

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CAUCHY SERİLERİ İLE NORMLU UZAYLARIN BAZI
KARAKTERİZASYONLARI**

**Tezi Hazırlayan
Lale CONA**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz- 2009
KAYSERİ**

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**CAUCHY SERİLERİ İLE NÖRMLU UZAYLARIN BAZI
KARAKTERİZASYONLARI**

**Tezi Hazırlayan
Lale CONA**

**Tezi Yöneten
Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ**

**Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Temmuz- 2009
KAYSERİ**

Yrd. Doç. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ danışmanlığında Lale CONA tarafından hazırlanan “Cauchy Serileri İle Normlu Uzayların Bazı Karakterizasyonları” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

20/07/2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Mehmet ÖZDEMİR

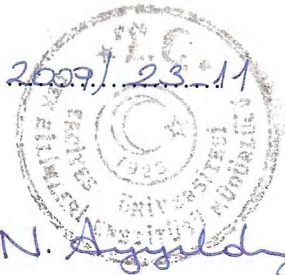
Üye : Prof. Dr. Osman MUCUK

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ

[Handwritten signatures of the jury members: Mehmet Özdemir, Osman Mucuk, and Abdalcabbar Sönmez]

ONAY

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 21/07/2009 tarih ve 2009/23-11 sayılı kararı ile onaylanmıştır.



Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında; çok değerli bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, her zaman ve her konuda en büyük desteği gördüğüm, saygıdeğer hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bugünlere gelmemde, maddi ve manevi hiçbir fedakarlıktan esirgemeyen sevgili aileme de teşekkürü bir borç bilirim.

CAUCHY SERİLERİ İLE NORMLU UZAYLARIN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Lale CONA

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Temmuz 2009

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ÖZET

Normlu uzaylar ve normlu uzayların tamlığı Fonksiyonel Analizde geniş uygulama alanına sahiptir. Bir normlu uzay tam ise bu uzaya Banach uzay adı verilir. Bu kavram ilk olarak 1922 lerde Stefan Banach tarafından tanıtılmıştır. Banach uzayları matematiğin bir çok sahasında kullanılmış ve yapılan çalışmalarda önemli rol oynamıştır. Bu yüzden bu alanda çalışan bir çok matematikçi farklı metodlarla normlu uzayların karakterizasyonu üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır.

Son dönem çalışmalara bakıldığında özellikle zayıf şartsız ve şartsız Cauchy serileri vasıtasıyla normlu uzayların tamlığı karakterize edilmiştir. Bu seriler ile toplanabilme metodları birleştirilerek yapılan çalışmalar normlu uzayların karakterizasyonu açısından oldukça önemlidir.

Bu tez de zayıf şartsız ve şartsız Cauchy serileri vasıtasıyla normlu uzayların karakterizasyonu üzerine kapsamlı bir çalışma yapılmıştır. Bunun için öncelikle tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verildi. Genel olarak ℓ_∞, C, C_0 (sınırlı, yakınsak ve sıfır) dizi uzayları kullanılarak normlu uzayların tamlığı karakterize edildi. Sonraki çalışmalarda normlu uzaylar yerine Barrelled uzayı, ℓ_∞, C, C_0 dizileri yerine de reel sayıların keyfi dizileri alınarak yeni çalışmalar yapıldı.

Buna ilaveten herhangi bir normlu uzayında zayıf şartsız Cauchy serisine Cesáro toplanabilme metodu uygulanarak normlu ve Banach uzayların yeni bir karakterizasyonu elde edildi.

Nihayetinde Cesáro matrisi yerine $A = (a_{nk})$ regüler matrisi alınarak yukarıdaki sonuçlar genelleştirildi.

Anahtar Kelimeler: Banach Uzay, Barrelledness, Şartsız ve Zayıf Şartsız Cauchy Serileri, Cesáro yakınsaklık, Matris Toplanabilirlik.

SOME CHARACTERIZATIONS OF NORMED SPACES WITH CAUCHY SERIES

Lale CONA

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M. Sc. Thesis, July 2009

Thesis Supervisor: Assist.Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

ABSTRACT

Normed space and completeness of normed spaces have broad application in Functional Analysis.

If a normed space is complete, then it is called a Banach Space. This notion was introduced by Stefan Banach in 1922. Banach spaces have been used in many fields in mathematics and has played an important roles in studies. For this reason , many mathematicians working in this area have done many studies on different methods of characterizations of normed spaces.

In recent studies, particularly, the completeness of normed spaces was characterized by using weakly unconditionally Cauchy series.

The studies combining these series and summability methods are important for the characterizations of normed space.

In this thesis, a comprehensive studying of the characterizations of normed space are investigated by means of weakly unconditionally and unconditionally Cauchy.

First of all, some basic definitions and theorems that will be used through the thesis are given.

In generally, the completeness of a normed space is characterized by using sequences space ℓ_∞, c, c_0 (bounded sequence, convergent sequence and null sequence).

In later studies, Barrelled space and any real sequences are taken instead of normed spaces and ℓ_∞, c, c_0 sequences spaces, respectively.

Moreover, in any normed space by applying Cesáro summability method to weakly unconditionally Cauchy series, the new characterizations of normed spaces and Banach spaces are given.

Finally, by taking regular matrix $A = (a_{nk})$ instead of Cesáro matrix ,the above results are generalized.

Keywords: Banach Space, Barrelledness, Unconditionally and weakly unconditionally Cauchy series, Cesáro convergent, Matrix summability.

İÇİNDEKİLER

KABU VE ONAY	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER.....	v
KISALTMALAR.....	vi
1. BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	4
TEMEL KAVRAMLAR.....	4
3. BÖLÜM	14
ZAYIF ŞARTSIZ CAUCHY SERİLERİ VASITASIYLA NORMLU ve BANACH UZAYLARIN KAREKTERİZASYONU	14
4. BÖLÜM	26
TAM ve BARRELLED NORMLU UZAYLARIN KAREKTARİZASYONU	26
5. BÖLÜM	40
ZAYIF ŞARTSIZ CAUCHY SERİSİ ve CESÁRO TOPLANABİLİRLİK	40
6. BÖLÜM	49
MATRİS TOPLANABİLİRLİK ve ZAYIF ŞARTSIZ CAUCHY SERİLERİ	49
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	59

KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayıların Cümlesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayıların Cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayıların Cümlesi
$\exists$	: En az (varlık, var olmak)
$\forall$	: Her
$\Leftrightarrow$	: Gerek ve yeter koşul
$\ni$	: Öyleki
ℓ_∞	: Tüm sınırlı dizilerin cümlesi
c	: Tüm yakınsak dizilerin cümlesi
c_0	: Tüm sıfıra yakınsayan dizilerin cümlesi
$\inf A$	: A cümlesinin en büyük alt sınırı, infimumu
$\sup A$	: A cümlesinin en küçük üst sınırı, supremumu
$(X, \ \cdot\)$	: Normlu uzay
$\sum_i x_i$	: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Zayıf şartsız Cauchy ve şartsız Cauchy serileri ve bu seriler vasıtasıyla normlu uzaylar üzerine çeşitli karakterizasyonlar ile ilgili çalışmalar 20. yüzyılın sonlarında hız kazanmaya başlamıştır. Bu sahada söz sahibi olan matematikçilerden A. Aizpuru, F.J. Pérez-Fernández ve F. Benítez-Trujillo zayıf şartsız Cauchy serileri üzerine önemli çalışmalar yapılmıştır [1], [2]. Bu çalışmalar bu alanda yapılan çalışmaların temeli olma niteliği taşımaktadır.

X normlu bir uzay ve (x_n) X de bir dizi olsun. $\forall f \in X^*$ için $f((x_n))$ Cauchy dizisi ise (x_n) dizisine X de zayıf Cauchy dizisi denir.

X reel normlu bir uzay ve X de bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. $\mathbb{N}$ nin her π permütasyonu

için eğer $\sum_i x_{\pi(i)}$ yakınsak ise $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi şartsız yakınsaktır denir. Eğer $\mathbb{N}$ nin her

π permütasyonu için $\left(\sum_{i=1}^n x_{\pi(i)} \right)_n$ dizisi zayıf Cauchy dizisi ise $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisine zayıf

şartsız Cauchy serisi denir.

Çalışmalarımızda kullanacağımız sınırlı, yakınsak ve sıfıra yakınsak normlu dizi uzayları supremum normlu ile donatılmıştır. X reel normlu uzayında verilen her hangi

bir $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi için,

$$S = S(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ yakınsak} \right\},$$

$$S_w = S_w(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ zayıf yakınsak} \right\},$$

$$S_0 = S_0(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ *zayıf yakınsak} \right\}$$

uzayları tanımlansın. Bu uzaylar gözönünde bulundurularak bir normlu uzayın dual uzayı ve Banach uzayındaki zayıf şartsız ve şartsız Cauchy serilerinin yeni karakterizasyonu elde edildi.

Bu çalışmaların neticesinde X normlu uzayında herhangi bir $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi için reel sayıların sınırlı dizileri yerine keyfi dizileri alınarak

$$BS = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_n \left\| \sum_i a_i x_i \right\| < \infty \right\}$$

$$LS = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i \text{ } X \text{ de yakınsak} \right\}$$

$$LS_w = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i \text{ } X \text{ de zayıf yakınsak} \right\}$$

$$LS_0 = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i \text{ } X^{**} \text{ da *zayıf yakınsak} \right\}$$

dizi uzayları elde edildi. A. Aizpuru, F.J. Pérez-Fernández tarafından bu dizi uzayları vasıtasıyla barrelled normlu uzayların ve tamlığın yeni karakterizasyonu elde edildi [3].

Bu çalışmalar ve literatürdeki diğer çalışmalar incelenerek, normlu ve Banach uzayların farklı yöntemlerle karakterize edilip edilemeyeceği üzerinde duruldu. Analizin önemli bir çalışma alanı olan toplanabilme metodu dikkate alınarak normlu ve Banach uzayların yeni karakterizasyonu incelendi. En temel toplanabilme metodu olan Cesáro toplanabilme metodunu hatırlayalım:“ Bir topolojik vektör uzayında bir seri $\zeta = \sum_i x_i$

olsun. $n \in \mathbb{N}$ için ζ serisinin kısmi toplamlar dizisi $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ olmak üzere eğer

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (s_1 + \dots + s_n) = x_0$ ise ζ serisi x_0 a Cesáro yakınsaktır denir. O halde $\zeta = \sum_i x_i$

serisi x_0 a Cesáro yakınsak ise $C - \sum_i x_i = x_0$ şeklinde gösterilir.”

Bu toplanabilme metodu kullanılarak A. Aizpuru, A. Gutiérrez-Dávila, A. Sala tarafından bir X normlu uzayındaki supremum normu ile donatılan $\zeta = \sum_i x_i$ serisi için

$$\begin{aligned} S_C(\sum_i x_i) &= \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i x_i \text{ Cesáro yakınsak} \right\} \\ S_{wC}(\sum_i x_i) &= \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i x_i \text{ } w\text{-Cesáro yakınsak} \right\} \\ S_{w^*C}(\sum_i f_i) &= \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i f_i \text{ } *w\text{Cesáro yakınsak} \right\} \end{aligned}$$

yakınsaklık uzayları tanımlandı. Böylece Cesáro toplanabilme metodu ile normlu uzayların tamlığı karakterize edilmiş oldu [4].

Son zamanlarda yapılan çalışmalarda ise Cesáro toplanabilme metodu yerine regüler bir $A = (a_{nk})$ matrisi alınarak en genel anlamda matris toplanabilme metodu ile normlu uzaylarının tamlığı karakterize edildi [5]. Bu konuda çalışmalar devam ettirilmektedir.

2. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanacağımız temel kavramlara yer vereceğiz.

Tanım 2.1. X boş olmayan bir küme, K da kompleks ya da reel sayıların bir cismi olsun. Bu takdirde $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda, \mu \in K$ için

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları

- i. $(x + y) + z = x + (y + z)$
- ii. $x + \theta = x$ olacak şekilde bir tek $\theta \in X$ mevcut
- iii. $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir tek $(-x) \in X$ mevcut
- iv. $x + y = y + x$
- v. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- vi. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- vii. $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$
- viii. $1x = x$

özelliklerini sağlıyorsa X kümesine K cismi üzerinde bir *vektör uzayı* veya bir *lineer uzay* denir [6].

Burada K ya X vektör uzayının *skaler cismi* (veya katsayılar cismi) denir. Eğer $K = \mathbb{R}$ ise X e *reel vektör uzayı*, $K = \mathbb{C}$ ise X e *kompleks vektör uzayı* denir [6].

Tanım 2.2. X bir K cismi üzerinde vektör uzayı olsun

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \|x\|$$

fonksiyonu, eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için,

$$(N1) \quad \|x\| \geq 0$$

$$(N2) \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$(N3) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(N4) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde *norm* adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikisine de bir *normlu vektör uzayı* denir. $(N1)-(N4)$ özelliklerine *norm aksiyomları* denir[7].

