

İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

HASSAN A. ALİ ABAS

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2009
ANKARA**

Hassan A. Ali ABAS tarafından hazırlanan “İki Değişkenli Fibonacci ve Lucas Polinomları” adlı bu tezin Yüksek tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU

.....

Matematik ABD, Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU

.....

Matematik ABD, Gazi Üniversitesi

Prof. Dr. Dursun TAŞÇI

.....

Matematik ABD, Gazi Üniversitesi

17/06/2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz olarak atıf yapıldığını bildiririm.

Hassan A. Ali ABAS

İKİ DEĞİŞKENLİ FİBONACCİ VE LUCAS POLİNOMLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Hassan A. Ali ABAS

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2009

ÖZET

Bu çalışmada genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas polinomları göz önüne alınarak bu polinomlarda çeşitli düzenlemeler yapılarak, iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomlarına ve sayılarının elde edilebileceği gösterilmiştir. Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları içeren bazı formüller elde edilmiştir. Bu formüllerden yararlanılarak bu polinomları için birçok temel özdeşlikler elde edilmiştir. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları içeren toplam özdeşlikleri elde edilmiştir. Son olarak bu polinomların bölünebilme özellikleri incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.025
Anahtar kelimeler : İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları, Binet formülü, Fibonacci ve Lucas sayıları
Sayfa Adedi : 55
Tez Yöneticisi : Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU

BIVARIATE FIBONACCI AND LUCAS POLYNOMIALS
(M.Sc. Thesis)

Hassan A. Ali ABAS

GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2009

ABSTRACT

In this study, it can be acquired the bivariate Fibonacci and Lucas polynomials, Fibonacci, Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, polynomials and their numbers are shown. Some formulas which contain generalized bivariate Fibonacci polynomials are obtained. Many basis identifies are obtained using these formulas. The sums of identifies which contain bivariate Fibonacci and Lucas polynomials are attained. Finally, the divisibility properties of these polynomials are studied.

Science Code	: 204.1.025
Key Words	: Bivariate Fibonacci and Lucas polynomials, Binet formulas, Fibonacci and Lucas numbers
Page Numbers	: 55
Adviser	: Asst. Prof. Naim TUĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli katkılarıyla beni yönlendiren ve tecrübelerinden faydalandığım sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Naim TUĞLU ‘ya ve hayatımın her döneminde olduğu gibi tez çalışmam sırasında da desteklerini benden esirgemeyen ve beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme özellikle anneme ve babama teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE REKÛRANS BAĞINTILARI.....	4
3. TEMEL ÖZDEŞLİKLER	15
4. TOPLAM ÖZELLİKLERİ.....	36
5. BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ	42
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ	55

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 2.1. İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları.....	5
Çizelge 2.2. Fibonacci, Pell, Jacobsthal polinomları ve sayıları.....	7
Çizelge 2.3. Lucas, Pell –Lucas, Jacobsthal –Lucas polinomları ve sayıları	8

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simge	Açıklama
$G_n(x, y)$	Genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları
$F_n(x, y)$	İki değişkenli Fibonacci polinomları
$L_n(x, y)$	İki değişkenli Lucas polinomları
$f_n(x)$	Fibonacci polinomları
F_n	Fibonacci Sayıları
$P_n(x)$	Pell polinomları
P_n	Pell Sayıları
$J_n(y)$	Jacobsthal polinomları
J_n	Jacobsthal Sayıları
$l_n(y)$	Lucas polinomları
L_n	Lucas Sayıları
$Q_n(x)$	Pell-Lucas polinomları
Q_n	Pell-Lucas Sayıları
$j_n(y)$	Jacobsthal–Lucas polinomları
j_n	Jacobsthal -Lucas Sayıları

1. GİRİŞ

Leonardo Fibonacci, Leonardo Pisano veya Pisalı Leonardo olarak da bilinen Fibonacci ortaçağ Avrupa'sının en çok göze batan matematikçisidir. Matematiksel yazıları haricinde onun hayatı hakkında az şey bilinmektedir. Fibonacci, 1170 yılında zengin ticaret kenti olan Pisa da Bonacci ailesinin bir ferdi olarak dünyaya gelmiştir. 1190 yılında babası Cezayir'e atanmış ve oğlu Fibonacci'yi hesaplama sanatını öğrenmesi için beraberinde götürmüştür. Fibonacci ilk derslerini Cezayir'deki hocalardan almıştır. Burada Hint-Arap sayı ve sistemini ve hesaplama tekniklerini öğrenir. Fibonacci bu dönemde Harezmi'nin "Hesap el Cebr vel Muhakemat" adlı kitabı ile tanışır, 1202 yılında Liber Abacci "The Book of the Abacus" adlı ilk kitabını yazmıştır. Aritmetik ve temel cebire adanan Liber Abacci, Avrupa'ya bu yeni sistemi ve aritmetik algoritmayı tanıtmıştır. Fibonacci, Liber Abacci'den sonra "Geometri Alıştırması" Flos (Çiçek) ve Liber Quadratorum (The Book of Square Numbers) adlı iki kitap yayınlamıştır.

Fibonacci, Liber Abacci adlı kitabında tavşan çiftliği olan bir arkadaşıyla ilgili olduğunu iddia ettiği bir soru sorar. Bu probleme göre arkadaşının çiftliğindeki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar Üçüncü aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yapar. Tavşanların ölmedikleri kabul edilecek olursa, herhangi n.ayda çiftlikte toplam kaç çift tavşan vardır?

İlk ay yeni doğmuş bir çift tavşan olsun. İkinci ayda bu tavşanlar henüz yavru lamadıkları için hala bir çift tavşan olacaktır. Üçüncü ay bu tavşanlar bir çift yavru verecek ve iki çift tavşan olacak. Yeni doğan çift dördüncü ay yavru lamayacak ancak ana babaları yeniden bir çift yavru yapacak ve toplam üç çift tavşan olacak.

Buna göre Fibonacci dizisi şöyle tanımlanır. Eğer n. aydaki tavşan çiftlerinin sayısını F_n ile gösterirsek, Fibonacci dizisi

$$F_1 = 1, F_2 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \geq 1 \quad (1.1)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Buna göre Fibonacci sayılarının ilk bir kaç tanesi aşağıda verilmiştir.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

Bir ayçiçeğinin göbeğindeki spiraller incelendiğinde, saat yönündeki spirallerin sayısı 55, ters yöndekilerin sayısı 34 veya 89 dur. Kozalakta bu oran 5'e 8 olup, bunlar ardışık Fibonacci sayılarıdır.

Fibonacci sayıları ile Altın Oran arasında ilginç bir ilişki vardır. Dizideki ardışık iki sayının oranı, sayılar büyüdükçe Altın Oran'a yaklaşır.

Altın oran, doğada sayısız canlının ve cansızın şeklinde ve yapısında bulunan özel bir orandır. Doğada bir bütünün parçaları arasında gözlemlenen, yüzyıllarca sanat ve mimaride uygulanmış, uyum açısından en yetkin boyutları verdiği sanılan geometrik ve sayısal bir oran bağıntısıdır.

Bu sayılar arasında daha pek çok ilişki vardır. Fibonacci bu sayı dizilerini aslında yeniden keşfetmiştir. Bunun nedeni, antik Yunan ve Mısırlı matematikçilerin 1,618 ya da 0,618 oranını biliyor olmalarıdır. Oran, Altın Oranı ya da Altın Ortalama olarak biliniyordu. Bu sayılar müzikte, sanatta, mimaride ve biyolojide kullanılmıştı. Yunanlılar Altın Ortalama'yı Parthenon tapınağının yapımında kullanmışlardı. Mısırlılar, Altın Oran'ı Gize Piramidinin yapımında kullandılar. Oranın özellikleri Pisagor, Plato ve Leonardo da Vinci tarafından da biliniyordu.

Fibonacci ve Lucas sayılarının ve polinomlarının birçok genelleştirmeleri tanımlanmış, bu konuda çeşitli kitaplar ve "The Fibonacci Quarterly" adlı yılda dört sayı basan bir dergi dahi basılmaktadır.

Biz bu yüksek lisans çalışmamızda, Fibonacci ve Lucas sayılarının bir çeşit genellemesi olan ve iki değişkenli Fibonacci Lucas polinomların çeşitli özelliklerinin inceledik. Bu polinomlarda, x ve y değişkenleri yerine çeşitli sayılar seçilerek Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomları ve sayılarının elde edilebileceği gösterdik. Ayrıca iki değişkenli bu polinomlar için elde edilen çeşitli özellik ve sonuçlar, bu sayılar ve polinomlar için de geçerli olacaktır.

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE REKÜRANS BAĞINTILARI

2.1. Tanım

$a, b, x, y \in \mathbb{I}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x^2 + 4y > 0$ olmak üzere,

$$G_0(x, y) = a \quad G_1(x, y) = b$$

$$G_{n+2}(x, y) = xG_{n+1}(x, y) + yG_n(x, y), \quad n \geq 0 \quad (2.1)$$

indirgeme bağıntısı ile tanımlı polinomlara genelleştirilmiş iki değişkenli Fibonacci polinomları denir.

