

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPOLOJİK GRUPLARDA SINIRLILIK VE SÜREKLİLİK

Demet BİNBAŞIOĞLU İLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

Şubat 2009

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

TOPOLOJİK GRUPLARDA SINIRLILIK VE SÜREKLİLİK

Demet BİNBAŞIOĞLU İLERİ

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

62+iv sayfa

2009

Danışman: Prof.Dr. İlhan İÇEN

Doç.Dr. Yılmaz YILMAZ

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılabilmesi için topolojik uzay, topolojik vektör uzaylar ve topolojik gruptaki temel kavramlara ayrılmıştır.

İkinci Bölümde topolojik gruplar için sınırlılık kavramı tanıtılmış ve sınırlılığın kompaktlık, ön kompaktlık ve bağlantılılık gibi topolojik kavramlarla ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca bu bölümde, p mutlak değer fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $d(x, y) = p(x^{-1}y)$ ve G grubu üzerinde bir grup topolojisi üreten d yarımetriğiyle ilgili özellikler incelenmiştir. Topolojik gruplar arasında sınırlı dönüşüm kavramı da tanıtılmış ve topolojik gruplar ile bornolojik gruplar için sınırlı homomorfizmaların bazı özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca invariant yarımetrik veya metrikler vasıtasıyla karakterize edilen sınırlı kümeler ve metriklenebilir topolojik gruplar içine homomorf dönüşümler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Son bölümde ise topolojik gruplarda Pontryagin dualitesi kavramı tanıtılmıştır. Bölümün göze çarpan noktası, topolojik grupta zayıf (Bohr) sınırlı kümenin orjinal topolojide her zaman sınırlı olamayacağının örneklenmesidir.

ANAHTAR KELİMELEER: Topolojik Gruplar, sınırlılık, sınırlı homomorfizmalar, Pontryagin dualitesi, Bornolojik Gruplar

ABSTRACT

MSc. Thesis

BOUNDEDNESS AND CONTINUITY IN TOPOLOGICAL GROUPS

Demet BİNBAŞIOĞLU İLERİ

Inönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

62+iv pages

2009

Supervisor: Prof.Dr. İlhan İÇEN

Assoc. Prof. Yılmaz YILMAZ

This thesis covers three chapters such a way that in the first chapter, to make understood other chapters easily we give place to topological space, topological vector spaces and basic concepts in topological group.

In the second chapter, boundedness concept for topological groups is presented and association of boundedness with topological concepts such as, compactness, precompactness and connectedness has been analyzed.

Moreover, defined $d(x, y) = p(x^{-1}y)$ with the help of absolute value function p and features of semi metric d that produce one group topology over group G have been analyzed. Bounded transformation concept through topological groups is defined and results of bounded homomorphism features for topological groups and bornological groups have been obtained. Moreover, definition and theorems related to characterized bounded sets by invariant pseudo-metric or metrics and topological groups into homomorphic transformation have been given.

In the last chapter, Pontryagin duality concept in topological groups is defined. The conspicuous point of chapter is to give an example of weak (Bohr) bounded set in topological group would not be always bounded in original topology.

KEY WORDS: Topological Groups, boundedness, bounded homomorphisms, Pontryagin duality, Bornological Groups.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
GİRİŞ	1
1 TEMEL KAVRAMLAR	5
1.1 Topolojik Uzaylar	5
1.2 Topolojik Vektör Uzayları	14
1.2.1 Hahn-Banach Teoremleri ve Yansımalık	18
1.2.2 Kompaktlık ve Dizisel Kompaktlık	20
1.3 Topolojik Gruplar	25
2 TOPOLOJİK GRUPLARDA SINIRLILIK VE SINIRLI HOMOMORFİZMLER	29
2.1 Topolojik Gruplarda Sınırlılık	29
2.2 Sınırlı Dönüşümler	44
2.3 Topolojik Gruplarla İlgili Diğer Sonuçlar	51
3 TOPOLOJİK GRUPLARDA PONTRYAGİN DUALİTESİ	53
3.1 Genel Bilgiler	53
3.2 Dual Çiftler	54
3.3 Konveks Kompaktlık Özelliği	59
ÖZGEÇMİŞ	63

GİRİŞ

Topolojik gruplarda sınırlılık kavramı son zamanlarda yoğun bir şekilde ele alınmaya başlanmıştır. 1991 de C. J. Atkin bu kavramı topolojik gruplardan daha genel olan uniform topolojik uzaylar için vermiştir [12]. Topolojik gruplar, uniform topolojik uzayların özel ve elverişli bir sınıfını oluşturduğundan dolayı bu tanımı topolojik gruplar için de vermek mümkündür. Gruplar için sınırlılık incelemesine ait çalışmalar bir özet şeklinde [22] de ele alınmıştır. Daha sonra sınırlılık tanımı “ G bir Topolojik Grup ve $A \subseteq G$ olsun. e nin her U komşuluğu için bir $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $A \subseteq [U]^m$ ise A sınırlıdır.” şeklinde verilmiştir [23]. Bu tanım ve [23] de verilen sonuçlar ele alınarak, bu çalışmada bazı sonuçlar elde edeceğiz ve topolojik grupların Dualite Teorisi üzerine çalışacağız. Ayrıca Topolojik Vektör Uzayları’nda (TVU) da sınırlılığın teoriye kattığı faydaların benzerlerini topolojik gruplarda arayacağız.

Bilindiği üzere bir TVU da bir kümeye sıfırın her komşuluğu tarafından yutulabilmesi durumunda sınırlıdır denir. Daha açık olarak, bir X , TVU da bir A kümesine sınırlıdır denir ancak ve ancak sıfırın her U komşuluğu için bir $\varepsilon > 0$ var öyle ki $|t| < \varepsilon$ için $tA \subseteq U$ dur. Bu tanımda tA skalerle çarpma işlemi kritik rol oynar ve tamamen cebirsel bir olaydır. Bildiğimiz gibi gruplarda bu olay sağlanmaz. Bu nedenle topolojik gruplar için bu tanımı doğrudan veremeyiz.

$tA \subseteq U$ yazılımı A nın bir büzülmesinin U içine düşürülmesi veya buna denk olarak U nun bir şişirilmesi (1 den büyük bir skalerle çarpma) nin A yı kapsaması anlamındadır. Biraz değişiklikle gruplarda bir kümenin şişirilmesi kavramı [1] de tanımlanarak yutan küme tanımı verilmiş ve bu yolla topolojik gruplarda sınırlılık tanımına ulaşılmıştır.

G bir soyut grup olsun. A ve B , G nin herhangi iki alt kümesi ise AB , tüm xy elemanlarının kümesidir öyle ki $x \in A$ ve $y \in B$ dir. $B = A$ alınırsa A^2 ve tümevarımsal düşünceyle $m \in \mathbb{N}$ için $A^m = A^{m-1}A$ tanımlarına ulaşılır. $A^0 = \{e\}$

dir, e birim elemandır. Buna göre $x \in A^m$ ise

$$x = a_1 a_2 \dots a_m$$

şeklinde yazılır öyle ki $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ dır. Bu elemanların hepsi aynı seçilebileceğinden $x^m \in A^m$ dir. Fakat $e \notin A$ ise $n < m$ için x^n , A^m nin elemanı olmayabilir. Bundan yola çıkarak $m \in N$ için $A^{\leq m}$ kümesini

$$x \in A^{\leq m} \text{ ise } x = a_1 a_2 \dots a_n \text{ öyle ki } n \leq m \text{ ve } a_1, a_2, \dots, a_n \in A$$

şeklinde tanımlarız. Elbette $A^m \subseteq A^{\leq m}$ dir. Fakat açık olarak A , e yi içerirse

$$A^m = A^{\leq m}$$

olur.

Biz bu çalışmada topolojik gruplar topolojik vektör uzaylarının bir genelleştirilmesi olduğundan topolojik vektör uzayları için var olan bazı özelliklerin topolojik gruplar için de sağlanıp sağlanmadığını araştırdık. Tezin birinci bölümünde çalışmaya temel teşkil eden kavramları topolojik uzaylar, topolojik vektör uzaylar ve topolojik gruplar olmak üzere üç alt bölümde verdik.

Bölüm 2 nin birinci alt bölümünde topolojik gruplar için [23] de tanımlanmış olan sınırlılık tanımına göre iki sınırlı kümenin birleşimlerinin sınırlı olduğunu ve bir küme sınırlı ise alt kümesinin de sınırlı olduğunu göstererek buradan iki sınırlı kümenin arakesitinin de sınırlı olduğu sonucuna ulaştık. Bu bölümde bağlantılı bir topolojik grupta her tek nokta kümesinin, her sonlu kümenin, her önkompakt kümenin sınırlı olduğu ayrı ayrı ispatlanmıştır. Bu bölümün ikinci alt bölümünde topolojik gruplar arasında tanımlanmış birebir, sınırlı bir f homomorfizmasını göz önüne aldığımızda tanım uzayındaki her bornivorousun f altındaki görüntüsünün değer uzayında da bir bornivorous olduğu ispatlanmıştır. Bu kısımda lokal kompakt ayrılabilir metrik gruplar arasındaki f homomorfizması kapalı grafikte verildiği takdirde bu f homomorfizmasının sürekli olduğu gösterilmiştir.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde tıpkı topolojik vektör uzaylarında olduğu gibi, topolojik grubun kendi topolojisinde sınırlı olan bir kümenin her zaman Bohr(weak) topolojisinde de sınırlı olduğunu gösterdik. Bu önermenin tersi topolojik gruplarda

her zaman için doğru değildir. Bunu, Salvador Hernandez'den yardım almak suretiyle R reel sayılar kümesinin Bohr topolojisinde her zaman sınırlı olmasına karşın, alışılmış topolojisinde sınırlı olmadığını kullanarak ispatladık.

Burada bir G topolojik abel grubu için literatürdeki Pontryagin yansımalık veya kısaca P-yansımalık kavramı da tanıtılmıştır. 1948'de P-yansımali Topolojik abel Gruplar'ın karakterizasyonu sorusu Kaplan [12] tarafından kurulmuştur. 1964 yılında Dualite'deki gruplar düşüncesi ilk olarak Varopoulos tarafından topolojik abel grupların için ortaya konulmuştur. 1976 yılında Venkataraman Pontryagin dualitesini sağlayan grupların bir karakterizasyonunu bulmuştur. Ama ne var ki bu karakterizasyon çok tekniktir ve dahası yanlış bir durum içerir. Daha sonra 1984 yılında Kye P-Yansımali grupların bir karakterizasyonunu lokal konveks uzayların toplamsal gruplarının sınıfı için elde etmiştir. Fakat bu karakterizasyon da Venkataraman'ın sonucundakine benzer bir yanlış durum içerdiği için tamamlanamamıştır. 1999 yılında serbest topolojik abel gruplar ve sürekli fonksiyonların uzayları için Pontryagin dualitesi incelenmiştir.

G bir abel topolojik grup ise G nin bir karakteri G den T (T , kompleks düzlemdeki bilinen topolojiyle donatılmış olan birim çember) içine bir sürekli grup homomorfizmi olarak adlandırılır. Böylece

$$\hat{G} = \{h : G \rightarrow T : h \text{ bir karakter}\}$$

olarak tanımlanan $\hat{G}$, G nin

$$\forall x \in G \text{ için } (h_1 h_2)(x) = h_1(x) h_2(x)$$

grup işlemiyle tanımlanan bir karakter grubudur [18]. Eğer $\hat{G}$ üzerinde $K \subset G$ kompakt ve $O \subset T$ açık olmak üzere temel açıkları

$$(K, O) = \{h \in \hat{G} : h[K] \subset O\}$$

şeklinde bir topoloji var ise bu topolojiye $\hat{G}$ üzerindeki kompakt açık topoloji adı verilir [18]. Eğer $\hat{G}$ üzerinde kompakt açık topoloji alırsak, o zaman $X = \hat{G}$ bir abel topolojik grup haline dönüşür [18]. Eğer $\forall g \in G$ için $e_G(g)(h) = h(g)$ şeklinde tanımlanmış

$$e_G : G \rightarrow \hat{X}$$

dönüşümü bir topolojik izomorfizm ise G grup dualitesini sağlıyor veya Pontryagin Yansımaları (P-Yansımaları) denir [18].

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölüm topolojik uzaylarla ilgili, ikinci alt bölüm topolojik vektör uzaylarla ilgili ve üçüncü alt bölüm ise topolojik gruplarla ilgili temel kavramlara ayrılmıştır.

1.1 Topolojik Uzaylar

Bu bölümde ilerdeki bölümlere temel teşkil edecek olan konular verilmiştir.

Tanım 1.1.1. *X boş olmayan bir küme, τ da $P(X)$ in herhangi bir alt ailesi olsun. $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ailesinin her elemanına, X de bir açık küme denir. Aşağıdaki özelliklere de açıklar aksiyomları denir*

a1) X ve ϕ , τ nun elemanıdır,

a2) τ nun sonlu ya da sonsuz çokluktaki elemanlarının birleşimi τ ya aittir,

a3) τ nun sonlu çokluktaki elemanlarının kesişimi τ ya aittir [21].

Tanım 1.1.2. *Yukarıdaki açıklar aksiyomlarını sağlayan τ ailesine X kümesi üzerinde topolojik yapı ya da kısaca bir topoloji; (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir. X üzerindeki τ topolojisinin başka birisiyle karışması kuşkusu yoksa (X, τ) yerine kısaca X topolojik uzay denir [21].*

Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 farklı iki topolojik yapı olsun. Bu durumda birbirinden farklı (X, τ_1) ve (X, τ_2) topolojik uzayları vardır. Tek elemanlı herhangi bir X kümesi hariç olmak üzere X üstünde birden fazla topolojik yapı kurulabilir. Bir X kümesi üzerinde birden çok topolojik yapı varsa açık kümeleri karıştırmamak için bir τ topolojisine ait açık kümeler τ – açık kümeler diye belirtilir [21].

Örnek 1.1.1. *Boş olmayan herhangi bir X kümesi ve $\tau = P(X)$ ailesi verilsin. τ ailesi için (a_1) , (a_2) , (a_3) aksiyomları sağlandığından, X üzerinde bir topolojidir. Bu*

topolojiye göre, her $x \in X$ için $\{x\} \subset X$ alt kümesi bir açık kümedir. Bu nedenle $\tau = P(X)$ topolojisine, X üzerindeki ayrık (noktasal, discrete, en ince) topoloji denir. Bu topoloji ile donatılmış X kümesine de ayrık uzay denir [21].

Örnek 1.1.2. Bir X kümesi üzerinde verilen $\tau = \{X, \emptyset\} \subset P(X)$ ailesi (a_1) , (a_2) , (a_3) aksiyomlarını gerçekler. X üzerindeki bu topolojik yapıya, X üzerindeki ayrık olmayan (en kaba, indiscrete) topoloji denir. (X, τ) uzayına da ayrık olmayan uzay denir [21].

Uyarı 1.1.1. Bir X kümesi üzerinde tanımlanmış farklı iki τ_1 ve τ_2 topolojilerinin $\tau_1 \cup \tau_2$ birleşimi genelde topoloji değildir. Ancak $(\tau_i)_{i \in I}$ ailesi, boş olmayan X kümesi üzerindeki herhangi bir topolojiler ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I} \tau_i$ ailesi de X üzerinde bir topolojidir [21].

Tanım 1.1.3. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $F \subset X$ alt kümesi verilsin. $(X - F) \in \tau$ ise, yani F kümesinin tümleyeni açık bir küme ise, F kümesine, τ ya göre bir kapalı küme denir [21].

Reel sayıların matematikte özellikle analizde önemli bir rolü vardır. Topolojideki bir çok kavram Reel sayılar(R) daki somut kavram ve özelliklerin bir X kümesine genelleştirilmesinden ibarettir [21].

Tanım 1.1.4. Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verildiğinde τ_1 topolojisine göre her açık küme, τ_2 ye göre de açık ise τ_1, τ_2 den daha kaba ya da τ_2, τ_1 den daha ince denir ve $\tau_1 \subset \tau_2$ şeklinde gösterilir. Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ve $\tau_1 \neq \tau_2$ ise τ_1 topolojisi, τ_2 den kesinlikle daha kabadır(zayıf) ya da τ_2, τ_1 den kesinlikle daha incedir(kuvvetli) denir [21].

Uyarı 1.1.2. X in her $\tau_1 -$ açık kümesi, $\tau_2 -$ açık ve X in her $\tau_2 -$ açık kümesi $\tau_1 -$ açık ise X üzerindeki bu iki topolojiye eşittir denir ve $\tau_1 = \tau_2$ şeklinde gösterilir [21].