Tanımı 2.3. (Denk Normlar) $(X, \|\cdot\|)$ ve $(X, \|\cdot\|_0)$ herhangi iki normlu uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

olacak şekilde $a, b > 0$ varsa bu iki norma *denk normlar* denir [6].

Tanımı 2.4. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay, (x_n) X de bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

ise, bu taktirde (x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir ve

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{ya da} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

şeklinde gösterilir. Normlu uzayda tanımlanan bu yakınsamaya *norma göre yakınsama* (*kuvvetli yakınsama*) adı verilir [8].

Tanım 2.5. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m, n > n_\varepsilon$ olduğunda $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir [8].

Bu tanımı daha kısa olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

(x_n) bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ dır.

Tanım 2.6. $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi uzayın bir elemanına yakınsıyorsa, bu taktirde X e *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir [7].

Tanım 2.7. Değer cümlesi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olan bir dönüşüme bir *fonksiyonel* denir. Fonksiyoneller f, g, h gibi küçük harflerle gösterilir [6].

Tanım 2.8. (Lineer Fonksiyonel) Tanım cümlesi X vektör uzayının içinde $(D(f) \subset X)$ ve görüntü cümlesi X in skaler cismi olan $K(R(f) \subset K)$ da olan lineer dönüşüme bir *lineer fonksiyonel* denir. Bu yüzden bir lineer fonksiyonel

$$f : D(f) \rightarrow K$$

şeklinde tanımlıdır. X reel ise $K = \mathbb{R}$ ve X kompleks ise $K = \mathbb{C}$ dır [9].

Tanım 2.9. (Sınırlı Lineer Fonksiyonel) f bir lineer fonksiyonel olsun. Eğer $\forall x \in D(f)$ için

$$|f(x)| \leq c \|x\|$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ varsa bu taktirde f e *sınırlı lineer fonksiyonel* denir.

Böylece bir f *lineer fonksiyonelinin normu*,

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in D \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad \text{veya} \quad \|f\| = \sup_{\substack{x \in D \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

şeklinde tanımlanır. Buradan her $x \in D(f)$ için,

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

olduğu açıktır [9].

Teorem 2.1. (Süreklilik ve Sınırlılık) *Normlu bir uzayda f lineer fonksiyonelinin sürekli olması için gerek ve yeter şart f nin sınırlı olmasıdır [6].*

Tanım 2.10. X normlu bir uzay olsun. X üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyonellerin cümlesine X in *dual uzayı* denir ve X^* ile gösterilir. Yani

$$X^* = \left\{ f \mid f : X \xrightarrow[\text{lineer}]{\text{sınırlı}} \mathbb{R}, \mathbb{C} \right\}$$

dır. X^* üzerinde,

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

kuralı ile tanımlanan $\|\cdot\|$ fonksiyonu bir norm olup, böylece $(X^*, \|\cdot\|)$ bir normlu uzaydır [6].

Teorem 2.2. X normlu bir uzay olsun. Bu taktirde X^* bir Banach uzayıdır [6].

Tanım 2.11. X normlu bir uzay olsun. X^* üzerinde tanımlanmış lineer fonksiyonellerin cümlesine de X in *ikinci dual uzayı* denir ve $(X^*)^*$ şeklinde gösterilir. Böylece,

$$(X^*)^* = \left\{ g_{x_0} \mid g_{x_0} : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C} \right\}$$

dır. Burada

$$g_{x_0} : X^* \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C} , \quad g_{x_0}(f) = f(x_0)$$

şeklinde tarif edersek g_{x_0} lineerdir [6].

Tanım 2.12. $X \neq \emptyset$ herhangi bir cümle olsun τ , X in alt cümlelerinin bir sınıfı olsun. Eğer,

$$(T1) \quad X, \emptyset \in \tau$$

$$(T2) \quad U_1, U_2 \in \tau \text{ için } U_1 \cap U_2 \in \tau$$

$$(T3) \quad U_i \in \tau, (i \in I) \text{ için } \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$$

özellikleri sağlanıyorsa τ ya X üzerinden bir *topoloji* ve (X, τ) ikilisine de bir *topolojik uzay* denir [7].

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Herhangi bir $a \in X$, $f_1, \dots, f_n \in X^*$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$U(a, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) = \left\{ x \in X : \sup_{1 \leq k \leq n} |f_k(x - a)| < \varepsilon \right\}$$

cümlesi tanımlansın. $U = U(a, f_1, \dots, f_n, \varepsilon)$ cümlesine $a \in X$ in *zayıf komşuluğu* denir.

Tanım 2.13. G , X in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer, her $a \in G$ ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$U(a, f_1, \dots, f_n, \varepsilon) \subset G$$

olacak şekilde $f_1, \dots, f_n \in X^*$ varsa bu taktirde G ye *zayıf açık cümle* denir.

X in tüm zayıf açık alt cümlelerin sınıfı $\sigma(X, X^*)$ ile gösterilir. Boş cümle X in zayıf açık bir alt cümlesi olduğu için $\sigma(X, X^*)$ sınıfında yer alır. Bu taktirde $\sigma(X, X^*)$ X üzerinde bir topoloji olup bu topolojiye X üzerinde X^* tarafından belirlenen *zayıf topoloji* denir [6].

Teorem 2.3. $\sigma(X, X^*)$ zayıf topoloji X normlu uzayı için bir topolojidir[6].

Tanım 2.14. G, X in boş olmayan bir alt cümlesi olsun. Eğer her $g \in G$ ve her $\varepsilon > 0$ için ,

$$V = V(g, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) \subset G$$

olacak şekilde $x_1, \dots, x_n \in X$ varsa bu taktirde G ye **zayıf açık cümle* denir [6].

Burada V cümlesi

$$V = \left\{ f \in X^* : \sup_{1 \leq k \leq n} |f(x_k) - g(x_k)| < \varepsilon \right\}$$

şeklinde tanımlıdır.

X^* in tüm **zayıf açık alt cümlelerin sınıfı* $\sigma(X^*, X)$ ile gösterilir. Boş cümle X^* in **zayıf açık bir alt cümlesi olduğu için* $\sigma(X^*, X)$ sınıfında yer alır. Bu taktirde $\sigma(X^*, X)$ X^* üzerinde bir topoloji olup bu topolojiye X^* üzerinde X tarafından belirlenen **zayıf topoloji* denir [6].

Tanım 2.15. X normlu bir uzay olsun. (x_n) X de bir dizi olmak üzere eğer (x_n) dizisi $\forall f \in X^*$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - x) = 0$ ya da bir başka deyişle $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$ olacak şekilde $x \in X$ varsa (x_n) dizisi x değerine *zayıf yakınsaktır* denir. Burada x e dizinin *zayıf limiti* adı verilir [6].

Tanım 2.16. X normlu bir uzay ve (f_n) X normlu uzayı üzerinde sınırlı lineer fonksiyonelerin bir dizisi olsun. $\forall x \in X$ için $f_n(x) \rightarrow f(x)$ olacak şekilde bir $f \in X^*$ fonksiyoneli varsa, (f_n) dizisi f ye **zayıf yakınsaktır* denir ve bu durum $f_n \xrightarrow{*z} f$ şeklinde gösterilir. f ye (f_n) dizisinin *zayıf limiti* adı verilir.

Tanım 2.17. Reel veya Kompleks değerli bir serisi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$ ise bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine *mutlak yakınsaktır* denir [1].

Örnek 2.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$ mutlak yakınsaktır. Gerçekten;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} < \infty \text{ olup } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \text{ serisi mutlak yakınsaktır.}$$

Teorem 2.4. X uzayı tamdır $\Leftrightarrow X$ de mutlak yakınsak her seri yakınsaktır[6].

Tanım 2.18. Reel veya Kompleks değerli bir seri $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ olsun. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \infty$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yakınsak ise, bu taktirde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ serisine *şartlı yakınsak* denir[1].

Örnek 2.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisi şartlı yakınsaktır. Gerçekten;

Serinin genel terimini $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ile gösterelim. *Leibniz kriteri* gereği

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |a_n| = \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \frac{1}{n}, \quad |a_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} \quad \text{olduğundan } |a_n| > |a_{n+1}|$$

monoton azalan.

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ dır.}$$

verilen seri yakınsaktır. Fakat

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ serisi şartlı yakınsaktır.

Tanım 2.19. X reel normlu bir uzay olsun. Eğer $\mathbb{N}$ nin her π permütasyonu için

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{\pi(i)} \text{ yakınsak ise } \sum_{i=1}^{\infty} x_i \text{ serisine } \textit{\textbf{\textit{şartsız yakınsaktır}}} \text{ denir [2].}$$

Bir başka şekilde bu tanımı ifade edersek;

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ serisi } \textit{\textbf{\textit{şartsız yakınsaktır}}} \Leftrightarrow \varepsilon_n = \{-1, +1\} \text{ olacak şekildeki } \forall (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty} \text{ dizisi için}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \text{ serisi yakınsaktır.}$$

Teorem 2.5. X bir Banach uzay ve $\sum_n x_n$ de X de mutlak yakınsak bir seri olsun. Bu

taktirde serinin terimleri arasında istenilen çoklukta bir yer değiştirme işlemi serinin karakterini değiştirmeyeceği gibi toplamını da değiştirmez [6].

Sonuç 2.1. Bir Banach uzayında mutlak yakınsak her seri şartsız yakınsaktır.

Tanım 2.20. $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzay, $p = (p_n)$ de pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere $x = (x_n)$ olarak yazacağız. X - değerli dizi uzayları olan $c_0(x, p)$, $c(x, p)$, $\ell_{\infty}(x, p)$, $\ell(x, p)$ aşağıdaki gibi tanımlanır [8].

$$c_0(x, p) = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^{p_n} = 0 \right\}$$

$$c(x, p) = \left\{ x = (x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - a\|^{p_n} = 0, \text{ bazı } a \in X \text{ için } \right\}$$

$$\ell_{\infty}(x, p) = \left\{ x = (x_n) : \sup_n \|x_n\|^{p_n} < \infty \right\}$$

Tanım 2.21. X lineer uzayının boş olmayan bir alt cümlesi E olsun [9].

- (i) E konvektir $\Leftrightarrow x, y \in E$ ve $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$; $\lambda + \mu = 1$ için $\lambda x + \mu y \in E$ ise
- (ii) E dengelidir $\Leftrightarrow x \in E$ ve $|\lambda| \leq 1$ için $\lambda x \in E$ ise.
- (iii) E emicidir $\Leftrightarrow X$ vektör uzayı reel veya kompleks K cismi üzerinde verilsin $\forall x \in X$ ve $r \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $\forall \lambda \in K$ için $|\lambda| \geq r$ olacak şekilde $\forall x \in \lambda E$ veya $(\lambda^{-1}x \in E)$ $\lambda e = \{\lambda e : e \in E\}$ dir.
- (iv) Bir topolojik uzayda bir cümle kapalıdır $\Leftrightarrow$ Bu cümle bütün yığılma noktalarını (limit noktalarını) içeriyorsa.

Tanım 2.22. Bir X lokal konveks lineer topolojik uzayında eğer herhangi bir cümle konveks, dengeli, emici ve kapalı ise bu cümleye *barrelled* ya da *barrelldir* denir. Bu barrell cümlelerin her biri 0(sıfır) ın komşuluğunda ise X e bir *barrell uzay* adı verilir [9].

Tanım 2.23. $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli bir dizi be $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk} x_k$$

yakınsak olmak kaydıyla

$$t_n = \sum_k a_{nk} x_k$$

eşitliği ile (t_n) dizisi tanımlansın. (t_n) dizisine (x_k) nın *dönüşüm dizisi* denir. A ya da *limitleme* veya *toplanabilme metodu* adı verilir [4].

Tanım 2.24. Bir $A = (a_{nk})$ matrisi verilmiş olsun. Eğer A matrisi yakınsak bir diziye yakınsak bir diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti koruyorsa A matrisine *regülerdir* denir [4].

Tanım 2.24. ((C,k) Limitleme metodu) : (S_n) dizisi verildiğinde

$$C_n^{(k)} = \frac{\binom{k-1}{k-1} S_n + \binom{k}{k-1} S_{n-1} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} S_0}{\binom{n+k}{k}}$$

eşitliği ile tanımlanan diziye (S_n) dizisinin k ıncı mertebeden dönüşüm dizisi denir [2].

$k=1$ için

$$C_n^{(1)} = \frac{S_0 + S_1 + \dots + S_n}{n+1}$$

1-inci mertebeden Cesáro ortalaması adını alır [4].

3. BÖLÜM

ZAYIF ŞARTSIZ CAUCHY SERİLERİ VASITASIYLA NORMLU ve BANACH UZAYLARIN KARAKTERİZASYONU

Reel sayıların sınırlı, yakınsak ve sıfır dizilerinin normlu uzayları supremum normu ile donatılarak genel olarak ℓ_∞, c, c_0 olarak tanımlanacaktır.

