

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİNCİ MERTEBEDEN YARI-LİNEER DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI**

**Tezi Hazırlayan
Ayşenur ÖNDER**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz 2009
KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK danışmanlığında **Ayşenur ÖNDER** tarafından hazırlanan “**İkinci Mertebeden Yarı-Linear Diferensiyel Denklemlerin Salınım Ve Salınımsızlığı**” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

05/08/2009

JÜRİ :

Başkan : Prof. Dr. Fuat GÜRCAN
Üye : Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK
Üye : Yrd. Doç. Dr. Nural YÜKSEL

ONAY :

Bu tezin kabulü Enstitü Yönetim Kurulunun 11/08/2009 tarih ve 2009/2.7.06 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

11/08/2009



N. Ayıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmamın bütün aşamalarında, her anlamda bana yardımcı olan, her konuda bilgi ve deneyimlerini bana aktaran ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK'e teşekkür eder, minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tez çalışmam sırasında maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen değerli eşim Yetkin ÖNDER'e ve tüm aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İKİNCİ MERTEBEDEN YARI-LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI

Ayşenur ÖNDER

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2009

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ÖZET

İkinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin çözümlerinin davranışı uygulamalı bilim dallarında geniş yer tutmaktadır. Diferensiyel denklemleri çözmeden çözümü hakkında konuşmak özellikle çözülemeyen diferensiyel denklemler için önemlidir. Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin çözümünü analitik olarak bulmak her zaman mümkün olmamaktadır. Bu nedenle çözümün salınımlılığı ya da salınımsızlığı hakkında konuşmak daha da zordur.

Bu çerçevede, tezimiz salınım ve salınımsızlık üzerine dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş bölümünü ve ikinci bölüm, ileriki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve kavramları içermektedir.

Üçüncü bölüm, ikinci mertebeden yarı-lineer

$$\left(\phi_p(\dot{x})\right)' + a(t)\phi_p(\dot{x}) + b(t)\phi_p(x) = 0$$

diferensiyel denklemlerle ilgili ilgilidir. Burada $\phi_p(z) = |z|^{p-2} z$ bir boyutlu p -Laplacian operatörü olarak adlandırılır. Esas amacımız, aşık olmaya tüm çözümlerin salınımlı ve salınımsızlığı için yeni kriterler vermektir. Teoremlerimizde $(a(t), b(t))$ ile verilen parametrik eğri, tüm çözümlerin salınımlı veya salınımsız olup olmadığının incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Temel olarak, burada kullandığımız metod, ikinci mertebeden yarı-lineer diferensiyel denkleminde $y = \phi_p(\dot{x})$ dönüşümü yaparak bu diferensiyel denkleme denk olan

$$\dot{x} = \phi_{p^*}(y) \quad \dot{y} = -a(t)y - b(t)\phi_p(x)$$

şeklindeki bir sistem için faz düzlem analizini yapmaktır.

Dördüncü bölüm de ise, üçüncü bölümdeki aynı dönüşüm altında

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

lineer diferensiyel denklemini sisteme dönüştürüp, bu sistem için faz düzlem analizini üzerinde durduk ve aynı zamanda bu durumlara örnekler vererek açıkladık.

Anahtar Kelimeler: Yarı-lineer Diferensiyel Denklemler, Salınımlılık, Salınımsızlık, Faz Düzlem Analizi.

OSCILLATION AND NONOSCILLATION OF SECOND-ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Ayşenur ÖNDER

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, July 2009

Thesis Supervisor: Yrd. Doç. Dr. Pakize TEMTEK

ABSTRACT

The behaviour of solutions of second-order linear differential equations are researched much in the applied sciences. To talk about the solutions of differential equations without solving them is especially important for differential equations that can not be solved. It is not always possible to obtain analytic solution of non-linear differential equations. Hence, it is more difficult to talk about the solution that is oscillatory or nonoscillatory.

This thesis consists of four chapters about oscillatory and nonoscillatory.

The first chapter includes the introduction and the second one includes the main definitions and concepts that will be mentioned in the next chapters.

The third chapter deals with the second-order half-linear differential equation

$$\left(\phi_p(\dot{x})\right)' + a(t)\phi_p(\dot{x}) + b(t)\phi_p(x) = 0.$$

Here $\phi_p(z) = |z|^{p-2} z$ is the so-called one-dimensional p-Laplacian operator. Our main purpose is to establish new criteria for all nontrivial solutions to be oscillatory and for those to be nonoscillatory. In our theorems, the parametric curve given by $(a(t), b(t))$ plays a critical role in judging whether all solutions are oscillatory or nonoscillatory. The method used here is mainly phase plane analysis for a system equivalent to the half-linear differential equation. If we take, $y = \phi_p(\dot{x})$ as a new variable, then the second-order half-linear differential equation transform into the system

$$\dot{x} = \phi_{p^*}(y), \quad \dot{y} = -a(t)y - b(t)\phi_p(x).$$

In the fourth chapter, we consider that phase plane analysis for a system. We get this system from the second order linear differential equation

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0$$

to use the same transformation in the third chapter. Global phase portraits are attached. Also some suitable examples are included to illustrate the main results.

Keywords: Half-Linear Differential Equation, Oscillation, Nonoscillation, Phase Plane Analysis.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	4
3. BÖLÜM	
İKİNCİ MERTEBEDEN YARI-LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI	15
4. BÖLÜM	
İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI	34
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	52

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Düğümleri oluşturan aynı işaretli, reel, farklı özdeğerler	10
Şekil 2.2 (2.16) nın faz şekli	11
Şekil 2.3 Zıt işaretli reel özdeğerler	12
Şekil 2.4 A diagonal iken yıldız düğümleri oluşturan eşit özdeğerler	12
Şekil 2.5 Kompleks özdeğerlere ait faz şekilleri	13
Şekil 2.6 (2.17) sisteminin faz şekli	14
Şekil 4.1 (4.6) denklemi ile verilen parametrik eğri	37
Şekil 4.2 Örnek 4.1-4.3 ve Gözlem 4.4 ün parametrik eğrileri	42
Şekil 4.3 Örnek 4.1 in (4.12) sistemi için faz resmi	44
Şekil 4.4 Örnek 4.2 için (4.12) sisteminin faz resmi	46
Şekil 4.5 Gözlem 4.4 için (4.12) sisteminin faz resmi	49

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İkinci mertebeden yarı-lineer

$$\left(\phi_p(\dot{x})\right)' + a(t)\phi_p(\dot{x}) + b(t)\phi_p(x) = 0 \quad (H)$$

şeklindeki diferensiyel denklemleri ele alalım, burada, $\dot{} = \frac{d}{dt}$; $a(t)$ ve $b(t)$, $[0, \infty)$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar; $p > 1$ sabit bir reel sayı olmak üzere $\phi_p(z) = |z|^{p-2} z$, reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca $\phi_p(z)$ fonksiyonu bir-boyutlu p - Laplacian operatörü olarak adlandırılır. Belirtelim ki (H) denklemi değişken katsayılı

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \quad (L)$$

lineer diferensiyel denklemini içerir.

Buradan (H) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümlerini iki tipe ayırabiliriz. $x(t_n) = 0$ olacak şekilde sonsuza yakınsayan bir $\{t_n\}$ dizisi varsa, (H) denkleminin aşıkâr olmayan bir $x(t)$ çözümüne salınımlıdır denir. Aksi takdirde salınımsızdır denir.

Çalışmaların büyük çoğunluğu (H) (veya (L)) denkleminin salınımlılık kriterlerini vermek için yapılmıştır. Örneğin, bu sonuçlar [1-21] çalışmalarında ve bu çalışmalara ait referanslarda bulunabilir. Salınımlılık ve / veya salınımsızlık için şartlar adım adım geliştirilmiş fakat, bununla birlikte daha fazla karmaşık hale gelmiştir.

Burada (H) (veya (L)) denklemine ait salınımlılık problemini biraz daha farklı bir açıdan ele alıp inceleyeceğiz. Bunu kısaca ifade edecek olursak $a(t)$ ve $b(t)$ katsayı çiftinin bir parametrik eğrisini çizebiliriz. Buradan $(a(t), b(t))$ ile tanımlanan fonksiyonların geometrik şekilleri üzerine dikkatimizi toplayarak, eğrinin grafiğinden (H) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olup olmadığına karar vermeye çalışacağız.

Sonuçlarımızı elde etmek amacı ile (H) denklemine denk olan bir sistem için faz düzlem analizi kullanacağız. Bunun için yeni bir değişken olarak $y = \phi_p(\dot{x})$ alalım. Bu durumda (H) denklemini

$$\dot{x} = \phi_{p^*}(y) , \quad \dot{y} = -a(t)y - b(t)\phi_p(x) \quad (1.1)$$

sistemi şeklinde yazabiliriz. Burada p^* , $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ i sağlayan sayıdır. Belirtelim ki $\phi_{p^*}(y)$, $y = \phi_p(\dot{x})$ nın ters fonksiyonudur ve p ile p^* sayıları $(p-1)(p^*-1)=1$ eşitliğini sağlar. $p > 1$ olduğundan aynı zamanda p^* sayısı da 1 den büyüktür.

Son zamanlarda, araştırmacılar [22] de α ve β reel sayılar olmak üzere,

$$\dot{x} = \phi_{p^*}(y) , \quad \dot{y} = -\alpha y - \beta \phi_p(x) \quad (1.2)$$

planar sistemi ele aldılar ve bu sistemin orijininin bir saddle (eyer), bir center (merkez), bir node (düğüm) veya bir focus (odak) olması durumlarında gerek ve yeter şartlar verdiler. Bu araştırmacıların sonuçları, diferensiyel denklemlere ait elemanter kitaplarda yer alan iki boyutlu otonom lineer sistemler için bilinen sonuçların doğal bir genellemesidir. Özel olarak, $\alpha = 0$ ve $\beta > 0$ ise, (1.2) sisteminin orijini bir global center (merkez) dir. Yani, (1.2) sisteminin her pozitif yörüngesi orijini çevreleyen kapalı bir eğridir. Eğer $\alpha > 0$ ve $\beta > (\alpha/p)^p$ ise, (1.2) sisteminin orijini bir focus (odak) tur. Aynı zamanda (1.2) sisteminin sıfır çözümü, global asimptotik olarak kararlıdır. Böylece, (1.2) sisteminin her pozitif yörüngesi orijin etrafında saat yönünde döner ve artarak orijine yaklaşır.

(1.1) sisteminin pozitif yörüngeleri ve aynı noktadan başlayan (1.2) sisteminin pozitif yörüngeleri karşılaştırıldığında, çeşitli sonuçları elde edeceğiz ve bu tezimizde de bunlar üzerinde duracağız.

2. BÖLÜM

TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde amacımıza uygun olarak kullanacağımız temel tanım ve kavramlara yer vereceğiz.

İlk olarak kısaca yüksek mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin birinci mertebeden lineer denklem sistemine dönüştürülmesi üzerinde duralım.

Bir x bilinmeyen fonksiyonu için n inci mertebeden

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = F(t) \quad (2.1)$$

lineer diferensiyel denklemini ele alalım, burada $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ ve F fonksiyonu reel değerli sürekli fonksiyonlardır. Verilen denklemde

$$x_1 = x, \quad x_2 = \frac{dx}{dt}, \quad x_3 = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad \dots, \quad x_{n-1} = \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}}, \quad x_n = \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} \quad (2.2)$$

şeklinde alalım. (2.2) den

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dx_2}{dt}, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} = \frac{dx_{n-1}}{dt}, \quad \frac{d^n x}{dt^n} = \frac{dx_n}{dt} \quad (2.3)$$

elde ederiz. (2.2) ve (2.3) ifadelerinin her ikisinin de kullanılması ile n inci mertebeden olan (2.1) denklemi

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\
&\vdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + F(t)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde n bilinmeyenli n denklemden oluşan birinci mertebeden lineer denklem sistemine dönüşür. [23]

Genel olarak denklem yapılarını belirtmek gerekirse

$$(\phi_p(\dot{x}))' + a(t)\phi_p(\dot{x}) + b(t)\phi_p(x) = 0 \tag{2.5}$$

şeklindeki denklemler yarı-lineer denklemlerdir, yani en yüksek mertebeden türeve göre lineer olan denklemler yarı-lineer denklem olarak adlandırılır, burada $\phi_p(z) = |z|^{p-2} z$ dir. Ayrıca $\phi_p(z)$ fonksiyonu bir-boyutlu p -Laplacian operatörü olarak bilinir.

Yukarıda belirttiğimiz yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerin sistem şeklinde yazılması durumu ikinci mertebeden lineer olmayan ve yarı-lineer diferensiyel denklemler için de yazılabilir. Buna göre

$$(a(t)\dot{x}(t))' + h(t, x(t), \dot{x}(t)) + q(t)f(x(t))g(\dot{x}(t)) = e(t, x(t), \dot{x}(t)) \tag{2.6}$$

ikinci mertebeden lineer olmayan denklemi göz önüne alalım. Burada $a(t), q(t) \in C([t_0, \infty), \mathbb{R}^+)$, $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $h, e \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ve her $y \in \mathbb{R}$ için $g(y) > 0$ dır. (2.6) denklemini kendisine denk olan

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= y \\
\dot{y} &= \frac{1}{a(t)} [-\dot{a}(t)y - h(t, x, y) - q(t)f(x)g(y) + e(t, x, y)]
\end{aligned}$$

sistemi şeklinde yazabiliriz. Ayrıca (2.5) yarı-lineer denklemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \phi_{p^*}(y) \\ \dot{y} &= -a(t)y - b(t)\phi_p(x)\end{aligned}$$

sistemine denk olarak yazılır.

Şimdi ikinci mertebeden en genel

$$F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0 \quad (2.7)$$

denklemini göz önüne alalım, burada $F \in C([t_0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ dır. $[t_x, \infty)$ aralığı üzerinde iki kez sürekli türevlenebilen ve (2.7) denklemini sağlayan bir $x(t)$ fonksiyonuna (2.7) denkleminin bir çözümü denir, burada $t \in [t_x, \infty) \subset [t_0, \infty)$ dur ve $t_x \geq t_0 \geq 0$ sayısı $x(t)$ çözümüne bağlıdır.

