan özniteliklerden, sınıflandırmada kullanılacak olan özniteliklerin çıkarımı (Öznitelik seçimi)
- X uzayında veya ara uzayda daha önceden tanımlı olan sınıflandırıcı kullanılarak tanıma/sınıflandırma yapılması.

Y ve X uzayında elde edilen öznitelikler, farklı dönüşüm matrisleri ile farklı uzaylara taşınabilirler. Bu dönüşüm ile, X uzayında tasarlanan bir sınıflandırıcı da farklı bir ara uzaya taşınabilir. Y uzayında tanımlı bir sınıflandırıcının önceden olmaması sebebiyle öznitelikler X uzayına veya başka bir ara uzaya aktarılırlar. Çapraz sınıflandırmanın bu ilk unsurundaki öznitelik kestiriminin yapılabilmesi için X ve Y uzaylarındaki verilerin birbirleriyle ilintili (correlated) olması ön koşulu vardır.

Örüntü tanıma problemlerinde, yüksek sayıda özneliğin kullanılması, özellikle işlem yükü açısından tercih edilmeyen bir durumdur. Aktarılan özniteliklerden, sınıflandırma performansını olabildiğince yüksek tutacak özniteliklerin belirlenmesi gerekmektedir.

Son olarak ise, belirlenen indirgenmiş öznitelikler ile X uzayında veya ara uzayda sınıflandırma yapılacaktır. Çapraz sınıflandırma yönteminde, sınıflandırıcı olarak herhangi bir sınıflandırıcı kullanılabilir. Doğrusal, karesel veya en yakın komşu sınıflandırıcıları bunlardan bazılarıdır.

1.2 İçerik

Bu tezin yapısı ve içeriği şu şekilde özetlenebilir:

Bölüm 2’de sınıf ayrıştırılabilirliği ve sınıflar arası uzaklık ölçütlerinin neler oldukları gösterilmiştir. Çapraz tanıma yönteminin ne derecede başarılı olabileceği sınıf ayrıştırılabilirliğinde bir ölçü olabilecek Bhattacharyya Uzaklık (BU) ölçütü üzerinden incelenmiştir [9]. Bhattacharyya Uzaklığı’nın Gauss dağılımlar için özel durumu, doğrusal dönüşümlerden nasıl etkilendiği ve Bhattacharyya Uzaklığı’nın hangi özelliklere sahip dönüşümler altında etkilendiği konuları da bu bölümde ek alınmıştır. Doğrusal Minimum Ortalama Karesel Hata (DMOKH) kestiricisi ile çapraz tanıma yönteminin doğrusal ve tersinir bir dönüşüm içerdiği ve bu dönüşüm sonucunda sınıf ayrıştırılabilirliğine herhangi bir değişiklik getirmeyeceği gösterilmiştir.

Çalışmanın başlangıç noktası olan en düşük doğrusal karesel kestirici ve bu kestirim yöntemi ile çapraz tanıma yapmak için özniteliklerin nasıl kestirileceği Bölüm 3’de ele alınan konulardır.

Bölüm 4’de çapraz sınıflandırmanın performansının değerlendirmesi için BU’ya dayanan bir model önerilmiş ve yapay bir veri kümesi üzerinde, sınıflandırma performansı bu model ile incelenmiştir.

DMOKH kestirici ile çapraz tanıma ve performans değerlendirme incelemelerinden sonra; sınıflar arasındaki ilintiyi ortaya koyan yöntemlerin Çapraz Tanıma için başarılı olabileceği ve tanıma işleminin ara uzayda yapılmasının faydalı olabileceği gözlenmiştir. Bu şartları sağlayan, çok değişkenli iki veri kümesi arasında tanımlanan ve bu iki veri kümesi arasındaki ilintileri ortaya çıkaran bir yaklaşım olan Kanonik Korelasyon Analizi’nin (KKA) çapraz tanıma için uygun bir altyapı olduğu değerlendirilmiştir.

Bölüm 5’de Kanonik Korelasyon Analizi yöntemi sunulmuş, Çapraz Tanımda kullanılabilmesi için gereklilikler ortaya konmuş ve KKA ile Çapraz Tanıma için bir yöntem önerilmiştir.

Önerilen çapraz tanıma yöntemlerinin, sentetik ve gerçek veriler ile uygulamaları Bölüm 6’da yapılmıştır. Uzaklık ölçütleri ve sınıf ayrıştırılabilirliği ile ilgili incelenme iki farklı veri kümesi üzerinde teorik ve deneysel sonuçları karşılaştırılmasıyla yapılmıştır. Yine bu bölümde, genetik verilerden köken ve haplogrup belirleme, farklı açılardan elde edilmiş fotoğraflardan yüz tanıma, eskizden yüz tanıma ve farklı mesafelerden elde edilmiş farklı çözünürlüğe sahip görüntülerden yüz tanıma uygulamaları yapılmıştır. Uygulamalarda, problemlerin çapraz tanıma yaklaşımları ile çözümü sunulmuş ve performans değerleri incelenmiştir. Uygulamalar hakkında detay bilgi, benzer çalışmalar ve sonuçlar ilgili uygulamalarla birlikte sunulmuştur.

Bölüm 7’de çalışmadan çıkan sonuç ve çıkarımlar sunulmuş ve tartışılmıştır.

1.3 Tezin Katkısı

Bu çalışma, çapraz sınıflandırma problemleri için genel bir çerçeve çizmektedir. Yapısal örüntü tanıma yöntemleri, genel olarak uygulamaya bağlı alan bilgisi gerektirmektedir [5]. Bu çalışmada önerilen yöntem ise alan bilgisi gerektirmeyen genel bir yaklaşım niteliğindedir. Önerilen yöntem, bu sayede birçok farklı problemde uygulanabilecek bir sınıflandırma/tanıma aracı oluşturmuştur. Çapraz sınıflandırma problemi, birçok farklı pratik uygulamayı içermektedir. Örüntü tanıma yöntemlerinin geliştirildiği alan haricinde başka bir alana aktarılması zordur. Önerilen kanonik korelasyon analizi tabanlı çapraz tanıma yöntemi, analitik çözüm temeline dayandığından, farklı alanlara kolaylıkla uygulanabilmek-

tedir.

Genel olarak örüntü tanıma yöntemlerinde, seçilen özniteliklere göre başarı performansı değişmektedir. Bu sebepten performansı artıracak özniteliklerin seçilmesi oldukça önemlidir. Çapraz sınıflandırma için önerilen KKA tabanlı yöntem, özniteliklerin seçilmesi için optimal bir yöntem önermektedir.

Çapraz sınıflandırma problemlerine, derinlemesine alan bilgisi gerektirmeden çözüm önermesi, bu çözümü analitik bir çerçeve içerisinde sunması ve kullanılacak özniteliklerin optimal olarak belirlenmesi, bu çalışmanın özgün yönünü oluşturmaktadır.

Çalışmada ayrıca;

- Düşük çözünürlükteki yüz imgelerinden tanıma,
- Genetik verilerden etnik köken ve haplogrup belirleme,
- Eskizden yüz tanıma,
- Güvenlik kamerası yüz tanıma

problemleri de özgün bir şekilde çapraz tanıma problemi olarak ele alınmış ve çalışılmıştır.

2. SINIFLAR ARASI UZAKLIK ÖLÇÜTLERİ

İstatistiksel uzaklık ölçütleri (statistical distance measures) örüntü tanıma ve sınıflandırma problemlerinde yararlanılabilecek temel teorik araçlardan birisidir. Birçok alanda kullanılan uzaklık ölçütleri, iki objenin birbirlerinden ne kadar ayırık olduğunu ifade etmek için kullanılır. İki objenin farklılığı ölçülebildiği gibi, benzerlikleri (similarity) de ölçüt olarak kullanılabilir [10]. Objeler, tekil olabildikleri gibi, birden fazla objenin birleşimiyle oluşan kümeler arasında da uzaklık kavramları tanımlanabilir. Örüntü tanımada, sınıfların birbirlerine veya bir objeye olan mesafeleri incelenirken, sınıflara ait istatistiksel bilgiler kullanılır. Sınıfların olasılık dağılımları arasındaki fark, uzaklık ölçütü olarak tanımlanır. Uzaklık ölçütleri simetrik ve üçgen eşitsizliğini (triangle inequality) sağlamasına rağmen, uzaklık ölçütü olarak kullanılan ve bu özellikleri sağlamayan ölçütler de sınıfların farklılıklarını ölçmekte kullanılmaktadır. Bu tür ölçütler ıraksama (divergence) temelli mesafe ölçütleri olarak tanımlanır. ıraksama temelli mesafe ölçütlerinden, f-ıraksama temelli mesafe ölçütleri geniş bir ıraksama ailesini kapsamakta ve sınıflar arası farklılıkların ölçülmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Kullback-Leibler, Bhattacharyya, Hellinger, Chernoff, Renyi uzaklık ölçütleri f-ıraksaması temelli uzaklık ölçütlerindendir [11]. Diğer uzaklık ölçütleri hakkında ayrıntılı bilgi [10, 11, 12]'da bulunabilir.

Bu çalışmada özellikle ilgileneceğimiz f-ıraksaması temelli bir ölçüt olan Bhattacharyya Uzaklık (BU) ölçütüdür. f-ıraksaması temelli yaklaşımlar sayesinde uzaklık ölçütleri ile sınıf ayrıştırılabilirliği arasında bağıntı kurulabilmektedir. Bayes tabanlı karar verme mekanizmasının, eldeki verilerin tam dağılımları kullanıldığında optimal sonuç verdiği bilinmektedir. Doğru dağılımlar pratikte bilinemediği için, bunların yerine belirli modeldeki dağılımlar kullanılmaktadır. Bu model dağılımların kullanılması, f-ıraksaması tabanlı mesafe ölçütleri ile sınıf ayrıştırılabilirliği için bulunacak sınırları etkilemektedir [13]. Bu konuda yapılan çalışmalar, pratik veriler ile sınıflandırma performansının alt ve üst sınırlarını belirlemeye yöneliktir [13, 14]. Sınıf dağılımlarının farklı formlarda modellenmesi sınıflandırma sınır değerlerinde değişikliklere sebep olabilmektedir. Bu tez kapsamında, dağılımların farklı formlarda modellenmesinin sınır değerlerine etkisi göz önüne alınmayacaktır.

İki dağılım arasındaki uzaklığı ölçmekte kullanılan f-ıraksaması temelli mesafe ölçütlerinin genel formu:

$$D(p_1(x), p_2(x)) = g \left(E_x \left\{ f \left(\frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right) \right\} \right) \quad (2.1)$$

ile verilir.

Burada D mesafe ölçütünü, 1 ve 2 birbirlerine mesafesi ölçülecek iki dağılımın etiketlerini, $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ bu objelerin (sınıfların) olasılık yoğunluk fonksiyonlarını (pdf), g artan reel bir fonksiyonu, f sürekli konveks reel (continous convex real) bir fonksiyonu ve E beklenen değeri (expected value) ifade etmektedir.

f ve g fonksiyonları farklı şekilde seçilerek Kullback-Leibler ıraksaması, Hellinger Uzaklığı, Jensen-Shannon ıraksaması gibi f-ıraksaklık ölçütleri tanımlanmaktadır [15].

f ve g fonksiyonları

$$\begin{aligned} f(x) &= -\sqrt{x} \\ g(x) &= -\ln(-x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

olarak seçildiğinde Bhattacharyya Uzaklığı

$$BU = -\ln \left(\int \sqrt{p_1(x)p_2(x)} dx \right) \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır. BU Bhattacharyya Katsayısına (Bhattacharyya Coefficient) bağımlı olarak da tanımlanabilir [16]. Bhattacharyya Katsayısı (BK):

$$BK(p_1, p_2) = \int \sqrt{p_1(x)p_2(x)} dx \quad (2.4)$$

şeklinde ifade edilir. Eşitlik 2.3 ve Eşitlik 2.4 birleştirildiğinde,

$$BU = -\ln(BK) \quad (2.5)$$

elde edilir.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ dağılımlarının eş dağılımlar olması durumunda birbirleri arasındaki BU ölçütü sıfır olacaktır. Bu durum Eşitlik 2.3 ve Eşitlik 2.4'de değerlendirildiğinde $BU = 0$ ve $BK = 1$ olacaktır. $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ dağılımları hiçbir noktada örtüşmediği durumda ise Eşitlik 2.3'de integralin içerisi sıfır çıkacağından $BU = \infty$ ve $BK = 0$ olacaktır. Buradan açıkça görüldüğü üzere, BK 0 ile 1 arasında, BU ise 0 ile ∞ arasında değerler almaktadır.

BU metrik olma şartlarını sağlamamakta [16] ve bu sebepten bazen Bhattacharyya ıraksaması olarak da ifade edilebilmektedir. BK'ye dayanan $d(p_1, p_2) = \sqrt{1 - BK}$ uzaklık ölçütü ise (Hellinger Mesafesi) metrik olma şartlarını sağlamaktadır ve bazı çalışmalarda kullanılmıştır [17].

İki sınıf arasındaki uzaklığın ölçülmesinde BU'nın tercih edilmesinin temel sebebi, iki sınıfın ayrıştırılabilirlik performansı ile BU arasında tanımlı bir eşitsizliğin bulunabilmesidir. İki sınıf ayrıştırılmasında yapılacak hata olasılığı P_e olarak tanımlandığında; analitik bir sınıflandırıcı ile ulaşılabilecek hata olasılığı BU veya BK ile ifade edilebilmektedir [16].

P_e ile BK arasındaki ilişki ise Eşitlik 2.6'de

$$\left(\frac{1}{2}BK(p_1, p_2)\right)^2 \leq 2P_e \leq BK(p_1, p_2) \quad (2.6)$$

P_e ile BU arasındaki ilişki Eşitlik 2.7'de verildiği gibidir [16, 18, 19].

$$\left(\frac{1}{2}\exp^{-BU(p_1, p_2)}\right)^2 \leq 2P_e \leq \exp^{-BU(p_1, p_2)} \quad (2.7)$$

2.1 Gauss Dağılımları ve Bhattacharyya Uzaklığı

Bayes kestiriciler, ortalama karesel hatanın minimum olmasını sağlayan optimal kestiricilerdir. Bu kestiricilerin kapalı formlarda ifadelerini bulabilmek N boyutlu uzaylarda çok katlı integral alma işlemleri gerektirdiğinden oldukça zordur. Pratikte MOKH kestiricilerinin yerine; doğrusal olma önkoşulu olan DMOKH kestiricileri kullanılır. Dağılımların Gauss (Jointly Gauss) dağılıma sahip olması durumunda DMOKH kestiricisi ile optimal MOKH kestiricisi aynı olacaktır. DMOKH kestiricisi ile ilgili ayrıntılı bilgi Bölüm 3'de verilmiştir. Kestiricimizin doğrusal bir kestirici olduğu durumda, öznitelikler doğrusal dönüşümlerden geçirilecek ve sonrasında sınıflandırma yapılacaktır. Bu bölümde Gauss dağılımlara sahip sınıfların doğrusal dönüşümler altındaki BU değerleri incelenecektir.

X uzayındaki $p_{x_1}(\mathbf{x})$ dağılımına sahip öznitelikler $\mathbf{x}_1$ rastgele değişkeni ile, $p_{x_2}(\mathbf{x})$ dağılımına sahip öznitelikler $\mathbf{x}_2$ rastgele değişkeni ile gösterilmiştir. $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ değişken vektörlerinin ortalama değer vektörleri $\boldsymbol{\mu}_{x_1}$ ve $\boldsymbol{\mu}_{x_2}$, eşdeğişinti matrisleri ise $\mathbf{P}_{x_1}$ ve $\mathbf{P}_{x_2}$ ile gösterildiğinde, Gauss dağılımlar;

$$p_{x_1}(\mathbf{x}) = N(\boldsymbol{\mu}_{x_1}, \mathbf{P}_{x_1})$$

$$p_{x_2}(\mathbf{x}) = N(\boldsymbol{\mu}_{x_2}, \mathbf{P}_{x_2})$$

şeklinde ifade edilmektedir.

$\mathbf{P}_{x_{av}}$, $p_{x_1}(x)$ ve $p_{x_2}(x)$ dağılımlarının ortalama eşdeğişinti matrisini göstermekte ve

$$\mathbf{P}_{x_{av}} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2})$$

şeklinde ifade edilmektedir. $|\cdot|$ matris determinantını ifade etmek üzere, $N(\boldsymbol{\mu}_{x_1}, \mathbf{P}_{x_1})$ ve $N(\boldsymbol{\mu}_{x_2}, \mathbf{P}_{x_2})$ dağılımlarına sahip iki veri kümesi (iki sınıf) arasındaki Bhattacharyya Uzaklığı, Eşitlik 2.8'da verildiği gibidir [18].

$$BU(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x})) = \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{x_{av}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.8)$$

Çalışmanın bundan sonraki kısmında, $BU(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x}))$ ifadesi kısaca BU_x şeklinde (X uzayında tanımlı iki dağılım arasındaki uzaklık olarak) kullanılacaktır.

Doğrusal dönüşümlerin genel yapısı Eşitlik 2.9'de gösterildiği gibi ifade edilir.

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (2.9)$$

Doğrusal dönüşümler, doğrusal olmayan dönüşümlere göre analizinin daha kolay olması sebebiyle sinyal işlemede sıklıkla kullanılmaktadır. DMOKH kestiricisi de, doğrusal bir kestirici olduğundan, bu kestiricisi ile yapılan kestirimler doğrusal dönüşümlerdir.

İddia-1:

Gauss dağılıma sahip iki sınıf arasındaki Bhattacharyya Uzaklığı, sınıflar üzerinde yapılan tersinir doğrusal dönüşümlerden etkilenmez:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \Rightarrow BU_y = BU_x \quad (2.10)$$

İspat: Göstermek istediğimiz $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ koşulu sağlandığında $BU_y = BU_x$ olduğudur. Gauss dağılıma sahip $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ sınıflarının BU_x değerlerinin nasıl hesaplanacağı Eşitlik 2.8'de verilmiştir. Gauss dağılımlara sahip veriler, doğrusal dönüşümler sonrasında yine Gauss dağılım gösterirler. Bu durumda, $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ dönüşümü ile elde edilen $\mathbf{y}_1$ ve $\mathbf{y}_2$ öznelilikleri için dağılımlar;

$$p_{y_1}(\mathbf{y}) = N(\boldsymbol{\mu}_{y_1}, \mathbf{P}_{y_1})$$

$$p_{y_2}(\mathbf{y}) = N(\boldsymbol{\mu}_{y_2}, \mathbf{P}_{y_2})$$

şeklinde dağılım gösterecektir. $\mathbf{y}_1$ ve $\mathbf{y}_2$ arasındaki Bhattacharyya Uzaklığı (BU_y) ise Eşitlik 2.11'de gösterildiği gibi olacaktır.

$$BU_y = \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{y_1} - \boldsymbol{\mu}_{y_2})^T \mathbf{P}_{y_{av}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{y_1} - \boldsymbol{\mu}_{y_2}) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{P}_{y_{av}}|}{|\mathbf{P}_{y_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{y_2}|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.11)$$

İzleyeceğimiz yol, BU_y eşitliğinde ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrislerinin yerine eşdeğer bağıntılarını yazmak olacaktır. Doğrusal dönüşüm fonksiyonunu $\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x}$ şeklinde ifade edildiğinde;

Ortalama değer vektörleri,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{y_1} &\triangleq E_{y \in y_1} \{\mathbf{y}\} = E_{x \in x_1} \{\mathbf{H}\mathbf{x}\} = E \{\mathbf{H}\mathbf{x}_1\} = \mathbf{H}E \{\mathbf{x}_1\} = \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{x_1} \\ \boldsymbol{\mu}_{y_2} &\triangleq E_{y \in y_2} \{\mathbf{y}\} = E_{x \in x_2} \{\mathbf{H}\mathbf{x}\} = E \{\mathbf{H}\mathbf{x}_2\} = \mathbf{H}E \{\mathbf{x}_2\} = \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{x_2}\end{aligned}\quad (2.12)$$

Eşdeğişinti matrisleri,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{y_1} &\triangleq E_{y \in y_1} \{(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T\} = E_{x \in x_1} \{(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_x)^T\} \\ &= E \{(\mathbf{H}\mathbf{x}_1 - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{x_1})(\mathbf{H}\mathbf{x}_1 - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}_{x_1})^T\} = E \{(\mathbf{H}(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{x_1})(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{x_1})^T \mathbf{H}^T\} \\ &= \mathbf{H}E \{(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{x_1})(\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{x_1})^T\} \mathbf{H}^T \\ &= \mathbf{H}\mathbf{P}_{x_1} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{P}_{y_2} &\triangleq \mathbf{H}\mathbf{P}_{x_2} \mathbf{H}^T \\ \mathbf{P}_{y_{av}} &\triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{y_1} + \mathbf{P}_{y_2}) \\ &= \mathbf{H} \left(\frac{\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2}}{2} \right) \mathbf{H}^T \\ \mathbf{P}_{x_{av}} &\triangleq \frac{1}{2}(\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2})\end{aligned}\quad (2.13)$$

olarak ifade edilebilmektedir.

Doğrusal dönüşüm öncesi ve sonrası Bhattacharyya Uzaklıkları ise sırasıyla Eşitlik 2.14 ve Eşitlik 2.15’de verildiği şekildedir.

$$BU_x = \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{x_{av}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned}BU_y &= \frac{1}{8} \underbrace{(\boldsymbol{\mu}_{y_1} - \boldsymbol{\mu}_{y_2})^T \mathbf{P}_{y_{av}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{y_1} - \boldsymbol{\mu}_{y_2})}_A + \frac{1}{2} \ln \underbrace{\frac{|\mathbf{P}_{y_{av}}|}{|\mathbf{P}_{y_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{y_2}|^{\frac{1}{2}}}}_B \\ &= \frac{1}{8}A + \frac{1}{2} \ln B\end{aligned}\quad (2.15)$$

olacaktır. $\mathbf{H}$ matrisi tersinir ($|\mathbf{H}| \neq 0$) kare bir matris olmak üzere;

$$\begin{aligned}
A &\triangleq (\boldsymbol{\mu}_{y_1} - \boldsymbol{\mu}_{y_2})^T \mathbf{P}_{y_{av}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y_1} - \boldsymbol{\mu}_{y_2}) \\
&= [\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})]^T (\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{P}_{x_{av}}^{-1} \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{H}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})] \\
&= (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T (\mathbf{H}^T)(\mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{P}_{x_{av}}^{-1} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{H} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) \\
&= (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{x_{av}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) \\
B &= \frac{|\mathbf{P}_{y_{av}}|}{|\mathbf{P}_{y_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{y_2}|^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{|\mathbf{H} \mathbf{P}_{x_{av}} \mathbf{H}^T|}{|\mathbf{H} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{H}^T|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{H} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{H}^T|^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{|\mathbf{H}| |\mathbf{P}_{x_{av}}| |\mathbf{H}^T|}{|\mathbf{H}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{H}^T|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{H}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{H}^T|^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{|\mathbf{H}| |\mathbf{H}^T| |\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{H}| |\mathbf{H}^T| |\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{|\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

ifadeleri elde edilir. Eşitlik 2.15 ve Eşitlik 2.16 birleştirildiğinde

$$\begin{aligned}
BU_y &= \frac{1}{8} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{x_{av}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \\
&= BU_x
\end{aligned} \tag{2.17}$$

elde edilir. Buradan görülmektedir ki, Gauss dağılıma sahip sınıflar arasındaki Bhattacharyya Uzaklığı doğrusal ve tersinir dönüşümler altında değişmemektedir.

Çıkarım-1: Gauss dağılımlara sahip sınıflar arasındaki BU doğrusal dönüşümden etkilenmiyorsa, doğrusal bir dönüşüm olan doğrusal minimum ortalama karesel hata (DMOKH) kestirici kullanarak kestirilen ($|\mathbf{H}| \neq 0$ olması şartı ile) özniteliklerin oluşturduğu sınıfların BU açısından ayrıştırılabilirliği değişmez.

2.2 Tersinir ve Türevlenebilir Dönüşümler ve Bhattacharyya Uzaklığı

Bölüm 2.1’de Gauss dağılıma sahip sınıflar üzerine uygulanan tersinir doğrusal dönüşümlerin BU değerini değiştirmedığının ispatı sunuldu. Bu bölümde ise iki istatistiksel dağılım arasındaki BU değerinin, türevsel eşyapı dönüşümleri (diffeomorphism) altında değişmediğini göstereceğiz.

İddia-2:

İki sınıf arasındaki Bhattacharyya Uzaklığı, sınıflar üzerinde yapılan dönüşüm aşağıda verilen kurallara uyduğu sürece değişmez [20].

- f tersinir bir fonksiyon
- f ve f^{-1} türevlenebilir bir fonksiyon

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \Rightarrow BU_{\mathbf{y}} = BU_{\mathbf{x}} \quad (2.18)$$

İspat: Olasılık yoğunluk dağılımları $p_{x_1}(\mathbf{x})$ ve $p_{x_2}(\mathbf{x})$, olan bir veri kümesi üzerine $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu uygulandığında, elde edilen sınıf dağılımları $p_{y_1}(\mathbf{y})$ ve $p_{y_2}(\mathbf{y})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= f(\mathbf{x}) \\ d\mathbf{y} &= |\mathbf{J}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) &= p_{\mathbf{x}}(f^{-1}(\mathbf{y})) |\mathbf{J}(f^{-1}(\mathbf{y}))|^{-1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

elde edilir.

Burada $|\mathbf{J}(\mathbf{x})|$, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ dönüşümünün Jacobian matrisinin determinantını ifade etmektedir. Bu bağıntı ispattaki en temel noktayı oluşturmaktadır.

Bir diğer nokta ise, Eşitlik 2.5’de de açıkça görüldüğü üzere BK değerleri aynı olan sınıfların, BU değerlerinin de aynı olduğudur. Öyleyse $p_{x_1}(\mathbf{x})$ ve $p_{x_2}(\mathbf{x})$ dağılımlarına sahip sınıflarına $f(\mathbf{x})$ dönüşümünü uyguladıktan sonra BK değerinin değişmediğini gösterebilirsek, BU değerinin de değişmediğini söyleyebiliriz.

Öncelikle $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ ve $p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y})$ dağılımları için BK değeri yazıldığında

$$BK(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x})) = \int \sqrt{p_{x_1}(\mathbf{x}) p_{x_2}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \quad (2.20)$$

olacaktır.

$\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ dönüşümünden sonra,

$$BK(p_{y_1}(\mathbf{y}), p_{y_2}(\mathbf{y})) = \int \sqrt{p_{y_1}(\mathbf{y})p_{y_2}(\mathbf{y})} d\mathbf{y} \quad (2.21)$$

olacaktır.

Bu noktadaki amaç, dönüşüm öncesi ve dönüşüm sonrası

$$BK(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x})) = BK(p_{y_1}(\mathbf{y}), p_{y_2}(\mathbf{y})) \quad (2.22)$$

olduğunu göstermektir.

Eşitlik 2.19 ve Eşitlik 2.21 birleştirildiğinde:

$$\begin{aligned} BK(p_{y_1}(\mathbf{y}), p_{y_2}(\mathbf{y})) &= \int \sqrt{p_{y_1}(\mathbf{y})p_{y_2}(\mathbf{y})} d\mathbf{y} \\ &= \int \sqrt{p_{x_1}(f^{-1}(\mathbf{y}))|\mathbf{J}(\mathbf{x})|^{-1}p_{x_2}(f^{-1}(\mathbf{y}))|\mathbf{J}(\mathbf{x})|^{-1}} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

elde edilir. Yukardaki integralde değişken değiştirme yöntemiyle $\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y})$ dönüşü yaparsak,

$$d\mathbf{y} = |\mathbf{J}(\mathbf{x})| d\mathbf{x}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} BK(p_{y_1}(\mathbf{y}), p_{y_2}(\mathbf{y})) &= \int |\mathbf{J}(\mathbf{x})|^{-1} \sqrt{p_{x_1}(\mathbf{x})p_{x_2}(\mathbf{x})} |\mathbf{J}(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &= \int \sqrt{p_{x_1}(\mathbf{x})p_{x_2}(\mathbf{x})} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow BK(p_{y_1}(\mathbf{y}), p_{y_2}(\mathbf{y})) = BK(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x}))$$

Çıkarım-2: İki sınıf arasındaki Bhattacharyya Katsayısı, her iki sınıfa uygulanan türevsel eşyapı fonksiyonları ile dönüştürüldüğünde değişmez. Burada dikkat edilecek bir ayrıntı da Bhattacharyya Katsayısı'nın değişmezliğinin dağılımların formundan bağımsız olmasıdır.

Sonuç olarak, X uzayında Bhattacharyya Uzaklığı açısından sınıfların ayrıştırılması ile $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ dönüşümü ile Y uzayına geçildikten sonra Bhattacharyya Uzaklığı açısından

ayrıştırılması, f fonksiyonu tersinir bir türevsel eşyapı fonksiyonu $f : R^n \Rightarrow R^n, m = n$ olduğu sürece eşit çıkacaktır.

BK dönüşüm f fonksiyon dönüşümünden etkilenmediğinden, Eşitlik 2.7’de gösterilen performans sınır değerleri de değişmeyecektir.



3. DMOKH KESTİRİMİ İLE ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA

Bölüm 1’de tanımlanan ‘Çapraz Sınıflandırma’ probleminin çözümü için farklı yöntemler geliştirilebilir. Bu yöntemlerin en temel olanı Doğrusal Minimum Ortalama Karesel Hata (DMOKH) kestirici kullanarak gerçekleştirilebilecek çapraz sınıflandırma yöntemidir. Bu yöntem ile sınıflar arasındaki Bhattacharyya Uzaklığının değişmemesine karşın, sınıfların ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrisleri değişmektedir. Veri kümesinde kayıtlı verilerin istatistiksel nitelikleri kullanılarak önceden oluşturulan optimal bir sınıflandırıcının, ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrisi farklı bir veri seti ile kullanılması sonucunda daha düşük performans göstermesi beklenen bir sonuçtur. Yine de bu yaklaşım, bilinen pratik bir çözümü olmayan problemlere çözüm olması ve özellikle çapraz sınıflandırma problemleri için genel bir çalışma çerçevesi çizmesi açısından önemlidir. DMOKH kestiriciler, ortalama karesel hatanın en düşük değerini vermesine rağmen, bu hatanın daha az sayıda öznitelik kullanıldığında nasıl değişeceğine dair bir bilgi sunmamaktadır. Bu bölüm içerisinde sırasıyla; öznitelik kestirimine neden ihtiyaç duyulduğu, DMOKH kestiricilerin yapısı, önerilen çapraz sınıflandırma yöntemi ve son olarak sentetik veriler üzerindeki DMOKH ile kestirim performansı gösterilmiştir.

3.1 Öznitelik Kestirimi

Öznitelik kestiriminde amaç, sınıflandırmada kullanılacak olan fakat eldeki örnekten ölçülemeyen özniteliklerin belirli bir kritere göre belirlenmesidir. Kestirilen özniteliklerin bir alt kümesi doğrudan sınıflandırmada kullanılacağı için; bu kestirim çapraz sınıflandırma açısından da önemlidir. Kestirimde kullanılacak kriterler, seçilen maliyet fonksiyonlarına (cost function) göre belirlenirler. Ortalama mutlak hata ve ortalama karesel hata bunlardan bazılarıdır. Ortalama karesel hata, sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olması dolayısıyla sinyal işleme alanında sıklıkla kullanılan bir maliyet fonksiyonudur. Ortalama karesel hata genel formu Eşitlik 3.1’de verildiği gibidir.

$$OKH(\hat{x}) = E[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y})\|^2] \quad (3.1)$$

Minimum ortalama karesel hata (MOKH) kestiricisinin genel formu Eşitlik 3.2’de verildiği gibi tanımlanır.

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MOKH}}(\mathbf{y}) = E[\mathbf{x}|\mathbf{y}] \quad (3.2)$$

Çok boyutlu uzaylarda MOKH kestiricisinin kapalı formda çözümünü bulmak analitik olarak zordur ve çok katlı integral dolayısıyla işlem yükü fazladır. Genellikle bunların yerine doğrusal kestiriciler kullanılır. Gauss dağılımlar için Eşitlik 3.2’de verilen ifade, doğrusal olarak bulunacağı için MOKH kestirici de doğrusal çıkacaktır ve DMOKH kestiricileri ile aynı olacaktır.

3.2 Doğrusal Minimum Ortalama Karesel Hata (DMOKH) Kestiricisi

DMOKH kestiricisi, Eşitlik 3.1’de verilen ifadeye doğrusal olma koşulu eklendiğinde ortaya çıkan kestiricidir. Genel formu

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{DMOKH}}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$$

şeklindedir. Bu koşul eklendiğinde ortaya çıkacak beklenen hata yazıldığında

$$\begin{aligned} E[(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^T(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] &= E[(\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}))^T(\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}))] \\ &= E[\mathbf{x}^T\mathbf{x}] - E[\mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b})] - E[(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b})^T\mathbf{x}] + E[(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b})] \\ &= E[\mathbf{x}^T\mathbf{x}] - E[\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}] - E[\mathbf{x}^T\mathbf{b}] - E[\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{x}] - E[\mathbf{b}^T\mathbf{x}] \\ &\quad + E[\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y}] + E[\mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{y}] + E[\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{b}] + E[\mathbf{b}^T\mathbf{b}] \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde olacaktır. Eşitlik 3.3’ü $\mathbf{b}$ ve $\mathbf{A}$ değişkenlerine göre minimize etmek için sırasıyla önce $\mathbf{b}$ ’ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenecek, sonra $\mathbf{A}$ ’ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenecektir.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} (E[\mathbf{x}^T \mathbf{x}] - E[\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] - E[\mathbf{x}^T \mathbf{b}] - E[\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{x}] - E[\mathbf{b}^T \mathbf{x}] \\
& \quad + E[\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] + E[\mathbf{b}^T \mathbf{A} \mathbf{y}] + E[\mathbf{y}^T \mathbf{A}^T \mathbf{b}]^T + E[\mathbf{b}^T \mathbf{b}]) \\
& = -E[\mathbf{x}] - E[\mathbf{x}] + \mathbf{A}E[\mathbf{y}] + \mathbf{A}E[\mathbf{y}] + 2\mathbf{b} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{b} & = -\mathbf{A}E[\mathbf{y}] + E[\mathbf{x}] \\
& = -\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\mu}_x
\end{aligned}$$

Eşitlik 3.3’de $\mathbf{b} = -\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\mu}_x$ ifadesi yerine yazılıp, türevi sıfıra eşitlendiğinde,

$$\begin{aligned}
0 & = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (E[(\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}))^T (\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}))]) \\
& = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (E[(\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\mu}_x))^T (\mathbf{x} - (\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{A}\boldsymbol{\mu}_y + \boldsymbol{\mu}_x))]) \\
& = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{A}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))]) \\
& = \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} (E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)] - E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T (\mathbf{A}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))] \\
& \quad - E[(\mathbf{A}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))^T (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)] + E[(\mathbf{A}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))^T (\mathbf{A}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y))]) \\
& = -E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T] - E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T] + 2\mathbf{A}E[(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)^T] \\
& = -\mathbf{P}_{xy} + \mathbf{A}\mathbf{P}_y \\
\Rightarrow \mathbf{A} & = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadeden de açıkça görüldüğü üzere DMOKH kestiricisi tanımlamak için $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ değişkenlerinin ilk iki momentini bilmek yeterlidir. $\hat{\mathbf{x}}_{\text{DMOKH}}(\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ kestiricisi için Eşitlik 3.4 ve Eşitlik 3.5 birleştirildiğinde;

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{DMOKH}}(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \tag{3.6}$$

olarak bulunur. $\hat{\mathbf{x}}_{\text{DMOKH}}$ kestiricisi ile elde edilecek kestirimlerin üzerindeki hata eşdeğişinti matrisi $\mathbf{P}_{\text{DMOKH}}$ ise;

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{\text{DMOKH}} & = \mathbf{P}_{yx}^T \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{yx}^T \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} + \mathbf{P}_{xx} \\
& = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} - 2\mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1} \mathbf{P}_{yx} + \mathbf{P}_{xx} \\
& = \mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \geq \mathbf{0}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak bulunur. Bu eşdeğişinti matrisi, kestirimin belirsizliğini ifade eden önemli bir belirteçtir.

Bölüm 2.2’de Bhattacharyya Uzaklığının, tersinir, tersi ve kendisi türevlenebilen fonksiyonlarla yapılan dönüşümler altında değişmediğini göstermiştik. Buradaki önemli bir nokta; kestirim yapıldığında Bhattacharyya Uzaklığının gerçek (kestirilmeyen) özniteliklerden daha büyük Bhattacharyya Uzaklığına sahip olabilmeleridir. Bu bölümde gösterilecek olan ise, Bhattacharyya Uzaklığının daha büyük olmasının, daha iyi bir sınıflandırma performansını her zaman garanti etmediğidir.

Doğrudan ölçülebilen Y veri kümesi elemanlarının Bhattacharyya Uzaklığı, ölçülemeyen fakat kayıtlı X veri kümesi elemanlarının Bhattacharyya Uzaklığından daha fazla olabilir. DMOKH dönüşümü ile Bhattacharyya Uzaklığının değişmediği gösterilmişti. Bu durumda DMOKH kestirimi sonucunda kestirilen X özniteliklerinin Bhattacharyya Uzaklığı, gerçek X özniteliklerinin Bhattacharyya Uzaklığından daha büyük olur. Fakat kestirim yapılmadan önce X veri kümesinde tanımlanan bir sınıflandırıcının, kestirimden sonra doğrudan kestirilen değerler üzerinde kullanılması sebebiyle, sınıflandırma performansında artış görülmeyebilir.