Tanım 3.1. X reel normlu uzayında alınan bir seri $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. Eğer $\mathbb{N}$ nin her π permütasyonu için $\left(\sum_{k=1}^i x_{\pi(k)} \right)_i$ zayıf Cauchy dizisi ise $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisine *zayıf şartsız Cauchy* denir. Alternatif olarak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ bir *zayıf şartsız Cauchy serisidir* $\Leftrightarrow \forall f \in X^*$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f(x_i)| < \infty.$$

X reel normlu bir uzay ve X de bir seri $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. Bu taktirde

1. Bir Banach uzayında $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi zayıf şartsız Cauchy serisi olarak karakterize

edilebilir $\Leftrightarrow \forall (t_i)_i \in c_0$ için $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ serisi yakınsaktır.

2. Bir X normlu uzayında, $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi zayıf şartsız Cauchy dir. $\Leftrightarrow$

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, |\alpha_i| \leq 1, i \in \{1, \dots, n\} \right\} \quad (3.1)$$

cümlesi sınırlıdır.

3. Eğer X bir Banach uzayı ise aşağıdaki ifadeler denktir. ([6], [7], [8])

- (a) X de bir zayıf şartsız Cauchy serisi yakınsaktır. Fakat şartsız yakınsak değildir. $\Leftrightarrow X, c_0$ ı ihtiva ediyorsa.
- (b) X de bir zayıf şartsız Cauchy serisi zayıf yakınsaktır. Fakat şartsız yakınsak değildir. $\Leftrightarrow X, c_0$ ı ihtiva ediyorsa.
- (c) X de bir zayıf şartsız Cauchy serisi zayıf yakınsak değildir $\Leftrightarrow X, c_0$ ı ihtiva ediyorsa.
- (d) X^* de bir zayıf şartsız Cauchy serisi şartsız yakınsak değildir. $\Leftrightarrow X^*, \ell_\infty$ u ihtiva ediyorsa.

şrtlarının olduğu bilinmektedir.

X normlu uzayında herhangi bir $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi verilmiş olsun.

1. $S = S(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ serisini yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \ell_\infty$ dizilerinin cümlesidir.

$$S = S(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ yakınsak} \right\}$$

2. $S_w = S_w(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ serisini zayıf yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \ell_\infty$ dizilerinin cümlesidir.

$$S_w = S_w(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ zayıf yakınsak} \right\}$$

3. $S_0 = S_0(\zeta)$ uzayı $\sum_i a_i x_i$ serisini *zayıf yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \ell_\infty$ dizilerinin cümlesidir.

$$S_0 = S_0(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \text{ *zayıf yakınsak} \right\}$$

$\left(\text{yani} \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)_n \text{ serisi } \sigma(X^{**}, X^*) \text{ topolojisine göre yakınsak} \right)$

Supremum normu ile donatılan bu cümleler ζ serilerinin yakınsak, zayıf yakınsak ve *zayıf yakınsak uzayları olarak adlandırılacak.

Burada şunu da belirtelim ki eğer X Banach uzayı c_0 ı ihtiva etmiyorsa bu takdirde her zayıf şartsız Cauchy serisi şartsız yakınsaktır ve $S = S_w = S_0 = \ell_\infty$ olur. Dahası özel bir durum olmadığı sürece X Banach uzayının c_0 a izomorf bir alt uzayı olduğunu kabul edeceğiz.

4. X^* uzayında herhangi bir $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi verilmiş olsun

$S_{*W} = S_{*W}(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$ serisini *zayıf yakınsak yapacak şekildeki sınırlı dizilerin cümlesidir.

$$S_{*W} = S_{*W}(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^* \text{ *zayıf yakınsak} \right\}$$

$\left(\text{yani} \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^* \sigma(X^*, X) \text{ topolojisi için yakınsak} \right)$

S_{*W} uzayı supremum normu ile donatıldığında bir normlu uzaydır.

Önerme 3.1. X bir Banach uzay ve X de bir $\zeta = \sum_i x_i$ serisi verilmiş olsun. ζ serisi şartlı yakınsak ve zayıf şartsız Cauchy dir $\Leftrightarrow c \subsetneq S \subseteq S_w \subsetneq \ell_\infty$.

İspat: $(a_i)_i$ dizisi $a \in \mathbb{R}$ ye yakınsak olan c de bir dizi olsun. $\sum_i a_i x_i$ serisinin yakınsak

olduğu açıktır. Dolayısıyla $c \subset S$ dir. Diğer taraftan $\sum_k x_{ik}$ serisi $\sum_i x_i$ serisinin aşık mutlak yakınsak olmayan bir alt serisi olsun. $(b_i)_i$

$$b_i = \begin{cases} 1, & k \in \mathbb{N} \text{ için } i = i_k \text{ ise} \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\ell_\infty \setminus c_0$ de bir dizi olsun.

$\sum_i b_i x_i$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $c \not\subseteq S$ dir.

Bir dizi yakınsak ise zayıf yakınsak olacağı için aşıkarak $S \subseteq S_w$ dır. Zayıf yakınsak olmayan $\sum_i x_i$ serisinin bazı $\sum_j x_{ij}$ alt serileri bulunabildiği için biz $S_w \subsetneq \ell_\infty$ elde ederiz.

Tersine olarak $c \subseteq S$ olsun. Bu durumda $c_0 \subseteq c$ olduğu için aynı zamanda $c_0 \subseteq S$ olur.

Yukarıda belirttiğimiz 3. maddenin (a) şartı dikkate alınırsa $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi yakınsaktır ve zayıf şartsız Cauchy dir fakat şartsız yakınsak değildir. Bu ise ispatı tamamlar.

Eğer bir $\sum_i x_i$ zayıf şartsız Cauchy serisi yakınsak değil ise (bu seri zayıf yakınsak olabilir de olmayabilir de)bu takdirde $(x_i)_i$ dizisi ya 0 (sıfır) a yakınsak bir alt diziye sahiptir yada hiçbir yakınsak diziye sahip değildir.

Örnek 3.1. $(e^{(i)})_i$ dizisi c_0 ın bazı olmak üzere, c_0 da $\sum_i x^{(i)}$ serisi

$$x^{(2i-1)} = e^{(2i-1)}, \quad x^{(2i)} = \frac{1}{2i} e^{(2i)}, \quad i \geq 1,$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $\sum_i x^{(i)}$ serisinin bir zayıf yakınsak seri olmadığı açıktır. Fakat zayıf şartsız

Cauchy dir. Ayrıca $(x^{(2i)})_i$ alt dizisi 0 (sıfır) a yakınsaktır. Gerçekten;

$$\begin{aligned} i \geq 1 \text{ için } x^{(2i)} &= \frac{1}{2i} e^{(2i)} \\ &= \left(\frac{e^{(2)}}{2}, \frac{e^{(4)}}{4}, \dots \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Örnek 3.2. c_0 da $\sum_i x_i$ serisi aşağıdaki gibi tanımlansın

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}e^{(1)}, \quad x^{(i)} = \frac{1}{2}e^i - e^{(i-1)}, \quad i > 1,$$

Bu taktirde $\sum_i x_i$ serisi aşikar olarak zayıf yakınsak olmayan zayıf şartsız Cauchy serisidir. Dahası bu $(x^{(i)})_i$ dizisinin hiçbir yakınsak alt dizisi yoktur.

Örnek 3.3. c_0 da $\sum_i x_i$ serisi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= e^{(1)}, \\ x^{(2)} &= \frac{1}{2}e^{(2)}, \\ x^{(2i+1)} &= -e^{(2i-1)} + e^{(2i+1)}, \quad i \geq 1 \\ x^{(2i)} &= -\frac{1}{2i-2}e^{(2i-2)} + \frac{1}{2i}e^{2i}, \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $\sum_i x_i$ serimiz sıfıra zayıf yakınsak fakat yakınsak olmayan bir zayıf şartsız Cauchy serisidir. Fakat $(x^{(2i)})_i$ dizisi sıfıra yakınsak olan $(x^{(i)})_i$ dizisinin bir alt dizisidir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} i \geq 2 \quad \text{için} \quad (x^{(2i)})_i &= -\frac{1}{2i-2}e^{(2i-2)} + \frac{1}{2i}e^{(2i)} \\ &= \left(-\frac{e^{(2)}}{2} + \frac{e^{(4)}}{4}, -\frac{e^{(4)}}{4} + \frac{e^{(6)}}{6}, \dots \right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Örnek 3.4. c_0 da $\sum_i x_i$ serisi

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= e^{(1)} \\ x^{(i)} &= -e^{(i-1)} + e^{(i)}, \quad i > 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmış olsun

$\sum_i x^{(i)}$ serisi sıfıra zayıf yakınsak ve yakınsak olmayan bir zayıf şartsız Cauchy serisidir.

Fakat $(x^{(i)})_i$ dizisi hiçbir yakınsak alt diziye sahip değildir.

Teorem 3.1. X bir Banach uzay ve X de bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. $S = S(\zeta)$ uzayı tamdır $\Leftrightarrow \zeta$ zayıf şartsız Cauchy serisidir.

İspat:

($\Leftarrow$) (Şart yeterdir): Kabul edelim ki ζ zayıf şartsız Cauchy serisidir. E (3.1) de tanımlanan cümle olsun. E nin tanımından $\forall x \in E$ için $\|x\| < M$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır.

$\{(a_i^k)_i\}$ dizisi $(a_i^0)_i \in \ell_{\infty}$ a yakınsak olan S de bir dizi olsun. ℓ_{∞} uzayı tam olduğundan aldığımız Cauchy dizisi uzayda bir değere yakınsaktır. Yakınsaklık gereğince;

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni \forall k \geq k_0$ ve $i \in \mathbb{N}$ için $|a_i^{(k)} - a_i^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2M}$ dir. Eğer $k > k_0$ ise

bu takdirde $i_k = i_k(k, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall p > q > i_k$ için $\left\| \sum_{i=q}^p a_i^{(k)} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir (Cauchy

şartı). $|a_i^{(k)} - a_i^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{2M}$ olduğu için $\frac{2M}{\varepsilon} |a_i^{(k)} - a_i^{(0)}| < 1$ dir. E nin tanımı gereği

$\frac{2M}{\varepsilon} \sum_{i=q}^p (a_i^{(k)} - a_i^{(0)}) x_i \in E$ dir. $\frac{2M}{\varepsilon} \sum_{i=q}^p (a_i^{(k)} - a_i^{(0)}) x_i \in E$ olduğundan $k > k_0$ için

$\left\| \sum_{i=q}^p a_i^{(k)} - a_i^{(0)} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. $\left\| \sum_{i=q}^p a_i^{(0)} x_i \right\|$ ifadesine $a_i^{(k)}$ bir eklenip bir çıkartılırsa;

$$\left\| \sum_{i=q}^p a_i^{(0)} x_i - a_i^{(k)} x_i + a_i^{(k)} x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=q}^p (a_i^{(k)} - a_i^{(0)}) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=q}^p a_i^{(k)} x_i \right\|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

Bu durumda $\left\| \sum_{i=q}^p a_i^{(0)} x_i \right\| < \varepsilon$ dur. Bu ise $S = S(\zeta)$ tamlığını ispatlar.

($\Rightarrow$) (Şart gerektir.) :Kabul edelim ki $S = S(\zeta)$ tam olsun.

$(a_i)_i \in S(\zeta)$ de bir dizi olsun. $S(\zeta)$ tam olduğundan $(a_i)_i \rightarrow (a_i)_0 \in S(\zeta)$ dir.

$(a_i)_i$ bir Cauchy dizisi olduğu için her Cauchy dizisi sınırlı olacağından özel olarak

$|a_i| \leq 1$ seçebiliriz böylece $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ dizisi yakınsak olur. O halde E cümlesi sınırlıdır bu ise

bize $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisinin zayıf şartsız Cauchy oluşunu gösterir.

Teorem 3.2. X normlu bir uzay olsun. X tamdır $\Leftrightarrow X$ deki her $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ zayıf şartsız Cauchy serisi için $S = S(\zeta)$ tamdır.

İspat:

($\Rightarrow$) (Şart gerektir):Kabul edelim ki X tam olmasın. Bu takdirde X de yakınsak

olmayan fakat mutlak yakınsak olan bir $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi vardır öyleki $i \in \mathbb{N}$ için

$\|x_i\| < \frac{1}{i2^i}$ dir.

$\zeta' = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$ serisi $i \in \mathbb{N}$ için $z_{2i-1} = i x_i$, $z_{2i} = -i x_i$ olarak tanımlansın ζ' serisinin

tanımlanışı gereği zayıf şartsız Cauchy olduğu açıktır.

$(a_i)_i \in c_0$ dizisi $i \in \mathbb{N}$ için $a_{2i-1} = \frac{1}{2i}$, $a_{2i} = \frac{1}{2i}$ olarak tanımlansın. Bu takdirde $\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i$

yakınsak değildir. Dolayısıyla $(a_i)_i \notin S(\zeta')$ dir. Bu da bize $S = S(\zeta')$ tam olmadığını

verir. O halde ζ' serisi zayıf şartsız Cauchy olmasına rağmen $S = S(\zeta')$ tam değildir.

($\Leftarrow$) (Şart yeterdir) Şartın yeterliliği (Teorem 3.1.) den açıktır.