(2.7) denkleminin aşikar olmayan bir $x(t)$ çözümü keyfi çoklukta (sayıda) sifıra sahip ise, salınımlıdır denir. Yani (2.7) denkleminin aşikar olmayan bir $x(t)$ çözümüne $x(t_n) = 0$ olacak şekilde ∞ a giden (veya $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$) bir $\{t_n\}$ dizisi varsa salınımlıdır. Aksi takdirde $x(t)$ çözümüne salınımsızdır denir. Eğer $t \geq t_0$ için $x(t) \neq 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ mevcutsa, $x(t)$ çözümü salınımsızdır. Başka bir ifadeyle, salınımsız bir çözüm belli bir yerden sonra pozitif veya negatif olmalıdır.

Çözümün salınım ve salınımsızlığı tanımından yola çıkarak denklemin salınım ve salınımsızlığından söz edebiliriz. Eğer (2.7) denkleminin tüm çözümleri salınımlı ise, denkleme salınımlıdır denir. [4]

Şimdi de ileride kullanacağımız denklem sistemleri ile ilgili birkaç tanım ve kavram verelim.

İki boyutlu birinci mertebeden

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y)\end{aligned}\tag{2.8}$$

sistemi göz önüne alalım.

(2.8) sisteminde olduğu gibi t bağımsız değişkeninin açık olarak görülmediği sistemlere otonom sistem, aksi takdirde yani t bağımsız değişkeninin açık olarak görüldüğü sistemlere nonotonom sistem denir.

(2.8) sisteminin sağ tarafında t nin olmayışı sistemi kolayca analiz etmeyi ve çözümleri kolaylıkla göz önünde canlandırmayı mümkün kılar.

F ve G fonksiyonlarının xy düzleminin bir R bölgesinde sürekli diferensiyellenebildiğini kabul edelim. Bu durumda, bu xy düzlemine (2.8) sistemi için faz düzlemi denir.

t_0 ve R nin herhangi bir (x_0, y_0) noktası verildiği zaman Varlık ve Teklik Teoremine göre (2.8) sisteminin

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0\tag{2.9}$$

başlangıç şartını sağlayan t_0 ı içeren bir (a, b) açık aralığında tanımlanmış bir tek $x = x(t)$, $y = y(t)$ çözümü vardır.

Bu durumda $x = x(t)$, $y = y(t)$ denklemleri faz düzleminde bir parametrelili çözüm eğrisi tanımlar. Bu tip çözüm eğrisine, (2.8) sisteminin bir yörüngesi (trajektör, orbit, path) adı verilir.

(2.8) sisteminde

$$F(x_*, y_*) = G(x_*, y_*) = 0$$

eşitliğini sağlayan (x_*, y_*) noktası, (2.8) sisteminin bir kritik noktası olarak adlandırılır.

Özel olarak katsayı matrisi $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \quad (2.10)$$

iki boyutlu lineer diferensiyel denklem sistemine $(ad - bc \neq 0)$ ait kritik nokta $(0,0)$ dır. Bu noktanın kararlılığını belirlemek için lineer sistemin üstel fonksiyonlardan oluşan genel çözümünü elde etmek gerekir. Burada

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y = c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (2.11)$$

üstel çözümlerinin diferensiyel denklemlerde yerine yazılması ile

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

karakteristik denklemi ile birlikte bir özdeğer problemi ortaya çıkar. (2.12) den

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0 \quad (2.13)$$

kuadratik denklemi elde edilir. Böylece (2.10) sisteminin $(0,0)$ noktası üzerine kurulan çözümünün yapısı, (2.13) karakteristik denklemin köklerine bağlıdır. Biz burada, (2.10) iki boyutlu lineer sistemin A katsayı matrisinin özdeğerlerini λ_1 ve λ_2 olarak, kısaca $(0,0)$ kritik noktasında lineer diferensiyel denklem sisteminin kararlılık tiplerini belirtelim. Bir lineer sistem en çok bir kritik noktaya sahip olacağı için, sistem ile kritik noktasının kararlılık tipi aynıdır. Bir kritik noktanın üç farklı kararlılık tipinden söz edilebilir: kararlı, kararsız ve asimptotik kararlı. Bu üç durum için kritik nokta civarında sistemin faz şekilleri çizilebilir.

Tanım 2.1. Eğer, (2.10) denklem sisteminin (x_0, y_0) noktası (x_*, y_*) kritik noktasına yeterince yakın iken, her $t > 0$ için $(x(t), y(t))$ de (x_*, y_*) a yakın kalıyorsa, bu

durumda (x_*, y_*) kritik noktasına kararlıdır denir. $X(t) = (x(t), y(t))$ vektör gösteriminde, $X_0 = (x_0, y_0)$ ve $X_* = (x_*, y_*)$ arasındaki uzaklık

$$|X_0 - X_*| = \sqrt{(x_0 - x_*)^2 + (y_0 - y_*)^2}$$

dır. Böylece, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $t > 0$ için,

$$|X_0 - X_*| < \delta \quad \text{olduğunda} \quad |X(t) - X_*| < \varepsilon \quad (2.14)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise, X_* kararlıdır. (x_*, y_*) kritik noktası kararlı değilse, bu denklem sistemi kararsız olarak adlandırılır.

Tanım 2.2. Eğer (x_*, y_*) kritik noktası kararlı ise ve bu noktaya yeterince yakın olarak başlayan her yörünge $t \rightarrow \infty$ iken yine bir noktaya yakınıyor ise (x_*, y_*) kritik noktasına asimptotik kararlıdır denir, yani

$$|X - X_*| < \delta \quad \text{olduğunda} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = X_* \quad (2.15)$$

sağlanacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur. Burada $X_0 = (x_0, y_0)$, $X_* = (x_*, y_*)$ ve $X(t) = (x(t), y(t))$, $X(0) = X_0$ özelliğinde bir çözümdür.

Teorem 2.1. İki boyutlu (2.10) lineer sisteminin $(ad - bc \neq 0)$ A katsayı matrisinin özdeğerleri λ_1 ve λ_2 olsun. Bu durumda $(0, 0)$ kritik noktası;

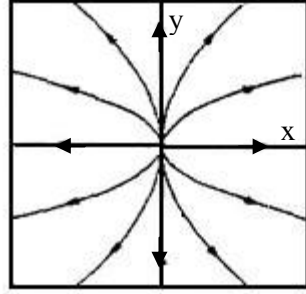
- i) Eğer λ_1 ve λ_2 nin reel kısımlarının her ikisi negatif ise, asimptotik kararlı,
- ii) Eğer λ_1 ve λ_2 nin reel kısımlarının her ikisi sıfır (yani $\lambda_1, \lambda_2 = \mp \beta i$) ise, kararlı fakat asimptotik kararlı değil,
- iii) Eğer λ_1 ve λ_2 bir pozitif reel kısma sahip ise, kararsız

dır. [24]

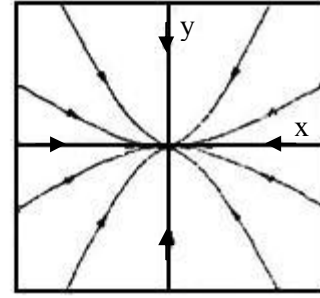
(2.10) iki boyutlu lineer sistemlerin faz şekillerinin (2.13) ifadesi ile verilen özdeğerlerin durumuna göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir.

a) Reel Farklı Özdeğerler

λ_1, λ_2 özdeğerleri reel, farklı ve aynı işaretli ise, xy düzleminin $(0,0)$ kritik noktasına düzensiz düğüm (improper node) denir. Sistem Teorem 2.1 e göre $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ iken kararsız, $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ iken asimptotik karardır. Bu durumda faz şekilleri Şekil 2.1 deki gibi olur.



(a) Kararsız ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$)



(b) Kararlı ($\lambda_1 < \lambda_2 < 0$)

Şekil 2.1 Düğümleri oluşturan aynı işaretli, reel, farklı özdeğerler.

Örnek 2.1.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x + y \\ \dot{y} &= x - 3y\end{aligned}\tag{2.16}$$

lineer sisteminin genel çözümünü bularak faz şeklini çizelim.

(2.16) sisteminde $\det(A - \lambda I) = 0$ eşitliğinde $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$ şeklinde negatif işaretli, reel, farklı özdeğerler elde edilir. Sistemin kritik noktası $(0,0)$ noktasıdır ve asimptotik kararlı bir düğüme sahiptir. Sistemin faz şeklini bulmak için $(A - \lambda I)u = 0$ eşitliğinden özvektörler λ_1 için $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve λ_2 için $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ elde edilir. Burada genel çözüm

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-4t}$$

şeklindedir. c_1 ve c_2 nin durumlarına göre aşağıdaki sonuçlar bulunabilir.

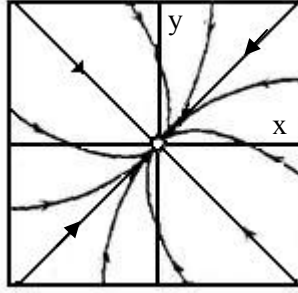
$$c_1 > 0 \text{ ve } c_2 = 0 \text{ için } x = y$$

$$c_1 = 0 \text{ ve } c_2 > 0 \text{ için } x = -y$$

$$c_1 < 0 \text{ ve } c_2 = 0 \text{ için } x = y$$

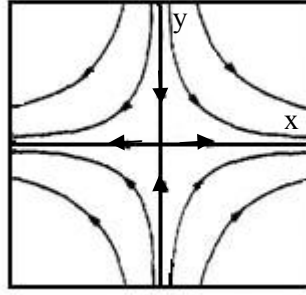
$$c_1 = 0 \text{ ve } c_2 < 0 \text{ için } x = -y$$

$t \rightarrow \infty$ iken $x(t)$ ve $y(t)$ çözüm eğrileri orijine yaklaşmaktadır. Böylece (2.16) sistemi asimptotik kararlı olup çözümün faz şekli aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.2 (2.16) nın faz şekli.

Eğer λ_1 ve λ_2 özdeğerleri reel, farklı ve zıt işaretli ise $(0,0)$ kritik noktasına eyer noktası (saddle point). Bu takdirde Teorem 2.1 e göre lineer sistem kararsızdır. λ_1 ve λ_2 zıt işaretliler ise Şekil 2.3 deki faz şekli meydana gelir. Şekilde olduğu gibi, orijin hariç koordinat eksenleri ayıraç adı verilen özel trajektörlerin birleşimlerinden meydana gelir. Bunlar sadece ışımsal (düz) doğrular olan trajektörlerdir. Özdeğer negatif ise orijine doğru yönelen, pozitif ise orijinden uzaklaşan ayıraçları gösterirler. Geri kalan trajektörler, asimptot olarak ayıraçlara yaklaşır.



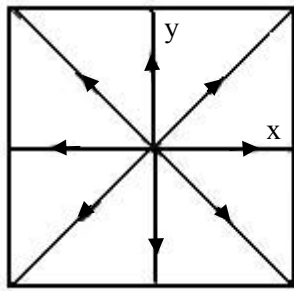
Şekil 2.3 Zıt işaretli reel özdeğerler.

b) Eşit Özdeğerler

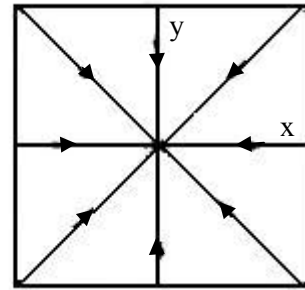
λ_1 ve λ_2 özdeğerleri reel ve eşit ise bu durumda $(0,0)$ kritik noktası ya kararlı ya da kararsız düğüm (node) noktasıdır. Kritik nokta; Teorem 2.1 e göre $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ için kararsız, $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ için kararlıdır.

(2.10) lineer sisteminin A katsayı matrisi diagonal ise $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$ olmak üzere sistemin kritik noktası ($\lambda_0 < 0$ iken kararlı, $\lambda_0 > 0$ iken kararsız) yıldız (star) adı verilen özel bir noktaya karşılık gelir. Böylece trajektörlerin hepsi ışımsal doğrulardan meydana gelir (Şekil 2.4).

Eğer A diagonal değil ise, orijine düzensiz düğüm adı verilir ($\lambda_0 < 0$ iken kararlı, $\lambda_0 > 0$ iken kararsız).



(a) Kararsız

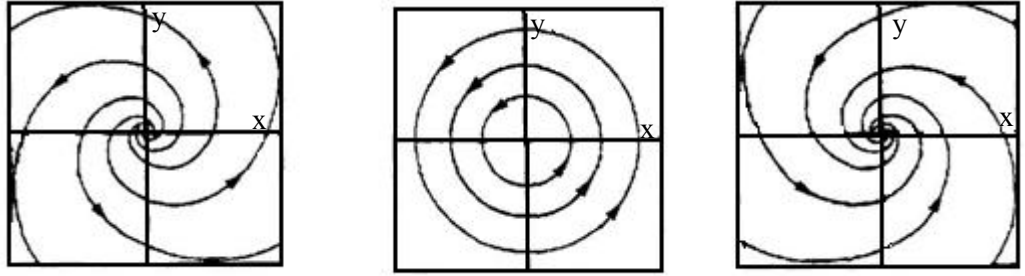


(b) Kararlı

Şekil 2.4 A diagonal iken yıldız düğümleri oluşturan eşit özdeğerler.

c) Kompleks Özdeğerler

λ_1 ve λ_2 özdeğerlerinin reel kısımları sıfırdan farklı, eşlenik ve kompleks ise $(0,0)$ kritik noktasına odak (focus) denir. $\lambda_{1,2} = \alpha \mp i\beta$ olmak üzere reel kısımlar negatif ise sistem Teorem 2.1 e göre asimptotik kararlı, pozitif ise kararsızdır. Bu durumda faz şekilleri kararlı veya kararsız spirallerden oluşur. $\alpha = 0$ olduğu zaman orijine bir merkez (center) denir. Burada sistem kararlı olup faz şekli aynı merkezli çemberlerin sürekli bir dizisinden oluşur. Sistemlerin bu iki türü kutupsal koordinat düzlemine taşınarak çözülebilir. Örnek faz şekilleri Şekil 2.5 gibidir.