3.3 Çapraz Sınıflandırma İçin Yöntem

Çapraz Sınıflandırma (ÇS) problemi için önerilen yöntem; doğrudan ölçülemeyen özniteliklerin ($\mathbf{x}$), ölçülebilen özniteliklerden ($\mathbf{y}$) DMOKH yöntemiyle kestirilmesi ve kestirilen öznitelikler üzerinden sınıflandırma yapılmasına dayanmaktadır. Kestirilen özniteliklerin bir alt kümesi, doğrudan sınıflandırmada kullanılacağı için; bu kestirim çapraz sınıflandırma için önemlidir. Çok boyutlu uzaylarda optimal Bayes kestiriminin kapalı form çözümünü bulmanın zor ve fazla işlem getiren bir yapıda olması dolayısıyla; bunun yerine doğrusal kestirici kullanıldığından daha önce bahsetmiştik. Doğrudan ölçülen $\mathbf{y}$ verilerine bağlı olarak, DMOKH kestiricisinin yapısı Eşitlik 3.8’de verildiği gibidir.

$$\mathbf{x}_{est} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (3.8)$$

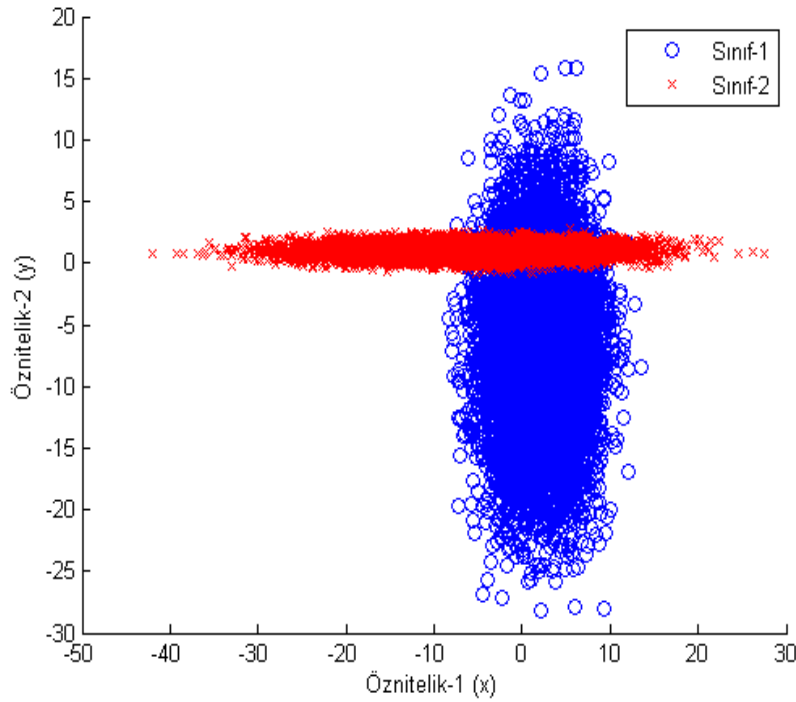
Önerilen yöntem, temelde, $\mathbf{x}$ öznitelikleri için tasarlanmış sınıflandırıcıları, kestirilen $\mathbf{x}_{est}$ öznitelikleri için çalıştırma prensibine dayanmaktadır. Bu yöntem uygulandığında elde edilebilecek performans sınırları Bölüm 3.5’de incelenmiştir.

3.4 DMOKH Kestiricisi ve Sınıf Dağılımları

Sınıflar arasındaki ayrıştırılabilirlik Bhattacharyya Uzaklık ölçütü kullanılarak Bölüm 2’de, DMOKH kestiricisi ise Bölüm 3.2’de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu bölümde ise, iki sınıfa ait verilerin bilindiği durumda DMOKH kestiricisi kullanılarak sınıflandırma yapıldığında; her bir sınıfın ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrislerinin nasıl değişeceği incelenecektir. Öncelikle ayrı ayrı ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrisi bilinen iki sınıf, birleştirilip tek bir veri kümesi olarak görüldüğünde ortalama değer vektörü ile eşdeğişinti matrisinin nasıl değiştiği incelenecektir.

Burada gösterilmek istenen, her iki sınıfa ait veriler birleştirildiğinde toplam veri kümesinin ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti değerleridir.

Şekil 3.1’de iki örnek sınıfa ait ikişer özneliğin dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 3.1: Sınıf-1 ve Sınıf-2’ye Ait Verilerin Dağılımı

$\mathbf{x}$ öznelikleri için c_1 birinci sınıfı, $\boldsymbol{\mu}_{x1}$ birinci sınıfa ait ortalama değer vektörünü, $\mathbf{P}_{x1}$ birinci sınıfa ait eşdeğişinti matrisini, c_2 ikinci sınıfı, $\boldsymbol{\mu}_{x2}$ ikinci sınıfa ait ortalama değer vektörünü, $\mathbf{P}_{x2}$ ikinci sınıfa ait eşdeğişinti matrisini gösterebilir. $\mathbf{x}$ özneliği için $c = c_1 \cup c_2$ olmak üzere, iki sınıf birleştirilmiş tek bir veri olarak görülmesi durumunda, $\boldsymbol{\mu}_x$ sınıfların toplamından oluşan verinin ortalama değer vektörünü, $\mathbf{P}_x$ sınıfların toplamından oluşan verinin eşdeğişinti matrisini ifade etmektedir. Eşit sayıda örnek içermesi önkoşulu ile sınıfların birleşmesiyle

ortalama değeri vektörünün, iki ortalama değeri vektörünün ortalaması olacaktır.

$$\boldsymbol{\mu}_x = \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} + \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \quad (3.9)$$

$p_1(\mathbf{x})$ ve $p_2(\mathbf{x})$ sırasıyla sınıf-1 ve sınıf-2'nin olasılık yoğunluk dağılımlarını ifade etmek üzere, birleştirilmiş veriler için eşdeğişinti matrisi $\mathbf{P}_x$ ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x &= E[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T] = \int (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T \left(\frac{p_1(\mathbf{x}) + p_2(\mathbf{x})}{2} \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right) \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right)^T p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right) \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right)^T p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right) \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right)^T p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right)^T p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right)^T p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right) \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right)^T p_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right) \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right)^T p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right)^T p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right) \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right)^T p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} \right) \left(\mathbf{x} - \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \right)^T p_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{P}_{c_{x1}} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T] + \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T + \\ &\quad \frac{1}{2} [\mathbf{P}_{c_{x2}} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T] + \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T \\ &= \frac{1}{2} [\mathbf{P}_{c_{x1}} + \mathbf{P}_{c_{x2}}] + \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T + \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T + \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T + \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T \\ &\quad - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T - \frac{1}{8} \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T \\ &= \frac{\mathbf{P}_{c_{x1}} + \mathbf{P}_{c_{x2}}}{2} + \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T + \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \boldsymbol{\mu}_{x1} \boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \boldsymbol{\mu}_{x2} \boldsymbol{\mu}_{x1}^T}{4} \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde olacaktır.

Eşit sayıda örneğe sahip iki sınıfa ait $\mathbf{y}$ öznitelikleri için, $\mathbf{y} \in c_1$ ve $\mathbf{y} \in c_2$ sınıflarına ait ortalama değer vektörleri ve eşdeğişinti matrislerinin bilindiği durumda; $\mathbf{y} \in c_1 \cup c_2$ verilerinin ortalama vektörü

$$\boldsymbol{\mu}_y = \frac{\boldsymbol{\mu}_{y1} + \boldsymbol{\mu}_{y2}}{2} \quad (3.11)$$

ve eşdeğişinti matrisi

$$\mathbf{P}_y = \frac{\mathbf{P}_{y1} + \mathbf{P}_{y2}}{2} + \frac{\boldsymbol{\mu}_{y1}\boldsymbol{\mu}_{y1}^T + \boldsymbol{\mu}_{y2}\boldsymbol{\mu}_{y2}^T - \boldsymbol{\mu}_{y1}\boldsymbol{\mu}_{y2}^T - \boldsymbol{\mu}_{y2}\boldsymbol{\mu}_{y1}^T}{4} \quad (3.12)$$

şeklinde olacaktır.

$\mathbf{y}$ özniteliklerinden $\mathbf{x}$ öznitelikleri DMOKH kestirici ile Eşitlik 3.8’de ifade edildiği şekilde kestirildiğinde,

$$\mathbf{x}_{c1_{est}} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (3.13)$$

kestirilen değerler için sınıf ortalama vektörü;

$$\boldsymbol{\mu}_{x1_{est}} = E_{y \in c_1} [\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y)] = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (3.14)$$

aynı şekilde sınıf-2 için ortalama vektör;

$$\boldsymbol{\mu}_{x2_{est}} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{y2} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (3.15)$$

olacaktır.

Kestirilen birinci sınıf için hata eşdeğişinti matrisleri;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{x1_{est}} &= E [(\mathbf{x}_{1_{est}} - \boldsymbol{\mu}_{x1_{est}})(\mathbf{x}_{1_{est}} - \boldsymbol{\mu}_{x1_{est}})^T] \\ &= E[(\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y) - (\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y))) \\ &\quad (\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y) - (\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)))^T] \\ &= E[(\mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y - (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)))(\mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y - (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)))^T] \\ &= E[(\mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_{y1}))(\mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}(\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_{y1}))^T] \\ &= \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y1}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{yx} \end{aligned} \quad (3.16)$$

ve aynı şekilde sınıf-2 için;

$$\mathbf{P}_{x2_{est}} = \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y2}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{yx} \quad (3.17)$$

olarak elde edilir.

Kestirim sonrasında birinci ve ikinci sınıfın toplam veri kümesi için ortalama değer vektörü;

$$\boldsymbol{\mu}_{x_{est}} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} + \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} \quad (3.18)$$

ve eşdeğişinti matrisi

$$\mathbf{P}_{x_{est}} = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \quad (3.19)$$

olarak bulunabilir.

Kestirim sonrasında hesaplanan $\mathbf{x}_{est}$ değeri, gerçek $\mathbf{x}$ verileri üzerine bir hata eklenmiş olarak modellendiğinde, sınıf-1 veriler için yapılan hatanın ortalama değer vektörü;

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{est} &= \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta} \\ \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_{\eta_1} &= E[x_{1_{est}} - x_1] \\ &= \boldsymbol{\mu}_{x1_{est}} - \boldsymbol{\mu}_{x1} \\ &= -(\boldsymbol{\mu}_{x1} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)) \\ &= -\boldsymbol{\mu}_{x1} + \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} + \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - (\frac{\boldsymbol{\mu}_{y1} + \boldsymbol{\mu}_{y2}}{2})) \\ &= \frac{\boldsymbol{\mu}_{x2} - \boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\frac{\boldsymbol{\mu}_{y2} - \boldsymbol{\mu}_{y1}}{2}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

aynı şekilde sınıf-2 veriler için yapılan hatanın ortalama değer vektörü;

$$\boldsymbol{\mu}_{\eta_2} = \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} - \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\frac{\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_{y2}}{2}) \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Sınıf-1 verileri üzerinde yapılacak kestirimde oluşacak hatanın eşdeğişinti matrisi ($\mathbf{P}_{\eta_1}$) ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\eta_1} &= E[(-\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_{1_{est}} - \boldsymbol{\mu}_{\eta_1})(-\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_{1_{est}} - \boldsymbol{\mu}_{\eta_1})^T] \\ &= E[(-\mathbf{x}_1 + (\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y)) + (\boldsymbol{\mu}_{x1} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y))) \\ &\quad (-\mathbf{x}_1 + (\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y)) + (\boldsymbol{\mu}_{x1} - \boldsymbol{\mu}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)))^T] \\ &= E[(-\mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y) + \boldsymbol{\mu}_{x1} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)) \\ &\quad (-\mathbf{x}_1 + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y) + \boldsymbol{\mu}_{x1} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y))^T] \\ &= E[(-\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\mu}_{x1} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (-\boldsymbol{\mu}_{y1} + \boldsymbol{\mu}_y + \mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y)) \\ &\quad (-\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\mu}_{x1} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (-\boldsymbol{\mu}_{y1} + \boldsymbol{\mu}_y + \mathbf{y}_1 - \boldsymbol{\mu}_y))^T] \\ &= E[(((\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{x1}) + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (-\boldsymbol{\mu}_{y1} + \mathbf{y}_1))((\mathbf{x}_1 - \boldsymbol{\mu}_{x1}) + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (-\boldsymbol{\mu}_{y1} + \mathbf{y}_1))^T] \\ &= \mathbf{P}_{x1} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y1} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{x1y1} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y1x1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

ve aynı şekilde sınıf-2 için kestirim sonrasında oluşacak hatanın eşdeğişinti matrisi ($\mathbf{P}_{\eta_2}$)

$$\mathbf{P}_{\eta_2} = \mathbf{P}_{x2} + \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y2}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{x2y2}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{y2x2} \quad (3.23)$$

olarak belirlenir.

Yapılan hatanın her iki sınıf birleşimi için ortalama değer vektörü ($\boldsymbol{\mu}_\eta$) ve eşdeğişinti matrisi ($\mathbf{P}_\eta$) Eşitlik 3.27’de gösterildiği gibidir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_\eta &= 0 \\ \mathbf{P}_\eta &= \mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{yx} \end{aligned} \quad (3.24)$$

İki sınıfa ait eşit sayıda örnek içeren $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ öznitelik vektörleri için, her bir sınıfın ortalama değer vektörü ile eşdeğişinti matrisleri ve iki sınıfa ait toplam verilerin ortalama değer vektörü ile eşdeğişinti matrisleri Çizelge 3.1’de gösterilmiştir.

Ayrıca, $\mathbf{y}$ özniteliklerinden, sadece sınıf-1, sadece sınıf-2 ve her iki sınıf elemanları kullanılarak kestirilen $\mathbf{x}$ özniteliklerinin kestirimleri ve kestirim hatalarına ait ortalama değer vektörü ile eşdeğişinti matrisleri Çizelge 3.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 3.1: Birleştirilmiş Veri Kümeleri için Ortalama Değer Vektörleri ve Eşdeğişinti Matrisleri

Veri Kümesi	Ortalama Değer Vektörü	Eşdeğişinti Matrisi
$\mathbf{x}_1$	$\boldsymbol{\mu}_{x1}$	$\mathbf{P}_{x1}$
$\mathbf{x}_2$	$\boldsymbol{\mu}_{x2}$	$\mathbf{P}_{x2}$
$\mathbf{y}_1$	$\boldsymbol{\mu}_{y1}$	$\mathbf{P}_{y1}$
$\mathbf{y}_2$	$\boldsymbol{\mu}_{y2}$	$\mathbf{P}_{y2}$
$\mathbf{x}$	$\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} + \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2}$	$\frac{\mathbf{P}_{x1} + \mathbf{P}_{x2}}{2} + \frac{\boldsymbol{\mu}_{x1}\boldsymbol{\mu}_{x1}^T + \boldsymbol{\mu}_{x2}\boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \boldsymbol{\mu}_{x1}\boldsymbol{\mu}_{x2}^T - \boldsymbol{\mu}_{x2}\boldsymbol{\mu}_{x1}^T}{4}$
$\mathbf{y}$	$\frac{\boldsymbol{\mu}_{y1} + \boldsymbol{\mu}_{y2}}{2}$	$\frac{\mathbf{P}_{y1} + \mathbf{P}_{y2}}{2} + \frac{\boldsymbol{\mu}_{y1}\boldsymbol{\mu}_{y1}^T + \boldsymbol{\mu}_{y2}\boldsymbol{\mu}_{y2}^T - \boldsymbol{\mu}_{y1}\boldsymbol{\mu}_{y2}^T - \boldsymbol{\mu}_{y2}\boldsymbol{\mu}_{y1}^T}{4}$

Çizelge 3.2: DMOKH Kestirim Sonrası Ortalama Değer Vektörleri ve Eşdeğişinti Matrisleri

Veri Kümesi	Ortalama Değer Vektörü	Eşdeğişinti Matrisi
$\mathbf{x}_{1_{est}}$	$\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_y)$	$\mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{cy1} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx}$
$\mathbf{x}_{2_{est}}$	$\boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{y2} - \boldsymbol{\mu}_y)$	$\mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y2} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx}$
$\mathbf{x}_{est}$	$\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} + \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2}$	$\mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx}$
η_1	$\frac{\boldsymbol{\mu}_{x2} - \boldsymbol{\mu}_{x1}}{2} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{y2} - \boldsymbol{\mu}_{y1}}{2} \right)$	$\mathbf{P}_{x1} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y1} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{x1y1} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y1x1}$
η_2	$\frac{\boldsymbol{\mu}_{x1} - \boldsymbol{\mu}_{x2}}{2} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{\mu}_{y1} - \boldsymbol{\mu}_{y2}}{2} \right)$	$\mathbf{P}_{x2} + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y2} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{x2y2} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{y2x2}$
η	0	$\mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx}$

Çizelge 3.2’de, kestirim hatasının sıfır ortalamalı bir hata olduğu görülmektedir. Kestirim hatası eşdeğişinti matrisi ise kestirilen verinin eşdeğişinti matrisinden ($\mathbf{P}_x$), $\mathbf{P}_{xy}\mathbf{P}_y^{-1}\mathbf{P}_{yx}$ matrisi çıkartılarak hesaplanmaktadır. Kestirimde yapılacak hata, kestirilen veriler üzerinde bir miktar sapmaya sebep olacağından, veriler üzerinde bir gürültü olarak modellenenbilir. Bu durum, kestirim sonrasındaki özniteliklerin eşdeğişinti matrislerinde bir miktar büyümeye denk gelecektir. Kestirim hatasının veriler üzerinde gürültü olarak modellenmesi Bölüm 4’de ayrıntılı olarak incelenecektir.

X ve Y veri kümeleri arasındaki korelasyon ne kadar büyükse ($|\mathbf{P}_{xy}|$), kestirim hatası aynı oranda küçülecektir. Bölüm 5’de sunulacak olan KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yönteminin başarısında bu korelasyon değerinin etkisi incelenmiştir.

3.5 Önerilen Çapraz Sınıflandırma Yönteminin Performans Sınırları

Bu bölümde Bhattacharyya Uzaklığı açısından, doğrudan gözlenen ($\mathbf{y}$), ölçülemeyen ($\mathbf{x}$) ve kestirilen ($\mathbf{x}_{est}$) öznitelikler kullanıldığı durumlardaki sınıflandırma performansları hata olasılıkları (P_e) açısından incelenecektir.

$\mathbf{x}$: sınıflandırıcısı bilinen, veri tabanında kayıtlı öznitelik vektörünü,

$\mathbf{y}$: ölçülebilen/gözlenen öznitelik vektörünü,

$\mathbf{x}_{est}$: $\mathbf{y}$ öznitelik vektörleri kullanılarak kestirilen $\mathbf{x}$ vektörünü ifade etmektedir.

c_1 ve c_2 olasılık dağılımları ile tanımlanmış iki sınıfı ifade etmek üzere; P_e ile Bhattacharyya Katsayısı (BK) arasındaki ilişki Eşitlik 3.25’de

$$\left(\frac{1}{2}BK(c_1, c_2)\right)^2 \leq 2P_e \leq BK(c_1, c_2) \quad (3.25)$$

P_e ile Bhattacharyya Uzaklığı (BU) arasındaki ilişki Eşitlik 3.26’de verildiği gibidir [16, 18, 19].

$$\left(\frac{1}{2}\exp^{-BU(c_1, c_2)}\right)^2 \leq 2P_e \leq \exp^{-BU(c_1, c_2)} \quad (3.26)$$

Aşağıdaki örnekte; sentetik olarak üretilen $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ öznitelikleri için Bhattacharyya Uzaklığı ile tanımlanan sınıflandırma performansı sınır değerleri gösterilmiştir. Ayrıca, $\mathbf{y}$ öznitelikleri ile c_1, c_2 sınıfları istatistikleri kullanılarak elde edilen $\mathbf{x}_{est}$ özniteliklerinin sınıflandırma performansı sınır değerleri ile olan ilişkisi açıklanmıştır.

Örnek:

Kullanılan veriler, iki boyutlu uzayda (x ve y öznitelik uzayı) Gauss dağılıma sahip iki sınıfı ifade eden 'sentetik' veriler üretilerek tanımlanmıştır. Ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrisi rastgele üretilen bu verilerde c_1 ve c_2 sınıfları belirtmek üzere;

Sınıf-1 öznitelikleri dağılımları,

$$x \in c_1 := N(4.51, 0.14)$$

$$y \in c_1 := N(5.95, 1.18)$$

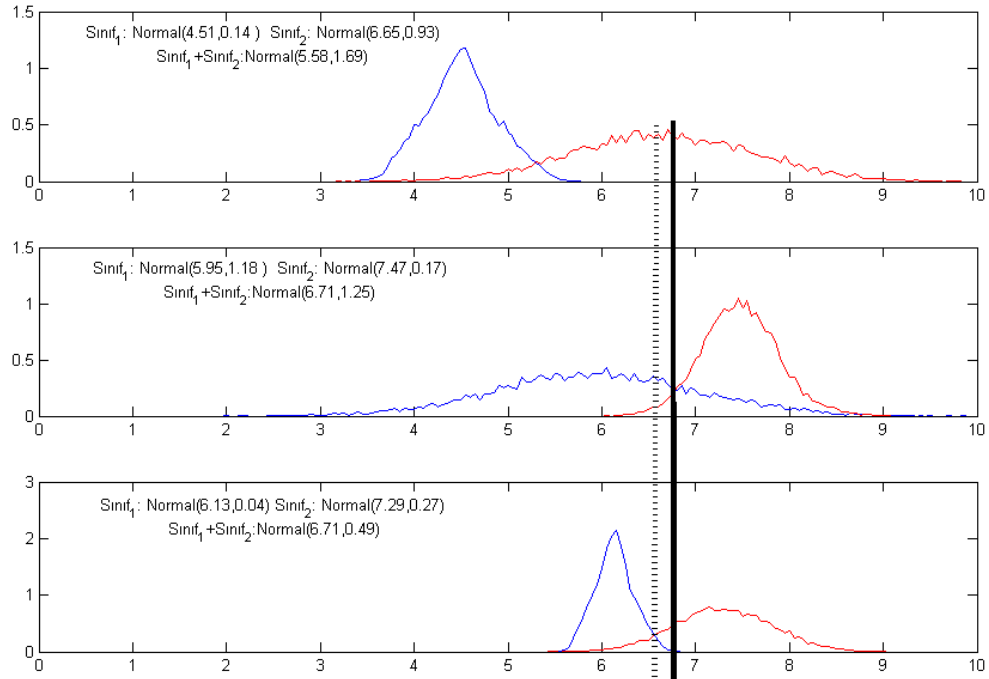
Sınıf-2 öznitelikleri dağılımları,

$$x \in c_2 := N(6.65, 0.93)$$

$$y \in c_2 := N(7.47, 0.17)$$

olarak üretilmiştir. x özniteliklerinin veri kümesinde kayıtlı öznitelikleri, y ise ölçülebilen öznitelikleri ifade ettiği varsayılacaktır.

Şekil 3.2'de görülen birinci grafik, ölçülebilen y özniteliklerin dağılım grafiğidir. Şekil 3.2'de görülen ikinci grafik, ölçemediğimiz x verileri için dağılım grafiğidir. Şekil 3.2'de görülen üçüncü grafik, sınıf istatistikleri kullanılarak elde edilen DMOKH kestiricisi ile ölçülemeyen veriler için yapılan kestirim sonucunda bulunan x_{est} 'a ait dağılım grafiğidir.



Şekil 3.2: Ölçülebilen(y), Gerçek(x) ve Kestirilen(x_{est}) Değerlerin Olasılık Dağılımları

y verilerinde BK değerleri için, veriler üzerinden hesaplanan $BK = 0.27$ ve teorik olarak hesaplanan $BK = 0.28$ (verinin Gauss dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır) bulunmuştur. Veriler üzerinden hesaplanan ve verilerin istatistiksel özellikleri ile hesaplanan BK değerleri birbirleri ile büyük ölçüde tutarlı çıkmıştır. Bu da veriler için Gauss kabullenmesi yapabileceğimizin bir göstergesidir. y verileri için BK değeri $BK = 0.28$ ve hata olasılığı değeri $P_e = 0.05$ olarak bulunmuştur. Eşitlik 2.6'ya göre beklenen sınır değerleri $0.009 \leq \mathbb{P}_e \leq 0.138$ şeklinde olacaktır. Burada dağılımların kesişim noktası sınıflandırıcı için eşik olarak kullanıldığında, bu değerlerin Eşitlik 2.6'da verilen sınır değerlerini sağladığı görülmektedir.

x verileri için $BK = 0.52$ ve $P_e = 0.14$ olarak bulunmuştur. Eşitlik 2.6'ya göre beklenen sınır değerleri $0.034 \leq P_e \leq 0.259$ şeklinde olacaktır. Bu değerlerin de Eşitlik 2.6'da verilen sınır değerlerini sağladığı görülmektedir.

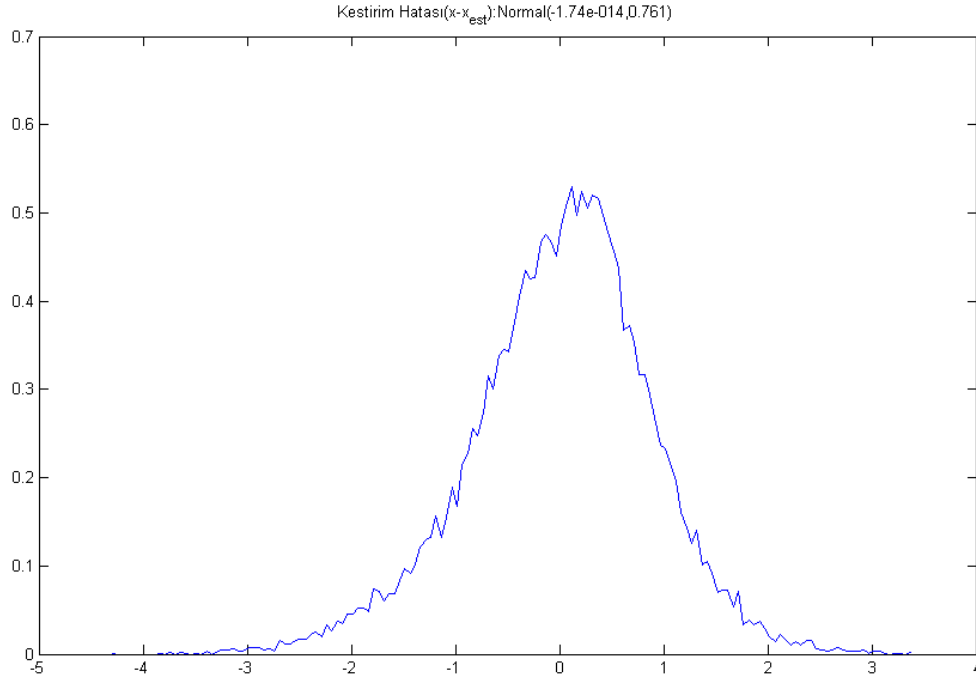
x_{est} hesaplanan BK ve P_e değerleri Bölüm 2.1'de belirtilen iddia ile uyumluluk gösterecek şekilde y verilerine ait olan BK ve P_e ile aynı çıkmıştır.

Tipik bir çapraz sınıflandırma probleminde, ölçülemeyen verilere ait bir sınıflandırıcının önceden bilindiğini düşünebiliriz. Şekil 3.2'deki x verilerine ait olan sınıflandırıcı düz çizgi ile gösterilmiştir. Noktalı çizgi ile gösterilen çizgi ise, x_{est} verilerine ait olan kestiricidir. Pratikte x_{est} verilerine ait olan noktalı çizgi ile ifade edilen sınıflandırıcı önceden bilinemez. Dolayısıyla, bu örnekte her ne kadar x_{est} üzerinden hesaplanan P_e küçük görünse de, herhangi bir problemde kullanılacak sınıflandırıcı için hesaplanan P_e değeri, Eşitlik 2.6'deki sınırların içine düşmeyebilir.

Çıkarım-4: Bölüm 3.3'de önerilen yöntem ile çapraz sınıflandırma problemi çözülmeye çalışıldığında, sadece x kestiricisi bilindiği için, çapraz sınıflandırmanın performansının ne olacağını ve hangi sınırlar arasında kalabileceğini Bhattacharyya Katsayısına bakarak değerlendirmek doğru olmayacaktır.

Bu sonuca bağlı olarak yapılacak hatanın hangi sınırlar arasında kalması gerektiğine dair bir öneri Bölüm 4'de sunulacaktır.

Şekil 3.3'deki ilk grafikte DMOKH kestiricisi ile yapılan kestirim sonucunda yaptığımız hatanın dağılımı görülmektedir.



Şekil 3.3: Hata($x - x_{est}$)'nın Olasılık Dağılımı

DMOKH kestiricisi sayesinde sıfır ortalamalı bir hata dağılımı elde edilmiştir. Veriler üzerinden, dağılım $N(-1.74e-14, 0.761)$ olarak belirlenmiştir. Hata dağılımının ifadesi Eşitlik 3.27 gösterildiği gibidir. Eşitlik 3.27 ile hesaplanan dağılım ise $N(0, 0.762)$ olarak bulunmuştur. Sonuçların aynı olması, Gauss kabullenmemizin doğruluğunun göstergesidir. Hatanın değişinti matrisi değeri Bölüm 4'de önerdiğimiz yaklaşımın temelini oluşturmaktadır.

$$N(\mathbf{0}, \mathbf{P}_x - \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx}) \quad (3.27)$$

Eşitlik 3.27, kestirim sonrasında yapılacak hatanın eşdeğişinti matrisini ifade etmektedir. Bu hata, kestirim sonucunda hesaplanan değerler üzerindeki belirsizliğin bir ifadesidir.

4. ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA İÇİN GÜRÜLTÜ MODELİ

Bölüm 3’de çapraz sınıflandırmada doğrusal minimum ortalama karesel hata kestiricisi kullandığımızda, Bhattacharyya Uzaklığı değerinin sınıflandırma performansı ile ilgili doğrudan bir bilgi veremeyeceğini ortaya konulmuştu. Bu bölümde sınıflandırma performansı açısından yeni bir model önerilmektedir. Bu modelde, kestirim sonucunda ortaya çıkan hata, ölçülemeyen öznitelikler üzerinde gürültü olarak modelleneyecektir. Bu sayede kestirim sonrasında sınıflandırma performansları analitik olarak incelenebilecektir. Sınıflandırma performansı açısından, kestirimde yapılan hata, ölçülemeyen öznitelikler üzerinde bir gürültü gibi düşünüldüğünde Bhattacharyya Uzaklığı değerinin nasıl değiştiği gösterilmiştir.

4.1 Gürültü Modeli ve Sınıflandırma Performansı

$\mathbf{x}$ vektörü sınıflandırıcısı bilinen, veri kümesinde kayıtlı öznitelik vektörünü, $\mathbf{y}$ vektörü, ölçülebilen/gözlenen öznitelik vektörünü, $\mathbf{x}_{est}$ ise $\mathbf{y}$ öznitelik vektörleri kullanılarak kestirilen $\mathbf{x}$ vektörlerini ifade etmektedir. $\boldsymbol{\eta}$ normal dağılıma sahip gürültü olmak üzere, kestirilen $\mathbf{x}_{est}$ özniteliklerini $\mathbf{x}_{est} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}$ şeklinde modellediğimizde $BU(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x}))$ ve $BU(p_{x_{est_1}}(\mathbf{x}), p_{x_{est_2}}(\mathbf{x}))$ değerlerinin normal dağılıma sahip öznitelikler için nasıl değiştiğini belirlemek istiyoruz. $p_{x_1}(\mathbf{x})$ ifadesi $\mathbf{x}$ öznitelik vektörünün sınıf-1’e ait olan örneklerinin dağılımını, $p_{x_2}(\mathbf{x})$ ise sınıf-2 ye ait olan verilerin dağılımını ifade etmektedir. $p_{x_{est_1}}(\mathbf{x})$ ifadesi ise $\mathbf{y}$ öznitelik vektörlerinden kestirilen $\mathbf{x}_{est}$ verilerinin sınıf-1 e ait örneklerinin dağılımını, $p_{x_{est_2}}(\mathbf{x})$ sınıf-2’ye ait olan verilerin dağılımlarını ifade etmektedir. $BU(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x}))$ ifadesi bu bölümde $BU(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ ifadesi ile kısaltılacaktır.

Normal dağılımlar için BU değeri Eşitlik 4.1’da gösterildiği gibidir.

$$BU(p_{x_1}(\mathbf{x}), p_{x_2}(\mathbf{x})) = \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{av}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) + \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \quad (4.1)$$

İddia-3:

$\mathbf{x}$; ölçebildiğimiz $\mathbf{y}$ öz niteliklerinden kestirmek istediğimiz öz nitelikler, $\boldsymbol{\eta}$ gürültü olmak üzere,

$$\mathbf{x}_1 : N(\boldsymbol{\mu}_{x_1}, \mathbf{P}_{x_1})$$

$$\mathbf{x}_2 : N(\boldsymbol{\mu}_{x_2}, \mathbf{P}_{x_2})$$

ve

$$\boldsymbol{\eta} : N(\boldsymbol{\mu}_{\eta}, \mathbf{P}_{\eta}) \text{ olmak üzere,}$$

$$\mathbf{x}_{est1} = \mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\eta}$$

$$\mathbf{x}_{est2} = \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\eta}$$

olarak tanımlandığında,

$$BU(x_1, x_2) \geq BU(x_{est1}, x_{est2}) \quad (4.2)$$

olacaktır. Eşitliğin sağlanması, ancak ve ancak;

- Gürültü eşdeğişinti matrisinin sıfır olması ($\mathbf{P}_{\eta} = \mathbf{0}$) veya
- Öz niteliklerin eşdeğişinti matrislerinin ($\mathbf{P}_{x_1} = \mathbf{P}_{x_2}$) ve ortalama değerlerinin ($\boldsymbol{\mu}_{x_1} = \boldsymbol{\mu}_{x_2}$) eşit olmasıyla sağlanabilir.

İspat: Göstermek istediğimiz, Eşitlik 4.1'e göre $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ arasındaki BU değerinin $\mathbf{x}_{est1}, \mathbf{x}_{est2}$ arasındaki uzaklıktan büyük olduğudur. Eşitlik 4.1'i iki parça olarak görüp, her bir parça için bunun doğru olduğunu, dolayısıyla eşitsizliğin tamamı için doğru olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{est1} = \mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\eta} &\Rightarrow \mathbf{x}_{est1} : N(\boldsymbol{\mu}_{x_1} + \boldsymbol{\mu}_{\eta}, \mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{\eta}) \\ \mathbf{x}_{est2} = \mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\eta} &\Rightarrow \mathbf{x}_{est2} : N(\boldsymbol{\mu}_{x_2} + \boldsymbol{\mu}_{\eta}, \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_{\eta}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Eşitlik 4.1'in sağ tarafındaki birinci kısım için A , ikinci kısım B ifadesini kullanacağız. Bu durumu:

$$\begin{aligned} BU(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= A_x + B_x \\ A_x &\triangleq \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{av}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) \\ B_x &\triangleq \frac{1}{2} \ln \frac{|\mathbf{P}_{x_{av}}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} BU(\mathbf{x}_{est1}, \mathbf{x}_{est2}) &= A_{x_{est}} + B_{x_{est}} \\ A_{x_{est}} &\triangleq \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_{est1}} - \boldsymbol{\mu}_{x_{est2}})^T \mathbf{P}_{av_{x_{est}}}^{-1}(\boldsymbol{\mu}_{x_{est1}} - \boldsymbol{\mu}_{x_{est2}}) \\ B_{x_{est}} &\triangleq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|}{|\mathbf{P}_{x_{est1}}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_{est2}}|^{\frac{1}{2}}} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edeceğiz.

Eşitlik 4.4 için; $A_x \geq A_{x_{est}}$ ve $B_x \geq B_{x_{est}}$ ifadelerini ayrı ayrı göstermemiz, $BU(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geq BU(\mathbf{x}_{est1}, \mathbf{x}_{est2})$ ifadesinin ispatı için yeterli olacaktır.

Eşitlik 4.4'in birinci kısmı için;

$$A_x \geq A_{x_{est}} \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T \mathbf{P}_{av_x}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) \geq \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_{est1}} - \boldsymbol{\mu}_{x_{est2}})^T \mathbf{P}_{av_{x_{est}}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_{est1}} - \boldsymbol{\mu}_{x_{est2}})$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekiyor.

$$\begin{aligned} A_{x_{est}} &= \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_{est1}} - \boldsymbol{\mu}_{x_{est2}})^T \mathbf{P}_{av_{x_{est}}}^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_{est1}} - \boldsymbol{\mu}_{x_{est2}}) \\ &= \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} + \boldsymbol{\mu}_\eta - \boldsymbol{\mu}_{x_2} - \boldsymbol{\mu}_\eta)^T (\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta)^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} + \boldsymbol{\mu}_\eta - \boldsymbol{\mu}_{x_2} - \boldsymbol{\mu}_\eta) \\ &= \frac{1}{8}(\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2})^T (\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta)^{-1} (\boldsymbol{\mu}_{x_1} - \boldsymbol{\mu}_{x_2}) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bu noktada, pozitif tanımlı matrisler için

$$\mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} \geq \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{m} \Rightarrow |\mathbf{A}| \geq |\mathbf{B}| \quad (4.8)$$

eşitliği (ispat A.EK'te verilmiştir) kullanıldığında, $A_x \geq A_{x_{est}}$ olması için

$$|\mathbf{P}_{av_x}^{-1}| \geq |(\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta)^{-1}| \quad (4.9)$$

olması yeterlidir. Pozitif tanımlı matrislerde,

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| \quad (4.10)$$

eşitliği (ispat B.EK'te verilmiştir) kullanıldığında

$$\begin{aligned} |(\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta)| &\geq |\mathbf{P}_{av_x}| \\ \frac{1}{|(\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta)|} &\leq \frac{1}{|\mathbf{P}_{av_x}|} \\ |(\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta)^{-1}| &\leq |\mathbf{P}_{av_x}^{-1}| \end{aligned} \quad (4.11)$$

Eşitlik 4.11 sonucunda, 4.9'de sunulan eşitsizliğin sağlandığı gösterilmiş olur.

