GAZİ ÜNİVERSİTESİ

Gazi

1926

ÜRETİLEN ÖLÇÜLER VE İNTEGRALLER

Çetin Cemal ÖZEKEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2016

Çetin Cemal ÖZEKEN tarafından hazırlanan "ÜRETİLEN ÖLÇÜLER VE İNTEGRALLER" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ...…………………

Başkan : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Üye : Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………...

Tez Savunma Tarihi: 20/12/2016

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………….…….

Prof. Dr. Hadi GÖKÇEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Çetin Cemal ÖZEKEN

20/12/2016

ÜRETİLEN ÖLÇÜLER VE İNTEGRALLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Çetin Cemal ÖZEKEN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2016

ÖZET

Bu çalışmada, Newtonyan olmayan kalkülüsün yapıtaşı olan, α-aritmetik adı verilen sistemler daha geniş bir perspektiften incelenmiş ve örneklerle zenginleştirilmiştir. Üretilen ölçü ve üretilen dış ölçü kavramları tanımlanmış ve bazı özelliklerinden bahsedilmiştir. Bir sonraki bölümde ise üretilen Lebesgue integrali tanımlanmış, integrallenebilirlik kavramı irdelenmiş, bunlara ek olarak da integral teorisinde önemli bir yere sahip olan Levi teoremi, Fatou Lemması ve Lebesgue Basın Yakınsaklık Teoremi bu yeni integrale göre yorumlanmıştır. Ayrıca üretilen Riemann integrali tanımlanmış ve son olarak da üretilen Lebesgue integrali ile arasındaki ilişki incelenmiştir.

Bilim Kodu	:	20404
Anahtar Kelimeler	:	Newtonyan olmayan kalkülüs, α-aritmetik, üretilen ölçü, üretilen Lebesgue integrali, üretilen Riemann integrali.
Sayfa Adedi	:	67
Danışman	:	Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK

GENERATED MEASURES AND INTEGRATION

(M. Sc. Thesis)

Çetin Cemal ÖZEKEN

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

December 2016

ABSTRACT

In this study, systems called α-arithmetic, which are building blocks of non-Newtonian calculus were investigated in a deep perspective and enriched with examples. Generated measure and generated outer meusere were defined, and also some properties were mentioned. Generated Lebesgue measure was defined. The concept of integrability was scrutinized. Besides, Levi's Theorem, Fatou's Lemma and the Lebesgue Dominated Convergence Theorem, which has an important role in integral theory, were interpreted according to these new integrals. Furthermore, generated Riemann integral was defined and finally the relation between generated Riemann integral and generated Lebesgue integral was examined.

Science Code	:	20404
Key Words	:	Non-Newtonian calculus, α-arithmetic, generated measure, generated Lebesgue integral, generated Riemann integral.
Page Number	:	67
Supervisor	:	Assoc. Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren, ve bu süreçte karşılaştığım her problemde yardımına başvurduğum değerli hocam Doç. Dr. Cüneyt ÇEVİK'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca manevi destekleriyle her zaman yanımda yer alan, başta annem olmak üzere bütün aileme, dostlarıma ve son olarak da, bilimi ve bilim insanını destekleyen TÜBİTAK'a bana sağladığı katkılardan dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}_{\alpha}$	α-üretecinin görüntü kümesi
$\overset{\alpha}{+}$	α-toplama işlemi
$\overset{\alpha}{-}$	α-çıkarma işlemi
$\overset{\alpha}{\cdot}$	α-çarpma işlemi
$\overset{\alpha}{/}$	α-bölme işlemi
$\overset{\alpha}{\leqslant}$	α-sıralama bağıntısı
$\mathbf{0}_{\alpha}$	α-toplama işleminin birim elemanı
$\mathbf{1}_{\alpha}$	α-çarpma işleminin birim elemanı
$\mathbb{R}_{\alpha}^{+}$	α-üretecinin görüntü kümesinin pozitif kısmı
$\mathbb{R}_{\alpha}^{-}$	α-üretecinin görüntü kümesinin negatif kısmı
$\overset{\alpha}{\max}\{x,y\}$	x ve y sayılarının α-maksimumu
$\overset{\alpha}{\min}\{x,y\}$	x ve y sayılarının α-minimumu
$x_n \overset{\alpha}{\uparrow}$	α-artan $\{x_n\}$ dizisi
$x_n \overset{\alpha}{\downarrow}$	α-azalan $\{x_n\}$ dizisi
$\overset{\alpha}{\sup} x_n$	$\{x_n\}$ dizisinin α-supremumu
$\overset{\alpha}{\inf} x_n$	$\{x_n\}$ dizisinin α-infimumu
$x^{n_{\alpha}}$	x sayısının n. mertebeden α-kuvveti
$\overset{\alpha}{\sqrt[n]{x}}$	x sayısının n. mertebeden α-kökü
$\lvert\cdot\rvert_{\alpha}$	α-mutlak değer
α-lim	α-limit
∞_{α}	α-sonsuz
$-\infty_{\alpha}$	negatif α-sonsuz
$\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	α-seri
$\mathcal{S}$	yarıhalka
$\mathcal{R}$	halka

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{\mathcal{A}}$	cebir
$\boldsymbol{\mathcal{D}}$	δ-halka
$\boldsymbol{\mathcal{P}}$	σ-halka
$\boldsymbol{\Sigma}$	σ-cebir
$\boldsymbol{\mathcal{F}}$	sınıf
$\boldsymbol{\mathcal{M}}$	monoton sınıf
$\boldsymbol{sr(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen yarıhalka
$\boldsymbol{r(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen halka
$\boldsymbol{a(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen cebir
$\boldsymbol{\delta r(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen δ-halka
$\boldsymbol{\sigma r(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen σ-halka
$\boldsymbol{\sigma a(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen σ-cebiri
$\boldsymbol{\mathcal{M}(\mathcal{F})}$	$\mathcal{F}$ sınıfı tarafından üretilen monoton sınıf
$\boldsymbol{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$	Borel cebiri
$\boldsymbol{\mathcal{B}(\mathbb{R}_\alpha)}$	α-Borel cebiri
$\boldsymbol{(a,b)_\alpha}$	α-açık aralık
$\boldsymbol{[a,b]_\alpha}$	α-kapalı aralık
$\boldsymbol{\mu^\alpha}$	α-ölçü
$\boldsymbol{(\Omega,\mathcal{S},\mu^\alpha)}$	α-ölçü uzayı
$\boldsymbol{\mu^{*\alpha}}$	α-dış ölçü
$\boldsymbol{\Lambda^\alpha}$	bütün α-ölçülebilir kümelerin koleksiyonu
$\boldsymbol{P(\Omega)}$	Ω kümesinin kuvvet kümesi
$\boldsymbol{\chi_A^\alpha}$	A kümesinin α-karekteristik fonksiyonu
$\boldsymbol{\alpha\text{-}\int_\Omega f d\mu^\alpha}$	f fonksiyonunun α-Lebesgue integrali
$\boldsymbol{S_{*\alpha}(f,P)}$	f fonksiyonunun P parçalanışına göre α-alt toplamı
$\boldsymbol{S^{*\alpha}(f,P)}$	f fonksiyonunun P parçalanışına göre α-üst toplamı
$\boldsymbol{I_{*\alpha}(f)}$	$S_{*\alpha}(f,P)$ α-alt toplamlarının α-supremumu
$\boldsymbol{I^{*\alpha}(f)}$	$S^{*\alpha}(f,P)$ α-üst toplamlarının α-infimumu
$\boldsymbol{\alpha\text{-}R_f(P,T)}$	P parçalanışı ile ilişkilendirilen α-Riemann toplamı

1. GİRİŞ

Aritmetik denildiğinde ilk olarak, sayılar arasındaki ilişkilerin açıklanmasında ve bu ilişkiler yardımıyla ele alınan problemlerin çözülmesinde geleneksel işlemler (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) kullanılarak ölçme ve hesaplama yapmak akla gelir. Ancak daha genel ve teknik bir ifadeyle aritmetik, reel sayılar kümesinin bir alt kümesi üzerinde sıralı cisim şartlarını sağlayan bir sistemdir. Kümeyi sıralı cisim yapan işlemler (toplama, çarpma) ve sıralama bağıntısı yaygın bilinenlerden çok farklı tanımlanabilir. Bu tanımlamalar, reel sayılar kümesinden aritmetiğin kurulacağı alt kümesine birebir olarak eşlenen ve adına "üreteç" denilen dönüşümlerle yapılır. Bu dönüşümlerin artan olanları ile üretilen aritmetikler ve bu aritmetikler kullanılarak oluşturulan kalkülüsler Grossman ve Katz'ın 1972 yılında yayımlanan *Non-Newtonian Calculus* isimli kitabında tanıtılmıştır [1]. Klasik kalkülüse alternatif olarak geometrik, anageometrik ve bigeometrik gibi farklı kalkülüs çeşitlerini adlandırıp incelemişlerdir. Bu kalkülüslerin sayısının sonsuz olduğundan ve isteyen herkesin kendi kalkülüsünü elde edebileceğinden bahsetmişlerdir. Kitaplarında klasik kalkülüsün odaklarından olan limit, türev ve integral tanımlarının bu yeni kalkülüslerde nasıl farklılaştığını göstermişlerdir. Aritmetiklerin cebirsel olarak denk olduğunu görmekle birlikte, bu aritmetiklerin oluşturduğu kalkülüslerle daha basit fizik kurallarının elde edilebileceğini ifade etmişlerdir. Ayrıca 1983 yılında yayımlanmış olan kitabında Grossman, bir önceki kitabında olduğu gibi yeni kalkülüslerde kordinat sisteminin değiştiğinden ve uzaklık kavramının farklılaştığından bahsetmiştir. Kitabında bigeometrik kalkülüsü detaylı bir şekilde incelemiş, bu yeni kalkülüs vasıtasıyla bigeometrik vektör uzayını ve bigeometrik karmaşık sayıları tanımlamıştır [2]. Sonraki çalışmalarda klasik kalkülüsün hemen hemen her kavramının yeni elde edilenlere göre tekrar yorumlanabileceği ve bu sayede mühendislik ve fizik alanında bir çok kolaylık elde edilebileceği iki kitapta da vurgulanmıştır [1], [2]. Bashirov, Kurpınar ve Özyapıcı 2008'de yayımlanan makalelerinde geometrik kalkülüsü bir başka deyişle *çarpımsal (multiplicative) kalkülüsü* ele almışlar ve çarpımsal kalkülüste türev ve integralin özelliklerini vermiş ayrıca çeşitli uygulamalarından bahsetmişlerdir. Farklı aritmetikleri elde etmek, koordinat sistemlerini de değiştirdiğinden, yapılan işlerin kutupsal veya küresel koordinat sistemlerine duyulan ihtiyaca benzer başka bir ihtiyaca cevap verdiğini savunmuşlardır [3]. Yine 2008 de Kurpınar ve Özyapıcı benzer bir çalışma ile çarpımsal kalkülüsde elde ettikleri farklı sonuçları paylaşmışlardır [4]. Takip eden çalışmalarda karmaşık sayılar kümesine bu yeni aritmetiklerden bazıları uygulanarak çarpımsal tipte karmaşık kalkülüs çalışılmış ve bunlar üzerinde çeşitli uygulamalar yapılmıştır [5–7]. Çarpımsal diferensiyel denklemlerin çözümleri ve denklemlerin modellemeleri ile ilgili de bir çok çalışma yapılmıştır [8–11]. Ayrıca Çakmak ve Başar çalışmalarında Newtonyan olmayan dizi uzaylarında bazı yeni çıkarımlarda bulunmuşlardır [12]. Newtonyan olmayan metrik uzaylarda büzülme dönüşümleri ve bu dönüşümlerin sabit noktaları üzerine de çalışılmıştır [12–14].

Newtonyan olmayan kalkülüslerde Riemann integrali ve onun özelliklerinden sıklıkla bahsedilmiştir [1–7, 12, 15]. Ancak bu integralin daha genel hali olan Lebesgue integralinden bahsedilmemiştir. Dolayısıyla bu çalışmadaki amacımız Newtonyan olmayan Lebesgue integralini ele almak ve onun Newtonyan olmayan Riemann integraliyle olan ilişkisini incelemektir. Bunun için ilk önce Newtonyan olmayan ölçü teorisine ihtiyacımız vardır. Yeni tip ölçü teorisi ve integral teorisi oluşturulurken Aliprantis ve Burkinshaw tarafından yazılmış olan Reel Analiz, Endre Pap tarafından derlenen Handbook of Measure Theory başlıklı kitaplardan fazlasıyla faydalanılmıştır [16], [17].

Bu çalışmada, üreteç kavramı daha genel olarak ele alınacak ve sadece artan üreteçler değil, monoton dahi olmayan üreteç örnekleri ile konuya daha geniş bir perspektiften bakılacaktır. Dolayısıyla çalışmamız boyunca "Newtonyan olmayan" ifadesinin yerine "üretilen" ifadesinin kullanılması tercih edildi. "Newtonyan olmayan Lebesgue integrali" ve "Newtonyan olmayan Riemann integrali" ifadeleri yerine, üreteçlerin genel durumları göz önüne alınarak "üretilen Lebesgue integrali" ve "üretilen Rieman integrali" veya "α-Lebesgue integrali" ve "α-Rieman integrali" ifadeleri kullanıldı. Tezin ikinci kısmında α-aritmetik, α-ölçü ve α-dış ölçü tanımları verilmiş ve bazı özellikleri açıklanmıştır. Üçüncü kısımda α-Lebesgue integrali tanımlanmış, özellikleri verilmiş ve bu anlamda integrallenebilirlik kavramı üzerinde durulmuştur. Son kısımda ise, yukarıda bahsettiğimiz gibi α-Lebesgue integrali ve α-Riemann integrali karşılaştırılmış ve aralarındaki ilişki incelenmiştir.

2. α-ARİTMETİK

Aritmetik, $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesinde sıralı cisim şartlarının tamamını sağlayan bir sistemdir. Birbirine izomorf, yani yapısal olarak birbirine denk olan sonsuz sayıda aritmetik vardır. Her ne kadar herhangi iki aritmetik birbirine izomorf olsa da kullanım olarak farklılıkları vardır. Bir α üreteci, tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}$'nin ($\mathbb{R}_\alpha$ ile gösterilen) bir alt kümesi olan, birebir bir fonksiyondur. Her üreteçten bir tek aritmetik elde edilir, tersine her aritmetik bir tek üreteç tarafından üretilir. Üretecin temel görevi $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış olan, başta ikili işlemler ve sıralama olmak üzere, kavramları farklılaştırmaktır. $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α üreteci yardımıyla tanımlanan temel olarak dört çeşit ikili işlemden bahsedilebilir. Bunlardan ikisi olan *α-toplama* ve *α-çarpma* işlemleri, her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için

$$\begin{aligned} x \overset{\alpha}{+} y &= \alpha(\alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y)) \\ x \overset{\alpha}{\cdot} y &= \alpha(\alpha^{-1}(x).\alpha^{-1}(y)) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu işlemler göz önüne alınınca, $0_\alpha = \alpha(0)$ sayısı α-toplamaya göre, $1_\alpha = \alpha(1)$ sayısı ise α-çarpmaya göre etkisiz elemanlardır. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha$ için $\overset{\alpha}{-}x = \alpha(-1) \overset{\alpha}{\cdot} x = \alpha(-\alpha^{-1}(x))$ sayısına x sayısının *α-negatifi* veya *α-toplama işlemine göre tersi;* herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha \backslash 0_\alpha$ için

$$x^{-1_\alpha} = 1 \overset{\alpha}{/} x = \alpha(1/\alpha^{-1}(x))$$

sayısına ise x sayısının *α-çarpma işlemine göre tersi* denir. Yukarıda tanımlanan işlemler vasıtasıyla $\mathbb{R}_\alpha$ üzerindeki *α-çıkarma ve α-bölme* işlemleri her x ve y için

$$\begin{aligned} & x \overset{\alpha}{-} y = x \overset{\alpha}{+} (\overset{\alpha}{-} y) = \alpha(\alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y)) && x, y \in \mathbb{R}_\alpha \\ & x \overset{\alpha}{/} y = x \overset{\alpha}{\cdot} (1_\alpha \overset{\alpha}{/} y) = \alpha\left(\alpha^{-1}(x)/\alpha^{-1}(y)\right) && x \in \mathbb{R}_\alpha \text{ ve } y \in \mathbb{R}_\alpha \backslash 0_\alpha \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesi üzerinde α üreteci yardımıyla bilinenden farklı sıralamalar tanımlanabilir. Ancak üretecin artan veya azalan olması ya da monotonluğu önemli bir rol oynar. Elde edilen sıralama bilinen sıralama ile farklılık gösterebileceği gibi çakışadabilir. Bilhassa α üreteci monoton iken her $x, y \in \mathbb{R}_\alpha$ için *α-sıralama*

$$x \overset{\alpha}{\leqslant} y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \alpha^{-1}(x) \leqslant \alpha^{-1}(y) & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \alpha^{-1}(x) \geqslant \alpha^{-1}(y) & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases} \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Yukarıda bahsedilen işlemler ve sıralama ile $\mathbb{R}_\alpha$ görüntü kümesi tam sıralı bir cisim olur. Daha önceden de bahsettiğimiz gibi α üretecinin monoton olmadığı durumlarda da α-sıralama tanımı yapılabilir. Ancak bu tanımlama $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin uygun alt kümelerine parçalanışı ile elde edilir (Bu alt kümelere α üretecinin kısıtlanışının monoton olması halinde yukarıdakine benzer bir sıralama oluşturulur). Bu durumda da $\mathbb{R}_\alpha$ tam sıralı bir cisim olur.
$\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde α üreteci vasıtasıyla tanımladığımız işlemler ve sıralama ile oluşturduğumuz bu tam sıralı cisimlere *α-aritmetik* adı verilir.
Şimdi bir kaç adet α-aritmetik örneği inceleyelim.

Örnek

(a) I Birim fonksiyonu $\mathbb{R}_I = \mathbb{R}$ üzerinde klasik aritmetiği üretir.
(b) Üstel fonksiyon exp ise $\mathbb{R}_{\exp} = \mathbb{R}^+$ üzerinde *geometrik aritmetiği* üretir. Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $x \overset{\exp}{+} y = xy$, $x \overset{\exp}{\cdot} y = x^{\ln y} = y^{\ln x}$ şeklinde tanımlanan ikili işlemler ve $x \overset{\exp}{\leqslant} y \Leftrightarrow \ln x \leqslant \ln y$ ile verilen sıralama bağıntısıyla $\mathbb{R}^+$ tam sıralı bir cisimdir.
(c) Üreteç

$$\alpha(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -\sqrt{(-x)} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olarak alınırsa elde edilen aritmetiğe *quadratik aritmetik* adı verilir.
Bu durumda $x \overset{\alpha}{+} y = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x \overset{\alpha}{\cdot} y = xy$ ikili işlemleri ve $x \overset{\alpha}{\leqslant} y \Leftrightarrow x \leqslant y$ sıralama bağıntısı ile $\mathbb{R}$ tam sıralı bir cisimdir.
(d) $\mathbb{R}$ üzerinde *q-aritmetik* denilen sonsuz sayıda aritmetik tanımlayabiliriz. Sıfırdan farklı herhangi bir q reel sayısı için $\mathbb{R}$'den $\mathbb{R}$'ye

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^{1/q} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -(-x)^{1/q} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlı α üreteci ele alınsın. Bu üretecin tersinin

$$\alpha^{-1}(x) = \begin{cases} x^q & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -(-x)^q & , \quad x < 0 \end{cases}$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada q farklı değerler aldıkça birbirinden farklı sonsuz sayıda α-aritmetik tanımlanabilir. Örneğin $q = 1$ ise α-aritmetik bildiğimiz klasik aritmetik ile çakışırken, $q = 2$ iken ise quadratik aritmetik denilen aritmetik elde edilir. Ayrıca $q = -1$ olduğu durumda ise *harmonik aritmetik* üretilmiş olur.

Şimdi artan olmayan birkaç üreteç örneğini ve bunlara göre elde edilen işlemleri ve sıralamaları inceleyelim.

Not

Bir α üreteci artan, x ve y ise $\mathbb{R}_\alpha$ dan alınan herhangi iki eleman olmak üzere, $x \overset{\alpha}{\leqslant} y$ olması için gerek ve yeter şart $x \leqslant y$ olmasıdır.

