

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, homotopi pertürbasyon metodu ve homotopi analiz metodunu kullanarak bazı lineer ve nonlinear problemlerin çözümlerini elde etmek ve çözümlerin karşılaştırmasını yapmaktır.

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın I. bölümünde, homotopi kavramı ve pertürbasyon teorisi kısaca verilmiş, homotopi pertürbasyon metodu tanıtılmış ve bu metot bir ve iki-boyutlu homojen, üç-boyutlu homojen olmayan değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulanarak çözümler elde edilmiş ve bulunan çözümlerin yakınsaklık analizi verilmiştir.

II. Bölümde homotopi analiz metodu tanıtılmış ve bu metot kullanılarak lineer backward ve forward Kolmogorov ve nonlinear Fokker-Planck denklemlerinin $\hbar$ -yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edilmiş ve çözümlerin analizi yapılmıştır.

III. Bölümünde her iki metotla bulunan çözümler karşılaştırılmış ve elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

ABSTRACT

The purpose of this study is obtaining the solutions of certain linear and nonlinear problems by using homotopy perturbation method and homotopy analysis method and making the comparison of these solutions.

This study consists three chapters in total and in the first chapter the concept of homotopy and perturbation theory are given briefly, the homotopy perturbation method is introduced and solutions are obtained by applying this method to one and two-dimensional homogeneous, three-dimensional nonhomogeneous heat-like and wave-like initial and boundary value problems with variable coefficients. Then convergence analysis of the found solutions is given.

In the second chapter, homotopy analysis method is introduced and by using this method the series solutions according to the $\hbar$ -convergence control parameter of linear backward and forward Kolmogorov and nonlinear Fokker-Planck equations are obtained and analysis of the solutions is made.

In the third chapter, the solutions found by both of the methods are compared.

In conclusion, the results obtained are evaluated.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın her aşamasında bana rehberlik eden, tecrübesini benimle paylaşan, güler yüzü ile beni motive eden değerli hocam Prof. Dr. Turgut ÖZİŞ 'e, verdiği tüm emekler ve geleceğe yönelik kazandırdığı bilimsel bakış açısı için teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince yardımlarını ve desteğini esirgemeyen, değerli hocam Prof. Dr. Hülya İŞCAN 'a, ilgisi ve yol gösterici yorumları için teşekkür ederim.

Ayrıca bana maddi ve manevi her türlü desteği veren aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
GİRİŞ.....	1
I.BÖLÜM/HE’NİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN DEĞİŞKEN KATSAYILI ISI-TİPİ VE DALGA TİPİ DENKLEMLERE UYGULANMASI.....	4
1.1. Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	4
1.1.1. Homotopi kavramı.....	4
1.1.2. Pertürbasyon teorisinin genel tanımı ve tarihçesi.....	7
1.1.3. Homotopi Pertürbasyon Metodunun Tanımı ve Uygulamaları.....	9
1.2. Değişken Katsayılı Isı -Tipi ve Dalga-Tipi Denklemlerin Çözümü için He’nin Homotopi Pertürbasyon Metodu.....	17
1.2.1. Denklemin çözümü için homotopi pertürbasyon metodu.....	18
1.2.2. Isı-tipi modeller.....	20
1.2.3. Dalga tipi modeller.....	27
1.2.4. Homotopi pertürbasyon metodunun değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi denklemler için yakınsaklığı.....	34
1.2.5. Isı-tipi modellerde yakınsaklık.....	36
1.2.6. Dalga-tipi modellerde yakınsaklık.....	47
1.3. Fokker-Planck Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü.....	63
II. BÖLÜM / HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN FOKKER-PLANCK DENKLEMİNE UYGULANMASI.....	73
2.1. Homotopi Analiz Metodu.....	73
2.1.1 Homotopi-türevinin özellikleri.....	78
2.1.2. Deformasyon denklemleri.....	83
2.1.3. Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi.....	90
2.1.4. Yüksek-derece deformasyon denklemi.....	92
2.1.5. Yakınsaklık teoremi.....	93