Tanım 1.1.5. Bir X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 topolojileri verildiğinde τ_1 topolojisi, τ_2 topolojisinden daha kaba veya τ_2 topolojisi de τ_1 topolojisinden daha kaba ise, τ_1 ve τ_2 topolojilerine karşılaştırılabilir iki topoloji denir [21].

Tanım 1.1.6. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasını içeren her $A \subset X$ açık alt kümesine, x_0 noktasının bir açık komşuluğu denir [21].

Tanım 1.1.7. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. x_0 noktasının bir açık komşuluğunu kapsayan her $V \subset X$ alt kümesine, x_0 noktasının bir komşuluğu denir ve $N_X(x_0)$ ile gösterilir [21].

Tanım 1.1.8. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer

$$\text{her } V \in \vartheta(x) \text{ için, } \exists W \in G(x) \ni W \subset V$$

ise, $G(x)$ ailesine, τ topolojisine göre, x noktasının bir komşuluklar tabanı denir [21].

Tanım 1.1.9. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına birinci sayılabilir aksiyomunu sağlayan uzay veya birinci sayılabilir uzay denir [21].

Tanım 1.1.10. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X in τ topolojisi sayılabilir bir topoloji tabanına sahipse, X uzayına ikinci sayılabilir aksiyomunu sağlayan uzay veya ikinci sayılabilir uzay denir [21].

Tanım 1.1.11. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in A$ noktası verilsin. Eğer A kümesi x noktasının bir komşuluğu ise, x noktasına, A kümesinin bir iç noktası denir [21].

Tanım 1.1.12. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin bütün iç noktalarının oluşturduğu kümeye, A kümesinin içi denir ve $\overset{\circ}{A}$ simgesiyle gösterilir [21].

Tanım 1.1.13. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ alt kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. x noktasının her komşuluğunda, A nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A kümesinin bir kapanış noktası (değme noktası) denir [21].

Tanım 1.1.14. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. A kümesinin bütün kapanış noktalarının kümesine, A kümesinin kapanışı denir ve

$$\bar{A} = \{x \in X \mid \text{her } V \in \vartheta(x) \text{ için } A \cap V \neq \emptyset\}$$

ile gösterilir [21].

Tanım 1.1.15. (X, τ) ve (Y, ν) topolojik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x)$ noktasının her $V \subset Y$ komşuluğu için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde x noktasının bir $U \subset X$ komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x noktasında süreklidir denir [21].

Teorem 1.1.1.

$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde, aşağıdaki şartlar denktir;

- i) f fonksiyonu $x \in X$ de süreklidir,
- ii) Her $V \in \mathcal{V}(f(x))$ için, $\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni x \in U \implies f(x) \in V$ dir,
- iii) Her $V \in \mathcal{V}(f(x))$ için, $\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni U \subset f^{-1}(V)$ dir,
- iv) Her $V \in \mathcal{V}(f(x))$ için, $f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(x)$ dir,
- v) $G(f(x)), f(x) \in Y$ noktasının komşuluklar tabanı olmak üzere her $W \in G(f(x))$ için, $f^{-1}(W) \in \mathcal{V}(x)$ dir [21].

Tanım 1.1.16. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu, X kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X üzerinde sürekli veya kısaca f fonksiyonuna süreklidir denir. Eğer, f fonksiyonu bir $A \subset X$ alt kümesinin her noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna A da süreklidir denir [21].

Teorem 1.1.2. $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ fonksiyonu için, aşağıdaki şartlar denktir:

- i) f fonksiyonu süreklidir,
- ii) Her $A \subset X$ kümesi için, $f\left(\bar{A}\right) \subset \bar{f(A)}$ dır,
- iii) Y nin her kapalı alt kümesinin ters görüntüsü, X de kapalıdır,
- iv) Y nin her açık alt kümesinin ters görüntüsü, X de açıktır [21].

Tanım 1.1.17. Bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ fonksiyonu verilsin. Eğer X in her açık alt kümesinin görüntüsü, Y de açık ise, f fonksiyonuna açık bir fonksiyon denir. X in her kapalı alt kümesinin görüntüsü Y de kapalı ise, f fonksiyonuna kapalı bir fonksiyon denir [21].

Tanım 1.1.18. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in alt kümelerinin bir $(A_i)_{i \in I}$ ailesi verilsin. Eğer $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X kümesinin bir örtüsü denir. Eğer her $i \in I$ için A_i kümeleri, X uzayının açık alt kümeleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir açık örtüsü denir. Şayet her $i \in I$ için A_i kümeleri, X uzayının kapalı alt kümeleri ise, $(A_i)_{i \in I}$ ailesine X uzayının bir kapalı örtüsü denir. Eğer $J \subset I$ sonlu ise, X kümesinin $(A_i)_{i \in J}$ örtüsüne, X kümesinin sonlu örtüsü denir. Eğer $(A_i)_{i \in I}$ ailesinin bir alt ailesi, X kümesini örterse, bu alt aileye, X in bir alt örtüsü denir [21].

Tanım 1.1.19. (X, τ) uzayı verilsin. Eğer X kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, X uzayına kompakt uzay denir. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer (A, τ_A) alt uzayı kompakt ise, A kümesine, X uzayının bir kompakt alt kümesi denir [21].

Teorem 1.1.3. (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- (a) X kompakt uzaydır,
- (b) X in kapalı alt kümelerinden oluşan ve arakesiti boş olan bir $(F_i)_{i \in I}$ ailesinin, arakesiti boş olan sonlu bir $(F_i)_{i \in J}$ alt ailesi vardır,
- (c) X in kapalı alt kümelerinden oluşan ve sonlu arakesit özelliğine sahip olan her $(F_i)_{i \in I}$ ailesi için, $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$ dır [21].

Teorem 1.1.4. (X, τ) bir kompakt uzay olsun. Aşağıdaki özellikler vardır ve bunlar eşdeğerdir:

- (a) Artan bir $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ açıkklar dizisi X uzayını örterse, $A_{n_0} = X$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır,
- (b) Azalan bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kapalılar dizisinin arakesiti boş ise, $F_{n_0} = \emptyset$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır,
- (c) Azalan bir $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kapalılar dizisinin her F_n elemanı boş değilse, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin arakesiti de boş değildir [21].

Tanım 1.1.20. (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer her $x \in X$ noktası, X uzayında kompakt komşuluğa sahip ise, X uzayına lokal kompakt uzay denir [21].

Tanım 1.1.21. (X, τ) bir topolojik uzay ve herhangi iki $A, B \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\bar{A} \cap B \neq \emptyset$ veya $A \cap \bar{B} \neq \emptyset$ ise, A ve B kümelerine bağlantılı iki küme denir. Eğer $\bar{A} \cap B = \emptyset$ ve $A \cap \bar{B} = \emptyset$ ise, A ve B ye bağlantılı olmayan iki küme denir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesi, bağlantılı olmayan ve boş olmayan iki alt kümenin birleşimine eşitse, X uzayına bağlantılı olmayan uzay veya bağlantısız uzay denir. Eğer X kümesi, her biri boş olmayan, bağlantılı iki kümenin birleşimine eşitse (X, τ) uzayına bağlantılı uzay denir [21].

Teorem 1.1.5. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- i) X uzayı bağlantılıdır,
- ii) X uzayı, bağlantılı olan ve boş olmayan iki alt kümenin birleşimine eşittir,
- iii) X , boş olmayan ve ayrık olmayan iki açık alt kümenin birleşimine eşittir,
- iv) X , boş olmayan ve ayrık olmayan iki kapalı alt kümenin birleşimine eşittir,
- v) X uzayının hem açık hem kapalı alt kümeleri, sadece X ve $\emptyset$ dur [21].

Tanım 1.1.22. (X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt uzayı verilsin. Eğer (A, τ_A) alt uzayı bağlantılı ise, A kümesine, X uzayı içinde bağlantılı bir küme denir.

(X, τ) uzayının her x ve y noktası için, $x \in U \in \tau$ ve $y \in V \in \tau$ olacak şekilde $U \cup V$ bağlantısızlığı varsa, X uzayına tamamen bağlantısız uzay denir [21].

Teorem 1.1.6. Bir uzayın tamamen bağlantısız olması için gerek ve yeter şart boş olmayan bağlantılı kümelerin, tek elemanlı kümeler olmasıdır [21].

Tanım 1.1.23. (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ noktasının, X uzayında bağlantılı kümelerden oluşan bir komşuluklar tabanı varsa, X uzayına lokal bağlantılı uzay denir [21].

Tanım 1.1.24. (X, τ) bir topolojik uzay olsun.

Her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için, $\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni y \notin U$ veya $\exists V \in \mathcal{V}(y) \ni x \notin V$ ise, yani en az bir noktanın, diğer noktayı içermeyen bir komşuluğu varsa, (X, τ) uzayına T_0 - uzayı veya Kolmogorov uzayı denir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

Her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için, $\exists U \in \mathcal{V}(x) \ni y \notin U$ ve $\exists V \in \mathcal{V}(y) \ni x \notin V$ ise yani bu noktaların her birinin diğerini içermeyen bir komşuluğu varsa, (X, τ) uzayına T_1 - uzayı denir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun.

Her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için $\exists U \in \mathcal{V}(x)$ ve $\exists V \in \mathcal{V}(y) \ni U \cap V = \emptyset$ ise, (X, τ) uzayına T_2 - uzayı veya Hausdorff uzayı denir.

(X, τ) topolojik uzayı, bir $F \subset X$ kapalı kümesi ve bir $x \notin F$ noktası verilsin. Eğer F kümesi ile x noktasının birbirinden ayrık birer komşulukları varsa, (X, τ) uzayına regüler (düzenli) uzay denir.

(X, τ) uzayı hem regüler hem de T_1 - uzayı ise, X uzayına T_3 - uzayı denir.

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. X kümesinin birbirinden ayrık herhangi iki kapalı kümesinin, birbirinden ayrık birer komşulukları varsa, (X, τ) uzayına normal uzay denir.

(X, τ) uzayı hem normal hem de T_1 - uzayı ise (X, τ) uzayına T_4 - uzayı denir [21].

Teorem 1.1.7. Hausdorff uzayındaki kompakt bir küme kapalıdır [21].

Tanım 1.1.25. Bir (X, τ) topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\bar{A} \neq \emptyset$ ise, A kümesine X içinde yoğun denir.

Bir (X, τ) topolojik uzay ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\bar{A} = \emptyset$ ise, A kümesine X içinde hiçbir yerde yoğun değil denir.

(X, τ) topolojik uzayı ve bir $A \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer $\bar{A} = X$ ise, A kümesine X içinde her yerde yoğun denir.

Bir topolojik uzayın sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa, bu uzaya ayrılabilir uzay denir [21].

Tanım 1.1.26. Bir A kümesi üzerinde $\leq$ bağıntısı aşağıdaki özelliklere sahip ise $\leq$ bağıntısına A kümesini yönlendiriyor denir ve A kümesine de $\leq$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir küme denir.

i) $\forall \lambda \in A$ için $\lambda \leq \lambda$ dır,

ii) Her $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in A$ için $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3 \implies \lambda_1 \leq \lambda_3$ dır,

iii) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in A$ için $\exists \lambda_3 \in A \ni \lambda_1 \leq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \leq \lambda_3$ dır [21].

Tanım 1.1.27. Herhangi bir X kümesi ve bir $(A, \leq)$ yönlendirilmiş kümesi verilsin. Bu takdirde $f : A \rightarrow X$ fonksiyonu, her $\lambda \in A$ için $f(\lambda) = x_\lambda$ ile tanımlansın. f veya $\{x_\lambda \mid \lambda \in A\}$ alt kümesine, X içinde bir ağ denir ve $(x_\lambda)_{\lambda \in A} \subset X$ veya (x_λ) biçiminde gösterilir.

X içinde bir (x_λ) ağı ve bir $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $(f(x_\lambda))$ kümesi Y içinde bir ağıdır.

X kümesi içinde bir (x_λ) ağı ve bir $A \subset X$ kümesi verilsin. Eğer ağın elemanları belli bir indisten sonra A kümesi içindeyse, yani

$$\exists \lambda_0 \in A \ni \text{ her } \lambda_0 \leq \lambda \text{ için } x_\lambda \in A$$

ise $(x_\lambda)_{\lambda \in A}$ ağına sonunda A kümesi içinde kalıyor veya $(x_\lambda)_{\lambda \in A}$ ağı A kümesi içinde bir ağıdır denir [21].

Tanım 1.1.28. (X, τ) topolojik uzayı içinde bir $(x_\lambda)_{\lambda \in A}$ ağı verilsin. Eğer bir $x \in X$ noktasının her V komşuluğu sonunda (x_λ) ağını içeriyorsa, (x_λ) ağı x noktasına yakınsıyor denir ve kısaca $x_\lambda \rightarrow x$ veya $\lim_{\lambda \in A} x_\lambda = x$ ile gösterilir. Eğer (x_λ) ağı x noktasına yakınsıyor ise, x noktasına (x_λ) ağının limiti denir [21].

Bir ağın hiç bir limit noktası olmayacağı gibi birden çok limiti de olabilir.

Uyarı 1.1.3. Her dizi bir ağ olduğundan yakınsak her dizi yakınsak bir ağıdır [21].

Teorem 1.1.8. (X, τ) topolojik uzayı, $A \subset X$ kümesi ve bir $x \in X$ noktası verilsin. Bu takdirde $x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart A içinde x noktasına yakınsayan bir ağın varlığıdır [21].

Teorem 1.1.9. *Topolojik uzaylar arasındaki bir $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \nu)$ fonksiyonunun $x \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart her (x_λ) ağı için*

$$x_\lambda \rightarrow x \implies f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$$

olmasıdır [21].

Tanım 1.1.29. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer

$$A = \bigcup_{n \in N} A_n \quad \ni \quad \forall n \in N \text{ için } \overset{\circ}{\bar{A}}_n = \phi \text{ ise}$$

yani yoğun olmayan ise A ya X uzayında birinci kategoriden bir küme denir. Aksi halde yani sayılabilen çokluktaki yoğun olmayan cümlelerin birleşimi şeklinde ifade edilemeyen cümlelere 2. kategoriden cümleler denir. Yani;

$$\forall (A_n)_{n \in N} \subset \tau \quad \ni \quad \forall n \in N \text{ için } \bar{A}_n = X \implies \bigcap_{n \in N} A_n \neq \phi$$

Tanım 1.1.30. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Aşağıdaki denk önermelerden birini gerçekleştiren X uzayına bir baire uzayı denir:

i) $\forall (A_n)_{n \in N} \subset \tau \quad \ni \quad \forall n \in N \text{ için } \bar{A}_n = X \implies \bigcap_{n \in N} \bar{A}_n = X$

ii) $\forall (F_n)_{n \in N} \subset \mathcal{F} \quad \ni \quad \forall n \in N \text{ için } \overset{\circ}{F}_n = \phi \implies \bigcup_{n \in N} \overset{\circ}{F}_n = \phi$

iii) X içinde boştan farklı her açık alt küme ikinci kategoriden bir cümledir

iv) X içindeki birinci kategoriden her alt cümlelerin tümlemesi her yerde yoğundur.

Örnek 1.1.3. $(R, \mathcal{U})$ bir baire uzayıdır.

Önerme 1.1.1. Bir baire uzayının her alt uzayı bir baire uzayı olmak zorunda değildir.

Teorem 1.1.10. (X, τ) baire uzayı olsun. Bu takdirde X in açık her $A \in \tau$, (A, τ_A) alt uzayı da bir baire uzayıdır.

Teorem 1.1.11. Bir baire uzayının 1. kategoriden her alt cümlesinin tümlemesi de bir baire uzayıdır.

1.2 Topolojik Vektör Uzayları

Bu bölümde vektör uzayı, lineer dönüşüm gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmektedir. Vektör uzaylarının cismi ya kompleks sayılar kümesi C veya nadiren reel sayılar kümesi R olarak alınmıştır. Ayrıca pozitif tamsayılar kümesi N ile gösterilmiştir ve 0 ın komşuluklarının kümesi N_0 ile gösterilecektir.

Tanım 1.2.1. *Bir topolojik vektör uzayı; üzerinde bir topoloji olan ve vektör uzayı işlemlerinin bu topolojide sürekli olduğu bir vektör uzayıdır. Kısaca TVU ile belirtilir ve topolojiye X için bir vektör topolojisi denir [8].*

Tanım 1.2.2. *X boş olmayan bir küme olsun.*

$d : X \times X \rightarrow R$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için,

- i) $x = y \implies d(x, y) = 0$,
- ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
- iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

özelliklerini sağlarsa X üzerinde bir yarımetrik, (X, d) ye de bir yarımetrik uzay denir. Eğer i) de $\implies$ yerine $\iff$ gelirse yarımetrik yerine metrik sözcüğü kullanılır.