Örnek

(a) Bir α üreteci için $\alpha(x) = \begin{cases} -x & , \quad x \in [-1, 1] \\ x & , \quad \text{diğer yerler} \end{cases}$ olsun. Bu durumda ikili işlemler ve sıralama

$$x \overset{\alpha}{+} y = \begin{cases} -x - y & , \quad x, y \in [-1, 1] \\ x - y & , \quad x \notin [-1, 1], y \in [-1, 1] \\ y - x & , \quad x \in [-1, 1], y \notin [-1, 1] \\ x + y & , \quad x, y \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$x \overset{\alpha}{\cdot} y = \begin{cases} -xy & , \quad x \in [-1, 1], y \notin [-1, 1] \text{ veya } x \notin [-1, 1], y \in [-1, 1] \\ xy & , \quad x, y \in [-1, 1] \text{ veya } x, y \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$x \overset{\alpha}{\leqslant} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant y & , \quad x, y \notin [-1, 1] \\ x \geqslant y & , \quad x, y \in [-1, 1] \end{cases} \quad \text{biçiminde tanımlanır.}$$

(b) Üretecimiz $\alpha(x)=\begin{cases} 1/x & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

olarak alınırsa bu durumda ikili işlemler ve sıralama aşağıdaki gibi olur.

$$x \overset{\alpha}{+} y = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & , \quad x+y\neq 0 \\ 0 & , \quad x+y=0 \end{cases}$$

$$x \overset{\alpha}{\cdot} y = xy$$

$$x \overset{\alpha}{\leqslant} y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant x & , \quad x,y<0 \text{ veya } x,y>0 \\ x \leqslant y & , \quad x \leqslant 0 \text{ ve } 0 \leqslant y \end{cases}$$

Bu üreteç daha önceden de bahsedilmiş olan harmonik aritmetiği üretir.

(c) Üreteç $\alpha(x)=\begin{cases} 2x & , \quad x\in\mathbb{Q} \\ -x & , \quad x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$ olarak alınırsa $\mathbb{R}_\alpha=\mathbb{R}$ olur. Ayrıca kolaylıkla

$$\alpha^{-1}(x)=\begin{cases} x/2 & , \quad x\in\mathbb{Q} \\ -x & , \quad x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

olduğu görülebilir. Bununla birlikte ikili işlemler ve sıralama aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x \overset{\alpha}{+} y = \begin{cases} x+y & , \quad x,y\in\mathbb{Q} \text{ veya } x,y\notin\mathbb{Q}; x+y\notin\mathbb{Q} \\ -2(x+y) & , \quad x,y\notin\mathbb{Q}; x+y\in\mathbb{Q} \\ y-\dfrac{x}{2} & , \quad x\in\mathbb{Q}, y\notin\mathbb{Q} \\ x-\dfrac{y}{2} & , \quad x\notin\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$x \overset{\alpha}{\cdot} y = \begin{cases} \dfrac{xy}{2} & , \quad x,y\in\mathbb{Q} \text{ veya } x\notin\mathbb{Q}, y\in\mathbb{Q} \text{ veya } x\in\mathbb{Q}, y\notin\mathbb{Q} \\ 2xy & , \quad x,y\notin\mathbb{Q}; xy\in\mathbb{Q} \\ -xy & , \quad x,y\notin\mathbb{Q}; xy\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$x \overset{\alpha}{\leqslant} y \Leftrightarrow \begin{cases} y \leqslant x & , \quad x,y<0 \text{ veya } x,y>0 \\ 0 \leqslant 0 & , \quad x,y=0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde verilen α-sıralamasının monoton olması durumunda, herhangi iki x ve y elemanının büyüğü ve küçüğü sırasıyla

$$\overset{\alpha}{\max}\{x,y\} = \begin{cases} \max\{x,y\} & , \ \alpha \text{ artan} \\ \min\{x,y\} & , \ \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \overset{\alpha}{\min}\{x,y\} = \begin{cases} \min\{x,y\} & , \ \alpha \text{ artan} \\ \max\{x,y\} & , \ \alpha \text{ azalan} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır ve yine bu sıralamaya göre $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin herhangi bir $\{x_n\}$ dizisinin azalmayan veya artmayan olması sırasıyla

$$x_n \overset{\alpha}{\uparrow} = \begin{cases} x_n \uparrow & , \ \alpha \text{ artan} \\ x_n \downarrow & , \ \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad \text{ve} \quad x_n \overset{\alpha}{\downarrow} = \begin{cases} x_n \downarrow & , \ \alpha \text{ artan} \\ x_n \uparrow & , \ \alpha \text{ azalan} \end{cases}$$

şeklinde gösterilir. Ayrıca bir $\{x_n\}$ dizisinin (eğer mevcutsa) α-*supremumu* ve α-*infimumu* sırasıyla

$$\overset{\alpha}{\sup} x_n = \begin{cases} \sup x_n & , \ \alpha \text{ artan} \\ \inf x_n & , \ \alpha \text{ azalan} \end{cases} \quad \text{ve} \quad \overset{\alpha}{\inf} x_n = \begin{cases} \inf x_n & , \ \alpha \text{ artan} \\ \sup x_n & , \ \alpha \text{ azalan} \end{cases}$$

olur. Yukarıda bahsedilen tanımların ve gösterimlerin ışığında aşağıdaki ifadelerin sağlandığını görmek çok zor değildir.

(1) $\overset{\alpha}{\max}\{x,y\} = \alpha(\max\{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)\})$

(2) $\overset{\alpha}{\min}\{x,y\} = \alpha(\min\{\alpha^{-1}(x), \alpha^{-1}(y)\})$

(3) $x_n \overset{\alpha}{\uparrow} \ \Leftrightarrow \ \alpha^{-1}(x_n) \uparrow$

(4) $x_n \overset{\alpha}{\downarrow} \ \Leftrightarrow \ \alpha^{-1}(x_n) \downarrow$

(5) $\overset{\alpha}{\sup} x_n = \alpha(\sup \alpha^{-1}(x_n))$

(6) $\overset{\alpha}{\inf} x_n = \alpha(\inf \alpha^{-1}(x_n))$.

Herhangi bir α-aritmetiğin (veya herhangi bir $\mathbb{R}_\alpha$ sıralı cisminin) sıfırı 0_α olduğundan, α-aritmetikte pozitif ve negatif sayıların kümeleri bilinenden farklı olabilir. Başka bir deyişle,

$$\mathbb{R}_\alpha^+ = \left\{ x \mid 0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} x \text{ ve } x \in \mathbb{R}_\alpha \right\} \quad \text{ve } \mathbb{R}_\alpha^- = \left\{ x \mid x \overset{\alpha}{\leqslant} 0_\alpha \text{ ve } x \in \mathbb{R}_\alpha \right\}$$

biçimindeki $\mathbb{R}_\alpha^+$ ve $\mathbb{R}_\alpha^-$ kümeleri α üretecine göre farklılık gösterebilir. Meselâ ilk örnek (b)'de $\mathbb{R}_{\exp}^+ = (1,\infty)$ ve $\mathbb{R}_{\exp}^- = (0,1)$ iken (d)'de $\mathbb{R}_q^+ = (0,\infty)$ ve $\mathbb{R}_q^- = (-\infty,0)$ olur. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^+$ sayısına *α-pozitif sayı* ve herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^-$ sayısına ise de *α-negatif sayı* denir. Sadece pozitiflik veya negatiflik kavramı değişmekle kalmayıp bütün koordinat sistemi farklılaşabilir. Dolayısıyla α-aritmetiğe göre 'sonsuz' kavramı da değişebilir. Bu yüzden ∞_α yani 'α-sonsuz' ve $-\infty_\alpha$ yani 'eksi α-sonsuz' tanımlamalarına ihtiyaç vardır. Meselâ ilk örnek (b)'de $-\infty_{\exp} = 0$ ve $\infty_{\exp} = \infty$ iken (c)'de $-\infty_q = -\infty$ ve $\infty_q = \infty$ olur.

İkili işlemlerin değişmesine bağlı olarak sayıların kuvvetleri ve kökleri de farklılaşabilir. $\mathbb{R}_\alpha$ daki bir x sayısının *α-karesi* $x^{2_\alpha} = x \overset{\alpha}{\cdot} x = \alpha\left([\alpha^{-1}(x)]^2\right)$ olur. Tümevarım yöntemi yardımıyla herhangi bir m doğalsayısı için bir x sayısının m. dereceden *α-kuvveti* $x^{m_\alpha} = \alpha\left([\alpha^{-1}(x)]^m\right)$ olarak tanımlanır. Benzer bir şekilde herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha \backslash \{0_\alpha\}$ sayısı için

$$x^{-2_\alpha} = 1 \overset{\alpha}{/} x^{2_\alpha} = 1 \overset{\alpha}{/} \left(x \overset{\alpha}{\cdot} x\right) = 1 \overset{\alpha}{/} \alpha\left(\left[\alpha^{-1}(x)\right]^2\right) = \alpha\left(\left[\alpha^{-1}(x)\right]^{-2}\right),$$

olur. Ayrıca herhangi bir $x \in \mathbb{R}_\alpha^+ \cup \{0_\alpha\}$ sayısının *α-karekökü* $\overset{\alpha}{\sqrt{x}} = \alpha\left(\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\right)$ biçiminde tanımlanır. Genelleştirmek gerekirse, $\mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki bir x elemanının herhangi bir $n \geqslant 2$ tamsayısı için n. dereceden *α-kökü* (eğer mevcutsa); $\overset{\alpha}{\sqrt[n]{x}} = x^{(1/n)_\alpha} = x^{1/n_\alpha} = \alpha\left(\sqrt[n]{\alpha^{-1}(x)}\right)$ sayısıdır.

Pozitiflik ve negatiflik kavramının değişimine bağlı olarak mutlak değer kavramında da değişiklik görülebilir. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin bir x elemanının *α-mutlak değeri* şu şekilde ifade edilir:

$$|x|_\alpha = \overset{\alpha}{\sqrt{x^{2_\alpha}}} = \alpha(|\alpha^{-1}(x)|) = \begin{cases} x & , \quad x \overset{\alpha}{>} 0_\alpha \\ 0_\alpha & , \quad x = 0_\alpha \\ \overset{\alpha}{-}x & , \quad x \overset{\alpha}{<} 0_\alpha \end{cases}.$$

Sıralamaya bağlı olarak $\mathbb{R}_\alpha$ kümesindeki aralıklar $\mathbb{R}$ kümesindekilerden farklı olabilir. Bu durumda aralık tanımını yapmakta fayda vardır. $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinden a ve b elemanları alalım. O halde $\mathbb{R}_\alpha$ kümesinin bir açık aralığı

$$(a,b)_\alpha = \begin{cases} (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) & , \quad \alpha \text{ artan} \\ (\alpha^{-1}(b), \alpha^{-1}(a)) & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Benzer bir şekilde bir yarı açık aralığı da şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$(a,b]_\alpha = \begin{cases} (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)] & , \quad \alpha \text{ artan} \\ [\alpha^{-1}(b), \alpha^{-1}(a)) & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases}$$

Şimdi $(1,2)_\alpha$ açık aralığının üretece göre nasıl değiştiğine bakalım. Bu aralık üreteç olarak $\alpha = I$ alınırsa $(1,2)_\alpha = (1,2)$, $\alpha = \exp$ alınırsa $(1,2)_\alpha = (\ln 1, \ln 2)$, α quadratik aritmetiği üreten fonksiyon olarak alınırsa $(1,2)_\alpha = \left(\sqrt{1}, \sqrt{2}\right)$, α harmonik aritmetiği üreten fonksiyon olarak alınırsa $(1,2)_\alpha = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ haline gelir.

Teorimizde önemli bir yere sahip olan limit kavramındaki değişime de göz atmak gerekir.

$\mathbb{R}_\alpha$ kümesininden bir $\{a_n\}$ dizisi alınsın ve $a \in \mathbb{R}_\alpha$ olsun. Her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $n > n_\varepsilon$ iken $\left| a_n \overset{\alpha}{-} a \right|_\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak biçimde bir n_ε sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisi a sayısına α-yakınsar denir ve $\alpha\text{-}\lim a_n = a$ veya $a_n \overset{\alpha}{\to} a$ yazılır. Her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $n > n_\varepsilon$ iken $a_n \overset{\alpha}{>} \varepsilon$ (veya $a_n \overset{\alpha}{<} \overset{\alpha}{-}\varepsilon$) olacak biçimde bir n_ε sayısı varsa, $\{a_n\}$ dizisi α-sonsuza (veya eksi α-sonsuza) yaklaşır denir ve $\alpha\text{-}\lim a_n = \infty_\alpha$ (veya $\alpha\text{-}\lim a_n = -\infty_\alpha$) yazılır.

Üreteç sürekli iken herhangi bir $\{a_n\}$ reel sayı dizisi için

$$\begin{aligned} \lim a_n = a \quad &\Rightarrow \quad \alpha\text{-} \lim \alpha(a_n) = \alpha(a) \\ \lim a_n = \infty \quad &\Rightarrow \quad \alpha\text{-} \lim \alpha(a_n) = \infty_\alpha \\ \lim a_n = -\infty \quad &\Rightarrow \quad \alpha\text{-} \lim \alpha(a_n) = -\infty_\alpha \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak, $\lim \alpha(n) = \alpha\text{-}\lim \alpha(n) = \infty_\alpha$ ve $\lim \alpha(-n) = \alpha\text{-}\lim \alpha(-n) = -\infty_\alpha$ olur.

Bu limit tanımıyla α-serilerden ve onların yakınsaklığından bahsedilebilir. $\mathbb{R}_\alpha$ içinde verilen bir $\{a_n\}$ dizisi için

$$\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \overset{\alpha}{+} a_2 \overset{\alpha}{+} \cdots \overset{\alpha}{+} a_n \overset{\alpha}{+} \cdots$$

ifadesine sonsuz α-*seri* denir. Genel terimi

$$s_n = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \overset{\alpha}{+} a_2 \overset{\alpha}{+} \cdots \overset{\alpha}{+} a_n = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(a_i)\right)$$

olan $\{s_n\}$ dizisine ise kısmî α-toplamlar dizisi denir. Bu dizi bir $L \in \mathbb{R}_\alpha$ sayısına α-yakınsak ise $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi L α-toplamına sahiptir denir ve $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha\text{-}\lim s_n = L$ biçiminde yazılır.

3. ÜRETİLEN ÖLÇÜLERİN TEORİSİ

3.1. α-Ölçüler

Ω boş olmayan bir küme olmak üzere, Ω kümesinin altkümelerinin bir yarıhalkası, halkası, cebiri, δ-halkası, σ-halkası, σ-cebiri sırasıyla $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{P}$, Σ ile gösterilecektir.

Ω kümesinin altkümelerinin boş olmayan bir sınıfı $\mathcal{S}$ olsun. Eğer her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \cap B \in \mathcal{S}$ ve bu sınıftan $A \subset B$ şartını sağlayacak şekilde seçilen her (A, B) çifti için $A = C_0 \subset C_1 \subset ... \subset C_n = B$ ve $C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{S}$ olacak şekilde $C_0, \ldots, C_n \in \mathcal{S}$ kümeleri varsa $\mathcal{S}$ bir *yarıhalkadır* denir. Örneğin $(a, b]$ yarıaçık aralıkların sınıfı bir yarıhalkadır.

Ω kümesinin altkümelerinin boş olmayan, birleşim ve fark altında kapalı bir sınıfına *halka* denir. *Cebir,* Ω kümesini içine alan bir halkadır. Sayılabilir kesişim altında kapalı olan halkaya *δ-halka*; sayılabilir birleşim altında kapalı halkaya *σ-halka* ve Ω kümesini kapsayan *σ-halkaya* ise *σ-cebiri* denir.

Ω kümesinin altkümelerinin boş olmayan bir sınıfı $\mathcal{M}$ olsun. Bu sınıf artan dizilerin birleşimleri ve azalan dizilerin kesişimleri altında kapalıysa *monoton sınıf* diye adlandırılır.

Her halka bir yarıhalka, her δ-halka bir halka, her σ-halka bir δ-halka ve monoton sınıftır.

Ω kümesinin altkümelerinin herhangi bir $\mathcal{F}$ sınıfı için; bu sınıfı kapsayan en küçük yarıhalka, halka, cebir, δ-halka, σ-halka, σ-cebir, monoton sınıf vardır. Bunlar $sr(\mathcal{F})$, $r(\mathcal{F})$, $a(\mathcal{F})$, $\delta r(\mathcal{F})$, $\sigma r(\mathcal{F})$, $\sigma a(\mathcal{F})$, $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ ile gösterilir ve $\mathcal{F}$ tarafından üretilen yarıhalka, halka, cebir, δ-halka, σ-halka, σ-cebir, monoton sınıf olarak adlandırılır.

$\mathcal{F}$, $\mathbb{R}$'nin bütün açık aralıklarının bir sınıfı olsun. $\mathcal{F}$ sınıfının ürettiği en küçük σ-cebirine Borel cebiri denir ve $\sigma a(\mathcal{F})$ veya $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Şimdi Borel cebiri yardımıyla $\mathbb{R}_\alpha$ üzerinde σ-cebirini oluşturalım. $\mathbb{R}$'nin herhangi bir (a, b) aralığı $\mathbb{R}_\alpha$ içinde olmayabileceğinden böyle bir σ-cebiri tanımına ihtiyaç vardır. Örneğin $(-1, 1) \nsubseteq \mathbb{R}_{\exp}$.

Daha önceden de bahsedildiği gibi α üretecinin artan veya azalan olması durumlarına göre α-sıralama tanımı farklılık göstermektedir. Bundan sonra anlatılacak kısımda üretecimizin artan olduğu kabul edilecektir. Azalan olduğu durumda benzer sonuçlar elde edilebilir. Üretecin monoton olmadığı durum ise, sadeliği gözetmek adına incelenmeyecektir.

3.1.1. Tanım

Üreteç α sürekli olsun. $\mathbb{R}$'nin herhangi bir (a,b) açık aralığı için $\alpha((a,b)) = (\alpha(a),\alpha(b))$ olduğundan $\mathbb{R}$'nin açık kümelerinin α altındaki görüntülerinin sınıfı $\mathcal{F}_\alpha$ olarak tanımlanırsa, $\mathcal{F}_\alpha$'nın ürettiği σ-cebirine α-*Borel cebiri* denir ve $\sigma a(\mathcal{F}_\alpha)$ veya $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\alpha)$ ile gösterilir.

Şimdi, $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\alpha)$ içerisindeki elemanların, yani kümelerin, nasıl üretildiğini açıklayalım. Burada α artan olduğundan herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\alpha\left(a - \frac{1}{n}\right) \overset{\alpha}{<} \alpha(a)$ olur. Diğer bir yandan, α üretecinin sürekliliği kulanılırsa (α-)$\lim \alpha\left(a - \frac{1}{n}\right) = \alpha\left(a - \lim \frac{1}{n}\right) = \alpha(a)$ olduğu görülür ve böylece

$$[a,b)_\alpha = [\alpha(a),\alpha(b)) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha\left(a - \frac{1}{n}\right),\alpha(b)\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, b\right)_\alpha$$

elde edilir. Benzer bir yolla $(a,b]_\alpha, [a,b]_\alpha, \{a\}_\alpha$ elemanları da üretilebilir. Ayrıca herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\alpha(a-n) \overset{\alpha}{<} \alpha(a)$ ve $\lim(a-n) = -\infty$ iken α-$\lim \alpha(a-n) = -\infty_\alpha$ olduğundan

$$(-\infty,a)_\alpha = (-\infty_\alpha,\alpha(a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha(a-n),\alpha(a)) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a-n,a)_\alpha$$

elde edilir. Benzer bir yolla $(-\infty,a]_\alpha, [a,\infty)_\alpha, (a,\infty)_\alpha, \mathbb{R}_\alpha$ elemanları da üretilebilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R}_\alpha)$ içerisindeki diğer kümeler ise, bu kümelerin sayılabilir kesişimi veya birleşimidir.

Elde ettiğimiz aritmetiklerde Lebesgue integralini tanımlamak için öncelikle bu aritmetiklerde bir ölçü tanımı yapmamız gerekmektedir.

3.1.2. Tanım

Ω kümesinin alt kümelerinin bir yarıhalkası $\mathcal{S}$ olsun.

$\mathcal{S}$ üzerinde tanımlı $\mu^\alpha : \mathcal{S} \to [0_\alpha, \infty_\alpha]$ küme fonksiyonu için

(1) $\mu^\alpha(\varnothing) = 0_\alpha$ ve

(2) Her ayrık (A_n) dizisi için μ^α fonksiyonu $\sigma(\alpha)$-toplamsallık, yani

$$\mu^\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu^\alpha\left(A_n\right) = \alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-1}\mu^\alpha\left(A_n\right)\right)$$

özelliklerini sağlanıyorsa μ^α fonksiyonuna bir *α-ölçü fonksiyonu* veya kısaca *α-ölçü* adı verilir. $(\Omega, \mathcal{S}, \mu^\alpha)$ üçlüsü ise *α-ölçü uzayı* olarak adlandırılır.

Sıradaki önerme ölçü ve α-ölçü arasındaki ilişkiyi anlamamıza yardımcı olacaktır.

3.1.3. Önerme

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir α üreteci için

(1) μ^α bir α-ölçü ise $\alpha^{-1} \circ \mu^\alpha$ bir ölçüdür,

(2) μ bir ölçü ise $\alpha \circ \mu$ bir α-ölçüdür.

İspat

(1) $\mu = \alpha^{-1} \circ \mu^\alpha$ olsun. Tanım 3.1.2 (1)'den $\mu(\varnothing) = \alpha^{-1}(\mu^\alpha(\varnothing)) = \alpha^{-1}(\alpha(0)) = 0$ olur. Diğer bir yandan, herhangi bir ayrık $\{A_n\}$ dizisi için Tanım 3.1.2 (2)'den

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \alpha^{-1}\left(\mu^\alpha\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-1}\mu^\alpha\left(A_n\right)\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

elde edilir.