Eşitlik 4.4'nin 2. parçası için,

$$\begin{aligned} B_x &\geq B_{x_{est}} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|\mathbf{P}_{av_x}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}}\right) &\geq \frac{1}{2} \ln\left(\frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|}{|\mathbf{P}_{x_{est_1}}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_{est_2}}|^{\frac{1}{2}}}\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

eşitsizliğin sağlanması yeterlidir. Eşitsizlikteki, $\ln$ fonksiyonu monotonik artan bir fonksiyon olduğundan, bunun sağlanabilmesi için,

$$\frac{|\mathbf{P}_{av_x}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|}{|\mathbf{P}_{x_{est_1}}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_{est_2}}|^{\frac{1}{2}}} \quad (4.13)$$

olması yeterlidir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının karesi alındığında eşitsizlik bozulmayacaktır,

$$\frac{|\mathbf{P}_{av_x}|^2}{|\mathbf{P}_{x_1}| |\mathbf{P}_{x_2}|} \geq \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|^2}{|\mathbf{P}_{x_{est_1}}| |\mathbf{P}_{x_{est_2}}|} \quad (4.14)$$

Bu eşitsizlik,

$$1 \geq \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|^2 |\mathbf{P}_{x_1}| |\mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}|^2 |\mathbf{P}_{x_{est_1}}| |\mathbf{P}_{x_{est_2}}|} \quad (4.15)$$

şeklinde de yazılabilir. Yukardaki eşitsizliğin sağ tarafının birden küçük olduğunu göstermek ispatın tamamlanması için yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|^2 |\mathbf{P}_{x_1}| |\mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}|^2 |\mathbf{P}_{x_{est_1}}| |\mathbf{P}_{x_{est_2}}|} &= \frac{|\mathbf{P}_{av_x} + \mathbf{P}_\eta|^2 |\mathbf{P}_{x_1}| |\mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}|^2 |\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_\eta| |\mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta|} \\ &= \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 + \mathbf{P}_\eta^2 + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x}| |\mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}|^2 |\mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_\eta + \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \mathbf{P}_\eta^2|} \\ &= \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_\eta + \mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_\eta^2|} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Eşitlik 4.16'de $\mathbf{P}_{av_x}$ yerine $\mathbf{P}_{av_x} = \frac{\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2}}{2}$ yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
& \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|^2 |\mathbf{P}_{x_1}| |\mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}|^2 |\mathbf{P}_{x_{est1}}| |\mathbf{P}_{x_{est2}}|} = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_{av_x} (\frac{\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2}}{2}) \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_\eta + \mathbf{P}_{av_x} (\frac{\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2}}{2}) \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1}^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_2}^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_\eta + (\frac{\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2}}{2})^2 \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1}^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_2}^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{(\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2})^2}{4} \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} (\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} 2\mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \frac{(\mathbf{P}_{x_1}^2 + \mathbf{P}_{x_2}^2 + 2\mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2})}{4} \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} (\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{(\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 + 4\mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}}{4} \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} \mathbf{P}_\eta + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} (\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 \mathbf{P}_\eta + (\frac{(\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2}{4} + \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}) \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_{av_x} (\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 \mathbf{P}_\eta + \frac{(\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2}{4} \mathbf{P}_\eta^2|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 \mathbf{P}_\eta (\mathbf{P}_{av_x} + \frac{1}{2} \mathbf{P}_\eta)|} \\
& = \frac{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2}|}{|\mathbf{P}_{av_x}^2 \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + 2\mathbf{P}_\eta \mathbf{P}_{av_x} \mathbf{P}_{x_1} \mathbf{P}_{x_2} + \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{x_1} - \mathbf{P}_{x_2})^2 \mathbf{P}_\eta \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta)|}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Eşitlik 4.17’de, paydaki ifadenin aynısı paydada da bulunmaktadır. Pozitif tanımlı matrisler için $|A + B| \geq |A| + |B|$ bağıntısını (ispat B.EK’te verilmiştir) kullandığımızda eşitlik 4.17’de paydanın paydan büyük olduğu ve eşitsizliğin sağlandığını görülür.

$$\Rightarrow 1 \geq \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}| |\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}}{|\mathbf{P}_{av_x}| |\mathbf{P}_{x_{est1}}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_{est2}}|^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{|\mathbf{P}_{av_x}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|}{|\mathbf{P}_{x_{est1}}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_{est2}}|^{\frac{1}{2}}} \tag{4.18}$$

$$\Rightarrow \frac{|\mathbf{P}_{av_x}|}{|\mathbf{P}_{x_1}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_2}|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{|\mathbf{P}_{av_{x_{est}}}|}{|\mathbf{P}_{x_{est1}}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{P}_{x_{est2}}|^{\frac{1}{2}}} \tag{4.19}$$

Eşitlik 4.11 ve Eşitlik 4.19 birleştirildiğinde, ispat tamamlanmış olmaktadır.

Çıkarım-5: Bölüm 4 İddia-3’de gösterilen model ile Bölüm 3.3’de önerilen DMOKH kestirici ile çapraz sınıflandırma yöntemi birleştirildiğinde, gürültü eşdeğişinti matrisini yerine $(\mathbf{P}_\eta)$, kestirimde yapılacak hatanın eşdeğişinti $(\mathbf{P}_{est})$ matrisi kullanabilir. Bu durum, kestirilen özniteliklerin, hatalı ölçülen öznitelikler olarak yorumlanmasıyla eşdeğerdir.

Çıkarım-6: Çapraz Sınıflandırma problemi için Bölüm 3.3’de önerilen yöntem kullanıldığında; kestirim hatası eşdeğişinti matrisi, Bölüm 4’deki İddia-3’de kullanılan modeldeki gürültü eşdeğişinti matrisi olarak alındığında,

$\mathbf{P}_{est}$: Kestirim hatası eşdeğişinti matrisi

$\mathbf{P}_\eta$: Gürültü eşdeğişinti matrisi

$\mathbf{P}_{x_1}$: Sınıf-1'e ait eşdeğişinti matrisi

$\mathbf{P}_{x_2}$: Sınıf-2'ye ait eşdeğişinti matrisi

olmak üzere, Eşitlik 4.1'da $\mathbf{P}_{x_1}$ yerine $\mathbf{P}_{x_1} + \mathbf{P}_\eta$ ve $\mathbf{P}_{x_2}$ yerine $\mathbf{P}_{x_2} + \mathbf{P}_\eta$ yazılarak elde edilen Bhattacharyya Uzaklığı, yapılabilecek sınıflandırıcı için Eşitlik 3.26'de gösterilen sınırları belirler. Diğer bir ifadeyle; DMOKH kestiricisi kullanılarak yapılan çapraz sınıflandırma sonrasında analitik olarak bulunabilecek istatistiksel sınıflandırıcının performans değerleri, sadece $\mathbf{x}_1$ ve $\mathbf{x}_2$ 'nin istatistiksel özelliklerine değil, $\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{\eta}$ ve $\mathbf{x}_2 + \boldsymbol{\eta}$ 'nin istatistiksel özelliklerine bağlıdır.



5. ÇAPRAZ SINIFLANDIRMA İÇİN KKA YAKLAŞIMI

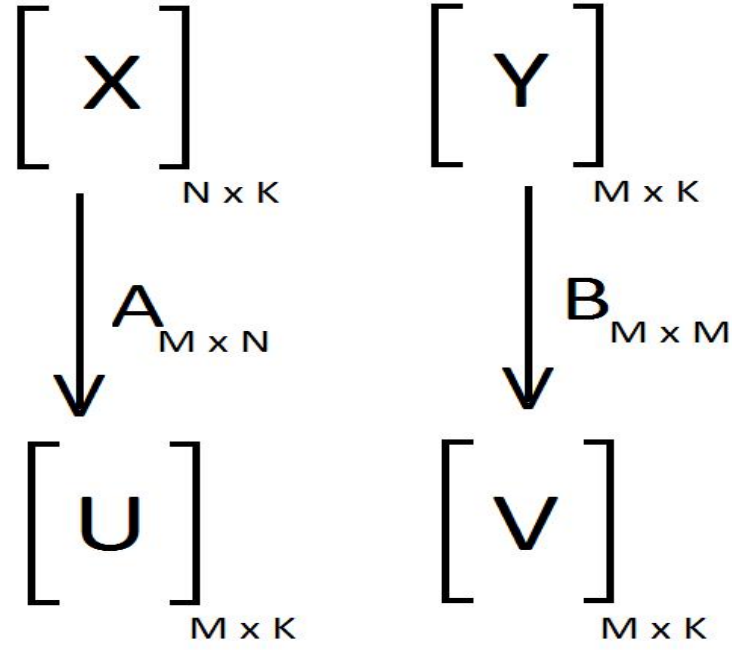
Önceki bölümlerde doğrudan ölçülen özniteliklerinden, doğrusal en küçük ortalama karesel hata kestirici (DMOKH) ile doğrudan ölçülemeyen özniteliklerin kestirilmesi ve çapraz sınıflandırma yapılması problemi çalışılmıştı.

Bu bölümde ise, çapraz sınıflandırma problemleri için yeni bir yaklaşım olan Kanonik Korelasyon Analizi (KKA) tabanlı yöntem sunulacaktır. Kanonik korelasyon analizi, eş sayıda örnek içeren çok değişkenli iki veri kümesi arasında en yüksek korelasyonu sağlayacak dönüşümleri bulmakta kullanılan bir yöntemdir. Çapraz sınıflandırma problemine bir çözüm olarak önerilen KKA tabanlı yöntem, KKA'nın doğası gereği, birbiriyle en yüksek korelasyonu gösteren öznitelikleri seçmesi sayesinde başarılı performans sergilemektedir. Eldeki verilerin tamamının kullanılması durumunda, DMOKH ve KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yöntemleri aynı performans değerlerini göstermektedir. Kullanılan özniteliklerin sayısı azaltıldığında KKA tabanlı yaklaşım DMOKH ile çapraz sınıflandırmaya göre çok daha iyi sonuçlar vermektedir. KKA tabanlı yaklaşım, korelasyonları yüksek olanları seçmesi sayesinde, optimal bir öznitelik seçim yöntemi olarak da karşımıza çıkmaktadır.

Bölüm içerisinde, öncelikle Kanonik Korelasyon Analizinin temelleri sunulacaktır. Sonrasında KKA ile öznitelik kestirimi sunulacak ve son olarak KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yöntemi ortaya konulacaktır.

5.1 Kanonik Korelasyon Analizi

Kanonik Korelasyon Analizi (KKA), çok boyutlu (multivariate) iki değişken kümesi arasındaki doğrusal benzerliği ortaya çıkaran istatistiksel bir yöntemdir [21]. H. Hotelling tarafından 1936'da ortaya konulan [22] bu yöntem, temelde iki değişken kümesine uygulanacak iki farklı doğrusal dönüşümü belirleyen temel vektörleri bulmayı hedeflemektedir. Bu iki temel vektör kümesinin özelliği, üzerlerine yapılan izdüşümlerin sonucunda ortaya çıkan yeni ara uzayların birbirleri ile olan korelasyonunu maksimize ediyor olmalarıdır. KKA'nın temel yapısı Şekil 5.1'de gösterilmiştir.



Şekil 5.1: Kanonik Korelasyon Analizi

Öncelikle burada X ve Y uzaylarını tanımlayacak olursak;

X : Her bir kolonu, bir örneğe ait N adet öznitelik içeren, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \dots \mathbf{x}_K$ olmak üzere toplam K örneğe ait öznitelikleri içeren ve ortalama değer vektörü sıfır olan ($\boldsymbol{\mu}_x = \mathbf{0}$) $\mathbf{X} \in R^{N \times K}$ matrisi ,

Y : Her bir kolonu, bir örneğe ait M adet öznitelik içeren, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 \dots \mathbf{y}_K$ olmak üzere toplam K örneğe ait öznitelikleri içeren ve ortalama değer vektörü sıfır olan ($\boldsymbol{\mu}_y = \mathbf{0}$) $\mathbf{Y} \in R^{M \times K}$ matrisi,

U : X değişkenleri kümesi için oluşturulan kanonik değişkenleri ifade etmektedir. X kümesindeki verilerin, KKA sonucunda elde edilen $\mathbf{A}$ doğrusal dönüşüm matrisi ile çarpımıyla $\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ elde edilir. $\mathbf{U} \in R^{\min(\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})) \times K}$ ve $\mathbf{A} \in R^{\min(\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})) \times N}$ boyutlarındadır. $\mathbf{U}$ matrisinin i . kolonu, i . örneğe ait kanonik değişkenleri ifade etmektedir.

V : Y değişkenleri kümesi için oluşturulan kanonik değişkenleri ifade etmektedir. Y kümesindeki verilerin, KKA sonucunda elde edilen $\mathbf{B}$ doğrusal dönüşüm matrisi ile çarpımıyla $\mathbf{V} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$ elde edilir. $\mathbf{V} \in R^{\min(\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})) \times K}$ ve $\mathbf{B} \in R^{\min(\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})) \times M}$ boyutlarındadır. $\mathbf{V}$ matrisinin i . kolonu, i . örneğe ait kanonik değişkenleri ifade etmektedir.

Kanonik Korelasyon Analizi, U ve V değişken kümelerinin satırları arasındaki korelasyonu maksimize eden analiz yöntemidir ve KKA bu özelliği garanti eden $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerini belirlemek için kullanılır. $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ matrislerinin her bir satırı, yeni uzaylarda özniteliklere karşılık gelmektedir. KKA sonucunda, bu yeni öznitelikler ($\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ matrislerinin satırları) korelasyonu büyükten küçüğe olmak üzere sıralanmış olacaktır. Bu işlem esnasında $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ uzaylarını $\min(\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y}))$ boyutunda bir ara uzaya indirgenir. $\mathbf{A}$ matrisinin her bir satırı üzerine $\mathbf{X}$ veri setinden alınan her bir örnek ($\mathbf{X}$ matrisinin kolonları) yansıtıldığında elde edilen $\mathbf{U}$ matrisinin birinci özniteliği (satırı) ile $\mathbf{B}$ matrisinin her bir satırı üzerine $\mathbf{Y}$ veri setinden alınan her bir örnek ($\mathbf{Y}$ matrisinin kolonları) yansıtıldığında elde edilen $\mathbf{V}$ matrisinin birinci özniteliği (satırı) en yüksek korelasyonu göstermektedir. $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ veri setlerinin izdüşümlerinin korelasyonunu maksimize edecek vektörleri ($\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrislerinin satırları) matematiksel olarak göstermek istediğimizde; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{A}$ matrisinin, $\mathbf{b}_1$ ise $\mathbf{B}$ matrisinin birinci satırını gösteren kolon vektörü olmak üzere, kanonik korelasyon katsayısı (ρ),

$$\rho = \frac{\mathbf{a}_1^T \mathbf{X} \mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1}{\sqrt{(\mathbf{a}_1^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1)(\mathbf{b}_1^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1)}} \quad (5.1)$$

şeklinde ifade edilir. $\mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{b}_1$ vektörlerinin özelliği, ρ 'yu maksimize edecek olmalarıdır.

Optimizasyon Problemi:

Kanonik korelasyonu ρ maksimize eden $\mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{b}_1$ vektörleri

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1} \quad & \mathbf{a}_1^T \mathbf{X} \mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1 \\ \text{Kısıt :} \quad & \mathbf{a}_1^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1 = 1 \quad \mathbf{b}_1^T \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1 = 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

probleminin çözümüne eşittir. $\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T$ tersi alınabilen bir matris olarak kabul edildiğinde, Eşitlik 5.3'de verilen optimizasyon probleminin çözülmesiyle $\mathbf{a}_1$ eşitliğinin elde edilebileceği gösterilebilir [23, 24].

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{a}_1} \quad & \mathbf{a}_1^T \mathbf{X} \mathbf{Y}^T (\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1 \\ \text{Kısıt :} \quad & \mathbf{a}_1^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1 = 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Eşitlik 5.2 ve Eşitlik 5.3, Eşitlik 5.4'de verilen genelleştirilmiş özdeğer özvektör probleminin en büyük özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini bulmaktadır [25].

$$\mathbf{X} \mathbf{Y}^T (\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1 = \eta \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{a}_1 \quad (5.4)$$

η , $\mathbf{a}_1$ özvektörüne karşılık gelen özdeğerdir. $\mathbf{X}$ uzayı için M adet özvektör, Eşitlik 5.5'de verilen optimizasyon probleminin çözülmesi ile elde edilir [23].

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{A}} \quad & \text{trace}(\mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{Y}^T (\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T)^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{X}^T \mathbf{A}) \\ \text{Kısıt :} \quad & \mathbf{A}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{A} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.5)$$

$M \leq N$ kabullenmesi yapıldığında, $\mathbf{A}$ matrisi $M \times N$ boyutunda olacak ve N uzunluğunda M adet özvektörden oluşacaktır.

Aynı yöntemle $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ tersi alınabilen bir matris olduğu kabul edildiğinde,

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{b}_1} \quad & \mathbf{b}_1^T \mathbf{Y}\mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{X}\mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1 \\ \text{kısıt :} \quad & \mathbf{b}_1^T \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1 = 1 \end{aligned} \quad (5.6)$$

problemi tanımlanır. Eşitlik 5.2 ve Eşitlik 5.6, Eşitlik 5.7’de verilen genelleştirilmiş özdeğer özvektör probleminin en büyük özdeğerlerine karşılık gelen özvektörlerini bulmaktır [25].

$$\mathbf{Y}\mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{X}\mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1 = \eta \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{b}_1 \quad (5.7)$$

η , $\mathbf{b}_1$ özvektörüne karşılık gelen özdeğerdir. $\mathbf{Y}$ uzayı için M adet özvektör, Eşitlik 5.8’de verilen optimizasyon probleminin çözülmesi ile elde edilir [23].

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{B}} \quad & \text{trace}(\mathbf{B}^T \mathbf{Y}\mathbf{X}^T (\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1} \mathbf{X}\mathbf{Y}^T \mathbf{B}) \\ \text{kısıt :} \quad & \mathbf{B}^T \mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \mathbf{B} = \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$M \leq N$ kabullenmesi yapıldığında, $\mathbf{B}$ matrisi $M \times N$ boyutunda olacak ve N uzunluğunda M adet özvektörden oluşacaktır.

Elde edilen $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisi kullanılarak $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ veri matrislerini oluşturduğumuzda, bu iki matrisin tanımlı olduğu; $U, V \in R^M$ uzayında, U ve V arasında birbiri ile en yüksek korelasyonu gösteren veriler birinci satırlarındaki değişkenler, en düşük korelasyonu gösterenler ise son satırlarındaki veriler olacaktır.

Kanonik Korelasyon Analizi için kullanılabilecek bir diğer gösterim de genelleştirilmiş özdeğer özvektör problemi gösterimidir. ρ_i i. özdeğeri, $\mathbf{z}_i$ i. özvektörü ifade etmek üzere, genelleştirilmiş özdeğer özvektör problemi Eşitlik 5.9 ile ifade edilir.

$$\mathbf{E}\mathbf{z}_i = \rho_i \mathbf{F}\mathbf{z}_i \quad (5.9)$$

KKK için blok matris gösteriminde,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_y \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

olarak seçildiğinde, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin boyutu sırasıyla N ve M olmak üzere, $\mathbf{z}$ özdeğer özvektörlerin boyutu $i = N + M$ olacaktır.

$$\mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Eşitlik 5.9, Eşitlik 5.10 ve Eşitlik 5.11 birleştirildiğinde, Eşitlik 5.12 elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{z}_i &= \rho_i \mathbf{z}_i \\ i = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{z}_1 &= \rho_1 \mathbf{z}_1 \\ \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} &= \rho_1 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \\ \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} &= \rho_1 \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Eşitlik 5.12 çözümlendiğinde $\mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{b}_1 = \rho_1 \mathbf{a}_1$ ve $\mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \mathbf{a}_1 = \rho_1 \mathbf{b}_1$ olmak üzere iki denklem kümesi ortaya çıkar. $\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{b}_1}{\rho_1}$ ifadesi ikinci denklem kümesinde yerine yazıldığında;

$$\begin{aligned} \rho_1 \mathbf{b}_1 &= \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \frac{\mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{b}_1}{\rho_1} \\ \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{b}_1 &= \rho_1^2 \mathbf{b}_1 \end{aligned}$$

aynı yöntem ile $\mathbf{a}_1$ özdeğer özvektörü de çözümlendiğinde ise;

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \mathbf{a}_1 &= \rho_1^2 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{P}_y^{-1} \mathbf{P}_{yx} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{P}_{xy} \mathbf{b}_1 &= \rho_1^2 \mathbf{b}_1 \end{aligned} \quad (5.13)$$

elde edilir [24]. Bu formülasyon, KKA'nın Eşitlik 5.9 ve Eşitlik 5.10 ile tanımlanan özdeğer-özvektör problemi ile çözüldüğünü gösterir.

KKA yönteminin, $U, V \in R^M$ uzayında, veri kümeleri arasındaki korelasyonu büyükten küçüğe doğru olan özvektörler şeklinde sıralaması, $\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq \rho_3^2 \geq \dots$ sınıflandırma/tanıma için önemli bir altyapı sağlamaktadır. Bu sıralama, öznelitliklerin indirgenmesi probleminde de optimal bir çözüm sağlayacaktır. U ve V matrislerinin satırlarındaki kanonik korelasyon sayesinde R^M uzayında, U için tasarlanmış bir sınıflandırıcı veya tanıma yöntemi, aynı uzayda tanımlı V verileri için de kullanılabilir. Birbirleri ile yüksek korelasyon gösteren öznelitliklerin aynı sınıflandırıcıda, korelasyon göstermeyenlere göre daha iyi performans vermesi beklenen bir durumdur.

Kanonik Korelasyon Analizi, sınıflandırmada farklı çalışmalarda kullanılmışlardır. İki veri kümesi üzerinde çalışan Kanonik Korelasyon Analizi'nin sınıflandırma için kullanımında birinci veri kümesi olarak örneklerin öznitelikleri, ikinci veri kümesi olarak da sınıfların etiketleri seçilmiştir [26, 27, 28]. Bu önerilen yöntem, sınıflar için atanan etiketlerde yapılacak değişikliklerden etkilenmekte ve farklı etiketler ile farklı performans sonuçları oluşmaktadır [29]. Bu problemin üstesinden gelebilmek için sınıf etiketleri yerine ağırlıklandırılmış etiketlerin kullanıldığı KKA tabanlı yöntemler geliştirilmiştir [29, 30].

5.2 KKA ile Öznitelik Belirleme ve Öznitelik İndirgeme

Bölüm 1.1'de temel unsurları verilen çapraz tanıma yaklaşımının birinci unsurunun Y veri kümesinden, X veya U veri kümesine kestirim olduğunu söylemiştik. X veri kümesi, ölçülemeyen fakat daha önceden kayıtlı olan verileri, Y ise ölçülebilen fakat sınıflandırıcısı bilinmeyen verileri ifade edecek şekilde KKA ile öznitelik belirlenebilir. U ise, Şekil 5.1'de gösterilen X değişkenleri kümesi için oluşturulan kanonik değişkenlerin bulunduğu ara uzayı ifade etmektedir.

Bölüm 3'de Y verilerinden X verilerini kestirmek için DMOKH yönteminin kullanımı gösterilmişti. Bu bölümde ise amaç X verisini kestirmek yerine, U verilerini kestirmek ve U uzayında bir sınıflandırıcı tanımlamak olacaktır.

KKA yöntemi, X ve Y veri kümeleri üzerinde $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matris dönüşümlerini tanımlar. Bu dönüşümler sonucunda, X ve Y uzaylarındaki veriler U ve V ara uzaylarındaki verileri dönüşmektedir. U ve V ara uzayındaki verilerin ilk sırasındaki öznitelikleri birbirleri ile en yüksek korelasyonu göstermektedir. İkinci sıradaki öznitelikler ise ikinci en yüksek korelasyonu göstermektedir. Bu dönüşüm sonrasında U ve V ara uzaylarındaki verilerin öznitelikleri, birbirleri ile korelasyonu yüksek olandan düşük olana doğru dizilmiş olmaktadır. X uzayındaki K adet veri $\mathbf{A}$ kanonik korelasyon dönüşüm matrisi ile U uzayı verilerine dönüştürüldüğünde, $\mathbf{x}_{ij}$ j . örneğin X uzayındaki i . özniteliğini, $\mathbf{u}_{ij}$ j . örneğin U uzayındaki i . özniteliğini belirtmek üzere;

$$\mathbf{U} = \mathbf{AX}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{11} & \mathbf{u}_{12} & \dots & \mathbf{u}_{1K} \\ \mathbf{u}_{21} & \mathbf{u}_{22} & \dots & \mathbf{u}_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{u}_{M1} & \mathbf{u}_{M2} & \dots & \mathbf{u}_{MK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \dots & \mathbf{a}_{1N} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \dots & \mathbf{a}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{M1} & \mathbf{a}_{M2} & \dots & \mathbf{a}_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} & \mathbf{x}_{12} & \dots & \mathbf{x}_{1K} \\ \mathbf{x}_{21} & \mathbf{x}_{22} & \dots & \mathbf{x}_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{x}_{N1} & \mathbf{x}_{N2} & \dots & \mathbf{x}_{NK} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

şeklinde ifade edilebilir.

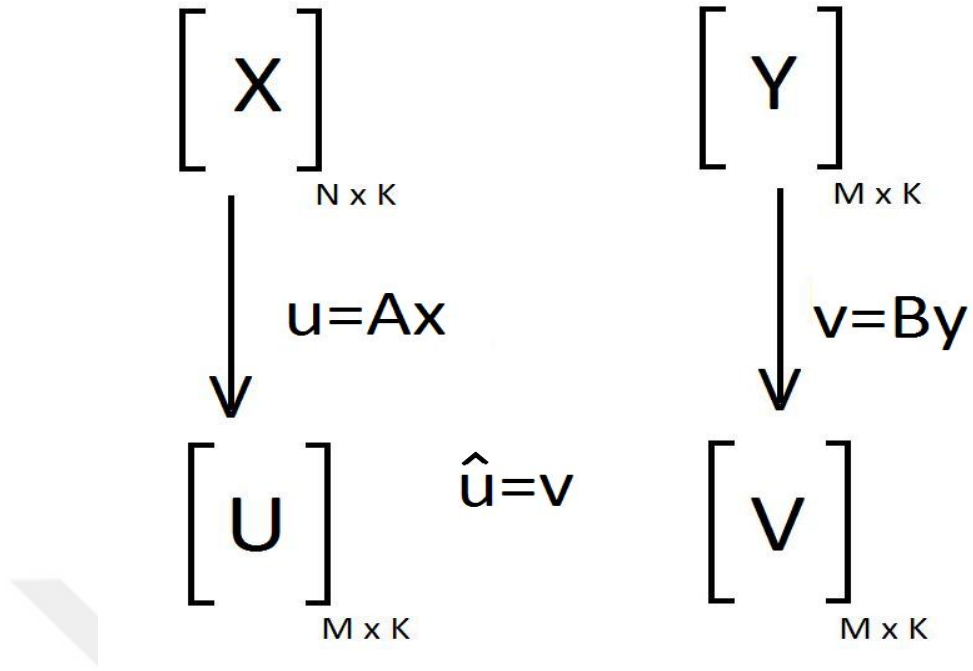
y_{ij} j . örneğin Y uzayındaki i . özniteliğini, v_{ij} j . örneğin V uzayındaki i . özniteliğini belirtmek üzere;

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\mathbf{Y}$$

$$\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1K} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{M1} & v_{M2} & \dots & v_{MK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1M} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{M1} & b_{M2} & \dots & b_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1K} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{M1} & y_{M2} & \dots & y_{MK} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

ile dönüştürüldüğünde, K adet verinin M boyutlu $U \in R^M$ uzayındaki birinci öznitelikleri $(\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{12}, \dots, \mathbf{u}_{1K})$ ile, K adet verinin M boyutlu $V \in R^M$ uzayındaki birinci öznitelikleri $(\mathbf{v}_{11}, \mathbf{v}_{12}, \dots, \mathbf{v}_{1K})$ istatistiksel olarak birbirleri arasında en yüksek korelasyonu gösteren öznitelikler olacaklardır. Aynı şekilde, K adet verinin M boyutlu $U \in R^M$ uzayındaki ikinci öznitelikleri ile $(\mathbf{u}_{21}, \mathbf{u}_{22}, \dots, \mathbf{u}_{2K})$, K adet verinin M boyutlu $V \in R^M$ uzayındaki ikinci öznitelikleri $(\mathbf{v}_{21}, \mathbf{v}_{22}, \dots, \mathbf{v}_{2K})$ istatistiksel olarak birbirleri arasında ikinci yüksek korelasyonu gösteren öznitelikler olacaklardır. Diğer bir ifade ile U ve V ara uzaylarındaki verilerin öznitelikleri kendi aralarında yüksek korelasyon gösterenden düşük korelasyon gösterene doğru dizilmiş olacaklardır. KKA ile sağlanan bu özellik, U uzayında tanımlanmış olan bir sınıflandırıcının V uzayındaki veriler ile de başarılı şekilde çalışmasını sağlamaktadır.

Ayrıca U ve V veri kümelerinde, korelasyonu yüksekten düşüğe doğru sıralanmış olan öznitelikler, sınıflandırmada kullanılacak öznitelik sayısında indirgeme yapılması durumunda, özniteliklerin seçilmesinde önemli bir altyapı ve optimalite sağlamaktadır.

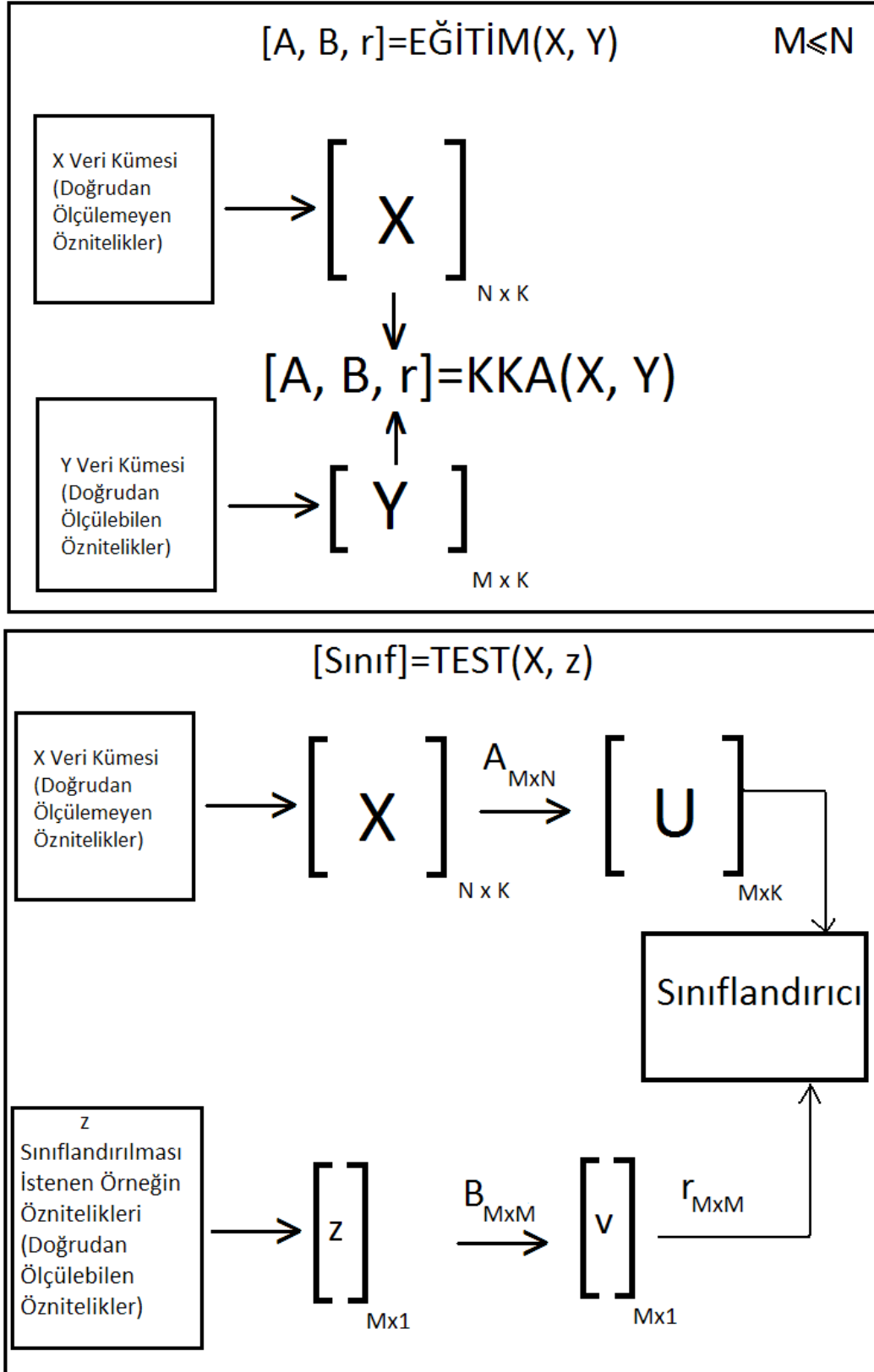


Şekil 5.2: Kanonik Korelasyon Analizi İle Öznitelik Belirleme

Şekil 5.2’de gösterilen **U** ve **V** matrislerinin sütunları her bir örneğe ait öznitelikleri belirtmektedir. KKA yönteminin, korelasyonu yüksekten düşük olana doğru sıralama özelliğinden dolayı, **U** ve **V** matrislerinin birinci satırları birbirleri ile en yüksek korelasyonu gösteren öznitelikleri ifade edecektir. Bu durumda, tanıma/sınıflandırma aşamasında kullanılacak özniteliklerin sayısının azaltılması gerektiğinde, yüksek korelasyonu gösteren özniteliklerin seçilmesiyle optimal bir öznitelik indirgemesi yapılmış olacaktır.

5.3 KKA ile Çapraz Sınıflandırma

KKA yönteminin çapraz Sınıflandırma problemlerinde kullanılması için önerilen yöntem Şekil 5.3’de grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 5.3: KKA ile Çapraz Tanıma Yöntemi

Şekil 5.3’de, X matrisinin her bir kolonu, $x_i \in R^N$ uzayında, N boyutlu doğrudan

ölçülemeyen öznitelikler ile tanımlanan örneği, $\mathbf{Y}$ matrisinin her bir kolonu, $\mathbf{y}_i \in R^M$ uzayında, M boyutlu doğrudan ölçülebilen öznitelikler ile tanımlanan örneği ifade etmektedir. $X \in R^N$ uzayında bir sınıflandırıcı tanımlandığında Y uzayındaki özniteliklerin X uzayına DMOKH kestiricisi ile kestirilip sonrasında çapraz sınıflandırma yapılabileceği Bölüm 3.3 gösterilmişti. Bu bölümde ise ara bir dönüşümü de içeren ve daha iyi sonuçlar vermesi beklenen Şekil 5.3’de görülen $U \in R^M$ uzayında çapraz tanıma yapılacaktır.

Şekil 5.3’de $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri sırasıyla X ve Y uzayı için KKA dönüşüm matrislerini, $\mathbf{r}$ matrisi X ve Y uzayları arasındaki kanonik korelasyonları gösteren köşegen matrisini

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \rho_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \rho_{m-1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \rho_m^2 \end{bmatrix}$$

ifade etmektedir.

$\mathbf{z}$ vektörü ise Y uzayında tanımlı olan ve sınıflandırılması istenen örneği ifade etmektedir.

KKA kullanarak çapraz sınıflandırma eğitim ve test aşamalarından oluşmaktadır. Eğitim aşamasında yapılacak işlemler;

- X ve Y veri kümeleri arasında KKA yöntemini kullanarak, $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ matrislerinin ve özniteliklerin korelasyonunu gösteren $\mathbf{r}$ köşegen matrisinin bulunması. Bulunan $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dönüşüm matrisleri sırasıyla X uzayından U ara uzayına ve Y uzayından V ara uzayına geçişlerde kullanılır.
- $U \in R^M$ uzayında kullanılacak öznitelik sayısının belirlenmesi ve bu öznitelikler için bir sınıflandırıcının tasarlanması. Öznitelikler, korelasyonu yüksek olandan düşük olana doğru sıralandığından, özniteliklerin gerektiğinde bu sırayla indirgenmesi optimal bir yaklaşım indirgeme yaklaşımıdır.

şeklindedir. Eğitimden sonraki test aşamasında ise yapılacaklar;

- X veri kümesindeki örneklerin $\mathbf{A}$ matrisi ile U uzayına taşınması.
- $\mathbf{z}$ örneği $\mathbf{B}$ matrisi ile V uzayına sonrasında da $\mathbf{r}$ köşegen matrisi ile U uzayına taşınması.
- Sınıflandırmanın $U \in R^M$ ara uzayında herhangi bir sınıflandırıcı ile yapılmasıdır.

Bu yöntem için olan kabullenmelerimiz,

- X ve Y veri kümelerinin birbiri ile ilintisiz olmamaları ($(|\mathbf{P}_{xy}| \neq 0)$)
- X ve Y veri kümeleri için KKA yapabilmek için yeterince verinin olmasıdır

Test aşamasında, test edilecek (sınıflandırılacak) verinin eğitim aşamasında kullanılan verilerden olması gerekmemektedir. KKA ile X ve Y veri kümeleri arasındaki genel davranış modellenmeye çalışılmaktadır.

KKA dönüşüm matrisleri ile X verilerinin U uzayındaki izdüşümleri, Y verilerinin V uzayındaki izdüşümleri oluşturulur. U ve V uzayındaki verilerin öznitelikleri birbirleri ile en yüksek korelasyonu oluşturacak şekilde yapılanmış olurlar. Bu sayede, öznitelik sayısında azaltma yapılması gerektiği durumda, sondan başlayarak özniteliklerin atılması, öznitelik seçiminde optimal bir yöntem olarak kullanılabilir.

KKA ile çapraz tanıma uygulamaları Bölüm 6 içinde yer almaktadır.



6. UYGULAMALAR

Çapraz sınıflandırma problemleri için önerilen yöntemler, pratikte birçok uygulama alanı bulabilmektedir. Tek boyutlu uzayda Gauss dağılıma sahip iki veri kümesi arasındaki sınıf ayrıştırılabilirliği Bölüm 3.5’de sentetik veriler üzerinden sayısal olarak incelenmiştir. Bu bölümde ise, gerçek veri kümeleri üzerinden çapraz sınıflandırma için önerilen yöntemlerin uygulamaları ve performansları incelenecektir. Çalışılan uygulamalar, DMOKH ile çapraz tanıma ve KKA tabanlı çapraz tanıma/sınıflandırma uygulamalarını kapsamaktadır. Yapılan tüm uygulamalarda Bölüm 3.3’de anlatılan doğrusal minimum ortalama karesel hata kestiricisi (DMOKH) ile çapraz tanıma ve Bölüm 5.2’de önerilen kanonik korelasyon analizi (KKA) tabanlı çapraz tanıma tekniği kullanılmıştır.