(a) Kararsız odak ($\alpha > 0$)

(b) Merkez ($\alpha = 0$)

(c) Kararlı odak ($\alpha < 0$)

Şekil 2.5 Kompleks özdeğerlere ait faz şekilleri.

Örnek 2.2.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= -x - y\end{aligned}\tag{2.17}$$

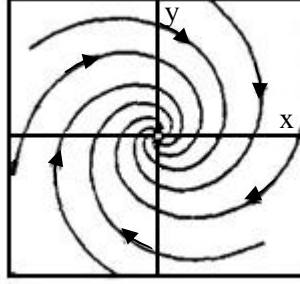
$\det(A - \lambda I) = 0$ eşitliğinden $\lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$ eşlenik kompleks öz değerleri elde edilir ve bu değerlerin reel kısımları negatif olduğundan (2.17) sistemi $(0,0)$ kritik noktasında kararlı bir odağa sahiptir. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ kutupsal koordinatlar kullanılarak (2.17) sistemi

$$\dot{r} = -r, \quad \dot{\theta} = -1$$

şekline dönüşür. c_1 ve c_2 reel sabitler olmak üzere bu denklemlerin çözümünden

$$r(t) = c_1 e^{-t}, \quad \theta(t) = -t + c_2$$

elde edilir. $c_0 = c_1 e^{-c_2}$ olmak şartıyla $r = c_0 e^\theta$ spiral denklemini bulunur ve sistem $(0,0)$ noktasında odak noktasına sahiptir. Sistemin faz şekli Şekil 2.6 da görülür.



Şekil 2.6 (2.17) sisteminin faz şekli.

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN YARI-LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI

İkinci mertebeden yarı-lineer

$$\left(\phi_p(\dot{x})\right)' + a(t)\phi_p(\dot{x}) + b(t)\phi_p(x) = 0 \quad (\text{H})$$

şeklindeki diferensiyel denklemi ve bu denklemin içerdiği değişken katsayılı

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \quad (\text{L})$$

lineer diferensiyel denklemini ele alalım.

Burada (H) diferensiyel denkleminin tüm çözümleri (L) diferensiyel denkleminin çözümlerinde olduğu gibi sürekli ve verilen başlangıç şartları için tektir. Biz (H) denklemine denk olan bir sistem için faz düzlem analizi kullanacağız. Bu amaçla ikinci bölümde belirttiğimiz gibi $y = \phi_p(\dot{x})$ yeni bir değişken olarak alalım. Bu durumda (H) denklemini

$$\dot{x} = \phi_{p*}(y) \quad , \quad \dot{y} = -a(t)y - b(t)\phi_p(x) \quad (3.1)$$

sistemi şeklinde yazabiliriz. Buradan

$$\dot{x} = \phi_{p*}(y) \quad , \quad \dot{y} = -\alpha y - \beta \phi_p(x) \quad (3.2)$$

planar sistemi ele alınır, burada α ve β reel sayılardır.

(α, β) düzleminin ilk çeyreğini iki bölgeye ayıralım. Buna göre

$$D_1 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0 \text{ ve } 0 \leq \beta \leq (\alpha/p)^p\}$$

ve

$$D_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0 \text{ ve } \beta > (\alpha/p)^p\}$$

şeklinde alalım.

(3.1) sisteminin pozitif yörüngeleri ve aynı noktadan başlayan (3.2) sisteminin pozitif yörüngeleri karşılaştırıldığında, aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Teorem 3.1. S , D_1 de sınırlı, kapalı ve konveks bir cümle ve yeterince büyük T ler için $t \geq T$ olmak üzere $(a(t), b(t)) \in S$ olsun. (H) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri salınımsızdır.[25]

Teorem 3.2. S , D_2 de sınırlı ve kapalı bir cümle ve yeterince büyük T ler için $t \geq T$ olmak üzere $(a(t), b(t)) \in S$ olsun. (H) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.[25]

Uyarı 3.1. Eğer S , α eksenini içeriyorsa, $b(t)$ özdeş olarak sıfıra eşittir. Bu durumda Teorem 3.1 in doğru olduğu açıktır. Böylece Teorem 3.1 den kabul edelim ki S , D_1 de herhangi bir cümledir. Kabulden ve $t \geq T$ için $(a(t), b(t)) \in S \subset D_1$ olmasından, $\sup_{t \geq T} a(t) > 0$ olduğu görülür.

Uyarı 3.2. Teorem 3.1 de S nin konveksliği kabulü esastır. Eğer bu kabul atılırsa, (H) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümlerinde salınımlılık meydana gelebilir. (Bkz. Örnek 4.3)

Belirtelim ki Teorem 3.1 ve 3.2 tüm durumları kapsamaz. Örneğin; bir $(a(t), b(t))$ parametrik eğrisi herhangi bir noktaya yakınsadığında ve $\beta = (\alpha/p)^p$ eğrisi ile

çakıştığında veya D_1 ve D_2 arasındaki sınırda, her iki teoremden kullanılamaz. Sıradaki sonuç bu duruma uygulanabilir.

Teorem 3.3. $\overline{D_2}$, D_2 nin kapanışı olmak üzere S , $\overline{D_2}$ de sınırlı bir cümle ve $a(t)$ periyodik, sabit olmayan ve yeterince büyük T ler için $t \geq T$ olmak üzere $(a(t), b(t)) \in S$ olsun. Bu durumda (H) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.[25]

Yukarıda söz edildiği gibi, $(a(t), b(t))$ nin geometrik şekillerini göz önüne aldığımızda, Teorem 3.1-3.3 önceki sonuçlardan farklıdır. Teoremlerimizdeki şartlar, nümerik analiz ile kontrolü kolay olmanın avantajına sahiptir. Bir bilgisayar program hesaplaması ile, (H) denkleminin yaklaşık olarak çözümlerini bulabilmemize rağmen, (H) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olup olmadığına karar vermek her zaman mümkün değildir. Örneğin,

$$\ddot{x} + (2 + \sin t)\dot{x} + \frac{1}{4}(2 + \sin t)^2 x = 0 \quad (3.3)$$

lineer denklemini göz önüne alalım. Bu durumda çözümlerin yapısı azalır ve hızlı bir şekilde ortadan kaybolur. Böylece, sadece şekilden herhangi bir çözümün sonsuz sayıda sıfırlara sahip olup olmadığına karar veremeyiz. Bununla birlikte Teorem 3.3 den kolaylıkla görebiliriz ki (3.3) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri salınımlıdır. (Daha fazla detay için, Bkz. Örnek 4.3)

İlerleyen sayfalarda, Teorem 3.1 in ispatını vereceğiz ve D_1 deki S konveks cümlesi ile $\beta = (\alpha/p)^p$ eğrisinin ortak tanjantını inceleyeceğiz. Ortak tanjantın, $\beta = (\alpha/p)^p$ eğrisinin altında ve S konveks cümlesinin üstünde yer aldığını gösterdik. Bu bölüm içerisinde Teorem 3.2 ve 3.3 ü ispatlayacağız. (3.1) in pozitif yörüngelerinin hareketini dikkatli bir şekilde gözden geçirmek için, (3.1) sistemini, genelleştirilmiş kutup koordinatlarını kullanarak belli bir sisteme dönüştüreceğiz. Yani sistemler arasında geçiş yapacağız. Bölüm 4 te, (L) denklemi için salınımlılık problemi üzerine yoğunlaşacağız. Teorem 3.1-3.3 te $a(t)$ ve $b(t)$ katsayılarını non-negatif fonksiyonlar

olarak kısıtlayacağız. Ayrıca (L) denklemi için böyle bir kısıtlamanın gerekli olmadığını göstereceğiz. Aynı zamanda Liouville dönüşümünün, sonuçlarımızın etkili oranda geliştirilmesine yardımcı olduğunu göstereceğiz. Sonuçlarımızı açıklamak için Bölüm 4 de bazı örnekler ele alacağız.

Pozitif sabit katsayılı (3.2) sistemine denk olan

$$\left(\phi_p(\dot{x})\right)' + \alpha\phi_p(\dot{x}) + \beta\phi_p(x) = 0 \quad (3.4)$$

yarı lineer diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $x(t) = e^{-\lambda t}$ gerekli türevler alınarak (3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$(p-1)\phi_p(\lambda)\lambda - \alpha\phi_p(\lambda) + \beta = 0 \quad (3.5)$$

denklemi elde edilir. $(\alpha, \beta) \in D_1$ ise, (3.5) denklemi $0 \leq \lambda_1 \leq \alpha/p \leq \lambda_2$ ($\lambda_1 = 0$ ancak ve ancak $\beta = 0$) olacak şekilde λ_1 ve λ_2 gibi iki reel köke sahiptir. Bunun doğruluğunu basit bir hesaplamayla gösterebiliriz. Belirtelim ki λ_1 ve λ_2 kökleri α ve β katsayılarına bağlıdır. Sınırlı, kapalı ve konveks bir $S \subset D_1$ cümlesi üzerinde $\lambda_1(\alpha, \beta)$ kökünün maksimum değerini alalım, yani

$$\mu = \max_{(\alpha, \beta) \in S} \lambda_1(\alpha, \beta)$$

olarak tanımlayalım. Uyarı 3.1 de bahsettiğimiz gibi sadece S nin α eksenini içermediği durumu göz önüne alalım. Böylece μ değeri pozitiftir ve buradan da aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Lemma 3.1. S , D_1 de sınırlı, kapalı ve konveks bir cümle olsun. Kabul edelim ki $(\alpha, \beta) \in S$ dir. Bu durumda $\beta \leq \alpha\mu^{p-1} - (p-1)\mu^p$ dir.

İspat. S cümlesi kapalı ve sınırlı olduğundan $(\alpha_1, \beta_1) \in S$ ve $\lambda_1(\alpha_1, \beta_1) = \mu$ olacak şekilde α_1 ve β_1 çifti bulabiliriz. α_1 ve β_1 sayıları $p\mu \leq \alpha_1$ ve

$$\beta_1 = \alpha_1 \mu^{p-1} - (p-1) \mu^p \quad (3.6)$$

sağlar. Tersine kabul edelim ki,

$$\alpha_2 \mu^{p-1} - (p-1) \mu^p < \beta_2 \quad (3.7)$$

olacak şekilde $(\alpha_2, \beta_2) \in S$ mevcut olsun. $(\alpha_2, \beta_2) \in D_1$ olduğundan, $\lambda_1(\alpha_2, \beta_2)$ kökü pozitifdir. Kolaylık olması için $\bar{\mu} = \lambda_1(\alpha_2, \beta_2)$ olarak alalım. (3.5) den $\beta_2 = \alpha_2 \bar{\mu}^{p-1} - (p-1) \bar{\mu}^p$ elde edilir. Böylece, (3.7) den

$$(\mu^{p-1} - \bar{\mu}^{p-1}) \alpha_2 < (p-1)(\mu^p - \bar{\mu}^p)$$

olur. μ nün tanımından $\bar{\mu} < \mu$ olduğunu görürüz. Burada Cauchy ortalama değer teoremini kullanarak

$$\alpha_2 < (p-1) \frac{\mu^p - \bar{\mu}^p}{\mu^{p-1} - \bar{\mu}^{p-1}} < p\mu$$

elde ederiz. Ayrıca

$$l: \beta = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha - \alpha_1) + \beta_1$$

doğru denklemini göz önüne alalım. $(\alpha_1, \beta_1) \in S$, $(\alpha_2, \beta_2) \in S$ ve S cümlesi konveks olduğundan, l doğru parçası S nin içinde kalır. $\hat{\mu} = (\beta_1 - \beta_2)/(\alpha_1 - \alpha_2)$ olsun. Bu durumda (3.6) ve (3.7) taraf tarafa çıkarılırsa $0 < \hat{\mu} < \mu^{p-1}$ olur. Gerçekten yukarıda gösterildiği gibi $0 < \alpha_2 < p\mu \leq \alpha_1$ dir. Böylece, (3.6) dan ve $p\mu \leq \alpha_1$ olduğundan

$$\beta_1 \geq p\mu \mu^{p-1} - (p-1) \mu^p$$

$$\beta_1 \geq p\mu^p - (p-1) \mu^p = \mu^p$$

elde ederiz. Diğer taraftan $(\alpha_2, \beta_2) \in D_1$ olduğundan, $\beta_2 \leq (\alpha_2/p)^p < (p\mu/p)^p = \mu^p$ olduğunu görürüz. Bundan başka (3.6) ve (3.7) yi tekrar kullanarak

$$\beta_1 - \beta_2 < \alpha_1 \mu^{p-1} - (p-1)\mu^p - \alpha_2 \mu^{p-1} + (p-1)\mu^p = (\alpha_1 - \alpha_2) \mu^{p-1}$$

elde ederiz.

$x > 0$ için $f(x) = (x/p)^p - \hat{\mu}x - (\mu^{p-1} - \hat{\mu})\alpha_1 + (p-1)\mu^p$ fonksiyonu tanımlansın. Böylece

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{x}{p}\right)^{p-1} - \hat{\mu}$$

ve $f(p\mu) = p\mu^p - p\hat{\mu}\mu - (\mu^{p-1} - \hat{\mu})\alpha_1$ elde ederiz. Burada $\alpha_1 > p\mu$ ise, bu durumda

$$f(p\mu) < p\mu^p - p\hat{\mu}\mu - (\mu^{p-1} - \hat{\mu})p\mu = 0$$

olur. Eğer $\alpha_1 = p\mu$ ise, $f(p\mu) = 0$ ve

$$\left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=p\mu} = \mu^{p-1} - \hat{\mu} > 0$$

olur. Diğer durumda $f(\alpha_3) < 0$ olacak şekilde $\alpha_2 < \alpha_3 \leq p\mu$ için α_3 değeri vardır. Bu, l doğru parçasının $\beta = (\alpha/p)^p$ eğrisini kesmesi demektir. Bu da l nin $S \subset D_1$ de içeriilmesi durumuyla çelişir.