Bir topolojik uzaya; topolojisi yarımetrikten (metrikten) elde edilebiliyorsa yarı-metriklenebilir (metriklenebilir) dir denir.

Topolojiler genel olarak ağlar vasıtasıyla karakterize edilebilir. Fakat yarımetrik uzaylarınkı gibi birinci sayılabilir topolojileri dizilerle karakterize etmek yeterlidir. Böylece sürekliliğin daha fonksiyonel olan şu tanımını kullanma hakkına da sahibiz:

Tanım 1.2.3. *X ve Y yarımetrik uzaylar olsun. $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart*

$$X \text{ de } x_n \rightarrow x \text{ olan her } (x_n) \text{ dizisi için } Y \text{ de } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

olmasıdır. Bu aslında dizisel süreklilik tanımıdır, fakat yarımetriklenebilir topolojilerde süreklilikle çakışıktır.

Diğer taraftan bir X topolojik uzayının her farklı x, y nokta çiftini ayıran ayırık N_x, N_y açık cümleleri mevcut ise X uzayına T_2 veya Hausdorff Uzayı, topolojisine de Hausdorff Topolojisi demiştik. Metrik uzayların topolojileri Hausdorff iken yarımetrik uzaylarındaki değildir [7].

Tanım 1.2.4. X bir vektör uzayı ve $g : X \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun.

- a) $g(0) = 0$,
- b) $g(x) \geq 0$,
- c) $g(-x) = g(x)$,
- d) $g(x + y) = g(x) + g(y)$,
- e) (t_n) skalerlerin bir dizisi ve $t_n \rightarrow t$ olmak üzere $g(x_n - x) \rightarrow 0$ olan $(x_n) \subset X$ için, $g(t_n x_n - tx) \rightarrow 0$ (skalerle çarpımın sürekliliği),

şartları sağlanıyorsa g ye X üzerinde bir paranorm ve (X, g) ye de paranormlu uzay denir. Ayrıca

$$g(x) = 0 \implies x = 0$$

şartı da sağlanıyorsa paranorma total paranormdur denir [8].

Eğer,

$$d(x, y) = g(x - y)$$

ile d fonksiyonu tanımlanırsa d , X üzerinde bir yarımetriktir, g total ise d metriktir. Yukarıdaki tanımda g ; a), b), d) şartlarının yanısıra, mutlak homojenlik denilen

- f) her $t \in C$ ve $x \in X$ için $g(tx) = |t| g(x)$

şartını da sağlarsa g ye yarınorm, üstelik total ise norm denir. (f) şartı, (b) ve (e) şartlarını gerektirmektedir. Bu nedenle, her yarınorm(norm) bir paranorm(total paranorm) dur.

Tanım 1.2.5. *Bir normlu uzay; normdan elde edilen metriğe göre tam (yani, uzaydaki her Cauchy dizisi bu metriğe göre uzaydaki bir noktaya yakınsak) ise bu uzaya bir Banach Uzayı denir.*

Paranormlu bir uzayın yarimetriklenabilir bir topolojiye sahip olduğunu az önce belirttik. Paranorm tanımındaki (d) ve (e) şartları vektör uzayı işlemlerinin bu topolojide sürekli olduğunu göstermektedir. O halde her paranormlu uzay bir TVU dur. Bir X TVU nun topolojisi bir d yarimetriğinden elde edilebiliyorsa

$$p(x) = d(x, 0)$$

ile tanımlanan fonksiyon aynı topolojiyi veren paranormdur. Daha genel olarak, topolojisi birinci sayılabilir olan bir TVU paranormlu uzaydır [8].

Lineer veya topolojik uzaylar arasındaki dönüşümlerin bazı özelliklerini tanımlayalım.

Tanım 1.2.6. X, Y vektör uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. f birebir ve örten ise bir lineer izomorfizm denir. Örtenlik şartı kaldırılırsa içine izomorfizm şeklinde de söylenir. Uzaylar topolojik ve f birebir örten sürekli ve ters fonksiyonu da sürekli bir dönüşüm ise bir homeomorfizm adını alır. X, Y yarimetrik uzaylar, f birebir dönüşüm ve her $x, y \in X$ için

$$d_X(x, y) = d_Y(f(x), f(y))$$

oluyorsa f ye bir izometri denir (X metrik uzay ise birebir şartı gereksizdir). Uzaylar lineer yarimetrik ve f hem lineer izomorfizm hem de bir izometri, yani izometrik izomorfi ise f ye bir denklik dönüşümü ve bu iki uzaya da denktir denir [7].

Şimdi fonksiyonlar ve topolojiler vasıtasıyla kurulan başka topolojilerden bahsedeceğiz:

Φ bir X kümesi için verilen topolojilerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\Lambda\Phi$ ile gösterilen Φ nin sup topolojisi denilen bir topoloji mevcuttur öyle ki; X de bir (x_δ) ağı için,

$$x_\delta \rightarrow x (\Lambda\Phi) \iff \text{her bir } T \in \Phi \text{ için } x_\delta \rightarrow x (T)$$

dir. Ayrıca Z bir topolojik uzay olmak üzere $f : Z \rightarrow (X, \Lambda\Phi)$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir T için $f : Z \rightarrow (X, T)$ fonksiyonunun sürekli olmasıdır [8].

Tanım 1.2.7. $(X_\alpha : \alpha \in A)$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu uzayların çarpımı $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$; her $\alpha \in A$ için $x_\alpha \in X_\alpha$ olacak şekildeki tüm $x : A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ fonksiyonlarının cümlesidir. ($x(\alpha)$ yerine x_α yazdık). Bu aile iki elemandan, örneğin X ve Y den ibaret ise çarpım $X \times Y$ ile yazılır. Eğer her $\alpha \in A$ için $X_\alpha = X$ ise çarpım X^A ile gösterilir. Her $\alpha \in A$ için

$$P_\alpha : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\alpha; P_\alpha(x) = x_\alpha$$

şeklinde tanımlanan P_α dönüşümüne α -ıncı çarpım üzerindeki projeksiyon veya kısaca α -ıncı projeksiyon denir. X_α topolojik uzaylarının direkt toplamı; $\prod X_\alpha$ da $\bigcup X_\alpha$ nın gerdiği altuzaydır ve $\sum_{\alpha \in A} X_\alpha$ ile gösterilir. Buna göre bir

$$x \in \sum X_\alpha \iff \text{Sonlu tanesi hariç tüm } P_\alpha(x) = x_\alpha = 0$$

dır [8].

Uyarı 1.2.1. TVU ların çarpım ve direkt toplam uzaylarının aynı olması için gerek ve yeter şart A indeks cümlesinin sonlu olmasıdır. Yani TVU ların yalnızca sonlu adettekilerinin direkt toplam uzayı ile çarpım uzayı çakışiktır[8].

Teorem 1.2.1. $(X_\alpha : \alpha \in A)$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. Bu durumda $\prod X_\alpha$ için çarpım topolojisi olarak adlandırılan ve şu şekilde karakterize edilen bir tek topoloji mevcuttur. $\prod X_\alpha$ da bir (x_δ) ağı için, bu topolojide

$$x_\delta \rightarrow x \iff \text{her bir } \alpha \text{ için } P_\alpha(x_\delta) \rightarrow P_\alpha(x)$$

dir. Ayrıca Z bir topolojik uzay olmak üzere bir

$$f : Z \rightarrow \prod X_\alpha$$

fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir α için $P_\alpha \circ f$ nin sürekli olmasıdır [8].

Teorem 1.2.2. X bir küme ve $F, f : X \rightarrow Y_f$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu bir küme olsun. Burada her bir f için Y_f bir topolojik uzaydır. Bu durumda X için wF ile gösterilen ve F tarafından üretilen zayıf topoloji olarak adlandırılan bir tek topoloji mevcuttur. Ayrıca bu topoloji; X de her bir (x_δ) ağı için,

$$x_\delta \rightarrow x \iff \text{her bir } f \text{ için } Y_f \text{ de } f(x_\delta) \rightarrow f(x)$$

şeklinde karakterize edilir. Z bir topolojik uzay olmak üzere bir

$$h : Z \rightarrow (X, wF)$$

fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart her bir f için $f \circ h$ nın sürekli olmasıdır[8].

Buna göre, çarpım topolojisi projeksiyonlar ailesi tarafından üretilen zayıf topolojidir.

1.2.1 Hahn-Banach Teoremleri ve Yansımalık

Tanım 1.2.8. Yarınormlu uzaylar arasındaki bir T lineer dönüşümü ve her $x \neq 0$ için

$$\|Tx\| \leq K \|x\|$$

olacak şekilde bir K sayısı varsa T ye sınırlıdır denir. Bu durumda

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

sayısına da T nin normu denir. Buna göre sınırlı bir T lineer operatörü için

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

yazarız [8].

Uyarı 1.2.2. Yarınormlu uzaylar arasındaki lineer operatörlerin sürekliliği ile sınırlılığı çakışıktır. O halde normu sonlu lineer operatörlere süreklidir diyeceğiz.

Tanım 1.2.9. X bir TVU olmak üzere $f : X \rightarrow \mathcal{C}$ ye tanımlı lineer dönüşümlere fonksiyonel denir. Sürekli lineer fonksiyonellerin kümesi X' ile gösterilir ve X in sürekli duali denir. X' nün sürekli duali X in ikinci sürekli duali veya kısaca ikinci duali olarak adlandırılır ve X'' ile gösterilir. Yani X'' , $f : X' \rightarrow \mathcal{C}$ ye sürekli lineer fonksiyonellerin cümlesidir [8].

X ile X'' arasında oldukça ilginç ve yararlı bir ilişki vardır. Bu ilişki Hahn-Banach teoreminin bir sonucu ile kurulmaktadır. Şimdi Fonksiyonel Analizin önemli teoremlerinden biri olan bu teoremi bir kaç versiyonuyla birlikte vereceğiz.

Teorem 1.2.3. (*Hahn-Banach Teoremi*)

(X, p) yarınormlu uzay S , X in bir alt vektör uzayı ve f , S üzerinde tanımlı ve tüm $x \in S$ için $|f(x)| \leq p(x)$ özelliğine sahip bir lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda f , X üzerinde tanımlı ve $|F(x)| \leq p(x)$ şartını sağlayan bir F lineer fonksiyoneline genişletilebilir [8].

Teorem 1.2.4. (*Hahn-Banach Teoremi*)

X bir yarınormlu uzay $f \in S'$ ve S , X in bir alt uzayı olsun. Bu durumda f bir $F \in X'$ fonksiyoneline $\|f\| = \|F\|$ olacak şekilde genişletilebilir [8].

Şimdi bu teoremlerin en kullanışlı versiyonlarından olan şu iki teoremi verelim.

Teorem 1.2.5. X bir yarınormlu uzay, S , X in bir alt uzayı ve $x \in X - \bar{S}$ olsun. Bu durumda

$$f(x) = 1, \|f\| = 1/d(x, S)$$

ve S üzerinde sıfır operatörü olan bir $f \in X'$ mevcuttur. $\bar{S}$, S nin kapanışını göstermektedir ve $d(x, S) = \inf\{\|x - y\| : y \in S\}$ dir [8].

Teorem 1.2.6. x_0 bir X normlu uzayında sıfırdan farklı bir vektör olsun. Bu durumda

$$\|f\| = 1 \text{ ve } f(x_0) = \|x_0\|$$

olacak şekilde bir $f \in X'$ mevcuttur [11].

Teorem 1.2.7. S , X lokal konveks uzayının bir alt uzayı ve $f \in X'$ için S üzerinde f nin sıfır olması bir $x \in X$ için $f(x) = 0$ olmasını gerektiriyorsa bu durumda $x \in \bar{S}$ dir [10].

X bir normlu uzay olması durumunda X' ve X'' nün birer Banach uzayı olduğunu biliyoruz. Her bir $x \in X$ için,

$$\hat{x} : X' \rightarrow \mathbb{C}; \hat{x}(f) = f(x)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonelin lineer olduğunu göstermeye gerek yoktur. Ayrıca her bir $x \in X$ için $\hat{x}$ süreklidir. Gerçekten de

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\|$$

olup $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$ dir. Bu $\hat{x} \in X''$ ler vasıtasıyla tanımlanan,

$$k : X \rightarrow X''; k(x) = \hat{x}$$

(kanonik) dönüşümüne X in X'' içerisine doğal gömülmesi denir [8].

Önerme 1.2.1. *X bir normlu uzay olmak üzere yukarıdaki şekilde tanımlanan k kanonik dönüşümü içine bir izometrik izomorfidir [8].*

Tanım 1.2.10. *X bir normlu uzay olmak üzere, yukarıdaki k dönüşümü örten, yani $k(X) = X''$ ise X uzayına yansılalıdır denir [8].*

Yansılalı bir normlu uzay tamdır, yani bir Banach uzayıdır.

Tanım 1.2.11. *X bir yarınormlu uzay olsun. X' için, X' ile teorem 1.3.2 deki gibi verilen wX' topolojisine X in zayıf topolojisi denir ve kısaca w ile gösterilir. Buna göre X de bir (x_δ) ağı için,*

$$x_\delta \rightarrow 0 (w) \iff \text{her bir } f \in X' \text{ için } f(x_\delta) \rightarrow 0$$

olmasıdır [8].

X' için verilen oldukça yararlı ve kullanışlı bir topoloji çeşidi de şudur;

Tanım 1.2.12. *X bir yarınormlu uzay olsun. X' için zayıf * diye yazılan $w^\star$ ile gösterilen topolojiyi şu şekilde karakterize ederiz. X' uzayında bir (f_δ) ağı için;*

$$f_\delta \rightarrow 0 (w^\star) \iff \text{her bir } x \in X \text{ için } f_\delta(x) \rightarrow 0$$

dır [8].

1.2.2 Kompaktlık ve Dizisel Kompaktlık

Smulian 1940 da Banach uzaylarının zayıf kompakt alt uzaylarının zayıf dizisel kompakt olduğunu göstermiştir. Bunun tersinin ispatlanması ise 1947 de Eberlein tarafından yapıldı. Bu sonucun bir çok genelleştirmeleri ve sadeleştirmeleri mevcuttur. Banach uzaylarının (aslında metrik uzayların) en göze çarpan özelliklerinden birisi kompaktlığın bir çok çeşidinin denk olmasıdır.

Yukarıda kompakt uzay tanımı verilmişti. Simdi ise sayılabilir kompaktlık, dizisel kompaktlık tanımını ve ardından dizisel kompaktlıkla kompaktlık arasındaki ilişkiyi verelim;

Tanım 1.2.13. *Eğer her sayılabilir açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse X e sayılabilir kompakttır denir. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse X topolojik uzayına dizisel kompakttır denir [9].*

Teorem 1.2.8. *Birinci sayılabilir bir topolojik uzayın dizisel kompakt olması için gerek ve yeter şart sayılabilir kompakt olmasıdır [9].*

Teorem 1.2.9. *Bir metrik uzayın kompakt olması için gerek ve yeter şart dizisel kompakt olmasıdır [9].*

Bu iki teoreme göre, metrik uzaylarda kompaktlığın yukarıda tanıtılan şekilleri çakışmaktadır.

Tanım 1.2.14. *Bir TVU daki bir V cümlesine; sıfırın her bir U komşuluğu için $V \subseteq F + U$ olacak şekilde sonlu bir F kümesi varsa önkompakt veya total sınırlıdır denir [8].*

Önerme 1.2.2. *Her kompakt küme önkompakt(total sınırlı)dır [8].*

Önerme 1.2.3. *X , sıfırın önkompakt bir komşuluğuna sahip bir Hausdorff TVU olsun. Bu durumda X sonlu boyutludur [8].*

Tanım 1.2.15. *X , bir vektör uzayı ve $V \subseteq X$ olsun. $0 \leq t \leq 1$ ve $s + t = 1$ için $sV + tV \subseteq V$ ise V ye konveks, $|t| \leq 1$ için $tV \subseteq V$ ise dengeli ve her $x \in X$ ve $|t| < \varepsilon$ için $tx \in V$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ varsa yutan cümledir denir [8].*

Bir TVU daki bir V cümlesine; sıfırın her komşuluğu tarafından yutulursa sınırlıdır denir. Bunun dengi olan ifade şudur; V sınırlıdır ancak ve ancak sıfırın her U komşuluğu için $|t| < \varepsilon$ olduğunda $tV \subseteq U$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır [8].

Fakat TVU da bir cümleinin sınırlılığını genelde şu teoremin son şıkkı ile karakterize ederiz.