(2) $\mu^\alpha = \alpha \circ \mu$ olsun. $\mu^\alpha(\varnothing) = \alpha(\mu(\varnothing)) = 0_\alpha$ olur. Diğer bir yandan, α fonksiyonun

birebir olmasından dolayı herhangi bir ayrık $\{A_n\}$ dizisi için

$$\mu^{\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\alpha\left(\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\right)=\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mu\left(A_n\right)\right)=\alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{-1}\mu^{\alpha}\left(A_n\right)\right)$$

olduğu, yani μ^{α} fonksiyonun $\sigma(\alpha)$-toplamsallığı elde edilir.

Yukarıdaki önerme yardımıyla, klasik ölçü örneklerinden ilham alarak birkaç α-ölçü örneği verelim.

Örnek

Ω herhangi bir küme olmak üzere $\mu^{\alpha} : P(\Omega) \to [0_{\alpha}, \infty_{\alpha}]$ küme fonksiyonu

$$\mu^{\alpha}(A)=\begin{cases}\infty_{\alpha} & , \ A \text{ sonsuz}\\ \alpha\left(A\text{'nın eleman sayısı}\right) & , \ A \text{ sonlu}\end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. $(\Omega, P(\Omega), \mu^{\alpha})$ bir α-ölçü uzayıdır.

Örnek

Ω boş olmayan bir küme ve $a \in \Omega$ olmak üzere

$$\mu^{\alpha}(A)=\begin{cases}0_{\alpha} & , \ a \notin A\\ 1_{\alpha} & , \ a \in A\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\mu^{\alpha} : P(\Omega) \to [0_{\alpha}, \infty_{\alpha}]$ küme fonksiyonu $P(\Omega)$ üzerinde bir α-ölçüdür.

Örnek

Ω boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\mu^{\alpha}(A)=\begin{cases}0_{\alpha} & , \ A = \varnothing\\ \infty_{\alpha} & , \ A \neq \varnothing\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\mu^\alpha : P(\Omega) \to [0_\alpha, \infty_\alpha]$ küme fonksiyonu $P(\Omega)$ üzerinde bir α-ölçüdür.

Örnek

$\mathcal{B}(\mathbb{R}_\alpha)$ α-Borel cebiri üzerinde tanımlı ve aralıkların α-uzunluğu (meselâ $\lambda^\alpha([a,b]_\alpha) = b \overset{\alpha}{-} a = \alpha(\alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a)))$ ile verilen $\lambda^\alpha : \mathcal{B}(\mathbb{R}_\alpha) \to [0_\alpha, \infty_\alpha]$ küme fonksiyonu bir α-ölçüdür.

3.1.4. Teorem

$(\Omega, \mathcal{S}, \mu^\alpha)$ bir α-ölçü uzayı olsun.

(1) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ kümeleri ayrık kümeler ve $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$ oluyorsa

$$\mu^\alpha \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \mu^\alpha (A_i)$$

eşitliği sağlanır; yani μ^α sonlu α-toplamsaldır.
(2) Herhangi iki $A, B \in \mathcal{S}$ kümeleri için $A \subseteq B$ ise $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^\alpha(B)$ (yani α artan iken $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^\alpha(B)$, α azalan iken $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^\alpha(B)$) sağlanır. Başka bir deyişle μ^α, α-monotondur.

İspat

(1) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ ayrık kümeler ve $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$ olsun. Her $i > n$ sayısı için $A_i = \varnothing$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{A_i\}$ dizisi $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S}$ şartını sağlayan ayrık bir dizi olur. Böylece, μ^α fonksiyonunun $\sigma(\alpha)$-toplamsallığından ve $\mu^\alpha(\varnothing) = 0_\alpha$ olmasından dolayı

$$\mu^\alpha \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right) = \mu^\alpha \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^\alpha (A_i) = \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \mu^\alpha (A_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1} \mu^\alpha (A_i) \right)$$

elde edilir.

(2) $A, B \in \mathcal{S}$ ve $A \subseteq B$ olsun. Ayrıca $B \backslash A = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ olacak şekilde ayrık $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{S}$ kümeleri seçilsin. Bu durumda B kümesi $\mathcal{S}$ yarıhalkasının ayrık kümelerinin sonlu bir birleşimidir, yani $B = A \cup (B \backslash A) = A \cup C_1 \cup \ldots \cup C_n$ olur. Böylece, teoremin birinci kısmı kullanılırsa

$$\begin{array}{lll} \alpha \text{ artan} & \Rightarrow & \mu^{\alpha}(B) = \mu^{\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \mu^{\alpha}(C_1) \overset{\alpha}{+} \cdots \overset{\alpha}{+} \mu^{\alpha}(C_n) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{\alpha}(A) \\ \alpha \text{ azalan} & \Rightarrow & \mu^{\alpha}(B) = \mu^{\alpha}(A), \overset{\alpha}{+} \mu^{\alpha}(C_1) \overset{\alpha}{+} \cdots \overset{\alpha}{+} \mu^{\alpha}(C_n) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{\alpha}(A) \end{array}$$

elde edilir.

3.2. α-Dış Ölçüler, α-Ölçülebilir Kümeler ve α-Ölçülebilir Fonksiyonlar

3.2.1. Tanım

Ω kümesinin kuvvet kümesi $P(\Omega)$ olsun. $P(\Omega)$ üzerinde tanımlı $\mu^{*\alpha} : P(\Omega) \to [0_{\alpha}, \infty_{\alpha}]$ küme fonksiyonu için

(1) $\mu^{*\alpha}(\varnothing) = 0_{\alpha}$
(2) $A \subseteq B$ iken $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(B)$ ve
(3) Her $\{A_n\}$ dizisi için $\mu^{*\alpha}$ $\sigma(\alpha)$-alt toplamsal, yani

$$\mu^{*\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}(A_n) = \alpha\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{-1} \mu^{*\alpha}(A_n)\right)$$

oluyorsa $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonuna bir *α-dış ölçü fonksiyonu* veya kısaca *α-dış ölçü* adı verilir.

$\mu^{*\alpha}$ *α-dış ölçüsü* $P(\Omega)$ üzerinde $\sigma(\alpha)$-toplamsal olmak zorunda değildir. Ancak her zaman $\mu^{*\alpha}$ nın üzerinde $\sigma(\alpha)$-toplamsal olduğu bir σ-cebiri vardır.

Önerme 3.1.3'de ölçü ile α-ölçü arasında bir ilişki olduğundan bahsedilmişti. Benzer bir ilişki de dış ölçü ile α-dış ölçü arasında da vardır.

3.2.2. Önerme

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı herhangi bir α üreteci için

(1) $\mu^{*\alpha}$ bir α-dış ölçü ise $\alpha^{-1} \circ \mu^{*\alpha}$ bir dış ölçüdür,

(2) μ^{*} bir dış ölçü ise $\alpha \circ \mu^{*}$ bir α-dış ölçüdür.

Sıradaki tanım α-ölçülebilir kümelerden bahsedecektir.

3.2.3. Tanım

E kümesi Ω'nın bir alt kümesi olsun. Her $A \subseteq \Omega$ için

$$\mu^{*\alpha}(A) = \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) = \alpha(\alpha^{-1}(\mu^{*}(A \cap E)) + \alpha^{-1}(\mu^{*}(A \cap E^c)))$$

sağlanıyorsa E kümesine α-ölçülebilir ya da $\mu^{*\alpha}$-ölçülebilir denir.

$\mu^{*\alpha}$ fonksiyonu $\sigma(\alpha)$-alt toplamsal olduğundan her A ve E kümesi için

$$\mu^{*\alpha}(A) = \mu^{*\alpha}\left((A \cap E) \cup (A \cap E^c)\right) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$$

sağlanır Bu ifade vasıtasıyla E kümesinin α-ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart Ω daki her bir A kümesi için

$$\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$$

sağlanması gerektiği kolayca anlaşılabilir.
Bütün α-ölçülebilir kümelerin koleksiyonu Λ^{α} ile gösterilsin. Yani

$$\Lambda^{\alpha} = \left\{E \subseteq \Omega : \text{her } A \subseteq \Omega \text{ için } \mu^{*\alpha}(A) = \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)\right\}$$

isteğe bağlı olarak Λ^{α} yerine $\Lambda_{\mu^{\alpha}}$ da kullanılabilir.

En basit α-ölçülebilir kümeler α-dış ölçüsü 0_{α} olanlardır.

3.2.4. Tanım

E kümesi Ω nın bir alt kümesi olsun. Eğer $\mu^{\alpha}(A) = 0_{\alpha}$ ise E kümesine α-*null* küme denir.

$\mu^{*\alpha}$ fonksiyonun $\sigma(\alpha)$-alt toplamsallık özelliği gereğince α-null kümelerin sayılabilir birleşiminin yine bir α-null küme olduğu görülür. Bu kümeler α-integral teorisinde önemli bir role sahiptir.

3.2.5. Teorem

Her α-null küme α-ölçülebilirdir.

İspat

$E \subseteq \Omega$ ve $\mu^{*\alpha}(A) = 0_{\alpha}$ olduğunu kabul edelim. $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonunun monotonluk özelliği gereğince her bir $A \subseteq \Omega$ için $\mu^{*\alpha}(A \cap E) = 0_{\alpha}$ olur. Bunun bir sonucu olarak her bir $A \subseteq \Omega$ için

$$\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^{c}) = \mu^{*\alpha}(A \cap E^{c}) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A)$$

elde edilir. Bu yüzden E kümesi α-ölçülebilirdir.

Aşağıdaki lemma α-ölçülebilir kümelerin başka özelliklerinin anlaşılabilmesi için gereklidir.

3.2.6. Lemma

$E_1, \ldots, E_n$ ayrık ve α-ölçülebilir kümeler olsun. Her $A \subseteq \Omega$ için

$$\mu^{*\alpha}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap E_i)\right) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} \mu^{*\alpha}\left(A \cap E_i\right) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1}\mu^{*\alpha}\left(A \cap E_i\right)\right)$$

sağlanır.

İspat

İspatı n üzerinden tümevarım yöntemini uygulayarak yapacağız. İfadenin $n = 1$ durumu için sağlandığı açıktır. Şimdi bazı n değerleri için doğru olduğunu kabul edelim. Ayrıca $E_1, \ldots, E_{n+1}$ kümeleri ayrık ve α-ölçülebilir olsun. Eğer $A \subseteq \Omega$ ise

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1}$$

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap (E_{n+1})^c = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]$$

elde edilir. Diğer bir yandan E_{n+1} kümesin α-ölçülebilirliğini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\mu^{*\alpha}\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} (A \cap E_i)\right) &= \mu^{*\alpha}\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right]\right) \\
&= \mu^{*\alpha}\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap E_{n+1}\right) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i\right] \cap (E_{n+1})^c\right) \\
&= \mu^{*\alpha}(A \cap E_{n+1}) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right]\right) \\
&= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n+1} \mu^{*\alpha}(A \cap E_i) \\
&= \alpha\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha^{-1}\mu^{*\alpha}(A \cap E_i)\right)
\end{aligned}$$

olur. Burada son eşitlik tümevarım hipotezinden dolayı sağlanır. Böylece tümevarım tamamlanır ve ispat sonuçlandırılmış olur.

3.2.7. Teorem

Bütün α-ölçülebilir kümelerin koleksiyonu Λ^α, bir σ-cebiridir.

İspat

Öncelikle α-ölçülebilir küme tanımından $E \in \Lambda^\alpha$ ise $E^c \in \Lambda^\alpha$ olduğu açıktır. $\mu^{*\alpha}(\varnothing) = 0_\alpha$ olduğudan $\varnothing \in \Lambda^\alpha$ olur, bu da $\Omega \in \Lambda^\alpha$ demektir.

Şimdi $E_1, E_2 \in \Lambda^\alpha$ iken $E = E_1 \cup E_2$ olduğu gösterilecektir. Gerçekten E yerine

$E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)$yazılırsa, Ω nın her bir A alt kümesi için

$$\begin{aligned}
\mu^{*\alpha}(A) &\overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \left[\mu^{*\alpha}(A \cap E_1) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}\left((A \cap E_1^c) \cap E_2\right)\right] \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}\left((A \cap E_1^c) \cap E_2^c\right) \\
&= \mu^{*\alpha}(A \cap E_1) \overset{\alpha}{+} \left[\mu^{*\alpha}\left((A \cap E_1^c) \cap E_2\right) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}\left((A \cap E_1^c) \cap E_2^c\right)\right] \\
&= \mu^{*\alpha}(A \cap E_1) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E_1^c) = \mu^{*\alpha}(A)
\end{aligned}$$

elde edilir Bu da $E_1 \cup E_2 \in \Lambda^\alpha$ olmasını gerektirir.

Tümevarım yönetimi uygulanırsa Λ^α sınıfının sonlu birleşim ve sonlu kesişim altında kapalı olduğu görülebilir. Ayrıca E_1, $E_2 \in \Lambda^\alpha$ ise $E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap E_2^c \in \Lambda^\alpha$ olur. Bu yüzden Λ^α kümelerin bir cebiridir. İspatı tamamlayabilmek için Λ^α nın σ-cebiri olduğunu göstermeliyiz. Λ^α içinde alınan bir $\{E_n\}$ dizisi için $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $n \geqslant 1$ için $G_1 = E_1$ ve $G_{n+1} = E_{n+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ olarak tanımlansın. O halde $\{G_n\} \subseteq \Lambda^\alpha$, $n \neq m$ iken $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ elde edilir ve $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ olur. Şimdi $n \geqslant 1$ için $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca her bir F_n kümesinin α-ölçülebilir olduğunu ve $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ eşitliğinin sağlandığını göz önünde bulundurmakta fayda vardır. Şimdi, $A \subseteq \Omega$ ise her bir n için

$$\begin{aligned}
\mu^{*\alpha}(A) &= \mu^{*\alpha}(A \cap F_n) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap F_n^c) \\
&\overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap F_n) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \\
&= \left[\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} \mu^{*\alpha}(A \cap G_i)\right] \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu arada en son eşitlik Lemma 3.2.6'dan dolayı sağlanır. Böylece

$$\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\geqslant} \left[\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}(A \cap G_i)\right] \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A)$$

ve $E \in \Lambda^\alpha$ olur. Bu yüzden Λ^α bir σ-cebiridir.

Bir α-dış ölçünün Λ^{α}'ya kısıtlanışı α-ölçüdür.

3.2.8. Teorem

$\mu^{*\alpha}$ küme fonksiyonu Ω üzerinde bir α-dış ölçü olsun. $(\Omega, \Lambda^{\alpha}, \mu^{*\alpha})$ üçlüsü bir α-ölçü uzayıdır; yani $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonu Λ^{α} üzerinde $\sigma(\alpha)$-toplamsaldır.

İspat

$\{E_n\}$, Λ^{α}'nin bir ayrık dizisi olsun. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ olmak üzere $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonunun $\sigma(\alpha)$-alt toplamsallık özelliğinden

$$\mu^{*\alpha}(E) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}\left(E_n\right)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Lemma 3.2.6'dan dolayı her k için

$$\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{k} \mu^{*\alpha}\left(E_n\right) = \alpha\text{-}\sum_{n=1}^{k} \mu^{*\alpha}\left(E \cap E_n\right) = \mu^{*\alpha}\left(E \cap \left[\bigcup_{n=1}^{k} E_n\right]\right) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(E)$$

sağlanır. Böylece $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}\left(E_n\right) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(E)$ ve bu yüzden de $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}\left(E_n\right) = \mu^{*\alpha}(E)$ olur.

$\mu^{*\alpha}$'nın Λ^{α}'ya kısıtlanışı $\mu^{*\alpha}$ *α-dış ölçüsünün ürettiği α-ölçü* biçiminde adlandırılır.

3.2.9. Teorem

A ve B ölçülebilir iki küme, $A \subseteq B$ ve $\mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{<} \alpha(\infty)$ olsun. O halde $\mu^{*\alpha}(B \setminus A) = \mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{-} \mu^{*\alpha}(A)$ sağlanır.

İspat

$B = A \cup (B \setminus A)$ olarak alınarak $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonunun α-toplamsallığı kullanılırsa $\mu^{*\alpha}(B) = \mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(B \setminus A)$ eşitliği elde edilir. Ayrıca $\mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{<} \alpha(\infty)$ olduğundan $\mu^{*\alpha}(B \setminus A) = \mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{-} \mu^{*\alpha}(A)$ elde edilir.

Ω kümesinin alt kümelerinin bir koleksiyonu $\mathcal{F}$ olsun ve bu $\mathcal{F}$, boş kümeyi içersin. Ayrıca $\mu^{\alpha} : \mathcal{F} \to [0_{\alpha}, \infty_{\alpha}]_{\alpha}$ küme fonksiyonu için $\mu^{\alpha}(\varnothing) = 0_{\alpha}$ olsun. Ω daki her bir A kümesi için

$$\mu^{*\alpha} = \overset{\alpha}{\inf}\left\{\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{\alpha}\left(A_n\right) : \{A_n\}\ \mathcal{F} \text{ de bir dizi ve } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\mathcal{F}$ koleksiyonu içinde $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ olacak şekilde bir $\{A_n\}$ dizisi yoksa, $\mu^{*\alpha}(A) = \infty_{\alpha}$ olarak kabul edilecektir. Yani $\overset{\alpha}{\inf}\varnothing = \infty_{\alpha}$ olduğunu varsayılacaktır.

3.2.10. Teorem

$\mu^{*\alpha} : P(\Omega) \to [0_{\alpha}, \infty_{\alpha}]$ küme fonksiyonu $\mathcal{F}$'deki her A kümesi için $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{\alpha}(A)$ eşitsizliğini sağlayan bir α-dış ölçüdür. Bu α-dış ölçü $\mu^{\alpha} : \mathcal{F} \to [0_{\alpha}, \infty_{\alpha}]$ küme fonksiyonu tarafından üretilen α-dış ölçü olarak adlandırılır.

İspat

Her $A \subseteq \Omega$ için $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_{\alpha}$ sağlandığı açıktır. Ancak her n için $A_n = \varnothing$ ise $0_{\alpha} \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(\varnothing) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^{\alpha}\left(\varnothing\right) = 0_{\alpha}$ ve dolayısıyla $\mu^{*\alpha}(\varnothing) = 0_{\alpha}$ olur.

Şimdi $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonunun monotonluğunu gösterelim. $A \subseteq B$ olduğunu kabul edelim. $B \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ ve $\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ ise $A \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ olur ve bu yüzden de $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^{\alpha}\left(A_n\right)$ elde edilir. Eğer $\mathcal{F}$ koleksiyonunda B'yi örten böyle bir A_n dizisi yoksa $\mu^{*\alpha}(B) = \infty_{\alpha}$ ve $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(B)$ olduğu açıktır. Bu yüzden

$$\mu^{*\alpha}(B) = \overset{\alpha}{\inf}\left\{\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{\alpha}\left(A_n\right) : \{A_n\} \subseteq \mathcal{F} \text{ ve } B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right\} \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A)$$

sağlanır.

Şimdi de $\mu^{*\alpha}$'nın $\sigma(\alpha)$-alt toplamsal olduğunu gösterelim. Öncelikle $\{A_n\}$, Ω kümesinin altkümelerinin herhangi bir dizisi olsun. Eğer $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}\left(A_n\right) = \infty_{\alpha}$ ise $\mu^{*\alpha}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \overset{\alpha}{\leqslant}$

$\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu^{*\alpha}(A_n)$ olduğu açıktır. Bu yüzden $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu^{*\alpha}(A_n)\overset{\alpha}{<}\infty_\alpha$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca $\varepsilon\overset{\alpha}{>}0_\alpha$ olsun. Her bir i için $\mathcal{F}$ koleksiyonundan öyle $\{A_n^i\}$ dizileri seçelim ki, bu diziler için $A_i\subseteq\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^i$ ve $\alpha\text{-}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu^{\alpha}(A_n^i)\overset{\alpha}{\leqslant}\mu^{*\alpha}(A_i)\overset{\alpha}{+}\left(\alpha(2^{-i})\overset{\alpha}{\cdot}\varepsilon\right)$ olsun. Öyleyse her i ve n için $A_n^i\in\mathcal{F}$ ve $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^i$ olur. Böylece her $\varepsilon\overset{\alpha}{>}0_\alpha$ için

$$\begin{aligned}\mu^{*\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\overset{\alpha}{\leqslant}\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{\alpha}(A_n^i) &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\left[\mu^{*\alpha}(A_i)\overset{\alpha}{+}\left(\alpha(2^{-i})\overset{\alpha}{\cdot}\varepsilon\right)\right]\\ &= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty}\mu^{*\alpha}(A_i)\overset{\alpha}{+}\varepsilon\end{aligned}$$

olur Bu yüzden aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mu^{*\alpha}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\overset{\alpha}{\leqslant}\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{*\alpha}(A_n)$$

Ayrıca $A=A\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\ldots$ olduğundan her $A\in\mathcal{F}$ için $\mu^{*\alpha}(A)\overset{\alpha}{\leqslant}\mu^{\alpha}(A)$ sağlandığı kolayca görülebilir.