Bölüm 6.1’de IRIS veri kümesi [31, 32] kullanılmıştır. Bu veri kümesi üzerinde, Bölüm 3’de anlatılan DMOKH kestiricisi kullanılarak çapraz tanıma problemi çalışılmış ve hata olasılıkları değerlendirilmiştir.

Bölüm 6.2’de ‘CMU (Carnegie Mellon University) Face Images’ veri kümesi kullanılmıştır [33]. Farklı açıdan çekilen yüz fotoğrafları üzerinde DMOKH kestirimi tabanlı çapraz tanıma yöntemi çalışılmış ve performans değerleri sunulmuştur. Ayrıca sınıfların ayrıştırılabilirliğinin DMOKH kestiricisi altında nasıl etkilendiği de bu uygulamada gösterilmiştir.

Bölüm 6.3, KKA ve DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma yöntemlerinin karşılaştırmasını içermektedir. Genetik veriler üzerinden yapılan çalışmada etnik köken belirlenmesi otozomal veriler üzerinden çalışılmıştır.

Bölüm 6.4’de KKA ve DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma ile yapılan gerçekçi bir uygulamada farklı sonuçlar çıkmasının sebepleri incelenmiştir. Genetik veriler üzerinden yapılan uygulamada, otozomal genetik veriler üzerinden bireylerin haplogrup kestirimleri yapılmıştır.

Bölüm 6.5’de, farklı açı altında elde edilmiş yüz fotoğraflarında KKA çapraz sınıflandırmanın nasıl yapılabileceği incelemiş ve sonuçlar tartışılmıştır.

Bölüm 6.6’de, kriminal amaçlı robot resimlerden KKA tabanlı yüz tanıma uygulaması çalışılmıştır. Robot resimler kriminal çalışmalarda sıklıkla kullanılmaktadır. Görgü tanıklarının ifadelerine dayanarak oluşturulan bu robot resimler (eskiz), veri kümesinde daha önceden kayıtlı fotoğraflarla karşılaştırılmakta ve tanıma yapılmaya çalışılmaktadır. 188 kişiye fotoğraf-eskiz içeren ‘CUHK Yüz Eskiz Veri Kümesi’ ve 126 kişiye ait fotoğraf-eskiz içeren ‘AR Yüz Veri Kümesi’ [34] olarak adlandırılan veri kümesi kullanılarak yapılan uygulamada, KKA tabanlı çapraz tanıma yöntemi sunulmuş ve performans değerlendirmesi yapılmıştır.

Bölüm 6.7’de, güvenlik kameralarında yüz tanıma problemi incelenmiştir. Güvenlik kameraları farklı mesafelerden farklı çözünürlüklerde yüz görüntüleri elde etmektedir. Özellikle uzaktan elde edilmiş yüz fotoğrafları, veri kümesinde daha önceden kayıtlı olan fotoğraflardan daha düşük çözünürlükte olmaktadır. Bu çalışmada 100 kişiye ait farklı mesafelerden elde edilmiş görüntüleri içeren, ‘Long Distance Heterogeneous Face Database (LDHF)’ veri kümesi kullanılmıştır [35, 36]. Bu veri kümesinde KKA tabanlı uzak mesafe yüz tanımanın nasıl yapılacağı açıklanmış ve uygulama sonuçları değerlendirilmiştir.

6.1 IRIS Veri Kümesi Uygulaması

Bu bölümde, doğrusal minimum ortalama karesel hata kestiricisi (DMOKH) ile çapraz tanıma yaklaşımı, örnek bir problem olarak süsen bitkisi türlerini tanımda kullanılmıştır. Iris Setosa, Iris Versicolour ve Iris Virginica olmak üzere 3 farklı türe ait elliser örnek içeren IRIS veri kümesi [37] kullanılmıştır. Toplam 150 örneğe ait veri içeren veri kümesinde, her bir örnek için sırasıyla çanak yaprak uzunluğu, çanak yaprak genişliği, taç yaprak uzunluğu ve taç yaprak genişliği olmak üzere 4 farklı öznitelik bulunmaktadır.

Ölçülebilen (y), ölçülemeyen (x) ve kestirilen (x_{est}) veriler üzerinden karesel sınıflandırıcılar (quadratic classifier) kullanılarak çapraz tanıma gerçekleştirilmiştir.

Karesel sınıflandırıcılar, karesel bir fonksiyon ile hesaplanan sonsal olasılığı (posterior probability) maksimize eden sınıflandırıcılardır ve genel yapıları Eşitlik 6.1’de gösterildiği şekildedir.

$$g_i(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^T \mathbf{W}_i \mathbf{z} + \mathbf{w}_i^T \mathbf{z} + w_i \quad (6.1)$$

i sınıf numarasını, $g_i(\mathbf{z})$ ayrıştırma fonksiyonunu ifade etmektedir. Eldeki bir örneğin hangi sınıfa ait olduğunu belirlemek için, her sınıf için ayrıştırma fonksiyonu hesaplanır ve örnek en yüksek ayrıştırma değerini gösteren sınıfa atanır. $p_i(\mathbf{z})$, i . sınıfa ait olasılık dağılımını, $P(c_i)$ i . sınıfa ait önsel olasılığı (Prior Probability) ifade etmek üzere, Bayes kuralına göre;

$$g_i(\mathbf{z}) = P(c_i|\mathbf{z}) = \frac{P(c_i)p(\mathbf{z}|c_i)}{p(\mathbf{z})} \quad (6.2)$$

elde edilir. N , dağılımın tanımlı olduğu uzayın boyutu olmak üzere, Gauss dağılımlar için eşitlik;

$$g_i(\mathbf{z}) = \frac{2\pi^{-N/2} |\mathbf{P}_i|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{P}_i^{-1} (\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_i)) P(c_i)}{p(\mathbf{z})} \quad (6.3)$$

şekline dönüşür. İfade monotonik artan bir fonksiyon olduğundan, tüm ifadenin önce

karesini almak, sonra logaritmasını almak ve en son olarak da sabit terimleri atmak karşılaştırma yapılacak $g_i(\mathbf{z})$ fonksiyonlarının sıralamasını değiştirmeyecektir. Bu işlem sonucunda Gauss dağılımlar için kullanılacak ayırıştırma fonksiyonu Eşitlik 6.4'de gösterildiği şekilde olacaktır.

$$g_i(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2}((\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_i)^T \mathbf{P}_i^{-1}(\mathbf{z} - \boldsymbol{\mu}_i)) - \frac{1}{2} \log(|\mathbf{P}_i|) + P(c_i) \quad (6.4)$$

Sınıflandırıcıların sınıflandırma hatası olasılığı (P_e) değerlerinin Eşitlik 6.5'de verilen sınırlar içerisinde kalıp kalmadığı incelenecektir.

$$\left(\frac{1}{2} \exp^{-BU(c_1, c_2)}\right)^2 \leq 2P_e \leq \exp^{-BU(c_1, c_2)} \quad (6.5)$$

Ölçülemeyen (X) veri kümesi için hazırlanan karesel sınıflandırıcı (KS_x), kestirilen (x_{est}) verileri için doğrudan kullanılacak ve P_e değerinin hangi sınırlar arasında kaldığı incelenecektir.

Veri Kümesi

IRIS veri kümesinde her ne kadar 3 farklı türe ait örnek veriler bulunsun da bu uygulama ilk iki tür süsen bitkisine ait 50 x 2 örnek için 4 farklı öznitelik üzerinden çalışılmıştır. 2 farklı süsen türüne ait toplam 100 örneğe ait veriden, iris versicolor türü süsen bitkisine ait örnekler Sınıf-1, iris virginica türü süsen bitkisine ait örnekleri ise Sınıf-2 olarak isimlendirilmiştir. Her bir örneğinin veri bankasında kayıtlı taç yaprak öznitelikleri (3. ve 4. öznitelikler) X veri kümesini, kayıtlı olmayan fakat ölçülebilen çanak yaprak öznitelikleri (1. ve 2. öznitelikler) Y veri kümesini oluşturmaktadır. Sonuç olarak, X ilk elli satırı Sınıf-1 sonraki elli satırı Sınıf-2'ye ait taç yaprak özniteliklerini içeren 100 x 2 boyutunda, Y ise ilk elli satırı Sınıf-1 sonraki elli satırı Sınıf-2'ye ait çanak yaprak özniteliklerini içeren 100 x 2 boyutunda veri kümeleridir.

Amaç

X veri kümesi öznitelikleri (taç yaprak öznitelikleri) için tanımlanmış bir sınıflandırıcı kullanılarak, Y veri kümesi öznitelikleri (çanak yaprak öznitelikleri) ölçülen bir örneğin hangi sınıfa (süsen türüne) ait olduğunu belirlemektir. Ayrıca, hangi sınıfa ait olduğunu bulmak için Bölüm 3.3'de önerilen DMOKH kestirici tabanlı çapraz tanıma yöntemi kullanıldığında, sınıflandırma performans değerlerinin Eşitlik 6.5 ile uygunluğunu incelenecektir.

Deney

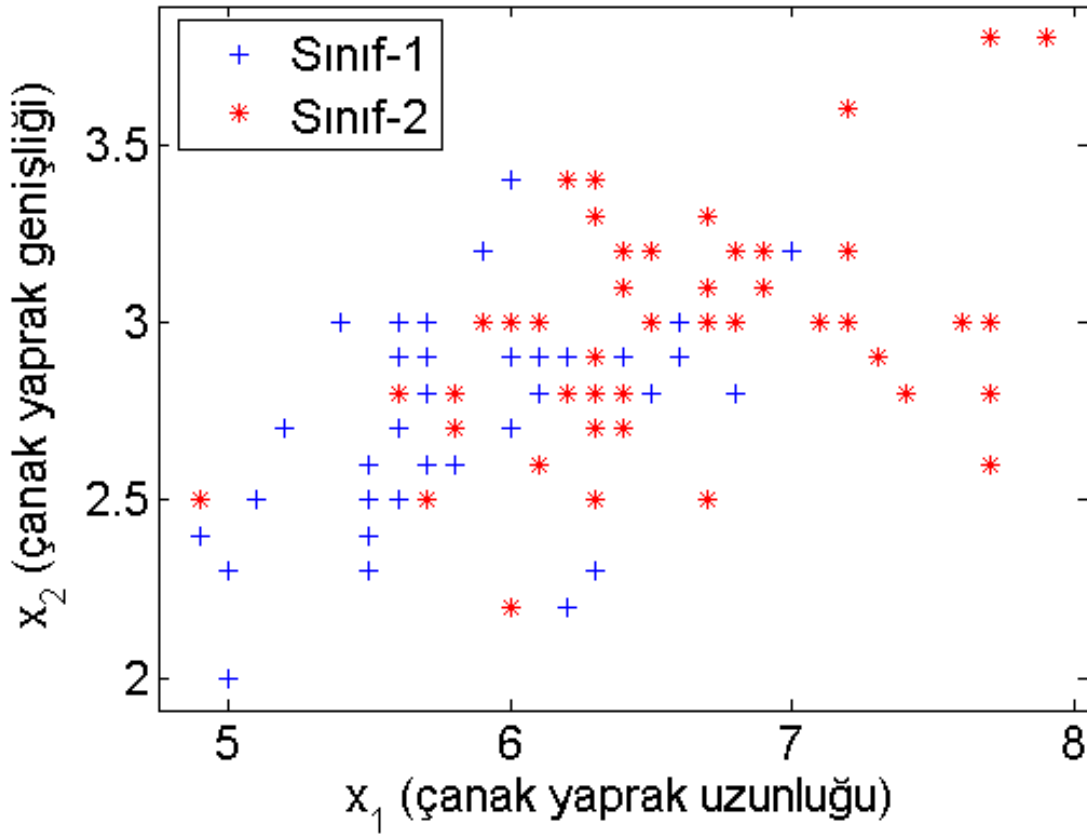
Bu deneyde yapacaklarımız sırasıyla aşağıdaki gibidir.

- Basamak-1: Doğrudan ölçemediğimiz özniteliklerin (X veri kümesi öznitelikleri (taç yaprak öznitelikleri)) DMOKH kestirim yöntemi ile doğrudan ölçebildiğimiz özniteliklerinden (çanak yaprak öznitelikleri) kestirimi,

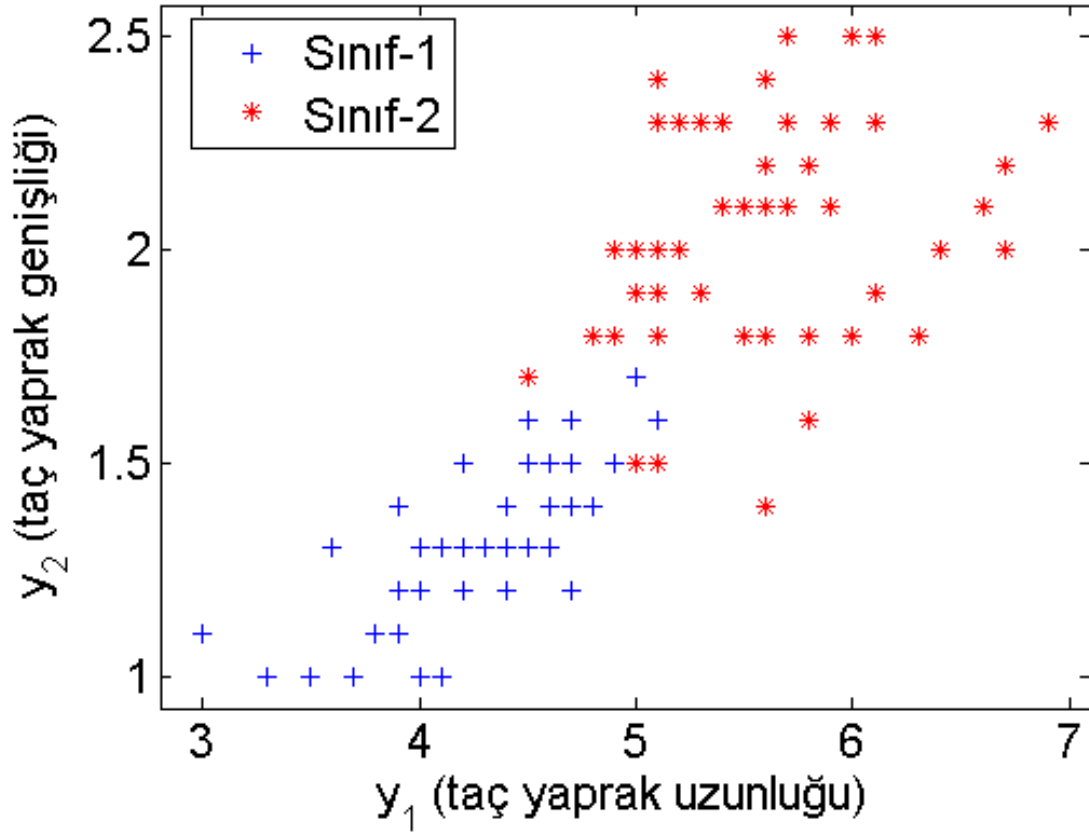
- Basamak-2: Kestirilen x_{est} öznitelikleri için yeni bir sınıflandırıcı ($KS_{x_{est}}$) tanımlanması,
- Basamak-3: $KS_{x_{est}}$ sınıflandırıcısının performansının, KS_y sınıflandırıcısının performansı ile karşılaştırılması,
- Basamak-4: x_{est} değerleri üzerinde KS_x sınıflandırıcısının performans değerlendirilmesi,
- Basamak-5: x_{est} öznitelikleri için KS_x sınıflandırıcısının performansının Bölüm 4'deki İddia-3 ile uygunluğunun gösterilmesi.

Basamak-1

X ve Y veri kümesi özniteliklerinin dağılımı sırasıyla Şekil 6.1 ve Şekil 6.2'de görüldüğü gibidir.



Şekil 6.1: İki Tür Süsen Bitkisinin Çanak Yaprak (X Veri Kümesi) Öznitelikleri



Şekil 6.2: İki Tür Süsen Bitkisinin Taç Yaprak (Y Veri Kümesi) Öznitelikleri

$\mathbf{P}$ eşdeğişinti matrisini, $\boldsymbol{\mu}$ ortalama değer vektörünü ifade etmek üzere;

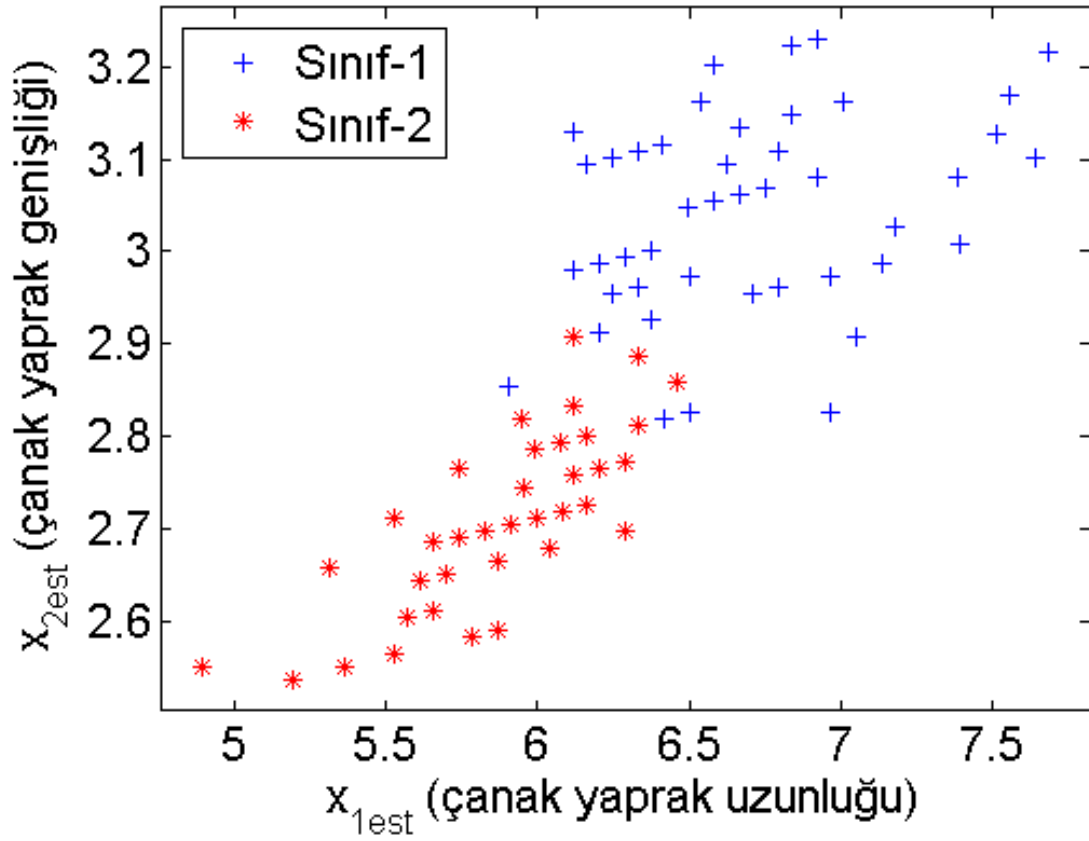
$$\text{Kullanılan } X \text{ veri seti için; } \boldsymbol{\mu}_x = \begin{bmatrix} 6.26 \\ 2.87 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_x = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.12 \\ 0.12 & 0.11 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kullanılan } Y \text{ veri seti için; } \boldsymbol{\mu}_y = \begin{bmatrix} 4.90 \\ 1.68 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_y = \begin{bmatrix} 0.68 & 0.29 \\ 0.29 & 0.18 \end{bmatrix}$$

$$\text{ve } \mathbf{P}_{xy} = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.14 \\ 0.17 & 0.08 \end{bmatrix} \text{ olarak hesaplanmıştır.}$$

$\mathbf{P}_y$, $\boldsymbol{\mu}_y$, $\mathbf{P}_{xy}$ ve $\boldsymbol{\mu}_x$ değerlerini bildiğimiz durumda DMOKH kestiricisi ile Eşitlik 6.6 kullanarak yapılan kestirimde $\mathbf{x}_{\text{est}}$ öznitelikleri Şekil 6.3’de verildiği gibi bulunmuştur.

$$\mathbf{x}_{\text{est}} = \boldsymbol{\mu}_x + \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_y^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}_y) \quad (6.6)$$



Şekil 6.3: Kestirilen (x_{est}) Veri Kümesi Öznitelikleri

X , Y ve X_{est} veri kümelerinin dağılımları Gauss olarak kabul edilip, Eşitlik 2.5 ve Eşitlik 2.8 kullanıldığında, veri kümelerine ait BK değerleri:

$$BK_x = 0.84$$

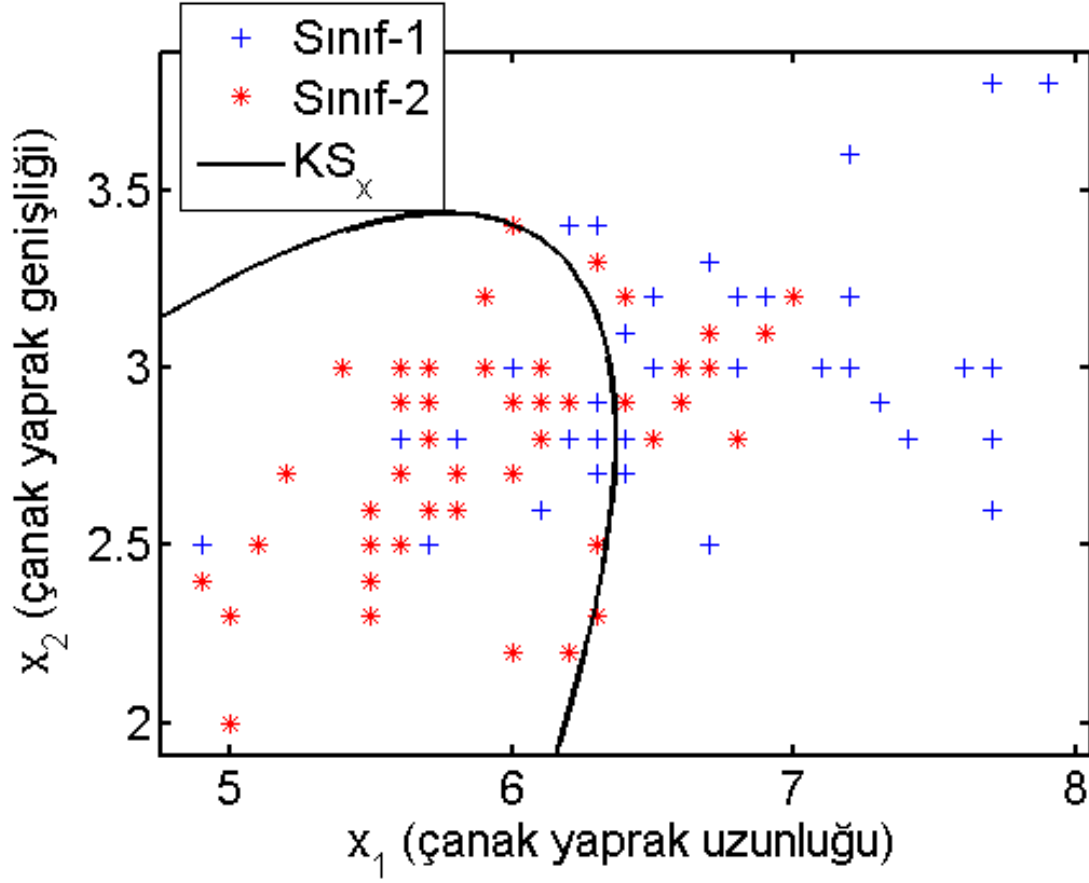
$$BK_y = 0.24$$

$$BK_{x_{est}} = 0.24$$

olarak belirlenmiştir. $BK_y = BK_{x_{est}}$ olması Bölüm 2.1'deki İddia-1 doğrultusunda beklenen bir sonuçtur.

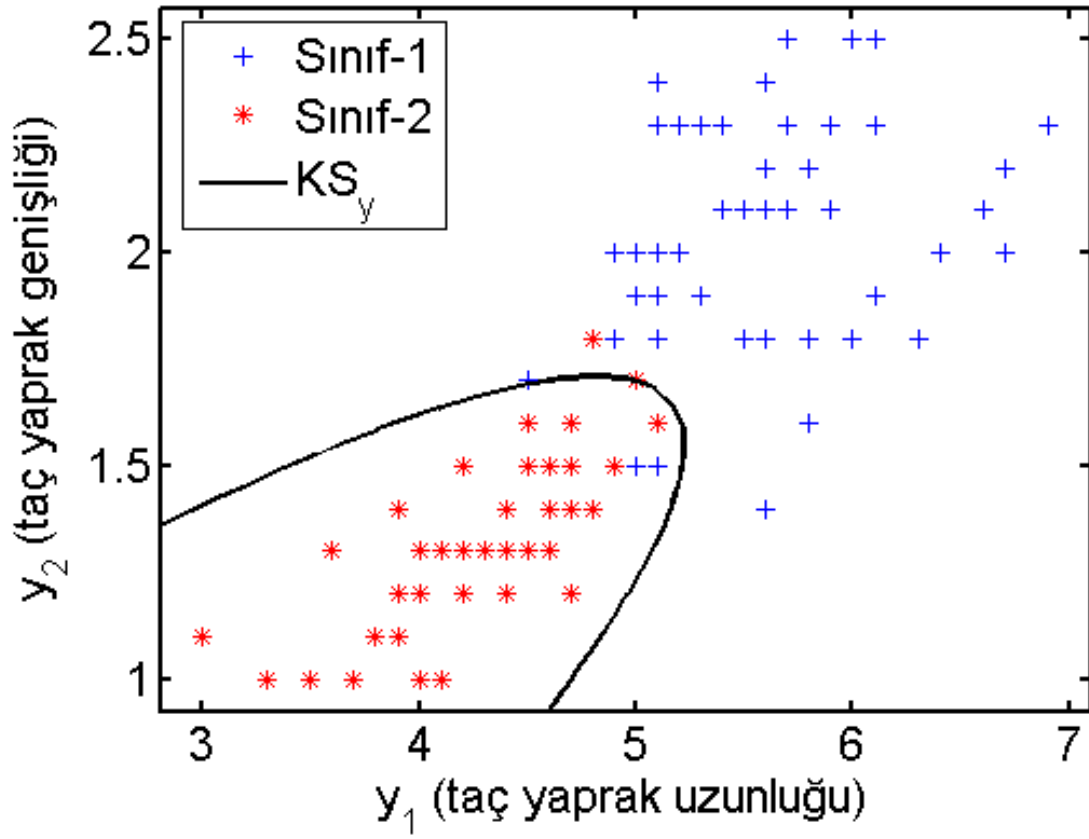
Basamak-2

Şekil 6.4'de siyah çizgi ile gösterilen X veri kümesi için belirlenen karesel sınıflandırıcıdır (KS_x). Bu karesel sınıflandırıcı, $g_1(x)$ ayrıştırma fonksiyonun $g_2(x)$ ayrıştırma fonksiyonuna eşitlenmesi ile bulunan karar verme sınırı ile tanımlanmıştır. Bulunan karesel sınıflandırıcı için hesaplanan hatalı sınıflandırma olasılık değeri, $P_{e_x} = 0.29$ olarak belirlenmiştir.



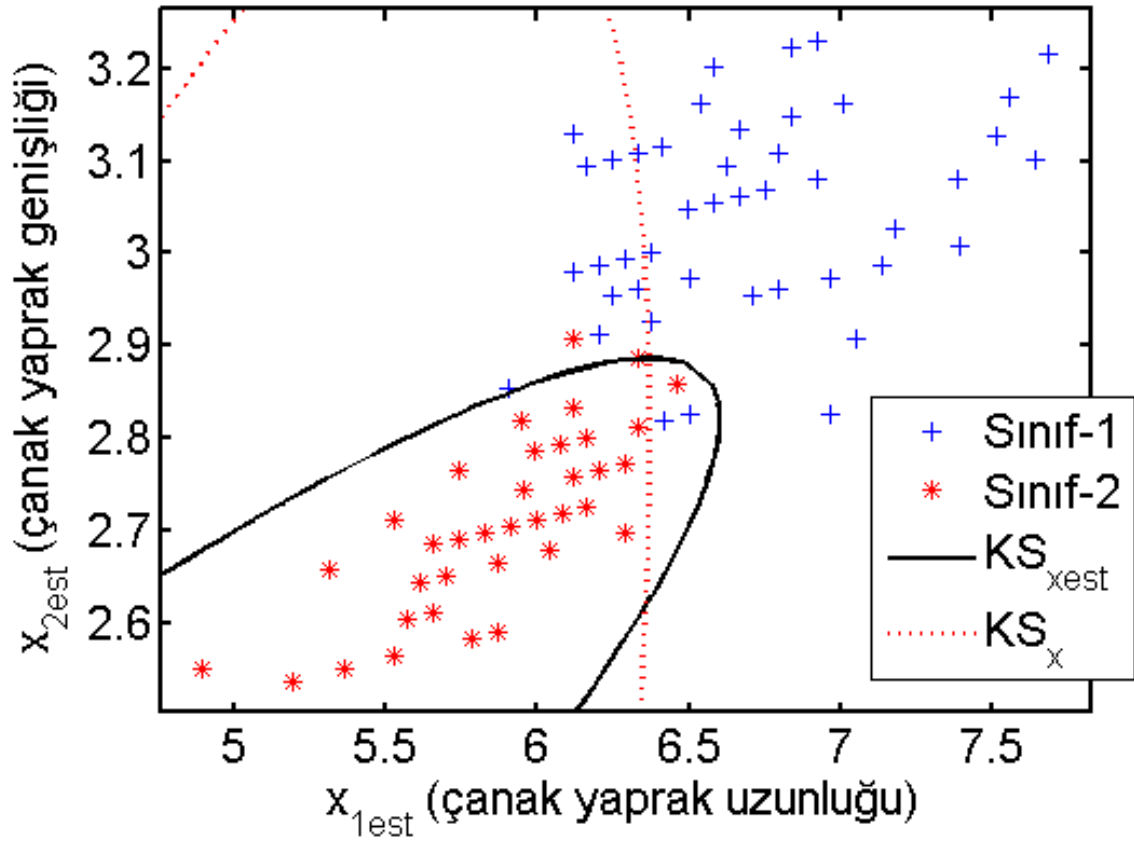
Şekil 6.4: Her İki Tür Süsen Bitkisinin X Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı

Şekil 6.5’de siyah çizgi ile gösterilen Y veri kümesi için bulunan karesel sınıflandırıcıdır (KS_y). Bu karesel sınıflandırıcı, $g_1(y)$ ayrıştırma fonksiyonun $g_2(y)$ ayrıştırma fonksiyonuna eşitlenmesi ile bulunan karar verme sınırı ile karakterize edilmiştir. Bulunan karesel sınıflandırıcı için hesaplanan hatalı sınıflandırma olasılık değeri, $P_{e_y} = 0.03$ olarak hesaplanmıştır.



Şekil 6.5: Her İki Tür Süsen Bitkisinin Y Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı

Şekil 6.6'de siyah çizgi ile gösterilen X_{est} veri kümesi için bulunan karesel sınıflandırıcıdır ($KS_{x_{est}}$). Bu karesel sınıflandırıcı, $g_1(x_{est})$ ayrıştırma fonksiyonun $g_2(x_{est})$ ayrıştırma fonksiyonuna eşitlenmesi ile bulunan karar verme sınırıdır. Bulunan karesel sınıflandırıcı için hesaplanan hatalı sınıflandırma olasılık değeri, $P_{e_{x_{est}}} = 0.03$ olarak hesaplanmıştır. Fakat gerçek problemlerde bütün x_{est} değerleri elde bulunmadığından, $KS_{x_{est}}$ sınıflandırıcısı tasarlanamayacaktır. Bunun yerine yapılabilecek olan KS_x kestiricisini kullanmaktır.



Şekil 6.6: Her İki Tür Süsen Bitkisinin X_{est} Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı ($KS_{x_{est}}$) ve X Veri Kümesi Karesel Sınıflandırıcısı (KS_x)

Basamak-3

DMOKH kestiricisi ile elde edilen X_{est} veri kümesinin elemanlarının, Y veri kümesi elemanlarının doğrusal bir dönüşümden geçirilmiş hali olduğunu söylemiştik. Verinin kendisi veya tersinir doğrusal dönüşümden geçmiş hali sınıfların ayrıştırılabilirlikleri bakımından özdeş bilgilere sahiptirler. Bu sebepten, karesel sınıflandırıcıyı, birbirine karşılık gelen Y ve X_{est} veri kümeleri üzerinden tasarladığımızda $P_{e_y} = P_{e_{x_{est}}}$ olması beklenen bir sonuçtur.

Basamak-4

ÇS problemini tanımlarken, X veri kümesindeki, x özniteliklerine ait bir sınıflandırıcının bilindiğini kabullenmiştik. Öyleyse burada x_{est} öznitelikleri için tanımladığımız $P_{e_{x_{est}}}$ değeri, pratikte bilinebilen bir sınıflandırıcı için hesaplanmış hata ihtimali olarak karşımıza çıkmaktadır. Gerçek ÇS problemlerinde yapılacak hata olasılık değerini bulabilmek için, x_{est} öznitelikleri ile, bilinen KS_x sınıflandırıcısını kullanmak gerekmektedir. Bu durumda ulaşılabilecek ve $\hat{P}_{e_{x_{est}}}$ şeklinde gösterilebilecek yeni bir hata olasılığı tanımlanabilir. Şekil 6.6'de kırmızı noktalı çizgi ile gösterilen karesel sınıflandırıcı KS_x olup, x_{est} öznitelikleri üzerine uygulandığında yapılan hata:

$\widehat{P}_{e_{x_{est}}} = 0.15$ olarak bulunmuştur.

Basamak-5

Basamak-1’de ölçülen BK değerleri Eşitlik 6.7’de yerine konulduğunda

$$\left(\frac{1}{2}BK(c_1, c_2)\right)^2 \leq 2P_e \leq BK(c_1, c_2) \quad (6.7)$$

x öznitelikleri için: $0.0879 \leq P_{e_x} = 0.29 \leq 0.4193$

y öznitelikleri için: $0.0073 \leq P_{e_y} = 0.03 \leq 0.1211$

x_{est} öznitelikleri için: $0.0073 \leq P_{e_{x_{est}}} = 0.03 \leq 0.1211$

eşitsizliklerinin sağlandığı görülmektedir. x_{est} öznitelikleri için KS_x kullanıldığında hata olasılığı Basamak-4’de $\widehat{P}_{e_{x_{est}}} = 0.15$ olarak bulunmuştu. Bu değer, $0.0073 \leq \widehat{P}_{e_{x_{est}}} \leq 0.1211$ eşitsizliğini sağlamamaktadır. KS_x sınıflandırıcısı farklı veri kümesinden (X veri kümesi) oluşturulması dolayısıyla bu husus çelişkili bir durum değildir. DMOKH kestiricisi ile çapraz sınıflandırma yapılmak istendiğinde, sınır değerlerinin ne şekilde değişmesi gerektiği Bölüm 4.1’de yer alan Çıkarım-6 da ifade edilmişti. Eşitlik 4.1, Çıkarım-6 ile birleştirildiğinde kestirilen özniteliklerin $\mathbf{x}_{est} = \mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}$ olarak tanımlanması ile yeni elde edilen $\widehat{BK}_{x_{est}}$ değeri $\widehat{BK}_{x_{est}} = 0.7163$ olarak bulunmuştur. $\widehat{BK}_{x_{est}}$ ve $\widehat{P}_{e_{x_{est}}}$ Eşitlik 6.7’e yerleştirildiğinde, **x_{est}** öznitelikleri için;

$$0.0641 \leq \widehat{P}_{e_{x_{est}}} = 0.1500 \leq 0.3582$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Bu sonuçlar, karesel sınıflandırıcının süsen bitki tipi tanıma problemi açısından makul bir performansı olduğunu ifade etmektedir.

6.2 CMU Veri Seti Yüz Tanıma Uygulaması

Veri Kümesi

Çalışmada 'CMU (Carnegie Mellon University) Face Images' veri kümesi [33] kullanılmıştır. Bu veri kümesi; 20 kişinin 4 farklı açıdan(ön-üst-sağ-sol), 4 farklı yüz ifadesi ile (normal-üzgün-mutlu-sinirli) güneş gözlüklü ve güneş gözlüksüz $20 \times 4 \times 4 \times 2 = 640$ adet gri seviyeli (grayscale) yüz imgesinden oluşmaktadır. Her bir imge 128×120 piksel çözünürlüğe sahiptir.



Şekil 6.7: CMU Veri Kümesinden Örnekler

Amaç

Bu uygulamada amaç, soldan-rastgele yüz ifadeli-güneş gözlüksüz olarak verilen bir yüz görüntüsünün, veri bankasında olan önden-rastgele yüz ifadeli-güneş gözlüksüz kayıtlardan hangisine ait olduğunun belirlenmesi olarak tanımlanmıştır.

Deney

Bu çalışmada, yüz ifadelerine ait öznitelikler, ilk 70 temel bileşen vektörleri (principal components) olarak seçilmiştir [38].

Öncelikle 20 kişiye ait 4 farklı yüz ifadesi-güneş gözlüksüz-önden çekilmiş 80 ($20 \times 4 \times 1 \times 1$) adet imgenin ilk 70 temel bileşen vektörü X veri kümesi olarak, 20 kişiye ait 4 farklı yüz ifadesi-güneş gözlüksüz-soldan çekilmiş 80 ($20 \times 4 \times 1 \times 1$) adet imgenin ilk 70 temel bileşen vektörü Y veri kümesi olarak tanımlanmıştır. X veri kümesi doğrudan ölçemediğimiz, Y veri kümesi ise doğrudan ölçebildiğimiz fakat sınıflandırıcısını bilmediğimiz veri kümelerini ifade etmektedir.