Teorem 1.2.10. *Bir TVU daki V kümesi için aşağıdaki şartlar denktir:*

1. V sınırlıdır,
2. Her $(x_n) \subseteq V$ ve sifıra yakınsak her (a_n) skaler dizisi için $a_n x_n \rightarrow 0$ dır,
3. Her $(x_n) \subseteq V$ için $(1/n) x_n \rightarrow 0$ dır [8].

Tanım 1.2.16. (X, q) bir yarınormlu uzay ve $V \subseteq X$ olsun. $\{q(x) : x \in V\}$ kümesi reel sayılarda sınırlı ise V ye X de sınırlıdır denir [8].

Maalesef sınırlılığın böyle kullanışlı bir tanımı paranormlu uzaylarda verilememektedir.

Tanım 1.2.17. *Bir TVU na sıfırın her komşuluğu sıfırın konveks bir komşuluğunu ihtiva ediyorsa lokal konvektir denir [8].*

Bir yarınormlu uzay lokal konveks uzaydır, fakat paranormlu uzaylar için bunu söylemek mümkün değildir. Lokal konveks uzayların en önemli özelliği zengin dual uzaylara sahip olmalarıdır. Bu nedenle dualite teorisi bu uzaylar üzerine kurulur [8].

Teorem 1.2.11. *Bir lokal konveks uzayda bir cümleinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart zayıf sınırlı olmasıdır. Yani lokal konveks uzayların zayıf ve lokal konveks topolojilerinde cümlelerin sınırlılığı korunur [8].*

Tanım 1.2.18. *TVU lar arasında sınırlı cümleleri sınırlı cümlelere dönüştüren dönüşümlere sınırlı dönüşüm denir [8].*

Teorem 1.2.12. *TVU lar arasındaki sürekli bir dönüşüm sınırlıdır. Aslında dizisel sürekli bir dönüşüm sınırlıdır [8].*

Bu teoremin tersi hangi durumda mevcuttur? Yarınormlu uzaylar arasındaki dönüşümlerde bu kavramların denk olduğunu biliyoruz. Bu denkliğin sınırlarını daha kesin hatlarıyla çizebilmek için Bornolojiye giriş yapmak gerekir. Çünkü temelde Bornolojik uzaylar bu denkliğin mevcut olduğu uzaylardır.

Bir Bornolojik uzay, her mutlak konveks bornivorun sıfırın komşuluğu olduğu bir Hausdorff lokal konveks uzaydır. Lokal konveks uzayların biraz daha gelişmiş

formudur. Örneğin lokal konveks metrik uzaylar bornolojik uzaylardır fakat her Bornolojik uzayın metriklenebilmesi gerekmez.

Tanım 1.2.19. *Bir TVU da bütün sınırlı cümleleri yutan bir cümleye Bornivor denir [8].*

Önerme 1.2.4. *T_1 ve T_2 bir X vektör uzayı için iki vektör topolojisi ve $T_2 \subseteq T_1$, yani T_1, T_2 den kuvvetli olsun. Bu durumda $(X; T_1)$ de sınırlı her küme $(X; T_2)$ de de sınırlıdır [8].*

Önerme 1.2.5. *X bir yarımetriklenebilir vektör uzay ise her Bornivor sıfırın bir komşuluğudur [8].*

Teorem 1.2.13. *X bir TVU ve X deki her bornivor sıfırın bir komşuluğu olsun. Y bir TVU olmak üzere sınırlı her $T : X \rightarrow Y$ dönüşümü süreklidir [8].*

Tanım 1.2.20. *Metriklenebilir ve tam TVU na veya kısaca, tam ve total paranormlu uzaya bir Fréchet uzayı denir [8].*

Her Banach uzayı bir Fréchet uzayıdır, fakat tersi doğru değildir.

Tanım 1.2.21. *X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun.*

$$\{(x, y) : y = f(x)\} \subseteq X \times Y$$

cümlesine f nin grafiği denir. Eğer bu alt küme $X \times Y$ de(çarpım topolojisinde) kapalı ise f dönüşümüne kapalı grafiğe sahiptir denir [8].

Teorem 1.2.14. *(Kapalı Grafik Teoremi)*

X, Y Fréchet uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ kapalı grafiğe sahip lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda f süreklidir [8].

Lemma 1.2.1. *(Kapalı Grafik Lemması)*

X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca farzedelim ki Y, f yi sürekli yapan daha zayıf bir Hausdorff topolojiyle verilsin. Bu durumda f nin grafiği kapalıdır [7].

Sonuç 1.2.1. X, Y TVU, Y Hausdorff uzayı ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f nin grafiği kapalıdır [7].

Sonuç 1.2.2. X, Y topolojik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ kapalı grafiğe sahip bir dönüşüm olsun. Bu durumda X ve Y daha kuvvetli topolojilerle verilse bile f nin grafiği yine de kapalıdır [7].

Topolojik uzaylar arasındaki bir dönüşüm açık cümleleri açık cümlelere dönüştürürse açık dönüşüm adını alır.

Teorem 1.2.15. Topolojik uzaylar arasındaki bir $f : X \rightarrow Y$ dönüşümü $1 : 1$, örten olsun. Bu taktirde f açıktır $\iff f$ nin tersi süreklidir.

Önerme 1.2.6. TVU lar arasındaki bir lineer dönüşümün açık olması için gerek ve yeter şart sıfırın komşuluklarını sıfırın komşuluklarına dönüştürmesidir [8].

Tanım 1.2.22. X, Y topolojik vektör uzayları olmak üzere, $f : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşümüne

$$\text{her } U \in N_0 \text{ için } f(\overline{U}) \in N_0$$

ise almost open (hemen hemen açık) dönüşüm denir.

Uyarı 1.2.3. Her açık dönüşüm, hemen hemen açık dönüşümdür.

Lemma 1.2.2. X bir Fréchet uzayı ve Y hausdorff paranormlu uzay(yani Y lineer metrik uzay) olsun.

$$f : X \rightarrow Y \text{ lineer, sürekli ve hemen hemen açık} \implies f \text{ açıktır.}$$

Önerme 1.2.7. TVU lar arasındaki bir lineer dönüşümün açık olması için gerek ve yeter şart sıfırın komşuluklarını sıfırın komşuluklarına dönüştürmesidir [8].

Teorem 1.2.16. (Açık Dönüşüm Teoremi)

X, Y Fréchet uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli, lineer ve üzerine bir dönüşüm olsun. Bu durumda f açıktır [8].

Teorem 1.2.17. (Açık Dönüşüm Teoremi)

X, Y Frechet uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ kapalı grafiğe sahip lineer ve üzerine bir dönüşüm olsun. Bu durumda f sürekli ve açıktır [8].

Teorem 1.2.18. X, Y Frechet uzayları ve $f : X \rightarrow Y$ sürekli, lineer, birebir ve üzerine bir dönüşüm olsun. Bu durumda f bir homeomorfizmdir [8].

1.3 Topolojik Gruplar

Tanım 1.3.1. G boş olmayan bir küme ve $*$, G de bir ikili işlem olsun. $(G, *)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir **grup** denir.

G1) $*$, G de bir ikili işlemdir

G2) $*$ işleminin G de birleşme özelliği vardır. Yani,

$$\forall a, b, c \in G \text{ için, } a * (b * c) = (a * b) * c$$

dir

G3) $*$ işleminin G de birim elemanı vardır. Yani,

$$\forall a \in G \text{ için, } a * e = e * a = a \text{ olacak şekilde } \exists e \in G$$

bulunabilir

G4) $*$ işlemine göre, G deki her elemanın bir tersi vardır. Yani

$$a \in G \text{ için, } a * a^{-1} = a^{-1} * a = e \text{ olacak şekilde } \exists a^{-1} \in G$$

bulunabilir [14].

Tanım 1.3.2. $(G, *)$ bir grup ve

$$\forall a, b \in G \text{ için } a * b = b * a$$

değişme özelliği de sağlanıyorsa gruba, değişmeli grup veya Abel grubu denir [14].

Tanım 1.3.3. Elemanların bir G kümesi bir topolojik gruptur eğer;

i) G bir grup,

ii) G bir topolojik uzay,

iii) G deki grup işlemleri G topolojik uzayında sürekli ise

yani;

$$g : G \times G \rightarrow G \text{ ve } G \rightarrow G \text{ veya tek olarak } G \times G \rightarrow G \text{ ise [1].}$$

$(x,y) \rightarrow xy$ $x \rightarrow x^{-1}$ $(x,y) \rightarrow xy^{-1}$

Tanım 1.3.4. G bir topolojik grup olsun. G nin elemanlarının bir H kümesine,

i) H , G soyut grubunun bir alt grubu,

ii) H , G topolojik uzayının kapalı bir alt kümesi

şartları sağlanırsa G topolojik grubunun alt grubu denir.

Aslında H , G topolojik grubunun alt kümesi olarak kapalı olması gerekmez. H , G soyut grubunun alt grubu olsun. O zaman H bir topolojik alt gruptur [1].

Tanım 1.3.5. G bir topolojik grup ve H da onun alt gruplarından biri olsun. G/H ile G grubunda H alt grubunun sağ kosetlerinin tamamının bir koleksiyonu gösterilir ve

$$G/H = \{Ha \mid a \in G\}$$

dir [1].

Tanım 1.3.6. G bir topolojik grup ve N , G nin normal alt grubu olsun. Kosetlerin G/N kümesi soyut bir gruptur. G/N bir topolojik uzay olsun. G/N nin bir topolojik grup olduğunu göstermek için gerekli tek şey, G/N soyut grubundaki işlemlerin G/N topolojik uzayında sürekli olduğunu gösterebilmektir. G/N bir topolojik grup olur ve G/N ye factor (bölüm) grubu denir [1].

Tanım 1.3.7. $(G, \triangle)$ ve $(H, *)$ iki grup ve $f : G \rightarrow H$ bir fonksiyon olsun.

$$\forall a, b \in G \text{ için } f(a \triangle b) = f(a) * f(b)$$

ise f ye G den H ye bir homomorfizma denir [14].

Tanım 1.3.8. Birebir ve örten homomorfizmaya bir **izomorfizma** denir. Eğer G ve H grupları arasında bir izomorfizma varsa bu gruplara izomorf gruplar denir ve $G \cong H$ yazılır [14].

Tanım 1.3.9. Bir G topolojik grubundan G^* topolojik grubu üzerine bir f dönüşümü aşağıdaki şartlar sağlanırsa bir izomorfizma adını alır.

i) f , G soyut grubundan G^* soyut grubu üzerine bir izomorfik dönüşüm

ve

ii) f , G topolojik uzayından G^* topolojik uzayı üzerine bir homeomorfik dönüşüm [1].

Tanım 1.3.10. Baire uzayı olan bir topolojik gruba baire grup denir. Ayrıca bir X topolojik grubu baire gruptur ancak ve ancak kendi içinde 2. kategoriden ise.

Tanım 1.3.11. G , G^* iki topolojik grup olmak üzere bir $g : G \rightarrow G^*$ homomorfik dönüşümüne eğer G topolojik uzayından G^* topolojik uzayına giden açık bir dönüşümse açıktır denir [1].

Teorem 1.3.1. G , G^* iki topolojik grup ve g , G grubundan G^* soyut grubuna bir homomorfik dönüşüm olsun.

g dönüşümünün sürekli veya açık olması için, G^* grubunun e^* biriminin her U^* komşuluğu için e biriminin bir U komşuluğu vardır $\ni g(V) \subset U^*$ olması ve e nin her V komşuluğu için e^* in bir V^* komşuluğu vardır $\ni V^* \subset g(V)$ olması yeterlidir [1].

Tanım 1.3.12. G bir topolojik grup N , G nin normal alt gruplarından biri ve G/N bölüm grubu olsun. $\forall x \in G$ elemanını, x i içeren N normal alt grubunun X koseti ile birleştirelim:

$$\forall x \in G \text{ için } x \in X, \text{ öyle ki } g(x) = X$$

olsun. O zaman G , G/N de iki topolojik grup olmak üzere $g : G \rightarrow G/N$ dönüşümü bir açık homomorfik dönüşümdür. G grubundan G/N grubuna giden bu dönüşüme doğal homomorfik dönüşüm denir [1].

Teorem 1.3.2. G ve G^* iki topolojik grup, $g : G \rightarrow G^*$ bir açık homomorfik dönüşüm ve N , bu g homomorfizminin çekirdeği olsun. O zaman N , G grubunun bir normal alt grubudur ve G^* topolojik grubu, G/N grubuyla izomorfiktir [1].

Teorem 1.3.3. G ve G^* , 2. sayılabilirlik aksiyomlarını sağlayan iki lokal kompakt topolojik grup olsun. Bu takdirde $g : G \rightarrow G^*$ homomorfik dönüşümü açıktır [1].

Uyarı 1.3.1. Dikkat edersek G ve G^* iki topolojik grup olmak üzere

$g : G \rightarrow G^*$ açık homomorfik dönüşümünün çekirdeği sadece birimi içeriyorsa bu dönüşüm izomorfiktir.

G ve G^* iki topolojik grup ve f, N^1 çekirdeğiyle birlikte $f : G \rightarrow G^*$ bir açık homomorfik dönüşüm olsun. Bu takdirde N^1 yi içeren G grubunun alt grupları ve G^* grupları arasında birebir eşleme vardır [1].

Tanım 1.3.13. D yönlendirilmiş bir küme (x_δ, D) , (X, τ) topolojik grubunda bir ağ olsun. e nin her U komşuluğu için bir $\delta_0(U) \in D$ vardır öyle ki her $\delta_1, \delta_2 > \delta_0$ için $x_{\delta_1} x_{\delta_2}^{-1} \in U$ oluyorsa (x_δ, D) ya (X, τ) da bir cauchy aği denir [1].

Tanım 1.3.14. Bir topolojik gruptaki her cauchy aği bir noktaya yakınsıyorsa tamdır denir [1].

Tanım 1.3.15. G bir topolojik grup ve M , G topolojik grubunun bir alt kümesi olsun. M den R' ye tanımlanmış fonksiyonların bir Δ kümesi aşağıdaki şartı sağlarsa eş sürekli olarak adlandırılır, her ε pozitif sayısı için $xy^{-1} \in V$, $x \in M$ ve $y \in M$ olmak üzere G grubunun bir V komşuluğu vardır öyle ki her $f \in \Delta$ için

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

olur [1].

BÖLÜM 2

TOPOLOJİK GRUPLARDA SINIRLILIK VE SINIRLI HOMOMORFİZMLER

Bu bölümde 1991 yılında C. J. Atkin'in[12] uniform topolojik uzaylar için vermiş olduğu sınırlılık tanımından yararlanılarak, topolojik gruplar için yapılmış olan sınırlılık tanımı verilmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca sınırlı dönüşüm kavramı tanıtılarak topolojik gruplar arasındaki sınırlı homomorfizmalar ile sürekli homomorfizmalar arasındaki ilişki incelenmiştir.

2.1 Topolojik Gruplarda Sınırlılık

Tanım 2.1.1. *G bir topolojik grup ve $A \subset G$ olsun. A kümesine $A^{-1} = A$ olması durumunda simetrik denir. Ayrıca A nın simetrik hull'u*

$$[A] = \cap \{U : U \text{ simetrik ve } A \subseteq U\}$$

şeklinde tanımlanır.

Açık olarak her $A \subset G$ için $[A]$ simetriktir. Yine

$$[A] = \cap \{U : U \text{ simetrik ve } A \subseteq U\}$$

ve U simetrik olduğundan $U = U^{-1}$ olup

$$[A] = \cap \{U^{-1} : A^{-1} \subseteq U^{-1}\}$$

ve

$$[A] = \cap \{U^{-1} : A \subseteq U^{-1}\}$$

bulunabilir ve buradan

$$[A] = A^{-1} \cup A$$

olduğu ispatlanabilir [23].

Örnek 2.1.1. $[A^m] \subseteq [A]^m$ dir. Gerçekten de;

$x \in [A^m]$ ise $A^m \subseteq U$ olacak şekilde her U simetrik kümesi için $x \in U$ dur.

Yani $x \in A^{-m} \cup A^m$ dir. Eğer

$$x \in A^{-m} \text{ ise; } x = a_1 a_2 \dots a_m \text{ olacak şekilde } a_1, a_2, \dots, a_m \in A^{-1}$$

vardır.

Eğer

$$x \in A^m \text{ ise } x = b_1 b_2 \dots b_m \text{ olacak şekilde } b_1, b_2, \dots, b_m \in A$$

vardır. Her iki durumu birlikte

$$x = c_1 c_2 \dots c_m \text{ olacak şekilde } c_1, c_2, \dots, c_m \in A \cup A^{-1} = [A]$$

vardır şeklinde yazarız. O halde $x \in [A]^m$ dir [23].