Özel olarak, Eş.2.1 indirgeme bağıntısında $a = 0$, $b = 1$ seçilerek tanımlanan

$$F_0(x, y) = 0, \quad F_1(x, y) = 1$$

$$F_{n+2}(x, y) = xF_{n+1}(x, y) + yF_n(x, y), \quad n \geq 0, \quad (2.2)$$

polinomlara, iki değişkenli Fibonacci polinomları denir.

Eş.2.1 indirgeme bağıntısında $a = 2$, $b = x$ seçilerek tanımlanan

$$L_0(x, y) = 2, \quad L_1(x, y) = x$$

$$L_{n+2}(x, y) = xL_{n+1}(x, y) + yL_n(x, y), \quad n \geq 0 \quad (2.3)$$

polinomlarına iki değişkenli Lucas polinomları denir.

Aşağıdaki tabloda iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları gösterilmektedir.

2.1. Çizelge İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları

n	Fibonacci $F_n(x, y)$	Lucas $L_n(x, y)$
0	0	2
1	1	x
2	x	$x^2 + 2y$
3	$x^2 + y$	$x^3 + 3xy$
4	$x^3 + 2xy$	$x^4 + 4x^2y + 2y^2$
5	$x^4 + 3x^2y + y^2$	$x^5 + 5x^3y + 5xy^2$
6	$x^5 + 4x^3y + 3xy^2$	$x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3$
7	$x^6 + 5yx^4 + 6y^2x^2 + y^3$	$x^7 + 7yx^5 + 14y^2x^3 + 7y^3x$
8	$x^7 + 6yx^5 + 10y^2x^3 + 4y^3x$	$x^8 + 8yx^6 + 20y^2x^4 + 16y^3x^2 + 2y^4$
9	$x^8 + 7yx^6 + 21y^2x^4 + 10y^3x^2 + y^4$	$x^9 + 9yx^7 + 27y^2x^5 + 30y^3x^3 + 9y^4x$
10	$x^9 + 8yx^7 + 21y^2x^5 + 20y^3x^3 + 5y^4x$	$x^{10} + 10yx^8 + 35y^2x^6 + 50y^3x^4 + 25y^4x^2 + 2y^5$

İki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomlarından, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas polinomlarına ve sayılarına geçiş yapabiliriz. Eğer, Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 ifadelerinde $y = 1$ alınırsa

$$F_n(x, 1) = f_n(x) \text{ ve } L_n(x, 1) = l_n(x)$$

Fibonacci ve Lucas polinomları elde edilir.

Eğer, Eş. 2.2 ve Eş.2.3 ifadelerinde $x = y = 1$ alınırsa

$$F_n(1, 1) = F_n \text{ ve } L_n(1, 1) = L_n$$

Fibonacci ve Lucas sayıları elde edilir.

Eğer, Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 ifadelerinde x yerine $2x$ ve $y = 1$ alınırsa

$$F_n(2x, 1) = P_n(x) \text{ ve } L_n(2x, 1) = Q_n(x)$$

Pell ve Pell-Lucas polinomları elde edilir.

Eğer, Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 ifadelerinde $x = 2$ ve $y = 1$ alınırsa

$$F_n(2, 1) = P_n \text{ ve } L_n(2, 1) = Q_n$$

Pell ve Pell-Lucas sayıları elde edilir.

Eğer, Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 ifadelerinde y yerine $2y$ ve $x = 1$ alınırsa

$$F_n(1, 2y) = J_n(y) \text{ ve } L_n(1, 2y) = j_n(y)$$

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas polinomları elde edilir.

Eğer, Eş. 2.2 ve Eş. 2.3 ifadelerinde $x = 1$ ve $y = 2$ alınırsa

$$F_n(1, 2) = J_n \text{ ve } L_n(1, 2) = j_n$$

Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları elde edilir.

2.2. Çizelge Fibonacci, Pell, Jacobsthal polinomları ve sayıları

Fibonacci polinomları $F_n(x,1) = f_n(x)$	Fibonacci Sayıları $F_n(1,1) = F_n$
$0, 1, x, x^2 + 1, x^3 + 2x, x^4 + 3x^2 + 1,$ $x^5 + 4x^3 + 3x, x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1,$ $x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x,$ $x^8 + 7x^6 + 21x^4 + 10x^2 + 1,$ $x^9 + 8x^7 + 21x^5 + 20x^3 + 5x$	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34
Pell polinomları $F_n(2x,1) = P_n(x)$	Pell Sayıları $F_n(2,1) = P_n$
$0, 1, 2x, 4x^2 + 1, 8x^3 + 4x,$ $16x^4 + 12x^2 + 1, 32x^5 + 32x^3 + 6x,$ $64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1,$ $128x^7 + 192x^5 + 80x^3 + 8x,$ $256x^8 + 448x^6 + 240x^4 + 40x^2 + 1$	0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985
Jacobsthal polinomları $F_n(1,2y) = J_n(y)$	Jacobsthal Sayıları $F_n(1,2) = J_n$
$0, 1, 1, 1 + 2y, 1 + 4y, 1 + 6y + 4y^2,$ $1 + 8y + 12y^2, 1 + 10y + 24y^2 + 8y^3,$ $1 + 12y + 40y^2 + 32y^3,$ $1 + 14y + 60y^2 + 80y^3 + 16y^4$	0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171

2.3. Çizelge Lucas, Pell –Lucas, Jacobsthal –Lucas polinomları ve sayıları

Lucas polinomları $L_n(x,1) = l_n(x)$ 2, x, $x^2 + 2$, $x^3 + 3x$, $x^4 + 4x + 2$, $x^5 + 5x^3 + 5x$, $x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$, $x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$, $x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$, $x^9 + 9x^7 + 27x^5 + 30x^3 + 9x$, $x^{10} + 10x^8 + 35x^6 + 50x^4 + 25x^2 + 2$	Lucas Sayıları $L_n(1,1) = L_n$ 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 37, 66
Pell-Lucas polinomları $L_n(2x,1) = Q_n(x)$ 2, $2x$, $4x^2 + 2$, $8x^3 + 6x$, $16x^4 + 16x^2 + 2$, $32x^5 + 40x^3 + 10x$, $64x^6 + 96x^4 + 36x^2 + 2$, $128x^7 + 224x^5 + 112x^3 + 14x$, $256x^8 + 512x^6 + 320x^4 + 64x^2 + 2$	Pell-Lucas Sayıları $L_n(2,1) = Q_n$ 2, 2, 4, 11, 24, 52, 115, 254, 560
Jacobsthal–Lucas polinomları $L_n(1,2y) = j_n(y)$	Jacobsthal -Lucas Sayıları $L_n(1,2) = j_n$
2, 1, $1+4y$, $1+6y$, $1+8y+8y^2$, $1+10y+20y^2$, $1+12y+36y^2+16y^3$, $1+14y+56y^2+56y^3$, $1+16y+80y^2+128y^3+32y^4$	2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257

Eş.2.2 ile tanımlı rekürans bağıntısı

$$yF_n(x, y) = F_{n+2}(x, y) - xF_{n+1}(x, y)$$

biçiminde düzenlenerek Fibonacci polinomlar, negatif indisler için tanımlanabilir.

Benzer işlem iki değişkenli Lucas polinomları için de yapılabilir. Böylece aşağıdaki özelliği verebiliriz.

2.1 Özellik

Her $n \geq 0$ için

$$i) F_{-n}(x, y) = -\frac{F_n(x, y)}{(-y)^n} \quad (2.4)$$

$$ii) L_{-n}(x, y) = \frac{L_n(x, y)}{(-y)^n} \quad (2.5)$$

dir [6].

2.1. Teorem

İki değişkenli Fibonacci ve iki değişkenli Lucas polinomlarının Binet formülleri

$$F_n(x, y) = \frac{\alpha^n(x, y) - \beta^n(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)} \quad (2.6)$$

ve

$$L_n(x, y) = \alpha^n(x, y) + \beta^n(x, y) \quad (2.7)$$

dir.

İspat

$F_n(x, y)$ ve $L_n(x, y)$ Tanım 2.1 ile tanımlı iki değişkenli Fibonacci ve Lucas polinomları olsun. İndirgeme bağıntısının karakteristik denklemi

$$t^2 - xt - y = 0 \quad (2.8)$$

dir. Tanım 2.1'den $x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x^2 + 4y > 0$ olduğundan bu denklemin

$$\alpha(x, y) = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4y}}{2}, \beta(x, y) = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4y}}{2} \quad (2.9)$$

gibi farklı iki kökü vardır. Üstelik

$$\alpha(x, y)\beta(x, y) = -y \text{ ve } \alpha(x, y) + \beta(x, y) = x$$

dir. O halde

$$F_n(x, y) = A\alpha^n(x, y) + B\beta^n(x, y)$$

ve

$$L_n(x, y) = C\alpha^n(x, y) + D\beta^n(x, y)$$

biçimindedir. Tanım 2.1 deki başlangıç şartları kullanılırsa

$$F_n(x, y) = \frac{\alpha^n(x, y) - \beta^n(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$$

ve

$$L_n(x, y) = \alpha^n(x, y) + \beta^n(x, y)$$

elde edilir.