Eğer X Banach uzayında bir seri yakınsak ise bu seri zayıf yakınsaktır. Fakat bu durum genelde yakınsaklık için yanlıştır. Bir zayıf yakınsak $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi genelde bir zayıf şartsız Cauchy serisi değildir.

Biz şimdi bir X normlu uzayının $S = S_w(\zeta)$ cümleleri yoluyla karakterizasyonunu inceleyeceğiz.

Lemma 3.1. *Eğer X bir Banach uzay ve $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi X de bir seri ise bu takdirde*

$$\zeta \text{ bir zayıf şartsız Cauchy serisidir} \Leftrightarrow c_0 \subset S_w(\zeta)$$

İspat:

($\Rightarrow$) (Şart gerektir): X bir Banach uzay ve $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi zayıf şartsız Cauchy olduğu için

$\forall (t_i)_i \in c_0$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ yakınsaktır. Bu ise $(t_i)_i \in S_w(\zeta)$ olması anlamına gelir.

O halde $c_0 \subseteq S_w(\zeta)$ dir.

($\Leftarrow$) (Şart yeterdir) Kabul eldim ki $c_0 \subseteq S_w(\zeta)$ ve $(a_i)_i$ keyfi bir sıfır dizisi olsun. Bu takdirde $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ serisi zayıf yakınsaktır. $(i_k)_i$ pozitif tam sayıların artan bir dizisi ve

$M = \{i_k : k \in \mathbb{N}\}$ şeklinde tanımlı bir cümle olsun. $(b_i)_i$ dizisi

$$(b_i)_i = \begin{cases} a_i, & i \in M \\ 0, & i \notin M \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

Bu takdirde $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i_k} x_{i_k}$ serisi zayıf yakınsaktır ve $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi zayıf şarsız Cauchy dir.

Teorem 3.3. X bir Banach uzay ve X de bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun $S_w(\zeta)$ tamdır $\Leftrightarrow \zeta$ serisi zayıf şartsız Cauchy dir.

İspat:

($\Leftarrow$) (Şart yeterdir): Kabul edelim ki ζ serisi zayıf şartsız Cauchy dir. Biz ispat edeceğiz ki $S_w(\zeta)$ tamdır. $\{(a_i^{(k)})_i\}_k$ dizisi $(a_i^{(0)})_i \in \ell_{\infty}$ a yakınsak olacak şekilde $S_w(\zeta)$ de bir dizi ve $(z_k)_k$ dizisinde X de $\forall f \in X^*$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} f(x_i) = f(z_k) \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir dizi olsun.

E (3.1) de tanımlanan cümle olsun. E nin tanımı gereği $\forall x \in E$ için $\|x\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır.

$\forall \varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olacak şekilde $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\|(a_i^{(k)})_i - (a_i^{(0)})_i\| < \frac{\varepsilon}{3M}$ dir.

Böylece $i \in \mathbb{N}$ ve $k \geq k_0$ için $|a_i^{(k)} - a_i^{(0)}| < \frac{\varepsilon}{3M}$ dir. Bu ispat eder ki $m \geq 1$ için

$$\left\| \sum_{i=1}^m (a_i^{(k)} - a_i^{(0)}) x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.3)$$

dür ve $p > q \geq k_0$ ve $m \geq 1$ için $\left\| \sum_{i=1}^m (a_i^{(p)} - a_i^{(q)}) \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ diyebiliriz.

Dahası (3.2) gereğince $\|f\| = 1$ olacak şekilde ki $\forall f \in X^*$ ve $m \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^m (a_i^{(p)} - a_i^{(q)}) f(x_i) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

dir.

Burada $\|f_0\| = 1$ olacak şekilde $f_0 \in X^*$ vardır ve $\forall p > q \geq k_0$ için

$$\|z_p - z_q\| = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^{(p)} - a_i^{(q)}) f_0(x_i)$$

dir.

$$\sum_{i=1}^m (a_i^{(p)} - a_i^{(q)}) f_0(x_i) \leq \left\| \sum_{i=1}^m (a_i^{(p)} - a_i^{(q)}) x_i \right\| \leq \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{olduğu için} \quad \|z_p - z_q\| < \varepsilon \text{ olduğu açıktır.}$$

Bu durumda X de bir z_0 elemanı vardır öyleki $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = z_0$ dır. Bunun anlamı ise

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } k \geq k_1 \text{ olacak şekilde } \exists k_1 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \|z_k - z_0\| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ dır.}$$

Eğer $f \in X^*$ ve $\|f\| = 1$ ise (3.3) gereğince $m \in \mathbb{N}$ ve $k \geq k_0$ için

$$\left| \sum_{i=1}^m (a_i^{(0)} - a_i^{(k)}) f(x_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

dür. Eğer $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ ise bu takdirde $m \in \mathbb{N}$ için $\left| \sum_{i=1}^m a_i^{(0)} f(x_i) - f(z_0) \right|$ ifadesini

$f(z_k)$ ve $a_i^{(k)} f(x_i)$ terimlerini ekleyip çıkararak düzenleyelim.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^m a_i^{(0)} f(x_i) - f(z_0) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m a_i^{(0)} f(x_i) - f(z_0) + f(z_k) - f(z_k) + a_i^{(k)} f(x_i) - a_i^{(k)} f(x_i) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^m (a_i^{(0)} - a_i^{(k)}) f(x_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^m f(z_k) - f(z_0) \right| + \left| \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} f(x_i) - f(z_k) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} f(x_i) - f(z_k) \right| \end{aligned}$$

Buradan

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i^{(0)} f(x_i) - f(z_0) \right| < \frac{2\varepsilon}{3} + \left| \sum_{i=1}^m a_i^{(k)} f(x_i) - f(z_k) \right|$$

elde edilir.

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} f(x_i) = f(z_k)$ olduğundan ((3.1) den) $\forall \varepsilon > 0$ için $m \geq m_0$ olacak şekilde

$\exists m_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\left| \sum_{i=1}^m a_i^k f(x_i) - f(z_k) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ dür. O halde

$\left| \sum_{i=1}^m a_i^{(0)} f(x_i) - f(z_0) \right| < \varepsilon$ olduğu kolayca görülür.. Böylece ispat tamamlanır.

($\Rightarrow$) (Şart gerektir): (Teorem 3.1.) den açıktır.

Lemma 3.2. X normlu bir uzay olsun. Eğer $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi X de bir şartsız Cauchy serisi ise bu takdirde $S(\zeta) = S_w(\zeta)$ dir.

İspat:

Bir dizi yakınsak ise zayıf yakınsak olduğu için $S \subset S_w$ olduğu aşıkardır. Şimdi

$(a_i)_i \in S_w$ alalım $f \in X^*$ için $x \in X$ vardır öyleki $f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \rightarrow f(x)$ dir. ζ şartsız

Cauchy serisi olduğu için $g \in X^{**}$ vardır öyleki $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = g$ dir. Böylece $f \in X^*$ için

$f\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \rightarrow g(f)$ dir. Bu da ispat eder ki $g = x$ ve $(a_i)_i \in S$ dir. O halde $S_w \subset S$ dir.

İspat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4. Bir X normlu uzayı tamdır. $\Leftrightarrow X$ deki her $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ zayıf şartsız Cauchy serisi için $S_w(\zeta)$ tamdır.

İspat:

Kabul edelim ki X tam olmasın. Biz (Teorem 2.2.) nin ispatında mutlak yakınsak olan

bir $\zeta' = \sum_{i=1}^{\infty} z_i$ zayıf şartsız Cauchy serisi bulduk öyleki $c_0 \notin S(\zeta')$ idi dahası $S(\zeta')$ tam

değildi. O halde ζ' serisi zayıf şartsız Cauchy serisi olduğu için (Lemma 3.2.) gereğince $S(\zeta') = S_w(\zeta')$ diyebiliriz.

4. BÖLÜM

TAM VE BARRELLED NORMLU UZAYLARIN KARAKTERİZASYONU

Daha önceki bölümde geçen söz konusu uzaylar vasıtasıyla normlu bir uzaydaki bir serinin çeşitli yakınsaklık tiplerini incelendi. Aynı zamanda bu uzaylar vasıtasıyla bir normlu uzayın tamlığı karakterize edildi. Bu bölümde ise yukarıda belirtmiş olduğumuz çalışmaların bir sonucu olarak X in barreled bir uzay olması durumunda, uzayının tamlığı yeniden karakterize edildi ve S_W tamdır $\Leftrightarrow S_{*W} = \ell_\infty$ sonucuna ulaşıldı.

X normlu uzayında verilen $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi için biz sınırlı dizilerini kullanmak yerine reel sayıların keyfi dizilerini göz önünde bulundurarak dizilerin yeni uzaylarını elde edeceğiz.

1. $BS = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| < \infty \right\}$ (kısmi toplamalar dizisi sınırlı tüm diziler)

2. $LS = LS(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ serisini X de yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizilerin cümlesidir.

$$LS = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i \text{ } X \text{ de yakınsak} \right\}$$

3. $LS_W = LS_W(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ serisini X de zayıf yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizilerin cümlesidir.

$$LS_W = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i \text{ } X \text{ de zayıf yakınsak} \right\}$$

4. $LS_0 = LS_0(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ serisini X^{**} de $*$ zayıf yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizilerin cümlesidir.

$$LS_0 = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i \text{ } X^{**} \text{ da } * \text{zayıf yakınsak} \right\}$$

Bu dört uzayda

$$\|(a_i)_i\|_b = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$$

şeklinde tanımlı supremum normu ile donatılacak.

Burada $LS \subset LS_W \subset LS_0 \subset BS$, $S = LS \cap \ell_{\infty}$, $S_W = LS_W \cap \ell_{\infty}$ ve $S_0 = LS_0 \cap \ell_{\infty}$ olduğu açıktır.

5. X^* da bir seri $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ olsun.

$LS_{*W} = LS_{*W}(\zeta)$ uzayı $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$ $*$ zayıf yakınsak yapacak şekildeki $(a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizilerinin cümlesidir.

$$LS_{*W}(\zeta) = \left\{ (a_i)_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_i a_i x_i^* \text{ } X^* \text{ da } * \text{zayıf yakınsak} \right\}$$

Burada $LS(\zeta) \subset LS_W(\zeta) \subset LS_{*W}(\zeta)$ kapsamı açıktır.

Biz şimdi genelliği bozmadan $i \in \mathbb{N}$ ve $x_i \neq 0$ için X de $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serilerini göz önünde bulunduracağız.

Tamlık ve barrelled normlu uzayların karakterizasyonunu elde etmek için yukarıda tanımladığımız dizi uzaylarını kullanacağız.

Teorem 4.1. X normlu bir uzay olsun. Bu takdirde

- (i) Eğer $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ X de bir seri ise bu takdirde $BS(\zeta)$ ve $LS_0(\zeta)$ Banach uzayıdır.
- (ii) X tamdır $\Leftrightarrow X$ deki her ζ serisi için $LS(\zeta)$ tamdır.
- (iii) X tamdır $\Leftrightarrow X$ deki her ζ serisi için $LS_W(\zeta)$ tamdır.
- (iv) Eğer $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ X^* da bir seri ise bu takdirde $LS_{*W}(\zeta) \cap BS(\zeta)$ tamdır.

İspat:

- (i) İlk olarak $BS(\zeta)$ nin tam olduğunu ispatlamak istiyoruz. $k \in \mathbb{N}$ için $BS(\zeta)$ de bir Cauchy dizisi $a_k = (a_i^{(k)})_i$ olsun.

$j \in \mathbb{N}$ ve $p, q \in \mathbb{N}$ için

$$\|(a_j^p - a_j^q)x_j\| = \left\| \sum_{i=1}^j (a_i^p - a_i^q)x_i - \sum_{i=1}^{j-1} (a_i^p - a_i^q)x_i \right\| \leq 2\|a^p - a^q\|_b$$

yazabiliriz. Bu ispat eder ki $(a_j^n)_n$ bir Cauchy dizisidir ve öyle bir $a_j^0 \in \mathbb{R}$ vardır ki $j \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} a_j^n = a_j^0$ dır. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni p, q \geq n_0$ için $\|a^p - a^q\|_b < \varepsilon$ dur. O halde $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i^p x_i - \sum_{i=1}^n a_i^q x_i \right\| < \varepsilon$$

diyebiliriz. $q \rightarrow \infty$ giderken $\left\| \sum_{i=1}^n a_i^p x_i - \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i \right\| \leq \varepsilon$ elde edilir. Buradan $a^0 \in BS(\zeta)$ dir

ve $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = a^0$ dır. Bu ise bize $BS(\zeta)$ nin tamlığını ispat eder.

Şimdi de $LS_0(\zeta)$ nin tam olduğunu ispat etmek istiyoruz.

$(a^k)_k$ dizisi $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = a^0 \in BS(\zeta)$ olacak şekilde $LS_0(\zeta)$ de bir dizi olsun. $k \in \mathbb{N}$

için $z^{**} \in X^{**}$ vardır öyleki $*w \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i = z_k^{**}$ dır.