Örnek 2.1.2. $(Z, +)$ grubunda $A = \{1, 2\}$ kümesi için

$$[A] = \{-2, -1, 1, 2\} \text{ ve } [A]^2 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \text{ dir.}$$

Halbuki;

$$A^2 = \{2, 3, 4\} \text{ ve } [A^2] = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$$

[23].

Tanım 2.1.2. G bir grup ve $A \subseteq G$ olsun. Her $x \in G$ için $x \in [A]^{\leq m}$ olacak şekilde bir $m \in N$ mevcut ise A ya yutan küme denir [23].

Tanım 2.1.3. G bir topolojik grup ve $A \subseteq G$ olsun. Eğer A, e nin her komşuluğu tarafından yutulursa A ya sınırlıdır denir. Daha açık olarak e nin her U komşuluğu için bir $m \in N$ vardır öyle ki $A \subseteq [U]^m$ A ya sınırlıdır denir [23]. Bilindiği üzere bir topolojik grup, e nin simetrik komşuluklarının bir yerel bazına sahiptir [9, s.241]. Buna göre aşağıdaki teoremi ispatladıktan sonra sınırlılığın daha formal bir tanımını verebiliriz. Fakat önce bir lemma verelim.

Lemma 2.1.1. A bir G topolojik grubunda e nin simetrik bir komşuluğu ise A nın içi $\overset{\circ}{A}$ da e nin açık ve simetrik bir komşuluğudur.

İspat. $\overset{\circ}{A}$ in açık ve e nin bir komşuluğu olduğu aşıkardır. Sadece $\overset{\circ}{A}$ in simetrik olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\left(\overset{\circ}{A}\right)^{-1} = (A^{-1})^{\circ}$ olduğunu göstermek yeterlidir çünkü $A^{-1} = A$ dir. $x \in (\overset{\circ}{A})^{-1}$ ise $x^{-1} \in \overset{\circ}{A}$ olup $x^{-1} \in B$ öyle ki B açık ve $B \subseteq A$ olacak şekilde bir B vardır. O halde $B \subseteq A \iff B^{-1} \subseteq A^{-1}$ olduğundan ve topolojik grupta ters alma işleminin bir homeomorfizma olmasından B^{-1} de açık küme olup $x \in (A^{-1})^{\circ}$ dir. Çünkü $x \in B^{-1}$ dir. Diğer taraftan $x \in (A^{-1})^{\circ}$ ise bir $D \subseteq A^{-1}$ açığı var öyle ki $x \in D$ dir. Yine D^{-1} açık ve $D^{-1} \subseteq A$ olduğundan $x^{-1} \in D^{-1}$ olup $x^{-1} \in \overset{\circ}{A}$ dir. Yani $x \in \left(\overset{\circ}{A}\right)^{-1}$ dir [23]. $\square$

Sonuç 2.1.1. *Bir G topolojik grubunda e nin her simetrik komşuluğu e nin açık simetrik bir komşuluğunu ihtiva eder [23].*

Sonuç 2.1.2. *Bir G topolojik grubunda e nin açık simetrik komşuluklarının ailesi topoloji için bir lokal bazdır [23].*

Aşağıdaki teorem sınırlılığın başka bir tanımını ihtiva etmektedir.

Teorem 2.1.1. *G bir topolojik grup olsun. G de bir B kümesi, e nin komşuluklarından teşkil edilen bir lokal bazdaki her eleman tarafından yutulur ancak ve ancak B sınırlıdır.*

İspat. Yeterlilik aşıkardır. Gereklik için $B \subset G$ ve $\mathcal{B}$, e nin komşuluklarının bir lokal bazı olsun. Ayrıca B nin $\mathcal{B}$ ye ait her U kümesi tarafından yutulduğunu kabul edelim. U , e nin keyfi bir komşuluğu ise $\mathcal{B}$ baz olduğundan $V \subseteq U$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{B}$ mevcuttur. Diğer taraftan;

$$V \subseteq U \iff [V]^m \subseteq [U]^m$$

olup (her $m \in N$ için) bir $m \in N$ için $B \subseteq [V]^m$ olacağından aynı zamanda $B \subseteq [U]^m$ olmalıdır. Yani B sınırlıdır [23]. $\square$

Uyarı 2.1.1. *Bu teoreme göre bir B kümesinin G nin simetrik komşulukları tarafından yutulduğunu göstermek sınırlı küme olduğunu göstermek için yeterlidir. Bu durumda $[U] = U$ olacağından $B \subseteq [U]^m$ yerine $B \subseteq U^m$ yazacağız.*

Teorem 2.1.2. *İki sınırlı kümenin birleşimi sınırlıdır.*

İspat. A ve B , X topolojik grubunda iki sınırlı küme olsun.

$$A \text{ sınırlı} \iff \forall U \in N_e \text{ (simetrik) için bir } m \in N \text{ var } \ni A \subseteq [U]^m$$

ve

$$B \text{ sınırlı} \iff \forall U \in N_e \text{ (simetrik) için bir } n \in N \text{ var } \ni B \subseteq [U]^n$$

$\implies A \cup B$ sınırlı mıdır? Yani;

$$\forall U \in N_e \text{ için bir } n' \in N \text{ var } \ni A \cup B \subseteq [U]^{n'} \text{ mıdır?}$$

$$A \subseteq [U]^m \text{ ve } B \subseteq [U]^n \implies A \cup B \subseteq [U]^m \cup [U]^n \text{ dir.}$$

Buradan eğer ki

$$[U]^m \cup [U]^n \subseteq [U]^{m+n=n'}$$

kapsama bağıntısının varlığını gösterebilirsek $A \cup B$ nin sınırlı olduğunu söyleyebileceğiz. Aşağıdaki lemmada bu kapsamanın var olduğu ispatlanmıştır: $\square$

Lemma 2.1.2. $[U]^m \cup [U]^n \subseteq [U]^{m+n}$ dir.

İspat. $x \in [U]^m \cup [U]^n$ olsun. Bu durumda

$$x \in [U]^m \text{ veya } x \in [U]^n$$

dir. Bu taktirde

$$x \in [U]^m \iff x = a_1 a_2 \dots a_m \text{ dir öyle ki } a_1, a_2, \dots, a_m \in U$$

veya

$$x \in [U]^n \iff x = b_1 b_2 \dots b_n \text{ dir öyle ki } b_1, b_2, \dots, b_n \in U$$

olur. Fakat $m \leq m+n$ ve $n \leq m+n$ olduğundan n tane e için

$$x = a_1 a_2 \dots a_m e e \dots e \in U^{m+n}$$

veya m tane e için

$$x = b_1 b_2 \dots b_n e e \dots e \in U^{m+n}$$

olup her durumda

$$x \in U^{m+n}$$

dir. O halde $A \cup B$ sınırlıdır. $\square$

Teorem 2.1.3. *Bir küme sınırlı ise alt kümesi de sınırlıdır.*

İspat. A , X topolojik grubunda sınırlı ve $B \subset A$ olsun. Bu taktirde B sınırlı mıdır?

$$A \text{ sınırlı} \iff \forall U \in N_e \text{ için bir } m \in N \text{ vardır } \ni A \subseteq [U]^m$$

ve hipotezden $B \subset A$ olduğundan ;

$$B \subseteq [U]^m \text{ olacak şekilde bir } m \in N$$

oldüğundan B de sınırlıdır. □

Sonuç 2.1.3. *İki sınırlı kümenin kesişimi de sınırlıdır.*

İspat. A ve B , X topolojik grubunda iki sınırlı küme olsun. O halde, $A \cap B$ sınırlı mıdır?

$A \cap B \subset A$ ve $A \cap B \subset B$ olduğundan ve A ile B sınırlı kümeler olduğundan bir önceki teoremden $A \cap B$ sınırlıdır. □

Bilindiği gibi her topolojik vektör uzayı toplamsal grup olduğundan U^m yerine mU yazılır. O halde bir B kümesinin sınırlı olması sıfırın her U simetrik komşuluğu için $B \subseteq mU$ veya $\frac{1}{m}B \subseteq U$ olacak şekilde U ya bağlı bir m pozitif tam sayısının bulunması anlamına gelir. Bu ise topolojik vektör uzaylarında bilinen sınırlılık tanımıdır.

Ayrıca gruplarda skalerle çarpma işlemi olmadığı için, topolojik vektör uzaylarındaki yutan küme tanımı buradaki tanımın özel halidir. Buradaki sınırlılık tanımı, gruplar gibi daha ilkel bir yapıda tanımlandığı için topolojik vektör uzaylarında sınırlılıkla ilgili sağlanan bazı özellikleri sağlamada yetersiz kalmaktadır. Örneğin topolojik vektör uzaylarında tek nokta kümeleri sınırlıyken burada tek nokta kümelerinin sınırlı olması için topolojik gruba ekstra özellik eklememiz gerekecek.

Şimdi aşırı bağlantısız (extremally disconnected) uzay tanımını vererek tek nokta kümelerinin sınırlı olmak zorunda olmadığı bir topolojik grup örneği verelim:

Tanım 2.1.4. *Bir topolojik uzayda her açık kümenin kapanışı da açık ise uzaya aşırı bağlantısız (extremally disconnected) dır denir.*

Örnek 2.1.3. $(Z, +)$ grubunu, R den indirgenen alışılmış metrik topolojisi ile düşünelim. Buna göre Z nin d öklid metriğine göre açıklarını, örneğin

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap Z = \{0\} \text{ veya } (-\infty, 0) \cap Z = \{\dots, -2, -1\}$$

gibi kesişimler olarak belirleriz. Bu topolojiye göre grup işleminin sürekliliği aşikar olup bir grup topolojisidir. Yani $(Z, +, d)$ bir topolojik gruptur. Dikkat edilirse d/Z nin topolojisindeki her küme hem açık hem kapalı olup (Z, d) extremally disconnected bir topolojik uzaydır. Şimdi $\{1\}$ tek nokta kümesinin sınırlı olmadığını gösterelim.

$U = \{0\}$, 0 in bir U komşuluğu olmasına karşın her $m \in N$ için $[U]^m = \{0\}$ olduğundan $\{1\} \not\subseteq [U]^m$ dir. O halde sınırlı değildir. Çünkü $\{1\}$ sıfırın bir komşuluğu tarafından yutulamamaktadır.

Şimdi sınırlılığın bağlantılılıkla ilişkisini ortaya koymadan önce [1. s.76] daki şu sonucu verelim.

Teorem 2.1.4. Bağlantılı bir G topolojik grubu, birim elemanının bir U komşuluğu tarafından üretilir. Yani G nin her elemanı U ya ait elemanların sonlu çarpımı olarak temsil edilebilir.

Sonuç 2.1.4. Bağlantılı bir topolojik grupta her tek nokta kümesi sınırlıdır.

İspat. $x \in G$ keyfi ve U , e nin bir simetrik komşuluğu olsun. O halde yukarıdaki teoremden

$$\text{bir } m \in N \text{ için } x = a_1 a_2 \dots a_m \in U^m, \quad n \leq m, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in U$$

olup bu $\{x\} \subseteq U$ demektir. □

Teorem 2.1.5. Bağlantılı bir topolojik grupta her sonlu küme sınırlıdır.

İspat. Öncelikle sonlu sayıda sınırlı kümenin birleşimi de sınırlı mıdır diye bakalım. Bunu tümevarım yöntemiyle ispatlayalım. $A_1, A_2, \dots, A_n$ sınırlı kümeler ve

$$k = 2 \text{ için Teorem 2.1.2 den } A_1 \cup A_2 \text{ sınırlıdır...*}$$

Şimdi $k=n-1$ için doğru olsun yani;

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \text{ sınırlı... **}$$

Bu taktirde $k=n$ için doğru mudur? Yani;

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ sınırlı mıdır?}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}\} \cup A_n$$

ve $(**)$ dan $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}$ sınırlı, ayrıca hipotezden A_n sınırlı olup $(*)$ dan

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ sınırlıdır.}$$

O halde her sonlu küme

$$F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \dots \cup \{x_n\}$$

şeklinde tek nokta kümelerinin birleşimi şeklinde yazılacağından ve bağlantılı bir topolojik grupta her tek nokta kümesi sınırlı olduğundan F sınırlıdır. $\square$

Sonuç 2.1.5. *Bağlantılı bir G topolojik grubunda her kompakt küme sınırlıdır.*

İspat. e nin açık simetrik komşuluklarının lokal bazı $\mathcal{B}$ olsun ve keyfi bir $U \in \mathcal{B}$ alalım. Ayrıca B , G nin bir kompakt kümesi olsun.

$$\mathcal{A} = \{U^m : m = 1, 2, \dots\}$$

ailesini tanımlayalım. $\mathcal{A}$, B için bir açık örtüdür. Gerçekten de her U^m açık kümedir ve G bağlantılı olduğundan *Teorem 2.1.4* den her $x \in B$ için $x \in U^s$ olacak şekilde bir $s \in \mathbb{N}$ vardır. O halde $B \subseteq \cup \mathcal{A}$ olmak zorundadır. B kompakt olduğundan $\mathcal{A}$ nın bir $\{U^{m_1}, \dots, U^{m_n}\}$ sonlu alt ailesi B yi örter yani $B \subseteq \bigcup_{i=1}^n U^{m_i}$ dir. Ayrıca $U^m \subseteq U^{m+1}$ olduğundan

$$\bigcup_{i=1}^n U^{m_i} \subseteq U^{m_n+1}$$

olup $B \subseteq U^{m_n+1}$ dir. Buradan B , $\mathcal{B}$ deki her eleman tarafından yutuluyor sonucuna ulaşırız ki *Teorem 2.1.1* den B sınırlıdır [23]. $\square$

Uyarı 2.1.2. *Bu sonucu her topolojik grup için vermek mümkün değildir. Yukarıdaki örnekte $\{1\}$ tek nokta kümesi aşikar olarak kompakttır, fakat sınırlı değildir.*

Bağlantılı bir topolojik grup için önkompaktlıkla sınırlılık arasındaki ilişkiyle ilgili aşağıdaki teoremi vermeden önce önkompakt küme tanımını hatırlayalım.

Tanım 2.1.5. *Bir G topolojik grubundaki bir S kümesine aşağıdaki şartın sağlanması durumunda önkompakttır denir;*

e nin her bir U komşuluğu için sonlu bir F kümesi vardır öyle ki $S \subset FU$ dur.

Teorem 2.1.6. *Bağlantılı bir topolojik grupta her önkompakt küme sınırlıdır.*

İspat. G bir bağlantılı topolojik grup ve S, G de önkompakt olsun. U, e nin keyfi bir simetrik komşuluğu ve V, e nin $VV \subset U$ olacak şekildeki başka bir simetrik komşuluğu olsun.

Hipotezden

$$S \subset FV \text{ olacak şekilde sonlu bir } F \text{ kümesi}$$

vardır. Teorem 2.1.5 den F sınırlıdır. O halde

$$\text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } F \subset V^n$$

dir. Böylece

$$S \subset FV \subset V^nV \subset V^nV^n = (VV)^n \subset U^n$$

olup S bir sınırlı kümedir. □

Sonuç 2.1.6. *Bağlantılı bir topolojik grupta e nin her komşuluğu yutandır [23].*

Bağlantılılık burada çok önemli bir rol üstlenmektedir. Aşağıdaki örnek bunu daha iyi gösterir.

Örnek 2.1.4. *Bir aşırı bağlantısız (extremally disconnected) T_1 topolojik G grubunda $\{e\}$ kümesi hariç bütün kümeler sınırsızdır.*

İspat. $B \subseteq G$ ve $B \neq \{e\}$ olsun. $B = \cup \{x\}, x \in B$ dir. $\{x\}, G$ de kapalı fakat G , aşırı bağlantısız olduğundan aynı zamanda açık bir kümedir. O halde $\{e\}, e$ nin bir komşuluğudur .

Şimdi $x \neq e, x \in B$ için $\{x\}$ kümesini düşünelim.

Her $m \in N$ için $\{e\}^m = \{e\}$

olduğundan $\{x\}, \{e\}$ tarafından yutulamaz. O halde B de $\{e\}$ tarafından tarafından yutulamaz. Öyleyse B sınırlı değildir. $\square$

Eğer bir G grubunun topolojisi yarimetriklenebilirse yani G bir yarimetrik topolojik grup ise G üzerinde metriksel sınırlılık diyeceğimiz ve iyi bilinen başka bir sınırlılık kavramı da vardır. Bu durumda bir $B \subseteq G$ nin sınırlılığı

$$\sup_{x,y \in B} \{d(x,y)\} < \infty$$

olmasıyla karakterize edilir. Şimdi bir yarimetrik grupta, daha önce verdiğimiz sınırlılık kavramıyla metriksel sınırlılık kavramının ne derece örtüştüğünü tartışacağız. Topolojik vektör uzaylarında benzer bir tartışma zaten yapılmıştır. Biliyoruz ki topolojisi yarimetriklenebilir bir topolojik vektör uzayında (ki bu durumda topolojik vektör uzayı paranormlu uzay olur) bir küme sınırlı ise metriksel sınırlıdır fakat tersi her zaman doğru değildir [8, s.49].