2.2. Özellik

Her n tamsayısı için

$$L_n(x, y) = F_{n+1}(x, y) + y F_{n-1}(x, y) \quad (2.10)$$

İspat

$F_{n+1}(x, y)$ ve $F_{n-1}(x, y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomlarının Binet formülleri

$$F_{n+1}(x, y) = \frac{\alpha^{n+1}(x, y) - \beta^{n+1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)} \text{ ve } F_{n-1}(x, y) = \frac{\alpha^{n-1}(x, y) - \beta^{n-1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$$

olup

$$F_{n+1}(x, y) + y F_{n-1}(x, y) = \frac{\alpha^{n+1}(x, y) - \beta^{n+1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)} + y \frac{\alpha^{n-1}(x, y) - \beta^{n-1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)}$$

dir. $\alpha(x, y)\beta(x, y) = -y$ olduğundan

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x, y) + yF_{n-1}(x, y) &= \frac{\alpha^{n+1}(x, y) - \beta^{n+1}(x, y) - \beta(x, y)\alpha^{n-1}(x, y) + \alpha(x, y)\beta^{n-1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)} \\
&= \alpha^n(x, y) + \beta^n(x, y) \\
&= L_n(x, y)
\end{aligned}$$

dir.

2.3. Özellik

Her n tamsayısı için

$$(x^2 + 4y)F_n(x, y) = L_{n+1}(x, y) + yL_{n-1}(x, y) \quad (2.11)$$

İspat

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(x, y) + yL_{n-1}(x, y) &= F_{n+2}(x, y) + yF_n(x, y) + y(F_n(x, y) + yF_{n-2}(x, y)) \\
&= F_{n+2}(x, y) + 2yF_n(x, y) + y^2F_{n-2}(x, y) \\
&= xF_{n+1}(x, y) + yF_n(x, y) + 2yF_n(x, y) + y^2F_{n-2}(x, y) \\
&= xF_{n+1}(x, y) + 3yF_n(x, y) + y(yF_{n-2}(x, y)) \\
&= xF_{n+1}(x, y) + 3yF_n(x, y) + y(F_n(x, y) - xF_{n-1}(x, y)) \\
&= xF_{n+1}(x, y) - yxF_{n-1}(x, y) + 4yF_n(x, y) \\
&= x(F_{n+1}(x, y) - yF_{n-1}(x, y)) + 4yF_n(x, y) \\
&= x(xF_n(x, y) + yF_{n-1}(x, y) - yF_{n-1}(x, y)) + 4yF_n(x, y) \\
&= x^2F_n(x, y) + 4yF_n(x, y) \\
&= (x^2 + 4y)F_n(x, y)
\end{aligned}$$

2.4. Özellik

A ve B reel sayılar ve $A \neq B$ olsun. Her n doğal sayısı için

$$i) \frac{A^{n+1} - B^{n+1}}{A - B} = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_2 - 1}{2}} (-1)^k \binom{n-k}{k} (AB)^k (A+B)^{n-2k} \quad (2.12)$$

$$ii) A^n + B^n = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_2 - 1}{2}} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (A+B)^{n-2k} (-AB)^k \text{ (Waring formülü)} \quad (2.13)$$

dir [7].

2.5. Özellik

$x \neq 0$, $y \neq 0$ ve $x^2 + 4y \neq 0$ olsun. Her $n \geq 0$ için

$$i) F_{n+1}(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{\mathbb{Q}_2 - 1}{2}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i \quad (2.14)$$

$$ii) L_n(x, y) = \sum_{i=0}^{\frac{\mathbb{Q}_2 - 1}{2}} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i \quad (2.15)$$

dir.

İspat

i) Özellik 2.4 (i)'de A yerine $\alpha(x, y)$ ve B yerine $\beta(x, y)$ yazılırsa

$$\frac{\alpha^{n+1}(x, y) - \beta^{n+1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)} = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_2 - 1}{2}} (-1)^k \binom{n-k}{k} (\alpha(x, y)\beta(x, y))^k (\alpha(x, y) + \beta(x, y))^{n-2k}$$

elde edilir.

$$\alpha(x, y)\beta(x, y) = -y \text{ ve } \alpha(x, y) + \beta(x, y) = x \quad (2.16)$$

olduğundan

$$\frac{\alpha^{n+1}(x, y) - \beta^{n+1}(x, y)}{\alpha(x, y) - \beta(x, y)} = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_h - 1}{2}} (-1)^k \binom{n-k}{k} (-y)^k x^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_h - 1}{2}} \binom{n-k}{k} y^k x^{n-2k}$$

İki değişkenli Fibonacci polinomlarının Binet formülünden

$$F_{n+1}(x, y) = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_h - 1}{2}} \binom{n-k}{k} y^k x^{n-2k}$$

elde edilir.

ii) Özellik 2.4.(ii) de A yerine $\alpha(x, y)$ ve B yerine $\beta(x, y)$ seçilirse

$$(\alpha(x, y))^n + (\beta(x, y))^n = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_h - 1}{2}} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} (\alpha(x, y) + \beta(x, y))^{n-2k} (-\alpha(x, y)\beta(x, y))^k$$

Eş.2.16 ifadesinden

$$(\alpha(x, y))^n + (\beta(x, y))^n = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_h - 1}{2}} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k$$

olur. İki değişkenli Lucas polinomlarının Binet formülünden

$$L_n = \sum_{k=0}^{\frac{\mathbb{Q}_h - 1}{2}} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k} y^k$$

elde edilir.

3. TEMEL ÖZDEŞLİKLER

3.1. Teorem

$F_n(x, y)$, iki değişkenli Fibonacci polinomu ve $G_n(x, y)$, Eş.2.1 ile tanımlı genelleştirilmiş Fibonacci polinomu olmak üzere her $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$G_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_m(x, y)G_{n+1}(x, y) \quad (3.1)$$

dir.

İspat

n sabit bir sayı olsun. İspatımız m üzerinde tümevarımla yapalım.

a) Önce negatif olmayan tamsayılar için ispatlayalım

$m = 0$ için, Eş.2.4'den

$$F_{-1}(x, y) = \frac{F_1(x, y)}{y}$$

olup,

$$yF_{-1}(x, y)G_n(x, y) + F_0(x, y)G_{n+1}(x, y) = F_1(x, y)G_n(x, y) + F_0(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

dir. $F_0(x, y) = 0$ ve $F_1(x, y) = 1$ olduğundan

$$yF_{-1}(x, y)G_n(x, y) + F_0(x, y)G_{n+1}(x, y) = G_n(x, y)$$

olur.

$m = 1$ için

$$yF_0(x, y)G_n(x, y) + F_1(x, y)G_{n+1}(x, y) = F_1(x, y)G_{n+1}(x, y) = G_{n+1}(x, y)$$

olup doğrudur. Kabul edelim ki $m = 0, 1, 2, \dots, k$ için doğru olsun. Yani

$$G_{n+k-1}(x, y) = yF_{k-2}(x, y)G_n(x, y) + F_{k-1}(x, y)G_{n+1}(x, y) \quad (3.2)$$

ve

$$G_{n+k}(x, y) = yF_{k-1}(x, y)G_n(x, y) + F_k(x, y)G_{n+1}(x, y) \quad (3.3)$$

olsun. $m = k + 1$ için inceleyelim

$$\begin{aligned} yF_k(x, y)G_n(x, y) + F_{k+1}(x, y)G_{n+1}(x, y) &= y(xF_{k-1}(x, y) + yF_{k-2}(x, y))G_n(x, y) \\ &\quad + (xF_k(x, y) + yF_{k-1}(x, y))G_{n+1}(x, y) \\ &= yxF_{k-1}(x, y)G_n(x, y) + y^2F_{k-2}(x, y)G_n(x, y) \\ &\quad + xF_k(x, y)G_{n+1}(x, y) + yF_{k-1}(x, y)G_{n+1}(x, y) \\ &= y(yF_{k-2}(x, y)G_n(x, y) + F_{k-1}(x, y)G_{n+1}(x, y)) \\ &\quad + x(yF_{k-1}(x, y)G_n(x, y) + F_k(x, y)G_{n+1}(x, y)) \end{aligned}$$

dir. Eş.3.2 ve Eş.3.3'den

$$yF_k(x, y)G_n(x, y) + F_{k+1}(x, y)G_{n+1}(x, y) = yG_{n+k-1}(x, y) + xG_{n+k}(x, y) = G_{n+k+1}(x, y)$$

elde edilir. Böylece $m = k + 1$ için doğru olduğu görülür. O halde $m \geq 0$ tamsayıları için

$$G_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_m(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

dir.

b) Negatif tamsayılar için ispatlayalım.