Cauchy şartı gereği $\varepsilon > 0$ için $p, q \geq n_0$ olacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$\|a^p - a^q\|_b < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Biz $x^* \in S_{X^*}$ öyle seçelim ki

$$\|z_p^{**} - z_q^{**}\| - \frac{\varepsilon}{2} < |x^*(z_p^{**} - z_q^{**})| \quad (4.1)$$

olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| \sum_{i=1}^n (a_i^p - a_i^q) x^*(x_i) \right| \leq \|a^p - a^q\|_b < \frac{\varepsilon}{2}$$

yazabiliriz. Dahası (4.1) de göz önüne alınırsa

$$\left| \sum_{i=1}^n (a_i^p - a_i^q) x^*(x_i) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad \|z_p^* - z_q^*\| \leq \varepsilon$$

dur. Bu ise ispat eder ki $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k^{**} = z_0^{**}$ olacak şekilde z_0^{**} vardır.

$\varepsilon > 0$ olsun. Sabit bir $p \in \mathbb{N}$ için $\|a^p - a^q\|_b < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $\|z_p^{**} - z_0^{**}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ yazabiliriz. $x^* \in X^*$

için $n \geq n_1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i^p x^*(x_i) - x^*(z_p^{**}) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dür. $n \geq n_1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n (a_i^0) x^*(x_i) - x^*(z_0^{**}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n a_i^0 x^*(x_i) - x^*(z_0^{**}) - \sum_{i=1}^n a_i^p x^*(x_i) + \sum_{i=1}^n a_i^p x^*(x_i) - x^*(z_p^{**}) + x^*(z_p^{**}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n a_i^0 x^*(x_i) - \sum_{i=1}^n a_i^p x^*(x_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^n a_i^p x^*(x_i) - x^*(z_p^{**}) \right| + |x^*(z_p^{**}) - x^*(z_0^{**})| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \varepsilon$$

elde ederiz ki bu ise ispatı tamamlar.

(ii) ($\Rightarrow$) (Şart gerekdir): X de bir seri ζ ve $(a^k)_k$ da $\lim_{k \rightarrow \infty} a^k = a^0 \in BS(\zeta)$ olacak

şekilde $LS(\zeta)$ de bir dizi olsun. $k \in \mathbb{N}$ için $z_k \in X$ vardır öyleki $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i = z_k$ dir.

Diğer taraftan $z_0^{**} = {}^*w \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0 x_i$ olacak şekilde $z_0^{**} \in X^{**}$ vardır. Böylece X tam

olduğundan öyle bir $z_0 \in X$ vardır ki $\lim_k z_k = z_0^{**} = z_0$ dir.

$\varepsilon > 0$ için $p \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\|a^p - a^0\| < \frac{\varepsilon}{3}$ ve $\|z_p - z_0\| < \frac{\varepsilon}{3}$ dir. $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i = z_k$ olduğu

için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\left\| \sum_{i=1}^n a_i^p x_i - z_p \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$ dir. Böylece $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i - z_0 \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i - z_0 - \sum_{i=1}^n a_i^p x_i + \sum_{i=1}^n a_i^p x_i - z_p + z_p \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i - \sum_{i=1}^n a_i^p x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n a_i^p x_i - z_p \right\| + \|z_p - z_0\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

dur. Bu ise şartın gerekliliğini ispat eder.

($\Leftarrow$) (Şart yeterdir): Kabul edelim ki X tam olmasın, bu takdirde X de mutlak yakınsak

olan fakat yakınsak olmayan bir $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serisi vardır ve öyleki $i \in \mathbb{N}$ için $\|x_i\| < \frac{1}{i2^i}$

dir. $n \in \mathbb{N}$ için $a^n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizisi

$$a^n(i) = \begin{cases} 1, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$i \in \mathbb{N}$ için $a^0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizisi $a^0(i) = 1$ olacak şekilde tanımlansın. $n \in \mathbb{N}$ için biz $a^0 \in BS(\zeta) \setminus LS(\zeta)$ ve $a^n \in LS(\zeta)$ diyebiliriz. Buradan açıktır ki $\|a^n - a^0\|_b < \frac{1}{n}$ dir.

Böylece $BS(\zeta)$ de $\lim_n a^n = a^0$ dir.

(iii) $(\Rightarrow)$ (Şart gerektir): ζ X de bir seri ve $(a^k)_k$ dizisi $LS_W(\zeta)$ de $\lim_k a^k = a^0 \in BS(\zeta)$ olacak şekilde bir dizi olsun.

$(a^k)_k \in LS_W(\zeta)$ ise $k \in \mathbb{N}$ için $z_k = w \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i$ ve $z_0^{**} = w \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0 x_i \in X^{**}$ dir bu taktirde

$\lim_k z_k = z_0^{**}$ dir.

X tam olduğundan X de öyle bir z_0 elemanı vardır ki $z_0 = z_0^{**}$ dir. O halde

$w \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0 x_i = z_0$ olduğu açıktır. Böylece $a^0 \in LS_W(\zeta)$ dir.

$(\Leftarrow)$ (Şart yeterdir): Kabul edelim ki X tam olmasın ζ serisi ve $(a^n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a^0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dizileri (ii) deki gibi seçilmiş olsun. Bu taktirde $\lim_n a^n = a^0 \in BS(\zeta)$ de olacak şekilde $(a^n)_n \in LS_W(\zeta)$ dir fakat $a^0 \notin LS_W(\zeta)$ dir.

(iv) X^* da bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ ve $(a^k)_k$ da $\lim_k a^k = a^0 \in BS(\zeta)$ olacak şekilde $LS_{*W}(\zeta) \cap BS(\zeta)$ de bir dizi olsun.

$p, q \geq n_0$ için $\|a^p - a^q\|_b < \frac{\varepsilon}{2}$ dir ve

$$\left| \|z_p^* - z_q^*\| - \frac{\varepsilon}{2} \right| \leq |z_p^* - z_q^*| \quad (4.2)$$

olacak şekilde $x \in S_X$ vardır öyleki buradan

$$(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^p - a_i^q) x_i^*(x)$$

diyebiliriz. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=1}^n (a_i^p - a_i^q) x_i^*(x) \leq \|a^p - a^q\|_b < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.3)$$

diyebiliriz. Öyleki (4.2) ve (4.3) göz önüne alındığında $p, q \geq n_0$ için $\|z_p^* - z_q^*\| < \varepsilon$ kalır.

Böylece X^* da öyle bir z_0^* vardır ki $\lim_k z_k^* = z_0^*$ dır.

$z_0^* = {}^*w \sum_{i=1}^{\infty} a_i^0 x_i^*$ doğruluğunu gösterebiliriz.

$\varepsilon > 0$ için sabit bir $p \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki $\|a^p - a^0\| < \frac{\varepsilon}{3}$ dür ve $\|z_p^* - z_0^*\| < \frac{\varepsilon}{3}$ dür.

$x \in S_X$ için $n \geq n_0$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\left| \sum_{i=1}^n a_i^p x_i^*(x) - z_p^*(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$ dür.

Nihayetinde $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i^*(x) - z_0^*(x) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i^*(x) - z_0^*(x) - \sum_{i=1}^n a_i^p x_i^*(x) + \sum_{i=1}^n a_i^p x_i^*(x) - z_p^*(x) + z_p^*(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n a_i^0 x_i^*(x) - \sum_{i=1}^n a_i^p x_i^*(x) \right| + \left| \sum_{i=1}^n a_i^p x_i^*(x) - z_p^*(x) \right| + |z_p^*(x) - z_0^*(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2. X bir normlu uzay olsun ve X^* da bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ olsun.

1) ζ zayıf şartsız Cauchy serisidir.

$$2) S_{*W}(\zeta) = \ell_{\infty}.$$

$$3) \forall x \in X \text{ için } \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x)| < +\infty$$

1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) mevcuttur. X^* daki her $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ serisi için bu üç şart denktir $\Leftrightarrow X$ barreled normlu uzaydır.

İspat: 1) $\Rightarrow$ 2). Eğer $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ zayıf şartsız Cauchy serisi ve $(a_i)_i \in \ell_{\infty}$ da bir dizi ise

bu taktirde $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$ serisi zayıf şartsız Cauchy dir. X^* üzerinde ki $*$ zayıf topoloji için

$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^* \right)_n$ dizisi bir Cauchy dizisidir öyleki $\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^* \right)_n$ sınırlıdır. Dolayısıyla $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*$

serisi $*$ zayıf yakınsaktır.

2) $\Rightarrow$ 3) $\forall x \in X$ için $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x)$ serisini göz önüne alalım. $\forall (a_i)_i \in c_0$ dizisi için

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i^*(x)$ yakınsaktır. Böylece $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x)| < +\infty$ elde edilir.

Kabul edelim ki X bir barreled normlu uzay ve X^* da bir seri 3) şartını sağlayacak şekilde $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ olsun. Biz

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i^* : m \in \mathbb{N}, |\alpha_i| \leq 1, i \in \{1, \dots, m\} \right\}$$

cümlesini göz önüne alalım. E cümlesinin noktasal sınırlı olduğu açıktır ve dahası X^*

üzerinde tarif edilen topolojik norma göre sınırlıdır Bu ise $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ serisinin zayıf şartsız

Cauchy olduğunu ispat eder.

Eğer X barreled değil ise bu taktirde sınırlı olmayan fakat $*$ zayıf sınırlı olan bir $F \subseteq X^*$ cümlesi vardır. $i \in \mathbb{N}$ için $\|y_i^*\| > 2^{2i}$ olacak şekilde $y_i^* \in F$ vardır. $i \in \mathbb{N}$ için

$x_i^* = \frac{1}{2^i} y_i^*$ yazabiliriz. $\forall x \in X$ için $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i^*(x)| < +\infty$ olduğu açıktır. Fakat $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$\|x_i^*\| > 2^i$ olduğu için $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x_i^*$ serisi yakınsak değildir ve $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^*$ serisi bir zayıf şartsız Cauchy değildir. Bu ise tamlığı ispat eder.

Uyarı 4.2. Eğer X bir barrelled normlu uzay ise bu taktirde S_{*W} tamdır $\Leftrightarrow S_{*W} = \ell_{\infty}$ dir.

Uyarı 4.3. (Teorem 4.2.) nin ispatından da anlaşılacağı gibi X barrelled normlu uzayıdır $\Leftrightarrow X^*$ da zayıf şartsız Cauchy serilerinin cümlesi * zayıf şartsız Cauchy serilerinin cümlesi ile örtüşür.

Eğer X bir Banach uzay ise bu taktirde X^* da bir zayıf şartsız Cauchy serisi vardır öyleki şartsız yakınsak değildir $\Leftrightarrow X^*$, ℓ_{∞} u ihtiva ediyorsa.

Uyarı 4.4. X normlu uzayında herhangi bir sabit seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. Biz ispat etmek istiyoruz ki

$$T_0 : LS_0(\zeta) \rightarrow X^{**}, \quad T_0((a_i)_i) = {}^*w \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$$

şeklinde tanımlı T_0 lineer dönüşümü sürekli ve $\|T_0\| = 1$ dir.

$(a_i)_i \in LS_0(\zeta)$ ve $T_0((a_i)_i) = {}^*w \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = z_0^{**}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|z_0^{**}\| - \varepsilon < x^*(z_0^{**})$

olacak şekilde bir $x \in X^*$ vardır. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{i=1}^n a_i x^*(x_i) \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \|(a_i)_i\|_b \quad \text{ve} \quad \|T_0\| \leq 1$$

elde ederiz. Diğer taraftan $\|a^0\|_b = 1$ olacak şekilde $a^0 = \frac{1}{\|x_1\|} e_1 \in LS_0(\zeta)$ vardır öyleki

$\|T_0(a^0)\| = 1$ dir.

Eğer $T = T_0 \Big|_{LS(\zeta)}$ ve $T' = T_0 \Big|_{LS_W(\zeta)}$ ise bu taktirde $\|T\| = \|T'\| = 1$ dir.

Uyarı 4.5. Biz bir X Banach uzayını göz önüne alalım ve $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| < \infty$ olacak

şekilde X de bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. Bu taktirde $(a_i)_i \in c_0$ da alınan her monoton

dizi için $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ nin yakınsaklığını doğrulamak için $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| < \infty$ olduğunu

göstermemiz yeterlidir.

Eğer $\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \right)_n$ serisi sınırsız ise

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_k} x_i \right\| > 1,$$

$k \geq 1$ ve $a_i = \frac{1}{k+1}$, $n_k + 1 \leq i \leq n_{k+1}$ için

$$\left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i \right\| > (k+1)^2 + (k+1) \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_k x_k \right\| \quad (4.4)$$

olacak şekilde $(n_k)_k \in \mathbb{N}$ de ve $(a_i)_i \in c_0$ da iki dizi vardır.

Buradan

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{k+1} x_i \right\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\| \geq \frac{1}{k+1} \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i \right\|$$

$$(k+1) \left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| + (k+1) \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} x_i \right\|$$

(4.4) den dolayı

$$(k+1) \left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| + (k+1) \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\| > (k+1)^2 + (k+1) \left\| \sum_{i=1}^{n_k} a_i x_i \right\|$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_{k+1}} a_i x_i \right\| > (k+1)$$

elde edilir.