Veri kümeleri arasında; soldan çekilmiş imgelerden (Y veri kümesi), önden çekilmiş imgelere (X veri kümesi) Eşitlik 6.6'da ifade edilen doğrusal minimum ortalama karesel hata (DMOKH) kestiricisi ile kestirim yapılmıştır. Bu kestirim için X veri kümesindeki 20 kişiye ait 4 farklı yüz ifadesinde-güneş gözlüksüz-önden çekilmiş (X veri kümesi) imgelerin temel bileşenlerine karşılık 20 kişiye ait 4 farklı yüz ifadesinde-güneş gözlüksüz-soldan çekilmiş (Y veri kümesi) imgelerin temel bileşenleri kullanılmıştır. Şekil 6.7'da 20 kişiye ait 80 yüz imgesinin bulunduğu X veri kümesinin ilk 20 örneği gösterilmektedir. Şekil 6.7'deki her bireyin 4 farklı yüz ifadesinden oluşan 4 imgelik grupları, X veri kümesinin sınıflarını oluşturduğundan X veri kümesindeki 20 birey toplam 20 sınıfı oluşturmakta ve her sınıf toplam 4 yüz imgesinden oluşmaktadır. Y veri kümesi de aynı şekilde, soldan çekilmiş 20 kişiye ait 80 yüz imgesi içermekte ve toplam 20 sınıftan oluşmaktadır.

80 yüz imgesi üzerinden, soldan çekilmiş imgelerin temel bileşen vektörlerinden önden çekilmiş imgelerin temel bileşen vektörlerine yapılan doğrusal minimum ortalama karesel hata kestiriminde, özdeğerlerin toplamının %90'na karşılık gelen ilk 70 adet temel bileşen kullanılmıştır.



Şekil 6.8: Ön-Normal ve Sol-Normal Test Görüntü Örnekleri

Sınıf Ayırılabilirliği

Bu uygulamada, Şekil 6.8’de gösterilen ön-normal-güneş gözlüksüz ve sol-normal-güneş gözlüksüz imgelerin öznitelikler uzayında ayrıştırılabilirliği incelenecektir. Sınıf ayrıştırılabilirliği testi için X ve Y veri kümesindeki Şekil 6.8’de gösterilen 2 bireyden her birine ait 4 farklı (normal-üzgün-mutlu-sinirli) yüz imgesinin temel bileşenleri kullanılmıştır. Ayrıştırılabilirlik iki farklı açıdan ele alınacaktır:

- Sınıflar arası Bhattacharyya Uzaklığı (BU) ve
- Sınıf içerisindeki her örneğin ait olduğu ve ait olmadığı sınıflara olan Mahalanobis Uzaklıkları (MU).

Mahalanobis uzaklığı, uzayda bir noktanın bir dağılıma olan uzaklığını ölçmek için kullanılır ve Eşitlik 6.8’deki şekilde ifade edilir.

$$MU = (\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu}_x)^T \mathbf{P}_x^{-1} (\mathbf{t} - \boldsymbol{\mu}_x)^{\frac{1}{2}} \quad (6.8)$$

Burada, $\mathbf{t}$ test vektörünü, X veri kümesine mesafesi ölçülecek test örneği, $\mathbf{P}_x$ ve $\boldsymbol{\mu}_x$ X veri kümesine ait eşdeğişinti matrisi ve ortalama değer vektörü olarak alınır.

Test Görüntüleri BU Değerleri

Sınıf ayrıştırılabilirliği, X ve Y veri kümesi örnekleri için ayrı ayrı incelenecektir. Test için X veri kümesindeki 1. kişiye ait 4 farklı yüz ifadesi ile elde edilen imgeler sınıf-1, 2. kişiye ait 4 farklı yüz ifadesi ile elde edilen imgeler sınıf-2 olarak gruplandırılmıştır. Aynı şekilde Y veri kümesindeki 1. kişiye ait 4 farklı yüz ifadesi ile elde edilen imgeler sınıf-1, 2. kişiye ait 4 farklı yüz ifadesi ile elde edilen imgeler sınıf-2 olarak gruplanmıştır. Sınıf-1 ve sınıf-2 ait önden çekilen yüz imgelerine ait örnek Şekil 6.8’de üstte, soldan çekilen yüz imgelerine ait örnek Şekil 6.8’de altta görülmektedir.

Önden çekilen yüz imgelerinin (X veri kümesi) sınıf-1 ve sınıf-2 dağılımları Gauss olarak kabul edilip sınıf istatistikleri hesaplandıktan sonra sınıflar arasındaki BU değeri (BU_x) Eşitlik 2.8 ile

$$BU_x = 466.15$$

olarak belirlenmiştir.

Soldan çekilen yüz imgelerinin (Y veri kümesi) sınıf-1 ve sınıf-2 dağılımları Gauss olarak kabul edilip sınıf istatistikleri hesaplandıktan sonra sınıflar arasındaki BU değeri (BU_y) Eşitlik 2.8 ile bulunmuştur.

$$BU_y = 294.46$$

Soldan çekilen yüz görüntüleri (Y veri kümesi) kullanılarak kestirilen önden çekilmiş görüntü öznitelikleri için sınıf-1 ve sınıf-2 dağılımları Gauss olarak kabul edilip sınıf istatistikleri hesaplandıktan sonra sınıflar arasındaki BU değeri ($BU_{x_{est}}$) Eşitlik 2.8 ile bulunmuştur.

$$BU_{x_{est}} = 294.46$$

olarak bulunmuştur. Bu sonuç, Eşitlik 2.23 ile ispatlanan, dönüşüm altında BU’nın değişmediği sonucuyla tutarlıdır.

Test Görüntülerinin Mahalanobis Uzaklık Ölçütü Değerleri

Özniteliği bilinen bir örneğin hangi sınıfa ait olduğunu bulmak için kullanılabilecek temel bir yöntem Mahalanobis mesafe ölçütüdür [39]. Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2’de 8 örnek görüntüye ait MU değerleri gösterilmiştir. $MU_{i,j,k}$ ifadesi, i .sınıfa ait j . örnek verinin k . sınıfa olan Mahalanobis uzaklığını ifade etmektedir.

Çizelge 6.1: Test ve Kestirilen Görüntülerin 1.Sınıfa Olan Mahalanobis Uzaklıkları

	$MU_{1,1,1}$	$MU_{1,2,1}$	$MU_{1,3,1}$	$MU_{1,4,1}$	$MU_{1,1,2}$	$MU_{1,2,2}$	$MU_{1,3,2}$	$MU_{1,4,2}$
Test	236.24	228.25	193.09	137.41	7852.82	7212.10	7891.95	8005.29
Kestirim	232.48	225.64	187.12	128.07	15482.80	14832.75	15072.52	14485.41

Çizelge 6.1’de görüldüğü üzere, X veri kümesindeki test imgesi öznitelikleri için elde edilen $MU_{1,1}$ değerleri ile kestirim ile elde edilen özniteliklerin için hesaplanan $MU_{1,1}$ değerleri birbirlerine oldukça yakındır. Fakat X veri kümesindeki test imgesi öznitelikleri için elde edilen $MU_{1,2}$ değerleri ile kestirim ile elde edilen özniteliklerin için hesaplanan $MU_{1,2}$ değerleri oldukça farklıdır. $MU_{1,2}$ ifadesi sınıf-1’e ait bir örneğin sınıf-2’ye olan Mahalanobis Uzaklığını ifade ettiğinden dolayı, büyük olması sınıflandırma performansına olumlu etki edecektir.

Çizelge 6.2: Test ve Kestirilen Görüntülerin 2.Sınıfa Olan Mahalanobis Uzaklıkları

	$MU_{2,1,1}$	$MU_{2,2,1}$	$MU_{2,3,1}$	$MU_{2,4,1}$	$MU_{2,1,2}$	$MU_{2,2,2}$	$MU_{2,3,2}$	$MU_{2,4,2}$
Test	2801.50	2564.05	823.82	2506.31	15166.17	13558.53	1509.06	14530.22
Kestirim	2729.93	2497.38	807.05	2436.69	2185.02	2218.56	2016.78	2477.81

Çizelge 6.2’de ise $MU_{2,1}$ değerleri, doğrudan test görüntüleri kullanıldığında yanlış sınıflandırma yapmaktadır. Örneğin, test görüntüleri için $MU_{2,1,1} = 2801.50 < MU_{2,1,2} = 15166.17$ olduğu için Mahalanobis tabanlı bir sınıflandırıcı bu örneği yanlış olarak 1.sınıfın bir elemanı olarak nitelendirecektir. Kestirilen özniteliklerde ise $MU_{2,1,1} = 2729.93 > MU_{2,1,2} = 2185.02$ olduğundan Mahalanobis tabanlı bir sınıflandırıcı bu örneği doğru olarak 2.sınıfın bir elemanı olarak sınıflandıracaktır.

Çıkarım-7 BU ölçütü, sınıf ayrıştırılabilirliği açısından kullanılabilsede, DMOKH kestiricisi tabanlı çapraz tanıma uygulamalarında performansı hakkında kesin bilgi vermez. Bunun sebebi, kestirilen değerlerin, sınıflandırma aşamasında veri bankasındaki değerlerle (bu örnekte; önden çekilmiş fotoğrafların öznitelikleri) kıyaslanarak kullanılacak olmasıdır. Diğer bir ifadeyle, kestirim değerleri BU açısından ayrıştırılabilir olmasına karşın, sınıflandırıcılar kestirim yapılan öznitelikler yerine doğrudan ölçülemeyen öznitelikler (bu örnekte X veri kümesi (önden çekilen yüz imgeleri)) üzerinden tanımlandığından,

sınıflandırmada kullanıldıkları zaman kötü bir performans gösterilebilirler. Bunun tersi de gerçekleşebilir.



6.3 Genetik İşaretleyiciler ile Etnik Köken Belirleme Uygulaması

Bu uygulamada, kendisini Beyaz-Amerikalı (caucasian) olarak tanımlayan 258 erkek (sınıf-1), Afrikalı-Amerikalı (African-American) olarak tanımlayan 254 erkek (sınıf-2) ve kendini Hispanik olarak tanımlayan 138 erkek (sınıf-3) bireyin otozomal ve Y-DNA işaretleyicilerinin bulunduğu STDR veri kümesi kullanılmıştır [40]. Otozomal genetik işaretleyiciler (marker), güvenlik güçleri tarafından kriminal uygulamalarda kullanılan standart genetik verilerdir. Kişilerden alınan dokular vasıtasıyla, kromozomlar üzerinde tanımlanan bu işaretleyicilere STR (Short Tandem Repeat) işaretleyicisi denilmektedir. Kullanılan veri kümesinde otozomal veriler için 16 çift işaretleyici bulunmaktadır ve bu genetik imza 2×16 adet tamsayı ile ifade edilmektedir. Bu tamsayılardan, cinsiyeti belirleyen 1 çift (kümemizdeki tüm bireyler aynı cinsiyette olduğundan) veri setine dahil edilmemiştir. Y-DNA verileri ise yalnızca erkeklerde bulunan Y kromozomu üzerinden ölçülen 17 tane STR ile tanımlanmaktadır ve 17 tane tamsayı ile ifade edilir [41].

Bu çalışmada her ne kadar, otozomal ve Y-DNA verilerinin, bireylerin etnik veya ırksal kökeninin belirlenmesinde ne kadar başarılı olarak kullanılabileceğini görecekssek de; asıl göstermek istediğimiz çapraz sınıflandırmanın performansı değil, hangi şartlar altında KKA ve DMOKH ile çapraz tanıma yapmanın birbirlerine denk olacağını ortaya koymaktır.

Deney Ortamı

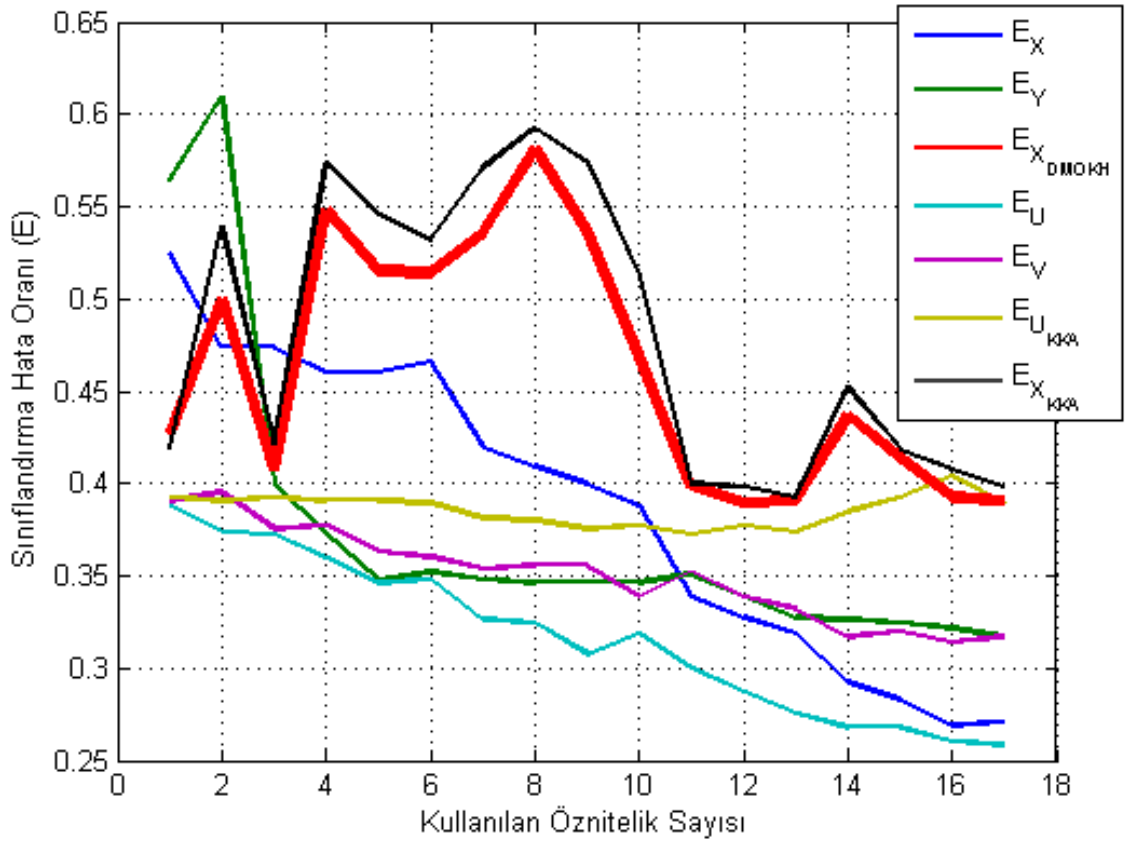
c_1 128 Beyaz-Amerikalı'dan, c_2 254 Afrikalı-Amerikalı'dan ve c_3 138 Hispanik'den oluşan 3 farklı sınıfı ifade etmektedir. Bu 3 sınıf toplam $128+254+138 = 650$ farklı bireye ait verileri içermektedir.

KKA ve DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma için verilerin tamamı öğrenme aşamasında kullanılmıştır. Test aşamasında aynı veri kümesi kullanılmıştır.

650 farklı bireye ait Y-DNA (17 adet öznitelik) verileri 650×17 boyutunda Y veri kümesini, otozomal (30 adet öznitelik) veriler ise 650×30 boyutundaki X veri kümesini oluşturmuştur. DMOKA ve KKA tabanlı çapraz sınıflandırmada, Y uzayı öznitelikleri (Y-DNA) ölçülebilen, X uzayı öznitelikleri (otozomal) veri bankasında kayıtlı olan verileri ifade etmektedir. Günümüzde etnik köken belirleme X veri kümesinde tanımlı olan otozomal öznitelikler üzerinden belirlenmektedir. Burada göstermek istediğimiz ise, elimizde Y-DNA öznitelikleri (Y veri kümesi) öznitelikleri olduğu durumda etnik kökenin nasıl belirlenebileceğidir. Uygulanacak çapraz sınıflandırma yöntemleri, Y uzayında tanımlı özniteliklerinden, X uzayı veya U uzayı özniteliklerini kestirmeyi amaçlamaktadır. Böylece, Y uzayında tanımlı olan Y-DNA öznitelikleri ile etnik köken belirlenmeye çalışılacaktır. KKA sonrasında ulaşılan ara uzaylar U ve V ara uzayları olarak adlandırılmıştır.

Deneyde; X (otozomal öznitelik), Y (Y-DNA öznitelik) uzayları ve U, V ara uzayları

için karesel sınıflandırıcılar tasarlanmıştır. X, Y, U, ve V uzaylarındaki 3 sınıfın karesel sınıflandırıcılar ile sınıflandırılma hataları sırasıyla E_X , E_Y , E_U ve E_V olarak ifade edilmiştir. X uzayındaki DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma hatası E_{DMOKH_X} , U ara uzayındaki KKA tabanlı çapraz sınıflandırma hatası E_{KKA_U} ve X uzayındaki KKA tabanlı çapraz sınıflandırma performansı E_{KKA_X} olarak gösterilmiştir. X uzayında yapılan KKA tabanlı çapraz sınıflandırma, U uzayında geçirilen verilerin $A^T(AA^T)^{-1}$ dönüşümü ile elde edilir. Yapılan hatalı sınıflandırma oranları E_X , E_Y , E_U ve E_V , bulundukları uzaylarının karesel sınıflandırıcılar ile 3 sınıfa ayrıldığında hatalı sınıflandırılan örneklerin toplam örneklere oranını ifade etmektedir.



Şekil 6.9: Genetik Veriler ile Etnik Köken Belirleme Probleminde Sınıflandırma Hata Oranının Kullanılan Öznitelik Sayısına Göre Değişimi

Şekil 6.9'de kullanılan öznitelik sayılarına göre sınıflandırıcıların hata olasılıkları verilmiştir. Burada ilk aşamada dikkat çeken, X uzayı için tasarlanan sınıflandırıcının performans verilerindeki, E_{DMOKH_X} (kırmızı grafik) ve E_{KKA_X} (siyah grafik) için tüm öznitelik değerlerinde aynı eğilimi göstermesi ve yakın sonuçlar vermesidir. Bunun sebebi, Y uzayından sırasıyla V, U ve X uzaylarına geçilmesinin DMOKH ile aynı yöntemle denk gelmesidir. Nümerik işlemlerden dolayı oluşan hatalar, birebir aynı sonuçların çıkmamasına

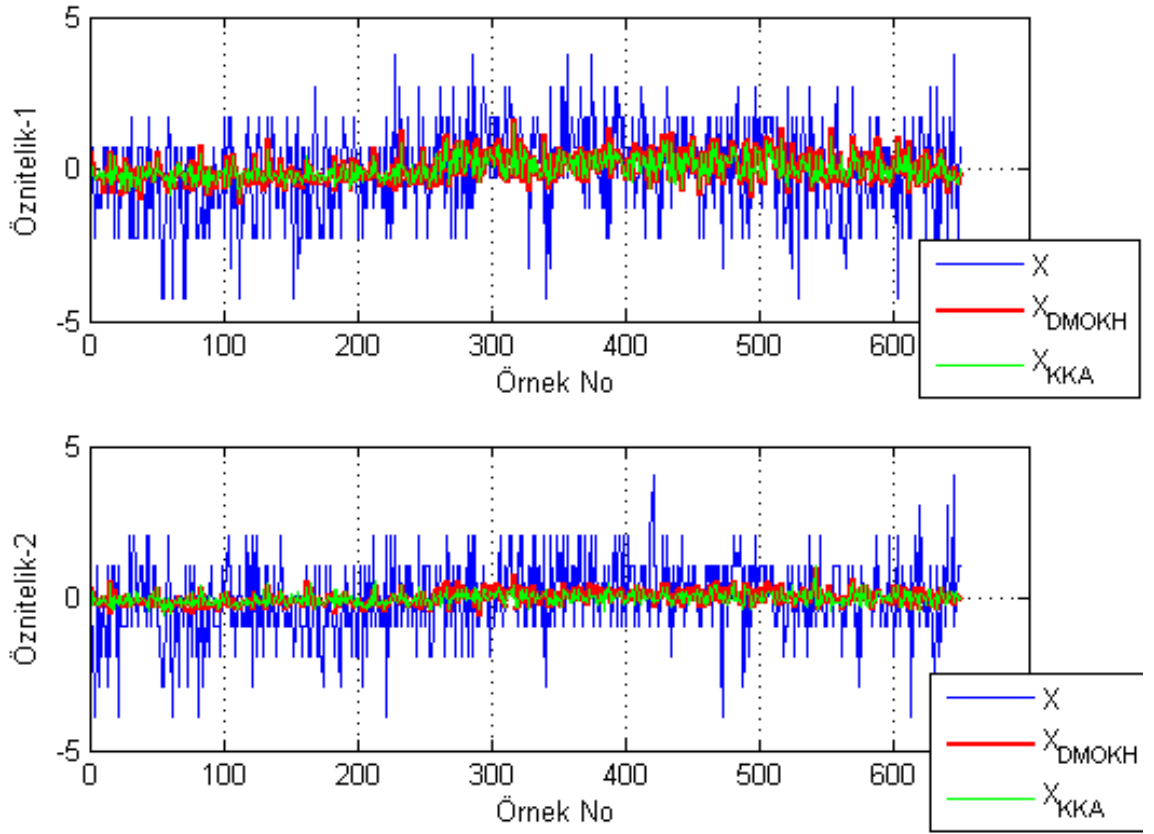
sebepe olmuştur.

İkinci önemli nokta, U uzayındaki karesel sınıflandırıcılarda bütün öznitelikler (17 adet öznitelik) kullanıldığında oluşan hata oranının E_{KKAU} (sarı grafik), E_{DMOKH_X} ile aynı olmasıdır. Öznitelik indirgeme işlemi yapılmadığı durumda (17 özneliğin tamamıyla sınıflandırma yapıldığı durum) DMOKH ile KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yöntemleri tamamen aynı verileri kullandığı için aynı performansı göstermiştir. Bu durum, X ve U uzayının birbirlerinin doğrusal dönüşümleri olması ile de açıklanabilir.

Y ile V arasında da doğrusal bir dönüşüm olması sebebiyle, bütün öznitelikler kullanıldığı durumda aynı bilgiyi içeren veri kümelerine dönüşürler. Bu sebepten E_Y (yeşil grafik) ve E_V (mor grafik) bütün öznitelikler kullanıldığında eşit performans değerine ulaşmıştır.

Ayrıca, otozomal özniteliklerden (X veri kümesi) 17 öznitelik kullanılarak etnik köken belirlemede hata oranı $E_X = 0.27$, Y-DNA özniteliklerden (Y veri kümesi) 17 öznitelik kullanılarak etnik köken belirlemede hata oranı $E_Y = 0.32$ olarak hesaplanmıştır. Bu durum farklı sayıda öznitelikler için Şekil 6.9'de E_X ve E_Y ile gösterilmiştir. Aynı şekilde, U uzayında yapılacak bir sınıflandırmada ise 17 öznitelik için $E_U = 0.25$ olarak hesaplanmıştır. Şekil 6.9'de açık mavi renk ile gösterilen grafikte, farklı sayıda öznitelikler kullanıldığında, ulaşılacak hata oranı gösterilmiştir.

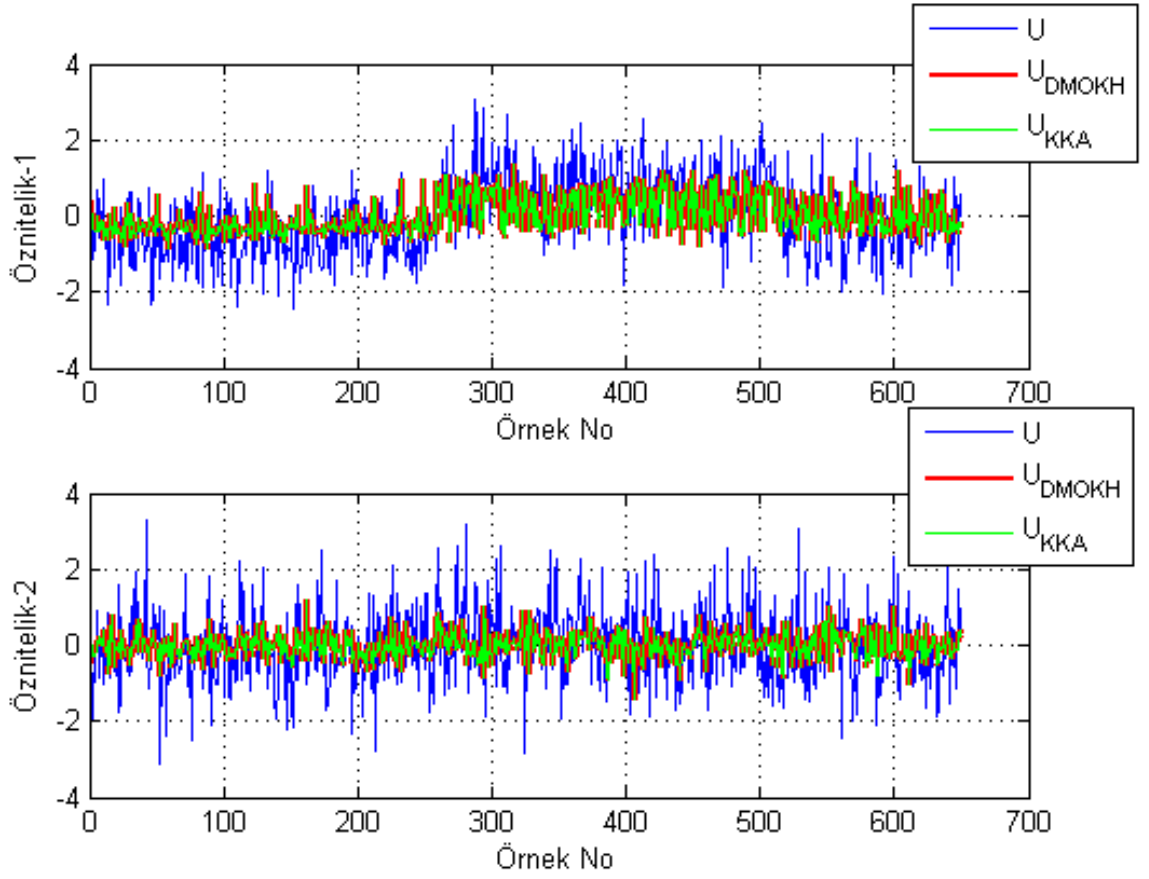
Şekil 6.10'de X uzayındaki ilk iki özneliğin değerleri (mavi grafik), bu özniteliklerin DMOKH kestiricisi ile kestirilmesi durumunda ortaya çıkan öznitelikler (kırmızı grafik) ve KKA tabanlı çapraz tanımayla X uzayına geçilmesi durumunda ortaya çıkan öznitelikler (yeşil grafik) gösterilmiştir. Öznitelikler sıfır ortalamalı olarak çizilmişlerdir.



Şekil 6.10: Otozomal Veri Kümesinin İlk 2 Öznitelik Değerleri ve Kestirimi Değerleri

Şekil 6.10’de görüldüğü üzere X_{KKA} ve X_{DMOKH} grafikleri birbirlerine yakın değerler üretse de, nümerik hatalardan dolayı tamamen aynı değerleri üretememişlerdir.

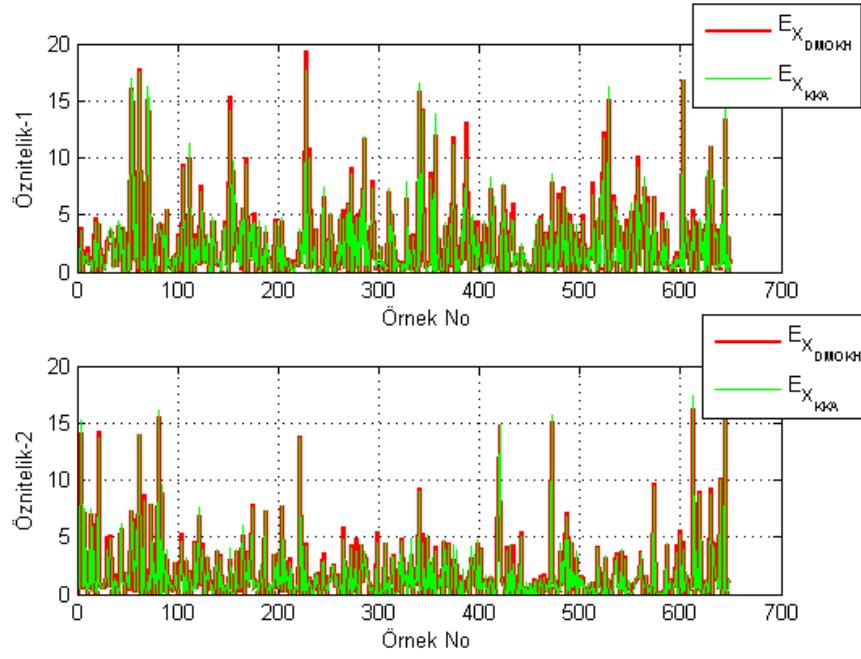
Şekil 6.11’de U uzayındaki ilk iki özneniliğin değerleri (mavi grafik), bu özneniliklerin DMOKH kestiricisi ile kestirilmesi durumunda ortaya çıkan öznenilikler (kırmızı grafik) ve KKA tabanlı çapraz tanımayla X uzayına geçilmesi durumunda ortaya çıkan öznenilikler (yeşil grafik) gösterilmiştir. Öznenilikler sıfır ortalamalı olarak çizilmiştir.



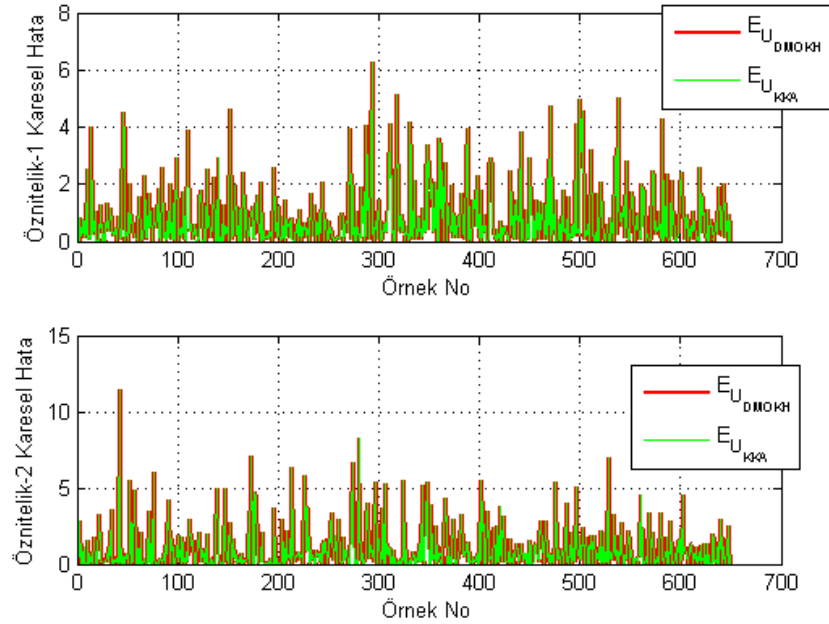
Şekil 6.11: U Ara Uzayına Aktarılmış Genetik Verilerin İlk 2 Öznitelik Değerleri

Şekil 6.11’de görüldüğü üzere U uzayındaki U_{DMOKH} ve U_{KKA} grafikleri birbirlerine yakın değerler üretmiştir. X verilerinin A KKA dönüşüm matrisi ile dönüştürülmesiyle elde edilen U verileri ile KKA ve DMOKH yöntemiyle kestirilen U verileri birbirlerine yakın değerler üretmiştir.

Şekil 6.12 ve Şekil 6.13’de sırasıyla X ve U uzayındaki ilk iki öznitelik için yapılacak hataların karesi gösterilmiştir.



Şekil 6.12: Otozomal Veri Kümesinin İlk 2 Öznitelik Değerlerinin ve Kestirimlerinin Ortalama Karesel Hatası



Şekil 6.13: U Ara Uzayına Aktarılmış Genetik Verilerin İlk 2 Öznitelik Değerlerinin ve Kestirimlerinin Ortalama Karesel Hatası

Şekil 6.12 ve Şekil 6.13’de görülen ilk iki öznitelik için X uzayında yapılacak ortalama karesel hata sırasıyla $E_X = 1.46$ ve $E_X = 1.24$ olarak bulunmuştur. İlk iki öznitelik için

U uzayında yapılacak ortalama karesel hata ise sırasıyla $E_U = 0.87$ ve $E_U = 0.94$ olarak bulunmuştur. U uzayında yapılacak karesel hatanın düşük olmasının sebebi, U uzayında özniteliklerin birbirleri ile daha yüksek korelasyon gösterecek şekilde sıralanmasıdır. Bu özelliği sayesinde KKA tabanlı çapraz sınıflandırmada kullanılacak öznitelik sayısında indirgeme yapılması gerektiğinde, kanonik korelasyonları büyükten küçüğe doğru sıralanmış özniteliklerin seçilmesi anlamlı bir yöntem olacaktır.

Bu uygulamada, kanonik korelasyonlar sırasıyla [0.4868 0.3392 0.3043 0.2835 0.2539 0.2379 0.2171 0.2058 0.1920 0.1796 0.1570 0.1488 0.1222 0.1162 0.1015 0.0928 0.0665] olarak bulunmuştur. Bu değerler aslında X ve Y uzayları arasında ilintinin kuvvetli olmadığıнын bir göstergesidir. Bu husus Amerika Birleşik Devletleri (ABD) popülasyonunda Y-DNA ile CODİS otozomal veriler arasında güçlü bir ilinti olmadığını göstermektedir. ABD popülasyonunda atasal köken (Y-DNA) ile otozomal (anne ve babadan gelen) özniteliklerinin ilintisinin sınırlı olduğu ortaya çıkmaktadır.

6.4 YDNA ve Otozomal Veri Kümesi ile Haplogrup Belirleme Uygulaması

Bu uygulamada, Bölüm 6.3’de etnik köken belirleme için kullanılan deney seti kullanılmıştır. Bu defa çapraz tanıma problemi belirlemek için değil Y-DNA’lar üzerinden tanımlanan haplogrupları belirlemek için çalışılmıştır. Nesilden nesile aktarılan DNA’ların kopyalanmalarında zaman zaman oluşan hatalar nedeni ile farklı Y-DNA sınıfları oluşmuştur ve bu gruplara haplogrup adı verilmektedir. Y kromozomu erkek bireye babasından değişmeden aktarılır, ancak bazen aktarım hataları oluşabilmektedir. Bu hatalar DNA aktarımı ile bir sonraki nesle aynen kopyalanırlar. Bu kopyalama hatalarına mutasyon denir. Uzun yıllar boyunca meydana gelen mutasyonlar sonucu insan topluluklarının belirli gen grupları oluşmuştur. Y-DNA için harflerle sembolize edilen bu gruplara Y-DNA haplogroupları denmektedir. STDR veri kümesinde, Y-DNA’lar üzerinden tanımlanmış toplam 12 haplogruba ait 650 erkek birey bulunmaktadır [40].

En yakın ortalama sınıflandırıcısı (nearest mean classifier), verilen bir örneği, en yakınındaki sınıf ortalamasına eşleştiren bir sınıflandırıcıdır. 650 bireye ait bu veri kümesi Y-DNA üzerinden en yakın ortalama değer sınıflandırıcısı yaklaşık 0.07 hata olasılığı ile sınıflandırılabilirken, otozomal veri kümesi en yakın ortalama değer sınıflandırıcısı ile 0.84 hata olasılığı ile ayrıştırabilmektedir. Bu uygulamada, otozomal öznitelikler üzerinden haplogrup ayrıştırılması çapraz tanıma problemi olarak ele alınarak, çapraz tanıma yöntemleri ile tanıma oranlarının hangi seviyelerde olduğu incelenecektir.

Deney Ortamı

STDR veri kümesi [40], 12 farklı haplogrupdan 650 kişiye ait Y-DNA işaretleyicilerini ve aynı 650 kişiye ait 16 çift STR işaretleyicini içermektedir. Y-DNA işaretleyicileri için, c_i , $i : 1, \dots, 12$ toplam 12 farklı haplogrubu (12 sınıfı) ifade etmek üzere her bir haplogrupdaki örnek sayısı sırasıyla; $c_1 : 192, c_2 : 29, c_3 : 3, c_4 : 45, c_5 : 31, c_6 : 5, c_7 : 22, c_8 : 1, c_9 : 19, c_{10} : 18, c_{11} : 281, c_{12} : 4$ kişidir.

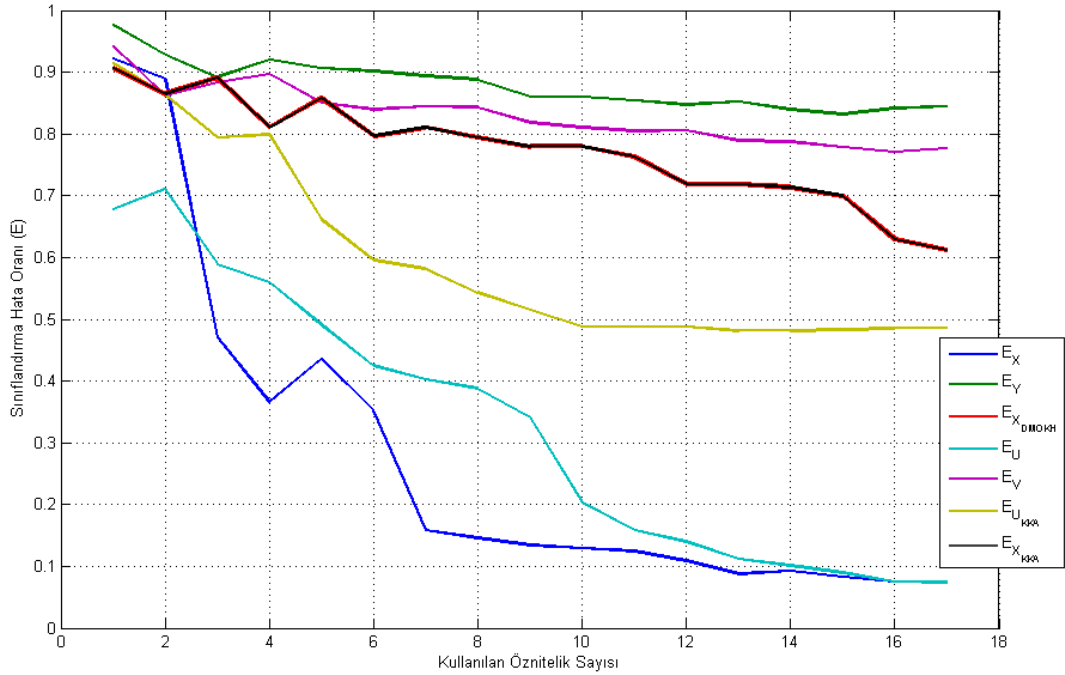
KKK ve DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma için verilerin tamamı öğrenme aşamasında kullanılmıştır. Test aşamasında aynı veri kümesi kullanılmıştır.