Benzer bir sonucu yarimetrik gruplar için bekliyoruz. Önce bazı bilinen sonuçları verelim.

Tanım 2.1.6. G bir grup ve $p : G \rightarrow R$ bir fonksiyon olsun. p aşağıdaki özellikleri sağlarsa G üzerinde bir mutlak değer fonksiyonu adını alır.

- 1) $p(x) \geq 0$, her $x \in G$ için,
- 2) $p(e) = 0$ ve $p(x^{-1}) = p(x)$, her x için,
- 3) $p(xy) \leq p(x) + p(y)$, her $x, y \in G$ için,
- 4) $p(x_n) \rightarrow 0$ ise her $a \in G$ için $p(ax_n a^{-1}) \rightarrow 0$ dır.

Son şart Abelyan gruplar için gereksizdir. Bu p fonksiyonu yardımıyla tanımlanan $d(x,y) = p(x^{-1}y)$ fonksiyonu G üzerinde bir grup topolojisi üreten bir yarimetriktir [9].

Tanım 2.1.7. Bir G grubu üzerinde tanımlanan bir d yarımetriğine

$$\text{her } x, y, a \in G \text{ için } d(ax, ay) = d(x, y)$$

olması durumunda sol-invaryant;

$$\text{her } x, y, a \in G \text{ için } d(xa, ya) = d(x, y)$$

olması durumunda ise sağ-invaryant yarımetrik denir.

Önerme 2.1.1. Bir G grubu üzerinde her sol-invaryant yarımetrik d , G üzerine bir grup topolojisi indirger öyle ki bu topoloji bir p mutlak değer fonksiyonundan gelmektedir ve

$$d(x, y) = p(x^{-1}y)$$

dir [9].

Teorem 2.1.7. Topolojisi birinci sayılabilir olan bir topolojik grubun topolojisi bir sol-invaryant yarımetrikten gelir [9, s.253].

Önerme 2.1.2. (G, d) topolojik grup ve $d: G \times G \rightarrow R^+$ ve $d^l(x, y) = d(x^{-1}, y^{-1})$ olsun.

d^l bir sol invaryant yarımetrik $\iff d$ bir sağ invaryant yarımetriktir[9].

İspat.

d^l sol invaryant yarımetrik $\implies d$ sağ invaryant yarımetrik midir?

Yani;

$$d(x^{-1}a, y^{-1}a) = d(x^{-1}, y^{-1})$$

midir?

$$d(x^{-1}a, y^{-1}a) = d^l(a^{-1}x, a^{-1}y)$$

ve d^l sol invaryant olduğundan

$$d(x^{-1}a, y^{-1}a) = d^l(a^{-1}x, a^{-1}y) = d^l(x, y) = d(x^{-1}, y^{-1})$$

dir.

d sağ invaryant yarımetrik $\implies d'$ sol invaryant yarımetrik midir?

Yani; $d'(ax, ay) = d'(x, y)$ midir?

$$d'(ax, ay) = d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1})$$

ve d sağ invaryant olduğundan,

$$d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1}) = d'(x, y)$$

bulunur. □

Önerme 2.1.3. d nin bir sol invaryant yarımetrik olduğunu fakat sağ invaryant bir yarımetrik olmadığını varsayalım.

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1})$$

olsun. D ne sağ invaryanttır ne de sol invaryanttır [9].

İspat. Göstermemiz gereken D nin sol invaryant olmadığı yani;

$$D(ax, ay) \neq D(x, y)$$

ve D nin sağ invaryant olmadığı yani;

$$D(xa, ya) \neq D(x, y)$$

olmasıdır.

Bir an için D nin sol invaryant olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$D(ax, ay) = D(x, y)$$

olmalıdır. Bu

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1}) = d(ax, ay) + d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1})$$

olmasını ve dolayısıyla

$$d(x^{-1}, y^{-1}) = d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1})$$

olmasını gerektirir. Bu d nin sağ invaryant olmasıyla edeğerdir. Bu ise çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır. D sol invaryant değildir.

Şimdi bir an için D nin sağ invaryant olduğunu varsayalım. Bu taktirde

$$D(xa, ya) = D(x, y)$$

olsun. Bu

$$D(x, y) = d(x, y) + d(x^{-1}, y^{-1}) = d(xa, ya) + d(a^{-1}x^{-1}, a^{-1}y^{-1})$$

olmasını ve dolayısıyla

$$d(xa, ya) = d(x, y)$$

olmasını gerektirir. Bu d nin sağ invaryant olmasıyla eşdeğerdir. Bu ise çelişkidir. Kabulümüz yanlıştır. D sağ invaryant da değildir. $\square$

Önerme 2.1.4.

d bir grup üzerinde bir yarımetrik olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:

- a) d sol ve sağ invaryanttır,*
- b) d sol invaryant ve inversiyon altında invaryanttır yani,*

$$d(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y)$$

- c) d sağ invaryant ve inversiyon altında invaryanttır,*
- d) d sol invaryant ve iç otomorfizm altında invaryanttır yani,*

$$d(x, y) = d(axa^{-1}, aya^{-1})$$

[9].

İspat.

$$a \implies b$$

d sol ve sağ invaryant olsun. d inversiyon altında invaryant mıdır? Yani;

$$d(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y)$$

mıdır?

$$\begin{aligned}
d(x^{-1}, y^{-1}) &= P(xy^{-1}) \text{ ve } xy^{-1} = z \implies z^{-1} = x^{-1}y \\
&= P(z) \\
&= P(z^{-1}) \\
&= P(x^{-1}y) \\
&= d(x, y)
\end{aligned}$$

$$b \implies c$$

d sol invaryant ve inversiyon altında invaryant olsun. Bu taktirde d sağ invaryant ve inversiyon altında invaryant mıdır? Yani; $d(xa, ya) = d(x, y)$ midir?

$$d(xa, ya) = d(a^{-1}x^{-1}, a^{-1}y^{-1})$$

ve d sol invaryant olduğundan

$$d(a^{-1}x^{-1}, a^{-1}y^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1})$$

ve d inversiyon altında invaryant olduğundan

$$d(xa, ya) = d(a^{-1}x^{-1}, a^{-1}y^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1})$$

bulunur.

$$c \implies d$$

d sağ invaryant ve inversiyon altında invaryant iken d sol invaryant ve iç otomorfizm altında invaryant mıdır? Yani;

$$d(ax, ay) = d(x, y)$$

ve

$$d(axa^{-1}, aya^{-1}) = d(x, y)$$

midir?

d inversiyon altında invaryant olduğundan

$$d(ax, ay) = d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1})$$

ve d sağ invaryant olduğundan

$$d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y)$$

bulunur ki bu da d nin sol invaryant olmasıyla eşdeğerdir.

Ayrıca d sağ invaryant ve d inversiyon altında invaryant olduğundan

$$d(axa^{-1}, aya^{-1}) = d(ax, ay) = d(x^{-1}a^{-1}, y^{-1}a^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y)$$

bulunur ki bu d nin iç otomorfizm altında invaryant olması demektir.

$d \implies a$

d sol invaryant ve iç otomorfizm altında invaryant iken d sol ve sağ invaryant mıdır?

Hipotezden

$$d(ax, ay) = d(x, y)$$

yani d sol invaryanttır. Ayrıca;

$$d(xa, ya) = d(axaa^{-1}, aya^{-1}) = d(ax, ay) = d(x, y)$$

olup bu ise d nin sağ invaryant olması demektir. $\square$

Teorem 2.1.8. *G bir yarımetrik grup ve $A \subseteq G$ bir sınırlı küme olsun. Bu durumda A metriksel sınırlıdır.*

İspat. Bir $\varepsilon > 0$ için $D_\varepsilon = \{x : d(x, e) \leq \varepsilon\}$ yuvarı e nin bir komşuluğudur. Önerme 2.1.1 den d nin, G üzerinde sol invaryant bir yarımetrik olduğunu biliyoruz. Şimdi A sınırlı olduğundan

$$\text{bir } m \in \mathbb{N} \text{ için } A \subseteq [D_\varepsilon(e)]^m$$

dir. Fakat diğer taraftan

$$[D_\varepsilon(e)]^m \subseteq D_{m\varepsilon}(e)$$

dir. Şimdi bunu gösterelim. $z \in [D_\varepsilon(e)]^m$ ise

$$z = a_1 a_2 \dots a_n, (n \leq m) \text{ olacak şekilde } a_1, a_2, \dots, a_n \in D_\varepsilon(e)$$

mevcuttur. p, d yarımetriğini veren mutlak değer fonksiyonu olmak üzere Tanım 2.1.7 den

$$\begin{aligned}
d(z, e) &= p(z^{-1}e) = p(z^{-1}) = p(z) = p(a_1 a_2 \dots a_n) \\
&\leq p(a_1) + p(a_2) + \dots + p(a_n) = d(a_1, e) + d(a_2, e) + \dots + d(a_n, e) \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \dots + \varepsilon = n.\varepsilon \leq m.\varepsilon
\end{aligned}$$

olur. Yani $z \in D_{m\varepsilon}(e)$ dir. Buna göre $A \subseteq D_{m\varepsilon}(e)$ elde ederiz. Buradan açık olarak

$$\sup_{x,y \in A} \{d(x, y)\} \leq 2m\varepsilon$$

yazarız ki bu A nın metriksel sınırlı olması anlamına gelir. Örnek 2.1.3 bu teoremin tersinin doğru olmadığını gösteren bir örnektir. Çünkü $\{1\}$ kümesi (Z, d) metrik uzayında (metriksel) sınırlıdır [23]. $\square$

Teorem 2.1.9. *Bir topolojik grupta bir B kümesinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart B nin her sayılabilir alt kümesinin sınırlı olmasıdır.*

İspat. Sadece yeterliliğin ispata ihtiyacı vardır. Kabul edelim ki B nin her sayılabilir alt kümesi sınırlı fakat B sınırlı değildir. Bu durumda

$$e \text{ nin simetrik bir } U \text{ komşuluğu vardır öyle ki her } m \in N \text{ için } B \not\subseteq U^m$$

dir. Şimdi

$$x_1 \in B \setminus U, \ x_2 \in B \setminus U^2, \ \dots, x_i \in B \setminus U^i, \dots$$

olmak üzere $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini inşa edelim. Açık olarak $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi U tarafından yutulamaz. Yani $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset B$ sınırlı değildir. Bu kabulümüzle çelişir [23]. $\square$

2.2 Sınırlı Dönüşümler

Tanım 2.2.1. *Topolojik gruplar arasında sınırlı kümeleri koruyan bir dönüşüme sınırlı dönüşüm denir [23].*

Topolojik vektör uzaylarından bilindiği üzere bu uzaylar arasındaki sürekli bir lineer dönüşüm sınırlı olmak zorundadır. Aşağıdaki teorem bu özelliği topolojik gruplar arasındaki homomorfizmaların da koruduğunu göstermektedir.

Teorem 2.2.1. *Topolojik gruplar arasındaki sürekli bir homomorfizma sınırlı olmak zorundadır.*

İspat. G ve G' iki topolojik grup, $f : G \rightarrow G'$ bir homomorfizma ve $S \subset G$ sınırlı olsun. Ayrıca e ve e' sırasıyla G ve G' gruplarının birim elemanı olsun. S sınırlı olduğundan e nin her simetrik U komşuluğu için bir $n \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $S \subset U^n$ dir.

Şimdi V , e' nün bir simetrik komşuluğu ise f sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$ de e nin bir simetrik komşuluğu olup

$$\text{bir } n \in \mathbb{N} \text{ için } S \subset \{f^{-1}(V)\}^n$$

dir. $f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cup V^{-1}) = f^{-1}(V) \cup f^{-1}(V^{-1})$ olup $f^{-1}(V)$ kendi simetrik hull une eşittir.

Şimdi

$$\{f^{-1}(V)\}^n \subseteq f^{-1}(V^n)$$

olduğunu ispatlarsak teoremi ispatlamış oluruz. Çünkü bu durumda $S \subseteq f^{-1}(V^n)$ kalacağından $f(S) \subset V^n$ elde ederiz ki bu $f(S)$ nin V tarafından yutulduğunu gösterir. V keyfi olduğundan bu $f(S)$ nin sınırlı olması demektir.

Şimdi yukarıdaki bağıntıyı ispatlayalım.

$$z \in \{f^{-1}(V)\}^n \text{ olsun. Bu durumda } m \leq n \text{ ve } a_1, a_2, \dots, a_m \in f^{-1}(V)$$

olmak üzere

$$z = a_1.a_2...a_m$$

şeklinde temsil edilir. f homomorfizma olduğundan

$$f(z) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_m)$$

yazılabilir ki burada her bir $f(a_i) \in V$ dir. O halde $f(z) \in V^n$ olup $z \in f^{-1}(V^n)$ dir. Bu ispatı tamamlar [23]. $\square$

Şimdi bu teoremin tersinin ne zaman doğru olduğunu araştıracağız. Yani hangi tipten topolojik gruplar arasındaki homomorfizmaların sınırlılığı ile sürekliliği çakışık kavramlardır sorusuna cevap arayacağız. Bu işe yeni bir tanım vererek başlayalım.

Tanım 2.2.2. G bir topolojik grup ve $B \subseteq G$ olsun. Eğer B her sınırlı kümeyi yutarsa B ye bornivorous denir.

Açık olarak e nin her komşuluğu bornivoroustur [23].

Teorem 2.2.2. Bir yarımetrik G grubunda her bornivorous e nin komşuluğu olmak zorundadır .

İspat. B, G de bir bornivorous olsun. Ayrıca kabul edelim ki B, e nin bir komşuluğu değildir. Bu durumda her $n \in N$ için $B^{\leq}$ kümesi de e nin bir komşuluğu değildir. Şimdi B, e nin bir komşuluğu olmadığından her n için

$$D_{\frac{1}{n}}(e) = \{x : d(x, e) < \frac{1}{n}\}$$

açık yuvarı B içerisinde kalmaz. Elbette bu yuvarlar $B^{\leq}$ kümeleri içerisinde de kalamaz. Çünkü onlar da e nin komşuluğu değildir. O halde her n için

$$\{D_{\frac{1}{n}}(e)\} \setminus B^{\leq n} \neq \emptyset$$

dir. Buna göre;

$$x_1 \in \{D_1(e)\} \setminus B, x_2 \in \{D_{\frac{1}{2}}(e)\} \setminus B^{\leq 2}, \dots$$

şeklinde inşa edilen $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi B tarafından yutulamaz. Fakat bu dizi sınırlıdır. Çünkü e nin $D_1(e)$ komşuluğu tarafından yutulmaktadır (Aslında tüm elemanları bu komşuluk içine düşer). Bu durum B nin bornivorous olmasına terstir. $\square$

Tanım 2.2.3. G bir topolojik grup olsun. G deki her bornivorous e nin bir komşuluğu ise G ye bir bornolojik grup denir.

Yukarıdaki teoremden her yarımetrik grubun bir bornolojik grup olduğu anlaşılmaktadır [23].

Lemma 2.2.1. G ve H iki topolojik grup $f : G \rightarrow H$ birebir, sınırlı homomorfizma olsun.

$$A \subseteq G \text{ bornivorous} \implies f(A) \subseteq H \text{ bornivoroustur.}$$

İspat. S, G de sınırlı küme olsun. O halde A bornivorous olduğundan

$$n \in N \text{ için } S \subseteq A^{\leq n}$$

dir. O halde f sınırlı olduğundan $f(S)$ sınırlıdır ve

$$f(S) \subseteq f(A^{\leq n})$$

dir.

Eğer ki

$$f(A^{\leq n}) \subseteq \{f(A)\}^{\leq n}$$

ise $f(A), H$ da bir bornivorous olacaktır.

$\forall y \in f(A^{\leq n})$ alalım. Bir $x \in A^{\leq n}$ için $f(x) = y$ dir.