Bu uyarı $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\| < \infty$ olacak şekildeki $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ serilerinin karakterizasyonunu verir.

Teorem 4.2. X normlu uzayında bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun.

(a) Aşağıdaki şartlar denktir.

$$(1) \inf_i \|x_i\| > 0$$

$$(2) LS(\zeta) = S(\zeta)$$

$$(3) S(\zeta) \subset c_0$$

$$(4) I: (S(\zeta), \|\cdot\|_b) \rightarrow (S(\zeta), \|\cdot\|_{\infty}) \text{ özdeş dönüşümü sürekli.}$$

(b) Aşağıdaki şartlar denktir.

$$(1) LS_w(\zeta) = S_w(\zeta)$$

$$(2) \inf_i \|x_i\| > 0$$

$$(3) I: (S_w(\zeta), \|\cdot\|_b) \rightarrow (S_w(\zeta), \|\cdot\|_{\infty}) \text{ özdeş dönüşümü sürekli.}$$

Ayrıca $S_W(\zeta)$ ve $LS_W(\zeta)$ uzaylarının yerine $S_0(\zeta)$ ve $LS_0(\zeta)$ uzayları alındığında da bu üç şart denktir.

İspat: Biz yalnızca (a) nın şartlarının denkliğini gösterelim.(b) deki şartların denkliği benzer düşünce ile gösterilebilir. İlk olarak (1) e denk olan şartları gösterelim.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\alpha = \inf_i \|x_i\| > 0$ ve $(a_i)_i \in LS(\zeta)$ olsun. Burada $0 \leq \frac{1}{\alpha} \|a_i x_i\|$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_i x_i\| = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $(a_i)_i \in S(\zeta)$ dir.

Tersine olarak eğer $\inf_i \|x_i\| = 0$ ise bu taktirde $\mathbb{N}$ de bir $(n_j)_j$ artan dizisi vardır öyleki

$\|x_{n_j}\| < \frac{1}{2^j}$ dir. Ayrıca $(a_i)_i$ dizisi

$$(a_i)_i = \begin{cases} j, & i = n_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $(a_i)_i \in LS(\zeta) \setminus S(\zeta)$ dir. Yani $(a_i)_i$ dizisi ζ serisini yakınsak yaptığı için $LS_0(\zeta)$ nin elemanı fakat sınırlı olmadığı için $S(\zeta)$ nin elemanı değildir.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Eğer $\alpha = \inf_i \|x_i\|$ ve $(a_i)_i \in S(\zeta)$ ise bu taktirde $(a_i)_i \in c_0$ dir.

Tersine olarak eğer $\inf_i \|x_i\| = 0$ ise bu taktirde $\mathbb{N}$ de $\|x_{n_j}\| < \frac{1}{2^j}$ olacak şekilde artan bir

$(n_j)_j$ dizisi vardır. $(a_i)_i$ dizisi ise $j \in \mathbb{N}$ için

$$(a_i)_i = \begin{cases} 1, & i = n_j \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Buradan $(a_i)_i \in S(\zeta) \setminus c_0$ olduğu açıktır.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) $\alpha = \inf_i \|x_i\| > 0$ olsun. Biz biliyoruz ki $LS(\zeta) \subset S(\zeta)$ dir. O halde

$(a_i)_i \in S(\zeta)$ olsun. $\varepsilon > 0$ için $j \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\|(a_i)_i\|_\infty - \varepsilon < |a_j| \leq \frac{1}{\alpha} \|a_j x_j\| \leq \frac{2}{\alpha} \|(a_i)_i\|_b$$

dir.

Tersine olarak $(a_i)_i \in S(\zeta)$ için $k > 0$ vardır öyleki $\|(a_i)_i\|_\infty \leq k \leq \|(a_i)_i\|_b$ dir.

$\forall j \in \mathbb{N}$ için biz $\|e_j\|_\infty = 1 \leq k \|e_j\|_b = k \|x_j\|$ yazabiliriz. Öyleki $\inf_i \|x_i\| \geq \frac{1}{k}$ dır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.3. X normlu uzayında bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun.

$I: (S(\zeta), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (S(\zeta), \|\cdot\|_b)$ özdeş dönüşümü sürekli $\Leftrightarrow \zeta$ serisi bir zayıf şartsız

Cauchy serisidir.

Ayrıca bu denklik $S(\zeta)$ uzayı yerine $S_w(\zeta)$ ve $S_0(\zeta)$ uzayları alınması durumunda da doğrudur.

İspat: $E = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : n \in \mathbb{N}, |\alpha_i| \leq 1, i \in \{1, \dots, n\} \right\}$ ve $(a_i)_i \in S(\zeta)$ için

$$\|(a_i)_i\|_b \leq k \|(a_i)_i\|_\infty$$

olacak şekilde $k > 0$ olsun. $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in E$ olsun ve $(a_i)_i$ dizisi

$$(a_i)_i = \begin{cases} \alpha_i, & i \leq n \\ 0, & i > n \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

O halde $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \right\| \leq \|(a_i)_i\|_b \leq k \|(a_i)_i\|_\infty \leq k$ yazabiliriz. Bu ise bize ζ serisinin bir

zayıf şartsız Cauchy serisi olduğunu verir.

Tersine olarak $x \in E$ için $\|x\| < H$ olacak şekilde $H > 0$ vardır. $(a_i)_i \in S(\zeta)$ olsun. Bu

taktirde $n \in \mathbb{N}$ için $\left\| \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\|(a_i)_i\|_\infty} x_i \right\| \leq H$ dır. Burada $\|(a_i)_i\|_b \leq H \|(a_i)_i\|_\infty$ elde edilir. Bu

ise ispatı tamamlar.

Sonuç 4.1. Bir X normlu uzayında bir seri $\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun.

(a) Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) $S(\zeta)$ de $\| \cdot \|_{\infty}$ ve $\| \cdot \|_b$ normları denktir.

(2) $S(\zeta) = LS_w(\zeta) = c_0$.

(3) ζ bir zayıf şartsız Cauchy serisidir ve $\inf_i \|x_i\| > 0$ dır.

(b) Aşağıdaki şartlar denktir.

(1) $S_w(\zeta)$ de $\| \cdot \|_{\infty}$ ve $\| \cdot \|_b$ normları denktir.

(2) $S_w(\zeta) = LS_w(\zeta)$

(3) ζ bir zayıf şartsız Cauchy serisidir ve $\inf_i \|x_i\| > 0$ dır.

Bu denklikler ayrıca $S_w(\zeta)$ nin yerine $S_0(\zeta)$ ve $LS_w(\zeta)$ nin $LS_0(\zeta)$ uzaylarının getirilmesi halinde de geçerlidir.

5. BÖLÜM

ZAYIF ŞARTSIZ CAUCHY SERİSİ VE CESÁRO TOPLANABİLİRLİK

X bir normlu uzay olsun. Üçüncü ve dördüncü bölümde X normlu uzayının tamlığını X deki zayıf şartsız Cauchy serilerinin yakınsaklığı, zayıf yakınsaklığı ve *zayıf yakınsaklığı göz önünde bulundurulmak suretiyle karakterize edildi. Hatta bir X normlu uzayının Barrelled olması durumunda X normlu uzayı ve X^* dual uzayının tamlığı karkterize edildi. Bu bölümde ise Cesáro toplanabilme metodunu kullanarak bir X normlu uzayının tamlığını yeniden karakterize edeceğiz. Bunun için faydalanacağımız Cesáro toplanabilme metodunu hatırlatalım. Bir topolojik vektör uzayında bir seri $\zeta = \sum_i x_i$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için ζ serisinin kısmi toplamlar dizisi

$s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ olmak üzere eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(s_1 + \dots + s_n) = x_0$ ise ζ serisi x_0 a Cesáro yakınsaktır denir. O halde $\zeta = \sum_i x_i$ serisi x_0 a Cesáro yakınsak ise $C - \sum_i x_i = x_0$ şeklinde gösterilir.

Bir X Banach uzayında bir seri $\sum_i x_i$ olsun ve supremum normu ile donatılsın. Bu taktirde

$$S_C(\sum_i x_i) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i x_i \text{ Cesáro yakınsak} \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzay $\sum_i x_i$ serisinin *Cesáro yakınsaklık uzayı* olarak adlandırılır.

Şimdi vereceğimiz teorem ile $S_C(\sum_i x_i)$ uzayının tamlığını karakterize edeceğiz.

Teorem 5.1. *Aşağıdaki şartlar denktir:*

- 1) $\sum_i x_i$ bir zayıf şartsız Cauchy serisidir.
- 2) $S_c(\sum_i x_i)$ bir tam uzaydır.
- 3) $c_0 \subseteq S_c$.

İspat: 1) $\Rightarrow$ 2) $\sum_i x_i$ bir zayıf şartsız Cauchy serisi ve

$$H = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : |a_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

olsun. $(a^n)_n \in S_c(\sum_i x_i)$ de bir Cauchy dizisi olsun. $(a^n)_n \in \ell_\infty$ ve ℓ_∞ tam olduğundan

$\lim_n a^n = a^0 \in \ell_\infty$ olacak şekilde $a^0 \in \ell_\infty$ da bir eleman mevcuttur. Biz ispat edeceğimiz ki $a^0 \in S_c(\sum_i x_i)$ dir.

Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}$ için S_k^m k ıncı kısmi toplamlar dizisi olmak üzere

$S_k^m = \sum_{i=1}^k a_i^m x_i$ ve benzer olarak $S_k^0 = \sum_{i=1}^k a_i^0 x_i$ dir. Bu ise $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^0 \right)_n$ nin bir Cauchy dizi

olduğunu ispat etmek için yeterlidir.

$\|a^0 - a^{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{5H}$ olacak şekilde $m_0 \in \mathbb{N}$ olsun.

$S_k^m \in S_c(\sum_i x_i)$ olduğu için S_k^m Cesáro yakınsak olup aynı zamanda Cauchy dizisidir. O

halde $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q \geq n_0$ için

$$\left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^{m_0} - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^{m_0} \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. $j \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^0 - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^0 \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^0 - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^0 - \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^{m_0} + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^{m_0} - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^{m_0} + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^{m_0} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (s_i^0 - s_i^{m_0}) \right\| + \left\| \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q (s_i^0 - s_i^{m_0}) \right\| + \left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^{m_0} - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^{m_0} \right\| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\|a^0 - a^{m_0}\| < \frac{\varepsilon}{5H}$ olduğu için $\frac{5H}{\varepsilon} \|a^0 - a^{m_0}\| < 1$ dir. H nin tanımı gereği $j \in \mathbb{N}$ için

$\left\| \sum_{i=1}^j \frac{5H}{\varepsilon} (a_i^0 - a_i^{m_0}) x_i \right\| \leq H$ dir. Böylece $\|S_j^0 - S_j^{m_0}\| = \left\| \sum_{i=1}^j (a_i^0 - a_i^{m_0}) x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{5}$ dir. Dolayısıyla

$\left\| \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p s_i^0 - \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q s_i^0 \right\| < \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i^0 \right)_n$ dizisinin bir Cauchy dizisi

olduğunu doğrular.

2) $\Rightarrow$ 3) olduğu açıktır.

3) $\Rightarrow$ 1) ispat etmek için olmayan ergi metodunu kullanalım.

$\sum_i x_i$ serisi zayıf şartsız Cauchy olmasın. Bu taktirde (Tanım 3.1.) gereği $f \in X^*$ vardır

öyleki $\sum_i |f(x_i)| = \infty$ dur.

Tümevarımsal olarak biz $\sum_i \alpha_i f(x_i) = \infty$ ve $\alpha_i f(x_i) \geq 0$ olmak üzere $(\alpha_i)_i \in c_0$ da bir

dizi inşa edeceğiz. Bu taktirde $C - \sum_i \alpha_i f(x_i) = \infty$ elde edeceğiz ki bu ise bir çelişkidir.

$m_1 \sum_{i=1}^{m_1} |f(x_i)| > 2.2$ olacak şekilde seçilsin. $(\alpha_i)_i$ dizisini $i \in \{1, \dots, m_1\}$ için

$$(\alpha_i)_i = \begin{cases} \frac{1}{2}, & f(x_i) \geq 0 \\ -\frac{1}{2}, & f(x_i) < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Buradan $i \in \{1, \dots, m_1\}$ için $\alpha_i f(x_i) \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i f(x_i) > 2$ elde edilir.

$m_2 > m_1$ $\sum_{i=m_1+1}^{m_2} |f(x_i)| > 2^2 \cdot 2^2$ olacak şekilde seçilsin.

$(\alpha_i)_i$ dizisini $i \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}$ için

$$(\alpha_i)_i = \begin{cases} \frac{1}{2^2}, & f(x_i) \geq 0 \\ -\frac{1}{2^2}, & f(x_i) < 0 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

Benzer olarak $i \in \{m_1 + 1, \dots, m_2\}$ için $\alpha_i f(x_i) \geq 0$ ve $\sum_{i=m_1+1}^{m_2} \alpha_i f(x_i) > 2^2$ elde edilir.