$m = -1$ olsun. Eş.2.4'den

$$F_{-2}(x, y) = \frac{-F_2(x, y)}{(-y)^2} = \frac{-F_2(x, y)}{y^2} = \frac{-x}{y^2}$$

olup,

$$\begin{aligned} yF_{-2}(x, y)G_n(x, y) + F_{-1}(x, y)G_{n+1}(x, y) &= y \frac{-x}{y^2} G_n(x, y) + \frac{1}{y} G_{n+1}(x, y) \\ &= \frac{1}{y} (-xG_n(x, y) + G_{n+1}(x, y)) \\ &= \frac{1}{y} (yG_{n-1}(x, y)) \\ &= G_{n-1}(x, y) \end{aligned}$$

olur. $m = -1$ için doğrudur

$m = -2$ olsun. Eş.2.4'den

$$F_{-3}(x, y) = \frac{-F_3(x, y)}{(-y)^3} = \frac{F_3(x, y)}{y^3} = \frac{x^2 + y}{y^3}$$

$$\begin{aligned}
yF_{-3}(x, y)G_n(x, y) + F_{-2}(x, y)G_{n+1}(x, y) &= y \left(\frac{x^2 + y}{y^3} G_n(x, y) \right) - \frac{x}{y^2} G_{n+1}(x, y) \\
&= \frac{1}{y^2} \left((x^2 + y)G_n(x, y) - xG_{n+1}(x, y) \right) \\
&= \frac{1}{y^2} \left(x^2 G_n(x, y) + yG_n(x, y) - xG_{n+1}(x, y) \right) \\
&= \frac{1}{y^2} \left(x(G_n(x, y) - G_{n+1}(x, y)) + yG_n(x, y) \right) \\
&= \frac{1}{y^2} \left(-xyG_{n-1}(x, y) + yG_n(x, y) \right) \\
&= \frac{1}{y^2} \left(y(G_n(x, y) - xG_{n-1}(x, y)) \right) \\
&= \frac{1}{y^2} \left(y^2 G_{n-2}(x, y) \right) \\
&= G_{n-2}(x, y)
\end{aligned}$$

dir. Yani $m = -2$ için doğrudur.

Kabul edelim ki; iddiamızda her $-k+1 \leq m \leq -1$ için doğru olsun. Yani

$$G_{n-k+1}(x, y) = yF_{-k}(x, y)G_n(x, y) + F_{-k+1}(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

ve

$$G_{n-k}(x, y) = yF_{-k-1}(x, y)G_n(x, y) + F_{-k}(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

olsun. $m = -k-1$ için inceleyelim.

$$\begin{aligned}
yF_{-(k+2)}(x, y)G_n(x, y) + F_{-(k+1)}(x, y)G_{n+1}(x, y) &= yF_{-k-2}(x, y)G_n(x, y) + F_{-k-1}(x, y)G_{n+1}(x, y) \\
&= \frac{y}{x}(-yF_{-k-1}(x, y) + F_{-k}(x, y))G_n(x, y) \\
&\quad + \frac{1}{x}(-yF_{-k}(x, y) + F_{-k+1}(x, y))G_{n+1}(x, y) \\
&= \frac{1}{x}[-y^2F_{-k-1}(x, y)G_n(x, y) + F_{-k}(x, y)G_n(x, y)] \\
&\quad + \frac{1}{x}[-yF_{-k}(x, y)G_{n+1}(x, y) + F_{-k+1}(x, y)G_{n+1}(x, y)] \\
&= \frac{1}{x}[-y(yF_{-k-1}(x, y)G_n(x, y) + F_{-k}(x, y)G_{n+1}(x, y))] \\
&\quad + \frac{1}{x}[F_{-k}(x, y)G_n(x, y) + F_{-k+1}(x, y)G_{n+1}(x, y)]
\end{aligned}$$

Tümevarım hipotezden

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}(-yG_{n-k}(x, y)) + \frac{1}{x}G_{n-k+1}(x, y) &= \frac{1}{x}(-yG_{n-k}(x, y) + G_{n-k+1}(x, y)) \\
&= \frac{1}{x}xG_{n-k-1}(x, y) \\
&= G_{n-k-1}(x, y)
\end{aligned}$$

dir. Böylece her. O halde $m < 0$ tamsayıları için iddiamız doğru olur.

(a) ve (b) den $n, m \in \mathbf{Z}$ için

$$G_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_m(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

olduğu ispatlanmış olur.

3.2. Teorem

$F_n(x, y)$, iki değişkenli Fibonacci polinomu ve $G_n(x, y)$, genelleştirilmiş Fibonacci polinomu olmak üzere her $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$G_{n-m}(x, y) = (-y)^{-m} (F_{m+1}(x, y)G_n(x, y) - F_m(x, y)G_{n+1}(x, y)) \quad (3.4)$$

dir.

İspat

Eş. 3.1 ve Eş.2.4'den

$$\begin{aligned} G_{n+(-m)}(x, y) &= yF_{(-m)-1}(x, y)G_n(x, y) + F_{(-m)}(x, y)G_{n+1}(x, y) \\ &= yF_{-m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_{-m}(x, y)G_{n+1}(x, y) \\ &= y \frac{F_{m+1}(x, y)}{(-y)^m} G_n(x, y) + \frac{(-1)F_m(x, y)}{(-y)^m} G_{n+1}(x, y) \\ &= (-1)^m (y)^{-m} F_{m+1}(x, y)G_n(x, y) + (-1)(y)^{-m} (-1)^m F_m(x, y)G_{n+1}(x, y) \\ &= (-y)^{-m} (F_{m+1}(x, y)G_n(x, y) - F_m(x, y)G_{n+1}(x, y)) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.1. Sonuç

Her $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)F_n(x, y) + F_m(x, y)F_{n+1}(x, y) \quad (3.5)$$

dir.

İspat

Teorem 3.1 de $G_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ alınırsa

$$F_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)F_n(x, y) + F_m(x, y)F_{n+1}(x, y)$$

elde edilir.

3.2. Sonuç

Her $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)L_n(x, y) + F_m(x, y)L_{n+1}(x, y) \quad (3.6)$$

dir.

İspat

Teorem 3.1 de $G_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ alınırsa

$$L_{n+m}(x, y) = yF_{m-1}(x, y)L_n(x, y) + F_m(x, y)L_{n+1}(x, y)$$

elde edilir.

3.3. Sonuç

Her $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{n-m}(x, y) = (-y)^{-m} (F_{m+1}(x, y)F_n(x, y) - F_m(x, y)F_{n+1}(x, y)) \quad (3.7)$$

dir.

İspat

Teorem 3.2 de $G_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ alınırsa

$$F_{n-m}(x, y) = (-y)^{-m} (F_{m+1}(x, y)F_n(x, y) - F_m(x, y)F_{n+1}(x, y))$$

elde edilir.

3.4. Sonuç

Her $m, n \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{n-m}(x, y) = (-y)^{-m} (F_{m+1}(x, y)L_n(x, y) - F_m(x, y)L_{n+1}(x, y)) \quad (3.8)$$

dir.

İspat

Teorem 3.2 de $G_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ alınırsa

$$L_{n-m}(x, y) = (-y)^{-m} (F_{m+1}(x, y)L_n(x, y) - F_m(x, y)L_{n+1}(x, y))$$

elde edilir.

3.5. Sonuç

Her $n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{2n}(x, y) = F_n(x, y)L_n(x, y) \quad (3.9)$$

İspat

Eş.3.5’de $n = m$ alınır

$$F_{2n}(x, y) = F_n(x, y)(yF_{n-1}(x, y) + F_{n+1}(x, y))$$

Eş.2.10’den

$$F_{2n}(x, y) = F_n(x, y)L_n(x, y)$$

elde edilir.

3.6. Sonuç

Her $n \in \mathbf{Z}$ için

$$xF_{2n}(x, y) = F_{n+1}^2(x, y) - y^2 F_{n-1}^2(x, y) \quad (3.10)$$

dir.

İspat

Sonuç 3.5, Eş.2.10 ve Tanım 2.1 kullanılarak

$$\begin{aligned} xF_{2n}(x, y) &= xF_n(x, y)L_n(x, y) \\ &= xF_n(x, y)(yF_{n-1}(x, y) + F_{n+1}(x, y)) \\ &= (F_{n+1}(x, y) - yF_{n-1}(x, y))(F_{n+1}(x, y) + yF_{n-1}(x, y)) \\ &= F_{n+1}^2(x, y) - y^2 F_{n-1}^2(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.7. Sonuç

Her $n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{2n+1}(x, y) = yF_n^2(x, y) + F_{n+1}^2(x, y) \quad (3.11)$$

dir.

İspat

Teorem 3.1 de $n = s + 1$ ve $m = s$ alınırsa

$$F_{s+1+s}(x, y) = yF_{s+1-1}(x, y)F_s(x, y) + F_{s+1}(x, y)F_{s+1}(x, y)$$

olup, s yerine n alınırsa

$$F_{2n+1}(x, y) = yF_n^2(x, y) + F_{n+1}^2(x, y)$$

elde edilir.

3.8. Sonuç

Her $n \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{2n+1}(x, y) = yF_n(x, y)L_n(x, y) + F_{n+1}(x, y)L_{n+1}(x, y) \quad (3.12)$$

dir.

İspat

Eş.3.6'da her $m = n + 1$ alınır

$$\begin{aligned} L_{n+n+1}(x, y) &= yF_{n+1-1}(x, y)L_n(x, y) + F_{n+1}(x, y)L_{n+1}(x, y) \\ &= yF_n(x, y)L_n(x, y) + F_{n+1}(x, y)L_{n+1}(x, y) \end{aligned}$$

olur, böylece

$$L_{2n+1}(x, y) = yF_n(x, y)L_n(x, y) + F_{n+1}(x, y)L_{n+1}(x, y)$$

elde edilir.