Kullanılan veri kümesinde otozomal veriler için 16 çift işaretleyici bulunmaktadır ve bu genetik imza 2×16 adet tamsayı ile ifade edilmektedir. Bu tamsayılardan, cinsiyeti belirleyen 1 çift (kümemizdeki tüm bireyler aynı cinsiyette olduğundan) veri setine dahil edilmemiştir. Y-DNA verileri ise yalnızca erkeklerde bulunan Y kromozomu üzerinden ölçülen 17 tane STR ile tanımlanmaktadır ve 17 tane tamsayı ile ifade edilir [41].

650 farklı bireye ait Y-DNA (17 adet öznitelik) verileri 650×17 boyutunda X veri kümesini, otozomal (30 adet öznitelik) veriler ise 650×30 boyutundaki Y veri kümesini oluşturmuştur. KKK sonrasında ulaşılan ara uzaylar U ve V ara uzayları olarak adlandırılmıştır.

Deneyde; X, Y, U ve V uzayları için en yakın ortalama sınıflandırıcıları tasarlanmıştır. Bu sınıflandırıcılar, sınıflandırılmak istenen örneğin sınıf ortalamalarına olan kartezyen uzaklığını kullanırlar. Örnek, en yakın sınıfa atanır. X, Y, U ve V uzaylarındaki 12 sınıfın en yakın ortalama sınıflandırıcılar ile sınıflandırılma hata oranları E_X , E_Y , E_U ve E_V olarak ifade edilmiştir. X uzayındaki DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma performansı E_{DMOKH_X} , U ara uzayındaki KKA tabanlı çapraz sınıflandırma performansı E_{KKA_U} ve X uzayındaki KKA tabanlı çapraz sınıflandırma hata oranları E_{KKA_X} olarak gösterilmiştir. X uzayında yapılan KKA tabanlı çapraz sınıflandırma, U uzayına geçirilen verilerin $A^T(AA^T)^{-1}$ dönüşümü ile elde edilir. Yapılan hatalı sınıflandırma oranları E_X , E_Y , E_U ve E_V , bulundukları uzaylarının en yakın ortalama sınıflandırıcıları ile 12 sınıfa ayrıldığında hatalı sınıflandırılan örneklerin toplam örneklere oranını ifade etmektedir.

DMOKA ve KKA tabanlı çapraz sınıflandırmada, Y uzayı öz nitelikleri (otozomal öz nitelikler) ölçülebilen, X uzayı öz nitelikleri (Y-DNA) veri bankasında kayıtlı olan verileri ifade etmektedir. Uygulanacak çapraz sınıflandırma yöntemleri X uzayı veya U uzayı öz niteliklerini kestirmeyi amaçlamaktadır.



Şekil 6.14: Genetik Veriler ile Y-DNA Haplogrubu Belirleme Hata Oranı

Şekil 6.14'de kullanılan öz nitelik sayılarına göre sınıflandırıcıların hata olasılıkları verilmiştir. Burada ilk aşamada dikkat çeken, X uzayı için tasarlanan sınıflandırıcının sınıflandırma hata oranları, $E_{X_{DMOKH}}$ (kırmızı grafik) ve $E_{X_{KKA}}$ (siyah grafik) için tüm öz nitelik değerlerinde aynı değeri göstermesidir. Bunun sebebi, Y uzayından sırasıyla V,

U ve X uzaylarına geçilmesinin DMOKH ile aynı yönteme denk gelmesidir.

İkinci önemli nokta, U uzayındaki karesel sınıflandırıcılarda tüm öznelilikler (17 adet öznelilik) kullanıldığında yapılacak hata oranının E_U (açık mavi grafik), E_X (koyu mavi grafik) ile aynı olmasıdır. Öznelilik indirgeme işlemi yapılmadığı durumda (17 özneliliğin tamamıyla sınıflandırma yapıldığı durum) U uzayı ile X uzayı birebir aynı bilgiyi içeren uzaylar olduğundan ve tamamen aynı verileri kullandığı için eşit performans göstermiştir. Bu durum, X ve U uzayının birbirlerinin doğrusal dönüşümleri olması sebebiyle de açıklanabilir.

Şekil 6.14’de haplogrupların bulunması için en iyi performansın Y-DNA verileri (X veri kümesi) kullanılarak, $E_X = 0.07$ hata oranı ile bulunabildiği görülmektedir. Bu beklenen bir sonuçtur, zira haplogruplar doğrudan Y-DNA üzerinden tanımlanan etiketlerdir. Otozomal veriler (Y veri kümesi) üzerinden ise bu ayrıştırmanın $E_Y = 0.84$ hata oranı ile yapılabildiği görülmektedir. DMOKH ile X uzayına geçip burada çapraz sınıflandırma hata olasılığını $E_{X_{DMOKH}} = E_{X_{KKA}} = 0.61$ ’e kadar indirebilmektedir. Fakat esas etkili yöntem KKA ile çapraz sınıflandırma yöntemidir ve $E_{U_{KKA}} = 0.47$ hata olasılığı ile otozomal veriler üzerinden haplogrup tahmini yapabilmektedir.

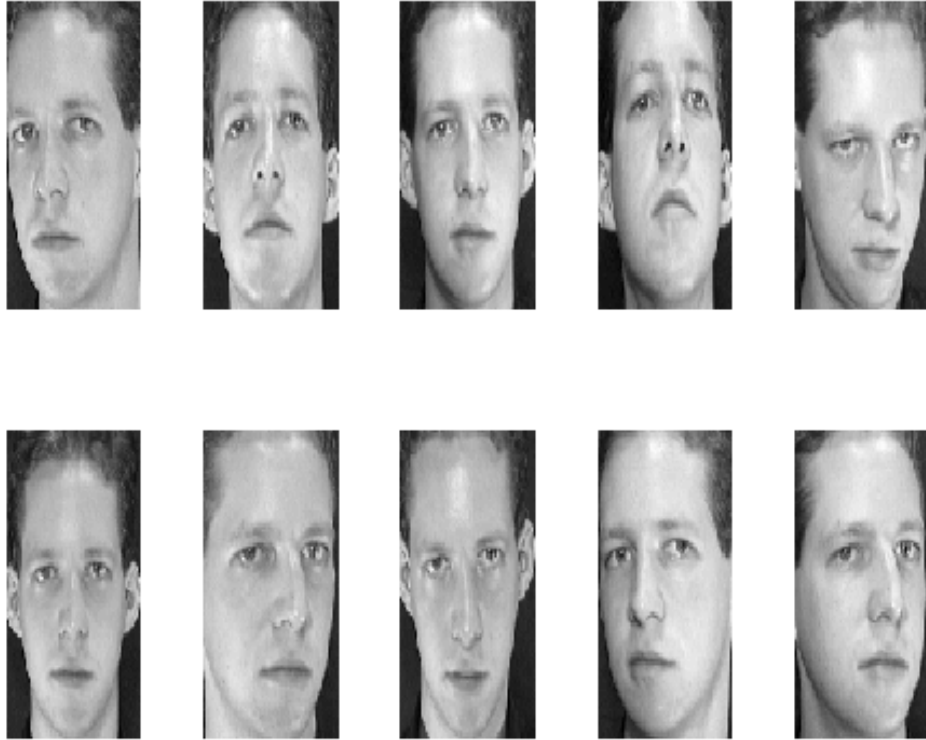
650 bireye ait Y-DNA ve otozomal verilere baktığımızda, U ve V uzayları arasındaki en büyük korelasyon katsayısının 0.4868 olduğu görülmektedir. Bu korelasyon, başarılı bir çapraz sınıflandırma yapabilmek için yeterince yüksek değildir. Bu sebepten çapraz sınıflandırma performansı X uzayındaki performanslara yetişememektedir.

Öte yandan, bireyin gelmiş geçmiş tüm ataları ve analarının genetiğinin toplam imzası olan otozomal verilerin çok kısıtlı bir kısmı ile yalnızca atasal köken ile ilgili Y-DNA haplotipinin belirli bir hata ile kestirilebileceği ortaya konmuştur. Güvenirliliği düşük olsa da Y-DNA kestiriminin otozomal üzerinden yapılabilmesi, adli araştırmalar açısından az da olsa bir kıymet arz etmektedir.

6.5 Düşük Çözünürlüklü İmgelerden Yüz Tanıma Uygulaması

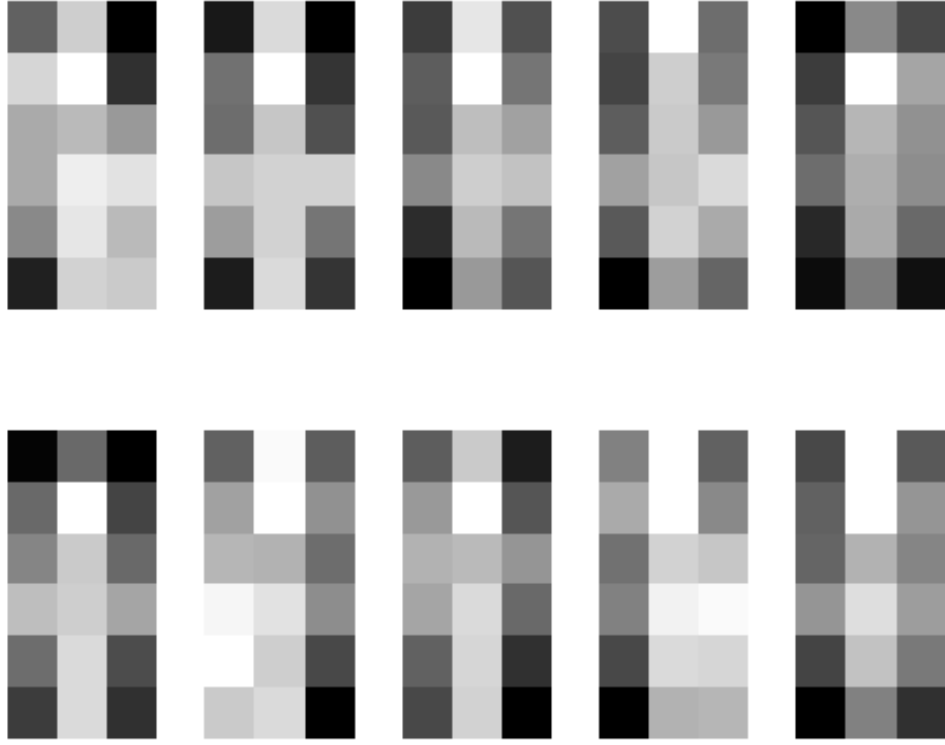
Güvenlik kameralarından elde edilen yüz fotoğrafları genellikle açılı ve düşük çözünürlükte olmaktadır. Bu durum, güvenlik kameralarında yüz tanıma yapmayı zorlaştırmaktadır. Bu uygulamada düşük çözünürlüklü yüz fotoğrafları, gerçek güvenlik kamerası görüntülerinden değil, aşağı örnekleme yöntemiyle yüksek çözünürlüklü görüntülerden oluşturulmuştur. Güvenlik amaçlı elde edilmiş uzak mesafe ve düşük çözünürlüklü fotoğraflardan yüz tanıma uygulamasına yönelik bir çalışma ise Bölüm 6.7’de sunulmuştur.

Bu uygulamada, aynı ışık koşulunda çekilmiş, 40 kişiye ait, 10 farklı yüz ifadesi içeren 112 x 92 piksel boyutunda yüksek çözünürlüklü (YÇ) gri seviyeli toplam 400 yüz fotoğrafı kullanılmıştır [42]. Örnek bireye ait 10 farklı yüz imgesi Şekil 6.15’de verilmiştir.



Şekil 6.15: Örnek Bireye Ait 10 Farklı Açıdan Elde Edilmiş Yüksek Çözünürlüklü Yüz İmgeleri

Yüksek çözünürlükteki bu veri kümesi aşağı örnekleme (downsampling) yöntemiyle 6 x 3 boyutlarına indirilmiştir. Böylece toplam 40 bireye ait ve her birey için 10 farklı açıdan elde edilmiş 400 adet düşük çözünürlüklü (DÇ) görüntü elde edilmiştir. Her bir düşük



Şekil 6.16: Örnek Bireye Ait 10 Farklı Açıdan Elde Edilmiş Düşük Çözünürlüklü Yüz İmgeleri

çözünürlüklü görüntü, 6 x 3 olmak üzere 18 pikselden oluşmaktadır. Bu düşük çözünürlüklü görüntülerden, örnek bireye ait 10 farklı yüz imgesi Şekil 6.16’de gösterilmiştir. DÇ görüntülerin oluşturduğu veri kümesi 400 x 18 boyutundadır.

Bu uygulamada, eldeki 1 adet düşük çözünürlüklü (DÇ) fotoğrafın kime ait olduğunun ne doğrulukla bulabileceğini problemi çalışılmıştır. Çapraz sınıflandırmanın performansını değerlendirebilmek için 40 kişilik veri kümesi yirmişer kişilik eğitim ve test gruplarına bölünmüştür. Eğitim grubundaki 20 kişiye ait veriler ile KKA ve DMOKH dönüşüm parametreleri bulunmuş, daha sonra bu parametreler ile test grubundaki 20 kişi üzerinde tanıma yapılmıştır.

Deney Ortamı

Bu uygulamada, eğitim grubundaki 20 bireyin 10 farklı açıdan elde edilmiş yüksek çözünürlük ve düşük çözünürlükteki yüz imgelerinin KKA ve DMOKH kestirim parametrelerini bulmak için kullanılmıştır.

Test grubundaki 20 bireyin 10 farklı açıdan elde edilmiş yüksek çözünürlük ve düşük

çözünürlükteki yüz imgeleri ise, çapraz doğrulama stratejilerinden olan birini dışarda bırakma (leave one out) yöntemi kullanılarak test edilmiştir. Test grubundaki 199 YÇ yüz imgesi için sınıflandırıcılar tanımlanmış 1 yüz imgesi ise doğru sınıflandırmanın yapıp yapılmadığını belirlemek için kullanılmıştır. Aynı işlem DÇ yüz imgelerine de uygulanmıştır. Bu test işlemi, test grubundaki 200 imge için ayrı ayrı yapılmış ve sınıflandırma hata oranı olarak hesaplanmıştır.

Yüksek çözünürlüklü yüz imgelerini içeren X veri kümesi, her biri 112 x 92 boyutunda olan 200 adet imge içeren 10304 x 200 boyutunda bir veri kümesidir. X veri kümesindeki bir bireye ait farklı açılardan elde edilmiş imgeler bir sınıfı oluşturmaktadır. X veri kümesinin büyük olması dolayısıyla, öznitelikler üzerinde indirgeme işlemi yapılmıştır. Boyutunun indirgenmesi için, Temel Bileşenler Analizi (TBA) uygulanmıştır. Toplam özdeğerlerin %90'ını oluşturulan ilk 110 temel bileşen, YÇ görüntüleri ifade etmek için kullanılmıştır. 200 YÇ görüntünün temel bileşenlerini içeren X veri kümesi 110 x 200 boyutuna indirgenmiş ve bu indirgenen veri kümesi bundan sonra X veri kümesi olarak anılmıştır.

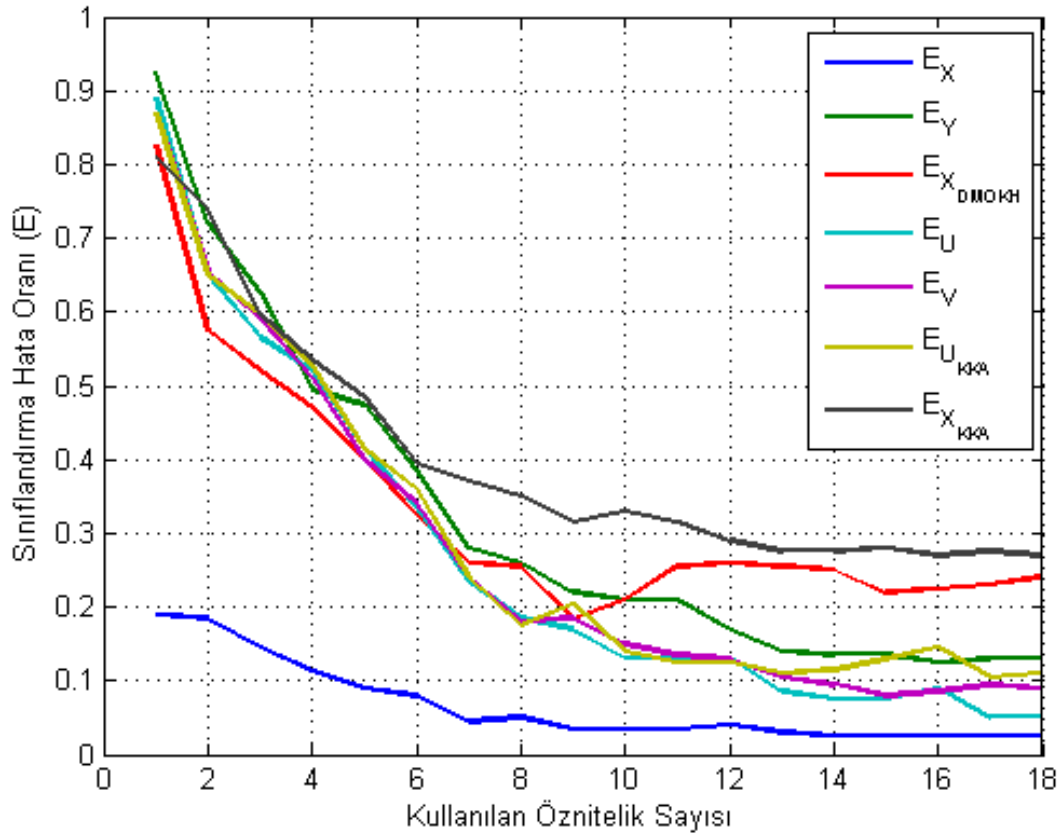
Düşük çözünürlüklü yüz imgelerini içeren Y veri kümesi, her biri 6 x 3 boyutunda olan 200 adet imge içeren 18 x 200 boyutunda bir veri kümesidir. Y veri kümesindeki bir bireye ait farklı açılardan elde edilmiş imgeler bir sınıfı oluşturmaktadır.

Sınıflandırma için, en yakın ortalama sınıflandırıcısı (nearest mean classifier) kullanılmıştır. Bu sınıflandırıcı, sınıflandırılmak istenen örneğe, sınıf ortalaması en yakın sınıfı eşleştirmektedir.

X_{DMOKH} , Y verilerinden DMOKH kestiricisi ile kestirilen X verilerini ifade etmektedir. U_{DMOKH} , X_{DMOKH} verilerinin U uzayına izdüşümünü ifade etmektedir. İz düşüm $U_{DMOKH} = \mathbf{A}X_{DMOKH}$ bağıntısıyla bulunabilmektedir. U_{KKA} , KKA tabanlı çapraz tanıma yöntemiyle elde edilen verilerdir. Bu veriler, Y uzayındaki verilerin $\mathbf{B}$ matrisi ile U uzayına izdüşümlerinin bulunmasıyla hesaplanır. X_{KKA} , U_{KKA} verilerinin X uzayına izdüşümü olarak hesaplanır.

Burada kullanılan 6 x 3 boyutlarındaki görüntüler, yüksek çözünürlükteki görüntülerin aşağı örneklenmesi (downsample) yoluyla elde edilmiştir.

Şekil 6.17'de DMOKH ve KKA tabanlı yöntemlerin ve doğrudan uzaylar üzerinde tanımlanacak sınıflandırıcıların performansları verilmiştir.



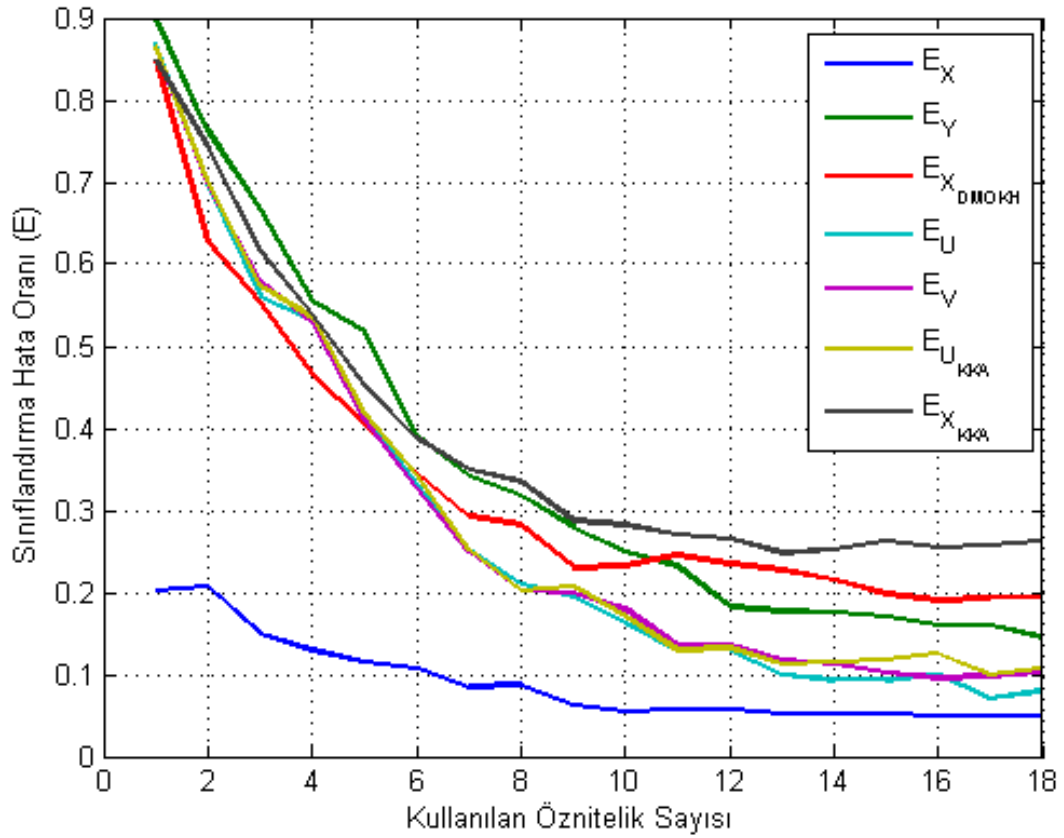
Şekil 6.17: Düşük Çözünürlük ve Farklı Açılardan Yüz Tanımda 'Birini Dışarda Bırak' Stratejisi ile 20 Sınıfın Sınıflandırma Hata Oranı

Şekil 6.17'de, ilk 18 öznelik kullanıldığı durumda, en düşük hata oranı $E_X = 0.02$ ile (koyu mavi grafik) yüksek çözünürlükteki görüntülerden elde edilmiştir. KKA ile çapraz sınıflandırmada ise $E_{U_{KKA}} = 0.11$ hata oranına (sarı grafik) ulaşılmıştır. DMOKH kestiricisi kullanılarak yapılan çapraz sınıflandırmada ise $E_{X_{DMOKH}} = 0.24$ hata oranı (kırmızı grafik) elde edilmiştir. Düşük çözünürlükteki görüntülerin doğrudan kullanımından $E_Y = 0.12$ hata oranına (yeşil grafik) ulaşılmıştır. Bu sonuçlar KKA ile çapraz sınıflandırmanın başarıyla yapılabileceğinin göstergesidir. KKA, rankı düşük olan veri kümesi boyutunda öznelik için **A** ve **B** dönüşüm matrisleri bulmaktadır. Bu örnekte, DÇ görüntülerin her biri 18 boyutlu olduğundan dolayı toplam 18 adet kanonik korelasyon elde edilmiştir. Bu kanonik korelasyonlar büyükten küçüğe doğru sırasıyla, [1.0000 1.0000 0.9999 0.9999 0.9998 0.9997 0.9994 0.9991 0.9989 0.9982 0.9968 0.9950 0.9923 0.9903 0.9884 0.9873 0.9837 0.9712] olarak bulunmuştur.

Burada özellikle dikkat çekilmesi gereken nokta, X veri kümesindeki YÇ görüntülerin boyut indirgemesinde kullanılan özdeğer özvektörlerin, KKA için kullanılan kestirim parametrelerinin (**A**, **B**) ve DMOKH için kullanılan Eşitlik 3.6'de kullanılan kestirim parametrelerinin

$(\mu_x, P_{xy}, P_y, \mu_y)$ test grubunun tamamen dışında tutulan bir eğitim grubundan bulunmasıdır. Şekil 6.17’de grafikte gösterilen performans değerleri, eğitim ve test gruplarının tamamen ayrıldığı durumda elde edilmiş hatalı sınıflandırma oranlarını göstermektedir.

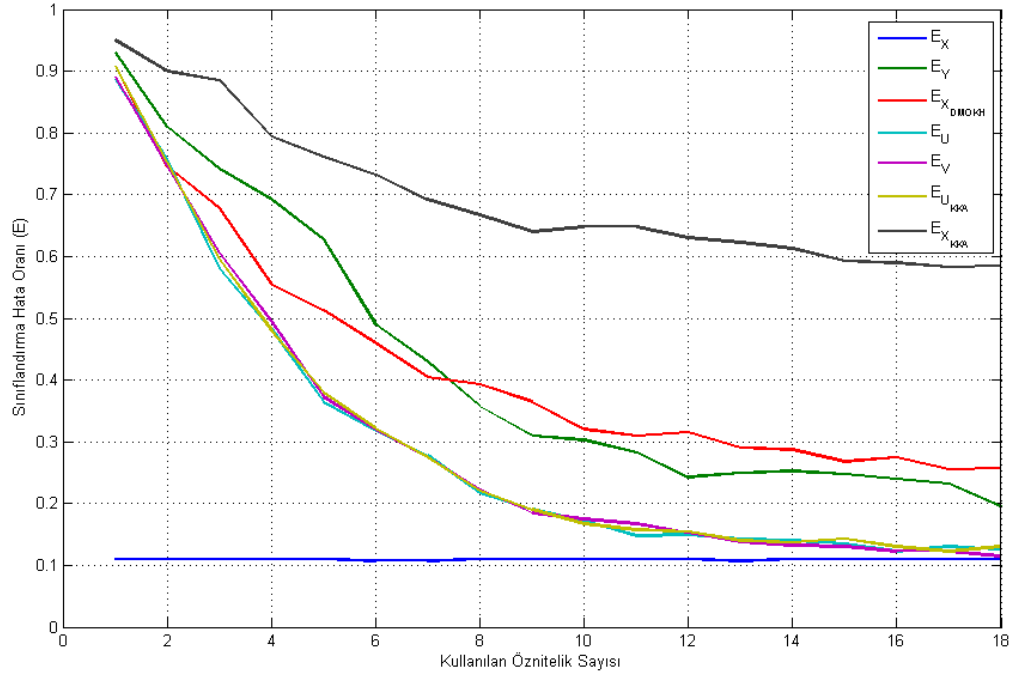
Eğitim grubundaki bireylerden elde edilen boyut indirgeme özdeğer özvektörleri, KKA kestirim parametreleri ve DMOKH kestirim parametreleri aynı kalmak kaydıyla, hata oranı hesabını 40 bireye ait 400 imge üzerinden birini dışarda bırak yöntemi ile belirlediğimizde elde edilen sonuçlar Şekil 6.18’deki gibi bulunmuştur. Bu deneyde, her bir ‘birini dışını bırak’ aşamasında 399 imge üzerinden 40 farklı sınıf için sınıflandırıcılar tanımlanmış ve dışarda bırakılan 1 imgenin doğru sınıfa atanıp atanmadığı incelenmiştir. Bu işlem 400 defa tekrar edilmiş ve hata oranı hesaplanmıştır.



Şekil 6.18: Düşük Çözünürlük ve Farklı Açılardan Yüz Tanımada 'Birini Dışarda Bırak' Stratejisi ile 40 Sınıfın Sınıflandırma Hata Oranı

Burada KKA ile yapılan çapraz sınıflandırma hata oranı $E_{U_{KKA}} = 0.1075$ değerine düşmüştür. 20 sınıf üzerinden yapılan deneyde $E_{U_{KKA}} = 0.11$ hata oranı gösteren yöntemin 40 sınıfın olduğu veri kümesinde, $E_{U_{KKA}} = 0.1075$ hata oranı göstermesi, yöntemin sağlam olduğunun bir göstergesidir.

Aynı problemde, her seferinde bir kişiye ait 5 veriyi test için ayırıp, 395 veri üzerinden KKA ve DMOKH hesapladığımızda ve 395 veri üzerinden sınıflandırıcıyı tasarladığımızda elde ettiğimiz sınıflandırma performansı Şekil 6.19’de gösterildiği gibi bulunmuştur.



Şekil 6.19: Düşük Çözünürlük ve Farklı Açılardan Yüz Tanımada 'Beşini Dışarda Bırak' Stratejisi ile 40 Sınıfın Sınıflandırma Hata Oranı

Daha ortalamacı bir yaklaşım olan beşini dışarda bırak yöntemi ile çalışılan KKA ile çapraz tanımanın performansının giderek iyileştiği gözlenmektedir. Şekil 6.19’de V uzayında tanımlanan sınıflandırıcının sınıflandırma hata oranının (mor grafik), U uzayında tanımlanan sınıflandırıcının sınıflandırma hata oranının (açık mavi grafik) ve U uzayında tanımlanan KKA tabanlı yaklaşımla elde edilen sınıflandırma hatalı oranının (sarı grafik) kullanılan öznitelik sayı arttıkça azaldığı gözlenmektedir. Bu azalış, ilk özniteliklerde daha fazla, sonrakilerde de az olmaktadır. Bu durum KKA tabanlı yöntemde özniteliklerin korelasyonu büyükten küçüğe olacak sırayla dizmesinden kaynaklanmaktadır. KKA tabanlı bu yöntem kullanılacak öznitelik sayısı sabit olduğunda, özniteliklerin seçimi için optimal bir yöntem de sunmuş olmaktadır. 18 özniteliğin tamamı kullanıldığında hatalı sınıflandırma oranı, $E_V = 0.1150$, $E_U = 0.1250$ ve $E_{U_{KKA}} = 0.13$ olarak bulunmuştur.

Burada, daha önceki uygulamada olduğu gibi X uzayında tanıma hata oranının $E_X = 0.11$ düşük çıkmasının sebebi, temel bileşenler analizi ile elde edilmiş özniteliklerin ayrıştırma başarımının iyi olmasıdır.

18 özniteliğin tamamı kullanıldığı durumda, YÇ verileri içeren X veri kümesinde

sınıflandırma yapmak ($E_X = 0.11$) ile Y veri kümesindeki DÇ görüntüleri kullanarak KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yapmak ($E_{U_{KKA}} = 0.13$) çok yakın hatalı sınıflandırma oranları göstermiştir.

Doğrudan Y veri kümesindeki DÇ imgelerin 18 özniteliği kullanıldığında hatalı sınıflandırma oranı $E_Y = 0.1950$ iken, Y veri kümesindeki DÇ görüntülerden ilk 18 öznitelik kullanılarak yapılan sınıflandırmada KKA tabanlı çapraz sınıflandırma da bu değer $E_{U_{KKA}} = 0.13$ 'e kadar düşmüştür.

Aynı veri kümesi kullanılarak yapılan benzer bir çalışma [43]'da sunulmuştur. Bu çalışmada kestirim yapılmadan, doğrudan düşük çözünürlükteki imgeler üzerinden aralıklı gösterim tabanlı sınıflandırma (sparse representation based classification (SRC)) yapılmıştır. 6 x 3 boyutundaki DÇ görüntüler ile SRC kullanılarak yapılan tanımda %72, önerilen KKA tabanlı çapraz tanıma ile %89 tanıma oranı elde edilmiştir.



6.6 Eskizden Yüz Tanıma Problemi

Robot resim ile suçla karışan kişilerin belirlenmesi kriminal çalışmalarda sıklıkla kullanılan standartlaşmış bir yöntemdir. Görgü tanıklarının ifadelerine dayanılarak oluşturulan bu eskizlerin güvenlik kuvvetleri kayıtlarındaki çok sayıda fotoğraf ile karşılaştırılması ve başarılı bir şekilde eşleştirilmesi zorlu bir örüntü tanıma problemidir.

Özellikle geçtiğimiz on yılda yüz tanıma yöntemlerinin gelişmesiyle beraber eskiz tanıma konusunda da çalışmalar artmıştır. Eskiz tanıma kullanılan robot resimler genel olarak üç farklı şekilde oluşturulabilmektedir. Bunlar; görerek-eskiz (view-sketch), kriminal-eskiz (forensic sketch) ve kompozit-eskiz (composite sketch) [44] olarak sıralanabilir. Görerek-eskiz, polis ressamı tarafından kişinin resmine bakılarak çizilen eskizlerdir ve daha çok eskiz tanıma için geliştirilen yöntemlerin test edilmesinde kullanılmakta olup gerçek adli uygulamalarda kullanıma imkanı sınırlıdır [44]. Kriminal-eskiz, görgü tanıklarının anlatımları doğrultusunda bir polis ressamı tarafından çizilen eskizlerdir. Kompozit-eskiz ise, yüzün her bir parçasının bir kütüphaneden seçilmesi ile bilgisayar ortamında oluşturulan eskizlerdir [44]. Eskizlerin, fotoğraflardan farkları, sadece temel yüz özelliklerini içerip, ayrıntı özellikleri içermemeleridir [45].

Eskizden yüz tanıma konusunda özellikle son on yıl içerisinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Eskiz tanıma ile ilgili yapılan ilk çalışmalar, standart yüz tanıma yöntemlerinin önışleme yapılmış fotoğraflar üzerine uygulanması ile gerçekleştirilmiştir. Bunlardan özyüz (eigen-face) yöntemine dayanan bir çalışmada [46] toplam 7 eskizden tanıma yapma hedeflenmiş, elastik grafik eşleme (elastic graph matching) yöntemine dayanan diğer bir çalışmada [47, 48] ise toplam 13 eskiz içeren veri kümesinde yüz tanıma çalışılmıştır. Eskiz tanıma konusuna ilginin artması ve daha kapsamlı veri kümelerinin oluşturulması sonrasında yapılan çalışmalarda iki temel yaklaşım ön plana çıkmıştır [44] :

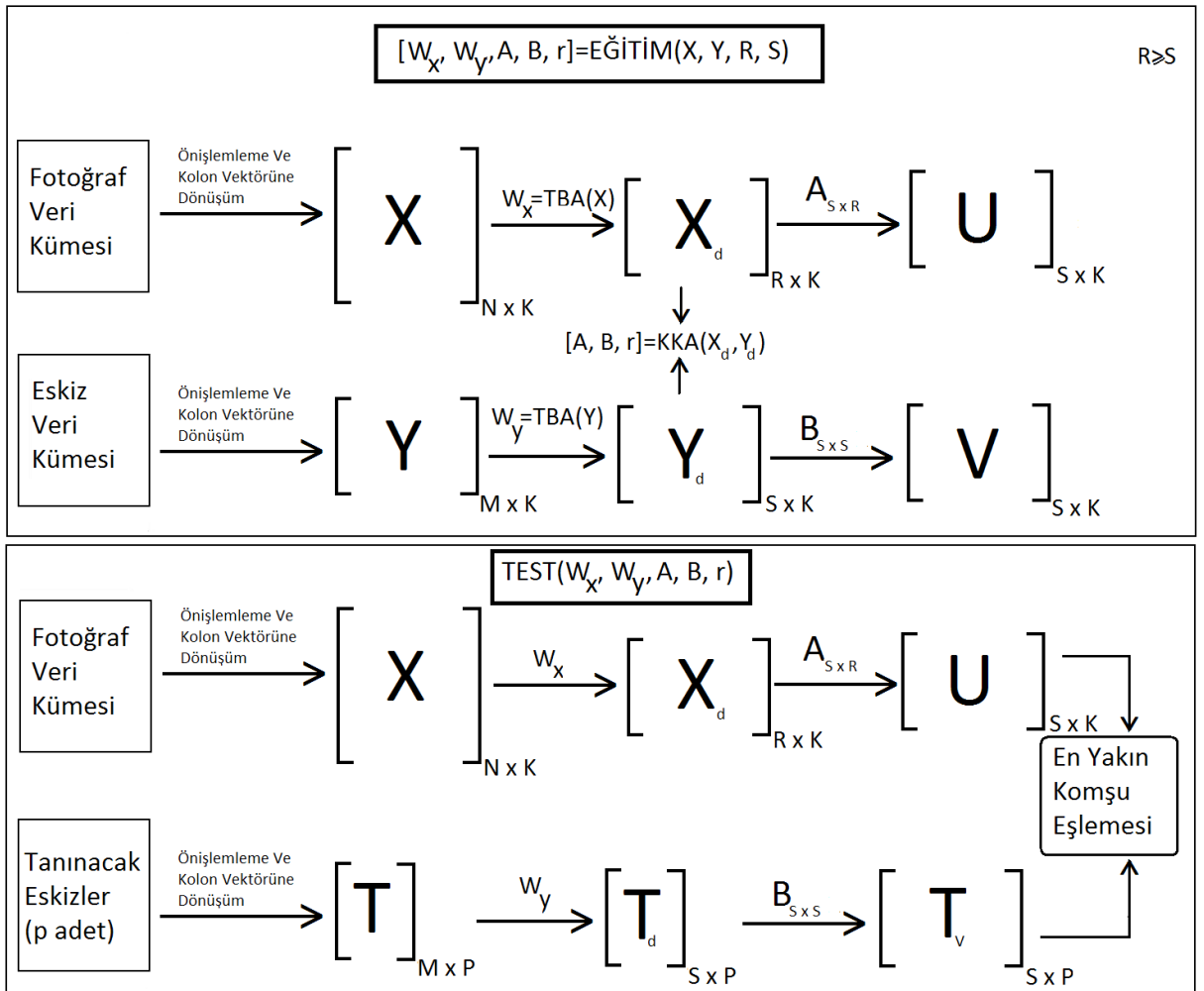
- fotoğraf ve eskiz uzayları dönüşümü
- fotoğraf ve eskiz uzayından bağımsız öznitelik belirlenmesi

Bu yaklaşımlardan birincisi, eskiz uzayındaki bir veriden fotoğraf uzayına (veya tersi) bir dönüşüm yapmakta ve sentezlenen fotoğraf (veya tersi) için, fotoğraf uzayında (veya tersi) tanıma yapmaya çalışmaktadır. Bu yaklaşımda, özdönüşüm (eigentransform) [49], lokal doğrusal gömme (local linear embedding) [45] ve çoklu ölçekli Markov rastgele alanları (multiscale Markov random fields) [50] yöntemleri ile çalışmalar yapılmıştır. Bu yaklaşımın, sentez aşaması gerçekleştirmesi zor ve tanıma performansını doğrudan etkileyen bir aşamadır [44]. İkinci yaklaşım ise, her iki uzayda da değişmeyen öznitelikler belirleme esasına dayanmaktadır. Bu yaklaşım ile yapılan çalışmalar ortak ayırt edici uzay (common discriminant space) [51], birlikte eşleşik enformasyon izdüşümü (coupled information-

theoretic projection(CITP)) [52] ve kısmi en küçük kareler (partial least squares (PLS)) [53] yöntemlerini içeren yaklaşımlardır. Bu tez kapsamında, literatürde yer alan yaklaşımlara alternatif olarak, KKA'nın etkili bir eskiz tanıma yöntemi olarak kullanılabileceği ortaya konulmuştur.