$x \in A^{\leq n}$ olduğundan $m \leq n$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ için $x = a_1 a_2 \dots a_m$ olur. Ayrıca

$$\text{her bir } 1 \leq i \leq m \text{ için } f(a_i) = c_i \text{ olacak şekilde } c_i \in f(A)$$

vardır. Buna göre

$$y = f(x) = f(a_1 a_2 \dots a_m)$$

ve f homomorfizma olduğundan

$$f(a_1 a_2 \dots a_m) = f(a_1) f(a_2) \dots f(a_m) = c_1 c_2 \dots c_m$$

olup

$$y \in \{f(A)\}^{\leq n}$$

olacağından ispat tamamlanır. O halde $f(A) \subseteq H$ bir bornivoroustur. $\square$

Lemma 2.2.2. G ve H iki topolojik grup, $f : G \rightarrow H$ birebir, sınırlı homomorfizma olsun. $B \subseteq f(G)$, H da bir bornivorous ise $f^{-1}(B)$ de G de bir bornivoroustur .

İspat. $f(G)$, H nın bir alt grubu olduğundan

$$\text{her } n \in N \text{ için } B^{\leq n} \subseteq f(G)$$

olacağı açıktır. S , G de sınırlı bir küme olsun. O halde $f(S)$ de H da sınırlı bir kümedir. B bornivorous olduğundan $f(S)$ yi yutar. Yani

$$\text{bir } n \in N \text{ için } f(S) \subseteq B^{\leq n}$$

kalır. Bu

$$S \subseteq f^{-1}(B^{\leq n})$$

demektir. Fakat ispatı bitirmek için

$$f^{-1}(B^{\leq n}) \subset \{f^{-1}(B)\}^{\leq n}$$

olduğunu göstermeliyiz. Çünkü ancak bu durumda $S \subseteq \{f^{-1}(B)\}^{\leq n}$ sonucunu elde ederiz.

$x \in f^{-1}(B^{\leq n})$ olsun. Böylece bir $y \in B^{\leq n}$ için $x = f^{-1}(y)$ yazarız. Ayrıca $m \leq n$ olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_m \in B$ elemanları vardır öyle ki

$$y = a_1 a_2 \dots a_m$$

olur. Bundan başka

$$\text{her bir } a_i, 1 \leq i \leq m \text{ için de } f(c_i) = a_i \text{ olacak şekilde } c_i \in f^{-1}(B)$$

vardır. Buna göre $m \leq n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(a_1 a_2 \dots a_m) = f^{-1}(f(c_1) \dots f(c_m)) = f^{-1}(f(c_1 \dots c_m)) = c_1 \cdot c_2 \dots c_m \\ &= f^{-1}(a_1) \dots f^{-1}(a_m) \end{aligned}$$

olur. Bu ise $x \in f^{-1}(B^{\leq n})$ demektir [23]. □

Teorem 2.2.3. G bir bornolojik grup olsun. Bu durumda G den herhangi bir H topolojik grubu içerisine tanımlı her f sınırlı homomorfizması süreklidir.

İspat. U, H da e nin bir komşuluğu olsun. Sınırlı küme tanımından U, H daki her sınırlı kümeyi yutar. Yani e nin her komşuluğu, dolayısıyla U bir bornivoroustur. Lemma 2.2.2 den $f^{-1}(U), G$ de bir bornivorous olup hipotez gereğince G de e nin bir komşuluğudur. Yani f, e de süreklidir. O halde her yerde süreklidir [23]. $\square$

Önerme 2.2.1. X ayrılabilir, Y bir baire grup olsun ve $f : X \rightarrow Y$ üzerine bir homomorfizm ise f hemen hemen açıktır [9].

Önerme 2.2.2. X bir tam metrik uzay ve Y bir T_2 uzay olsun. $f: X \rightarrow Y$ birebir, sürekli, almost open ise f bir homeomorfizmdir [9].

Tanım 2.2.4. Bir X TVU

a) X bir T_3 uzaydır,

b) $\{0\}$ kapalı kümedir,

c) $\forall x \neq 0$ için 0 ın bir U komşuluğu vardır $\ni x \notin U$

üç denk koşulunu sağlarsa ayrılmış(seperated) uzay olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.3. X bir ayrılabilir tam metrik grup, Y bir ayrılmış baire grup ve $f : X \rightarrow Y$ üzerine bir sürekli izomorfizm olsun. Bu taktirde f bir homeomorfizmdir [9].

İspat. Burada her ayrılmış uzayın T_2 uzay olduğunu gösterebilirsek Önerme 2.2.2 yi kullanabiliriz. Tanım 2.2.4 gereği her ayrılmış uzay T_3 uzay olduğundan ve her T_3 uzay, T_2 uzay olduğundan Y aynı zamanda bir T_2 uzaydır. O halde Önerme 2.2.2 den ispat açıktır. $\square$

Önerme 2.2.4. X lokal kompakt, Y ayrılmış ve $f : X \rightarrow Y$ üzerine, sürekli, hemen hemen açık homomorfizm olsun. Bu durumda f açıktır [9].

İspat. $f : X \rightarrow Y$ sürekli, örten, hemen hemen açık homomorfizm olsun. X lokal kompakt, Y ayrılmış $\implies f$ açık mıdır? Yani ;

$$\forall U \in N_e \implies f(U) \in N_e$$

mıdır?

$$X \text{ lokal kompakt} \iff \forall x \in X \text{ için } \exists V \in N_x \ni V \text{ kompakt}$$

olduğundan

$$e \in X \text{ için de } \exists V_e \in N_e \ni V_e \text{ kompakt}$$

olup f sürekli olduğundan $f(V_e)$ kompakttır. Ayrıca Y ayrılmış olduğundan T_2 uzaydır ve Teorem 1.1.7 den $f(V_e)$ kapalıdır. O halde

$$f \text{ kapalı} \iff f(\bar{V}_e) = f(V_e)$$

ayrıca f hemen hemen açık olduğundan

$$V_e \in N_e \text{ için } f(\bar{V}_e) \in N_e$$

olup $f(V_e) \in N_e$ olarak bulunur. O halde f açıktır . □

Önerme 2.2.5. X ayrılabilir, Y bir Baire grup ve $f : X \rightarrow Y$ üzerine bir homomorfizm olsun. Bu taktirde f hemen hemen açıktır [9].

Önerme 2.2.6. X lokal kompakt, Y ayrılmış, $f : X \rightarrow Y$ sürekli, hemen hemen açık homomorfizm ise f açıktır [9].

Önerme 2.2.7. X lokal kompakt ve ayrılabilir, Y Hausdorff Baire Grup olsun. Bu taktirde X den Y üzerine her sürekli homomorfizm bir açık dönüşümdür.

İspat. Y ayrılmış olduğunda Tanım 2.2.4 gereği T_2 uzay yani Hausdorff uzaydır. O halde Önerme 2.2.5 ile 2.2.6 yı kullanırsak ispat açıktır. □

Bir bornolojik gruptan bir topolojik gruba tanımlı her sınırlı homomorfizmanın sürekli olduğundan bahseden aşağıdaki teoreme geçmeden önce teoremin ispatında yararlanacağımız önerme ile sonucu verelim:

Önerme 2.2.8. G ve G^* iki lokal kompakt 2. sayılabilir topolojik grup olsun. O zaman $g : G \rightarrow G^*$ üzerine her homomorfik g dönüşümü açıktır [1; teorem13].

Sonuç 2.2.1. G ve G^* iki lokal kompakt 2. sayılabilir topolojik grup,

$f : G \rightarrow G^*$ üzerine sürekli, 1:1 bir homomorfizm olsun. Bu durumda f bir homeomorfizmdir.

Teorem 2.2.4. G ve G^* lokal kompakt ayrılabilir metrik grup ve $f : G \rightarrow G^*$ kapalı grafikte bir homomorfizm olsun. Bu durumda f süreklidir.

İspat.

$$P_1 : G_f \subseteq G \times G^* \rightarrow G$$

olup buradan

$G \times G^*$ lokal kompakt ve 2. sayılabilirir.

$G \times G^*$ lokal kompakt ve G_f kapalı olduğundan lokal kompakt uzayın kapalı her alt uzayı da lokal kompakt olduğundan G_f lokal kompakttır. Ayrıca G_f 2. sayılabilirir. Şimdi $P_1 : G_f \rightarrow G$ dönüşümünün açık olduğu gösterilirse P_1 bir homeomorfizmdir. $P_1 : G_f \rightarrow G$ izdüşüm fonksiyonu süreklidir.

$G \times G^*$ nin işlemi $*$ ve G nin işlemi de Δ_G olmak üzere

$$P_1 : G_f \subseteq G \times G^* \rightarrow G \text{ homomorfizmdir.}$$

Yani;

$$P_1[(x, y) * (z, t)] = P_1[(x \Delta_G z, y \square_G t)] = x \Delta_G z = P_1(x, y) \Delta_G P_1(z, t)$$

dir. Ayrıca; P_1 1 : 1 dir yani; $P_1 : G_f \rightarrow G$
(x,f(x))

$$P_1(x, f(x)) = P_1(y, f(y)) \implies x = y$$

ve f iyi tanımlı olduğundan

$$x = y \implies f(x) = f(y) \implies (x, f(x)) = (y, f(y))$$

dir.

Böylece yukarıdaki sonuçtan P_1 bir homeomorfizm olup tersi süreklidir.

Ayrıca

$$P_2 : G_f \subseteq G \times G^* \rightarrow G$$

(x,f(x))→f(x)

de sürekli olduğundan

$$f = P_2 \circ P_1^{-1}$$

olup süreklidir.

2.3 Topolojik Gruplarla İlgili Diğer Sonuçlar

Bu bölümde 1959 yılında Jan Hejman tarafından tanımlanan invaryant yarı metrik veya metrikler vasıtasıyla karakterize edilen sınırlı kümeler ve metriklenebilir topolojik gruplar içine homomorfik dönüşümler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

Teorem 2.3.1. *Eğer ϱ , bir G grubu üzerinde bir invaryant yarımetrik ise, o zaman $r(x) = \varrho(x, 0)$ fonksiyonu*

(1) *sonlu, negatif olmayan ve $r(0) = 0$,*

(2) *$r(x) = r(x^{-1})$,*

(3) *$r(xy) \leq r(x) + r(y)$.*

Eğer ϱ bir metrik ise, o zaman

(4) *$x \neq 0 \Rightarrow r(x) > 0$ [5].*

Diğer bir deyişle, eğer bir G grubu üzerinde tanımlı $r(x)$ fonksiyonu (1) , (2) ve (3) özelliklerine sahipse, o zaman $\varrho(x, y) = r(xy^{-1})$ G grubu üzerinde bir invaryant yarımetriktir ve eğer bir de (4) özelliğini sağlarsa o zaman ϱ bir invaryant metriktir [5].

Eğer G bir topolojik grup ise, o zaman

$$\varrho \text{ süreklidir} \iff r \text{ sıfır noktasında süreklidir}$$

ve böylece r tüm G grubu üzerinde süreklidir [5].

Tanım 2.3.1. *Bir G topolojik grubu üzerindeki bir r fonksiyonu bir yarınormdur; eğer üstteki teoremin (1) , (2) ve (3) özelliklerini sağlarsa. Ayrıca r fonksiyonu (4) özelliğini de sağlarsa r bir normdur [5].*

Teorem 2.3.2. G bir grup, e G grubunun birim elemanı olsun. $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ her bir $n \geq 0$ tamsayısı için,

$$U_0 = G, \quad e \in U_n, \quad 3U_{n+1} \subset U_n$$

olmak üzere G grubunun alt kümelerinin bir dizisi olsun. O zaman G grubu üzerinde sonlu, negatif olmayan ve alt toplamsal d fonksiyonu vardır, öyle ki her n doğal sayısı için

$$U_n \subset \{x; d(x) < 2^{-n}\} \subset U_{n-1} \dots *$$

dir. Eğer her bir U_n simetrik ise o zaman yukarıdaki $(*)$ koşulunu sağlayan bir yarınorm vardır [5].

Uyarı 2.3.1. Eğer yukarıdaki teoremden G bir topolojik grup ve U_n lerin hepsi e nin simetrik komşulukları ise o zaman d fonksiyonu bir sürekli yarınormdur [5].

Sonuç 2.3.1. Bir topolojik grup metriklenebilir ancak ve ancak e nin komşuluklarının sayılabilir bir tam sistemine sahiptir [5].

Lemma 2.3.1. p , G grubu üzerinde bir sürekli yarınorm olsun. O zaman bir metriklenebilir H grubu vardır ve G den H üzerine bir homomorfik dönüşüm vardır öyle ki $r(f(x)) = p(x)$ H grubu üzerinde tanımlanan topolojiyle bu grup üzerinde bir normdur [5].

Teorem 2.3.3. G bir topolojik grup olsun. Bir $A \subset G$ sınırlıdır ancak ve ancak aşağıdaki değerlendirme doğrudur: H bir metriklenebilir grup ve f G den H içine bir homomorfik dönüşüm olsun. Bu taktirde H grubunun metriği için $f(A)$ sınırlıdır [5].

Tanım 2.3.2. V , bir G grubunun alt kümelerinin uniform izomorfizmler altında korunan bir özelliği olsun. Bu taktirde eğer sıfırın komşuluklarının V özelliğini sağlayan bir tabanı varsa G grubu V özelliğine lokal olarak sahiptir denir [5].

Uyarı 2.3.2. Eğer bir grup bir V özelliğine lokal olarak sahipse o zaman bu özelliğe uniformly lokal olarak da sahiptir [5].

Sonuç 2.3.2. G bir lokal sınırlı topolojik grup, $A \subset G$ bir sınırlı küme olsun. O zaman bir $V \subset G$ açık sınırlı kümesi vardır öyle ki $A \subset V$ dir [5].

BÖLÜM 3

TOPOLOJİK GRUPLARDA PONTRYAGIN DUALİTESİ

3.1 Genel Bilgiler

Biz burada 2001 yılında Salvador Hernandez tarafından Mathematische Zeitschrift adlı dergide yayınlanmış olan ”Topolojik Abelyan gruplarda Pontryagin Dualitesi” [17] isimli makalesinden yararlanarak dual çift kavramını tanımladık.

Tanım 3.1.1. *G bir abelyan topolojik grup ise G nin bir karakteri G den T (T , kompleks düzlemdeki bilinen topolojiyle donatılmış olan birim çember) içine bir sürekli grup homomorfizmi olarak adlandırılır. Böylece*

$$\hat{G} = \{h : G \rightarrow T : h \text{ bir karakter}\}$$

olarak tanımlanan $\hat{G}$, G nin

$$\forall x \in G \text{ için } (h_1 h_2)(x) = h_1(x) h_2(x)$$

grup işlemiyle tanımlanan bir karakter grubudur [18]. İki karakterin noktasal çarpımı da yine bir karakter olur ve tüm karakterlerin $\hat{G}$ kümesi noktasal çarpma işlemiyle birlikte bir gruptur [17].

Tanım 3.1.2. *Eğer $\hat{G}$ üzerinde $K \subset G$ kompakt ve $O \subset T$ açık olmak üzere temel açıkları*

$$(K, O) = \{h \in \hat{G} : h[K] \subset O\}$$

şeklinde bir topoloji var ise bu topolojiye $\hat{G}$ üzerindeki kompakt açık topoloji adı verilir [18]. Eğer $\hat{G}$ üzerinde kompakt açık topoloji alırsak, o zaman $X = \hat{G}$ bir abelyan topolojik grup haline dönüşür [18].

Tanım 3.1.3. Eğer $\forall g \in G$ için $e_G(g)(h) = h(g)$ şeklinde tanımlanmış

$$e_G : G \rightarrow \hat{X}$$

dönüşümü bir topolojik izomorfizm ise G grup dualitesini sağlıyor veya Pontryagin Yansımali (P -Yansımali) denir [18].

Bir topolojik vektör uzayı, kendi toplama işlemiyle bir abelyan topolojik grup olduğundan topolojik vektör uzaylarında olduğu gibi yansımali fikrini araştırmak doğaldır.

Tanım 3.1.4. Eğer e_G sadece bijective (birebir, örten) ise G P -yariyansımali dır denir [17].

Her lokal kompakt abelyan grubun P -yansımali olduğunu söyleyen Pontryagin-Van Kampen teoremi topolojik grupların diğer sınıflarına genelleştirilebilir. P - yansımali grupların sınıfı keyfi çarpım ve direkt toplam altında kapalıdır [2, 3]. Banach uzayları ve yansımali lokal konveks vektör uzayları P - yansımali topolojik gruptur [4]. Bizim buradaki asıl amacımız topolojik grupların dual çift olmaları kavramını tanıtmaktır. Bu fonksiyonel analizin de önemli bir kavramıdır ve ilk olarak Varopoulos [6] tarafından topolojik abelyan grupların içeriğinde ortaya konulmuştur.