Lemma 3.1, Teorem 3.1 in ispatında önemli bir rol oynar.

Teorem 3.1. in İspatı. Tersini kabul edelim, yani $x(t)$ (H) denkleminin salınımlı bir çözümü olsun. Lemma 3.1 den ve $t \geq T$ için $(a(t), b(t)) \in S$ kabulünden

$$b(t) \leq \mu^{p-1}a(t) - (p-1)\mu^p \quad (3.8)$$

$t \geq T$ için olduğunu görürüz, burada μ Lemma 3.1 de verilen değerdir.

$$\alpha_0 = \sup_{t \geq T} a(t) \quad \text{ve} \quad \beta_0 = \alpha_0 \mu^{p-1} - (p-1)\mu^p$$

olarak tanımlayalım. Uyarı 3.1 de belirtildiği gibi $\alpha_0 > 0$ dır. $a(t_1) = \alpha_0$ (t_1, ∞ olabilir) olacak şekilde bir $t_1 \geq T$ seçebiliriz. S kapalı olduğundan görürüz ki $(\alpha_0, b(t_1)) \in S$ dir. Böylece (3.8) den

$$0 \leq b(t_1) \leq \alpha_0 \mu^{p-1} - (p-1)\mu^p = \beta_0$$

$x > 0$ için $g(x) = (p-1)x^p - \alpha_0 x^{p-1} + (\alpha_0/p)^p$ olsun. Bu durumda

$$\frac{d}{dx} g(x) = (p-1)x^{p-2}(px - \alpha_0) \quad \text{ve} \quad g(\alpha_0/p) = 0$$

elde ederiz. Burada $x > 0$ için $g(x) \geq 0$ sonucuna varırız. μ bir pozitif sayı olduğundan $(\alpha_0/p)^p - \beta_0 = g(\mu) \geq 0$ olur.

Şimdi

$$\dot{x} = \phi_{p*}(y), \quad \dot{y} = -\alpha_0 y - \beta_0 \phi_p(x) \quad (3.9)$$

planar sistemini göz önüne alalım. Yukarıda da gösterildiği gibi (α_0, β_0) noktası D_1 içindedir. $(p-1)\mu^p - \alpha_0 \mu^{p-1} + \beta_0 = 0$ olduğunu dikkate alırsak (3.9) sisteminin bir $(-e^{-\mu t}, \phi_p(\mu e^{-\mu t}))$ çözümüne sahip olduğunu görürüz. Çözüm eğrisi $x < 0$ için $y = -\phi_p(\mu x)$ şeklinde verilsin. Buradan, çözüm ikinci çeyrektedir.

$$\phi_p(\mu) = \mu^{p-1} = \frac{1}{\alpha_0}(\beta_0 + (p-1)\mu^p) > \frac{\beta_0}{\alpha_0}$$

olduğundan bölgeyi

$$R = \{(x, y) : x < 0 \text{ ve } -\beta_0 \phi_p(x) / \alpha_0 < y < -\phi_p(\mu x)\}$$

olarak tanımlayabiliriz.

(3.1) sistemine eşit olan (H) denklemini tekrar hatırlayalım. (3.1) in vektör alanından yola çıkarsak $x(t)$ çözümüne karşılık gelen (3.1) in yörüngeleri saat yönünde orijin etrafında sonsuz kez rota çizer. Buradan (3.1) in yörüngesi $t = \tau \geq T$ için aldığımız bir $P \in R$ noktasından geçer. $P = (x_1, y_1)$ olsun. Bu durumda

$$x_1 < 0 < y_1 < -\phi_p(\mu x_1) = -\mu^{p-1} \phi_p(x_1) \quad (3.10)$$

dur. $t = \tau$ da bir P noktasından başlayan (3.1) in pozitif yörüngesi $\Gamma^+(P)$ ile gösterelim.

$\Gamma^+(P)$ ile karşılaştırmak için P noktasında başlayan (3.9) un $\gamma^+(P)$ pozitif yörüngesini göz önüne alalım. (3.9) sistemi otonom olduğundan ve başlangıç değer probleminin çözümünün tekliğinden $\gamma^+(P)$, $y = -\phi_p(\mu x)$ çözüm eğrisinden geçmez.

R de (3.9) un vektör alanını göz önüne alırsak görürüz ki $\gamma^+(P)$ $x \rightarrow 0^-$ iken orijine yaklaşır. Diğer taraftan, $\Gamma^+(P)$ R bölgesini ayırır, bu durumda pozitif y eksenine karşılaşır, çünkü $\Gamma^+(P)$ orijinde saat yönü etrafında döner. $\Gamma^+(P)$ ve $\gamma^+(P)$ nin hareketlerinden, P noktasında $\gamma^+(P)$ nin eğiminin aynı noktada $\Gamma^+(P)$ nin eğiminden daha büyük olmadığını tahmin edebiliriz, yani;

$$-\frac{\alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1)}{\phi_{p^*}(y_1)} \leq -\frac{a(\tau) y_1 + b(\tau) \phi_p(x_1)}{\phi_{p^*}(y_1)} \quad (3.11)$$

(Gerekirse, R bölgesinde ki başka bir P noktası ile değiştirebiliriz). (3.8) den

$$\beta_0 - b(\tau) = \alpha_0 \mu^{p-1} - (p-1) \mu^p - b(\tau)$$

$$\geq \mu^{p-1} a(\tau) - (p-1) \mu^p - b(\tau) \geq 0$$

elde ederiz. Böylece, $a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1)$ ifadesine $\beta_0\phi_p(x_1)$ ve α_0y_1 terimleri bir eklenir bir çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} & a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1) \\ &= \alpha_0y_1 + \beta_0\phi_p(x_1) - (\alpha_0 - a(\tau))y_1 - (\beta_0 - b(\tau))\phi_p(x_1) \end{aligned}$$

elde ederiz ve bu eşitlikte (3.10) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1) > \alpha_0y_1 + \beta_0\phi_p(x_1) - (\alpha_0 - a(\tau))y_1 + (\beta_0 - b(\tau))\frac{y_1}{\mu^{p-1}} \\ &= \alpha_0y_1 + \beta_0\phi_p(x_1) + y_1 \left\{ a(\tau) - (p-1)\mu - \frac{b(\tau)}{\mu^{p-1}} \right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. Tekrar (3.8) kullanılırsa, yani $b(t) \leq \mu^{p-1}a(t) - (p-1)\mu^p$ alınırsa,

$$\begin{aligned} & a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1) \geq \alpha_0y_1 + \beta_0\phi_p(x_1) \\ &+ y_1 \left\{ a(\tau) - (p-1)\mu - \frac{\mu^{p-1}a(\tau) - (p-1)\mu^p}{\mu^{p-1}} \right\} = \alpha_0y_1 + \beta_0\phi_p(x_1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu (3.11) ile çelişir. Bu durumda (H) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri salınımsızdır.

İkinci çeyrekteki (3.1) denklem sisteminin pozitif yörüngelerinin hareketini incelemek için, (3.1) sistemini

$$x = r \cos \theta \quad \text{ve} \quad y = \phi_p(r \sin \theta)$$

genel kutup koordinatlarına dönüştürelim, burada $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ dir. Bu durumda

$$\left. \begin{aligned} \dot{r} &= r \frac{\sin \theta \cos \theta}{p-1} \left[p-1 + a(t) |\tan \theta| - \frac{b(t)}{|\tan \theta|^{p-2}} \right] \\ \dot{\theta} &= -\frac{\sin^2 \theta}{p-1} \left[p-1 - \frac{a(t)}{|\tan \theta|} + \frac{b(t)}{|\tan \theta|^p} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

elde ederiz. Gerçekten, aşağıdaki elemanter işlemleri yaparak (3.12) nin elde edildiğini görürüz.

$\phi_p(z) = |z|^{p-2} z$ olduğundan,

$$y = \phi_p(r \sin \theta) = (r \sin \theta)^{p-1}$$

şeklindedir ve türevi,

$$\dot{y} = (p-1)(r \sin \theta)^{p-2} (\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta)$$

şeklinde bulunur. (3.1) siteminden,

$$\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta = \frac{-r}{(p-1)(\sin \theta)^{p-2}} \left[a(t)(\sin \theta)^{p-1} + b(t)(\cos \theta)^{p-1} \right] \quad (3.13)$$

elde edilir. Ayrıca, $y = \phi_p(r \sin \theta)$ olduğundan, ϕ_{p*} ters fonksiyonu işleme tabii tutulursa,

$$\phi_{p*}(y) = r \sin \theta$$

olur. (3.1) sisteminde $\dot{x} = \phi_{p*}(y)$ olduğundan $\dot{x} = r \sin \theta$ dır. Diğer taraftan,

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta$$

türevi ele alınırsa,

$$\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = r \sin \theta \quad (3.14)$$

olduğu görülür. (3.13) ve (3.14) eşitliklerinde, (3.13) $\sin \theta$ ve (3.14) $\cos \theta$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\dot{r} = r \frac{\sin \theta \cos \theta}{p-1} \left[p-1 + a(t) |\tan \theta| - \frac{b(t)}{|\tan \theta|^{p-2}} \right]$$

buluruz. Benzer şekilde, (3.13) $\cos \theta$ ve (3.14) $(-\sin \theta)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\dot{\theta} = -\frac{\sin^2 \theta}{p-1} \left[p-1 - \frac{a(t)}{|\tan \theta|} + \frac{b(t)}{|\tan \theta|^p} \right]$$

buluruz. Dolayısıyla (3.12) yi elde etmiş oluruz.

Bu dönüşümü kullanarak aşağıdaki sonucu ifade edebiliriz.

Lemma 3.2. Teorem 3.2 de ki aynı kabuller altında, eğer (3.1) in bir pozitif yörüngesi orijinde saat yönü etrafında dönmezse, y eksenı boyunca orijine yaklaşır.

İspat. $t \geq T$ için $(a(t), b(t)) \in S \subset D_2$ ve $D_2, \beta = (\alpha/p)^p$ eğrisini içermediğinden dolayı

$$b(t) > \left(\frac{a(t)}{p} \right)^p + \sigma \quad (3.15)$$

i sağlayan bir $\sigma > 0$ sayısı bulabiliriz. Elbette $a(t)$ ve $b(t)$ nin her ikisi de sınırlıdır.

Kabul edelim ki, (3.1) sistemi belli bir yerden sonra ikinci çeyrekte kalan bir pozitif yörüngeye sahip olsun. $(r(t), \theta(t))$ (3.1) in yörüngesine karşılık gelen (3.12) nin

çözümü olsun. Bu durumda, $t \geq t_1$ için $\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \pi$ olacak şekilde bir $t_1 \geq T$ vardır.

(3.12) ve (3.15) ten $t \geq t_1$ için

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\sin^2 \theta(t)}{p-1} \left[p-1 - \frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} + \frac{b(t)}{|\tan \theta(t)|^p} \right]$$

$$< -\frac{\sin^2 \theta(t)}{p-1} \left[p-1 - \frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} + \left(\frac{a(t)}{p|\tan \theta(t)|} \right)^p + \frac{\sigma}{|\tan \theta(t)|^p} \right]$$

olur. $x > 0$ için $h(x) = (x/p)^p - x + p-1$ olarak tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{d}{dx} h(x) = \left(\frac{x}{p} \right)^{p-1} - 1 \quad \text{ve} \quad h(p) = 0$$

elde ederiz. Buradan görürüz ki $x > 0$ için $h(x) \geq 0$ dır. Bu nedenle $t \geq t_1$ için

$$\dot{\theta}(t) < -\frac{\sigma \sin^2 \theta(t)}{(p-1)|\tan \theta(t)|^p} = -\frac{\sigma |\cos \theta(t)|^p}{(p-1) \sin^{p-2} \theta(t)} < 0 \quad (3.16)$$

sonucuna ulaşırız, yani $t \geq t_1$ için $\theta(t)$ azalandır. $t \geq t_1$ için $\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \pi$ olduğundan

$t \rightarrow \infty$ iken $\theta(t) \searrow \theta_0$ olacak şekilde $\frac{\pi}{2} \leq \theta_0 < \pi$ aralığında bir θ_0 vardır. (3.16)

eşitsizliği t_1 den t ye integre edilirse,

$$\int_{\cos \theta(t_1)}^{\cos \theta(t)} \frac{(1-u^2)^{(p-3)/2}}{|u|^p} du > \frac{\sigma}{p-1} (t-t_1)$$

elde ederiz. $t \rightarrow \infty$ iken bu ifade ∞ a gider. Buradan görürüz ki $t \rightarrow \infty$ iken

$\cos \theta(t) \nearrow 0$ dır. Böylece $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ dir. (3.12) den ve $\theta(t)$, $t \rightarrow \infty$ iken $\frac{\pi}{2}$ ye

yakınsamasından, yeterince büyük t ler için,

$$\dot{r}(t) = r(t) \frac{\sin \theta(t) \cos \theta(t)}{p-1} \left[p-1 + a(t) |\tan \theta(t)| - \frac{b(t)}{|\tan \theta(t)|^{p-2}} \right] < 0$$

olduğu görülür. (3.1) sisteminin yapısından pozitif yörünge orijin hariç herhangi bir iç noktaya yakınsamaz. Buradan (3.1) in pozitif yörüngesi, pozitif yekseni boyunca orijine yakınsar. Aynı durum dördüncü çeyrek için de meydana gelir.

(3.2) sistemini (3.1) in özel durumu ile tekrar ele alalım. Birinci bölümde bahsedildiği gibi eğer $(\alpha, \beta) \in D_2$ ise, (3.2) nin orijini bir center veya bir focustur, diğer bir deyişle (3.2) nin tüm pozitif yörüngeleri orijin etrafında saat yönünde rota çizer. Bu nedenle ve Lemma 3.2 den Teorem 3.2 yi ispat edebiliriz.