Bazı $A\in\mathcal{F}$ kümeleri için $\mu^{*\alpha}(A)\overset{\alpha}{<}\mu^{\alpha}(A)$ koşulunu sağlayan örnekler kolayca oluşturulabilir; yani $\mu^{*\alpha}$, μ^{α}'nın genişlemesi olmak zorunda değildir. Örnek olarak $\Omega=\{\alpha(1),\alpha(2),\alpha(3)\}$, $\mathcal{F}=\{\varnothing,\{\alpha(1)\},\{\alpha(1),\alpha(2)\}\}$ ve $\mu^{\alpha}:\mathcal{F}\to[0_\alpha,\infty_\alpha]$ fonksiyonu $\mu^{\alpha}(\varnothing)=0_\alpha$, $\mu^{\alpha}(\{\alpha(1)\})=\alpha(2)$ ve $\mu^{\alpha}(\{\alpha(1),\alpha(2)\})=\alpha(1)$ şeklinde tanımlanırsa $\mu^{*\alpha}(\{\alpha(1)\})=\alpha(1)$ olur.

Ancak μ^{α} bir α-ölçü olduğu zaman durum değişir.

3.2.11. Teorem

$(\Omega,\mathcal{S},\mu^{\alpha})$ *bir* α-ölçü uzayı olsun. $\mu^{*\alpha}$ α-dış ölçüsü μ^{α} α-ölçüsünün bir genişlemesidir. Yani, $A\in\mathcal{S}$ ise $\mu^{*\alpha}(A)=\mu^{\alpha}(A)$ sağlanır.

İspat

Öncelikle $A\in\mathcal{S}$ olsun. Teorem 3.2.10'dan dolayı $\mu^{*\alpha}(A)\overset{\alpha}{\leqslant}\mu^{\alpha}(A)$ olduğunu biliyoruz.

$\{A_n\} \subseteq \mathcal{S}$ bir dizi ve $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ olsun. μ^α fonksiyonunun $\sigma(\alpha)$-alt toplamsallık özelliğinden $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu^\alpha(A_n)$ elde edilir ve bu sayade $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A)$ sağlandığı görülür. Böylece $\mu^\alpha(A) = \mu^{*\alpha}(A)$ olur.

$\mu^{*\alpha}$ α-dış ölçüsü μ^α tarafından üretilen bir genişleme olduğundan, $\mu^{*\alpha}$'ya μ^α'nın *Carathéodory genişlemesi* adı verilir.

3.2.12. Teorem

$(\Omega, \mathcal{S}, \mu^\alpha)$ bir α-ölçü uzayı ve $\mu^{*\alpha}$, μ^α tarafından üretilen α-dış ölçü olsun. Ω kümesinin bir E alt kümesi, için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) E kümesi $\mu^{*\alpha}$'ya göre α-ölçülebilirdir.
(2) $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olacak biçimde alınan her $A \in \mathcal{S}$ için $\mu^\alpha(A) = \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$ sağlanır.
(3) $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olacak biçimde alınan her $A \in \mathcal{S}$ için $\mu^\alpha(A) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$ sağlanır
(4) Her $A \subseteq \Omega$ kümesi için $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$ sağlanır.

İspat

(1) $\Rightarrow$ (2) ve (2) $\Rightarrow$ (3) aşikardır.
(3) $\Rightarrow$ (4) $A \subseteq \Omega$ olsun. $\mu^{*\alpha}(A) = \infty_\alpha$ ise (4) bariz bir şekilde sağlanır. Bu yüzden $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olsun. Ayrıca $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olduğunu kabul edelim. $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve α-$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^\alpha(A_n) \overset{\alpha}{<} \mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \varepsilon$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ den bir $\{A_n\}$ dizisi seçelim. Böylece her bir n için $\mu^\alpha(A_n) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ elde edilir ve hipotez gereğince her bir n için $\mu^{*\alpha}(A_n) \overset{\alpha}{\geqslant}$

$\mu^{*\alpha}(A_n \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E^c)$ sağlanır. Bu yüzden, her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için

$$\begin{aligned} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) &\overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right] \cap E^c) \\ &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E) \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E^c) \\ &= \alpha\text{-} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E^c) \\ &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-} \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{\alpha}(A_n) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \epsilon \end{aligned}$$

sağlanır ve böylece $\mu^{*\alpha}(A_n) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A_n \cap E^c)$ olduğu görülür.

(4) $\Rightarrow$ (1) $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonunun $\sigma(\alpha)$-alt toplamsallık özelliğinden $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$ olduğunu biliyoruz. Böylece her $A \subseteq \Omega$ için $\mu^{\alpha}(A) = \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$ elde edilir. Bu yüzden E kümesi α-ölçülebilirdir.

$(\Omega, \mathcal{S}, \mu^{\alpha})$ α-ölçü uzayında alınan bir E kümesi μ^{α} tarafından üretilen $\mu^{*\alpha}$ α-dış ölçüsüne göre ölçülebilirse E kümesi α-ölçülebilirdir denir.

3.2.13. Teorem

$\mathcal{S}$ deki her bir eleman α-ölçülebilirdir. Yani, $\mathcal{S} \subseteq \Lambda^{\alpha}$.

İspat

$E \subseteq \mathcal{S}$ olsun. E nin α-ölçülebilir olduğunu göstermeliyiz. $A \in \mathcal{S}$ ise $\mathcal{S}$ içinde $A \cap E^c = A \setminus E = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ olacak şekilde ikişer ikişer ayrık $B_1, \ldots, B_n$ kümeleri vardır. Şunu da göz önünde bulunduralım ki $A \cap E, B_1, \ldots, B_n$; $\mathcal{S}$'in ayrık bir sınfıdır ve $A = A \cap E \cup B_1 \cup \ldots \cup B_n$ sağlanır. $\mu^{*\alpha}$ nın $\sigma(\alpha)$-alt toplamsallığı, μ^{α}'nın $\sigma(\alpha)$-toplamsallığı ve Teorem 3.2.11 kullanarak

$$\begin{aligned} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) &\overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \mu^{*\alpha}(B_i) \\ &= \mu^{\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \mu^{\alpha}(B_i) = \mu^{\alpha}(A) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.2.12'den dolayı E'nin α-ölçülebilir olduğu ve böylece $\mathcal{S} \subseteq \Lambda^{\alpha}$ olduğu görülür.

Ω nın altkümelerinin bir dizisi $\{A_n\}$ olsun. $A_n \subseteq A_{n+1}$ ve her bir n için $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oluyorsa A_n dizisi artarak A ya yakınsar denir ve $A_n \uparrow A$ biçiminde gösterilir. Benzer şekilde $A_{n+1} \subseteq A_n$ ve her bir n için $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ oluyorsa A_n dizisi azalarak A ya yakınsar denir ve $A_n \downarrow A$ biçiminde gösterilir.

3.2.14. Teorem

$(\Omega, \mathcal{S}, \mu^{\alpha})$ bir α-ölçü uzayı ve $\{E_n\}$ α-ölçülebilir kümelerin bir dizisi ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) $E_n \uparrow E$ ise $\mu^{*\alpha}(E_n) \overset{\alpha}{\uparrow} \mu^{*\alpha}(E)$ olur.

(2) $E_n \downarrow E$ ve bazı k değerleri için $\mu^{*\alpha}(E_k) \overset{\alpha}{<} \infty_{\alpha}$ ise $\mu^{*\alpha}(E_n) \overset{\alpha}{\downarrow} \mu^{*\alpha}(E)$ olur.

İspat

(1) $B_1 = E_1$ ve $n \geqslant 2$ sayıları için $B_n = E_n \setminus E_{n-1}$ olduğunu kabul edelim. O halde her bir B_n kümesi α-ölçülebilirdir ve $i \neq j$ iken $B_i \cap B_j = \varnothing$ olur. Ayrıca $E_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ ve $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ olduğu görülür. Böylece Teorem 3.2.8 kullanılırsa

$$\mu^{*\alpha}(E) = \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{\infty} \mu^{*\alpha}(B_i) = \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \sum_{i=1}^{n} \mu^{*\alpha}(B_i)$$

elde edilir. Fakat $\mu^{*\alpha}(E_n) = \alpha\text{-}\sum\limits_{i=1}^{n} \mu^{*\alpha}(B_i)$ ve bu yüzden $\mu^{*\alpha}(E_n) \overset{\alpha}{\uparrow} \mu^{*\alpha}(E)$ olur. (2) Genelliği bozmaksızın $\mu^{*\alpha}(E_1) \overset{\alpha}{<} \infty_{\alpha}$ olduğunu kabul edelim. Şimdi $E_1 \setminus E_n \uparrow E_1 \setminus E$ ve böylece teoremin birinci kısmı kullanılarak α-lim $\mu^{*\alpha}(E_1 \setminus E_n) = \mu^{*\alpha}(E_1 \setminus E)$ elde edilir. Teorem 3.2.9'den dolayı α-lim $\left[\mu^{*\alpha}(E_1) \overset{\alpha}{-} \mu^{*\alpha}(E_n)\right] = \mu^{*\alpha}(E_1) \overset{\alpha}{-} \mu^{*\alpha}(E)$ ve böylece $\mu^{*\alpha}(E_n) \overset{\alpha}{\downarrow} \mu^{*\alpha}(E)$ olduğu görülür.

3.2.15. Tanım

$(\Omega, \mathcal{S}, \mu^{\alpha})$ bir α-ölçü uzayı olmak üzere

(1) $\mu^{*\alpha}(\Omega) \overset{\alpha}{<} \infty_{\alpha}$ ise bu uzaya sonlu α-ölçü uzayı
(2) Her bir n için $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_i$ ve $\mu^{*\alpha}(\Omega_n) \overset{\alpha}{<} \infty_{\alpha}$ olacak biçimde Ω nın alt kümelerinden oluşan bir $\{\Omega_n\}$ dizisi varsa bu uzaya $\sigma(\alpha)$-sonlu α-ölçü uzayı denir.

3.2.16. Teorem

$(\Omega, \mathcal{S}, \mu^{\alpha})$ bir sonlu α-ölçü uzayı ve Ω kümesinin bir alt kümesi E olsun. O halde E kümesinin α-ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart $\mu^{\alpha}(\Omega) = \mu^{*\alpha}(E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c)$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat

$(\Rightarrow)$ E ölçülebilir bir küme olduğunda eşitliğin sağlandığı açıktır.
$(\Leftarrow)$ Diğer yönden $\mu^{\alpha}(\Omega) = \mu^{*\alpha}(E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c)$ eşitliğinin sağlandı kabul edilsin.Ayrıca $A \subseteq \mathcal{S}$ olsun. A kümesinin α-ölçülebilirliği E ve E^c üzerine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mu^{*\alpha}(E) &= \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E \cap A^c) \\ \mu^{*\alpha}(E^c) &= \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c \cap A^c) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} \mu^{*\alpha}(\Omega) &= \mu^{*\alpha}(E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c) \\ &= \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E \cap A^c) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c \cap A^c) \\ &\overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A^c) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cup A^c) = \mu^{*\alpha}(\Omega) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A^c) = \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E \cap A^c) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c \cap A^c)$$

olur. $\mu^{*\alpha}(A^c) \overset{\alpha}{\leqslant} \mu^{*\alpha}(E \cap A^c) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(E^c \cap A^c)$ ve $\mu^{*\alpha}(\Omega) \overset{\alpha}{<} \infty_{\alpha}$ olduğu son eşitlikle birleştirilirse

$$\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{\geqslant} \mu^{*\alpha}(A \cap E) \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(A \cap E^c)$$

elde edilir. Teorem 3.2.12'ya bakıldığında bu ifade E kümesinin ölçülebilir olmasına denktir.

Hemen hemen her yerde kavramı integral teorisinde önemli bir role sahiptir. $\mu^{*\alpha}$ fonksiyonu Ω kümesinin bir α-dış ölçüsü olmak üzere Ω'nın elemanlarını ilgilendiren bir bağıntı var olsun. A kümesi bu bağıntıyı sağlamayan tüm elemanların kümesi olarak kabul edilsin. Eğer A kümesi α-null küme, yani $\mu^{*\alpha}(A) = 0_\alpha$ ise bu bağıntı hemen hemen her yerde sağlanır, ya da hemen hemen her x için sağlanır denir. Örneğin f ve g, Ω üzerinde tanımlanan $\mathbb{R}_\alpha$ değerli iki fonksyon ise, $f \overset{\alpha}{\leqslant} g$ hhy (hemen hemen her yerde) olması $\mu^{*\alpha}\left(\left\{x \in \Omega : f(x) \overset{\alpha}{>} g(x)\right\}\right) = 0_\alpha$. demektir. Benzer şekilde $\{f_n\}$ dizisi bir f fonkisyonuna hemen hemen her yerde yakınsaktır denildiğinde şu anlaşılmalıdır: Her $x \notin A$ için $\lim f_n(x) = f(x)$ sağlayacak biçimde α-ölçüsü sıfır olan bir A kümesi vardır.

Eğer $(\Omega, \mathcal{S}, \mu^\alpha)$ bir α-ölçü uzayı ise bir bağıntı hemen hemen her yerde sağlanıyor denildiği zaman, bu bağıntı μ^α tarafından üretilen $\mu^{*\alpha}$ α-dış ölçüsüne göre hemen hemen her yerde sağlanır denilmek istenildiği anlaşılmalıdır. İleride kullanacağımız temel hemen hemen her yerde bağıntılarına aşağıda yer verilecektir. Burada $(\Omega, \mathcal{S}, \mu^\alpha)$ verilen bir α-ölçü uzayı, f ve g ise Ω üzerinde tanımlı $\mathbb{R}_\alpha$ değerli fonksiyonlar olduğu kabul edilsin.

(1) $f = g$ hhy olması $\mu^{*\alpha}\left(\{x \in \Omega : f(x) \neq g(x)\}\right) = 0_\alpha$,

(2) $f \overset{\alpha}{\geqslant} g$ hhy olması $\mu^{*\alpha}\left(\left\{x \in \Omega : f(x) \overset{\alpha}{<} g(x)\right\}\right) = 0_\alpha$,

(3) $f_n \to f$ hhy olması $\mu^{*\alpha}\left(\{x \in \Omega : f_n(x) \nrightarrow g(x)\}\right) = 0_\alpha$,

(4) $f_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olması her n için $f_n \overset{\alpha}{\leqslant} f_{n+1}$ hhy ve $f_n \to f$ hhy,

(5) $f_n \overset{\alpha}{\downarrow} f$ hhy olması her n için $f_{n+1} \overset{\alpha}{\leqslant} f_n$ hhy ve $f_n \to f$ hhy

olduğu anlamına gelir.

3.2.17. Tanım

Bir $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ bir fonksiyonu için $\mathbb{R}_\alpha$'daki her bir açık O alt kümesi için $f^{-1}(O)$ α-ölçülebilir bir küme ise f fonksiyonuna α-ölçülebilir fonksiyon denir.

Her sabit fonksiyon α-ölçülebilirdir. Gerçekten, her $x \in \Omega$ için $f(x) = \alpha(c)$ ve O kümesi $\mathbb{R}_\alpha$'nın bir açık kümesi olarak alınırsa, $c \notin O$ iken $f^{-1}(O) = \varnothing$ ve eğer $c \in O$ iken $f^{-1}(O) = \Omega$ olur.

3.2.18. Teorem

Bir $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) f α-ölçülebilirdir.

(2) $\mathbb{R}_\alpha$'nın her bir sınırlı açık $(a, b)_\alpha$ aralığı için $f^{-1}((a, b)_\alpha)$ α-ölçülebilirdir.

(3) $\mathbb{R}_\alpha$'nın her bir kapalı C kümesi için $f^{-1}(C)$ α-ölçülebilirdir.

(4) Her $a \in \mathbb{R}_\alpha$ için $f^{-1}([a, \infty_\alpha)_\alpha)$ α-ölçülebilirdir.

(5) Her $a \in \mathbb{R}_\alpha$ için $f^{-1}((-\infty_\alpha, a]_\alpha)$ α-ölçülebilirdir.

(6) $\mathbb{R}_\alpha$'nın Her bir B α-Borel alt kümesi için $f^{-1}(B)$ α-ölçülebilirdir.

3.3. α-Basit ve α-Adım Fonksiyonlar

3.3.1. Tanım

Ω kümesinin bir alt kümesi A olmak üzere $x \in A$ $\chi_A^\alpha(x) = 1_\alpha$ ve $x \notin A$ iken $\chi_A^\alpha(x) = 0_\alpha$ (başka bir deyişle $\chi_A^\alpha = \alpha \circ \chi_A$) biçiminde tanımlanan $\chi_A^\alpha : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ küme fonksiyonuna A kümesinin *α-karakteristik fonksiyonu* denir.

A ve B, Ω kümesinin iki alt kümesi olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(1) $\chi_\varnothing^\alpha(x) = 0_\alpha$ ve $\chi_\Omega^\alpha(x) = 1_\alpha$

(2) $A \subseteq B \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \chi_B^\alpha & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \chi_B^\alpha & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases}$

(3) $\chi_{A\cap B}^\alpha = \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \chi_B^\alpha = \begin{cases} \chi_A^\alpha \wedge \chi_B^\alpha & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \chi_A^\alpha \vee \chi_B^\alpha & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases}$

(4) $\chi_{A\cup B}^\alpha = \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{+} \chi_B^\alpha \overset{\alpha}{-} \chi_{A\cap B}^\alpha = \begin{cases} \chi_A^\alpha \vee \chi_B^\alpha & , \quad \alpha \text{ artan} \\ \chi_A^\alpha \wedge \chi_B^\alpha & , \quad \alpha \text{ azalan} \end{cases}$

(5) $\chi_{A\setminus B}^\alpha = \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{-} \chi_{A\cap B}^\alpha$

(6) $\{A_i\}$ Ω'nın ayrık alt kümelerinin dizisi ve $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ise

$$\chi_A^\alpha = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}^\alpha = \alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{-1}\chi_{A_i}^\alpha\right) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}\right)$$

(7) $\chi_{A\times B}^\alpha = \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \chi_B^\alpha$ (burada B kümesi Ω'dan farklı bir kümenin alt kümesi olabilir).

Not

Ω kümesinin tüm elemanlarını 0_α sayısına eşleyen fonksiyon Θ_α ile gösterilecektir.

3.3.2. Tanım

Bir $\phi : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ α-ölçülebilir fonksiyonunun aldığı değerler sonlu sayıda ise bu fonksiyona *α-basit fonksiyon* denir.

Ayrıca α-basit fonksiyonların α-toplamı, α-dış çarpımı, sonlu α-supremumu ve α-infimumu yine α-basit fonksiyonlardır. Başka bir deyişle, α-basit fonksiyonların koleksiyonu bir fonksiyon uzayı oluşturur. Aynı zamanda bu fonksiyonların α-çarpımı da α basit fonksiyon olduğundan bu koleksiyon bir fonksiyon cebiridir.

ϕ bir α-basit fonksiyon ve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_\alpha$ α-sıfırdan farklı sayılar olsun. $A_i = \{x \in$

$\Omega : \phi(x) = a_i\}$ biçiminde tanımlanan kümeler ayrık ve α-ölçülebilir kümelerdir. Ayrıca

$$\phi = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi_{A_i}^{\alpha} = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(a_i).\alpha^{-1}\chi_{A_i}^{\alpha}\right) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(a_i)\chi_{A_i}\right)$$

sağlanır. Bu ifadeye ϕ fonksiyonunun *α-standart temsili* denir. Özel olarak Θ_α sabit fonksiyonunun standart temsili için $\chi_{\varnothing}^{\alpha}$ kullanılacaktır. Genel olarak, $b_j \in \mathbb{R}_\alpha$ ve tüm B_j kümeleri α-ölçülebilir olmak üzere, ϕ α-basit fonksiyonunun $\phi = \alpha\text{-}\sum\limits_{j=1}^{m} b_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi_{B_j}^{\alpha} = \alpha\left(\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha^{-1}(b_i)\chi_{B_j}\right)$ biçimindeki temsili tek değildir.

3.3.3. Tanım

Bir ϕ α-basit fonksiyonunun standart temsili $\phi = \alpha\text{-}\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi_{A_i}^{\alpha}$ olsun. Her i sayısı için A_i kümeleri sonlu α-ölçüye sahip (yani $\mu^\alpha(A_i) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$) α-ölçülebilir kümeler ise bu fonksiyona *α-adım fonksiyon* denir.

Bahsedilen α-adım fonksiyonlarının koleksiyonu bir fonksiyon uzayıdır ve aynı zamanda da bir fonksiyon cebiridir. Bu fonksiyonlar α-integral teorisinin yapıtaşları oldukları için büyük önem taşırlar.

3.3.4. Tanım

Bir ϕ α-adım fonksiyonu için $A_i = \{x \in \Omega : \phi(x) = a_i\}$ biçimindeki kümeler ayrık kümeler, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_\alpha$ sayıları ϕ fonksiyonunun sıfırdan ve birbirinden farklı değerleri, ve ϕ fonksiyonunun standart temsili $\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi_{A_i}^{\alpha}$ olsun. Bu durumda ϕ fonksiyonunun *α-Lebesgue integrali*

$$I_\alpha(\phi) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \mu^{*\alpha}(A_i) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha^{-1}(a_i)\alpha^{-1}\mu^{*\alpha}(A_i)\right)$$

biçiminde tanımlanır.