6.6.1 KKA ile Eskiz Tanıma Yöntemi

KKA ile tanımlanan yeni ara uzaylar birbirleri ile en yüksek kanonik korelasyonu gösteren öz niteliklerin bulunduğu uzaylar olduğundan, bu uzaylarda tanıma yapmanın başarılı sonuçlar vermesi beklenmektedir. Eskiz tanıma için önerilen yöntemin basamaklarının neler olduğu Şekil 6.20'de temsili olarak gösterilmiştir.



Şekil 6.20: KKA ile Eskiz Tanıma Eğitim ve Test Basamakları Gösterimi

KKA ile eskiz tanımda gerçekleştirilen alt işlemler eğitim aşamasında;

- Fotoğraf ve eskiz önişleme

- Öznitelik belirleme dönüşümlerinin bulunması ve özniteliklerin belirlenmesi ve
- KKA ile ara uzay dönüşümlerinin bulunması ve ara uzaya geçilmesi

tanıma (test) aşamasında ise;

- Fotoğraf ve eskiz önışlemler
- Öznitelik belirlenmesi
- KKA ile ara uzaya geçilmesi ve
- Sınıflandırmanın yapılması

olarak özetlenebilir.

Fotoğraf ve Eskiz Önışlemler

Veri kümesi içerisinde bulunan her bireye ait fotoğraf ve eskiz çiftlerinin standart hale getirilmesi için öncelikle döndürme ve ölçekleme işlemlerinin yapılması gerekmektedir. Önışlemler sonucunda tüm fotoğraf ve eskizlerde, yüz için tanımlanan ayırt edici noktalar aynı koordinatlara getirilir. Bu aşamada; göz merkezleri, çene-alın noktaları, kulak veya dudak kenarları gibi belirleyiciler kullanılabilir. Bu işlem hem eğitim aşamasında hem de tanıma aşamasında yapılmalıdır.

Öznitelik Belirleme Dönüşümlerinin Bulunması ve Özniteliklerin Belirlenmesi

Kullanılacak öznitelikler, temel bileşen analizi (TBA) yöntemi ile elde edilmiştir [38]. İşlem yapılan veri sayısını indirmek ve veriler üzerindeki gürültü etkisini azaltmak için, en yüksek özdeğerlere karşılık gelen belirli sayıdaki özvektörün kullanılması yeterlidir. X uzayı, kişilere ait fotoğrafların bulunduğu, Y uzayı ise karşılık gelen eskizlerin bulunduğu uzayları belirtmek üzere, X ve Y uzayından indirgenmiş veriler sırasıyla X_d ve Y_d uzayı olarak isimlendirilecektir. X_d matrisi, X matrisinin ilk R adet temel bileşeni içeren ve $R \leq N$ olmak üzere $X_d \in R^{R \times K}$ matrise indirgenecektir. K : fotoğraf ve eskiz veri kümesindeki örnek sayısını belirtmektedir. Y_d matrisi ise Y matrisinin ilk S adet temel bileşeni içeren ve $S \leq M$ olmak üzere $Y_d \in R^{S \times K}$ matrisine indirgenecektir. Burada N : fotoğraf veri kümesindeki her bir örneğin öznitelik sayısını, M : eskiz veri kümesindeki her bir örneğin öznitelik sayısını, R : fotoğraf veri kümesindeki örneklerin indirgenmiş öznitelik sayısını, S : eskiz veri kümesindeki örneklerin indirgenmiş öznitelik sayısını ifade etmektedir.

Bu işlem, eğitim aşamasında, ilgili temel bileşenleri belirlemek için gerekli dönüşümleri (W_x ve W_y) bulabilmek için yapılmalı, tanıma aşamasında ise bu dönüşüm vektörleri kullanılmalıdır. W_x , X uzayındaki verilerin R^R boyutuna indirgenmesi için ($R \leq N$) ilk R adet temel bileşenin bulunabilmesi için oluşturulmuş $R^{R \times N}$ boyutundaki dönüşüm matrisidir. W_y ise, Y uzayındaki verilerin $Y_d \in R^S$ boyutuna indirgenmesi için ($R \leq S$) ilk R adet temel bileşenin bulunabilmesi için oluşturulmuş $W_y \in R^{S \times M}$ boyutundaki dönüşüm matrisidir.

KKA ile Ara-Uzay Dönüşümlerinin Bulunması ve Ara-Uzaya Geçilmesi

KKA metodolojisi kullanılarak, $\mathbf{X}_d$ ve $\mathbf{Y}_d$ uzaylarındaki verilerin KKA dönüşümleri birbirleri ile maksimum korelasyon yapısını tanımlayacaktır. Bu işlem sonucunda $\mathbf{X}_d$ matrisinden elde edilecek veriler $\mathbf{U}$, $\mathbf{Y}_d$ matrisinden elde edilecek veriler ise $\mathbf{V}$ matrisi olarak adlandırılacaktır. Bu matrislerin bulunduğu uzaylar sırasıyla ($S \leq R$ kabul edilmiştir), $\mathbf{U} \in R^{S \times K}$ ve $\mathbf{V} \in R^{S \times K}$ olacaktır. Bu işlem, eğitim aşamasında kanonik korelasyon dönüşümü ($\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$) matrislerini ve köşegen korelasyon matrisini ($\mathbf{r}$) bulmak için yapılmalı, tanıma şamasında bu matrisler kullanılmalıdır.

Tanıma Testi

Tanıma aşamasında, tanınması istenen toplam P adet eskizin temel bileşenleri içeren $\mathbf{T}_v$ ($\mathbf{T}_v \in R^{S \times P}$) matrisi oluşturulur. Fotoğraf veri kümesinin de ara uzay dönüşümlerini içeren $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U} \in R^{S \times K}$) matrisinde ise toplam fotoğraf verisinin K adet örneği bulunmaktadır. Tanıma için en yakın komşu eşleştirilmesi yapılarak, eskiz ilgili fotoğrafla eşleştirilir.

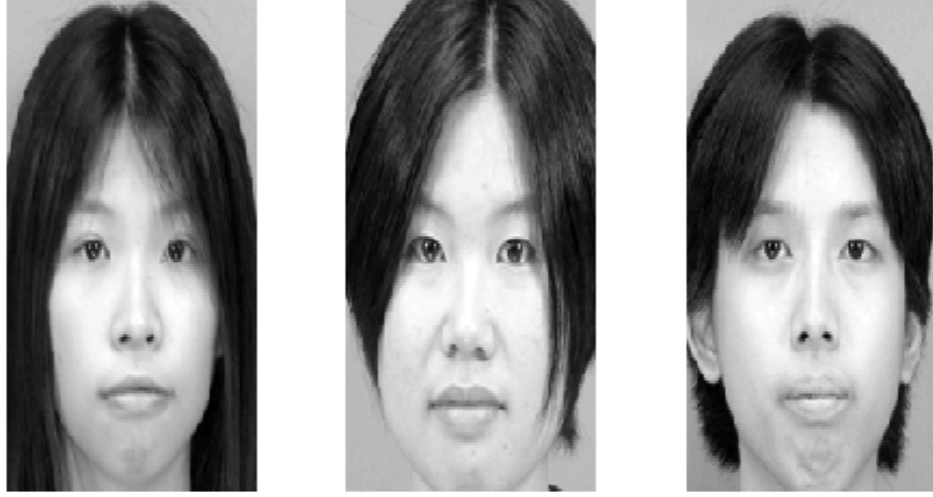
6.6.2 KKA ile Eskiz Tanıma Uygulaması

Bu çalışmada, 'CUHK Yüz Eskiz Veri Kümesi (CUFS)' [50] kullanılmıştır. Bu veri kümesindeki 188 fotoğraf 'Hong Kong Çin Üniversitesi Öğrenci Veri Bankası (CUHK Student Data Set)' [50] içerisinden, 126 yüz fotoğrafı ise 'AR Veri Bankası' [34] içerisinden alınmıştır. Alınan fotoğraflardan önden ve normal ışık altında çekilmiş yüz fotoğraflarının, ressamlar tarafından fotoğraflara bakarak görerek-eskizleri çizilerek 'CUHK Yüz Eskiz Veri Kümesi (CUFS)' oluşturulmuştur. Şekil 6.21'de veri kümelerinden alınmış örnekler gösterilmiştir.



Şekil 6.21: (a) CUHK Yüz Eskiz Veri Kümesi, (b) AR Yüz Eskiz Veri Kümesi

Önişleme aşamasında, veri kümelerindeki her bir verinin (fotoğraflar ve eskizler), göz merkezleri yatayda aynı hizaya gelecek şekilde veriler döndürülmüş, göz merkezleri arasındaki mesafe sabit olacak şekilde tekrar ölçeklendirilmiştir. Bu işlem sonrasında elde edilen verilerin tamamında, göz merkezleri sabit bir koordinata gelecek şekilde ve veri boyutu 250×200 olacak şekilde kesilip önişleme aşaması tamamlanmıştır. Verilerdeki kontrast seviyeleri değiştirilmemiştir. Önişleme sonrasında elde edilen örnek veriler Şekil 6.22’de verilmektedir.



Şekil 6.22: Döndürme-Ölçekleme ve Koordinat Sabitleme Sonrası Örnekler

Eskiz tanıma sisteminin eğitimi aşamasında birini dışarıda bırak (leave one out) yöntemi uygulanmıştır. Öznitelik belirleme işleminde temel bileşen analizi yapılmış ve temel bileşenlerden özdeğerleri toplamının yaklaşık %90'ını içeren ilk 50 tanesi öznitelik olarak seçilmiştir. Bu öznitelikleri oluşturan W_x ve W_y matrisleri test aşamasında doğrudan kullanılmıştır. Elde edilen öznitelikler üzerinde KKA uygulanmış ve kanonik dönüşüm matrisleri (**A**, **B**) ile kanonik korelasyon matrisi (**r**) bulunmuştur. Eğitim aşamasında bulunan bu matrislerden kanonik dönüşüm matrisleri (**A**, **B**) test aşamasında 'KKA ile ara uzaya geçilmesi' basamağında kullanılmıştır.

Tanıma, norm-2 uzayında T_v matrisindeki verilere **U** matrisinden en yakın olan verinin eşlenmesi şeklinde yapılmıştır. Bu yöntem sonucunda CUHK Yüz Eskiz Veri Kümesi'nde %99.47, AR Yüz Eskiz Veri Kümesi'nde %99.19 olmak üzere toplamda %99.36 oranında başarılı tanıma oranına ulaşılmıştır. KKA ile eskiz tanıma ve diğer yöntemlerin tanıma performanslarının karşılaştırılması ise Çizelge 6.3'de verilmiştir.

Çizelge 6.3: Eskiz Tanıma Başarı Oranı Karşılaştırması

Yöntem	Tanıma Performansı(%)
TBA+Özdönüşüm [45]	75
TBA+MultiscaleMRF [45]	84.3
TBA+MultiscaleMRF [45]	84.3
LFDA+SIFT [54]	99.27
LFDA+MLBP [54]	98.60
LFDA+SIFT+MLBP [54]	99.47
TBA+KKA(önerilen)	99.36

Çizelgeye genel olarak bakıldığında, temel bileşenler analizi (TBA) tabanlı yaklaşımların, lokal öznitelik ayrışımı analizi (LFDA) tabanlı yaklaşımlardan daha düşük performans gösterdikleri görülmektedir. TBA tabanlı özniteliklerin bulunması kolaydır ve genellikle alan bilgisi gerektirmez. LFDA tabanlı özniteliklerin bulunması ise, genellikle alan bilgisi gerektirir ve deneyseldir. Ayrıca, çözülmek istenen probleme göre büyük değişiklikler gösterebilirler. Bu çalışmada önerilen KKA esaslı eskiz tanıma yöntemiyle, TBA tabanlı olmasına karşın LFDA tabanlı yaklaşımların performanslarına ulaşmıştır.

Bu uygulamada %99.36 gibi yüksek bir performans değeri elde edilmesinde, veri kümesindeki eskizlerin tek bir ressam tarafından çizilen görerek-eskizlerden oluşmasının büyük etkisi vardır. Pratik uygulamalarda, görerek-eskizlerin yerine kriminal-eskizlerin kullanılması, yöntemin performansında düşüşe sebep olacaktır. Daha önce de bahsedildiği üzere, görerek-eskizler genelde eskiz-yüz tanıma yöntemlerinin performanslarını ölçmekte kullanılmaktadır.

Bu uygulamada ulaşılan yüksek tanıma oranı, herhangi bir çapraz tanıma probleminde, alan bilgisi kullanılmadan da başarılı sonuçların elde edilebileceğini göstermektedir.

6.7 Güvenlik Kamerası Yüz Tanıma Problemi

Yüz tanıma problemi uzun yıllardır üzerinde çalışılan temel bir örüntü tanıma problemidir. Güvenlik kameralarının kullanımının hızla artmasına rağmen, güvenlik kameraları yüz tanıma algoritmaları için yeterince kaliteli görüntüler sağlayamamaktadır. Bu tür kameralardan elde edilen görüntülerde, uygulamada iki temel problem ortaya çıkmaktadır; çözünürlük ve aydınlatma. Güvenlik kameraları, geniş görüş açısı istenmesinden dolayı, kamera üzerine düşen yüz görüntüleri genellikle düşük çözünürlüktedir. Çözünürlük problemi çözülse bile, farklı ışık şartlarında görüntülerin elde edilmesi problemi ortaya çıkabilmektedir. Özellikle az ışık içeren ortamlarda problem daha da artmaktadır. Karanlık ortamlarda genellikle kızılötesi ışıkla aydınlatma sonrasında elde edilen görüntülerden yararlanılmaktadır [35]. Özellikle yakın kızılötesi (Near-Infrared (NIR)) ışık kullanmak bu durumlarda oldukça avantaj sağlamaktadır. Farklı ışık kaynaklarının kullanılmasına ait karşılaştırmalar [55, 56]'da ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Yüz tanıma problemi uzun yıllardır çalışılmış olmasına karşın; düşük çözünürlük ve farklı aydınlatmalar altında tanıma problemi yeterince başarılı biçimde çözilememiştir.

Bu çalışmada, farklı uzaklıklardan elde edilmiş güvenlik kamerası görüntüleri için KKA tabanlı çapraz sınıflandırma, gerçek bir veri kümesi üzerinden çalışılmıştır. Çalışmada, 'Long Distance Heterogeneous Face Database (LDHF)' veri kümesi kullanılmıştır [35, 36]. Bu veri kümesi 100 kişiye ait farklı mesafelerden elde edilmiş yüz fotoğrafları içermektedir.

Yüz tanıma problemleri ilk çalışılmaya başlandığında, problemin basitleştirilmesi için farklı mesafelerden, farklı çözünürlüklerde, farklı ışık ortamlarında elde edilmiş yüz görüntüleri kullanılmamış; aksine yüksek çözünürlükte kullanılan görüntülerle yüksek tanıma oranlarına ulaşılmıştır. Günümüzde güvenlik kameralarında, kapsama alanını maksimize etmek amacıyla geniş açılı kameraların kullanılmasıyla; görüntüsü elde edilmek istenen yüz fotoğrafı genelde 32×32 piksel içerisinde kalacak şekilde elde edilmektedir. Düşük çözünürlükte elde edilen yüz görüntüsü ise, yüzler arasındaki ayırt edici özellik sayısını düşürmektedir [8]. Elde edilen yüz görüntüsü çözünürlüğü 64×64 pikselin altında olduğunda, kullanılan yüz tanıma yöntemlerin başarımı büyük oranda düşmektedir [57]. Güvenlik kamerası yüz tanıma problemi, düşük çözünürlükte (DÇ) elde edilen yüz görüntüsünün veri kümesindeki yüksek çözünürlükteki (YÇ) görüntüye eşleştirilmesi problemidir.

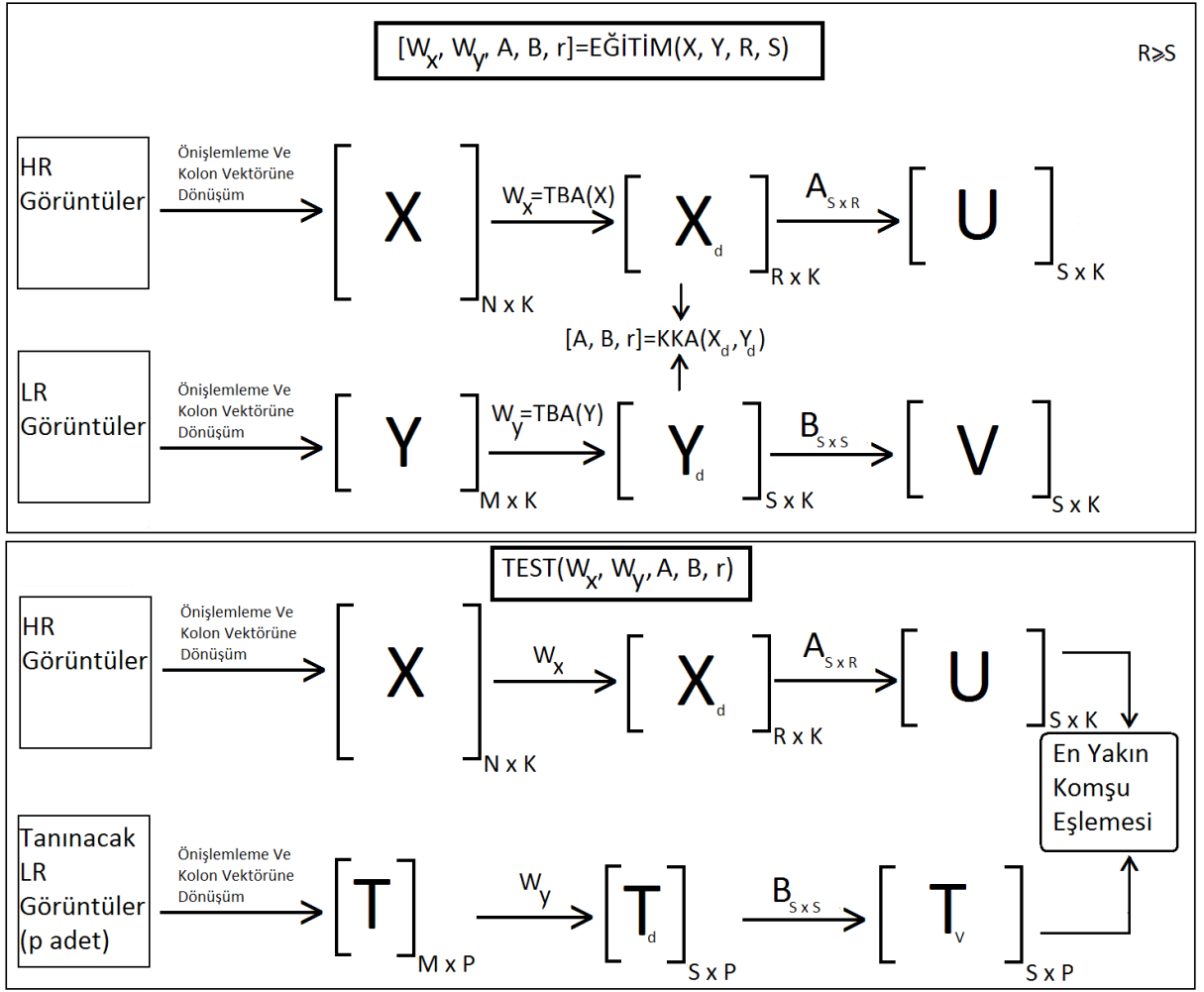
Düşük çözünürlüklü yüz tanıma problemi için iki temel yaklaşım kullanılmaktadır. Birinci ve daha geleneksel olan iki basamaklı bir yaklaşımdır [58]. Bu yaklaşımda YÇ görüntü, aşağı örnekleme yöntemleriyle DÇ görüntüye dönüştürülür veya DÇ görüntü süper çözünürlük (Super-Resolution (SÇ)) yöntemleriyle YÇ görüntülere dönüştürülür. YÇ görüntülerin DÇ görüntülere dönüştürülmesi yöntemi, ayırt edici özelliklerin azalması ve düşük per-

formans göstermesi dolayısıyla fazla kullanılmamaktadır [58, 59, 60]. DÇ görüntülerden YÇ görüntülerin elde edilmeye çalışılması yaklaşımı daha fazla kullanılmaktadır [61]. Bu konuda literatürde tanımlanmış pek çok süper çözünürlük yöntemi olmasına karşın; pratik uygulamalarda hızlı ve basit olması dolayısıyla aradeğerleme yöntemleri kullanılmaktadır [58]. Öğrenme Tabanlı Süper Çözünürlük (learning-based super-resolution) yöntemi göreceli yeni ve başarımı diğer yöntemlerden daha yüksek bir yöntemdir [62, 63]. İki basamaklı yöntemde, SÇ görüntü elde edildikten sonra DÇ ve YÇ görüntüler aynı uzayda tanımlanmış olduğundan, standart yüz tanıma yöntemleri çalıştırılabilmektedir. SÇ görüntü oluşturma yöntemindeki ana fikir, DÇ görüntüde görünmeyen bilgiyi yeniden oluşturmaktır [8]. Düşük çözünürlüklü görüntülerden yüz tanıma kullanılan ikinci yaklaşım ise, her iki görüntüyü de eşdeğer yüz alanı (eigenface domain) gibi farklı bir alana geçirmektedir [64]. Bu yöntem daha iyi sonuç vermesine rağmen, fazla işlem gücü gerektirmektedir [65].

6.7.1 KKA ile Güvenlik Kamerasında Yüz Tanıma Yöntemi

DMOKH kestirimine dayalı çapraz sınıflandırma yönteminde YÇ görüntü öznitelikleri DÇ görüntü özniteliklerinden kestirilmekte ve tanıma yapılmaktadır. Bu yöntem için sadece ortalama değer vektörü ve eşdeğişinti matrislerinin yeterli olduğu vurgulanmıştır. Fakat bu yaklaşımda; YÇ özniteliklerine dönüşüm sonrasında özniteliklerin, sınıflandırma performansını arttırıcı şekilde organize edilmesine yardımcı bir yöntem bulunmamaktadır. Öznitelikler üzerindeki gürültü, sınıflandırma performansını olumsuz yönde etkileyebilmektedir. KKA tabanlı çapraz tanıma yöntemi farklı çözünürlükte yüz tanıma öznitelik seçimi için üç basamaklı bir yaklaşım önermektedir. Bu yöntemdeki ana fikir, sınıflandırma algoritmasının YÇ ve DÇ görüntülerin tanımlı olduğu uzaydan farklı bir ara uzayda yapılmasıdır. Son yıllarda çapraz tanıma problemlerini ara uzayda çözmeye çalışan başka yaklaşımlarda geliştirilmiştir [58, 60, 43]. Bu çalışmada, güvenlik kamerasından elde edilen farklı çözünürlükte yüz tanıma problemi için kullanılabilecek ara uzayın KKA ile tanımlanması önerilmektedir.

Önerilen bu yöntemin basamaklarının neler olduğu Şekil 6.23'de temsili olarak gösterilmiştir.



Şekil 6.23: KKA ile Farklı Çözünürlükte Yüz Tanıma İşlem Basamakları Gösterimi

Burada yapılan işlemler eğitim aşamasında;

- YÇ ve DÇ görüntü önişleme
- Öznitelik belirleme dönüşümlerinin bulunması ve özniteliklerin belirlenmesi ve
- KKA ile ara uzay dönüşümlerinin bulunması ve ara uzaya geçilmesi

tanıma (test) aşamasında ise;

- YÇ ve DÇ görüntü önişleme
- Öznitelik belirlenmesi
- KKA ile ara uzaya geçilmesi ve
- Sınıflandırmanın yapılması

şeklinde sıralanabilir.

YÇ ve DÇ Görüntü Önişleme

Veri kümesi içerisinde kullanılan YÇ ve DÇ görüntülerin standart hale getirilmesi için öncelikle döndürme ve ölçekleme işlemlerinin yapılması gerekmektedir. Önişleme sonucunda, YÇ görüntülerde yüz için tanımlanan ayırt edici noktaların aynı çerçeveye oturtulması sağlanmış olur. Aynı işlem DÇ görüntülere de uygulanır. Fakat DÇ ve YÇ görüntülerin birbiriyle hizalanmış olması gerekmez. Bu aşamada; göz merkezleri, çene-alın noktaları, kulak veya dudak kenarları gibi belirleyiciler kullanılabilir. Bu işlemler hem eğitim aşamasında hem de tanıma aşamasında yapılmalıdır.

Öznitelik Belirleme Dönüşümlerinin Bulunması ve Özniteliklerin Belirlenmesi

Kullanılacak öznitelikler, temel bileşen analizi (TBA) yöntemi ile elde edilmiştir [38]. İşlem yapılan veri sayısını indirmek ve veriler üzerindeki gürültü etkisini azaltmak için, en yüksek özdeğerlere karşılık gelen belirli sayıdaki özvektörün kullanılması yeterlidir. Bu işlem sonrasında X ve Y uzayından indirgenmiş veriler sırasıyla X_d ve Y_d olarak isimlendirilecektir. X_d matrisi, X matrisinin ilk R adet temel bileşeni içeren ve $R \leq N$ olmak üzere $X_d \in R^{R \times K}$ matrise indirgenecektir. Y_d matrisi ise Y matrisinin ilk S adet temel bileşeni içeren ve $S \leq M$ olmak üzere $Y_d \in R^{S \times K}$ matrisine indirgenecektir. Burada, K : DÇ ve YÇ veri kümesindeki örnek sayısını, N : YÇ veri kümesindeki her bir örneğin öznitelik sayısını, M : DÇ veri kümesindeki her bir örneğin öznitelik sayısını, R : YÇ veri kümesindeki örneklerin indirgenmiş öznitelik sayısını, S : DÇ veri kümesindeki örneklerin indirgenmiş öznitelik sayısını ifade etmektedir.

Bu işlem, eğitim aşamasında, ilgili temel bileşenleri belirlemek için gerekli dönüşümleri (W_x ve W_y) bulabilmek için yapılmalı ve tanıma aşamasında ise bu dönüşüm vektörleri kullanılmalıdır. W_x , X uzayındaki verilerin R^R boyutuna indirgenmesi için ($R \leq N$) ilk R adet temel bileşenin bulunabilmesi için oluşturulmuş $W_x \in R^{R \times N}$ boyutundaki dönüşüm matrisidir. W_y ise, Y uzayındaki verilerin R^S boyutuna indirgenmesi için ($R \leq S$) ilk R adet temel bileşenin bulunabilmesi için oluşturulmuş $W_y \in R^{S \times M}$ boyutundaki dönüşüm matrisidir.

KKA ile Ara-Uzay Dönüşümlerinin Bulunması ve Ara-Uzaya Geçilmesi

KKA yöntemi kullanılarak, X_d ve Y_d uzaylarındaki verilerin KKA dönüşümleri birbirleri ile maksimum korelasyon yapısını tanımlayacaktır. Bu işlem sonucunda X_d matrisinden elde edilecek veriler U , Y_d matrisinden elde edilecek veriler de V matrisleri olarak adlandırılacaktır. Bu matrislerin bulunduğu uzaylar sırasıyla ($S \leq R$ kabul edilmiştir), $U \in R^S$ ve $V \in R^S$ olacaktır. Bu işlem, eğitim aşamasında kanonik korelasyon dönüşüm (A ve B) matrislerini ve köşegen korelasyon matrisini (r) bulmak için yapılmalı ve tanıma aşamasında bu matrisler kullanılmalıdır.

Tanıma Testi

Tanıma aşamasında, tanınması istenen toplam P adet DÇ temel bileşenleri içeren $\mathbf{T}_v$ ($\mathbf{T}_v \in \mathbb{R}^{S \times P}$) matrisi oluşturulur. YÇ veri kümesinin de ara uzay dönüşümlerini içeren $\mathbf{U}$ ($\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{S \times K}$) matrisinde ise toplam, YÇ verisinin K adet örneği bulunmaktadır. Tanıma için en yakın komşu eşleştirilmesi yapılarak, DÇ görüntünün ilgili YÇ eşleştirmesi yapılır.

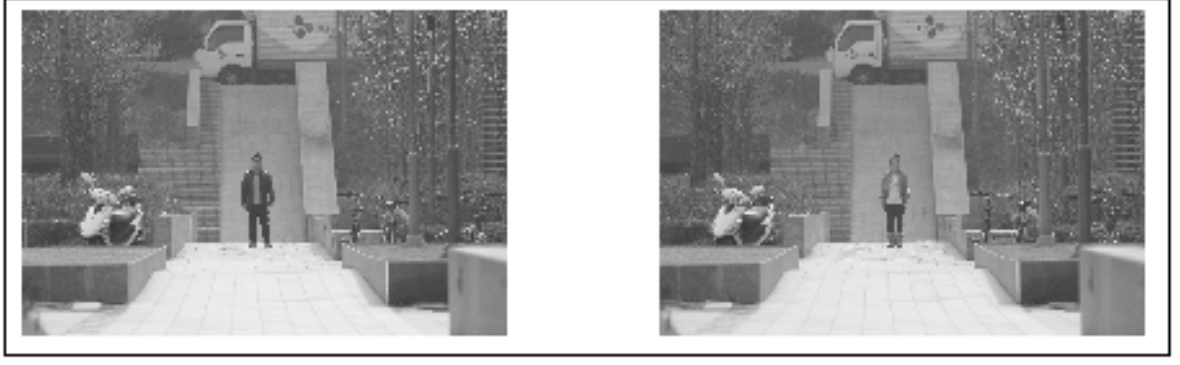
6.7.2 KKA ile Farklı Çözünürlükte Yüz Tanıma Uygulaması

Çalışmada kullanılan 'Long Distance Heterogeneous Face Database (LDHF)' [35, 36], görünür ve yakın kızılötesi bantta görüntüler içermektedir. Görüntüler açık alanda 60m, 100m ve 150m mesafeden, kapalı alanda ise 1m mesafeden elde edilmiştir. Toplam 100 kişiye ait görünür ve yakın kızılötesi görüntü 4 farklı uzaklık için sağlanmıştır. Bu çalışma LDHF veri kümesinden çekilen 1m (YÇ) ve 150m (DÇ) mesafeden görünür bantta elde edilen görüntüler ile yapılmıştır. Çalışma, az sayıda görüntü verisi ile yapıldığından çapraz doğrulama (Cross-Validation) yöntemi ile test edilmiştir. 99 DÇ ve YÇ görüntü eğitim için kullanılmış, 1 görüntü ise test için ayrılmıştır. Bu işlem her bir görüntü için ayrı ayrı tekrarlanmış ve tanıma performansı belirlenmiştir.

LDHF veri kümesindeki yüz görüntüleri öncelikle göz pozisyonları aynı olacak şekilde hizalanmıştır. Göz hizalaması esnasında YÇ görüntüler 292×202 boyutunda, DÇ görüntüler ise 43×32 boyutunda olacak şekilde ölçeklendirilmiştir. Hizalama ve ölçeklendirme öncesi 1m mesafeden elde edilmiş görüntüler Şekil 6.24'de, 60m mesafeden elde edilmiş görüntüler ise Şekil 6.25'de gösterilmiştir.

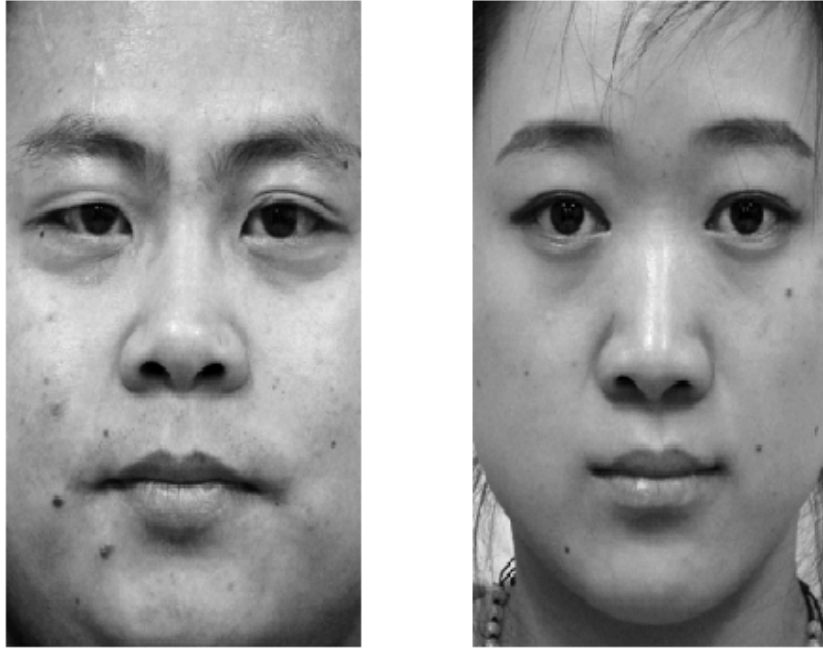


Şekil 6.24: 1m Mesafeden Elde Edilmiş Görüntü Örnekleri

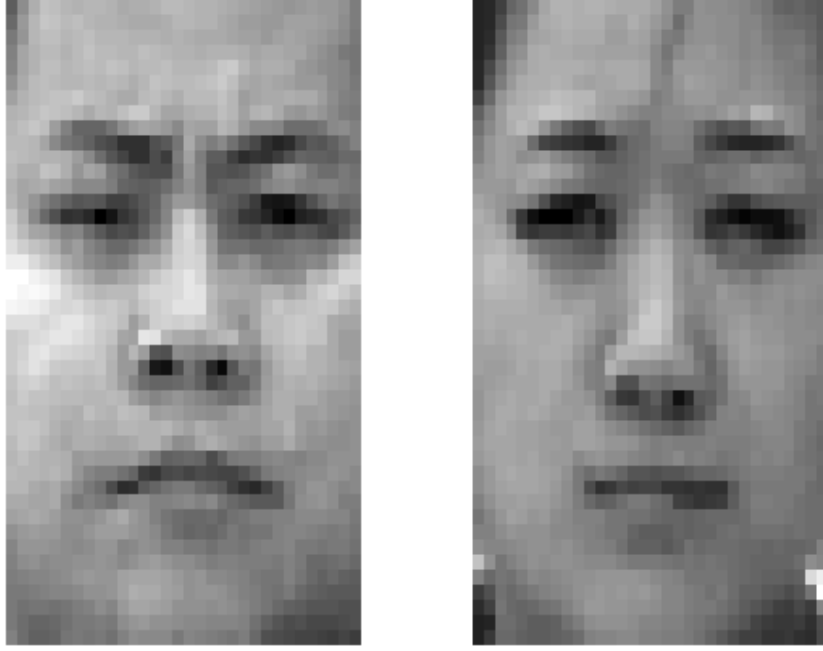


Şekil 6.25: 150 m Mesafeden Elde Edilmiş Görüntü Örnekleri

Hizalama ve ölçeklendirme sonrasında elde edilen YÇ görüntü örnekleri Şekil 6.26’de, DÇ görüntü örnekleri ise Şekil 6.27’de gösterilmiştir.



Şekil 6.26: Önişleme Sonrası YÇ Yüz Görüntüsü Örnekleri



Şekil 6.27: Önişlemele Sonrası DÇ Yüz Görüntüsü Örnekleri

Eğitim aşamasında, 99 DÇ ve 99 YÇ görüntü bu aşama için girdi, $\mathbf{W}_x, \mathbf{W}_y, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{r}$ parametreleri ise çıktıdır. YÇ görüntüler $x_i \in R^{58984} : i = 1..99$ olacak şekilde kolon vektörlerine dönüştürülmüş ve $\mathbf{X} \in R^{58984 \times 99}$ matrisini oluşturmuştur. Aynı şekilde DÇ görüntüler $y_i \in R^{1376} : i = 1..99$ olacak şekilde kolon vektörlerine dönüştürülmüş ve $\mathbf{Y} \in R^{1376 \times 99}$ matrisini oluşturmuştur. $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ matrisleri için temel bileşenler analizi (TBA) yapılmış ve eğitim aşamasında $\mathbf{W}_x, \mathbf{W}_y$ olarak saklanmıştır. TBA sonrasında herbir DÇ ve YÇ görüntünün 98 temel bileşen vektörü indirgenmiş veri kümesi olarak saklanmıştır. DÇ görüntüler için $\mathbf{Y}_d \in R^{98 \times 99}$ ve YÇ görüntüler için $\mathbf{X}_d \in R^{98 \times 99}$ matrisleri elde edilmiştir. Bu matrisler üzerine uygulanan KKA sonrasında, kanonik korelasyon dönüşümünü yapacak $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ matrisleri elde edilmiştir.