2.2. Fokker-Planck Denkleminin Çözümü için Homotopi Analiz Metodu.....	95
2.2.1. Fokker-Planck denkleminin homotopi analiz metodu ile çözümü için örnekler ..	97
III. BÖLÜM/HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN KARŞILAŞTIRILMASI.....	131
SONUÇLAR.....	141
KAYNAKLAR.....	143
ÖZGEÇMİŞ.....	148

GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, bir veya iki-boyutlu homojen, üç-boyutlu homojen olmayan değişken katsayılı ısı-tipi, dalga-tipi başlangıç ve sınır değer problemlerini homotopi pertürbasyon metodu ile çözmek ve çözümün yakınsaklığını göstermek, lineer backward ve forward Kolmogorov ve nonlinear Fokker-Planck denklemlerini homotopi analiz metodu ile çözmek ve homotopi pertürbasyon metodu ile homotopi analiz metodunun Fokker-Planck denklemleri üzerinde karşılaştırmasını yapmaktır.

Çözümü zor olan bir problemi, kolay çözülebilir bir probleme dönüştürmeyi sağlayan homotopi metodu, son yıllarda mühendislik uygulamalarında ve nonlinear problemlerin çözümlerinde kullanılmaktadır.

Homotopi pertürbasyon metodu (HPM), 1998 yılında Ji-Huan He [1-7] tarafından verilmiştir. He, metodu oluştururken pertürbasyon tekniği ile homotopi kavramını birleştirmiş ve nonlinear problemleri, çözümü kolay lineer problemlere dönüştürmüştür. Bilindiği gibi bu yöntemler, 90'lı yıllarda ortaya çıkan yöntemler olup temelde seri çözümlere dayanırlar. Çözümlerin seri şeklinde olması ve bazı durumlarda çözümlerin kapalı formlarının elde edilebilmesi, bu yöntemleri farklı dallarda çalışan bilim adamları arasında popüler kılmış ve çözümlerin farklı yorumlarının yapılabilmesini sağlamıştır. Bu çalışmada çözülen problemlerin bir kısmının literatürde analitik metotlarla çözümleri olmasına rağmen, bu çözümlerin analizinin yapılması mümkün değildir. Burada kullanılan yaklaşımlarla, elde edilen literatürde mevcut ve yeni çözümlerin analizinin yapılması sağlanmıştır. Birçok araştırmacı homotopi pertürbasyon metodunu çeşitli problemlere uygulamıştır [8-18].

Benzer şekilde homotopi kavramı ile Taylor serisini birleştiren "homotopi analiz metodu (HAM)" ise 1992'de Shijun Liao [19-31] tarafından verilmiştir. Homotopi pertürbasyon metodundan farklı olarak homotopi analiz metodu ile bir analitik seri çözüm tekniğinde yakınsaklığın kontrolü de sağlanmıştır. Birçok araştırmacı çeşitli fiziksel ve mühendislik problemini bu yöntemle başarılı bir şekilde çözmüştür [32-38]. Liao, metot için yeni tanım ve teoremler vererek bazı kavramlara açıklık getirmiş [31] ve 2003 yılında yayınlanan "Beyond Perturbation: Introduction to the homotopy

analysis method” adlı kitabında [19], homotopi analiz metodunun Lyapunov yapay parametre metodu, δ -açılım metodu, Adomian ayrışım metodu gibi diğer non-pertürbatif metotlarının genel hali olduğunu kanıtlamış ve homotopi pertürbasyon metodunun da kendi yönteminin bir özel hali olduğunu göstermiştir.

Son yıllarda bazı araştırmacılar, homotopi petürbasyon metodu ve homotopi analiz metodunun karşılaştırılmasını veren makaleler yazmışlardır [39-43]. Fakat bu makalelerin yeterli analiz içermedikleri görülmüştür. Yapılan literatür taraması sonucunda, metotların karşılaştırılması için yazılan makalelerin yeterli olmadığını tespitine dayanarak bazı lineer ve nonlinear problemler her iki yöntemle çözülüp çözüm analizlerinin yapılması amaçlanmıştır.