Bir ϕ fonksiyonunun α-Lebesgue integralini ifade etmek için sonraki kısımlarda α-$\int\limits_{\Omega} \phi d\mu^\alpha$ ya da kısaca α-$\int \phi d\mu^\alpha$ kullanılacaktır. Fakat bu bölüm boyunca sadeliği korumak için $I_\alpha(\phi)$ sembolü tercih edilecektir.

3.3.5. Teorem

ϕ ve ψ fonksiyonları birer α-adım fonksiyonu olsun. (1) $\phi \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hhy ise $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ olur. Özellikle $\phi \overset{\alpha}{\geqslant} \psi$ hhy ise $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{\geqslant} I_\alpha(\psi)$ sağlanır.
(2) $\phi = \Theta_\alpha$ hhy ise $I_\alpha(\phi) = 0_\alpha$ olur. Özellikle $\phi = \psi$ hhy ise $I_\alpha(\phi) = I_\alpha(\psi)$ sağlanır.

İspat

(1) ϕ fonksiyonunun standart temsili $\phi = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{m} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{A_i}$ olsun. $\phi \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hhy olduğundan, bazı i sayıları için $a_i \overset{\alpha}{<} 0_\alpha$ ise bu i sayıları için $\mu^{*\alpha}(A_i) = 0_\alpha$ olur. Bu yüzden $I_\alpha(\phi) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{\alpha}{\cdot} \mu^\alpha(A_i) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ eşitsizliği sağlanır.
Ayrıca $\phi \overset{\alpha}{\geqslant} \psi$ hhy ise $\phi \overset{\alpha}{-} \psi \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ hhy olur ve böylece $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{-} I_\alpha(\psi) = I_\alpha\left(\phi \overset{\alpha}{-} \psi\right) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ elde edilir. Bu yüzden $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{\geqslant} I_\alpha(\psi)$ sağlanır.
(2) $\phi = \Theta_\alpha$ hhy ise aynı anda hem $\phi \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hem de $\overset{\alpha}{-}\phi \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ sağlanır. Bu yüzden ispatın (1) kısmından dolayı $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ ve $\overset{\alpha}{-}I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ elde edilir. Böylece $I_\alpha(\phi) = 0_\alpha$ olur. Ayrıca $\phi = \psi$ hhy ise $\phi \overset{\alpha}{-} \psi = \Theta_\alpha$ hhy olur ve böylece bir önceki durumdan dolayı $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{-} I_\alpha(\psi) = I_\alpha\left(\phi \overset{\alpha}{-} \psi\right) = 0_\alpha$ elde edilir. Yani $I_\alpha(\phi) = I_\alpha(\psi)$ sağlanır.

Bir sonraki teoremde α-Lebesgue integralinin temel bir süreklilik özelliğinden bahsedilecektir.

3.3.6. Teorem

$\{\phi_n\}$ α-adım fonksiyonlarının bir dizisi olsun. $\phi_n \overset{\alpha}{\downarrow} \Theta_\alpha$ hhy ise $I_\alpha(\phi_n) \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ olur. Özellikle ϕ bir α-adım fonksiyonu ve $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} \phi$ hhy ise $I_\alpha(\phi_n) \overset{\alpha}{\uparrow} I_\alpha(\phi)$ elde edilir.

İspat

Öncelikle $\phi_n \overset{\alpha}{\downarrow} \Theta_\alpha$ hhy olduğu kabul edilsin.

$A_n = \left\{x \in \Omega : \phi_{n+1} \overset{\alpha}{>} \phi_n(x)\right\}$ ve $A_0 = \{x \in \Omega : \phi_n(x) \nrightarrow 0_\alpha\}$

olsun. Kabulümüz gereğince $n = 0, 1, 2, \ldots$ sayıları için $\mu^{*\alpha}(A_n) = 0_\alpha$ olur.

Şimdi $A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ olsun. $\mu^{*\alpha}$ α-dış ölçüsünün $\sigma(\alpha)$-alt toplamsallığı kullanılırsa $\mu^{*\alpha}(A) = 0_\alpha$ elde edilir ve her bir $x \in A^c$ için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ ve $\phi_{n+1}(x) \overset{\alpha}{<} \phi_n(x)$ sağlanır. Ayrıca $\psi_n = \phi_n \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{A^c}$ ise ψ_n bir α-adım fonksiyonu olur ve her bir n sayısı için $\psi_n = \phi_n$ hhy elde edilir. Her bir $x \in \Omega$ için $\psi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ ve Teorem 3.3.5'den dolayı $I_\alpha(\psi_n) = I_\alpha(\phi_n)$ olur. Bu yüzden $\{\phi_n\}$ ile $\{\psi_n\}$ yer değiştirilirse genelliği bozmaksızın her bir $x \in \Omega$ için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ sağladığı kabul edilebilir.

$M = \overset{\alpha}{\max}\{\phi_1(x) : x \in \Omega\}$ ve $B = \left\{x \in \Omega : \phi_1(x) \overset{\alpha}{>} 0_\alpha\right\}$ olarak alınsın ve $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olsun. $\mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{<} \infty_a$ olduğu açık bir şekilde görülebilir. Ayrıca Her bir n sayısı için $E_n = \left\{x \in \Omega : \phi_n(x) \overset{\alpha}{>} \varepsilon\right\}$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\mu^{*\alpha}(E_1) \overset{\alpha}{<} \infty_a$, her bir E_n α-ölçülebilirdir ve her bir $x \in \Omega$ için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ olduğu gerekçesiyle $E_n \downarrow \varnothing$ olur. Teorem 3.2.14'den dolayı $\mu^{*\alpha}(E_n) \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ elde edilir. Bununla birlikte $\mu^{*\alpha}(E_k) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir k tamsayısı seçelim. Burada $n \geqslant k$ ise her bir $x \in B \diagdown E_k$ için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_k = \phi_k \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{E_k} \overset{\alpha}{+} \phi_k \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{B \diagdown E_k} \overset{\alpha}{\leqslant} M \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{E_k} \overset{\alpha}{+} \varepsilon \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_B$$

sağlandığı görülür ve bu ifade kullanılarak her $n \geqslant k$ için

$$0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} I_\alpha(\phi_n) \overset{\alpha}{\leqslant} M \overset{\alpha}{\cdot} \mu^{*\alpha}(E_k) \overset{\alpha}{+} \varepsilon \overset{\alpha}{\cdot} \mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{<} \varepsilon \overset{\alpha}{\cdot} \left[M \overset{\alpha}{+} \mu^{*\alpha}(B)\right]$$

elde edilir. Bu yüzden $\lim I_\alpha(\phi_n) = 0_\alpha$ olur.

Şunuda belirtmekte fayda var ki ϕ bir α-adım fonksiyonu ve $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} \phi$ hhy ise $\phi \overset{\alpha}{-} \phi_n \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ sağlanır. Böylece bir önceki durumdan dolayı $I_\alpha(\phi) \overset{\alpha}{-} I_\alpha(\phi_n) = I_\alpha\left(\phi \overset{\alpha}{-} \phi_n\right) \overset{\alpha}{=\downarrow} 0_\alpha$ olur. Sonuç olarak $I_\alpha(\phi_n) \overset{\alpha}{\uparrow} I_\alpha(\phi)$ elde edilir.

3.3.7. Teorem

$\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ α-adım fonksiyonlar dizileri olsun. Bir $f : \Omega \to [-\infty_\alpha, \infty_\alpha]$ fonksiyonu verilsin ve bu diziler için $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy ve $\psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy sağlansın. O halde

$$\lim_{n\to\infty} I_\alpha(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} I_\alpha(\psi_n)$$

sağlanır ve yukarıdaki limit muhtemelen α-sonsuz olur.

İspat

Öncelikle her bir sabit m sayısı için

$$\phi_m \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n \overset{\alpha}{\uparrow}_n \phi_m \overset{\alpha}{\wedge} f = \phi_m \text{ hhy}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3.6'den dolayı $\lim_{n\to\infty} I_\alpha\left(\phi_m \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right) = I_\alpha(\phi_m)$ olur. Her bir m ve n sayısı için $\phi_m \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n \overset{\alpha}{\leqslant} \psi_n$ hhy olduğu gerçeğinden yola çıkılır ve integralin monotonluğu kullanılırsa her m sayısı için

$$I_\alpha(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} I_\alpha\left(\phi_m \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right) \overset{\alpha}{\leqslant} \lim_{n\to\infty} I_\alpha(\psi_n)$$

elde dilir. Bu yüzden $\lim I_\alpha(\phi_n) \overset{\alpha}{\leqslant} \lim I_\alpha(\psi_n)$ sağlanır. Benzer şekilde $\lim I_\alpha(\psi_n) \overset{\alpha}{\leqslant} \lim I_\alpha(\phi_n)$ elde edilir. Böylece $\lim I_\alpha(\psi_n) = \lim I_\alpha(\phi_n)$ olur.

Bir sonraki teoremde α-adım fonksiyonların bir başka önemli özelliğinden bahsedilecektir.

3.3.8. Teorem

$\{\phi_n\}$ bir α-adım fonksiyonları dizisi olsun. Ω kümesinin bir alt kümesi A için $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} \chi_A^\alpha$ hhy ise A kümesi α-ölçülebilir bir kümedir ve $I_\alpha(\phi_n) = \mu^{*\alpha}(A)$ sağlanır.

İspat

A kümesinin α-ölçülebilirliği [16] Teorem 16.6 nın bir sonucudur. Şimdi her $x \in \Omega$

için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\uparrow} \chi_A^\alpha(x)$ sağlandığını kabul edelim. O halde her bir n asyısı için $A_n = \left\{x \in \Omega : \phi_n(x) \overset{\alpha}{>} 0_\alpha\right\}$ kümesi sonlu ölçüye sahip α-ölçülebilir bir kümedir ve $A_n \overset{\alpha}{\uparrow} A$ sağlanır. Bu yüzden $\chi_{A_n}^\alpha \overset{\alpha}{\uparrow} \chi_A^\alpha$ olur ve böylece

$$\lim_{n\to\infty} I_\alpha(\phi_n) = \lim_{n\to\infty} I_\alpha\left(\chi_{A_n}^\alpha\right) = \mu^{*\alpha}(A_n) = \mu^{*\alpha}(A)$$

elde edilir. Bu arada son eşitlik Teorem 3.2.14'den dolayı elde edilmiştir.

Bu kısıma α-ölçülebilir fonksiyonların önemli bir yaklaşım özelliğiyle nokta koyulacaktır.

3.3.9. Teorem

Bir $f : \Omega \to \mathbb{R}_a$ α-ölçülebilir fonksiyonu her x için $f(x) \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ koşulunu sağlasın. Bu durumda her $x \in \Omega$ için $0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n(x) \overset{\alpha}{\uparrow} f(x)$ ifadesini sağlayan bir $\{\phi_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisi vardır.

İspat

Her bir n ve $i = 1, 2, \ldots$için $A_n^i = \left\{x \in \Omega : \alpha(i-1) \overset{\alpha}{\cdot} \alpha(2^{-n}) \overset{\alpha}{\leqslant} f(x) < \alpha(i) \overset{\alpha}{\cdot} \alpha(2^{-n})\right\}$ olsun. Ayrıca $i \neq j$ iken $A_n^i \cap A_n^j = \varnothing$ olduğunuda belirtmekte fayda vardır. Bu f fonksiyonu α-ölçülebilir olduğu için her A_n^i α-ölçülebilir kümelerdir.

Her bir n için $\phi_n = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n2^n} \alpha(2^{-n}) \overset{\alpha}{\cdot} \alpha(i-1) \overset{\alpha}{\cdot} \chi_{A_n^i}^\alpha$ biçiminde tanımlansın. Burada $\{\phi_n\}$ dizisinin α-basit fonksiyonların bir dizisi olduğunu göz önünde bulundurunuz. Ayrıca her x ve her n için $0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n(x) \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_{n+1}(x) \overset{\alpha}{\leqslant} f(x)$ sağlandığı kolayca görülebilir. Üstelik x sabitlenirse yeterince büyük tüm n sayıları için $0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f(x) \overset{\alpha}{-} \phi_n(x) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha(2^{-n})$ eşitsizliği sağlanır. Böylece her x için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\uparrow} f(x)$ elde edilir.

Bir $f : \Omega \to \mathbb{R}_a$ α-ölçülebilir fonksiyonu hemen hemen bütün x elemanları için $f(x) \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ koşulunu sağlarsa $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olacak şekilde bir $\{\phi_n\}$ α-pozitif α-basit fonksiyonlar dizisi vardır. Bunu görmek için, bir $E = \left\{x \in \Omega : f(x) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha\right\}$ kümesi almak ve $f\chi_E^\alpha$ α-ölçülebilir fonksiyonuna Teorem 3.3.9'u uygulamak yeterlidir.

4. ÜRETİLEN LEBESGUE İNTEGRALİ

4.1. α-Üst Fonksiyonlar

4.1.1. Tanım

$\{\phi_n\}$ α-adım fonksiyonlarının bir dizisi olmak üzere,

$$\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f \text{ hhy} \quad \text{ve} \quad \alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$$

sağlanıyorsa $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonuna *α-üst fonksiyon* adı verilir.

Burada $\{\phi_n\}$ dizisine f fonksiyonunun *üreten dizisi* denir. Her α-adım fonksiyonu bir α-üst fonksiyondur. Her α-üst fonksiyon bir α-ölçülebilir fonksiyondur. Ancak her bir α-üst fonksiyonunun α-pozitif fonksiyon olması gerekmez.

Tüm α-üst fonksiyonların koleksiyonunu $\mathcal{U}_\alpha$ ile gösterilsin.

Bir f α-üst fonksiyonu $\{\phi_n\}$ dizisi tarafından üretilsin ve $\psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olsun. Bu durumda $\alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha$ eşitliği sağlanır. Böylece $\{\psi_n\}$ dizisi de f fonksiyonunu üretir ve bu yüzden bir sonraki tanım anlamlı olur.

4.1.2. Tanım

Bir f α-üst fonksiyonu ve $\{\phi_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisi için $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olmak üzere

$$\alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha$$

ifadesine f fonksiyonunun *α-Lebesgue integrali* denir.

Bir α-üst fonksiyonun α-Lebesgue integrali, bu fonksiyonu üreten α-adım fonksiyonlar dizisinden bağımsızdır. Ayrıca f bir α-üst fonksiyon ve g fonksiyonu hemen hemen her yerde f fonksiyonuna eşit (yani $g = f$ hhy) ise g de bir α-üst fonksiyon olur ve aynı zamanda $\alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha$ eşitliği sağlanır.

4.1.3. Teorem

f ve g birer α-üst fonksiyon olsun.

(1) $f \overset{\alpha}{+} g$ bir α-üst fonksiyondur ve α-$\int \left(f \overset{\alpha}{+} g\right) d\mu^\alpha = \alpha$-$\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha$-$\int g d\mu^\alpha$ sağlanır.
(2) Her bir $k \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ için $k \overset{\alpha}{\cdot} f$ bir α-üst fonksiyondur ve α-$\int \left(k \overset{\alpha}{\cdot} f\right) d\mu^\alpha = k \overset{\alpha}{\cdot} \alpha$-$\int f d\mu^\alpha$ sağlanır.
(3) $f \overset{\alpha}{\vee} g$ ve $f \overset{\alpha}{\wedge} g$ birer α-üst fonksiyondur.

İspat

f ve g fonksiyonları için $\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ üreten dizilerini seçelim.

(1) $\left\{\phi_n \overset{\alpha}{+} \psi_n\right\}$'nın α-adım fonksiyonlarının bir dizisi olduğu ve $\phi_n \overset{\alpha}{+} \psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f \overset{\alpha}{+} g$ hhy sağlandığı açıktır. Böylece

$$\alpha\text{-}\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{+} \psi_n\right) d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\uparrow} \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha$$

elde edilir.
(2) Açıkça görülür.
(3) $\left\{\phi_n \overset{\alpha}{\vee} \psi_n\right\}$ ve $\left\{\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right\}$ dizilerinin α-adım fonksiyonlarının birer dizileri olduğunu göz önünde bulunduralım. Üstelik $\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f \overset{\alpha}{\wedge} g$ hhy ve $\lim \alpha$-$\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right) d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \lim \alpha$-$\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olduğundan $f \overset{\alpha}{\wedge} g$ bir α-üst fonksiyondur. Şimdi $f \overset{\alpha}{\vee} g$'nin bir α-üst fonksiyon olduğunu görmek için öncelikle $\phi_n \overset{\alpha}{\vee} \psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f \overset{\alpha}{\vee} g$ hhy sağlandığı görülmelidir. Daha sonra $\phi_n \overset{\alpha}{\vee} \psi_n = \phi_n \overset{\alpha}{+} \psi_n \overset{\alpha}{-} \phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n$ özelliğinden faydalanarak

$$\alpha\text{-}\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{\vee} \psi_n\right) d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right) d\mu^\alpha$$

elde edilir. Bu da

$$\alpha\text{-}\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{\vee} \psi_n\right) d\mu^\alpha \ \overset{\alpha}{\uparrow}\ \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha \ \overset{\alpha}{+}\ \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha \ \overset{\alpha}{-}\ \alpha\text{-}\int \left(f \overset{\alpha}{\wedge} g\right) d\mu^\alpha \ \overset{\alpha}{<}\ \infty_\alpha$$

olmasını gerektirir.

Bir sonraki teorem α-integralin $\mathcal{U}$ üzerinde monoton bir fonksiyon olduğunu ifade etmektedir.

4.1.4. Teorem

f ve g birer α-üst fonksiyon olsun. Eğer $f \overset{\alpha}{\geqslant} g$ hhy ise α-$\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha$-$\int g d\mu^\alpha$ sağlanır. Özellikle $f \in \mathcal{U}$ fonksiyonu için $f \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ hhy ise α-$\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ olur.

İspat

$\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ sırsasıyla f ve g fonksiyonları için birer üreten dizi olsun. Bu durumda $\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} g$ hhy sağlanır ve bu yüzden $\left\{\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right\}$ de g fonksiyonu için üreten bir dizidir. Teorem 3.3.5'den dolayı her bir n için α-$\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha$-$\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right) d\mu^\alpha$ elde edilir. Böylece

$$\alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \left(\phi_n \overset{\alpha}{\wedge} \psi_n\right) d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha$$

olur.

Bir f α-üst fonksiyonu için $f \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ hhy ise her bir n için $\psi_\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ hhy ve $\psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olacak biçimde bir $\{\psi_n\}$ α-adım fonksiyonlar dizisi olduğu göz önüne alınmalıdır. Bunu daha iyi anlayabilmek için $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ iken $\phi_n^+ \overset{\alpha}{\uparrow} f^+ = f$ hhy sağlandığı görülmelidir.

4.1.5. Teorem

Bir $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu için $f_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy ve α-$\lim \alpha$-$\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_a$ şartlarını sağlayacak bir $\{f_n\}$ α-üst fonksiyonlar dizisi varsa f fonksiyonu da bir α-üst fonksiyondur ve α-$\int f d\mu^\alpha = \alpha$-$\lim \alpha$-$\int f_n d\mu^\alpha$ olur.

İspat

Her bir i için $\phi_n^i \overset{\alpha}{\uparrow}_n f_i$ hhy sağlayacak biçimde bir $\{\phi_n^i\}$ α-adım fonksiyonlar dizisi seçilsin. Ayrıca her bir n için $\psi_n = \alpha$-$\bigvee_{i=1}^n \phi_n^i$ olsun. Bu arada her bir ψ_n α-adım fonksiyondur ve $\psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy sağlanır. Ayrıca Teorem 4.1.4'den dolayı her bir n için

$\psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f_n$ hhy olduğunu göz önünde bulunduralım. Bu da f fonksiyonunun bir α-üst fonksiyon olduğu anlamına gelir.

Her bir belirli i ve her $n \geqslant i$ için $\phi_n^i \overset{\alpha}{\leqslant} \psi_n$ olur ve bundan dolayı herbir i için α-$\int f_i d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha\text{-}\int \phi_n^i d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha$ sağlanır. Böylece

$$\alpha\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha$$

elde edilir.

İntegralin azalan diziler için önemli bir yakansaklık özelliği vardır. Bu özellik aslında pek de yabancı olmadığımız integralin α-sıra süreklilik özelliğidir.

4.1.6. Teorem

Bir $\{f_n\}$ α-üst fonksiyonlar dizisi için $f_n \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ hhy ise $\alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha = 0_\alpha$ sağlanır.