3.3. Teorem

Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$G_{n+m}(x, y) + (-y)^m G_{n-m}(x, y) = G_n(x, y)L_m(x, y) \quad (3.13)$$

İspat

Eş.3.1, Eş.3.4 ve Eş 2.10 dan

$$\begin{aligned} G_{n+m}(x, y) + (-y)^m G_{n-m}(x, y) &= yF_{m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_m(x, y)G_{n+1}(x, y) \\ &\quad + (F_{m+1}(x, y)G_n(x, y) - F_m(x, y)G_{n+1}(x, y)) \\ &= yF_{m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_{m+1}(x, y)G_n(x, y) \\ &= G_n(x, y)[F_{m+1}(x, y) + yF_{m-1}(x, y)] \\ &= G_n(x, y)L_m(x, y) \end{aligned}$$

3.9. Sonuç

Her $n, m \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{n+m}(x, y) + (-y)^m F_{n-m}(x, y) = F_n(x, y) L_m(x, y) \quad (3.14)$$

$$L_{n+m}(x, y) + (-y)^m L_{n-m}(x, y) = L_n(x, y) L_m(x, y) \quad (3.15)$$

dir.

İspat

Eş.3.13'de sırasıyla $G_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ ve $G_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ alınır

Eş.3.14 ve Eş.3.15 elde edilir.

3.10. Sonuç

Her $n \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{2n}(x, y) = L_n^2(x, y) - 2(-y)^n \quad (3.16)$$

dir.

İspat

Eş.3.15'de $m = n$ alınır Eş.3.16 elde edilir.

3.4. Teorem

Her $n, m \in \mathbf{Z}$ için

$$G_{n+m}(x, y) - (-y)^m G_{n-m}(x, y) = F_m(x, y) (G_{n+1}(x, y) + yG_{n-1}(x, y)) \quad (3.17)$$

İspat

Eş.3.1 ve Eş.3.4'den

$$\begin{aligned} G_{n+m}(x, y) - (-y)^m G_{n-m}(x, y) &= yF_{m-1}(x, y)G_n(x, y) + F_m(x, y)G_{n+1}(x, y) \\ &\quad - (F_{m+1}(x, y)G_n(x, y) - F_m(x, y)G_{n+1}(x, y)) \\ &= 2F_m(x, y)G_{n+1}(x, y) + G_n(x, y)(yF_{m-1}(x, y) - F_{m+1}(x, y)) \\ &= 2F_m(x, y)G_{n+1}(x, y) - xG_n(x, y)F_m(x, y) \\ &= F_m(x, y)(2G_{n+1}(x, y) - xG_n(x, y)) \\ &= F_m(x, y)(G_{n+1}(x, y) + G_{n+1}(x, y) - xG_n(x, y)) \\ &= F_m(x, y)(G_{n+1}(x, y) + xG_n(x, y) + yG_{n-1}(x, y) - xG_n(x, y)) \\ &= F_m(x, y)(G_{n+1}(x, y) + yG_{n-1}(x, y)) \end{aligned}$$

3.11. Sonuç

Her $n, m \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{n+m}(x, y) - (-y)^m F_{n-m}(x, y) = F_m(x, y)L_n(x, y) \quad (3.18)$$

İspat

Eş.3.17'de $G_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ alınırsa Eş.3.18 elde edilir.

3.12. Sonuç

Her $n, m \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{n+m}(x, y) - (-y)^m L_{n-m}(x, y) = (x^2 + 4y)F_m(x, y)F_n(x, y) \quad (3.19)$$

İspat

Eş.3.17’de $G_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ alınırsa

$$L_{n+m}(x, y) - (-y)^m L_{n-m}(x, y) = F_m(x, y)(L_{n+1}(x, y) + yL_{n-1}(x, y))$$

olur. Eş.2.11’den

$$(x^2 + 4y)F_n(x, y) = L_{n+1}(x, y) + yL_{n-1}(x, y)$$

olup,

$$L_{n+m}(x, y) - (-y)^m L_{n-m}(x, y) = (x^2 + 4y)F_m(x, y)F_n(x, y)$$

Eş.3.19 elde edilir.

3.13. Sonuç

Her $n, m \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{n+2}(x, y) - y^2 L_{n-2}(x, y) = (x^2 + 4y)x F_n(x, y) \quad (3.20)$$

İspat

Eş.3.19’da $m = 2$ seçilirse (3.20) özdeşliği elde edilir.

3.14. Sonuç

Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$2F_{n+m}(x, y) = F_m(x, y)L_n(x, y) + F_n(x, y)L_m(x, y) \quad (3.21)$$

$$(-y)^m 2F_{n+m}(x, y) = F_n(x, y)L_m(x, y) - F_m(x, y)L_n(x, y) \quad (3.22)$$

İspat

Eş.3.14 ve Eş.3.18 toplanırsa/çıkarılırsa Eş.3.21 ve Eş.3.22 elde edilir.

3.15. Sonuç

Her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$2L_{n+m}(x, y) = (x^2 + 4y)F_m(x, y)F_n(x, y) + L_n(x, y)L_m(x, y) \quad (3.23)$$

$$(-y)^m 2L_{n-m}(x, y) = L_n(x, y)L_m(x, y) - (x^2 + 4y)F_m(x, y)F_n(x, y) \quad (3.24)$$

İspat

Eş.3.15 ve Eş.3.19 toplanırsa/çıkarılırsa Eş.3.23 ve Eş.3.24 elde edilir.

3.5. Teorem

$F_n(x, y)$ iki değişkenli Fibonacci polinomu, $G_n(x, y)$ ve $H_n(x, y)$, (2.1) ile tanımlı genelleştirilmiş Fibonacci polinomları olmak üzere her $h, k, n \in \mathbf{Z}$ için

$$\begin{aligned} G_{n+h}(x, y)H_{n+k}(x, y) - G_n(x, y)H_{n+h+k}(x, y) \\ = (-y)^n (G_h(x, y)H_k(x, y) - G_0(x, y)H_{h+k}(x, y)) \end{aligned} \quad (3.25)$$

dir.

İspat

$G_n(x, y)$ ve $H_n(x, y)$ genelleştirilmiş Fibonacci polinomları olmak üzere $J_n(x, y)$ polinomları

$$J_n(x, y) = G_{n+h}(x, y)H_{n+k}(x, y) - G_n(x, y)H_{n+h+k}(x, y)$$

ve

$$J_{n+1}(x, y) = G_{n+1+h}(x, y)H_{n+1+k}(x, y) - G_{n+1}(x, y)H_{n+1+h+k}(x, y)$$

ile tanımlayalım. Bu ifadedeki $G_{n+h}(x, y)$ ve $H_{n+h+k}(x, y)$ için Teorem 3.1 kullanılırsa

$$G_{n+h}(x, y) = yF_{h-1}(x, y)G_n(x, y) + F_h(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

ve

$$H_{n+h+k}(x, y) = yF_{h-1}(x, y)H_{n+k}(x, y) + F_h(x, y)H_{n+k+1}(x, y)$$

olup, bunlar $J_n(x, y)$ yerinde yazılırsa

$$J_n(x, y) = F_h(x, y)(G_{n+1}(x, y)H_{n+k}(x, y) - G_n(x, y)H_{n+k+1}(x, y))$$

olur. Benzer şekilde $G_{n+1+h}(x, y)$ ve $H_{n+1+h+k}(x, y)$ için Teorem 3.1 uygulanırsa

$$G_{n+1+h}(x, y) = yF_h(x, y)G_n(x, y) + F_{h+1}(x, y)G_{n+1}(x, y)$$

ve

$$H_{n+1+h+k}(x, y) = yF_h(x, y)H_{n+k}(x, y) + F_{h+1}(x, y)H_{n+k+1}(x, y)$$

olup, bunlar $J_{n+1}(x, y)$ de yerlerine yazılırsa

$$J_{n+1}(x, y) = -yF_h(x, y)(G_{n+1}(x, y)H_{n+k}(x, y) - G_n(x, y)H_{n+1+k}(x, y))$$

olur. Buradan

$$J_{n+1}(x, y) = (-y)J_n(x, y)$$

olduğu görülür.

$$J_1(x, y) = (-y)J_0(x, y), J_2(x, y) = (-y)^2 J_0(x, y), \dots, J_n(x, y) = (-y)^n J_0(x, y)$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} G_{n+h}(x, y)H_{n+k}(x, y) - G_n(x, y)H_{n+h+k}(x, y) \\ = (-y)^n (G_h(x, y)H_k(x, y) - G_0(x, y)H_{h+k}(x, y)) \end{aligned}$$

Eş.3.25 elde edilir.

Şimdi bu özdeşliğin çeşitli özel durumlarını inceleyelim

3.16. Sonuç

Her $h, k, n \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{n+h}(x, y)F_{n+k}(x, y) - L_n(x, y)F_{n+h+k}(x, y) = (-y)^{n+1}F_h(x, y)L_k(x, y) \quad (3.26)$$

İspat

Eş.3.25’de sırasıyla ve Eş 3.21’den $G_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ ve $H_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ alınırsa Eş.3.26 elde edilir.

3.17. Sonuç

Her $h, k, n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{n+h}(x, y)L_{n+k}(x, y) - F_n(x, y)L_{n+h+k}(x, y) = (-y)^n F_h(x, y)L_k(x, y) \quad (3.27)$$

İspat

Eş.3.25’de $G_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ ve $H_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ alınırsa Eş.3.27 elde edilir.