Yukarıdaki çalışmalardan yararlanılarak, üç bölümden oluşan bu çalışmanın I. bölümünde homotopi kavramı ve pertürbasyon teorisi kısaca verilmiş, homotopi pertürbasyon metodu tanıtılmış ve bu metot bir ve iki-boyutlu homojen, üç-boyutlu homojen olmayan değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi başlangıç ve sınır değer problemlerine uygulanarak çözümler elde edilmiş, bulunan çözümlerin yakınsaklık analizi yapılmıştır. Homotopi analiz metodu ile bulunan çözümlerle karşılaştırma yapmak için, J.Biazar vd. [44] tarafından homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözümler detaylı şekilde verilmiştir.

II. Bölümde homotopi analiz metodu tanıtılmış ve bu metot kullanılarak, lineer backward ve forward Kolmogorov ve nonlinear Fokker-Planck denklemlerinin $\hbar$ -yakınsaklık kontrol parametresine bağlı seri çözümleri elde edilmiştir. Çözümlerin analizi yapıldığında yakınsamaların, Liao’nun iddia ettiği gibi, $\hbar$ -yakınsaklık kontrol parametresine bağlı olduğu ve $\hbar$ -yakınsaklık kontrol parametresinin -1 olması durumunda elde edilen seri çözümlerin tam çözümü verdiği görülmüştür. II. bölümde Fokker-Planck denklemi için homotopi analiz metodu ile bulunan 4. dereceden yaklaşık çözümler, çalışmanın III. Bölümünde J.Biazar vd. [44] tarafından homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözümlerle karşılaştırılmış ve her iki çözümün de tam çözüme yakınsadığı görülmüştür.

Yukarıda homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotları ile verilen literatür çalışmalarında her iki yöntemin iyi sonuçlar verdikleri ifade edilmesine rağmen S. Liang ve D.J. Jeffrey’in evrim denklemi üzerinde homotopi pertürbasyon metodu ve homotopi analiz metodu ile yaptığı karşılaştırmada [43] ise homotopi pertürbasyon

metodu ile bulunan çözümün yakınsak olmadığı, homotopi analiz metodu ile bulunan çözümün h -yakınsaklık kontrol parametresine bağlı olarak çok yavaş (30.dereceden yaklaşım) yakınsadığı görülmüştür.

Bu makaleye dayanarak her iki metodun da problem bağımlı oldukları tespit edilmiştir. Dolayısı ile hüküm oluşturabilmek için daha farklı problemlerin bu metotlarla çözülerek analizlerinin yapılması gerekmektedir.

I. BÖLÜM

1. HE'NİN HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODUNUN DEĞİŞKEN KATSAYILI ISI-TİPİ VE DALGA TİPİ DENKLEMLERE UYGULANMASI

1.1. Homotopi Pertürbasyon Metodu

1.1.1. Homotopi kavramı

Homotopi kavramı, 1895 yılında Henri Poincaré tarafından “*Analysis Situs*, Journal de l'École Polytechnique ser 2, **1** (1895) pages 1-123.” adlı makalede tanıtılmıştır. Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli konularından biridir. Bu kavram daha sonra homolojinin temellerini oluşturmuştur. İki dönüşüm arasındaki homotopinin genel tanımı ise ilk olarak 1911 yılında L.E.J. Brouwer tarafından verilmiştir. İki matematiksel obje, biri diğerine sürekli olarak deforme oluyorsa *homotopiktirler* denir.

1.1.1.1. Tanım $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $I = [0,1]$ olsun. Her $x \in X$ için $H(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = g(x)$ eşitliklerini sağlayan bir $H : X \times I \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa f ve g **homotopiktir** denir. Bu durumda H dönüşümüne f ve g arasında bir **homotopidir** denir.

1.1.1.1. Örnek: $X = Y = \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) = x$, $g(x) = 0$ biçiminde tanımlansın. $H : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $H(x,t) = (1-t)f(x)$ ile tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında bir homotopidir. İki fonksiyon arasında birden fazla homotopi tanımlanabilir. $H_1(x,t) = (1-t^2)f(x)$ ile tanımlanan $H_1 : \mathbb{R}^n \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü de f ve g arasında yine bir homotopidir.

1.1.1.2.Örnek: $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ sürekli dönüşümler olsun. $H : X \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x)$, $H(x, 0) = f(x)$ ve $H(x, 1) = g(x)$ biçiminde tanımlanan H dönüşümü f ve g arasında bir homotopidir. Yani f ve g homotopiktir.