İspat

Öncelikle $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olsun. Her bir n için bir ϕ_n α-adım fonksiyonu seçilsin. Bu ϕ_n fonksiyonları için $0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n \overset{\alpha}{\leqslant} f_n$ hhy ve $\alpha\text{-}\int (f_n - \phi_n)\, d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \alpha(\varepsilon) \overset{\alpha}{\cdot} \alpha(2^{-n})$ olsun. Bu arada $\overset{\alpha}{-}\phi_n$ fonksiyonun da bir α-üst fonksiyon olduğunu unutmamak gerekir. Şimdi her bir n için $\psi_n = \alpha\text{-}\bigwedge_{i=1}^n \phi_i$ olsun. Bu durumda $\{\psi_n\}$ bir α-adım fonksiyonlar dizisi olur. Bu dizi her bir n için $0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \psi_{n+1} \overset{\alpha}{\leqslant} \psi_n$ eşitsizliğini sağlar. Ayrıca $\psi_n \overset{\alpha}{\leqslant} f_n$ hhy ve $f_n \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ olduğundan $\psi_n \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ hhy olduğu görülür. Teorem 3.3.6'den dolayı $\alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha = 0_\alpha$ elde edilir. Şimdi bir k tamsayısı seçilsin ve her $n \geqslant k$ için $\alpha\text{-}\int \psi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ sağlansın. Bununla birlikte hemen hemen her yerde

$$\begin{aligned} 0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f_n \overset{\alpha}{-} \psi_n = f_n \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\textstyle\bigwedge_{i=1}^n \phi_i = \alpha\text{-}\bigvee_{i=1}^n \left(f_n \overset{\alpha}{-} \phi_i\right) &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\textstyle\bigvee_{i=1}^n \left(f_i \overset{\alpha}{-} \phi_i\right) \\ &\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{i=1}^n \left(f_i \overset{\alpha}{-} \phi_i\right) \end{aligned}$$

ifadesinden faydalanılarak

$$\alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} \alpha\text{-}\int \left(f_i \overset{\alpha}{-} \phi_i\right) d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon \overset{\alpha}{\cdot} \left(\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} \alpha\left(2^{-i}\right)\right) = \varepsilon$$

elde edilir. Bunun bir sonucu olarak her $n \geqslant k$ için

$$0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} 2_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \varepsilon$$

olur bu da $\alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\downarrow} 0_\alpha$ sağlandığını gösterir.

4.2. α-Lebesgue İntegrallenebilir Fonksiyonlar

4.2.1. Tanım

Bir $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu için $f = u \overset{\alpha}{-} v$ hhy olacak şekilde u ve v α-üst fonksiyonları varsa f fonksiyonuna *α-Lebesgue integrallenebilir fonksiyon* denir ve bu fonksiyonun *α-Lebesgue integrali*

$$\alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int u d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int v d\mu^\alpha$$

biçiminde tanımlanır.

Bu integral f fonksiyonunun üst fonksiyonlarla temsilinden bağımsızdır. Yani u, v, u_1, v_1 birer α-üst fonksiyon olmak üzere $f = u - v = u_1 - v_1$hhy olsun. Böylece $\alpha\text{-}\int u \overset{\alpha}{\cdot} d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int v \overset{\alpha}{\cdot} d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int u \overset{\alpha}{\cdot} d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int v \overset{\alpha}{\cdot} d\mu^\alpha$ eşitliği sağlanır.

Her α-Lebesgue integrallenebilir fonksiyon α-ölçülebilirdir ve her α-üst fonksiyon α-Lebesgue integrallenebilirdir. Ayrıca daha önceden de bahsedildiği gibi f fonksiyonu α-Lebesgue integrallenebilir ve bir g fonksiyonu hemen hemen heryerde f'e eşit ($f = g$ hhy) ise g fonksiyonu da α-Lebesgue integrallenebilirdir ve $\alpha\text{-}\int f \overset{\alpha}{\cdot} d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int g \overset{\alpha}{\cdot} d\mu^\alpha$ eşitliği sağlanır.

4.2.2. Teorem

Eğer f α-integrallenebilir bir fonksiyon ve $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f$ *hhy* ise f bir α-üst fonksiyondur.

İspat

Öncelikle $f = u \overset{\alpha}{-} v$ hhy olacak şekilde u ve v α-üst fonksyonları seçelim. Bu u ve v hemen hemen her yerde α-adım fonksiyonlar dizilerinin limitleri oldukları için, $\psi_n \to f$ hhy olacak şekilde bir $\{\psi_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisi vardır. Ayrıca $f \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hhy olduğu için $\psi_n^+ \to f$ hhy olur. Teorem 3.3.9'den dolayı $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} s_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olacak şekilde bir α-basit fonksiyonlar dizisi vardır. Şimdi her bir n için $\phi_n = s_n \wedge (\vee_{i=1}^n \psi_n)$ olsun. O halde $\{\phi_n\}$, $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olacak şekilde bir α-adım fonksiyonları dizisidir. İspatı tamamlamak için α-$\int \phi_n d\mu^\alpha$ integralinin α-sınırlı olduğu gösterilmelidir. Gerçekten $\phi_n \overset{\alpha}{+} v \overset{\alpha}{\leqslant} f \overset{\alpha}{+} v \overset{\alpha}{\leqslant} u$ hhy olduğundan ve Teorem 4.1.4'den dolayı α-$\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha$-$\int v d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha$-$\int u d\mu^\alpha$ olur ve bu yüzden α-$\int \phi_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha$-$\int u d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha$-$\int v d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

Bir f fonksiyonu İntegrallenebilirse f^+ ve f^- birer α-üst fonksiyon olurlar ve $f = f^+ \overset{\alpha}{-} f^-$ biçiminde iki α-üst fonksiyonun farkı şeklinde yazılabilir. Özellikle de α-$\int f d\mu^\alpha = \alpha$-$\int f^+ d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha$-$\int f^- d\mu^\alpha$ olur. Bu eşitliği α-Lebesgue integrali tanımlamak için kullanacağız.

Bir önceki teoremin bir uygulaması olarak şu önemli sonuç elde edilir.

4.2.3. Teorem

Eğer f α-integrallenebilir bir fonksiyon ise, her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $\left\{x \in \Omega : |f(x)|_\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \varepsilon\right\}$ α-ölçülebilir kümesi sonlu α-ölçüye sahiptir.

İspat

Keyfi bir $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için, $A = \left\{x \in \Omega : |f(x)|_\alpha \overset{\alpha}{\geqslant} \varepsilon\right\}$ kümesi için $\varepsilon \overset{\alpha}{\cdot} \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} |f|_\alpha$ olduğunu hatırlayalım. Şimdi, $(1_\alpha \overset{\alpha}{/} \varepsilon) \overset{\alpha}{\cdot} |f|_\alpha$ α-integrallenebilir fonksiyonu Teorem 4.2.2'den dolayı bir α-üst fonksiyondur. $\{\phi_n\}$, $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} (1_\alpha \overset{\alpha}{/} \varepsilon) \overset{\alpha}{\cdot} |f|_\alpha$ hhy olacak şekilde bir α-adım fonksiyonları dizisi olsun. O halde $\{\phi_n \wedge \chi_A^\alpha\}$, $(\phi_n \wedge \chi_A^\alpha) \overset{\alpha}{\uparrow} \chi_A^\alpha$ hhy olacak şekilde bir α-adım fonksiyonları dizisidir. Bu yüzden Teorem 3.3.8'den dolayı

$$\mu^{*\alpha}(A) = \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \int (\phi_n \wedge \chi_A^\alpha)\, d\mu \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \int \phi_n d\mu^\alpha = (1_\alpha \overset{\alpha}{/} \varepsilon) \overset{\alpha}{\cdot} \int |f|_\alpha \, d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$$

olur ve bu da ispatı tamamlar.

Sıradaki teorem α-integrallenebilir iki fonksiyon arasına sıkışan α-ölçülebilir fonksiyonların α-integrallenebilir olduğunu göstermektedir.

4.2.4. Teorem

Kabul edelim ki f α-ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $h \overset{\alpha}{\leqslant} f \overset{\alpha}{\leqslant} g$ hhy olacak şekilde iki tane α-integrallenebiir fonksiyon varsa, f de α-integrallenebilir bir fonksiyondur.

İspat

Öncelikle $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f \overset{\alpha}{-} h \overset{\alpha}{\leqslant} g \overset{\alpha}{-} h$ hhy eşitsizliğini düşünelim. Genelliği bozmaksızın $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f \overset{\alpha}{\leqslant} g$ hhy sağlanır. Teorem 4.2.2'den dolayı, g bir α-üst fonksiyondur. Şimdi $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} g$ hhy olacak şekilde bir $\{\phi_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisini ele alalım. Teorem 3.3.9'den dolayı $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy olacak şekilde bir ψ_n α-basit fonksiyonlar dizisi vardır. Fakat $\{\phi_n \wedge \psi_n\}$ bir α-adım fonksiyonları dizisidir ve tüm k değerleri için α-$\int (\phi_k \wedge \psi_k)\, d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \int \phi_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ eşitsizliği sağlanır. Böylece $f \in \mathcal{U}$ olur ve bu yüzden f α-integrallenebilir bir fonksiyondur.

Bir sonraki teoremde α-integralle ilgili bir takım özellikler verilecektir.

4.2.5. Teorem

Eğer f ve g α-integrallenebilir fonksyonlar ise

(1) α-$\int |f|_\alpha\, d\mu^\alpha = 0_\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $f = \Theta_\alpha$ hhy olmasıdır.

(2) $f \overset{\alpha}{\geqslant} g$ hhy ise α-$\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha$-$\int g d\mu^\alpha$ olur.

(3) $\left|\alpha\text{-} \int f d\mu^\alpha\right|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha$-$\int |f|_\alpha\, d\mu^\alpha$ sağlanır.

İspat

(1) Açık bir şekilde, eğer $f = \Theta_\alpha$ hhy ise α-$\int |f|_\alpha\, d\mu^\alpha = 0_\alpha$ olur. Diğer bir yandan α-$\int |f|_\alpha\, d\mu^\alpha = 0_\alpha$ olduğunu kabul edelim. Teorem 4.2.2'den dolayı $|f|_\alpha$ bir α-üst fonksiyon olduğu için $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} |f|_\alpha$ hhy olacak şekilde bir $\{\phi_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisi

vardır. Teorem 4.1.4'den dolayı her bir n değeri için α-$\int \phi_n d\mu^\alpha = 0$ olur ve bu yüzden bu n değeri için $\phi_n = \Theta_\alpha$ hhy sağlanır. Böylece $|f|_\alpha$ hhy olur ve bu da $f = \Theta_\alpha$ hhy demektir.
(2) $f \overset{\alpha}{-} g \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hhy olduğundan Teorem 4.2.2'den dolayı $f \overset{\alpha}{-} g$ bir α-üst fonksiyondur. Fakat Teorem 4.1.4 α-$\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha$-$\int g d\mu^\alpha = \alpha$-$\int (f \overset{\alpha}{-} g) d\mu^\alpha$ olmasını gerektirir. Bu yüzden α-$\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha$-$\int g d\mu^\alpha$ sağlanır.
(3) $\overset{\alpha}{-} |f|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f \overset{\alpha}{\leqslant} |f|_\alpha$ eşitsizliği ve (2) sonucu kullanılarak $\left|\int f d\mu^\alpha\right| \overset{\alpha}{\leqslant} \int |f|_\alpha d\mu^\alpha$ olduğu kolayca görülür.

Şimdi α-integralin temel monotonluk özelliğinden bahseden Levi Teoremi ile devam edeceğiz.

4.2.6. Teorem

Kabul edelim ki $\{f_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisi, her bir n için $f_n \overset{\alpha}{\leqslant} f_{n+1}$ hhy ve α-$\lim\limits_{n\to\infty} \alpha$-$\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olsun. O halde $f_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy (ve bu yüzden α-$\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\uparrow} \alpha$-$\int f d\mu^\alpha$) olacak şekilde bir α-integrallenebilir f fonksiyonu vardır.

İspat

$\{f_n\}$ dizisini $\left\{f_n \overset{\alpha}{-} f_1\right\}$ dizisi ile değiştirelim ve gerekli ise, genelliği bozmaksızın her n için $f_n \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hhy sağlansın. Ayrıca tüm $x \in \Omega$ için $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} f_n \overset{\alpha}{\uparrow}$ kabul edilebilir. $I_\alpha = \alpha$-$\lim \alpha$-$\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olsun. Her bir $x \in \Omega$ için $g(x) = \alpha$-$\lim f_n(x) \in \mathbb{R}^*_\alpha$ olsun ve $E = \{x \in \Omega : g(x) = \infty_\alpha\}$ olacak şekilde E kümesini tanımlayalım. Açıkça $\bigcap_{i=1}^\infty \left[\bigcup_{n=1}^\infty \left\{x \in \Omega : f_n(x) \overset{\alpha}{>} \alpha(i)\right\}\right]$ sağlanır ve bu yüzden E α-ölçülebilir bir kümedir. Şimdi de $\mu^{*\alpha}(E) = 0_\alpha$ olduğunu gösterelim.

Teorem 4.2.2'den dolayı her bir f_n bir α-üst fonksiyondur. Bu yüzden her bir i değeri için $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \phi_n^i \overset{\alpha}{\uparrow} f_i$ hhy olacak şekilde bir $\{\phi_n^i\}$ α-adım fonksiyonları dizisi vardır. Her bir n değeri için $\psi_n = \alpha$-$\bigvee_{i=1}^n \phi_n^i$ olsun ve $\{\psi_n\}$ α-adım fonksiyonları dizisi için $\psi_n \overset{\alpha}{\uparrow} g$ hhy ayrıca α-$\lim \alpha$-$\int \psi_n d\mu^\alpha = \alpha$-$\lim \alpha$-$\int f_n d\mu^\alpha = I_\alpha$ olduğunu görelim. Özellikle her bir k değeri için $\left\{\psi_k \wedge k \overset{\alpha}{\cdot} \chi_E^\alpha\right\}$ α-adım fonksiyonları dizisi için $\psi_k \wedge k \overset{\alpha}{\cdot} \chi_E^\alpha \overset{\alpha}{\uparrow} k \overset{\alpha}{\cdot} \chi_E^\alpha$ hhy sağlanır. Teorem 3.3.8'den dolayı $\mu^{*\alpha}(E) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olur ve her bir k değeri için $k \overset{\alpha}{\cdot} \mu^{*\alpha}(E) \overset{\alpha}{\leqslant}$ α-$\lim \alpha$-$\int \psi_n d\mu^\alpha = I_\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ sağlanır. Bu yüzden $\mu^*_\alpha(E) = 0_\alpha$ olur.

Şimdi $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ $x \notin E$ ise $f(x) = g(x)$, $x \in E$ ise $f(x) = 0_\alpha$ olacak şekilde f fonksiyonu tanımlayalım. Böylece $f_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy sağlanır ve Teorem 4.1.5'i kullanılarsak ispatı sona erdirmiş oluruz.

Bir sonraki teorem bir önceki teoremin seri benzeşiminden bahsedecektir.

4.2.7. Teorem

Negatif olmayan bir $\{f_n\}$ α-adım fonksiyonlar dizisi ele alalım ve $\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olsun. O halde $\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ α-integrallenebilir bir fonksiyon tanımlar ve böylece $\alpha\text{-}\int \left(\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha$ olur.

İspat

Her bir n değeri için $g_n = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} f_i$ olsun . Ayrıca her bir g_n, $g_n \overset{\alpha}{\uparrow} \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ hhy olacak şekilde birer α-integrallenebilir fonksiyonlardır. Şimdi Levi Teoremi gereğince $\alpha\text{-}\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ α-integrallenebilir bir fonksiyon tanımlar ve $\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-}\int g_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int \left(\alpha\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu^\alpha$ sağlanır.

Sıradaki sonuç Fatou Lemması olarak bilinen önemli bir teoremdir.

4.2.8. Teorem

$\{f_n\}$ α-integrallenebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Ayrıca $f_n \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ hhy ve α-$\overset{\alpha}{\liminf} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ sağlansın. Öyleyse $\overset{\alpha}{\liminf} f_n$ α-integrallenebilir bir fonksiyon tanımlar ve $\alpha\text{-}\int \overset{\alpha}{\liminf} f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \overset{\alpha}{\liminf} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha$ olur.

İspat

Genelliği bozmaksızın, tüm $x \in \Omega$ ve tüm n için $f_n(x) \overset{\alpha}{\geqslant} \Theta_\alpha$ olduğunu kabul edelim. Belirli bir n ve tüm $x \in \Omega$ için, $g_n(x) = \overset{\alpha}{\inf} \{f_i(x) : i \geqslant n\}$ şeklinde tanımlansın. O zaman her g_n α-ölçülebilir bir fonksiyondur ve her bir n için $\Theta_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} g_n \overset{\alpha}{\leqslant} f_n$ sağlanır. Bu yüzden Teorem 4.2.4'den dolayı her g_n α-integrallenebilir bir fonksiyondur. Şimdi $g_n \overset{\alpha}{\uparrow}$ ve $\alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int g_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\overset{\alpha}{\liminf} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olduğunu gözlemleyelim. Böylece

Teorem 4.2.6'dan dolayı $g_n \overset{\alpha}{\uparrow} g$ olacak şekilde bir g α-integrallenebilir fonksiyonu vardır. Bu da $g = \overset{\alpha}{\liminf} f_n$ hhy olduğunu gösterir ve böylece $\overset{\alpha}{\liminf} f_n$ α-integrallenebilir bir fonksiyon tanımlar. Ayrıca α-$\int$ α-$\overset{\alpha}{\liminf} f_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-}\int g_n d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha$-$\overset{\alpha}{\liminf} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha$ sağlanır.

Şimdi α-integral teorisinin temel taşlarından biri olan Lebesque Baskın Yakınsaklık Teoreminden bahsedeceğiz.

4.2.9. Teorem

$\{f_n\}$ α-integrallebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Tüm n ve bazı belirli α-integrallenebilir g fonksiyonları için $|f_n|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} g$ hhy olsun. $f_n \overset{\alpha}{\to} f$ hhy ise, f α-integrallenebilir bir fonksiyon tanımlar ve $\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha$ olur.

İspat

Açıkça $|f|_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} g$ *hhy* olur ve. Teorem 4.2.4'den dolayı f α-integrallenebilirdir. Ayrıca $\left\{g \overset{\alpha}{-} f_n\right\}$ dizisinin Teorem 4.2.8 nın hipotezlerini sağladığı ve $\overset{\alpha}{\liminf}\ (g \overset{\alpha}{-} f_n) = g \overset{\alpha}{-} f$ hhy olduğu gözlemlenir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
\alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int (g \overset{\alpha}{-} f) d\mu &= \alpha\text{-}\int \overset{\alpha}{\liminf}\ (g \overset{\alpha}{-} f_n) d\mu^\alpha \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \overset{\alpha}{\liminf}\ \alpha\text{-}\int (g \overset{\alpha}{-} f_n) d\mu^\alpha \\
&= \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha \overset{\alpha}{-} \overset{\alpha}{\limsup}\ \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha
\end{aligned}$$

sağlanır ve böylece $\overset{\alpha}{\limsup}\ \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha$ olur. Benzer şekilde, Fatou Lemması $\left\{g \overset{\alpha}{+} f_n\right\}$ dizisi üzerine uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int (g \overset{\alpha}{+} f) d\mu^\alpha &= \alpha\text{-}\int \overset{\alpha}{\liminf}\ (g \overset{\alpha}{+} f_n) d\mu^\alpha \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \overset{\alpha}{\liminf}\ \alpha\text{-}\int (g \overset{\alpha}{+} f_n) d\mu^\alpha \\
&= \alpha\text{-}\int g d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \overset{\alpha}{\liminf}\ \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \overset{\alpha}{\liminf}\ \alpha\text{-}\int f d\mu^\alpha$ olur. Bu yüzden $\alpha\text{-}\lim \alpha\text{-}\int f_n d\mu^\alpha \in \mathbb{R}_\alpha$ ve

α-lim α-$\int f_n d\mu^\alpha = \alpha$-$\int f_n d\mu^\alpha$ sağlanır.

Bir sonraki teorem α-Lebesque integrallenebilir fonksiyonları bazı belirli özelliklere göre sınıflandırmamızı sağlayacaktır.

4.2.10. Teorem

(Ω, S, μ^α) bir α-ölçü uzayı olsun. (P) özelliğini α-integrallenebilir bir fonksiyonun sahip olacağı veya olmayacağı bir özellik olarak alalım ve aşağıdaki şartları kabul edelim.

(1) Eğer f ve g, (P) özelliğini sağlayan α-integrallenebilir fonksiyonlarsa $f \overset{\alpha}{+} g$ ve her $a \in \mathbb{R}_\alpha$ için $a \overset{\alpha}{\cdot} f$ de aynı özelliği sağlasın.
(2) Bir f α-integrallenebilir fonksiyonu için $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ iken α-$\int \left| f \overset{\alpha}{-} g \right|_\alpha d\mu^\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak biçimde (P) özelliğini sağlayan bir g fonksiyonu varsa f de (P) özelliğini sağlasın.
(3) $\mu(A) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olacak şekilde her bir $A \in S$ için α-karakteristik fonksiyon χ_A^α da (P) özelliğini sağlasın.

Bu şartlar sağlanırsa her α-integrallenebilir fonksiyon (P) özelliğini sağlar.

İspat

A kümesinin $\mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$ olacak şekilde bir σ-küme olduğunu farzedelim. Bu yüzden S kümesinin $\bigcup_{k=1}^n A_k = A$ olacak şekilde bir ayrık $\{A_n\}$ dizisi vardır. Her bir n için $\bigcup_{k=1}^n A_k = B_n$ olsun. Bu arada $B_n \overset{\alpha}{\uparrow} A$ olduğunu görelim. $\chi_{B_n}^\alpha = \alpha$-$\sum_{k=1}^n \chi_{A_k}^\alpha$ olduğu, (3) ve (1) kabulleriyle birleştirilirse, her bir n için $\chi_{B_n}^\alpha$ fonksiyonunun da (P) özelliğine sahip olduğu görülür. Ayrıca α-$\int \left| \chi_A^\alpha \overset{\alpha}{-} \chi_B^\alpha \right|_\alpha d\mu^\alpha = \mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{-} \mu^\alpha(B_n) \to 0_\alpha$ olduğundan ve (2) kabulünden dolayı χ_A^α da aynı şekilde (P) özelliğine sahiptir.