3.18. Sonuç

Her $h, k, n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_{n+h}(x, y)F_{n+k}(x, y) - F_n(x, y)F_{n+h+k}(x, y) = (-y)^n F_h(x, y)F_k(x, y) \quad (3.28)$$

İspat

Eş.3.25’de $G_n(x, y) \equiv H_n(x, y) \equiv F_n(x, y)$ alınırsa Eş.3.28 elde edilir.

3.19. Sonuç

Her $h, k, n \in \mathbf{Z}$ için

$$L_{n+h}(x, y)L_{n+k}(x, y) - L_n(x, y)L_{n+h+k}(x, y) = (-y)^{n+1}(x^2 + 4y)F_h(x, y)F_k(x, y) \quad (3.29)$$

İspat

Eş.3.25’de $G_n(x, y) \equiv H_n(x, y) \equiv L_n(x, y)$ alınırsa

$$L_{n+h}(x, y)L_{n+k}(x, y) - L_n(x, y)L_{n+h+k}(x, y) = (-y)^n(L_h(x, y)L_k(x, y) - 2L_{h+k}(x, y))$$

olur. Buradan

$$2L_{h+k}(x, y) = (x^2 + 4y)F_h(x, y)F_k(x, y) + L_h(x, y)L_k(x, y)$$

olup, yerine yazılırsa

$$L_{n+h}(x, y)L_{n+k}(x, y) - L_n(x, y)L_{n+h+k}(x, y) = (-y)^{n+1}(x^2 + 4y)F_h(x, y)F_k(x, y)$$

Eş.3.29 elde edilir.

3.20. Sonuç

Her $k, n \in \mathbf{Z}$ için

$$F_n^2(x, y) - F_{n-k}(x, y)F_{n+k}(x, y) = (-y)^{n-k} F_k(x, y) \quad (3.30)$$

İspat

Eş.3.28'da $h = -k$ seçilirse

$$\begin{aligned} F_{n-k}(x, y)F_{n+k}(x, y) - F_n^2(x, y) &= (-y)^n F_{-k}(x, y)F_k(x, y) \\ &= (-y)^n (-1)(-y)^{-k} F_k^2(x, y) \\ &= (-1)^{n+1-k} (-y)^{n-k} F_k(x, y) \end{aligned}$$

olup, denklem düzenlenirse

$$F_n^2(x, y) - F_{n-k}(x, y)F_{n+k}(x, y) = (-y)^{n-k} F_k(x, y)$$

elde edilir. Bu özdeşliğe Catalan özdeşliği denir. Catalan özdeşliğinde $k = 1$ seçilirse

$$F_n^2(x, y) - F_{n-1}(x, y)F_{n+1}(x, y) = (-y)^{n-1} \quad (3.31)$$

Cassini özdeşliği elde edilir.

3.21. Sonuç

Her $k, n \in \mathbb{Z}$ için

$$L_n^2(x, y) - L_{n-k}(x, y)L_{n+k}(x, y) = (-y)^{n-k+1} (x^2 + 4y) F_k^2(x, y) \quad (3.32)$$

İspat

Eş.3.29'da $h = -k$ seçilirse

$$\begin{aligned}
L_{n-k}(x, y) L_{n+k}(x, y) - L_n^2(x, y) &= (-y)^{n+1} (x^2 + 4y) F_{-k}(x, y) F_k(x, y) \\
&= (-y)^{n+1} (-1) (-y)^{-k} (x^2 + 4y) F_k(x, y) F_k(x, y) \\
&= (-y)^{n-k+1} (-1) (x^2 + 4y) F_k^2(x, y)
\end{aligned}$$

olup son ifade düzenlenirse

$$L_n^2(x, y) - L_{n-k}(x, y) L_{n+k}(x, y) = (-y)^{n-k+1} (x^2 + 4y) F_k^2(x, y)$$

Eş.3.32 elde edilir.

4. TOPLAM ÖZELLİKLERİ

4.1. Özellik

Her $n \geq 1$ ve $s \in \mathbf{Z}$ için aşağıdakiler doğrudur

$$\text{i) } \sum_{i=1}^n x^{n-i} L_i(x, y) = \frac{1}{y} (L_{n+2}(x, y) - x^n L_2(x, y)) \quad (4.1)$$

$$\text{ii) } \sum_{i=1}^n x^{n-i} F_i(x, y) = \frac{1}{y} (F_{n+2}(x, y) - x^n F_2(x, y)) \quad (4.2)$$

dir [6].

İspat

i) Tanım 2.1 den her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$L_{n-1}(x, y) = \frac{1}{y} L_{n+1}(x, y) - \frac{x}{y} L_n(x, y)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} x^{n-1} L_1(x, y) &= \frac{x^{n-1}}{y} L_3(x, y) - \frac{x^n}{y} L_2(x, y) \\ x^{n-2} L_2(x, y) &= \frac{x^{n-2}}{y} L_4(x, y) - \frac{x^{n-1}}{y} L_3(x, y) \end{aligned}$$

M

$$\begin{aligned} x L_{n-1}(x, y) &= \frac{x}{y} L_{n+1}(x, y) - \frac{x^2}{y} L_n(x, y) \\ L_n(x, y) &= \frac{1}{y} L_{n+2}(x, y) - \frac{x}{y} L_{n+1}(x, y) \end{aligned}$$

dir. Taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{i=1}^n x^{n-i} L_i(x, y) = \frac{1}{y} (L_{n+2}(x, y) - x^n L_2(x, y))$$

elde edilir.

ii) İspat (i) şikkına benzer şekilde yapılabilir

4.2. Özellik

Her $n \geq 1$ tamsayısı için

$$i) \sum_{k=1}^n y^{n-k} L_{2k}(x, y) = \frac{1}{x} (L_{2n+1}(x, y) - y^n x) \quad (4.3)$$

$$ii) \sum_{k=1}^n y^{n-k} L_{2k-1}(x, y) = \frac{1}{x} (L_{2n}(x, y) - 2y^n) \quad (4.4)$$

$$iii) \sum_{k=1}^n y^{n-k} F_{2k}(x, y) = \frac{1}{x} (F_{2n+1}(x, y) - y^n) \quad (4.5)$$

dir [6].

İspat

i) Tanım 2.1 den $n \geq 1$ tamsayısı için

$$L_n(x, y) = \frac{1}{x} L_{n+1}(x, y) - \frac{y}{x} L_{n-1}(x, y)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
y^{n-1}L_2(x, y) &= \frac{y^{n-1}L_3(x, y)}{x} - \frac{y^n L_1(x, y)}{x} \\
y^{n-2}L_4(x, y) &= \frac{y^{n-2}L_5(x, y)}{x} - \frac{y^{n-1}L_3(x, y)}{x} \\
&\text{M} \\
yL_{2n-2}(x, y) &= \frac{yL_{2n-1}(x, y)}{x} - \frac{y^2 L_{2n-3}(x, y)}{x} \\
L_{2n}(x, y) &= \frac{L_{2n+1}(x, y)}{x} - \frac{yL_{2n-1}(x, y)}{x}
\end{aligned}$$

dir. Taraf tarafa toplanıp, $L_1(x, y) = x$ olduğu kullanılırsa

$$\sum_{k=1}^n y^{n-k} L_{2k}(x, y) = \frac{1}{x} (L_{2n+1}(x, y) - xy^n)$$

elde edilir.

ii) (i) 'nin ispatına benzer olarak yapılabilir

iii) Tanım 2.1 den $n \geq 1$ tamsayısı için

$$F_n(x, y) = \frac{1}{x} F_{n+1}(x, y) - \frac{y}{x} F_{n-1}(x, y)$$

olup, buradan

$$\begin{aligned}
y^{n-1}F_2(x, y) &= \frac{y^{n-1}F_3(x, y)}{x} - \frac{y^n F_1(x, y)}{x} \\
y^{n-2}F_4(x, y) &= \frac{y^{n-2}F_5(x, y)}{x} - \frac{y^{n-1}F_3(x, y)}{x} \\
&\text{M} \\
yF_{2n-2}(x, y) &= \frac{yF_{2n-1}(x, y)}{x} - \frac{y^2 F_{2n-3}(x, y)}{x} \\
F_{2n}(x, y) &= \frac{F_{2n+1}(x, y)}{x} - \frac{yF_{2n-1}(x, y)}{x}
\end{aligned}$$

dir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$y^{n-1}F_2(x, y) + y^{n-2}F_4(x, y) + \dots + yF_{2n-2}(x, y) + F_{2n}(x, y) = \frac{1}{x}(F_{2n+1}(x, y) - y^n F_1(x, y))$$

dir. $F_1(x, y) = 1$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^n y^{n-k} F_{2k}(x, y) = \frac{1}{x}(F_{2n+1}(x, y) - y^n)$$

elde edilir.

4.3. Özellik

Her $n \in \mathbf{Z}$ için

$$i) \quad xL_n^2(x, y) = L_n(x, y)L_{n+1}(x, y) - yL_n(x, y)L_{n-1}(x, y) \quad (4.6)$$

$$ii) \quad xF_n^2(x, y) = F_n(x, y)F_{n+1}(x, y) - yF_n(x, y)F_{n-1}(x, y) \quad (4.7)$$

dir [6].