Bu şekilde ard arda işlemler devam ettirilmek suretiyle yukarıda özellikleri verilen söz konusu $(\alpha_i)_i$ dizisi kolayca elde edilir. Bu ise tamlığın ispatıdır.

Uyarı 5.1. X bir Banach uzayı olsun ve X de bir seri $\zeta = \sum_i x_i$ olsun. Aşağıdaki

ifadeler denktir.

1) $\sum_i x_i$ bir zayıf şartsız Cauchy serisidir.

2) $S(\sum_i x_i) = S(\zeta)$ bir tam uzaydır.

3) $c_0 \subseteq S(\zeta)$.

4) $S_c(\sum_i x_i) = S_c(\zeta)$ bir tam uzaydır.

5) $c_0 \subseteq S_c(\zeta)$

6) $\forall f \in X^*$ için $\sum_i |f(x_i)|$ Cesáro yakınsaktır.

İspat: 1), 2), 3) ün denkliği Bölüm iki de görülebilir. Diğer özellikler ise (Teorem 5.2) in sonucudur.

Uyarı 5.2. X normlu bir uzay ve X de bir seri $\sum_i x_i$ olsun. Aşağıdaki iki uzayı dikkate alacak olursak:

$$S^C(\sum_i x_i) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i x_i \text{ Cauchy serisi} \right\},$$

$$S_C^C(\sum_i x_i) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i x_i \text{ Cesáro Cauchy serisi} \right\}.$$

Buradan şu sonuçlar çıkartılabilir:

A. $\sum_i x_i$ zayıf şartsız Cauchy $\Leftrightarrow S^C(\sum_i x_i)$ tamdır $\Leftrightarrow c_0 \subseteq S^C(\sum_i x_i)$.

B. $\sum_i x_i$ zayıf şartsız Cauchy $\Leftrightarrow S_C^C(\sum_i x_i)$ tamdır $\Leftrightarrow c_0 \subseteq S_C^C(\sum_i x_i)$.

Şimdi $S_C(\sum_i x_i)$ uzayını kullanarak bir normlu uzayın tamlığını karakterize edelim.

Teorem 5.2. X bir normlu uzay olsun. X bir Banach uzayır $\Leftrightarrow \sum_i x_i$ herhangi bir zayıf şartsız Cauchy serisi için $S_C(\sum_i x_i)$ tamdır.

İspat: (Teorem 5.1) den şartın gerekliliği açıktır. Tersine olarak eğer X bir tam uzay değil ise $i \in \mathbb{N}$ için $\|x_i\| < \frac{1}{i2^i}$ olacak şekilde X de bir seri $\sum_i x_i$ vardır ve $\sum_i x_i = x^{**} \in X^{**}$ dir. O halde $C - \sum_i x_i = x^{**}$ olduğu açıktır.

$i \in \mathbb{N}$ için $\sum_i z_i$ serisini $z_{2i-1} = ix_i$ ve $z_{2i} = -ix_i$ olarak tanımlayalım. $\sum_i z_i$ serisi tanımlanışı gereği bir zayıf şartsız Cauchy serisidir. $i \in \mathbb{N}$ için $(a_i)_i \in c_0$ da bir diziyi $a_{2i-1} = \frac{1}{2i}$ ve $a_{2i} = -\frac{1}{2i}$ olarak tanımlayalım. Biz $C - \sum_i a_i z_i \in X^{**} \setminus X$ elde ederiz

öyleki bu ise bize $S_C(\sum_i z_i)$ uzayının tam olmadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

X normlu uzayında bir $\sum_i x_i$ serisi supremum normu ile donatılsın. Bu taktirde

$$S_{WC}(\sum_i x_i) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i x_i \text{ } w\text{-Cesáro yakınsak} \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzay $\sum_i x_i$ serisinin zayıf Cesaró yakınsaklık uzayı olarak adlandırılır.

Biz şimdi zayıf Cesaró yakınsaklık uzayını kullanarak bir X normlu uzayını karakterize eden teoremi vereceğiz.

Teorem 5.3. *Bir X Banach uzayında bir seri $\sum_i x_i$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

1) $\sum_i x_i$ zayıf şartsız Cauchy serisidir.

2) $S_{WC}(\sum_i x_i)$ bir tam uzaydır.

3) $c_0 \subseteq S_{WC}(\sum_i x_i)$.

İspat: 1) $\Rightarrow$ 2) $\sum_i x_i$ bir zayıf şartsız Cauchy serisi ve

$$H = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| : n \in \mathbb{N}, |a_i| \leq 1 \right\}$$

olsun. $(a^k)_k$ dizisi $\lim_k a^k = a^0 \in \ell_\infty$ olacak şekilde $S_{WC}(\sum_i x_i)$ de bir dizi olsun. Biz ispat edeceğiz ki $a^0 \in S_{WC}(\sum_i x_i)$ dir.

$a^k = (a_i^k)_i$ ve $k \in \mathbb{N}$ olacak şekilde $z_k = wc \sum_i a_i^k x_i$ tanımlansın. $(z_k)_k$ nın bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek istiyoruz. $(a^k)_k$ dizisi $S_{WC}(\sum_i x_i)$ uzayında a^0 a yakınsak

olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $k \geq k_0$ olacak şekilde $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\|a^k - a^0\| < \frac{\varepsilon}{5H}$ dır. $p, q \geq k_0$ olacak şekilde $p, q \in \mathbb{N}$ ve $f_0 \in S_{X^*}$ vardır öyleki $\|z^p - z^q\| = f_0(z_p - z_q) = C - \sum_i (a_i^p - a_i^q) f_0(x_i)$ dir. Biz kabul edelim ki $\|a^p - a^q\| \neq 0$ olsun (eğer $a^0 \in S_C(\sum_i x_i)$ ise $(a_k)_k$ nın sabit bir alt dizisi vardır) ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{\|a^p - a^q\|} \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (m-i+1)(a_i^p - a_i^q) x_i \right\| \leq H$$

olduğu açıktır. Dahası $p, q \geq k_0$ için $\|z^p - z^q\| < \frac{2\varepsilon}{5}$ dir. Bu ise $(z_k)_k$ nın bir Cauchy dizisi olduğunu ispat eder.

$z_0 = \lim_k z_k$ olsun. Biz ispat edeceğiz ki $z_0 = wc \sum_i a_i^0 x_i$ dir. $k \in \mathbb{N}$ için $\|z_k - z_0\| < \frac{\varepsilon}{5}$ ve

$\|a^k - a^0\| < \frac{\varepsilon}{5H}$ göz önüne alalım. $f \in B_{X^*}$ ve $m \geq m_1$ olacak şekilde $m_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (m-i+1) a_i^k f(x_i) - f(z_k) \right\| < \frac{\varepsilon}{5}$$

dir. Bu taktirde

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ((m-i+1) a_i^0 f(x_i)) - f(z_0) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ((m-i+1) a_i^0 f(x_i)) - f(z_0) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ((m-i+1) a_i^k f(x_i)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ((m-i+1) a_i^k f(x_i)) - f(z_k) + f(z_k) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (m-i+1)(a_i^0 - a_i^k) f(x_i) \right\| + \left\| \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m ((m-i+1) a_i^k f(x_i)) - f(z_k) \right\| + \\ & \quad \|f(z_k) - f(z_0)\| \\ &< \frac{3\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

dir. Böylece $a^0 \in S_{WC}(\sum_i x_i)$ elde edilir.

2) $\Rightarrow$ 3) olduğu açıktır.

3) $\Rightarrow$ 1) in ispatı (Teorem5.1) in ispatına benzer bir yol izlenerek elde edilir.

Şimdi de $S_{WC}(\sum_i x_i)$ uzayının tamlığını karakterize eden teoremi verelim.

Teorem 5.4. *X bir normlu uzay olsun. X Banach uzayıdır $\Leftrightarrow$ X deki herhangi bir $\sum_i x_i$ zayıf şartsız Cauchy serisi için $S_{WC}(\sum_i x_i)$ uzayı tamdır.*

İspat:(Teorem5.3)den dolayı şartın gerekliliği açıktır . Şartın yeterliliğini ispat etmek için ise (Teorem5.2.)deki notasyonlar göz önünde bulundurulmak suretiyle $C - \sum_i a_i f(z_i) = x^{**}(f)$ olduğu için $(a_i)_i \notin S_{WC}(\sum_i z_i)$ dizisi elde etmek mümkündür. Bu ise ispatı tamamlar.

$(X^*, \sigma(X^*, X))$ dual uzayında bir seriyi yakınsak uzaylar ile birlikte ele alarak çalışmalarımıza devam edeceğiz.

X bir normlu uzay ve X^* da bir seri $\sum_i f_i$ olsun. Supremum normu ile donatılan

$$S_{W^*C}(\sum_i f_i) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i f_i \text{ *wCesáro yakınsak} \right\}$$

şeklinde tanımlı uzay $\sum_i f_i$ serisinin *zayıf Cesáro yakınsaklık uzayı olarak adlandırılır.

Bölüm üçde ki çalışmalarımızı hatırlayacak olursak *zayıf yakınsaklık uzayını aşağıdaki gibi tanımlamıştık

$$S_{W^*}(\sum_i f_i) = \left\{ (a_i)_i \in \ell_\infty : \sum_i a_i f_i \text{ *zayıf yakınsaklık} \right\}.$$

Burada

$$S_{W^*}(\sum_i f_i) \subset S_{W^*C}(\sum_i f_i)$$

kapsamı mevcuttur.[2,teorem 4.1.]

Teorem 5.5. X normlu bir uzay ve X^* da bir seri $\sum_i f_i$ olsun.

1) $\sum_i f_i$ zayıf şartsız Cauchy serisidir.

2) $S_{w^*C}(\sum_i f_i) = \ell_\infty$.

3) Eğer $x \in X$ ve $M \subseteq \mathbb{N}$ ise bu taktirde $\sum_{i \in M} f_i(x)$ Cesáro yakınsak.

Bu taktirde $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)$ dür. X barrelled bir uzaydır $\Leftrightarrow 3) \Rightarrow 1)$ dir.

İspat: $1) \Rightarrow 2)$.Eğer $(a_i)_i \in \ell_\infty$ ise bu taktirde $\sum_i a_i f_i$ serisi X^* da *zayıf yakınsaktır

öyleki $\sum_i a_i f_i$ serisinin * Cesáro toplamı da mevcuttur.

$2) \Rightarrow 3)$ kolayca doğrulanabilir.

$3) \Rightarrow 1)$ Son durumu ispat edelim. Kabul edelim ki X barrelled normlu bir uzay olsun.

$$E = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i f_i : n \in \mathbb{N}, |a_i| \leq 1 \right\}$$

olarak tanımlansın. $3) \Rightarrow 1)$ ispat etmek için E cümlesinin noktasal sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Tersine olarak, kabul edelim ki $\sum_i |f_i(x_0)|$ ıraksak olacak şekilde

$x_0 \in X$ vardır. $M = \{i \in \mathbb{N} : f_i(x_0) \geq 0\}$ ve $R = \{i \in \mathbb{N} : f_i(x_0) < 0\}$ olsun. Bu cümlelerin

belirlenişi gereği ya $\sum_{i \in M} f_i(x_0)$ yada $\sum_{i \in R} (-f_i)(x_0)$ ıraksaktır. Bu ise 3) şartının tersi bir

ifadedir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

6. BÖLÜM

MATRİS TOPLANABİLİRLİK VE ZAYIF ŞARTSIZ CAUCHY SERİLERİ

Son bölüm de tezimizin asıl amacı olan bir X normlu uzayının tamlığı matris toplanabilirliği kullanılarak karakterize edilmektedir.

X bir reel Banach uzay olsun. $A = (\alpha_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ regüler bir matris ve S de c_0 ı ihtiva eden ℓ_∞ un bir alt vektör uzayı olarak verilsin. Bu durumda vektör dizilerinin uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X(S, A) = \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X : A \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ mevcuttur } \forall (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S \text{ için} \right\},$$

burada

$$A \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a_k x_k \right)$$

dır.

Biz X deki zayıf şartsız Cauchy serilerinin uzayını $X(c_0)$ ve ayrıca X deki şartsız yakınsak serilerinin uzayını $X(\ell_\infty)$ ile gösterelim. Her iki uzayda

$$\|(x_k)_{k \in \mathbb{N}}\| = \sup \left\{ \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| : |a_k| \leq 1, k \in \{1, \dots, n\}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (6.1)$$

normuna göre bir reel Banach uzay belirtir. Dahası bu uzaylar arasında $X(\ell_\infty) \subseteq X(S, A) \subseteq X(c_0)$ şeklinde bir kapsam mevcuttur. Ayrıca şunu da belirtmeliyiz ki A matrisi özdeş bir matris ise bu taktirde $X(S, A)$ [13] de çalışılan $X(S)$ uzayının kendisidir.

Teorem 6.1. X reel bir Banach uzay olsun. $\forall (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty$ için $X(\ell_\infty)$ da öyle bir $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır ki $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x^n(k)$ limiti mevcuttur. Bu taktirde $X(\ell_\infty)$ da öyle bir x^0 elemanı vardır öyleki $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n - x^0\| = 0$ dır.