Teorem 3.2 nin İspatı. İspat için tersini kabul edelim. Yani (H) denklemini salınımsız bir çözüme sahip olsun. Bu durumda belli bir yerden sonra çözüm ya pozitifdir ya da negatiftir. Sadece burada negatif durumu göz önüne alacağız, diğer durum da aynı yolla görülebilir. (H) denkleminin negatif çözümü belli bir yerden sonra ikinci çeyrekte kalan (3.1) in bir pozitif yörüngesine tekabül eder. Böylece Lemma 3.2 den, (3.1) in pozitif yörüngesinin pozitif y eksenini boyunca orijine yaklaştığı sonucunu çıkarırız. Burada,

$$\alpha_0 = \sup_{t \geq T} a(t) \quad \text{ve} \quad \beta_0 = (\alpha_0/p)^p + \sigma$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $(\alpha_0, \beta_0) \in D_2$ dir. Burada ki β_0 değerinin Teorem 3.1 in ispatında verilen β_0 değerinden farklı olduğuna dikkat edelim. $P(x_1, y_1)$, (3.1) in pozitif yörüngelerinde herhangi bir nokta olsun. (3.1) in bu pozitif yörüngesini $\Gamma^+(P)$ olarak ele alalım. τ , P noktası boyunca $\Gamma^+(P)$ den geçme sayısı olsun ve $\Gamma^+(P)$ ye karşılık gelen $(x(t), y(t))$ ve $(r(t), \theta(t))$ sırasıyla (3.1) in ve (3.12) nin çözümleri olsun. Bundan dolayı, $\Gamma^+(P)$ ikinci çeyrek boyunca hareket ettiğinden ve pozitif y eksenini boyunca orijine yaklaştığından, $t \rightarrow \infty$ iken $\theta(t) \searrow \frac{\pi}{2}$ olduğunu ve bu yüzden de $t \rightarrow \infty$ iken

$$\frac{y(t)}{\phi_p(x(t))} = \phi_p \left(\frac{r(t) \sin \theta(t)}{r(t) \cos \theta(t)} \right) = \phi_p(\tan \theta(t)) \rightarrow -\infty$$

olduğunu görürüz. Böylece genelliği bozmaksızın $\tau \geq T$ ve

$$0 < -\left(\frac{\alpha_0}{p}\right)^{p-1} \phi_p(x_1) < y_1 \quad (3.17)$$

olduğunu kabul edebiliriz.

$$\dot{x} = \phi_{p^*}(y), \quad \dot{y} = -\alpha_0 y - \beta_0 \phi_p(x) \quad (3.18)$$

sistemini göz önüne alalım. $(\alpha_0, \beta_0) \in D_2$ olduğundan, (3.18) in tüm pozitif yörüngeleri saat yönünde orijin etrafında hareket eder. P noktasından başlayan (3.18) in pozitif yörüngesini $\gamma^+(P)$ ile gösterelim. $\Gamma^+(P)$ orijinde saat yönü etrafında döndüğünden, P noktasında $\gamma^+(P)$ nin eğimi aynı noktada $\Gamma^+(P)$ nin eğiminden daha küçük değildir. Fakat bu imkansızdır. Gerçekten (3.15) den

$$\begin{aligned} & a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1) \\ &= \alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1) - (\alpha_0 - a(\tau))y_1 - (\beta_0 - b(\tau))\phi_p(x_1) \\ &< \alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1) - (\alpha_0 - a(\tau))y_1 - \left\{ \left(\frac{\alpha_0}{p} \right)^p - \left(\frac{a(\tau)}{p} \right)^p \right\} \phi_p(x_1) \end{aligned}$$

olduğunu görürüz. Eğer $a(\tau) = \alpha_0$ ise,

$$a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1) < \alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1)$$

elde ederiz, aksi taktirde Cauchy'nin ortalama değer teoremi ve (3.17) den

$$a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1) < \alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1) - (\alpha_0 - a(\tau))y_1$$

$$-(\alpha_0 - a(\tau)) \left(\frac{\alpha_0}{p} \right)^{p-1} \phi_p(x_1) = \alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1)$$

$$-(\alpha_0 - a(\tau)) \left\{ y_1 + \left(\frac{\alpha_0}{p} \right)^{p-1} \phi_p(x_1) \right\} < \alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1)$$

elde ederiz. Buradan,

$$-\frac{\alpha_0 y_1 + \beta_0 \phi_p(x_1)}{\phi_{p^*}(y_1)} < -\frac{a(\tau)y_1 + b(\tau)\phi_p(x_1)}{\phi_{p^*}(y_1)}$$

çelişkisine sahip oluruz. Böylece (H) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.

Lemma 3.2 nin ispatında gördüğümüz gibi, burada önemli olan Teorem 3.2 nin ispatında $t \geq T$ için,

$$b(t) > \left(\frac{a(t)}{p} \right)^p + \sigma$$

ifadesini sağlayan bir pozitif σ sayısı bulmaktır. Bu $(a(t), b(t)) \in S \subset D_2$ kabulü ile garantilenir ki burada S kapalı cümledir ve $D_2, \beta = (\alpha/p)^p$ eğrisini içermeyiz. Bununla birlikte, eğer $(a(t), b(t))$ D_2 nin sınırı olan $\beta = (\alpha/p)^p$ eğrisinde kalıyorsa, bu durumda böyle bir pozitif σ sayısı seçmemize gerek yoktur. Bu sebepten $(a(t), b(t))$ nin $\beta = (\alpha/p)^p$ sınırında karşılaştığı durumda, bazı ilave kabuller yapmak zorundayız. Buna göre, Teorem 3.3 de $a(t)$ nin periyodik olduğunu kabul edelim.

Teorem 3.3 ün İspatı. Tersini kabul edelim, yani (H) denkleminin salınımsız bir çözümü mevcut olsun. Bu durumda (H) denklemini belli bir yerden sonra negatif olan bir çözüme sahiptir. (H) denkleminin negatif çözümü, belli bir yerden sonra ikinci çeyrek içinde kalan (3.1) in pozitif yörüngesine karşılık gelir. $(r(t), \theta(t))$, (3.1) in pozitif yörüngesine karşılık gelen (3.12) nin çözümü olsun. $t \geq T$ için, $(a(t), b(t)) \in \bar{D}_2$ kabulünden, $t \geq T$ için

$$b(t) \geq \left(\frac{a(t)}{p} \right)^p$$

olduğunu görürüz. Böylece Lemma 3.2 nin ispatında olduğu gibi $\frac{\pi}{2} < \theta(t) < \pi$ olacak şekilde $T_1 \geq T$ seçebiliriz ve $t \geq T_1$ için,

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= -\frac{\sin^2 \theta(t)}{p-1} \left[p-1 - \frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} + \frac{b(t)}{|\tan \theta(t)|^p} \right] \\ &\leq -\frac{\sin^2 \theta(t)}{p-1} \left[p-1 - \frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} + \left(\frac{a(t)}{p|\tan \theta(t)|} \right)^p \right]\end{aligned}$$

dir. $x > 0$ için $h(x) = (x/p)^p - x + p-1$ olsun. Buradan

$$\dot{\theta}(t) \leq -\frac{\sin^2 \theta(t)}{p-1} h\left(\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|}\right) \quad (3.19)$$

elde ederiz. $h(p) = 0$ ve $x \neq p$ için ve $h(x) > 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece $t \geq T_1$ için $\theta(t)$ nin artmayan olduğu ve $t \rightarrow \infty$ iken

$$\theta(t) \searrow \theta_0 \quad (3.20)$$

olduğu sonucu çıkarırız. Burada θ_0 , $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$ yi sağlayan bir sayıdır.

Kabul edelim ki $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda (3.20) den, $\sin \theta(t) \rightarrow 1$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $|\tan \theta(t)| \rightarrow \infty$ olduğunu görürüz. $a(t)$ sınırlı olduğundan $t \geq T_2$ için

$$\sin \theta(t) \geq \frac{1}{2} \text{ ve } \frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} \leq 1$$

sağlanacak şekilde $T_2 \geq T_1$ vardır. Çünkü $p > 1$, $t \geq T_2$ için,

$$h\left(\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|}\right) \geq h(1) > 0$$

bu eşitsizlik ortaya çıkar. Bu nedenle, (3.19) dan $t \geq T_2$ için

$$\dot{\theta}(t) \leq -\frac{h(1)}{4(p-1)}$$

elde ederiz. Böylece $t \rightarrow \infty$ iken (3.20) ye bir çelişki olan, $\theta(t) - \theta(T_2) \rightarrow -\infty$ sonucunu çıkarırız. Buradan da $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$ olduğunu görürüz.

$a(t)$ non-negatif, pozitif periyotlu periyodik bir fonksiyon olduğundan $a(t)$ nin maksimum ve minimumu mevcuttur. Buna göre,

$$l = \sup_{t \geq T} a(t) \quad \text{ve} \quad m = \inf_{t \geq T} a(t)$$

olsun. Bu durumda $0 \leq m < l$ dir. O halde,

$$\frac{l+2m}{2l+m} < \left| \frac{\tan(\theta_0 + \varepsilon)}{\tan \theta_0} \right| < 1 \quad (3.21)$$

olan yeterince küçük bir $\varepsilon > 0$ bulabiliriz. (3.20) den $t \geq T_3$ için $\theta_0 \leq \theta(t) \leq \theta_0 + \varepsilon$ olacak şekilde bir $T_3 \geq T_1$ seçebiliriz. Buradan da, $t \geq T_3$ için

$$\sin(\theta_0 + \varepsilon) \leq \sin \theta(t) \leq \sin \theta_0 \quad \text{ve} \quad |\tan(\theta_0 + \varepsilon)| \leq |\tan \theta(t)| \leq |\tan \theta_0| \quad (3.22)$$

elde ederiz.

$\{t_n\}$ ve $\{s_n\}$; $T_3 < t_n < s_n < t_{n+1}$, $a(t_n) = a(s_n) = (2l+m)/3$ ve $t_n < t < s_n$ için,

$$a(t) > \frac{2l+m}{3} \quad (3.23)$$

ile birlikte sonsuza giden iki dizi olsun. Benzer şekilde, $\tau_n < t < \sigma_n$ olmak üzere, sonsuza giden $\{\tau_n\}$ ve $\{\sigma_n\}$ gibi iki dizi seçebiliriz öyle ki, $a(\tau_n) = a(\sigma_n) = (l+2m)/3$ ve $T_3 < \tau_n < \sigma_n < \tau_{n+1}$ için

$$a(t) < \frac{l+2m}{3} \quad (3.24)$$

olsun. $I_n = [t_n, s_n]$ ve $J_n = [\tau_n, \sigma_n]$ olsun. $a(s)$ periyodik olduğundan I_n ve J_n in uzunlukları n den bağımsızdır. $d_1 = s_n - t_n$ ve $d_2 = \sigma_n - \tau_n$ olsun. (3.22)-(3.24) ten, $t \in I_n$ için

$$\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} \geq \frac{2l+m}{3|\tan \theta_0|} \quad (3.25)$$

ve $t \in J_n$ için

$$\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|} \leq \frac{l+2m}{3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|} \quad (3.26)$$

elde ederiz. (3.21) den

$$\frac{l+2m}{3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|} < \frac{2l+m}{3|\tan \theta_0|}$$

olduğunu görürüz. Burada, ne $(2l+m)/(3|\tan \theta_0|)$ nede $(l+2m)/(3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|)$ p ye eşit değildir.

Durum (i): $(2l+m)/(3|\tan \theta_0|) > p$. (3.25) ten ve $h(x)$ in özelliğinden $t \in I_n$ için

$$h\left(\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|}\right) \geq h\left(\frac{2l+m}{3|\tan(\theta_0)|}\right) > 0$$

sonucuna varırız. Buradan (3.19) ve (3.22) birlikte ele alınırsa, $t \in I_n$ için

$$\dot{\theta}(t) \leq -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|}\right) \leq -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{2l+m}{3|\tan \theta_0|}\right)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği T_3 den $t \geq s_n$ ne integre ederek, $n \rightarrow \infty$ iken $-\infty$ a giden

$$\begin{aligned}\theta(t) - \theta(T_3) &\leq -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{2l+m}{3|\tan \theta_0|}\right) \sum_{k=1}^n \int_{I_k} dt \\ &= -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{2l+m}{3|\tan \theta_0|}\right) d_1 n\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu (3.20) ile çelişir.

Durum (ii): $(l+2m)/(3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|) < p$. (3.26) ve $h(x)$ in özelliğinden $t \in J_n$ için

$$h\left(\frac{a(t)}{|\tan \theta(t)|}\right) \geq h\left(\frac{l+2m}{3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|}\right) > 0$$

olduğunu görürüz. Bu nedenle tekrar (3.19) ve (3.22) den $t \in J_n$ için

$$\dot{\theta}(t) \leq -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{l+2m}{3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|}\right)$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği T_3 den $t \geq \sigma_n$ ye integre edersek, $n \rightarrow \infty$ iken $-\infty$ 'a giden

$$\begin{aligned}\theta(t) - \theta(T_3) &\leq -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{l+2m}{3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|}\right) \sum_{k=1}^n \int_{J_k} dt \\ &= -\frac{\sin^2(\theta_0 + \varepsilon)}{p-1} h\left(\frac{l+2m}{3|\tan(\theta_0 + \varepsilon)|}\right) d_2 n\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu (3.20) ile çelişir.

Her iki durumda da bir çelişki elde ederiz. Böylece (H) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.

4. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN

SALINIM VE SALINIMSIZLIĞI

Bu bölümde

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \quad (\text{L})$$

şeklindeki lineer diferensiyel denklemler üzerinde duracağız ve bunlarla ilgili birkaç örnek vereceğiz, burada $t \geq 0$ için $a(t)$ sürekli türevlenebilir ve $b(t)$ de sürekli fonksiyonlardır. Daha önce verdiğimiz Teorem 3.1-3.3 ten direkt olarak aşağıdaki sonuçları ifade edebiliriz.