İspat

i) Tanım 2.1 kullanırsa

$$\begin{aligned} xL_n^2(x, y) &= xL_n(x, y)L_n(x, y) \\ &= L_n(x, y)(L_{n+1}(x, y) - yL_{n-1}(x, y)) \\ &= L_n(x, y)L_{n+1}(x, y) - yL_n(x, y)L_{n-1}(x, y) \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Tanım 2.1 den

$$\begin{aligned}
 xF_n^2(x, y) &= xF_n(x, y)F_n(x, y) \\
 &= F_n(x, y)(F_{n+1}(x, y) - yF_{n-1}(x, y)) \\
 &= F_n(x, y)F_{n+1}(x, y) - yF_n(x, y)F_{n-1}(x, y)
 \end{aligned}$$

elde edilir.

4.4. Özellik

Her $n \geq 1$ ve $s \in \mathbf{Z}$

$$i) \sum_{k=1}^n y^{n-k} L_k^2(x, y) = \frac{1}{x} (L_n(x, y)L_{n+1}(x, y) - 2xy^n) \quad (4.8)$$

$$ii) \sum_{k=1}^n y^{n-k} F_k^2(x, y) = \frac{1}{x} F_n(x, y)F_{n+1}(x, y) \quad (4.9)$$

dir [6].

İspat

i) Eş.4.6'dan

$$\begin{aligned}
 y^{n-1} L_1^2(x, y) &= \frac{1}{x} (y^{n-1} L_1(x, y) L_2(x, y) - y^n L_1(x, y) L_0(x, y)) \\
 y^{n-2} L_2^2(x, y) &= \frac{1}{x} (y^{n-2} L_2(x, y) L_3(x, y) - y^{n-1} L_2(x, y) L_1(x, y)) \\
 &\quad \text{M} \\
 y L_{n-1}^2(x, y) &= \frac{1}{x} (y L_{n-1}(x, y) L_n(x, y) - y^2 L_{n-1}(x, y) L_{n-2}(x, y)) \\
 L_n^2(x, y) &= \frac{1}{x} (L_n(x, y) L_{n+1}(x, y) - y L_n(x, y) L_{n-1}(x, y))
 \end{aligned}$$

olup, taraf tarafa toplanırsa

$$\sum_{k=1}^n y^{n-k} L_k^2(x, y) = \frac{1}{x} (L_n(x, y) L_{n+1}(x, y) - y^n L_1(x, y) L_0(x, y))$$

elde edilir. $L_0(x, y) = 2$ ve $L_1(x, y) = x$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^n y^{n-k} L_k^2(x, y) = \frac{1}{x} (L_n(x, y) L_{n+1}(x, y) - 2xy^n)$$

bulunur.

ii) İspatı (i) benzer şekilde yapılabilir

5. BÖLÜNEBİLME ÖZELLİKLERİ

Kabul edelim ki y ve x sıfırdan farklı tamsayılar, $F_n(x, y)$ ve $L_n(x, y)$ doğal sayılar olsun.

5.1 Teorem

Eğer $(y, x) = 1$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için

$$i) (F_n(x, y), y) = 1 \quad (5.1)$$

$$ii) (L_n(x, y), y) = 1 \quad (5.2)$$

dir [8].

İspat

i) Kabul edelim ki $(F_n(x, y), y) = t \neq 1$ olsun. O zaman $p|t$ olacak şekilde bir p asal sayı vardır. $p|t$ böler ise $p|y$ ve $p|F_n(x, y)$ dir. Bu ise $n = 1, 2$ için mümkün değildir. $n \geq 3$ için kabul edelim ki; $p|x^{n-1}$ olsun. (2.14) den

$$F_{n+1}(x, y) = \sum_{i=0}^{\overline{\frac{n-1}{2}}} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i$$

olup,

$$x^{n-1} = F_n(x, y) - \left[\sum_{i=1}^{\overline{\frac{n-1}{2}}} \binom{n-1-i}{i} x^{n-1-2i} y^i \right] y$$

dir. Buradan $p|x$ olmalıdır. Bu ise hipotez ile çelişir. Böylece

$$(F_n(x, y), y) = 1$$

elde edilir.

ii) Kabul edelim ki $(L_n(x, y), y) = t \neq 1$ olsun. O zaman $p|t$ olacak şekilde bir p asal sayı vardır.

$$p|t \text{ ise } p|y \text{ ve } p|L_n(x, y)$$

dir. Bu ise $n = 1$ için mümkün değildir. $n \geq 2$ için $p|x^n$ olsun. Eş.2.15'den

$$L_n(x, y) = \sum_{i=0}^{\mathbb{Q}_2^-} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i$$

olup,

$$x^n = L_n(x, y) - \left[\sum_{i=1}^{\mathbb{Q}_2^-} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} y^i \right] y$$

dir. Buradan $p|x$ olmalıdır. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde

$$(L_n(x, y), y) = 1$$

dir.

5.2 Teorem

Eğer $(y, x) = 1$, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\text{i) } (F_n(x, y), F_{n+1}(x, y)) = 1 \quad (5.3)$$

$$\text{ii) } (L_n(x, y), L_{n+1}(x, y)) = \begin{cases} 1, & x \text{ tek sayı ise} \\ 2, & x \text{ çift sayı ise} \end{cases} \quad (5.4)$$

dir [6].

İspat

i) $(y, x) = 1$, $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$n = 1$ için

$$F_1(x, y) = 1 \text{ ve } F_2(x, y) = x$$

olup iddiamız doğrudur. Kabul edelim ki $n = k \geq 2$ doğru olsun yani

$$(F_k(x, y), F_{k+1}(x, y)) = 1$$

olsun. $n = k + 1$ için doğru mudur?

$(F_{k+1}(x, y), F_{k+2}(x, y)) = t$ olsun. Buradan

$$t \mid F_{k+1}(x, y) \text{ ve } t \mid F_{k+2}(x, y)$$

Tanım 2.1'den

$$F_{k+2}(x, y) = xF_{k+1}(x, y) + yF_k(x, y)$$

olup,

$$t|F_{k+1}(x, y) \text{ ise } t|xF_{k+1}(x, y)$$

Ayrıca $t|F_{k+2}(x, y)$ olduğundan $t|yF_k(x, y)$ olur. Buradan

$$t|y \text{ veya } t|F_k(x, y)$$

Kabul edelim ki; $t|F_k(x, y)$ olsun. Ayrıca $t|F_{k+1}(x, y)$ olduğundan. Hipotezimiz gereğince

$$(F_k(x, y), F_{k+1}(x, y)) = 1$$

olduğunda $t = 1$ olur.

Eğer $t|y$ ise $t|F_{k+1}(x, y)$ olduğundan

$$t|(F_{k+1}(x, y), y)$$

dir. Oysa Teorem 5.1'den $(F_{k+1}(x, y), y) = 1$ olup, $t = 1$ olmak zorundadır. Böylece

$$(F_{k+1}(x, y), F_{k+2}(x, y)) = 1$$

elde edilir. Böylece $n = k + 1$ için iddiamız doğru olur. O halde $(y, x) = 1$, ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(F_n(x, y), F_{n+1}(x, y)) = 1$$

dir.

ii)

x çift olsun. Bu durumda $L_n(x, y)$ de çifttir. Her $n \geq 0$ için $2 \mid (L_n(x, y), L_{n+1}(x, y))$

dir. $n = 1$ için

$$(L_1(x, y), L_2(x, y)) = (x, x^2 + 2y) = t$$

olsun. Eğer p , t yi bölen bir asal sayı ise

$$p \mid x \text{ ve } p \mid (x^2 + 2y)$$

olmalıdır. Buradan $p \mid 2y$ olmalıdır. Teorem 5.1'den $p \nmid y$ olduğundan $p \mid 2$ olmalıdır. Böylece $t = 1$ veya $t = 2^s$ olur. Eğer x çift sayı $n \geq 0$ için $L_n(x, y)$ çift olup, $(x, y) = 1$ olduğundan

$$(L_1(x, y), L_2(x, y)) = (x, x^2 + 2y) = 2$$

dir.

Eğer x tek sayı $L_1(x, y)$ ve $L_2(x, y)$ tek olup,

$$(L_1(x, y), L_2(x, y)) = 1$$

olur. Kabul edelim ki $n \geq 2$ için $(L_n(x, y), L_{n+1}(x, y)) = t$ olsun. Eğer p , t yi bölen bir asal sayı ise. O zaman

$$p \mid L_n(x, y) \text{ ve } p \mid L_{n+1}(x, y)$$

dir. Tanım 2.1'den $p \mid yL_{n-1}(x, y)$ olup, $p \nmid y$ olduğundan $p \mid L_{n-1}(x, y)$ olmak zorundadır. Böylece

$$p \mid L_{n-1}(x, y) \text{ ve } p \mid L_n(x, y)$$

dir. Bu şekilde devam edilirse

$$p \mid L_1(x, y) \text{ ve } p \mid L_2(x, y)$$

elde edilir. Böylece $p \mid 2$ olur. O halde $t = 2^s$ veya $t = 1$ dir. Buradan x çift ise

$$(L_n(x, y), L_{n+1}(x, y)) = 2$$

bulunur.