Şimdi, A kümesi sonlu α-ölçüye sahip herhangi bir α-ölçülebilir küme ve $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olsun. O halde $A \subseteq B$ ve $\mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{<} \mu^{*\alpha}(A) \overset{\alpha}{+} \varepsilon$ olacak şekilde bir B σ-kümesi vardır. Bu da α-$\int \left| \chi_A \overset{\alpha}{-} \chi_B \right|_\alpha d\mu^\alpha = \mu^{*\alpha}(B) \overset{\alpha}{-} \mu^\alpha(A)$. Yukarıda bahsettiklerimizden ve (2) kabulünden χ_A^α fonksiyonunun (P) özelliğini sağladığı çıkarılır. Bununla birlikte (1) kabulünden dolayı tüm α-adım fonksiyonlarının (P) özelliğini sağladığı anlaşılmalıdır. Fakat bu da (2) den dolayı her α-üst fonksiyonun (P) özelliğini sağladığını bize söyler. Tüm

α-integrallenebilir fonksiyonlar iki α-üst fonksiyonun α-farkı şeklinde yazılabildiğinden ve (1) kabulünden dolayı her α-integrallenebilir fonksiyonunun (P) özelliğini sağladığı anlaşılır.

Ω'nın her bir E alt kümesi için E kümesinin alt kümelerinin bir $S_E = \{E \cap A : A \in S\}$ koleksiyonu E'nin alt kümelerinin yarı halkasıdır (S_E'ye S yarı halkasının E ye kısıtlanışı denir). Ayrıca $E \subseteq \Omega$ α-ölçülebilir ise $\mu^{*\alpha}$ ölçüsünün S_E ye kısıtlanışı da bir α-ölçüdür. Yani her E α-ölçülebilir kümesi için $(E, S_E, \mu^{*\alpha})$ bir α-ölçü uzayıdır. Ayrıca $(E, S_E, \mu^{*\alpha})$ uzayının α-ölçülebilir kümelerinin, E'nin Ω'daki α-ölçülebilir alt kümelerinin olduğu doğrudan anlaşılır.

Eğer E, Ω'nın α-ölçülebilir bir alt kümesi ve f, $(E, S_E, \mu^{*\alpha})$ α-ölçü uzayına göre α-integrallenebilirse $f : E \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonuna E üzerinde α-integrallenebilir denir. Eğer $x \notin E$ ise $f(x) = 0_\alpha$ olarak alırsak f fonksiyonunun tanım kümesi Ω'ya genişletilebilir. Bu şekilde tanımlanmış olan f fonksiyonu için $\alpha\text{-}\int_\Omega f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int_E f d\mu^\alpha$ sağlanır. Eğer $f\chi_E^\alpha$ fonksiyonu Ω üzerinde α-integrallanebilirse ya da eş olarak f fonksiyonunun E'ye kısıtlanışı $(E, S_E, \mu^{*\alpha})$ α-ölçü uzayında α-integrallenebilirse bu $f : \Omega \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonuna Ω'nın bir E α-ölçülebilir alt kümesinde α-integrallenebilir denir. Bu durumda $\alpha\text{-}\int f\chi_E d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int_E f d\mu^\alpha$ olur.

Sıradaki teoremin ispatı basit olduğu için yapılmamıştır.

4.2.11. Teorem

Her α-integrallenebilir f fonksiyonu Ω'nın her bir α-ölçülebilir altkümesinde α-integrallenebilirdir. Ayrıca Ω'nın her bir α-ölçülebilir E altkümesi için

$$\alpha\text{-}\int_E f d\mu^\alpha \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int_{E^c} f d\mu^\alpha = \alpha\text{-}\int_\Omega f d\mu^\alpha$$

ifadesi sağlanır.

5. ÜRETİLEN İNTEGRALLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

5.1. α-Riemann İntegrali

Bu bölüm boyunca aksi belirtilmediği takdirde f fonksiyonu $[a,b]_\alpha \subseteq \mathbb{R}_\alpha$ üzerinde tanımlı α-sınırlı $\mathbb{R}_\alpha$ değerli kabul edilecektir. Eğer $a \overset{\alpha}{<} x_0 \overset{\alpha}{<} x_1 \overset{\alpha}{<} \ldots \overset{\alpha}{<} x_n = b$ olacak şekilde noktaların bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ koleksiyonuna $[a,b]_\alpha$ aralığının bir α-parçalanışı denir. Her bir P parçalanışı $[a,b]_\alpha$ aralığını $[x_0, x_1]_\alpha, [x_1, x_2]_\alpha, \ldots [x_{n-1}, x_n]_\alpha$ biçiminde n adet kapalı alt aralığa böler . Bu aralıklardan en büyük α-uzunluğa sahip olanın uzunluğuna P nin α-normu adı verilir ve $|P|_\alpha$ ile gösterilir; yani $|P|_\alpha = \overset{\alpha}{\max}\left\{x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1} : i = 1, \ldots, n\right\}$. P ve Q aynı aralığın iki α-parçalanışı olsun. $Q \subseteq P$ ise P daha iyi bir α-parçalanıştır denir. Ayrıca $P \cup Q$ da aynı aralığın bir α-parçanışıdır ve P ile Q'dan daha iyidir. Bir $[a,b]_\alpha$ aralığının α-parçalanışı $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, her $i = 1, \ldots, n$ için $m_i = \overset{\alpha}{\inf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]_\alpha\}$ ve $M_i = \overset{\alpha}{\sup}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]_\alpha\}$ olsun. O zaman f fonksiyonun α-alt toplamı

$$S_{*\alpha}(f,P) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} m_i \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1}\right)$$

Biçiminde tanımlanır. Benzer bir şekilde f fonksiyonun α-üst toplamı ise

$$S^{*\alpha}(f,P) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} M_i \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1}\right)$$

biçiminde tanımlanır.
Bir $[a,b]_\alpha$ aralığının her P α-parçalanışı için $S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,P)$ sağlandığı açıkça görülebilir.

5.1.1. Lemma

Eğer bir P α-parçalanışı Q α-parçalanışından daha iyiyse (yani $Q \subseteq P$ ise) aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir.

$$S_{*\alpha}(f,Q) \overset{\alpha}{\leqslant} S_{*\alpha}(f,P) \text{ ve } S^{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,Q)$$

İspat

Burada $S_{*\alpha}(f,Q) \overset{\alpha}{\leqslant} S_{*\alpha}(f,P)$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterilecektir. Diğeri ise benzer şekilde kolayca ispatlanabilir. Eşitsizliği kurabilmek için P'nin Q'dan yalnız bir tane noktasının fazla olduğunu varsayabiliriz. Bu noktaya t diyelim. Yani $Q = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ ve $P = Q \cup \{t\}$ olduğunu kabul edelim. O halde $x_{k-1} \overset{\alpha}{\leqslant} t \overset{\alpha}{\leqslant} x_k$ olacak şekilde en azından bir k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ sayısı vardır, ve böylece $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, t, x_k, \ldots, x_n\}$ olur. Ayrıca $c_1 = \overset{\alpha}{\inf}\{f(x) : x \in [x_{k-1}, t]_\alpha\}$ ve $c_2 = \overset{\alpha}{\inf}\{f(x) : x \in [t, x_k]_\alpha\}$ olsun. Açıkça $m_k \overset{\alpha}{\leqslant} c_1$ ve $m_k \overset{\alpha}{\leqslant} c_2$ olduğu görülebilir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}
S_{*\alpha}(f,Q) &= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} m_i \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1}\right) \\
&= \alpha\text{-}\sum_{i\neq k}^{n} m_i \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1}\right) \overset{\alpha}{+} m_k \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_k \overset{\alpha}{-} x_{k-1}\right) \\
&\overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{i\neq k}^{n} m_i \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1}\right) \overset{\alpha}{+} c_1 \overset{\alpha}{\cdot} \left(t \overset{\alpha}{-} x_{k-1}\right) \overset{\alpha}{+} c_2 \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_k \overset{\alpha}{-} t\right) \\
&= S_{*\alpha}(f,Q)
\end{aligned}$$

sağlanır ki bu da ispatı tamamlar.

5.1.2. Lemma

Herhangi iki α-parçalanış P ve Q için $S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,Q)$ sağlanır.

İspat

Lemma 5.1.2'den faydalanılırsa

$$S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{\leqslant} S_{*\alpha}(f,P\cup Q) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,P\cup Q) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,Q)$$

eşitsizliği sağlandığı kolayca görülebilir ve bu da ispatı tamamlar.

Lemma 5.1.2; her α-üst toplamın, f fonksiyonun α-alt toplamlarının koleksiyonu için bir üst sınır olduğunu gösterir. Benzer şekilde her α-alt toplam, f fonksiyonun α-üst toplamlarının koleksiyonu için bir alt sınırdır. Bu yüzden bir f fonksiyonun alt α-

Riemann integrali

$$I_{*\alpha}(f) = \overset{\alpha}{\sup}\{S_{*\alpha}(f,P) : P,\ \ [a,b]_\alpha \text{ aralığının bir } \alpha\text{-parçalanışı}\}$$

ve üst α-Riemann integrali

$$I^{*\alpha}(f) = \overset{\alpha}{\inf}\{S^{*\alpha}(f,P) : P,\ \ [a,b]_\alpha \text{ aralığının bir } \alpha\text{-parçalanışı}\}$$

biçiminde tanımlanırsa $[a,b]_\alpha$ aralığının her bir P ve Q α-parçalanışı için

$$S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{\leqslant} I_{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{\leqslant} I^{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,Q)$$

eşitsizliği sağlanır.

5.1.3. Tanım

Bir α-sınırlı $f : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonunun α-Rieman integrallenebilir olması $I_{*\alpha}(f) = I^{*\alpha}(f)$ olması demektir. Bu değere f fonksiyonun α-Rieman integrali denir ve α-$\int\limits_a^b f(x)dx$ biçiminde gösterilir.

5.1.4. Teorem

Bir α-sınırlı $f : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonunun α-Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ sayısı için $S^{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak şekilde $[a,b]_\alpha$ aralığının bir P α-parçalanışının var olmasıdır.

İspat

Bir f fonksiyonun Riemann α-integrallenebilir ve $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olduğunu kabul edelim. $I = \alpha$-$\int\limits_a^b f(x)dx$ olsun. Burada $I \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P_1) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ ve $S^{*\alpha}(f,P_2) \overset{\alpha}{-} I \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ ifadelerini sağlayacak şekilde $[a,b]_\alpha$ aralığının P_1 ve P_2 α-parçalanışları vardır. Önceki lemmadan dolayı $P =$

$P_1 \cup P_2$ α-parçalanışı için

$$\begin{aligned} S^{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P) &\overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,P_2) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P_1) \\ &= \left[S^{*\alpha}(f,P_2) \overset{\alpha}{-} I\right] + \left[I \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P_1)\right] \overset{\alpha}{<} \epsilon \overset{\alpha}{+} \epsilon = \alpha(2) \overset{\alpha}{\cdot} \epsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer bir taraftan eğer teoremin koşulu sağlanırsa o zaman

$$0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} I^{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{-} I_{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P)$$

eşitsizliği $[a,b]_\alpha$ aralığının her bir P α-parçalanışı için sağlandığından dolayı her $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ için $0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} I^{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{-} I_{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ elde edilir. Böylece $I^{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{-} I_{*\alpha}(f) = 0_\alpha$ ya da başka bir değişle $I^{*\alpha}(f) = I_{*\alpha}(f)$ olduğu görülür ki, bu da f fonksiyonun α-Riemann integrallenebilir olduğu anlamına gelir.

Şimdi $[a,b]_\alpha$ aralığının bir parçalanışı $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. Her bir $i = 1, \ldots, n$ için $x_{i-1} \overset{\alpha}{\leqslant} t_i \overset{\alpha}{\leqslant} x_i$ olacak şekilde bir $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ noktalar koleksiyonunu alalım.Bu koleksiyon P için bir noktalar seçimi diye adlandırılır ve

$$\alpha\text{-}R_f(P,T) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_i \overset{\alpha}{-} x_{i-1}\right)$$

ifadesine P α-parçalanışı ile ilişkilendirilen α-Riemann toplamı denir. Sıradaki teorem α-Riemann integrali için güçlü bir yaklaşım teklifi sunar.

5.1.5. Teorem

$f : [a,b]_\alpha \rightarrow \mathbb{R}_\alpha$ α-Rieman integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $\{P_n\}$, $[a,b]_\alpha$ aralığının α-parçalanışlarının bir dizisi ve $\lim |P_n|_\alpha = 0_\alpha$ olsun. Bu durumda

$$\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} S_{*\alpha}(f,P_n) = \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} S^{*\alpha}(f,P_n) = \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx$$

olur. Özel olarak $\{P_n\}$, $[a,b]_\alpha$ aralığının α-parçalanışlarının bir dizisi, $\lim |P_n|_\alpha = 0_\alpha$

ve T_n de P_n için noktalar seçimi ise

$$\alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-}R_f(P_n, T_n) = \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx$$

olur.

İspat

Her $x \in [a,b]$ için $|f(x)|_\alpha \overset{\alpha}{<} c$ olacak şekilde bir $c \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ seçelim ve $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olsun. Teorem 5.1.4'den dolayı $[a,b]_\alpha$ aralığının $S^{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ parçalanışı olduğunu biliyoruz. Her $n \geqslant n_0$ için $|P_n|_\alpha \overset{\alpha}{<} \varepsilon \overset{\alpha}{/} \left[2_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} c \overset{\alpha}{\cdot} m\right]$ ve $|P_n|_\alpha \overset{\alpha}{<} \min\left\{x_1 \overset{\alpha}{-} x_0, x_2 \overset{\alpha}{-} x_1, \ldots x_m \overset{\alpha}{-} x_{m-1}\right\}$ olacak şekilde bir n_0 seçelim. $P_n = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ olsun ve $n \geqslant n_0$ sabitleyelim. Her $j = 1, 2, \ldots, m$ için

$$M_j^P = \overset{\alpha}{\sup}\left\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]_\alpha\right\} \text{ ve } m_j^P = \overset{\alpha}{\inf}\left\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]_\alpha\right\}$$

ve her $i = 1, 2, \ldots, k$ için

$$M_i = \overset{\alpha}{\sup}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]_\alpha\} \text{ ve } m_i = \overset{\alpha}{\inf}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]_\alpha\}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P_n) &\overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,P_n) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P_n) \\ &= \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{k}\left(M_i \overset{\alpha}{-} m_i\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(t_i \overset{\alpha}{-} t_{i-1}\right) = V \overset{\alpha}{+} W \end{aligned}$$

olur. Ancak burada $[t_i, t_{i-1}]_\alpha$ aralıkları tamamıyla P parçalanışının bazı alt aralıklarının içerisinde olmak üzere V, $\left(M_i \overset{\alpha}{-} m_i\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(t_i \overset{\alpha}{-} t_{i-1}\right)$ terimlerinin α-toplamı iken ve W ise kalan terimlerin α-toplamıdır. V ve W α-toplamlarını ayrı ayrı hesaplayacağız.

Öncelikle V hesaplansın. Burada $[t_{i-1}, t_i]_\alpha \subseteq [x_{j-1}, x_j]_\alpha$ için her bir Σ_j, $\left(M_i \overset{\alpha}{-} m_i\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(t_i \overset{\alpha}{-} t_{i-1}\right)$ terimlerinin α-toplamı olmak üzere $V = \Sigma_1 \overset{\alpha}{+} \ldots \overset{\alpha}{+} \Sigma_m$ dir. Fakat, $[t_{i-1}, t_i]_\alpha \subseteq [x_{j-1}, x_j]_\alpha$ ise $M_i \overset{\alpha}{-} m_i \overset{\alpha}{\leqslant} M_j^P \overset{\alpha}{-} m_j^P$ sağlanır. Ayrıca $[x_{j-1}, x_j]_\alpha$ içerisindeki P_n parçalanışının bu alt aralıklarının α-uzunlukları toplamı hiç bir zaman $x_j \overset{\alpha}{-} x_{j-1}$ dan büyük olamaz. Bu yüzden, $\Sigma_j \overset{\alpha}{\leqslant} \left(M_j^P \overset{\alpha}{-} m_j^P\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_j \overset{\alpha}{-} x_{j-1}\right)$ sağlanır ve böylece

$$V \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\sum_{i\neq k}^{n} \left(M_j^P \overset{\alpha}{-} m_j^P\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(x_j \overset{\alpha}{-} x_{j-1}\right) = S^{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$$

olur. Şimdi de W hesaplansın. W toplamının bir terimi $\left(M_i \overset{\alpha}{-} m_i\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(t_i \overset{\alpha}{-} t_{i-1}\right)$ olsun. $|P_n| \overset{\alpha}{<} \min\left\{x_j \overset{\alpha}{-} x_{j-1} : j = 1, \ldots, m\right\}$ olduğundan $1 \leqslant j \leqslant n$ olmak üzere $x_{j-1} \overset{\alpha}{<} t_{i-1} \overset{\alpha}{<} x_j \overset{\alpha}{<} t_i \overset{\alpha}{<} x_{j+1}$ koşulunu sağlayan yalnız bir tane j vardır. Bu yüzden W toplamı en çok m terime sahiptir ve

$$\left(M_i \overset{\alpha}{-} m_i\right) \overset{\alpha}{\cdot} \left(t_i \overset{\alpha}{-} t_{i-1}\right) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha(2) \overset{\alpha}{\cdot} c \overset{\alpha}{\cdot} |P_n| \overset{\alpha}{<} \alpha(2) \overset{\alpha}{\cdot} c \overset{\alpha}{\cdot} \left(\epsilon \overset{\alpha}{/} \left[\alpha(2) \overset{\alpha}{\cdot} c \overset{\alpha}{\cdot} m\right]\right) = \varepsilon \overset{\alpha}{/} \alpha(m)$$

olduğundan $W \overset{\alpha}{<} \alpha(m) \overset{\alpha}{\cdot} \left(\varepsilon \overset{\alpha}{/} \alpha(m)\right) = \varepsilon$ olur. Böylece her $n \geqslant n_0$ için

$$0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f,P_n) \overset{\alpha}{\leqslant} V \overset{\alpha}{+} W \overset{\alpha}{<} \varepsilon \overset{\alpha}{+} \varepsilon = \alpha(2) \overset{\alpha}{\cdot} \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\lim S_{*\alpha}(f,P_n) = \alpha\text{-}\int_a^b f(x) \overset{\alpha}{\cdot} dx$ olur.

Benzer şekilde her $n \geqslant n_0$ için $\lim S^{*\alpha}(f,P_n) \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx \overset{\alpha}{\leqslant} V \overset{\alpha}{+} W \overset{\alpha}{<} \varepsilon \overset{\alpha}{+} \varepsilon = 2_\alpha \overset{\alpha}{\cdot} \varepsilon$ sağlanır bu yüzden

$$S_{*\alpha}(f,P_n) \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}R_f(P_n,T_n) \overset{\alpha}{\leqslant} S^{*\alpha}(f,P_n)$$

eşitsizliği yardımıyla $\lim S^{*\alpha}(f,P_n) = \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.2. α-Lebesgue İntegrali Olarak α-Riemann İntegrali

Bu bölümde α-Lebesgue integralin α-Riemann integralinin bir genelleştirilmesi olduğundan bahsedebiliriz. Burada bir f fonksiyonunun α-Lebesgue integrallenebilir olması,

f fonksiyonun α-Lebesgue ölçüsüne göre α-integrallenebilir olması anlamına gelmektedir.

5.2.1. Teorem

Her α-Riemann integrallenebilir $f : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu α-Lebesgue integrallene bilirdir, ve bu iki integral çakışır; yani

$$\alpha\text{-}\int_a^b f(x)d\lambda^\alpha = \alpha\text{-}\int_a^b f(x)dx$$

olur.

İspat

Her bir n için $P_n = \{x_0, x_1, ...x_{2^n}\}$, $[a,b]_\alpha$ aralığını eşit α-uzunluğa sahip 2^n alt aralığa bölen bir parçalanış olsun. Bu aralıkların her birinin α-uzunluğu $\left(b \overset{\alpha}{-} a\right) \overset{\alpha}{\cdot} \alpha\left(2^{-n}\right)$ ve $x_i = a \overset{\alpha}{+} i \overset{\alpha}{\cdot} \left(b \overset{\alpha}{-} a\right) \overset{\alpha}{\cdot} \alpha\left(2^{-n}\right)$ olur. Ayrıca $m_i = \overset{\alpha}{\inf}\left\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]_\alpha\right\}$ ve $M_i = \overset{\alpha}{\sup}\left\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]_\alpha\right\}$ iken

$$\phi_n = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{2^n} m_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{[x_{i-1},x_i)_\alpha} \text{ ve } \psi_n = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{2^n} M_i \overset{\alpha}{\cdot} \chi^\alpha_{[x_{i-1},x_i)_\alpha}$$

olduğunu kabul edelim. Açık bir şekilde görebiliriz ki $\{\phi_n\}$ ve $\{\psi_n\}$ α-adım fonksiyonlar dizisi her $x \in [a,b)_\alpha$ için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\uparrow} \overset{\alpha}{\leqslant} f(x) \overset{\alpha}{\leqslant} \psi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow}$ ifadesi sağlanır.