Sonuç 4.1. S cümlesi,

$$R_1 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0 \text{ ve } 0 \leq \beta \leq \alpha^2/4\}$$

bölgesinin sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi ve yeterince büyük t için $(a(t), b(t)) \in S$ olsun. Bu durumda (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımsızdır.

Sonuç 4.2. S cümlesi,

$$R_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0 \text{ ve } \beta > \alpha^2/4\}$$

bölgesinin sınırlı ve kapalı bir alt cümlesi ve yeterince büyük t için $(a(t), b(t)) \in S$ olsun. Bu durumda (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.

Sonuç 4.3. S cümlesi,

$$\overline{R}_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0 \text{ ve } \beta \geq \alpha^2/4\}$$

bölgesinin sınırlı bir alt cümlesi ve $a(t)$ periyodiktir ve sabit olmasın ayrıca, yeterince büyük t için $(a(t), b(t)) \in S$ olsun. Bu durumda (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.

(L) denklemi,

$$y = x \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^t a(s) ds\right) \quad (4.1)$$

konumu yapılarak,

$$\ddot{y} + c(t)y = 0 \quad (4.2)$$

standart formuna dönüştürülebilir, burada $c(t) = b(t) - a^2(t)/4 - \dot{a}(t)/2$ dir. Gerçekten (4.1) ve gerekli türevleri hesap edilip (L) denkleminde yerine yazılırsa, (4.2) denkleminin elde edileceği kolaylıkla görülür. (L) ve (4.2) denklemlerinin aynı sıfırlara sahip oldukları açıktır. Başka bir deyişle, (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır, ancak ve ancak (4.2) denkleminin çözümleri salınımlı ise. Böylece (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlı olması için, gerek ve yeter şart,

$$\ddot{x} + \tilde{a}(t)\dot{x} + \tilde{b}(t)x = 0 \quad (4.3)$$

denkleminin çözümlerinin salınımlı olmasıdır. Burada $\tilde{a}(t)$ ve $\tilde{b}(t)$

$$\tilde{b}(t) - \frac{1}{4}\tilde{a}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{\tilde{a}} = b(t) - \frac{1}{4}a^2(t) - \frac{1}{2}\dot{a}(t) \quad (4.4)$$

ü sağlar.

Burada belirtelim ki,

- (i) $t \geq 0$ için $a(t)$ ve $b(t)$ her zaman pozitif değildir;
- (ii) $t \geq 0$ için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in R_1$ (veya R_2) olsa bile, $t \geq 0$ için $(a(t), b(t))$ her zaman R_1 (veya R_2) e ait değildir.

Bu demektir ki; Sonuç 4.1-4.3 katsayılarının işareti tanımlı olmayan lineer diferensiyel denklem için bile faydalıdır. Aynı zamanda, Sonuç 4.1-4.3 ü şu şekilde yeniden yazabiliriz:

Teorem 4.4. $\tilde{a}(t)$ ve $\tilde{b}(t)$, (4.4) şartını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere, $t \geq 0$ için $\tilde{a}(t)$ sürekli türevlenebilen bir fonksiyon ve $\tilde{b}(t)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, yeterince büyük t için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in S \subset R_1$ dir, burada S ve R_1 Sonuç 4.1 de verilen bölgelerdir. Bu durumda (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımsızdır.[25]

Teorem 4.5. $\tilde{a}(t)$ ve $\tilde{b}(t)$, (4.4) şartını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere, $t \geq 0$ için $\tilde{a}(t)$ sürekli türevlenebilen bir fonksiyon ve $\tilde{b}(t)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, yeterince büyük t için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in S \subset R_2$ dir, burada S ve R_2 Sonuç 4.2 de verilen bölgelerdir. Bu durumda (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır. [25]

Teorem 4.6. $\tilde{a}(t)$ ve $\tilde{b}(t)$, (4.4) şartını sağlayan fonksiyonlar olmak üzere, $t \geq 0$ için $\tilde{a}(t)$ sürekli türevlenebilen bir fonksiyon ve $\tilde{b}(t)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $\tilde{a}(t)$ periyodiktir ve sabit değildir ve ayrıca yeterince büyük t için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in S \subset \bar{R}_2$ olsun, burada S ve $\bar{R}_2$ Sonuç 4.3 de verilen bölgelerdir. Bu durumda (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır.

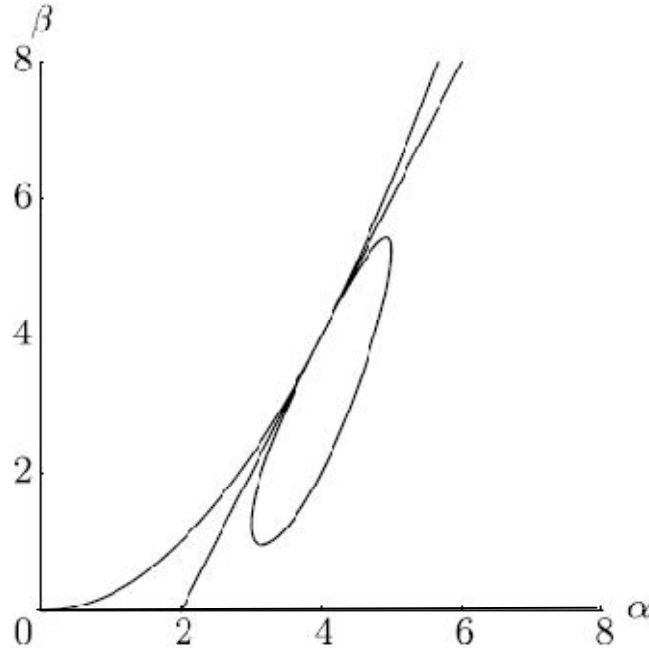
Örneğin,

$$\ddot{x} + (-1 + 2 \cos 2t)x = 0 \quad (4.5)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu bir Mathieu denklemdir. Ek olarak belirtelim ki $\ddot{x}(t) + (a + b \cos 2t)x(t) = 0$ şeklindeki denklemler Mathieu denklemi olarak adlandırılır. (Emile Leonard Mathieu (1805-1890)) (4.5) denkleminde $a(t) = 0$ ve $b(t) = -1 + 2 \cos 2t$ olduğundan her $t \geq 0$ için pozitif değildirler. Böylece Sonuç 4.1, (4.5) denkleminde uygulanamaz. Bununla birlikte, aşağıda (4.5) denkleminin aşık olmanın tüm çözümlerinin salınımsız olduğunu göreceğiz. Şimdi,

$$\tilde{a}(t) = 4 - \sin 2t \quad \text{ve} \quad \tilde{b}(t) = 3 + \cos 2t - 2 \sin 2t + \frac{1}{4} \sin^2 2t \quad (4.6)$$

olsun.



Şekil 4.1 (4.6) denkleminin ile verilen parametrik eğri.

Bu durumda,

$$\tilde{b}(t) - \frac{1}{4} \tilde{a}^2(t) - \frac{1}{2} \dot{\tilde{a}}(t) = -1 + 2 \cos 2t = b(t) - \frac{1}{4} a^2(t) - \frac{1}{2} \dot{a}(t)$$

olduğunu kontrol etmek kolaydır; yani (4.4) şartı sağlanır. $t \geq 0$ için $3 \leq \tilde{a}(t) \leq 5$ ve $\tilde{b}(t) > 0$ olduğu açıktır. Aynı zamanda $t \geq 0$ için,

$$\frac{1}{4}\tilde{a}^2(t) - \tilde{b}(t) = 1 - \cos 2t \geq 0$$

olduğunu görürüz. $\alpha = \tilde{a}(t)$ ve $\beta = \tilde{b}(t)$ koyalım, buradan

$$\beta = 3 \pm \sqrt{1 - (4 - \alpha)^2} - 2(4 - \alpha) + \frac{1}{4}(4 - \alpha)^2$$

elde ederiz.

$3 \leq \alpha \leq 5$ için,

$$f_+(\alpha) = 3 + \sqrt{1 - (4 - \alpha)^2} - 2(4 - \alpha) + \frac{1}{4}(4 - \alpha)^2$$

$$f_-(\alpha) = 3 - \sqrt{1 - (4 - \alpha)^2} - 2(4 - \alpha) + \frac{1}{4}(4 - \alpha)^2$$

şeklinde tanımlayalım ve

$$S = \{(\alpha, \beta) : 3 \leq \alpha \leq 5 \text{ ve } f_-(\alpha) \leq \beta \leq f_+(\alpha)\}$$

olsun. Bu durumda $t \geq 0$ için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in S \subset R_1$ dir. Basit bir hesaplamayla, $3 < \alpha < 5$ için

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f_+(\alpha) \right|_{\alpha=4} = 2 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2}{d\alpha^2} f_+(\alpha) < 0 < \frac{d^2}{d\alpha^2} f_-(\alpha)$$

elde ederiz. Böylece, S cümlesinin R_1 de sınırlı, kapalı ve konveks olduğu sonucunu çıkarırız. Ayrıca $\beta = \alpha^2/4$ ve $\beta = f_+(\alpha)$ eğrilerinin $(\alpha, \beta) = (4, 4)$ de bir tek ortak teğetleri olduğunu görürüz. Ortak teğet $\beta = 2\alpha - 4$ ile verilir (Bkz. Şekil 4.1). Böylece

Teorem 4.4 den, (4.5) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümlerinin salınımsız olduğu görölür.

Bir başka örnek olarak,

$$\ddot{x} + (\sin t)\dot{x} + (\cos t)x = 0 \quad (4.7)$$

ve

$$\ddot{x} + (\cos t)\dot{x} + (\cos t)x = 0 \quad (4.8)$$

denklemlerini göz önüne alalım. (4.7) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümlerinin salınımsız ve (4.8) denkleminin çözümlerinin de salınımlı oldukları biliniyor [12,13,17]. Sonuçlarımızı kullanarak bu gerçeğı kolaylıkla gösterebiliriz.

(4.7) denkleminde, sırası ile $a(t)$ ve $b(t)$ yi $\sin t$ ve $\cos t$ olarak alabiliriz.

$$\tilde{a}(t) = 2 - \sin t \quad \text{ve} \quad \tilde{b}(t) = 1 - \sin t$$

olsun. Böylece,

$$\tilde{b}(t) - \frac{1}{4}\tilde{a}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{\tilde{a}}(t) = -\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{2}\cos t = b(t) - \frac{1}{4}a^2(t) - \frac{1}{2}\dot{a}(t)$$

olduğu açıktır. Bu durumda (4.4) şartı sağlanır. $\tilde{b}(t) = \tilde{a}(t) - 1$ olduğundan $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t))$ parametrik eğrisi $(1,0)$ ve $(3,2)$ noktalarının birleştiğı doğru parçasını belirtir. Bu doğru parçası R_1 de sınırlı, kapalı ve konvektir. Böylece Teorem 4.4 ile (4.7) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümlerinin salınımsız olduğunu görürüz. Burada,

$$\omega = \int_0^{2\pi} e^{-\sin \sigma} d\sigma$$

olsun.

$$s = \varphi(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\omega} \int_0^t e^{-\sin \sigma} d\sigma$$

Liouville dönüşümünü kullanarak ve $y(s) = x(t)$ yazarak, (4.8) denklemi,

$$\frac{d^2}{ds^2} y + \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2 e^{2\sin \varphi^{-1}(s)} \cos \varphi^{-1}(s) y = 0 \quad (4.9)$$

şekline dönüşür, burada $\varphi^{-1}(s)$, $s = \varphi(t)$ nin ters fonksiyonudur. Belirtelim ki, $t \rightarrow \infty$ iken $s = \varphi(t) \rightarrow \infty$ ve $s \rightarrow \infty$ iken $t = \varphi^{-1}(s) \rightarrow \infty$ dur. Böylece (4.8) denkleminin aşikar olmayan tüm çözümleri salınımlıdır, ancak ve ancak (4.9) denkleminin çözümleri salınımlı ise.

$$\tilde{a}(s) = \frac{\omega}{\pi} \left(e - e^{\sin \varphi^{-1}(s)} \right) \quad \text{ve} \quad \tilde{b}(s) = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega}{\pi} \right)^2 \left(e - e^{\sin \varphi^{-1}(s)} \right)^2$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \tilde{b}(s) - \frac{1}{4} \tilde{a}^2(s) - \frac{1}{2} \frac{d}{ds} \tilde{a}(s) &= \frac{\omega}{2\pi} e^{\sin \varphi^{-1}(s)} \cos \varphi^{-1}(s) \frac{d}{ds} \varphi^{-1}(s) \\ &= \left(\frac{\omega}{2\pi} \right)^2 e^{2\sin \varphi^{-1}(s)} \cos \varphi^{-1}(s) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bundan dolayı (4.9) un aşikar olmayan tüm çözümleri salınımlıdır ancak ve ancak,

$$\frac{d^2}{ds^2} y + \tilde{a}(s) \frac{d}{ds} y + \tilde{b}(s) y = 0 \quad (4.10)$$

denkleminin çözümleri salınımlı ise. $\tilde{a}(s)$ ve $\tilde{b}(s)$ fonksiyonlarının, $\tilde{b}(s) = \tilde{a}^2(s)/4$ ü sağlayan, non-negatif ve sınırlı fonksiyonlar olduğu açıktır. Dolayısıyla $t \geq 0$ için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in \bar{R}_2$ dir. Ayrıca, $\tilde{a}(s)$ nin periyodik olduğunu görürüz. Gerçekten $t \geq 0$ için,

$$\varphi(t) + 2\pi = \frac{2\pi}{\omega} \left\{ \int_0^t e^{-\sin \sigma} d\sigma + \int_0^{2\pi} e^{-\sin \sigma} d\sigma \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{\omega} \left\{ \int_{2\pi}^{t+2\pi} e^{-\sin \sigma} d\sigma + \int_0^{2\pi} e^{-\sin \sigma} d\sigma \right\} = \varphi(t+2\pi)$$

elde ederiz. $s = \varphi(t)$ olduğundan, $s \geq 0$ için $\varphi^{-1}(s+2\pi) = \varphi^{-1}(s) + 2\pi$ şeklindedir. Bu durumdan $s \geq 0$ için,

$$\sin \varphi^{-1}(s+2\pi) = \sin(\varphi^{-1}(s) + 2\pi) = \sin \varphi^{-1}(s)$$

sonucunu çıkarırız. Bu, $\sin \varphi^{-1}(s)$ nin, 2π periyotlu bir periyodik fonksiyon olduğu ve dolayısıyla $\tilde{a}(s)$ nin periyodik olduğu anlamına gelir. Böylece Teorem 4.6 dan, (4.10) un tüm çözümlerinin salınımlı olduğu ve bu nedenle de (4.9) ve (4.8) denklemlerinin çözümlerinin salınımlı olduğu görülür.