Öncelikle (6.1) de verilen norma göre $X(S, A)$ uzayının tamlığını karakterize edelim.

Teorem 6.2. X bir Banach uzay olsun. $A = (\alpha_{ij})_{ij \in \mathbb{N}}$ regüler bir matris ve S de c_0 ı ihtiva edecek şekilde ℓ_∞ un bir alt vektör uzayı olsun. Bu taktirde (6.1) de verilen norma göre $X(S, A)$ uzayı tamdır.

İspat: Biz göstereceğiz ki $X(S, A)$ uzayı $X(c_0)$ da kapalıdır. Bunun için

$$M = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| : i \in \mathbb{N} \right\}$$

cümlesini tanımlayarak başlayalım. A regüler olduğu için $0 < M < \infty$ dur. Şimdi $X(S, A)$ da bir $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım ve bu dizi $X(c_0)$ yakınsak olsun. Yani bir $x^0 \in X(c_0)$ vardır öyleki $n \rightarrow \infty$ iken $\|x^n - x^0\| \rightarrow 0$ dir. Göstermek istiyoruz ki $x^0 \in X(S, A)$ dır. $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \in S$ de sabit keyfi bir dizi olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in X$ vardır öyleki

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k)x^n(k) \right) = x_n$$

dir.

Biz göstermek istiyoruz ki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X de bir Cauchy dizisidir. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $X(c_0)$ da bir Cauchy dizisi olduğu için öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $p, q \geq n_0$ için

$$\|x^p - x^q\| \leq \frac{\mathcal{E}}{(M(\|a\| + 1))} \text{ dir. Bu taktirde keyfi } p, q \geq n_0 \text{ sabitleri ve } \forall i \in \mathbb{N} \text{ için biz}$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k)(x^p(k) - x^q(k)) \right) \right\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| \left\| \sum_{k=1}^j a(k)(x^p(k) - x^q(k)) \right\|$$

$$\leq M \|a\| \|x^p - x^q\|$$

$$\leq \varepsilon$$

elde edilir. O halde

$$\|x^p - x^q\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) (x^p(k) - x^q(k)) \right) \right\|,$$

normunu hesapladığımız için $p, q \geq n_0$ için $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$ olduğunu elde edilir ve böylece

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğu ispatlanmış olur. X tam olduğu için

X de bir x_0 elemanı vardır öyleki $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x_0 a yakınsaktır. Bunu göstermek için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^0(k) \right) = x_0$$

limitini hesaplamamız yeterlidir.

$\varepsilon > 0$ ve $p \in \mathbb{N}$ sabiti için $\|x^p - x^0\| \leq \frac{\varepsilon}{(3M(\|a\|+1))}$ ve $\|x_p - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ dir. $\forall i \geq i_0$ olacak

şekilde $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^p(k) \right) - x_p \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

dür. Dahası $\forall i \geq i_0$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^0(k) \right) - x_0 \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^0(k) \right) - x_0 - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^p(k) \right) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^p(k) \right) - x_p + x_p \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) (x^0(k) - x^p(k)) \right) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^p(k) \right) - x_p \right\| + \|x_p - x_0\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi son olarak vektör uzaylarının diğer bir bir uzayından bahsedeceğiz. X bir reel Banach uzay olarak tanımlanmış olsun. $A = (\alpha_{ij})_{ij \in \mathbb{N}}$ regüler bir matris ve S, c_0 ı ihtiva eden ℓ_∞ un bir alt vektör uzayı olarak verilmiş olsun. Bu durumda vektör dizilerinin uzayı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$X_w(S, A) = \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in X : wA \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \text{ mevcuttur } \forall (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S \text{ için} \right\},$$

Burada

$$wA \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k = w \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a_k x_k \right)$$

dır.

Bir $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi zayıf şartsız Cauchydir $\Leftrightarrow \forall (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0$ dizisi için $wA \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ mevcuttur.[14] $X(\ell_\infty) \subseteq X(S, A) \subseteq X_w(S, A) \subseteq X(c_0)$ kapsamı mevcuttur. Bir sonraki ispatlayacağımız teorem ile (6.1) de verilen norma göre $X_w(S, A)$ uzayının tamlığını karakterize edeceğiz.

Teorem 6.3. X bir reel Banach uzayı gösterebilirsin $A = (\alpha_{ij})_{ij \in \mathbb{N}}$ regüler bir matris ve S de c_0 ı ihtiva eden ℓ_∞ un bir alt vektör uzayı olsun. Bu takdirde $X_w(S, A)$ uzayı (6.1) de verilen norma göre bir tam uzaydır.

İspat : Bir önceki teoremin ispatında yapıldığı gibi öncelikle $X_w(S, A)$ nın $X(c_0)$ da kapalı olduğunu göstererek ispata başlayalım. O halde tekrar

$$M = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| : i \in \mathbb{N} \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. $X_w(S, A)$ da öyle bir $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi alalım ki $X(c_0)$ da yakınsak olsun. Yani bir $x^0 \in X(c_0)$ vardır öyleki $n \rightarrow \infty$ iken $\|x^n - x^0\| \rightarrow 0$ dir. Biz göstereceğiz ki $x^0 \in X_w(S, A)$ dir.

$a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \in S$ de sabit keyfi bir eleman olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ vardır öyleki

$$w\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^n(k) \right) = x_n.$$

Biz $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek istiyoruz. $\varepsilon > 0$ olsun.

$(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $X(c_0)$ da yakınsak olduğu için $p, q \geq n_0$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyleki $\|x^p - x^q\| \leq \frac{\varepsilon}{(M(\|a\| + 1))}$ dir. Ayrıca $g \in S_{X^*}$ vardır öyleki

$\|x_p - x_q\| = |g(x_p - x_q)|$ dir. Bu taktirde keyfi $p, q \geq n_0$ ve $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) g(x^p(k) - x^q(k)) \right) \right| \\ & \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) (x^p(k) - x^q(k)) \right) \right\| \\ & \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| \left\| \sum_{k=1}^j a(k) (x^p(k) - x^q(k)) \right\| \\ & \leq M \|a\| \|x^p - x^q\| \\ & \leq \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir.

O halde $\forall p, q \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \|x_p - x_q\| &= |g(x_p - x_q)| \\ &= \left| \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) g(x^p(k) - x^q(k)) \right) \right| \end{aligned}$$

olduğundan $\|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$ elde edilir ki bu ise bize $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin X de bir Cauchy dizisi olduğunu verir. X tam olduğu için $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi X de $x_0 \in X$ gibi bir değere yakınsaktır. Son olarak biz göstereceğiz ki $w\lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) x^0(k) \right) = x_0$ dir. Bunun için $\varepsilon > 0$ ve $f \in S_{X^*}$ olsun. $p \in \mathbb{N}$ ise $\|x^p - x^0\| \leq \frac{\varepsilon}{(3M(\|a\|+1))}$ ve $\|x_p - x_0\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ile verilen sabit bir değer sayı olsun. Şimdi $\forall i \geq i_0$ olacak şekilde $\exists i_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) f(x^p(k)) \right) - f(x_p) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

dır. O halde $\forall i \geq i_0$ için

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) f(x^0(k)) \right) - f(x_0) \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) f(x^0(k)) \right) - f(x_0) - \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) f(x^p(k)) \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) f(x^p(k)) \right) - f(x_p) + f(x_p) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\| \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) (x^0(k) - x^p(k)) \right) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k) f(x^p(k)) \right) - f(x_p) \right\| + \|f(x_p) - f(x_0)\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

İspatı ile birlikte vermiş olduğumuz son iki teorem zayıf şartsız Cauchy serisi için (Teorem 6.1.) in genel versiyonudur.

Lemma 6.1. X bir reel Banach uzay olsun. $A = (\alpha_{ij})_{ij \in \mathbb{N}}$ regüler bir matris ve S de c_0 ı ihtiva eden ℓ_{∞} un bir alt vektör uzayı olsun. $x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in X_W(S, A)$ daki her vektör dizisi için $\|\sigma_x\| \leq M \|x\|$ ile verilen

$$\sigma: S \rightarrow X$$

$$a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sigma_x(a) = A \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x(k)$$

lineer dönüşümü sürekli.

İspat: Biz ilk olarak

$$M = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{ij}| : i \in \mathbb{N} \right\}$$

cümlesini göz önüne alalım. $a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \in S$ olsun.

$$\begin{aligned} \|\sigma_x(a)\| &= \|f(\sigma_x(a))\| \\ &= \left\| \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k)f(x(k)) \right) \right\| \end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $f \in S_{X^*}$ vardır. Şimdi $\forall i \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k)f(x(k)) \right) \right\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \left(\sum_{k=1}^j a(k)x(k) \right) \right\| \\ &\leq M \|a\| \|x\| \end{aligned}$$

elde ederiz.

$\|\sigma_x\| \leq M \|a\| \|x\|$ bir sonucu olarak $\|\sigma_x\| \leq M \|x\|$ diyebiliriz ki bunun anlamı σ_x in sürekli olmasıdır.

Sonuç 6.1.

(1) (Lemma 6.1.) deki notasyonlar korunmak suretiyle $\forall x = (x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in X(S, A)$

vektör dizisi için $\|\sigma_x\| \leq M \|x\|$ ile verilen

$$\sigma: S \rightarrow X$$

$$a = (a(k))_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sigma_x(a) = A \sum_{k=1}^{\infty} a(k)x(k)$$

lineer dönüşümü süreklidir.

$$(2) \text{ Eğer } \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_0 \quad \text{ve} \quad A \text{ regüler bir matris ise bu taktirde } A \sum_{k=1}^{\infty} x_k = x_0$$

dır.Bununla birlikte tersi genelde doğru değildir.Ayrıca $wA \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ mevcut olması

mümkün fakat $w \sum_{k=1}^{\infty} x_k$ nın mevcut olması mümkün değildir.Dahası $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ mevcut

olması $(x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in X(S, A)$ için mümkün fakat bazı $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S$ için mümkün

değildir.Benzer olarak $wA \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ mevcut olması $(x(k))_{k \in \mathbb{N}} \in X_W(S, A)$ için mümkün

fakat bazı $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in S$ için mümkün değildir.

KAYNAKLAR

1. Aizpuru A., Pérez-Fernández F.J., Characterizations of series in Banach spaces, Acta Math. Üniv.Comenian. 58(2), 337-344, 1999.
2. Pérez-Fernández F.J., Benítez-Trujillo F., Aizpuru A., Characterizations of completeness of normed spaces through weakly unconditionally Cauchy series , Czechoslovak Math. J.50(125),889-896,2000.
3. Jamenson G. J. O. ,Topology and Normed Spaces, Chapman and Hall, London ,1974.
4. Aizpuru A., Gutiérrez-Dávila A. , Sala A., Unconditionally Cauchy series and Cesáro summability , J. Math. Anal. Appl.,324 39-48,2006.
5. Aizpuru A., García-Pacheco F.J., Pérez-Eslava C., Matrix Summability and Uniform Convergence of series , Proceeding of the American Mathematical Society , Volume135 , Number 11 ,3571-3579,2007.
6. Maddox J. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press , 1988A.
7. Mucuk O., Topoloji , Erciyes Üniversitesi , Kayseri , Şubat 2009.
8. Musayev B., Alp M., Balcı M., Fonksiyonel Analiz , Dumlupınar Üniversitesi , Kütahya , Kasım 2000 .
9. Yosida K., Functional Analysis , Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1980
10. Şuhubi E.S., Fonksiyonel Analiz , İstanbul Teknik Üniversitesi,İstanbul, Ağustos 2001.
11. Bessaga C., Pelczynski A., On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces , Studia Math. 17, 151-164, MR0115069 (22:5872), (1958).
12. Aizpuru A., Pérez-Fernández F.J., Sequence Space Associated to a series in a Banach space (Sequence spaces associated to a series) , Indian J. Pure appl. Math. , 33(9),1317-1329, September 2002 .
13. Aizpuru A., Pérez-Fernández F.J., Spaces of S-bounded multiplier convergent series , Acta Math. Hungar. 87 1-2 ,135-146.MR1755883(2001e:46029) ,2000.

14. Aizpuru A., Pérez-Eslava C., Matrix in methods summability and weakly unconditionally Cauchy series , Preprint.
15. Boos J., Classical and Modern Methods in Summability , Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, MR1817226 (2002b:40001), 2000.

ÖZGEÇMİŞ**Adı – Soyadı** : Lale CONA**Baba Adı** : Şevket**Ana Adı** : Döndü**Doğum Yeri** : Kayseri**Doğum Tarihi** : 01.04.1986

İlk ve orta öğrenimini Kayseri'nin Felahiye ilçesine bağlı Büyüktoraman Kasabasında tamamladı. Lise öğrenimini Kayseri de tamamladı. 2003 yılında Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girmeye hak kazandı 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.

İletişim Bilgileri:**Adres** : Anafartalar Mh. Yaprak St. Merve Apt. No:22/20

Melikgazi / KAYSERİ

E-posta : lale_cona@hotmail.com.tr