Burada $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\uparrow} g(x)$ ve $\psi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} h(x)$ ise, Teorem 4.2.4'den dolayı, g ve h fonksiyonlarının ikisi de α-Lebesgue integrallenebilirdir ve her $x \in [a,b)_\alpha$ için $g(x) \overset{\alpha}{\leqslant} f(x) \overset{\alpha}{\leqslant} h(x)$ sağlanır. Ayrıca tanımdan $\alpha\text{-}\int_a^b \phi_n d\lambda^\alpha = S_{*\alpha}(f, P_n)$ ve $\alpha\text{-}\int_a^b \psi_n d\lambda^\alpha = S^{*\alpha}(f, P_n)$ sağlanır. Bununla birlikte $\psi_n(x) \overset{\alpha}{-} \phi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} h(x) \overset{\alpha}{-} g(x) \overset{\alpha}{\geqslant} 0_\alpha$ olduğu için

$$0_\alpha \overset{\alpha}{\leqslant} \alpha\text{-}\int_a^b \left(h \overset{\alpha}{-} g\right) d\lambda^\alpha = \alpha\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha\text{-}\int_a^b \left(\psi_n \overset{\alpha}{-} \phi_n\right) d\lambda^\alpha$$

$$= \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \int_a^b \psi_n d\lambda^\alpha \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \int_a^b \phi_n d\lambda^\alpha$$

$$= \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} S^{*\alpha}(f, P_n) \overset{\alpha}{-} \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} S_{*\alpha}(f, P_n) = 0_\alpha$$

elde edilir. Bu arada eşitliğin son kısmını bir önceki teoremin bir sonucudur. Bu da $h \overset{\alpha}{-} g = \Theta_\alpha$ hhy ve böylece $h = g = f$ hhy olmasını gerektirir. Özel olarak $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ hhy ve $\psi_n \overset{\alpha}{\downarrow} f$ hhy sağlanır bu bize f fonksiyonun α-Lebesgue integrallenebilir olduğunu hatta bir α-üst fonksiyon olduğunu gösterir. Sonuç olarak

$$\alpha\text{-} \int_a^b f d\lambda^\alpha = \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} \alpha\text{-} \int_a^b \phi_n d\lambda^\alpha = \alpha\text{-} \lim_{n\to\infty} S_{*\alpha}(f, P_n) = \alpha\text{-} \int_a^b f(x)dx$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

5.2.2. Teorem

Bir α-sınırlı $f : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonunun α-Lebesque integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart hemen hemen her yerde α-sürekli olmasıdır.

İspat

Her bir n için P_n, ϕ_n, ve ψ_n bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi kabul edilsin. Ayrıca f fonksiyonunun α-Riemann integrallenebilir olduğu kabul edilsin. Bir önceki teoremin ispatına bakıldığında her bir $x \notin A$ için $\phi_n(x) \overset{\alpha}{\uparrow} f(x)$ ve $\psi_n(x) \overset{\alpha}{\downarrow} f(x)$ olacak şekilde $[a,b]_\alpha$ aralığının α-Lebesgue ölçüsüne göre bir A α-null altkümesi olduğu anlaşılır. Açık bir şekilde eğer $D = A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n)$ ise D'nin α-Lebesgue ölçüsü 0_α'a eşittir. Üstelik f fonksiyonunun $[a,b]_\alpha \setminus D$ üzerinde α-sürekli olduğunu iddia ediyoruz.

Şimdi iddiamızı doğrulamaya çalışacağız. Öncelikle $s \in [a,b]_\alpha \setminus D$ ve $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ olsun. Şimdi de $f(s) \overset{\alpha}{-} \phi_n(s) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ ve $\psi_n(s) \overset{\alpha}{-} f(s) \overset{\alpha}{<} \varepsilon$ olacak şekilde bazı n değerleri seçelim. Böylece $s \in (x_{i-1}, x_i)_\alpha$ olacak şekilde P_n α-parçalanışının bir $[x_{i-1}, x_i]_\alpha$ alt aralığı vardır. Açıkça görülebilir ki $\phi_n(s) = m_i$ ve $\psi_n(s) = M_i$ olur. Bu yüzden $x \in (x_{i-1}, x_i)_\alpha$ ise

$$\overset{\alpha}{-}\varepsilon \overset{\alpha}{<} m_i \overset{\alpha}{-} f(s) \overset{\alpha}{\leqslant} f(x) \overset{\alpha}{-} f(s) \overset{\alpha}{\leqslant} M_i \overset{\alpha}{-} f(s) \overset{\alpha}{<} \varepsilon \tag{*}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $(x_{i-1}, x_i)_\alpha$ aralığı s için bir komşuluk olduğundan son eşitsizlik f fonksiyonunun s de α-sürekli olduğunu gösterir. Bu da f fonksiyonunun hemen hemen her yerde sürekli olduğunu anlamına gelir.

Diğer bir yandan, f fonksiyonunun hemen hemen her yerde α-sürekli olduğunu kabul edelim. Ayrıca $s \neq b$, bu fonksiyonun sürekli olduğu bir nokta olsun. Bir $\varepsilon \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ sayısı verilmiş olsun ve bir de $\delta \overset{\alpha}{>} 0_\alpha$ sayısı seçelim. Bu δ her $x \in [a, b]_\alpha$ için $\left| x \overset{\alpha}{-} s \right|_\alpha \overset{\alpha}{<} \delta$ ve

$$f(s) \overset{\alpha}{-} \epsilon \overset{\alpha}{<} f(x) \overset{\alpha}{<} f(s) \overset{\alpha}{+} \epsilon$$

eşitsizliklerini sağlasın. $|P_k|_\alpha \overset{\alpha}{<} \delta$ olacak şekilde bazı k değerleri seçelim. O halde P_k'nın bazı $[x_{i-1}, x_i]_\alpha$ alt aralıkları için $s \in [x_{i-1}, x_i)_\alpha$ olmak zorundadır. Özel olarak her $x \in [x_{i-1}, x_i]_\alpha$ için $\left| x \overset{\alpha}{-} s \right|_\alpha \overset{\alpha}{<} \delta$ sağlanmak zorundadır ve $(*)$ dan dolayı

$$f(s) \overset{\alpha}{-} \varepsilon \overset{\alpha}{<} m_i = \phi_k(s) \overset{\alpha}{<} f(s) \overset{\alpha}{+} \varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca $\phi_n(s) \overset{\alpha}{\uparrow}$ olduğundan dolayı $\phi_n(s) \overset{\alpha}{\uparrow} f(s)$ elde edilir. Benzer şekilde $\psi_n(s) \overset{\alpha}{\downarrow} f(s)$ sağlanır.

Ayrıca f hemen hemen her yerde sürekli olduğu için $\phi_n \overset{\alpha}{\uparrow} f$ ve $\psi_n \overset{\alpha}{\downarrow} f$ ifadelerinin ikisinin de sağlandığı sonucuna varılır. Bu da f fonksiyonun α-Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösterir. Bununla birlikte Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoreminden dolayı

$$S_{*\alpha}(f, P_n) = \alpha\text{-}\int_a^b \phi_n d\lambda^\alpha \overset{\alpha}{\uparrow} \alpha\text{-}\int_a^b f d\lambda^\alpha \text{ ve } S^{*\alpha}(f, P_n) = \alpha\text{-}\int_a^b \psi_n d\lambda^\alpha \overset{\alpha}{\downarrow} \alpha\text{-}\int_a^b f d\lambda^\alpha$$

sağlanır. Bu yüzden $\lim \left[S^{*\alpha}(f, P_n) \overset{\alpha}{-} S_{*\alpha}(f, P_n) \right] = 0_\alpha$ ve böylece Riemann kriterinden yani Teorem 5.1.4'den dolayı f fonksiyonu α-Riemann integrallenebilirdir.

Bu teoremin direkt bir sonucu olarak sıradaki teoremi verebiliriz.

5.2.3. Teorem

Kapalı bir α-aralık üzerinde α-Riemann integrallenebilir fonksiyonların koleksiyonu bir fonksiyon uzayı oluşturur. Aynı zamanda bu koleksiyon bir fonksiyon cebiridir.

Şimdi α-sınırlı ve α-Lebesque integrallenebilir olup α-Riemann integrallenebilir olmayan fonksiyon örneği vereceğiz.

Örnek

Bir $f : [0_\alpha, 1_\alpha] \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu şu şekilde tanımlansın:

$$f(x) = \begin{cases} 0_\alpha & , \quad \alpha^{-1}(x) \text{ bir rasyonel sayı} \\ 1_\alpha & , \quad \alpha^{-1}(x) \text{ bir irrasyonel sayı} \end{cases}$$

Başka bir değişle f fonksiyonu $[0_\alpha, 1_\alpha]$ aralığındaki irrasyonel sayıların α-karakteristik fonksiyonu olsun. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonu $[0_\alpha, \alpha(1)]$ aralığındaki herbir noktada α-süreksizdir ve bu yüzden Lebesgue-Vitali teoremi bize f fonksiyonun α-Riemann integrallenebilir olmadığını gösterir. Diğer bir yandan $f(x) = 1_\alpha$ hhy sağlanır (rasyonel sayıların α-Lebesque ölçüsü 0_α olduğu için), ve bu yüzden f α-Lebesgue integrallenebilirdir. Hatta $\alpha\text{-}\int\limits_a^b f d\lambda^\alpha = 1_\alpha$ olur.

Lebesgue-Vitali Teoreminden çıkarılacak bir sonuç; bir $f : [a, b] \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonunun α-Riemann integrallenebilir olması durumunda bu fonksiyonun $[a, b]_\alpha$ aralığının herhangi bir kapalı alt aralığına kısıtlanışının da α-Riemann integrallenebilir olmasıdır. Aynı teoremden dolayı, f ve g fonksiyonları $[a, c]_\alpha$ ve $[c, b]_\alpha$ aralıkları üzerinde α-Riemann integrallenebilirlerse

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in [a, c]_\alpha \\ g(x) & , \quad x \in (c, b]_\alpha \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $h : [a, b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonunun da α-Riemann integrallenebilir olduğunu söyleyebiliriz.

Lebesgue-Vitali Teoremi sayesinde, kapalı bir aralıkta tanımlanan her α-sürekli f fonksiyonunun α-Riemann integrallenebilir olduğu açıkça görülür. Bir α-sürekli fonksiyonunun α-Riemann (ve böylece α-Lebesgue) integralini hesaplamak için genellikle kalkülüsün temel teoremi kullanılır.

5.2.4. Teorem

$f : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ bir α-sürekli fonksiyon olmak üzere

(1) $A : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ f fonksiyonun bir alan fonksiyonu ise (yani, her $x \in [a,b]_\alpha$ ve bazı $c \in [a,b]_\alpha$ için $A(x) = \alpha\text{-}\int\limits_c^x f(t)dt$ sağlanıyorsa) A, f fonksiyonun α-antitürevidir.

(2) $F : [a,b]_\alpha \to \mathbb{R}_\alpha$ fonksiyonu f fonksiyonun α-antitürevi ise,

$$\alpha\text{-}\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) \overset{\alpha}{-} F(a)$$

olur.

Diğer bir yandan

$$\alpha\text{-}\int\limits_b^a f(x)dx = \overset{\alpha}{-}\alpha\text{-}\int\limits_a^b f(x)dx$$

dir. Ayrıca $\alpha\text{-}\int\limits_a^a f(x)dx = 0_\alpha$ olur. Böylece sıra gözetmeksizin $[a,b]_\alpha$ aralığında alınan c, d ve e noktaları için şu önemli özellik

$$\alpha\text{-}\int\limits_c^d f(x)dx = \alpha\text{-}\int\limits_c^e f(x)dx \overset{\alpha}{+} \alpha\text{-}\int\limits_e^d f(x)dx$$

elde edilir.

Şimdi yukarıdaki sonuçları çok değişkenli fonksiyonlar için nasıl genişletebileceğimizden bahsedeceğiz. Genel durumda $[a,b]_\alpha$ aralığı yerine $J = [a_1,b_1]_\alpha \times \ldots \times [a_n,b_n]_\alpha$ hücresi gelir ve onun α-Lebesgue ölçüsü $\lambda^\alpha(J) = \alpha\text{-}\prod_{i=1}^{n}\left(b_i \overset{\alpha}{-} a_i\right)$ olur. Her bir $i = 1,\ldots,n$ için P_i, $[a_i,b_i]_\alpha$ aralığının bir α-parçalanışı olsun. Bu durumda J'nin bir P α-parçalanışı $P = P_1 \times \ldots \times P_n$ şeklindedir. Açıkça anlaşılabileceği üzere P parçalanışı J'yi sonlu sayıda alt hücrelere böler.

Burada $f : J \to \mathbb{R}_\alpha$ bir α-sınırlı fonksiyon ve P parçalanışı J'yi $J_1,\ldots,J_k$ alt hücrelerine bölüyorsa m_i ve M_i yine benzer bir şekilde tanımlanabilir;

$$\begin{aligned} m_i &= \overset{\alpha}{\inf}\left\{f(x_1,\ldots,x_n) : (x_1,\ldots,x_n) \in J_i\right\} \\ M_i &= \overset{\alpha}{\sup}\left\{f(x_1,\ldots,x_n) : (x_1,\ldots,x_n) \in J_i\right\} \end{aligned}$$

P α-parçalanışının ilişkilendirildiği alt ve üst α-toplamları

$$S_{*\alpha}(f,P) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{k} m_i \overset{\alpha}{\cdot} \lambda^\alpha(J_i) \text{ ve } S^{*\alpha}(f,P) = \alpha\text{-}\sum_{i=1}^{k} M_i \overset{\alpha}{\cdot} \lambda^\alpha(J_i)$$

biçiminde tanımlanır. Bu yüzden bir f fonksiyonun alt α-Riemann integrali

$$I_{*\alpha}(f) = \overset{\alpha}{\sup}\left\{S_{*\alpha}(f,P) : P,\ J\text{'nin bir parçalanışı}\right\}$$

ve üst α-Riemann integrali

$$I^{*\alpha}(f) = \overset{\alpha}{\inf}\left\{S^{*\alpha}(f,P) : P,\ J\text{'nin bir parçalanışı}\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Aynı bir boyutlu durumda olduğu gibi

$$\overset{\alpha}{-}\infty_\alpha \overset{\alpha}{<} I_{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{<} I^{*\alpha}(f) \overset{\alpha}{<} \infty_\alpha$$

sağlanır. Ayrıca $I_{*\alpha}(f) = I^{*\alpha}(f)$ ise f fonksiyonu α-Riemann integrallenebilir denir ve

f fonksiyonunun α-Riemann integrali

$$\alpha\text{-}\int_{a_1}^{b_1} \alpha\text{-}\int_{a_2}^{b_2} \dots \alpha\text{-}\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

biçiminde gösterilir.

Bu bölümdeki tüm sonuçlar genel durum için de geçerlidir ve ispatları bir boyutlu durumdakine çok benzer olduğundan yapılmamıştır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, aritmetik ve üreteç kavramından bahsedilmiş, bunlar vasıtasıyla bildiğimiz klasik kalkülüsün başka bir deyişle Newtonyan kalkülüsün dışında kalkülüslerin de elde edilebileceğinden bahsedilmiştir. Ayrıca şu ana kadar yapılmış çalışmalardan bahsedilmiş ve bu çalışmada neler yapılacağına dair bir ön bilgi verilmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde bu kalkülüslerin yapıtaşı olan, α -aritmetik adı verilen sistemler daha geniş bir perspektiften incelenmiş, örneklerle zenginleştirilmiştir ve çalışmamızın sonraki bölümlerinde kullanılacak bazı tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde α-ölçü, α-dış ölçü, α-ölçülebilir küme, α-ölçülebilir fonksiyon, α-basit fonksiyon ve α-adım fonksiyon gibi kavramlar tanımlanmış ve bu kavramlarla ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde ise asıl hedefimiz olan üretilen Lebesgue integrali tanımlanmış, integrallenebilirlik kavramı irdelenmiş bunlara ek olarak integral teorisinde önemli bir yere sahip olan Levi teoremi, Fatou Lemması ve Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi bu yeni integrale göre yorumlanmıştır. Beşinci bölümde ise üretilen Riemann integrali tanımı verilip üretilen Lebesgue integrali ile arasındaki ilişki incelenmiştir.

Çalışmamızın belli bir kısmından sonra üreteç dediğimiz fonksiyonlar artan olarak seçilmiştir. Bu fonksiyonların azalan olduğu durumda benzer yapılar elde edileceğinden bu duruma çalışmamızda yer verilmemiştir. Diğer bir yandan, üretecin monoton olmadığı durum bu konudaki çalışmalara farklı bir bakış açısı getirebilir. Ayrıca, bu çalışmada tanımladığımız üretilen Lebesgue integral kavramı latis teorisiyle birleştirilerek üretilen L_p uzayları tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

1. Grossman, M. and Katz, R. (1972). *Non-Newtonian calculus.* Pigeon Cove, Massachusetts: Lee Press, 32-51, 75-88.

2. Grossman, M. (1983). *Bigeometric Calculus: A System with a Scale-Free Derivative.* Rockport, Massachusetts: Archimedes Foundation, 54-93.

3. Bashirov, A. E., Kurpınar Mısırlı E. ve Özyapıcı, A. (2008). Multiplicative calculus and its applications. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 337(1), 36–48.

4. Özyapıcı, A. ve Kurpınar Mısırlı, E. (2008, August). *Notes on multiplicative calculus.* Paper presented at 20th International Congress of the Jangjeon Mathematical Society, Bursa.

5. Uzer, A. (2010). Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus. *Computers and Mathematics with Applications,* 60(10), 2725–2737.

6. İnternet: Bashirov, A. E. ve Rıza, M. Complex multiplicative calculus. *Arxiv.*URL: http://www.webcitation.org/query?url=https%3A%2F%2Farxiv.org%2Fabs%2F11 03.1462&date=2016-08-08. Son Erişim Tarihi: 08.08.2016.

7. İnternet: Bashirov, A. E. ve Rıza, M.. On Complex Multiplicative Integration. *Arxiv.*URL: http://www.webcitation.org/query?url=http%3A%2F%2Farxiv.org%2 Fabs%2F130 7.8293&date=2016-08-08. Son Erişim Tarihi: 08.08.2016.

8. Aniszewska, D. (2007). Multiplicative Runge-Kutta methods. *Nonlinear Dynamics*, 50(1-2), 265–272.

9. Bashirov, A.E., Mısırlı, E., Tandoğdu ve Y., Özyapıcı, A. (2011). On modeling with multiplicative differential equations. *Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities*, 26(4), 425–438.

10. Misirli, E. ve Gurefe, Y. (2011). Multiplicative Adams Bashforth–Moulton methods, *Numerical Algorithms*, 57(4), 425 - 439.

11. Kadak, U. ve Özlük, M. (2015). Generalized Runge-Kutta method with respect to the non-Newtonian calculus. *Abstract and Applied Analysis*, 2015.

12. Çakmak, A. F. ve Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-Newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*, 2012(228).

13. İnternet: Ozavsar, M. ve Cevikel, A. C.. Fixed points of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces. *Arxiv.*URL:

http://www.webcitation.org/query?url=https%3A%2F%2Farxiv.org%2Fabs%2F1205.5131&date=2016-08-08. Son Erişim Tarihi: 08.08.2016.

14. Binbaşıoğlu, D., Demiriz, S. ve Türkoğlu, D. (2016). Fixed points of non-Newtonian contraction mappings on non-Newtonian metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, 18(1), 213–224.

15. Bashirov, A. E. (2013). On line integrals and double multiplicative integrals. *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 3(1), 103 - 107.

16. Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. (1998). *Principles of real analysis* (Third edition). San Diego, California: Academic Press, 98-131, 161-187.

17. Pap, E. (Editör). (2002). *Handbook of Measure Theory 1,* , Amsterdam: Else- vier B.V., 29-59.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ÖZEKEN, Çetin Cemal
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	12.09.1986, Ankara
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	(0312)-202 1086
e-mail	:	cetinozeken@gazi.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek lisans	Gazi Üniversitesi/Matematik Böl.	Devam ediyor.
Lisans	ODTÜ/Matematik Böl.	2009
Lise	Sincan Sülayman Demirel Anadolu Lisesi	2004

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2010-2014	Orta Doğu Temel Lisesi	Matematik Öğretmeni
2014-devam ediyor	Gazi Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce, Almanca

Yayınlar

1. Çevik, C., Özeken, Ç.C. (2016). Completion of Multiplicative Metric Spaces. *Gazi University Journal of Science*, 29(3), 663-666.

Sempozyumlar

1. Ozeken, C.C., Cevik,C. (2015, November). *Lebesgue integration in the non-Newtonian sense.* International Conference on Advancements in Mathematical Sciences, Antalya Turkey

GAZİ GELECEKTİR...