Test aşamasında, 100 YÇ görüntü kolon vektörü olarak gösterilmiş ve $\mathbf{X} \in R^{58984 \times 100}$ matrisi elde edilmiştir. Bu görüntülerin ilk 98 temel bileşeni eğitim aşamasında kaydedilen $\mathbf{W}_x$ ile seçilmiş ve sonrasında yine eğitim aşamasında kaydedilen $\mathbf{A}$ matrisi dönüşümüyle veriler U uzayına aktarılmıştır. Sınıflandırılması istenen DÇ görüntü kolon vektörü olarak gösterilmiş ve $\mathbf{T} \in R^{1376}$ vektörü elde edilmiştir. Bu görüntünün ilk 98 temel bileşeni eğitim aşamasında kaydedilen $\mathbf{W}_y$ ile seçilmiş ve sonrasında yine eğitim aşamasında kaydedilen $\mathbf{B}$ matrisi dönüşümüyle V uzayına aktarılmıştır. U uzayındaki verilerden $\mathbf{T}_v$ vektörüne en yakın olan vektör sınıflandırılacak kişi olarak seçilmiştir. Bu kapalı küme tanıma stratejisi pratikte kullanım alanı olmasa da, yöntemlerin güçlü ve zayıf yönlerini göstermekte

başarılı bir sınıflandırma yöntemidir. Toplam Eşleşme Karakteristiği (Cumulative Match Characteristic(CMC)) gösterim yöntemi kapalı küme sınıflandırma stratejisi uygulandığında, rank gösterimi ile anlamlı sonuçlar göstermektedir. Rank, yöntemlerin performansını test etmekte kullanılan bir gösterimdir. DÇ bir görüntü örneğinin, en olası YÇ görüntü eşleşmesine rank-1 eşleşmesi, sonraki olası eşleşmesine rank-2 eşleşmesi olarak isimlendirilir. Rank-n eşleşmesi, n. olası eşleşmesi anlamındadır. Bir yöntemin rank-n performansı, doğru eşleşmenin ilk n aday içerisinde bulunması ile ölçülür. Önerilen yöntem, TBA yöntemi ile 60 ve 98 öznitelik kullanılarak karşılaştırılmıştır. 60 öznitelik, özdeğer özvektörlerin toplamının %95'ini kapsamaktadır.

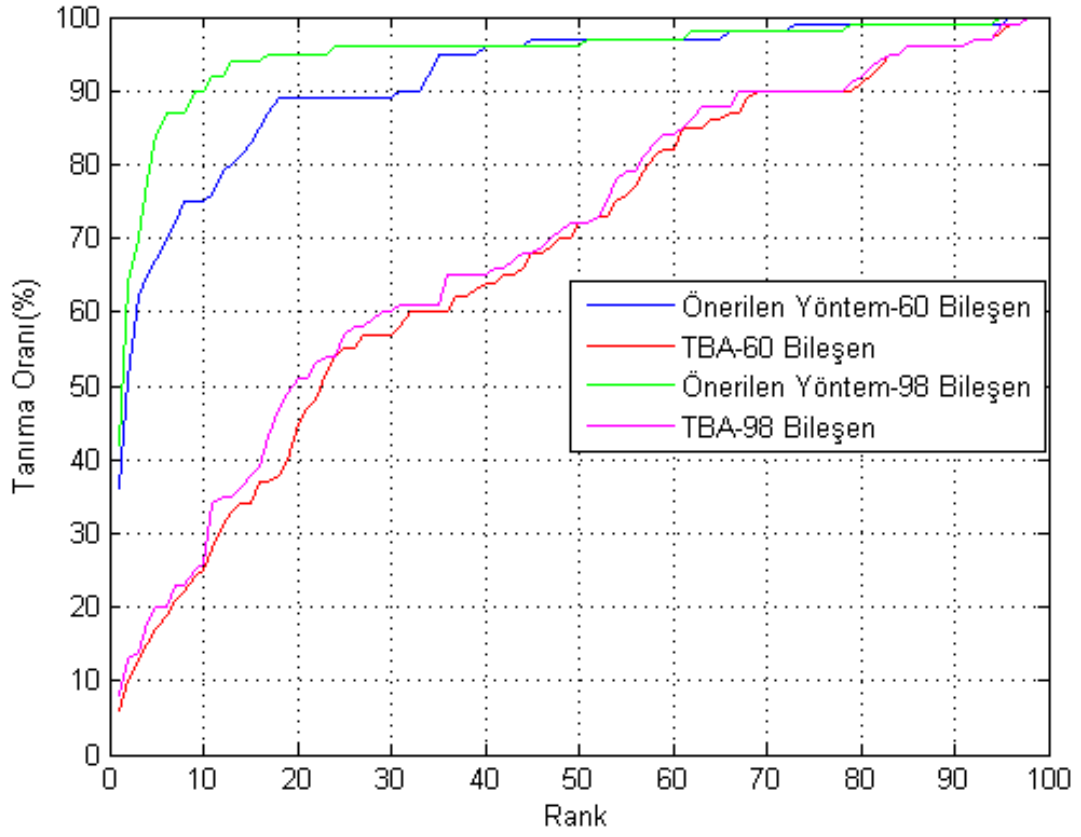
Rank-1, Rank-3 ile Rank-5 tanıma oranları Çizelge 6.4'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.4: Farklı Çözünürlükte Yüz Tanıma için Rank-1, Rank-3 ve Rank-5 Tanıma Oranları

Yöntem	Rank-1	Rank-3	Rank-5
KKA-60 Bileşen	36%	51%	67%
TBA-60 Bileşen	6%	13%	17%
KKA-98 Bileşen	42%	70%	84%
TBA-98 Bileşen	8%	14%	20%

Çizelgede gösterildiği üzere, Rank-5 performansı göze alındığında, PCA sınıflandırma %20 başarısına ulaşırken, önerilen yöntem %84 başarıyla sınıflandırma yapabilmektedir.

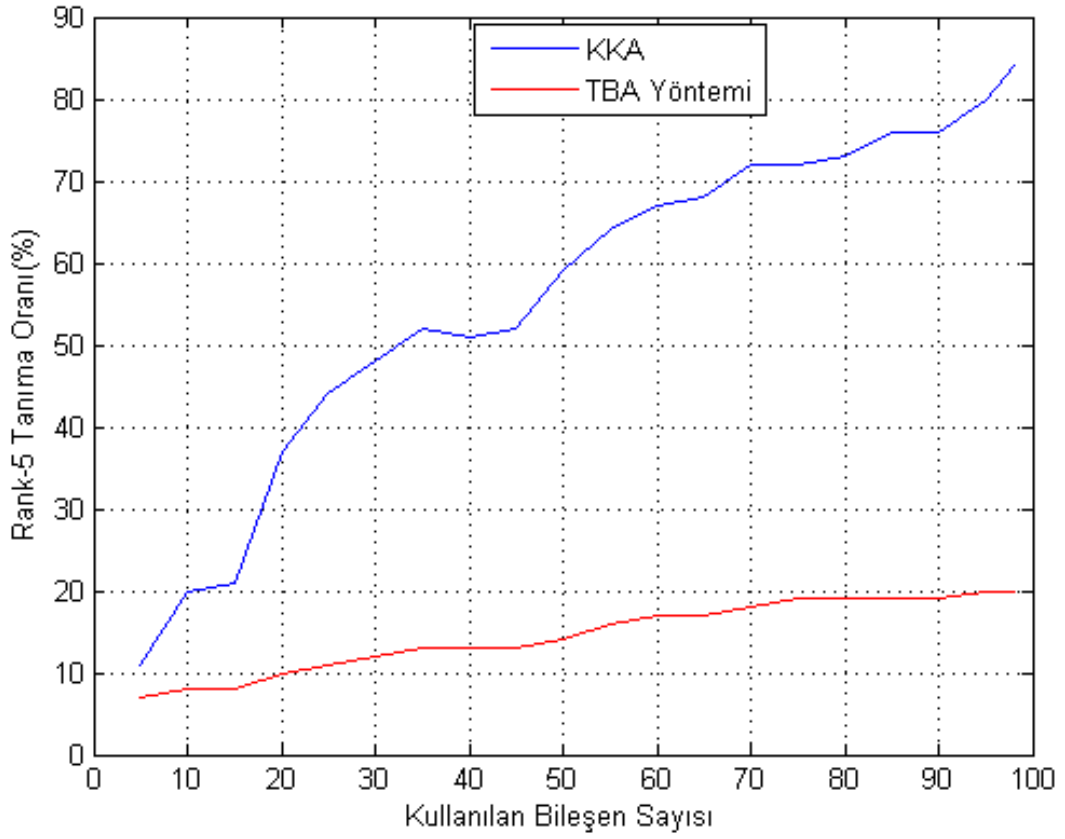
Tüm rank değerleri için tanıma performansları ise Şekil 6.28'da gösterilmiştir.



Şekil 6.28: Farklı Mesafe Yüz Tanıma İçin, TBA ve Önerilen Yöntemin Tüm Rank Değerleri Başarım Oranları

Şekil 6.28’de görüldüğü üzere, rank değeri arttıkça sınıflandırma performansı artmaktadır. Önerilen KKA tabanlı yöntem, TBA yöntemine göre her zaman daha iyi sonuç vermektedir. Bu durum, TBA yönteminde öz niteliklerin temel bileşenlerden seçilmesine karşılık, önerilen yöntemde temel bileşenlerin yüksek korelasyon gösterecek öz nitelik dönüşümlerini kullanma esasından kaynaklanmaktadır.

Rank-5 için, önerilen ve TBA tabanlı tanıma performansının, kullanılacak öz nitelik sayısına göre durumu Şekil 6.29’de gösterilmiştir.



Şekil 6.29: Farklı Mesafe Yüz Tanıma İçin, TBA ve Önerilen Yöntemin Rank-5 Tanıma Oranları

Her iki yöntem için de, kullanılacak öznelilik sayısının artması performansı arttırmaktadır. Önerilen yöntemde performans artışı, öznelilik sayısı arttıkça eğimini azalmaktadır. Bu durum, önerilen KKA tabanlı yöntemin öznelilikleri belirleme stratejisinden kaynaklanmaktadır. Kanonik korelasyonların büyükten küçüğe doğru dizilmesi ile, her kullanılan bileşen kendisinden önce gelen bileşenden daha az performansı arttırmaktadır. Tanıma için kullanılacak özneliliklerden, en yüksek korelasyonu gösterenler baştaki bileşenler olarak yer almaktadır. TBA tabanlı uygulamada ise, özneliliklerin sınıflandırma açısından özel bir dizilimi söz konusu değildir.

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada öncelikle çapraz sınıflandırma problemi ortaya konulmuş ve çapraz sınıflandırma problemine temel oluşturacak yaklaşımlar incelenmiştir. Çapraz sınıflandırma için geliştirilen yaklaşım ve yöntemler bazı pratik tanıma ve sınıflandırma problemlerine uygulanmış ve sonuçlar karşılaştırmalı olarak etüt edilmiştir.

Sınıf ayrıştırılabilirliği için bir ölçüt olan Bhattacharyya Katsayısı veya Bhattacharyya uzaklık ölçütü farklı özelliklerdeki dağılımlar için incelenmiştir. Farklı dönüşümler altında sınıf ayrıştırılabilirliğinin nasıl etkilendiği Bölüm 2’de gösterilmiştir. Yine aynı bölümde, teorik gösterimlere ek olarak bazı deneysel sonuçlar da ele alınmıştır.

Çapraz sınıflandırma yöntemlerinin incelenmesinde başlangıç noktası olan DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma yöntemi Bölüm 3’de incelenmiştir. Burada DMOKH kestiricisi ayrıntılı olarak sunulmuştur. Gauss dağılıma sahip sınıflar varsayımında DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma için bilinmesi gereken sınıf istatistikleri ve bunlar ile yapılacak DMOKH kestiricisinin nasıl belirlendiği incelenmiştir. Doğrudan ölçülebilen ve doğrudan ölçülemeyen öznitelikler arasında bir ilinti (correlation) bulunduğu sürece, DMOKH kestiricisi ile özniteliklerin kestirilip, sınıflandırma yapılabileceği gösterilmiştir. Ayrıca DMOKH tabanlı çapraz sınıflandırma ile elde edilen özniteliklerin ayrıştırılabilirliği Bhattacharyya uzaklık ölçütü üzerinden incelemiştir. DMOKH tabanlı çapraz tanımda Bhattacharyya mesafe ölçütünün değişmediği de Bölüm 2.1’de gösterilmiştir. Ters alınabilir ve türevlenebilir dönüşümlerle yapılan kestirimlerde Bhattacharyya Uzaklığı’nın değişmediği Bölüm 2.2’de gösterilmiştir. Burada, çapraz sınıflandırma problemi için, Bhattacharyya Uzaklığı ve sınıflandırma performansı arasında, beklenin aksine, doğrudan bir ilinti olmadığı gösterilmiştir. Sınıflandırma performansı hata olasılığı ile Bhattacharyya Uzaklığı arasındaki ilişki, Bölüm 3.5’de gösterilmiştir.

Ortalama değer vektörleri ve eşdeğişinti matrisleri bilinen, eşit sayıda örnek içeren iki veri setinin birleşmesiyle elde edilen yeni veri kümesinin ortalama değer vektörünün ve eşdeğişinti matrisinin ne olacağı Bölüm 3.4’de gösterilmiştir. Doğrudan ölçülemeyen ve doğrudan ölçülebilen öznitelikler arasındaki eşdeğişinti matrislerinin ($\mathbf{P}_{xy}$) de bilinmesi durumunda, DMOKH ile elde edilen sınıfların ve bunların birleşiminin ortalama değer vektörleri ve eşdeğişinti matrisleri Bölüm 3.4’de gösterilmiştir.

Bölüm 3’de kestirimle elde edilen değerler üzerinden hesaplanan BU değerinin sınıflandırma performansı hakkında doğrudan bir bilgi vermediği gösterilmiştir.

Bölüm 4’de ise kestirilen özniteliklerin orijinal öznitelikler + gürültü şeklinde modellendiğinde; BU değerinin ölçemediğimiz öznitelik BU değerinden küçük veya eşit olduğu ispatlanmıştır. Eşitliğin sağlanabilmesi için, kestirim hatasının olmaması veya eşdeğişinti

matrislerinin birbirlerine eşit olması gerektiği Bölüm 4.1’de gösterilmiştir. Bu çalışma sonrasında, kestirilen özniteliklerinin, doğrudan ölçülemeyen öznitelikler için tasarlanan ve Eşitlik 2.7’de belirtilen sınırlar arasında kalan bir sınıflandırıcı ile sınıflandırıldığında performansın hangi aralıkta olabileceği gösterilmiştir.

Bölüm 5’de, çapraz sınıflandırma için KKA tabanlı yeni bir yöntem önerilmiş ve bu yöntem ile öznitelik belirlemesi/indirgenmesi konuları incelenmiştir. KKA tabanlı bu yöntem, kanonik korelasyonları büyükten küçüğe sıralaması sayesinde özniteliklerin belirlenmesi veya indirgenmesi aşamasında da optimal bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır. Kullanılan her öznitelik ile sistemin performansı artmakta fakat bu performans artışı kendisinden bir önceki özneliğin sağladığı performans artışından daha az olmaktadır. KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yönteminin uygulanması esnasında, probleme dair özel bir alan bilgisinin gerekmemesi, önerilen yöntemin önemli bir özelliğidir.

Bölüm 6.1’de IRIS veri kümesi ile, Bölüm 6.2’de CMU veri kümesi ile DMOKH kestirici tabanlı çapraz sınıflandırma yaklaşımı ve sınıf ayrıştırılabilirliği Bhattacharyya Uzaklığı kullanılarak incelenmiştir.

Bölüm 6.3 ve Bölüm 6.4’de gerçek genetik veriler üzerinde bazı çapraz sınıflandırma problemleri çalışılmıştır. Bu uygulamada doğrudan ölçülebilen ve doğrudan ölçülemeyen veri kümeleri arasındaki ilintinin çapraz sınıflandırma performansını doğrudan etkilediği gösterilmiştir. Ayrıca otozomal genetik işaretleyiciler ile %84 gibi yüksek bir hata oranı ile belirlenebilen Y-DNA haplogruplarının, önerilen yöntem ile %47 hata oranı ile belirlenebilmesi sağlanmıştır.

Bölüm 6.5’de düşük çözünürlüklü imgelerden yüz tanıma uygulaması çalışılmıştır. Bu çalışmada yüksek çözünürlüklü görüntüler sentetik olarak düşük çözünürlüklü görüntülere dönüştürülmüştür. 6 x 3 boyutuna kadar indirilen bu görüntüler ile insan gözüyle yapılamayacak olan yüz tanınması önerilen yöntem ile başarılı bir şekilde yapılabilmektedir.

Bölüm 6.6’de eskizden yüz tanıma için şimdiye kadar yapılan ilgili çalışmalar sunulmuş ve problem KKA tabanlı çapraz sınıflandırma yöntemi kullanılarak çalışılmıştır. Önerilen yaklaşım, fotoğraf veya eskiz uzayında değil, KKA tabanlı bir dönüşüm ile verilerin korelasyonlarının maksimum olduğu ara uzayda tanıma yapma esasına dayanmaktadır. TBA ile kullanılacak özniteliklerin belirlenmesi/indirgenmesi, bu öznitelikler ile KKA gerçekleştirilmesi bu yöntemin eskiz tanıma kullanılması yeni bir yaklaşımdır. Önerilen yöntemde KKA sonrasında öznitelikler, korelasyonu yüksek olandan az olana doğru sıralanmış olduğu için, istenilen sayıda özneliğin optimal şekilde seçilmesine izin vermektedir. Çalışma sonrasında eskizden yüz tanıma problemi için önerilen yöntem ile yüksek tanıma oranlarına ulaşıldığı gözlenmiştir. Görerek-eskiz yöntemi ile oluşturulmuş veri kümesi üzerinde yapılan uygulamanın, kriminal-eskiz verileri üzerinde de başarılı

sonuçlar vereceği düşünülmektedir. Bu uygulamada da, alan bilgisi kullanmadan, KKA tabanlı yöntem ile başarılı bir tanıma yapılabileceği gösterilmiştir.

Bölüm 6.7’de güvenlik kamerası görüntülerinden yüz tanıma problemi çalışılmıştır. Konu hakkında ayrıntılı literatür taraması verilmiş ve sonrasında KKA tabanlı tanıma yöntemi sunulmuştur. LDHF veri kümesi üzerinde yapılan uygulama ile KKA tabanlı yöntemin yüksek tanıma oranlarına ulaştığı gösterilmiştir.

Bu çalışmada önerilen yöntem, alan bilgisi gerektirmemektedir. Bu özelliği ile bundan sonra yapılabilecek birçok çapraz tanıma problemine hızlıca uygulanabilecek bir ereve olarak ortaya çıkmaktadır. Uzaktan algılama problemleri, kızıl ötesi kamera görüntülerinden görünür bant görüntülerin tanınması gibi problemler bunlardan bazılarıdır.

Makine ğreniminin bir kolu olan alan uyarlaması (domain adaptation) son yıllarda üzerinde çalışılan konulardandır [66]. Alan uyarlaması, eğitim aşamasında kullanılan objelerin tanımlandığı uzay ile sınıflandırmada kullanılacak objelerin tanımlandığı uzayın farklı olması durumunda tanıma yapabilmeyi amaçlamaktadır [67]. Alan uyarlaması için öznitelik tabanlı [68, 69], tekrar ağırlıklandırma tabanlı [70], destek vektör makinesi tabanlı [71, 72] algoritmalar geliştirilmiştir. Önerilen KKA tabanlı çapraz tanıma yöntemi, öznitelik tabanlı bir yöntem olup, alan uyarlaması konusuna geniş bir ereve olmaktadır. Çapraz tanıma ile ilgili gelecekte yapılacak çalışmalarda, alan uyarlaması ile birlikte ele alınarak tez kapsamında ortaya konulan teorik ereve ile alan uyarlaması yöntemlerinin geliştirilmesinde kullanılabilir.

Önerilen kanonik korelasyon analizi tabanlı yöntem, özniteliklerin yüksek korelasyon gösterenden düşük korelasyon gösterene doğru dizilmesi ile öznitelik seçiminde de optimal bir yöntem olarak sunulmuştu. Kullanılacak znitelik sayısının sınıflandırma performansına etkisi bundan sonrası için üzerinde çalışılabilecek bir konu olarak karşımıza çıkmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] K. Fukunaga. *Introduction to statistical pattern recognition (2nd ed.)*, chapter 1, page 1. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1990.
- [2] Anil K. Jain, Robert P. W. Duin, and Jianchang Mao. Statistical pattern recognition: A review. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 22(1):4–37, January 2000.
- [3] Horst Bunke and Kaspar Riesen. Towards the unification of structural and statistical pattern recognition. *Pattern Recognition Letters*, 33(7):811–825, May 2012.
- [4] Satoshi Watanabe. *Pattern recognition : human and mechanical*. New York : Wiley, 1985.
- [5] Robert T. Olszewski, Christos Faloutsos, and David Banks Dot. Generalized feature extraction for structural pattern recognition in time-series data. Technical report, In Time-Series Data, PhD dissertation, Carnegie Mellon University, 2001.
- [6] Hamed Kiani Galoogahi and Terence Sim. Inter-modality face sketch recognition. In *ICME*, pages 224–229. IEEE Computer Society, 2012.
- [7] Xinbo Gao, Nannan Wang, Dacheng Tao, and Xuelong Li. Face sketch-photo synthesis and retrieval using sparse representation. *IEEE Trans. Cir. and Sys. for Video Technol.*, 22(8):1213–1226, August 2012.
- [8] Wilman W. W. Zou and Pong C. Yuen. Very low resolution face recognition problem. *Trans. Img. Proc.*, 21(1):327–340, January 2012.
- [9] A. Bhattacharyya. On a measure of divergence between two statistical populations defined by their probability distributions. *Bulletin of the Calcutta Mathematics Society*, 35:99–110, 1943.
- [10] Sung-Hyuk Cha. Comprehensive survey on distance/similarity measures between probability density functions. *International Journal of Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1(4):300–307, 2007.
- [11] P. Kumar and S. Chhina. A symmetric information divergence measure of the csiszár's f-divergence class and its bounds. *Computers and Mathematics with Applications*, 49(4):575 – 588, 2005.
- [12] Ananth N. Iyer, Uchechukwu O. Ofoegbu, Robert E. Yantorno, and Brett Y. Smolenski. Speaker distinguishing distances: a comparative study. *I. J. Speech Technology*, 10(2-3):95–107, 2007.

- [13] Markus Nussbaum-Thom, Eugen Beck, Tamer Alkhouli, Ralf Schlüter, and Hermann Ney. Relative error bounds for statistical classifiers based on the f-divergence. In *Interspeech*, pages 2197–2201, 2013.
- [14] Hermann Ney. On the relationship between classification error bounds and training criteria in statistical pattern recognition. In Francisco José Perales, Aurélio J. C. Campilho, Nicolás Pérez de la Blanca, and Alberto Sanfeliu, editors, *Pattern Recognition and Image Analysis*, volume 2652 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 636–645. Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [15] Karim T. Abou-Moustafa and Frank P. Ferrie. A note on metric properties for some divergence measures: The gaussian case. In Steven C. H. Hoi and Wray L. Buntine, editors, *ACML*, volume 25 of *JMLR Proceedings*, pages 1–15. JMLR.org, 2012.
- [16] T. Kailath. The divergence and bhattacharyya distance measures in signal selection. *IEEE Transactions on Communication Technology*, 15(1):52–60, February 1967.
- [17] Dorin Comaniciu, Visvanathan Ramesh, and Peter Meer. Kernel-based object tracking. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 25(5):564–575, April 2003.
- [18] Euisun Choi and Chulhee Lee. Feature extraction based on the bhattacharyya distance. *Pattern Recognition*, 36(8):1703 – 1709, 2003.
- [19] G. Xuan, P. Chai, and M. Wu. Bhattacharyya distance feature selection. In *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition - Volume 2*, ICPR '96, pages 195–199, Washington, DC, USA, 1996. IEEE Computer Society.
- [20] Yu Qiao and N. Minematsu. A study on invariance of f-divergence and its application to speech recognition. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 58(7):3884–3890, July 2010.
- [21] Yi-Ou Li, Tülay Adalı, Wei Wang, and Vince D. Calhoun. Joint blind source separation by multiset canonical correlation analysis. *Trans. Sig. Proc.*, 57(10):3918–3929, October 2009.
- [22] Harold Hotelling. Relations Between Two Sets of Variates. *Biometrika*, 28(3/4):321–377, 1936.
- [23] Liang Sun, Shuiwang Ji, and Jieping Ye. A least squares formulation for canonical correlation analysis. In *Proceedings of the 25th international conference on Machine learning*, ICML '08, pages 1024–1031, New York, NY, USA, 2008. ACM.
- [24] Magnus Borga. *Learning Multidimensional Signal Processing*. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations No. 531, Linköping University, Sweden, 1998.

- [25] David R. Hardoon, Sandor Szedmak, and John Shawe-Taylor. Canonical correlation analysis; an overview with application to learning methods. Technical report, Royal Holloway, University of London, May 2003.
- [26] Marco Loog, Bram van Ginneken, and Robert P.W. Duin. Dimensionality reduction of image features using the canonical contextual correlation projection. *Pattern Recognition*, 38(12):2409 – 2418, 2005.
- [27] Björn Johansson. On classification: simultaneously reducing dimensionality and finding automatic representation using canonical correlation. Technical report, 2001.
- [28] Matthew Barker and William Rayens. Partial least squares for discrimination. *Journal of Chemometrics*, 17(3):166–173, 2003.
- [29] Olcay Kursun, Ethem Alpaydin, and Oleg V. Favorov. Canonical correlation analysis using within-class coupling. *Pattern Recogn. Lett.*, 32(2):134–144, January 2011.
- [30] Tingkai Sun and Songcan Chen. Class label versus sample label-based {CCA}. *Applied Mathematics and Computation*, 185(1):272 – 283, 2007.
- [31] D.F. Andrews and A.M. Herzberg. Iris data. In *Data*, Springer Series in Statistics, pages 5–8. Springer New York, 1985.
- [32] R. A. Fisher. The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Annals of Eugenics*, 7(7):179–188, 1936.
- [33] Thomas M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 1997.
- [34] A.M. Martinez and R. Benavente. The ar face database. In *CVC Tech. Report #24*, 1998.
- [35] Hyunju Maeng, Shengcai Liao, Dongoh Kang, Seong-Whan Lee, and Anil K. Jain. Nighttime face recognition at long distance: Cross-distance and cross-spectral matching. In *Proceedings of the 11th Asian Conference on Computer Vision - Volume Part II, ACCV’12*, pages 708–721, Berlin, Heidelberg, 2013. Springer-Verlag.
- [36] Dongoh Kang, Hu Han, Anil K. Jain, and Seong-Whan Lee. Nighttime face recognition at large standoff: Cross-distance and cross-spectral matching. *Pattern Recognition*, 47(12):3750–3766, 2014.
- [37] C. L. Blake and C. J. Merz. Uci repository of machine learning databases, 1998. <http://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/Iris>.
- [38] Matthew Turk and Alex Pentland. Eigenfaces for recognition. *J. Cognitive Neuroscience*, 3(1):71–86, January 1991.

- [39] Supriya Kapoor, Shruti Khanna, and Rahul Bhatia. Facial gesture recognition using correlation and mahalanobis distance. *CoRR*, abs/1003.1819, 2010.
- [40] John M. Butler. Short tandem repeat dna internet database, 2012. <http://www.cstl.nist.gov/biotech/strbase/>.
- [41] J.M. Butler. *Fundamentals of Forensic DNA Typing*. Academic Press/Elsevier, 2009.
- [42] Ferdinand Samaria and Andy Harter. Parameterisation of a stochastic model for human face identification. In *WACV*, pages 138–142. IEEE, 1994.
- [43] John Wright, Allen Y. Yang, Arvind Ganesh, Shankar S. Sastry, and Yi Ma. Robust Face Recognition via Sparse Representation. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 31(2):210–227, February 2009.
- [44] H. Han, B. F. Klare, K. Bonnen, and A. K. Jain. Matching composite sketches to face photos: A component-based approach. *Information Forensics and Security, IEEE Transactions on*, 8(1):191 –204, jan. 2013.
- [45] Qingshan Liu, Xiaou Tang, Hongliang Jin, Hanqing Lu, and Songde Ma. A nonlinear approach for face sketch synthesis and recognition. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, volume 1, pages 1005 – 1010 vol. 1, june 2005.
- [46] Jr. Uhl, R.G. and N. da Vitoria Lobo. A framework for recognizing a facial image from a police sketch. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1996. Proceedings CVPR '96, 1996 IEEE Computer Society Conference on*, pages 586 –593, jun 1996.
- [47] L. Wiskott, J.-M. Fellous, N. Kuiger, and C. von der Malsburg. Face recognition by elastic bunch graph matching. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 19(7):775 –779, jul 1997.
- [48] Christoph von der Malsburg, Werner von Seelen, Jan C. Vorbrüggen, and Bernhard Sendhoff, editors. *Artificial Neural Networks - ICANN 96, 1996 International Conference, Bochum, germany, July 16-19, 1996, Proceedings*, volume 1112 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 1996.
- [49] Xiaou Tang and Xiaogang Wang. Face sketch synthesis and recognition. In *Computer Vision, 2003. Proceedings. Ninth IEEE International Conference on*, pages 687 –694 vol.1, oct. 2003.
- [50] Xiaogang Wang and Xiaou Tang. Face photo-sketch synthesis and recognition. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 31(11):1955 –1967, nov. 2009.

- [51] H.K. Galoogahi and T. Sim. Inter-modality face sketch recognition. In *Multimedia and Expo (ICME), 2012 IEEE International Conference on*, pages 224 –229, july 2012.
- [52] Wei Zhang, Xiaogang Wang, and Xiaoou Tang. Coupled information-theoretic encoding for face photo-sketch recognition. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on*, pages 513 –520, june 2011.
- [53] A. Sharma and D.W. Jacobs. Bypassing synthesis: Pls for face recognition with pose, low-resolution and sketch. In *Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2011 IEEE Conference on*, pages 593 –600, june 2011.
- [54] B. Klare, Zhifeng Li, and A.K. Jain. Matching forensic sketches to mug shot photos. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 33(3):639 –646, march 2011.
- [55] Xuan Zou, Josef Kittler, and Kieron Messer. Illumination invariant face recognition: A survey. In *Biometrics: Theory, Applications, and Systems, 2007. BTAS 2007. First IEEE International Conference on*, pages 1–8, Sept 2007.
- [56] Di Huang, Yunhong Wang, and Yiding Wang. A robust method for near infrared face recognition based on extended local binary pattern. In *Proceedings of the 3rd International Conference on Advances in Visual Computing - Volume Part II, ISVC'07*, pages 437–446, Berlin, Heidelberg, 2007. Springer-Verlag.
- [57] Soma Biswas, Kevin W. Bowyer, and Patrick J. Flynn. Multidimensional scaling for matching low-resolution face images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 34(10):2019–2030, October 2012.
- [58] Bo Li, Hong Chang, Shiguang Shan, and Xilin Chen. Low-resolution face recognition via coupled locality preserving mappings. *Signal Processing Letters, IEEE*, 17(1):20–23, 2010.
- [59] P.H. Hennings-Yeomans, S. Baker, and B.V.K.V. Kumar. Simultaneous super-resolution and feature extraction for recognition of low-resolution faces. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 2008. CVPR 2008. IEEE Conference on*, pages 1–8, 2008.
- [60] S. Biswas, E. Ortiz, and K.W. Bowyer. Multidimensional scaling for matching low-resolution face images. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 34(10):2019–2030, 2012.
- [61] Michael Elad and Arie Feuer. Super-resolution reconstruction of image sequences. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 21(9):817–834, September 1999.

- [62] William T. Freeman and Egon C. Pasztor. Learning low-level vision. *International Journal of Computer Vision*, 40:2000, 2000.
- [63] Ce Liu, Heung-Yeung Shum, and Changshui Zhang. A two-step approach to hallucinating faces: Global parametric model and local nonparametric model. In *CVPR (1)*, pages 192–198. IEEE Computer Society, 2001.
- [64] B.K. Gunturk, A.U. Batur, Y. Altunbasak, M.H. Hayes, and R.M. Mersereau. Eigenface-domain super-resolution for face recognition. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 12(5):597–606, May 2003.
- [65] Pablo H. Hennings-Yeomans, Simon Baker, and B.V.K. Vijaya Kumar. Simultaneous super-resolution and feature extraction for recognition of low-resolution faces. *2013 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 0:1–8, 2008.
- [66] Jing Jiang. A Literature Survey on Domain Adaptation of Statistical Classifiers. Available from: http://sifaka.cs.uiuc.edu/jiang4/domain_adaptation/survey/da_survey.html, March 2008.
- [67] Oscar Beijbom. Domain adaptations for computer vision applications. *CoRR*, abs/1211.4860, 2012.
- [68] Mahsa Baktashmotlagh, Mehrtash T. Harandi, Brian C. Lovell, and Mathieu Salzmann. Unsupervised domain adaptation by domain invariant projection. In *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Computer Vision, ICCV '13*, pages 769–776, Washington, DC, USA, 2013.
- [69] Sinno Jialin Pan, Ivor W. Tsang, James T. Kwok, and Qiang Yang. Domain adaptation via transfer component analysis. In *Proceedings of the 21st International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI'09*, pages 1187–1192, San Francisco, CA, USA, 2009.
- [70] J. Huang, A.J. Smola, A. Gretton, K. Borgwardt, and B. Schölkopf. Correcting sample selection bias by unlabeled data. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, volume 19. The MIT Press, Cambridge, MA, 2007.
- [71] Lorenzo Bruzzone and Mattia Marconcini. Domain adaptation problems: A dasvm classification technique and a circular validation strategy. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 32(5):770–787, May 2010.
- [72] Lixin Duan, Ivor W. Tsang, and Dong Xu. Domain transfer multiple kernel learning. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 34(3):465–479, March 2012.

ÖZGEÇMİŞ

KİMLİK BİLGİLERİ

Adı Soyadı: Bekir Şen

Doğum Yeri: Mersin, 1979

Medeni Hali: Evli

E-posta: bekir.sen@gmail.com

EĞİTİM

Lise: Mersin Tevfik Sırrı Gür Lisesi, 1996

Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, 2001

Yüksek Lisans: Hacettepe Üniversitesi, Elektrik ve Elektronik Mühendisliği Bölümü, 2005

YABANCI DİL DÜZEYİ

İngilizce: Profesyonel Yeterlilik

İŞ DENEYİMİ

Karel Elektronik, Tasarım Lideri, 2011 -

Synopsys Araştırma-Geliştirme, Uzman Mühendis, 2006 - 2011

Tübitak-SAGE, Araştırmacı, 2006 - 2006

TSK, Teğmen, 2005 - 2006

Tübitak-SAGE, Araştırmacı, 2002 - 2005

Aselsan, Yazılım Mühendisi, 2001 - 2002

PROFESYONEL DENEYİM ALANLARI

- Sinyal İşleme
- Görüntü İşleme
- Yerbulum ve Navigasyon
- Simülasyon
- Gömülü Yazılım

TEZDEN ÜRETİLMİŞ PROJELER VE BÜTÇESİ

-

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

- Şen, B., Özkazanç, Y., Cross identification: Method and application, *20th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)*, 18-20 Nisan, Muğla, Türkiye, **2012**
- Şen, B., Özkazanç, Y., Face-Sketch Recognition Using Canonical Correlation Analysis, *21th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU)*, 24-26 Nisan, Lefkoşa, K.K.T.C, **2013**
- Şen, B., Özkazanç, Y., Face Recognition from Low Resolution Images Using Canonical Correlation Analysis, *1st International Symposium on Digital Forensics and Security (ISDFS)*, 20-21 Mayıs, Elazığ, Türkiye, **2013**

- Şen, B., Özkazaç, Y., Face Recognition from Low Resolution Images Using Canonical Correlation Analysis, *Türkiye Bilişim Vakfı Bilgisayar Bilimleri ve Mühendisliği Dergisi*, Ekim 2014

TEZDEN ÜRETİLMİŞ TEBLİĞ VE/VEYA POSTER SUNUMU İLE KATILDIĞI TOPLANTILAR

-



A. EK

İddia

$\mathbf{m}$ vektör, $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{B}$ pozitif tanımlı kare matrisler olmak üzere;

$$\mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} > \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{m} \Rightarrow |\mathbf{A}| > |\mathbf{B}| \quad (\text{A.1})$$

İspat

$$\begin{aligned} & \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} > \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{m} \\ & \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{A} \mathbf{m} \mathbf{m}^T > \mathbf{m} \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \\ & M \triangleq \mathbf{m} \mathbf{m}^T \Rightarrow |\mathbf{M}| |\mathbf{A}| |\mathbf{M}^T| > |\mathbf{M}| |\mathbf{B}| |\mathbf{M}^T| \\ & |\mathbf{M}|^2 |\mathbf{A}| > |\mathbf{M}|^2 |\mathbf{B}| \\ & \Rightarrow |\mathbf{A}| > |\mathbf{B}| \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

B. EK

İddia

Pozitif tanımlı matrisler için, matrislerin toplamının determinanı, her bir matrisin determinatlarının toplamından daha büyüktür

$$|\mathbf{A} + \mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| \quad (\text{B.1})$$

İspat

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{I}) \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{C} &\triangleq (\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{I}) \\ \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} (\mathbf{C} + \mathbf{I}) \mathbf{B}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

olarak tanımlanabilir.

λ_j : $\mathbf{C}$ matrisinin özdeğerleri olmak üzere, $\mathbf{C}$ pozitif tanımlı bir matris ise,

$$|\mathbf{C} + \mathbf{I}| = \prod_j (\lambda_j + 1) \geq 1 + \prod_j \lambda_j = 1 + |\mathbf{C}| \quad (\text{B.3})$$

ifadesi her zaman yazılabilir.

Eşitlik B.2 ve Eşitlik B.3 birleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &= |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}} |\mathbf{C} + \mathbf{I}| |\mathbf{B}|^{\frac{1}{2}} \\ |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &= |\mathbf{B}| |\mathbf{C} + \mathbf{I}| \\ &\geq |\mathbf{B}| (1 + |\mathbf{C}|) \\ &= |\mathbf{B}| (1 + |\mathbf{B}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{B}^{-\frac{1}{2}}|) \\ &= |\mathbf{B}| (1 + |\mathbf{A}|/|\mathbf{B}|) \\ &= |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| \\ \Rightarrow |\mathbf{A} + \mathbf{B}| &\geq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

olarak gösterilmiş olur.