Eğer x tek ve y çift ise o zaman her $n \geq 1$ doğal sayısı için $L_n(x, y)$ bir tek tamsayıdır.

Eğer x ve y tek sayı ise o zaman her $n \geq 1$ tam sayı için $L_n(x, y)$ veya $L_{n+1}(x, y)$ bir tek tamsayı olmak zorundadır. Kabul edelim ki $L_n(x, y)$ ve $L_{n+1}(x, y)$ çift ise o zaman Tanım 2.1'den

$$yL_{n-1}(x, y) = L_{n+1}(x, y) - xL_n(x, y)$$

de bir çift sayı olur. Bu şekilde devam edilirse $L_1(x, y) = x$ de çift sayı olur. Bu ise çelişkidir. O halde $L_n(x, y)$ veya $L_{n+1}(x, y)$ tek sayıdır. Son olarak. x tek sayı iken

$$(L_n(x, y), L_{n+1}(x, y)) = 1$$

olur.

5.3 Teorem

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $m|n$ olsun.

$$F_m(x, y) | F_n(x, y) \tag{5.5}$$

dir [2].

İspat

$m|n$ ise $n = km$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır.

$$m|n \Rightarrow F_m(x, y) | F_n(x, y)$$

olduğunu tümevarım ile ispatlayalım. $k = 1$ olsun. O zaman

$$F_m(x, y) | F_m(x, y)$$

olur. b bir tam sayı olmak üzere kabul edelim ki $k = b$ için doğru olsun. Bu durumda

$$F_m(x, y) | F_{bm}(x, y)$$

olur. Şimdi $k = b + 1$ için doğru olduğunu gösterelim. Teorem 3.1 den

$$F_{(b+1)m}(x, y) = F_{m+bm}(x, y) = yF_{bm-1}(x, y)F_m(x, y) + F_{bm}(x, y)F_{m+1}(x, y)$$

dir.

$$F_m(x, y) \mid F_{bm}(x, y) \text{ ve } F_m(x, y) \mid F_m(x, y)$$

olduğundan

$$F_m(x, y) \mid F_{(b+1)m}(x, y)$$

olur. Böylece $k = b + 1$ için doğru olur. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$m \mid n \text{ ise } F_m(x, y) \mid F_n(x, y)$$

elde edilir.

5.4. Teorem

$y, x \in \mathbb{N}$ ve $(y, x) = 1$ olsun. Her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$(F_n(x, y), F_m(x, y)) = F_{(n, m)}(x, y) \quad (5.6)$$

dir [9].

İspat

Eğer $m = n$ için olduğunu biliyoruz

Kabul edelim ki $n > m$ için doğru olsun. Öklid algoritmasından

$$n = mq_0 + r_1, 0 \leq r_1 < m$$

$$m = r_1q_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$$

M

$$r_{t-2} = r_{t-1}q_{r-1} + r_t, 0 \leq r_t < r_{t-1}$$

$$r_{t-1} = r_tq_t, r_t = (n, m)$$

dir. Teorem 3.1 ve Teorem 5.3 den

$$\begin{aligned} (F_n(x, y), F_m(x, y)) &= (F_{mq_0+r_1}(x, y), F_m(x, y)) \\ &= (yF_{mq_0-1}(x, y)F_{r_1}(x, y) + F_{mq_0}(x, y)F_{r_1+1}(x, y), F_m(x, y)) \\ &= (yF_{mq_0-1}(x, y)F_{r_1}(x, y), F_m(x, y)) \end{aligned}$$

olup, Teorem 5.1 den

$$(y, F_m(x, y)) = 1$$

dir. Teorem 5.2 den

$$(F_{mq_0-1}(x, y), F_{mq_0}(x, y)) = 1$$

ve Teorem 5.3 den

$$(F_{mq_0-1}(x, y), F_m(x, y)) = 1$$

olur. Böylece

$$(F_n(x, y), F_m(x, y)) = (F_{r_1}(x, y), F_m(x, y))$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
 (F_n(x, y), F_m(x, y)) &= (F_m(x, y), F_{r_1}(x, y)) \\
 &= (F_{r_1}(x, y), F_{r_2}(x, y)) \\
 &\quad \vdots \\
 &= (F_{r_{t-1}}(x, y), F_{r_t}(x, y)) \\
 &= F_t(x, y) \\
 &= F_{(n, m)}(x, y)
 \end{aligned}$$

bulunur.

5.5. Teorem

$y, x \in \mathbb{Y}$, $(y, x) = 1$ olsun . $m \neq 2$ veya $x \neq 1$ olmak üzere

$$m|n \Leftrightarrow F_m(x, y)|F_n(x, y) \quad (5.7)$$

dir [6].

İspat

a) $m|n \Rightarrow F_m(x, y)|F_n(x, y)$ olduğu Teorem 5.3 de ispatlandı.

b) $F_m(x, y)|F_n(x, y) \Rightarrow m|n$

olduğunu ispatlayalım. Kabul edelim ki $F_m(x, y)|F_n(x, y)$ ve $m \neq 2$ veya $x \neq 1$ olsun. O zaman

$$(F_m(x, y), F_n(x, y)) = F_m(x, y)$$

dir. Ayrıca Teorem 5.4'den

$$(F_m(x, y), F_n(x, y)) = F_{(m,n)}(x, y)$$

dir. O halde

$$F_m(x, y) = F_{(m,n)}(x, y)$$

dir. $x, y \in \mathbb{Y}$ olmak üzere t üzerinde tümevarım ile $t \neq 1$ ve $x \neq 1$ için

$$F_t(x, y) < F_{t+1}(x, y)$$

olduğu görülebilir. Eğer $t = 1$ veya $x = 1$ ise

$$F_1(x, y) = F_2(x, y)$$

olur. $x, y \in \mathbb{Y}$ ve $(x, y) = 1$ için $t = 1$ veya $x = 1$ olursa Tanım 2.1 den

$$F_1(x, y) = F_2(x, y)$$

elde edilir. Böylece $t \neq 1$ veya $x \neq 1$ için

$$F_t(x, y) < F_{t+1}(x, y)$$

olduğu t üzerinde tümevarım ile gösterebiliriz. O halde $t \neq 1$ veya $s \neq 2$ veya $x \neq 1$ için

$$t < s \text{ ise } F_t(x, y) < F_s(x, y)$$

olur. Eğer $t \neq 1$ veya $s \neq 2$ veya $x \neq 1$ olacak şekildeki t, s, x doğal sayılar için

$$F_t(x, y) = F_s(x, y) \Leftrightarrow t = s$$

dir.

$$F_m(x, y) = F_{(m,n)}(x, y)$$

olduğundan $m \neq 2$ veya $(m, n) \neq 1$ veya $x \neq 1$ için

$$F_m(x, y) = F_{(m,n)}(x, y) \Leftrightarrow m = (m, n)$$

olup, bu ise $m|n$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

KAYNAKLAR

1. Bergum, G.E., Hoggatt, V.E.Jr. "Irreducibility of Lucas and generalized Lucas polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 12: 95-100, (1974).
2. Catalini, M., "Generalized Bivariate Fibonacci Polynomials", arXiv:math.Co/0211366 v2, (2004).
3. Catalini, M., "Some Formulae for Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials", arXiv:math.Co/0406323 v1, (2004).
4. Djordjevic G. B., "Some Properties of a Class of Polynomials", *Matematički Vesnik*, 49: 265-271 (1997).
5. Djordjevic G.B., "Some Properties of Partial Derivatives of Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 39 (2): 138-141 (2001).
6. Frei, G., "Binary Lucas and Fibonacci Polynomials I.", *Mathematische Nachrichten*, 96: 83-112, (1980).
7. Gould H. W. , "Combinatorial Identities", **Morgantown**, W. Va., 50-90, (1972).
8. Hoggatt V.E.Jr.; Long C.T., "Divisibility properties of generalized Fibonacci polynomials". *Fibonacci Quarterly*, 12: 113-120, (1974).
9. Koshy T. "Fibonacci and Lucas Numbers with Applications," *A Wiley-Interscience Publication*, 51-179, 424-475, (2001).
10. MacHenry T., "Generalized Fibonacci and Lucas Polynomials and Multiplicative Arithmetic Functions", *The Fibonacci Quarterly*, 38: 167-173, (2000).
11. Tan, M., Zhang, Y., "A Note on Bivariate and Trivariate Fibonacci Polynomials", *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 32: 975-990, (2005).
12. Vajda, S., "Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section Theory and Applications", *Ellis Harwood Limited*, 24-87, (1989).
13. Vorobiev, N.N., "Fibonacci Numbers", *Birkhäuser Verlag*, 11-49, (1992).
14. Webb, W.A.; Parberry, E. A., "Divisibility properties of Fibonacci polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 7: 457-463, (1969).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : Abas, Hassan A. Ali
Uyruğu : Irak
Doğum tarihi ve yeri : 09/03/1981, Telafer
Medeni hali : Bekâr
Telefon : 0544 859 58 47
e-mail :ha14n14@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Musul Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü	2005
Lise	Tevra Alarabiya Lisesi	2000

Yabancı Dil

İngilizce
Arapça