Bir başka örnek olarak (4.2) denklemini bir kez daha göz önüne alalım. $c(t)$, ortalama sıfır değeri (yani T periyodik olmak üzere $\int_0^T c(t) dt = 0$) ile periyodik ve $c(t) \neq 0$ ise bu durumda (4.2) nin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımlıdır [26]. Teorem 4.6 yı kullanarak, bu gerçek kolayca görülür.

$$P(t) = \int_0^t c(s) ds$$

olarak tanımlansın. $c(t)$ üzerindeki kabulden dolayı, aynı zamanda $P(t)$ integrali periyodiktir ve sabit değildir.

$$L = \max_{t \geq 0} P(t)$$

olsun ve

$$\tilde{a}(t) = 2(L - P(t)) \quad \text{ve} \quad \tilde{b}(t) = (L - P(t))^2 \quad (4.11)$$

olmak üzere (4.3) denklemini göz önüne alalım. Bu durumda $\tilde{a}(s)$ ve $\tilde{b}(s)$ fonksiyonları,

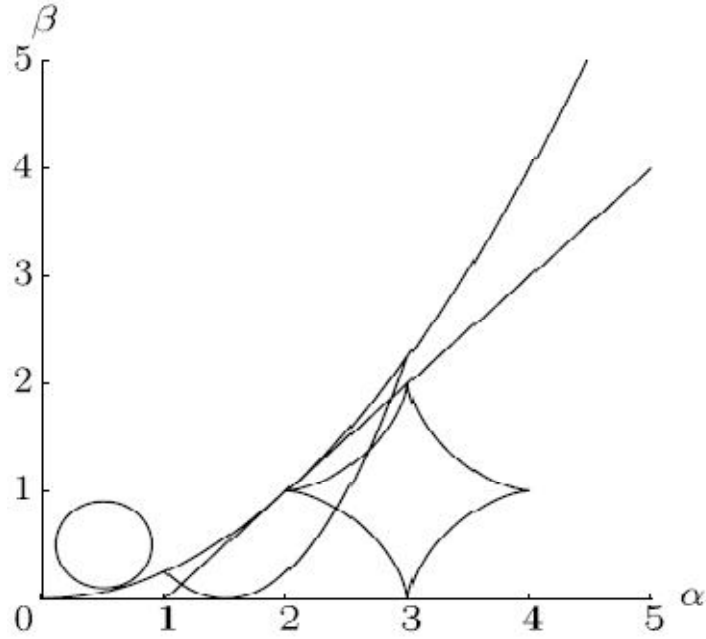
$$\tilde{b}(t) - \frac{1}{4}\tilde{a}^2(t) - \frac{1}{2}\dot{\tilde{a}}(t) = c(t)$$

yi sağlar. Böylece (4.2) nin aşık ar olmayan tüm çözümleri salınımlıdır, ancak ve ancak, (4.11) ile birlikte (4.3) ün çözümleri salınımlı ise. Bu takdirde, $\tilde{a}(t)$ non-negatif pozitif bir periyotla periyodik bir fonksiyondur ve $\tilde{b}(t) = \tilde{a}^2(t)/4$ tür. Böylece Teorem 4.6 dan aşık ar olmayan tüm çözümlerin salınımlı olduğunu görürüz.

Şimdi Sonuç 4.1-4.3 ile ilgili bazı örnekler verelim ve (L) denklemin e den k olan

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -a(t)y - b(t)x \quad (4.12)$$

sistemi için global faz portrelerini alalım.



Şekil 4.2 Örnek 4.1-4.3 ve Gözlem 4.4 ün parametrik eğrileri.

Aşağıda Örnek 4.1-4.3 de ve Gözlem 4.4 de, $a(t)$ ve $b(t)$ katsayıları olarak sinüs ve cosinüs fonksiyonlarını seçeceğiz. Böylece $a(t)$ ve $b(t)$ periyodiktir. Bununla birlikte $a(t)$ ve $b(t)$ nin periyodikliği Sonuç 4.1 ve 4.2 için gerekli değildir. Şekil 4.2 de

$$\alpha = a(t) \quad \text{ve} \quad \beta = b(t) \quad (4.13)$$

şeklinde verilen parametrik eğrileri çizdik.

Örnek 4.1.

$$a(t) = 3 + \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos 3t) \quad \text{ve} \quad b(t) = 1 + \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$$

olmak üzere (L) denklemini göz önüne alalım. Buradan aşikar olmayan tüm çözümler salınımsızdır.

Şekil 4.2 de gösterildiği üzere, (4.13) parametrik eğrisi (3,1) merkezi etrafında bir hiposikloid eğri tanımlar. Belirtelim ki, hiposikloid eğrinin (2,1) noktasında $\beta = \alpha^2/4$ parabolü ile bir ilişkisi vardır ve $\beta = \alpha - 1$ doğrusu bu noktada parabole teğettir ve bu $\beta = \alpha - 1$ doğrusu (2,1) noktası hariç parabolü ve hiposikloid eğriyi ayırır.

$$S = \{ (\alpha, \beta) : |\alpha - 3| + |\beta - 1| \leq 1 \}$$

olsun. Bu durumda S eşkenar dörtgeni hiposikloid eğriyi içerir; yani $t \geq T = 0$ için $(a(t), b(t)) \in S$ dir. S cümlesinin D_1 de sınırlı, kapalı ve konveks bir cümle olduğu açıktır. Böylece Sonuç 4.1 den aşikar olmayan tüm çözümlerin salınımsız olduğunu görürüz. Belirtelim ki, Bölüm 3 de verilen sabitler aşağıdaki şekildedir:

$$\mu = \max_{(\alpha, \beta) \in S} \lambda_1(\alpha, \beta) = \lambda_1(2, 1) = \lambda_1(3, 2) = 1$$

$$\alpha_0 = \sup_{t \geq 0} a(t) = 4 \quad \text{ve} \quad \beta_0 = \alpha_0 \mu^{p-1} - (p-1) \mu^p = 3.$$

Buna göre,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\left(3 + \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos 3t)\right)y - \left(1 + \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)\right)x \end{aligned}$$

sistemi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -4y - 3x \end{aligned}$$

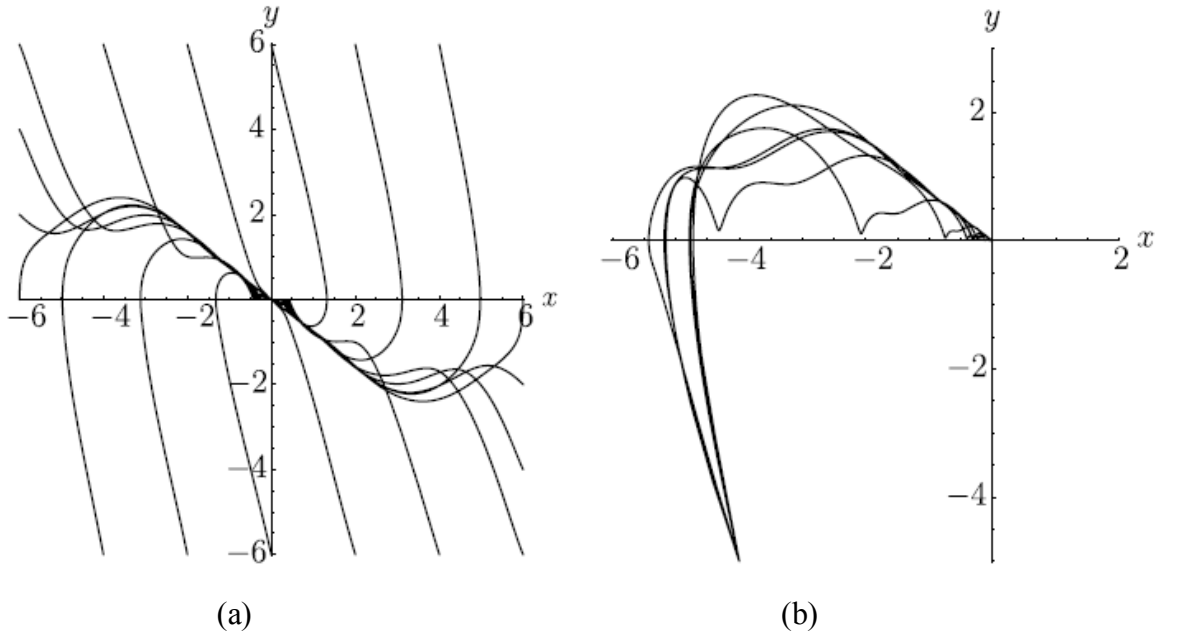
şeklini alır. Verilen sisteme ait kritik nokta $(0,0)$ dır. Bölüm 2 de belirttiğimiz gibi lineer olan bu sistemi çözersek

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

şeklinde olmak üzere A nın λ_1 ve λ_2 özdeğerleri

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

karakteristik denkleminin çözümleridir. Buradan aynı işaretli $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$ özdeğerleri bulunur. λ_1 ve λ_2 aynı işaretli (negatif) ve reel olduğundan kritik nokta bir node (düğüm) belirtir. $\lambda = -3$ için özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ve $\lambda = -1$ için özvektör $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ olur.



Şekil 4.3 Örnek 4.1 in (4.12) sistemi için faz resmi.

Şekil 4.3 te görüldüğü gibi, her pozitif yörünge orijin etrafında dönmeksizin orijine yaklaşır, yani aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımsızdır. Şekil 4.3(a) da verilen her pozitif yörünge, $-2 \leq i \leq 2$, $i \in \mathbb{N}$ için $(2i, 6)$, $(2i, -6)$ ve $0 \leq j \leq 3$, $j \in \mathbb{N}$ için

$(6, -2j)$, $(-6, 2j)$ noktalarından birinden başlar. Her bir pozitif yörüngenin başlangıcı sıfırdır. (L) denklemi nonotonom olduğundan, pozitif yörüngeler aynı noktadan başlasalar bile çeşitli şekillere sahiptir. Şekil 4.3(b), sırasıyla $0 \leq t_0 \leq 5$, $t_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere, t_0 da başlayan pozitif yörüngeleri gösterir. Pozitif yörüngeler aynı $(-4, -5)$ noktasından başlarlar.

Örnek 4.2.

$$a(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos t \quad \text{ve} \quad b(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin t$$

şeklinde olmak üzere, (L) denklemini ele alalım. Bu durumda aşık ar olmayan tüm çözümler salınımlıdır.

Bu örnekte, (4.13) parametrik eğrisi, merkezi $(1/2, 1/2)$ ve yarıçapı $2/5$ olan çember tanımlar. Belirtelim ki, bu çember $\beta = \alpha^2/4$ parabolüyle karşılaşmaz; yani çember ile parabol arasında küçük bir mesafe vardır (Bkz. Şekil 4.2).

$$S = \left\{ (\alpha, \beta) : (\alpha - 1/2)^2 + (\beta - 1/2)^2 \leq 4/25 \right\}$$

olsun.

Bu durumda S diski $t \geq T = 0$ için $(a(t), b(t))$ yi içerir ve S , D_2 de sınırlı ve kapalı bir cümledir. Böylece, Sonuç 4.2 den dolayı aşık ar olmayan tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu görürüz. Bölüm 3 de tanımlanan sabitler şu şekildedir:

$$\sigma = 1/50, \quad \alpha_0 = \sup_{t \geq 0} a(t) = 9/10 \quad \text{ve} \quad \beta_0 = (\alpha_0/2)^2 + \sigma = 89/400.$$

Örnek 4.1 e benzer şekilde

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos t\right)y - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} \sin t\right)x \end{aligned}$$

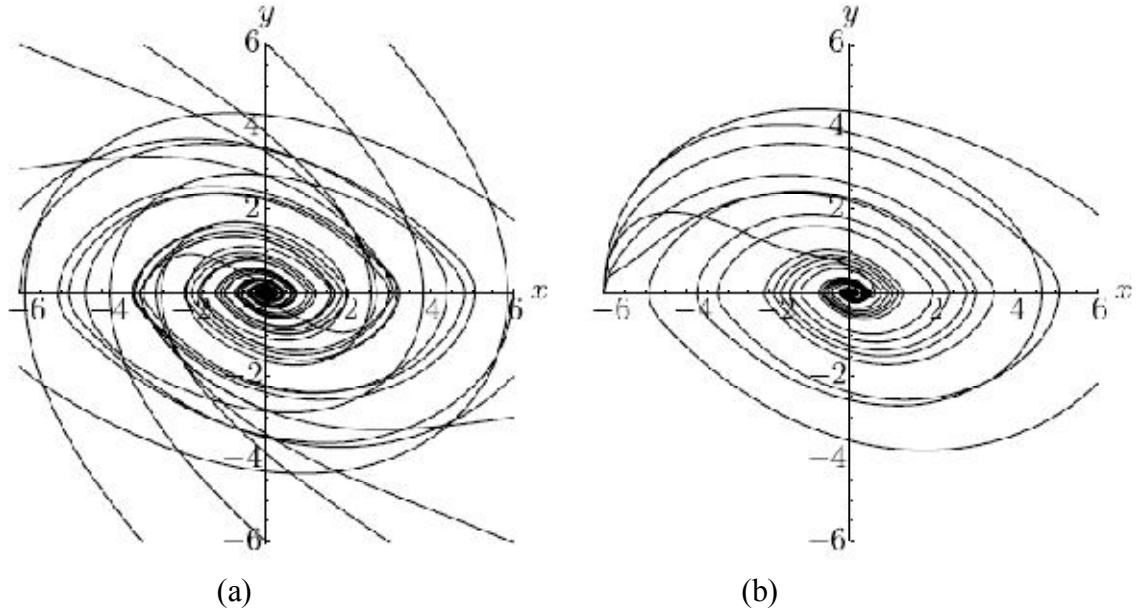
sistemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{9}{10}y - \frac{89}{400}x\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Sisteme ait kritik nokta $(0,0)$ dır. Karakteristik denklemin köklerinden

$$\lambda_1 = -\frac{9}{20} + \frac{\sqrt{2}}{10}i, \quad \lambda_2 = -\frac{9}{20} - \frac{\sqrt{2}}{10}i \text{ kompleks özdeğerleri bulunur. Dolayısıyla } (0,0)$$

kritik noktası bir spiraldir.