3.2 Dual Çiftler

Tanım 3.2.1. G ve G' iki abelyan grup olduğu zaman onlar dual çifttir, ancak ve ancak bir $\langle \dots \rangle : G \times G' \rightarrow T$ fonksiyonu vardır öyle ki $\forall g_1, g_2, g \in G$ ve $g'_1, g'_2, g' \in G'$ için

$$\langle g_1 g_2, g' \rangle = \langle g_1, g' \rangle \cdot \langle g_2, g' \rangle$$

ve

$$\langle g, g'_1 g'_2 \rangle = \langle g, g'_1 \rangle \cdot \langle g, g'_2 \rangle$$

i) Eğer $g \neq 0_G$, G nin belirli özelliği olmayan bir elemanı ise $g' \in G'$ vardır $\exists \langle g, g' \rangle \neq 1$

ve

ii) Eğer $g^1 \neq 0_{G^1}$, G^1 nin belirli özelliği olmayan bir elemanı ise $g \in G$ vardır $\exists \langle g, g^1 \rangle \neq 1$ [17].

Tanım 3.2.2. Eğer bir $\langle G, G^1 \rangle$ dualitesine sahipsek

$$(G, \tau)^\wedge = G^1$$

olduğu zaman G üzerindeki bir τ topolojisi bu dualite ile uyuşabilir denir [4]. (G, τ) maximally almost periodic(MAP) gruptur; eğer birim elemandan farklı

her $a \in G$ için bir $\chi \in (G, \tau)^\wedge$ varsa öyle ki $\chi(a) \neq 1$ ise [13].

Dikkat edilirse her P-yansılalı grup maximally almost periodic olmalıdır.

Tanım 3.2.3. G üzerindeki $w(G, G^1)$ topolojisi G den T ye tüm sürekli homomorfizmalar tarafından üretilen topolojidir ve G üzerindeki zayıf topoloji veya Bohr topolojisi olarak adlandırılır. Bu topolojide e , G nin birim elemanı olmak üzere

x_δ ağı e ye yakınsar $\iff f(x_\delta)$ ağı $f(e) = 1$ noktasına T de yakınsar.

Benzer şekilde G^1 üzerindeki $w(G^1, G)$ topolojisi G^1 den T ye $g \in G$ skaler homomorfizmleri tarafından üretilen topolojidir ve topolojik vektör uzaylarındaki *weak - star* topolojinin genelidir. (x_δ) ağı $w(G^1, G)$ topolojisine göre G^1 de

$$x_\delta \rightarrow e^1 \iff \forall g \in G \text{ için } g(x_\delta) = \langle g, x_\delta \rangle = x_\delta(g) \rightarrow g(e^1) = e^1(g) = 1$$

dir.

G deki herhangi A altkümesi için, A^α ile tüm $g^1 \in G^1$ nün kümelerini gösteririz öyle ki tüm $g \in A$ için $\text{Re}\langle g, g^1 \rangle \geq 0$. Burada $\text{Re } z$ nin anlamı z kompleks sayısının reel kısmıdır. Benzer olarak, eğer $B^1 \subset G^1$ ise o zaman B_α^1 tüm $g \in G$ lerin kümesidir öyle ki $\text{Re}\langle g, g^1 \rangle \geq 0$ her $g^1 \in B^1$ için.

Herhangi

$$A \subset G \text{ için } ((A^\alpha)_\alpha)^\alpha = A^\alpha$$

ve herhangi

$$B^1 \subset G^1 \text{ için } ((B_\alpha^1)^\alpha)_\alpha = B_\alpha^1$$

olduğu görülebilir [17].

Tanım 3.2.4. G de verilen keyfi bir A alt kümesi için $(A^\alpha)_\alpha$ ile A nın α -konveks hull unu tanımlayabiliriz ve $co_\alpha(A)$ ile gösterebiliriz. Eğer bir A kümesi kendi konveks hull u ile çakışırsa α -konveks adını alır [17].

Farklı dualiteler farklı konveks hull de yer alır. Örneğin $\alpha = \langle \mathbb{Q}, \mathbb{R} \rangle$ ve $\beta = \langle \mathbb{R}, \mathbb{R} \rangle$ dualiteleri göz önüne alınsın ve ikisi de $\langle a, b \rangle = ab$ tarafından tanımlanan standart bilineer dönüşümle donatılsın. O zaman $L = [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ olmak üzere $co_\alpha(L) = L$ fakat $co_\beta(L) = [-1, 1]$ olur [17].

Tanım 3.2.5. Bir $\alpha = \langle G, G' \rangle$ dual çifti verilsin. Eğer τ , G üzerinde bir topoloji olmak üzere α - konveks kümelerden oluşan birimin bir komşuluk tabanı var ise o zaman τ ya lokal α -konveks ve (G, τ) ye lokal α - konveks grup denir [17].

Örnek 3.2.1. S_1 mutlak değeri 1 olan kompleks sayıların bilinen çarpma işlemiyle birlikte inşa edilen grubu olsun. Öklid topolojisiyle birlikte bu grup değişimli kompakt metrik gruptur. Topolojik grupların dualite teorisinde S_1 önemli bir yer tutar. Bir X grubu için de dualite teorisinin kurulması şu şekilde olur:

X den S_1 içerisine tüm homomorfizmlerin kümesini düşünelim. Bu kümenin her bir elemanına X in bir karakteri denir. Yani X den S_1 içerisine her bir homomorfizme X in bir karakteri denir. Şimdi bu küme üzerine bir işlem kuralım.

$f_1 : X \rightarrow S_1$ ve $f_2 : X \rightarrow S_1$ (X in karakterleri) homomorfizmler olmak üzere $x \in X$ için,

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

işlemini tanımlarsak bu işlemle X in tüm karakterlerinin kümesi değişimli bir grup olur.

Ayrıca belirtelim ki bu grubun birim elemanı da

$$1_X : X \rightarrow S_1, 1_X(x) = 1$$

homomorfizmidir. Bu grup içerisinde sürekli karakterlerin kümesi bir alt grup teşkil eder ve bu alt gruba X in karakter grubu veya dual grubu denir. X in değişimli olmaması durumunda karakter grup aşıkâr grup olabilir.

X in karakter grubunu X^* ile gösterelim. Karakter grubu X üzerine şu şekilde bir topoloji koyar. τ_w ile bu topolojiyi gösterecek olursak bir $U \subset X$ kümesine τ_w ye göre açıktır veya $U \in \tau_w$ denir ancak ve ancak $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ olacak şekilde $f_1, f_2, \dots, f_n$ sonlu tane karakterleri ve $V_1, V_2, \dots, V_n \subset S_1$ açıkları mevcuttur öyle ki $\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i) \subset U$ [9].

Önerme 3.2.1. τ_X , X in kendi başlangıç topolojisi olmak üzere τ_X kuvvetli τ_w dir.

İspat. Eğer keyfi $A \in \tau_w$ ise n tane $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ ve $V_1, V_2, \dots, V_n \subset S_1$ açıkları vardır öyle ki

$$\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i) \subset A$$

dir. Her bir V_i açık olduğundan ve her bir f_i , $1 \leq i \leq n$ sürekli olduğundan $f_i^{-1}(V_i)$ de X de açıktır. Açıkların sonlu arakesiti de açık olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^n f_i^{-1}(V_i) = V \in \tau_X$$

dir.

O halde $V \subset A$ olacak biçimde $V \in \tau_X$ olduğundan $A \in \tau_X$ dir. □

Önerme 3.2.2. τ_w bir grup topolojisidir.

İspat.

X bir küme ve F , her bir f için Y_f bir topolojik uzay olmak üzere

$$f : X \rightarrow Y_f$$

fonksiyonların bir ailesi olsun. O zaman X için, F nin zayıf topolojisi(Bohr topoloji) olarak adlandırılan bir tek wF topolojisi vardır öyle ki X deki keyfi x ağı için (X, wF) de

$$x \rightarrow a \iff \text{her bir } f \in F \text{ için } Y_f \text{ de } f(x) \rightarrow f(a)$$

teoreminden yararlanarak τ_w nin bir grup topolojisi olduğunu ispatlamak için keyfi x_δ, y_δ ağlarını alalım. $x_\delta \rightarrow x$ ve $y_\delta \rightarrow y$ olsun.

$$x_\delta + y_\delta \rightarrow x + y \text{ midir?}$$

O halde

$$x_\delta \rightarrow x \text{ ise } [8; \textit{Teorem 1.6.10}] \text{ dan } f(x_\delta) \rightarrow f(x)$$

ve

$$y_\delta \rightarrow y \text{ ise } [8; \textit{Teorem 1.6.10}] \text{ dan } f(y_\delta) \rightarrow f(y)$$

olup

$$f(x_\delta) + f(y_\delta) \rightarrow f(x) + f(y)$$

ve buradan f homomorfizma olduğundan

$$f(x_\delta + y_\delta) \rightarrow f(x + y)$$

olup yine [8;Teorem 1.6.10] dan

$$\forall f \text{ için } x_\delta + y_\delta \rightarrow x + y$$

dir. □

Önerme 3.2.3. *Bir $V \subseteq X$ kümesi τ_X sınırlı $\implies \tau_w$ sınırlıdır.*

İspat. Bir $V \subseteq X$ kümesi τ_X sınırlı $\iff \forall A \in N_X(e)$ için $\exists m \in N \ni V \subseteq A^m$ dir...*

Bu taktirde V, τ_w sınırlı mıdır? Yani;

$$\forall B \in N_w(e) \text{ için } \exists n \in N \ni V \subseteq B^n$$

var mıdır?

$B \in N_w(e)$ olması için gerek ve yeter şart $e \in G \subset B$ olacak biçimde $\exists G \in \tau_w \dots^{**}$

olmasıdır. Ayrıca

$$G \in \tau_w$$

olduğundan Önerme 3.2.1 den

$$G \in \tau_X$$

bulunacağından

$G \in \tau_X$ olur. $(**)$ dan $e \in G \subset B$ olacak şekilde $\exists G \in \tau_X$ olduğundan

$$B \in N_X(e)$$

dir. O halde V kümesi τ_X sınırlı olduğundan (*) dan

$$B \in N_X(e) \text{ için de } \exists m \in N \ni V \subseteq B^m$$

bulunur.

O halde $n = m$ alınırsa

$$\forall B \in N_w(e) \text{ için } \exists n \in N \ni V \subseteq B^n$$

yazılacağından

V, τ_w sınırlıdır. Yani;

$$V \subseteq X \text{ kümesi } \tau_X \text{ sınırlı} \implies \tau_w \text{ sınırlı}$$

olarak bulunur.

Bu önermenin tersi genellikle doğru değildir yani, bir G kümesi τ_w sınırlı ise her zaman τ_X sınırlı olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin her zaman doğru olmadığını gösterir. $\square$

Örnek 3.2.2. R alışılmış topolojisi ile sınırlı olmayan bir topolojik gruptur. Fakat zayıf topolojisinde yani Bohr topolojisinde R önkompakt bir kümedir.

Ayrıca R Bohr topolojisinde bağlantılıdır. Dolayısıyla Teorem 2.1.6 dan Bohr topolojisinde sınırlıdır. Bu ise, topolojik vektör uzaylarındakinin aksine bir topolojik grupta zayıf sınırlı bir kümenin sınırlı olamayabileceğine bir örnek teşkil eder.

R Bohr topolojisinde bağlantılıdır çünkü; Bohr topoloji (R, U) dan S_1 e sürekli homomorfizmaların kurduğu bir topolojidir ve bir A kümesi Bohr topolojide bağlantılıdır ancak ve ancak her $f: (R, U) \rightarrow S_1$ sürekli homomorfizması için $f(A), S_1$ de bağlantılıdır.

Bağlantılılık sürekli dönüşümler altında korunduğundan ve alışılmış topolojisinde R bağlantılı olduğundan $f(R), S_1$ de bağlantılıdır. Yani $R, Bohr$ topolojisinde bağlantılıdır.

3.3 Konveks Kompaktlık Özelliği

Bir lokal konveks E vektör uzayı her kompakt K alt uzayının kapalı konveks mutlak hull ü kompakt olduğu zaman konveks kompaktlık (cc) özelliğine sahiptir. Bu,

lokal konveks vektör uzaylarının teorisindeki dualite ve tamlıkla alakalı problemlerle ilişkili iyi bilinen bir düşüncedir. Örneğin lokal konveks vektör uzaylarının toplamsal grupları için yarıyansımalık karakterizasyonunda [6] bu önemlidir ve metriklenebilir lokal konveks vektör uzayları için konveks kompaktlık tamlıkla eşdeğerdir [2].

Bu çeşit sonuçları topolojik abelyan gruplara genelleştirmeye temel bir engel Hahn-Banach teoreminin genel genişletmeden yoksun olmasıdır. Böylece lokal konveks uzaylar için var olan birçok sonucu aşağıda da göreceğimiz gibi basit yolla genel topolojik abelyan gruplarda genelleştirmek mümkün olmayacaktır.

Burada verilen herhangi G topolojik abelyan grubu olduğu zaman $\langle G, \hat{G} \rangle$ dualitesi p ile temsil edilecektir.

Tanım 3.3.1. *Eğer verilen herhangi bir topolojik abelyan grup MAP ve p -konveks kümeleri içeren birimin komşuluğunun bir tabanı varsa bu gruba lokal quasi-konveks grup denir [17].*

Tanım 3.3.2. *G nin her kompakt alt kümesinin p -konveks hull ü kompakt olduğu zaman bir G lokal quasi konveks grubu konveks kompaktlık özelliğine sahiptir denir [17].*

Teorem 3.3.1. *G bir metriklenebilir lokal quasi-konveks grup olsun. O zaman*

$$G \text{ tamdır} \iff G \text{ cc özelliğine sahiptir [17].}$$

KAYNAKLAR

- [1] Pontryagin, L., "Topological Groups" Princeton University Pres, 1946.
- [2] S. Kaplan: Extensions of Pontryagin Duality I. Infinite Products. Duke Math. J. 15, 649-658 (1948).
- [3] S. Kaplan: Extensions of Pontryagin Duality II: Direct and Inverse Sequences. Duke Math. J. 17, 419-435(1950).
- [4] M. F. Smith: The Pontryagin duality theorem in linear spaces. Ann. of Math. 56, (2) 248-253 (1952).
- [5] J. Hejzman, Boundedness in Uniform Spaces and Topological Groups. Czechoslovak Mathematical Journal 09, (4) 544-563 (1959).
- [6] N. Th. Varopoulos: Studies in harmonic analysis. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60, (1964) 465-516.
- [7] A. Wilansky, Functional Analysis, Blaisdel, 1964.
- [8] Wilansky, A., "Modern Methods in Topological Vector Spaces", McGrawHill, New York, 1978.
- [9] Wilansky, A., "Topology for analysis" R.E.Krieger Pub. Company Inc., Malabar, Florida 1983.
- [10] A. Wilansky, Summability Through Functional Analysis, North Holland Amsterdam, Newyork, Oxford, 1984.
- [11] I. J. Maddox, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press (Second Edition), Cambridge, 1988.
- [12] Atkin, C.J., "Boundedness in Uniform Spaces, Topological Groups and Homogeneous Spaces" Acta Math. Hungarica, 57, (3-4)(1991) 213-232.
- [13] Trigos-Arrieta, F.J., "Abelian Groups which satisfy Pontryagin Duality need not Respect Compactness" Proceedings of the American Mathematical Society, 117 (4) (1993) 1195-1200.

- [14] Çallıalp, F., "Cebir" Sakarya Üniversitesi Matbaası, 1994.
- [15] Turnwald, G., "On the continuity of the evaluation mapping associated with a group and its character group" Proceedings of the American Mathematical Society, 126 (11)(1998) 3413-3415.
- [16] Hernandez, S., Uspenskij, V., "Pontryagin Duality for Spaces of Continuous Functions" Journal of Mathematical Analysis and Applications, 242 (2000) 135-144.
- [17] Hernandez, S., "Pontryagin duality for topological Abelian groups" Mathematische Zeitschrift, 238 (2001) 493-503.
- [18] Bonales, F.G., "A characterization of Pontryagin-van Kampen duality for locally convex spaces" Topology and Its Appl., 121 (2002) 75-89.
- [19] Hernandez, S., Trigos-Arrieta, F.J., "Group duality with the topology of precompact convergence" Journal of Mathematical Analysis and Applications, 303(2005) 274-287.
- [20] Rahimov, A., "Topolojik Uzaylar" Seçkin, 2006.
- [21] Yüksel, Ş., "Genel Topoloji" Eğitim Kitabevi Yayınları, 2006.
- [22] Bruguera, M. And Tkachenko, M., "Bounded Sets in Topological Groups and Embeddings" Topology and Its Appl., 154, (2007) 1298-1306.
- [23] Yılmaz Y., İlhan İçen, M.Habil Gürsoy, Topolojik Gruplarda Sınırlılık ve Sınırlı Homomorfizmler, 2. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, Sakarya Üniversitesi, Sakarya, 2007.