Şekil 4.4 Örnek 4.2 için (4.12) sisteminin faz resmi.

Yukarıda Şekil 4.4 de kabaca çizildiği gibi, tüm pozitif yörüngeler, orijin etrafında sonsuz kez saat yönünde hareket eder ve orijine yaklaşır. Dolayısıyla aşık olmayan tüm çözümler salınımlıdır. Şekil 4.4(a) da, sırasıyla $-1 \leq i \leq 1$, $i \in \mathbb{N}$ için $(3i, 6)$, $(3i, -6)$ ve $0 \leq j \leq 2$, $j \in \mathbb{N}$ için $(6, -3j)$, $(-6, 3j)$ noktalarından başlayan pozitif yörüngeler çizeriz. Her bir pozitif yörüngenin başlangıcı sıfırdır. Şekil 4.4(b) de $(-6, 0)$ noktasından başlayan pozitif yörüngeleri çizdik. Her bir pozitif yörünge sırasıyla, $0 \leq t_0 \leq 5$, $t_0 \in \mathbb{N}$ de farklı bir t_0 a sahiptir.

Daha sonra, S nin konveksliğini Sonuç 4.1 de ihmal edemeyeceğimizi göstereceğiz.

Örnek 4.3.

$$a(t) = 2 + \sin t \quad \text{ve} \quad b(t) = \frac{1}{4}(2 + \sin t)^2$$

bu şekilde olmak üzere (L) denklemini ele alalım. Bu durumda, aşıkâr olmayan tüm çözümler salınımlıdır.

(4.13) parametrik eğrisinin $\beta = \alpha^2/4$ parabolü içine yerleştiği açıktır. $a(t)$ periyodiktir ve sabit değildir. Dolayısıyla Sonuç 4.3 ün tüm kabulleri sağlanır. Böylece aşıkâr olmayan tüm çözümlerinin salınımlı olduğunu görürüz.

Yukarıdaki durumun doğruluğunu başka bir metotla gösterelim.

$$\ddot{x} + (2 + \sin t)\dot{x} + \frac{1}{4}(2 + \sin t)^2 x = 0$$

denkleminde

$$y = x \exp\left(t - \frac{1}{2} \cos t\right)$$

dönüşümü yapılarak, $c(t) = -\cos t/2$ olmak üzere verilen denklemi (4.2) denklemine dönüştürebiliriz. $c(t)$ ortalama sıfır değeri ile periyodik ve $c(t) \neq 0$ olduğundan, tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 4.3 deki (4.13) parametrik eğrisinin grafiğini çizersek, bu durumda $(1, 1/4)$ ve $(3, 9/4)$ noktalarından geçen $\beta = \alpha^2/4$ ün yayını elde ederiz. Bu yay D_1 in içerisinde. Bununla birlikte, bu yayı içeren D_1 in bir konveks alt cümlesi yoktur. Bu demektir ki, bu örnek Sonuç 4.1 e uygulanamaz. O halde S nin konveksliği Sonuç 4.1 de çok önemli bir kabuldür.

Sonuç olarak çözümleri salınımsız olan bir denklem verdik, fakat Sonuç 4.1 i kullanmadık.

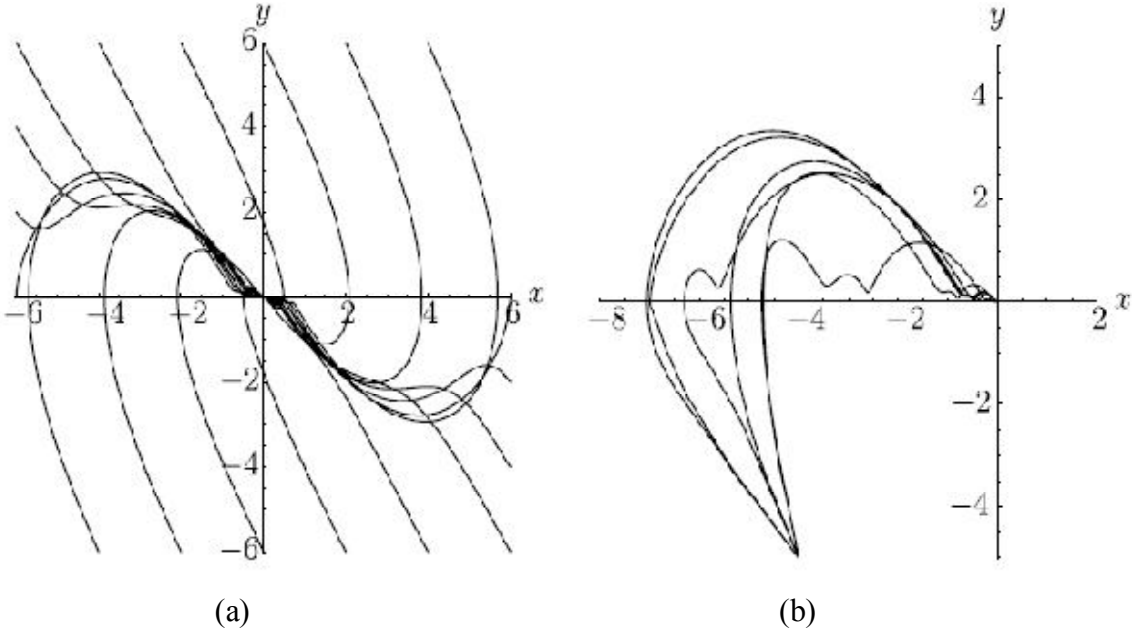
Gözlem 4.4.

$$a(t) = 2 + \sin t \quad \text{ve} \quad b(t) = \left(\frac{1}{2} + \sin t \right)^2$$

şeklinde olmak üzere (L) denklemini ele alalım. Bu durumda, aşıkâr olmayan tüm çözümler salınımsızdır.

Gözlem 4.4 de, (4.13) parametrik eğrisi $(1, 1/4)$ ve $(3, 9/4)$ iki noktadan geçen kuadratik bir eğri tanımlar. Kuadratik eğri D_1 de olmasına rağmen, Sonuç 4.1 in kabullerini sağlayan konveks bir S cümlesi bulamayız (Bkz. Şekil 4.2). Yukarıda Şekil 4.5 de görüldüğü gibi, bununla birlikte her bir pozitif yörüngenin sadece ikinci ve dördüncü çeyrek daire içinden orijine yaklaştığını tahmin edebiliriz. Yani aşıkâr olmayan tüm çözümler salınımsızdır. $t_0 = 0$ başlangıç zamanında, Şekil 4.5(a) sırasıyla, $-2 \leq i \leq 2$, $i \in \mathbb{N}$ için $(2i, 6)$, $(2i, -6)$ ve $0 \leq j \leq 3$, $j \in \mathbb{N}$ için $(6, -2j)$, $(-6, 2j)$ noktalarından başlayan pozitif yörüngeleri gösterir. Şekil 4.5(b) de gösterilen pozitif yörüngeler, sırasıyla $0 \leq t_0 \leq 5$, $t_0 \in \mathbb{N}$ için t_0 dan başlar. Pozitif yörüngeler aynı $(-4, -5)$ noktasından başlar.

Yeniden (4.4) kabulü altında, (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümlerinin salınımsız olması için, (4.3) denkleminin çözümlerinin salınımsız olması gerektiğini dikkate alalım. Gözlem 4.4 deki $(a(t), b(t))$ yi (4.4) ü kullanarak $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t))$ ye dönüştürelim. $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t))$ ile elde edilen parametrik eğrinin, $(a(t), b(t))$ ile elde edilen parametrik eğriden farklı bir şekle sahip olduğunu söylemek gereksizdir. Yeterince büyük t için $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)) \in S \subset R_1$ i sağlayan sınırlı, kapalı ve konveks bir S cümlesi varsa bundan dolayı Gözlem 4.4 $(a(t), b(t))$ li (L) denkleminin aşıkâr olmayan tüm çözümleri salınımsızdır. Bununla birlikte, Teorem 4.4, Gözlem 4.4 teorik şartlarını vermek için yardımları büyük ölçüde sınırlıdır. Dolayısıyla, ne yazık ki Teorem 4.4 ün kabullerini sağlayan $(\tilde{a}(t), \tilde{b}(t))$ fonksiyonlarının uygun bir cümlesini bulamayız.



Şekil 4.5 Gözlem 4.4 için (4.12) sisteminin faz resmi.

KAYNAKLAR

1. Došlý O., Half –linear differential equations, in: Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations I (eds. A. Cañada, P. Drábek and A. Fonda), Elsevier, 161-357, Amsterdam, 2004.
2. Došlý O. and Řehák P., Half-Linear Differential Equations, North Holland Mathematics Studies 2002., Elsevier, Amsterdam, 2005.
3. Elbert Á., A half-linear second order differential equation, in: Qualitative Theory of differential Equations I (ed. M. Farkas), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 30, North-Holland, 153-180, Amsterdam and New York, 1981.
4. Agarwal R. P., Grace S.R. and O’regan D., Oscillation Theory for Second Order Linear, Half-Linear, Superlinear and Sublinear Dynamic Equations, Kluwer, Dordrecht, Boston and London, 2002.
5. Bihari I., On the second order half-lineaar differential equation, Studia Sci. Math. Hungar., 3, 411-437, 1968.
6. Çakmak D., Integral averaging technique for the interval oscillation criteria of certain second-order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl. , 300, 408-425, 2004.
7. Elbert Á., Oscilation and nonoscillation theorems for some nonlinear ordinary differential equations, in: Ordinary and Partial Differential Equations (eds. W. N. Everitt and B. D. Sleeman), Lect. Notes in Math. 964, Springer-Verlag, 187-212, Berlin Heildberg and New York, 1982.
8. Elbert Á. and Schneider A., Perturbations of the half-linear Euler differential equation, Results Math. , 37, 56-63, 2000.
9. Huang C., Oscillation and nonoscillation for second order linear differential equations, J. Math. Anal. Appl. , 210, 712-723, 1997.
10. Jiang J., Oscillation and nonoscillation for second order quasilinear differential equations, Math. Sci. Res. Hot-Line, 4, 39-47, 2000.
11. Kusano T. and Yoshida N., Nonoscillation theorems for a class of quasilinear differential equations of second order, J. Math. Anal. Appl. , 189, 115-127, 1995.
12. Kwong M. K. and Wong J. S. W., Oscillation and nonoscillation of Hill’s equations with periodic damping, J. Math. Anal. Appl. , 288, 15-19, 2003.

13. Kwong M. K. and Zettl A., Integral inequalities and second order linear osculation, *J. Differential Equations*, 45, 16-33, 1982.
14. Leighton W., On self-adjoint differential equations of second order, *J. London Soc.* ,27, 37-47, 1952.
15. Li H.-J. and Yeh C.-C., Nonoscillation criteria for second-order half-linear diferential equations, *Appl. Math. Lett.* ,8, 63-70, 1995.
16. Li W.-T., Interval oscillation criteria for second order damped half-linear differential equations with forcing term, *Math. Inequal. Appl.* , 6, 487-495, 2003.
17. Olech C., Opial Z. and Waz wski T., Sur le problème d'oscillation des int grales de l'équation $\ddot{y} + g(t)y = 0$, *Bull. Acad. Polon. Sci.* , 5, 621-626, 1957.
18. Swanson C. A., Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equation, Academic Pres, New York and London, 1968.
19. Wintner A., A criterion of oscillatory stability, *Quart. Appl. Math.* ,7, 115-117, 1949.
20. Wong J. S. W., Oscillation and nonoscillation of solutions of second order linear differential equations with integrable coefficients, *Trans. Amer. Math. Soc.* ,144, 197-215, 1969.
21. Wong J. S. W., Remarks on a paper of C. Huang, *J. Math. Anal. Appl.* ,291, 180-188, 2004 .
22. Sugie J., Onitsuka M. and Yamaguchi A., Asymptotic behavior of solutions of nonautonomous half-linear differential systems, *Studia Sci. Math. Hungar.* , 44, 159-187, 2007.
23. Ross S.L., Differential equations, John Wiley and Sons, 1984.
24. Akın  ., Bilgisayar destekli ve matematiksel modellemeli diferensiyel denklemler ve sınır değer problemleri, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara, 2006.
25. Sugie J., Geometrical conditions for oscillation of second-order half linear differential equations, *Acta Math. Hungar.* , 118 (4), 369-394, 2008.
26. Coppel W. A., Disconjugacy, *Lecture Notes in Math.* 220, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşenur ÖNDER 1984 yılında Kayseri’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri’de tamamladı. 2002 yılında Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. İki yıl burada öğrenim gördükten sonra Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne yatay geçiş ile geldi ve 2006 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Matematik Öğretmenliği Ana Bilim Dalında Tezsiz Yüksek Lisansa başladı ve buradan mezun oldu. 2007 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında tezli yüksek lisansa başladı. Halen burada öğrenimine devam etmektedir.