1.1.1.2. Tanım: $f : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümü sabit bir dönüşüme homotopik ise f 'ye **null-homotopiktir** denir.

Bazı durumlarda homotopinin kısıtlanmış bir tipi göz önüne alınır. Bu kısıtlama altında bir alt kümenin deformasyonla sabit kalması istenir.

Uç noktaları aynı x_1 ve x_2 olan basit f ve g yayları göz önüne alınsın. Yukarıda belirtilen yöntemle göre; 1.1.Şekilde gösterildiği gibi, ortadaki yay ailesinin her elemanının aynı x_1 ve x_2 uç noktalarına sahip olması şartıyla f , g 'ye sürekli deforme olsun. Bu durumda f ve g dönüşümleri, x_1 ve x_2 'yi kapsayan bir alt kümeye göre homotopiktir denir . Bu tanım aşağıdaki biçimde ifade edilir.

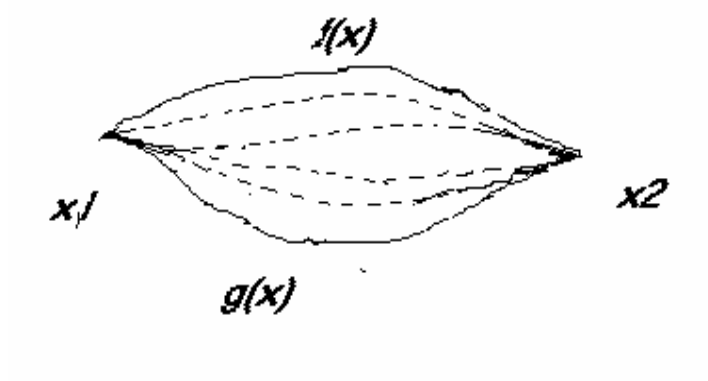
1.1.1.3. Tanım: $f : X \rightarrow Y$, $g : X \rightarrow Y$ sürekli dönüşümler, $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $t \in I$ ve her $x \in A$ için $H(a, t) = f(a) = g(a)$ olacak biçimde bir $H : X \times I \rightarrow Y$ homotopisi varsa f ve g **dönüşümleri A alt kümesine göre homotopiktir** denir.

1.1.1.4. Tanım: f ve g , $I = [0, 1]$ aralığından X 'e tanımlanan sürekli dönüşümler olmak üzere; f ve g aynı x_0 başlangıç, x_1 bitiş noktalarına sahipeler ve

$$\text{Her } s, t \in I \text{ için } H(s, 0) = f(s) \text{ ve } H(s, 1) = g(s),$$

$$H(0, t) = x_0 \text{ ve } H(1, t) = x_1$$

olacak biçimde sürekli bir $H : I \times I \rightarrow X$ dönüşümü varsa H 'ye f ve g **arasında yol homotopisi** denir. f , g topolojide yol olarak adlandırıldıklarından oluşturulan homotopiye yol homotopisi denir.



1.1. Şekil

İlk koşul, H 'nin f ve g arasında bir homotopi olduğunu, ikinci koşul ise her t için $f_1(s) = H(s, t)$ denklemi ile tanımlanan f_1 yolunun x_0 'dan x_1 'e giden bir yol olduğunu belirtir. Başka bir deyişle, ilk koşul, H 'nin f 'den g 'ye deformasyonun sürekli bir yolunu temsil ederken ikinci koşul, yolun uç noktalarının deformasyon boyunca sabit kaldığını belirtir.

1.1.2. Pertürbasyon teorisinin genel tanımı ve tarihçesi

Pertürbasyon teorisi [46], tam olarak çözülemeyen bir problemin yaklaşık çözümünü bulmak için kullanılan matematiksel metotlar içerir. Eğer problem, bir “küçük” terim eklenerek tam olarak çözülebilen probleme formüle ediliyorsa probleme pertürbasyon teorisi uygulanabilir. Pertürbasyon teorisi, problemin çözümünü, tam olarak çözülebilen problemden sapmayı ölçen bir “küçük” parametrenin kuvvet serisi cinsinden bulmayı amaçlar. Kuvvet serisindeki ilk terim, tam olarak çözülebilen problemin çözümü iken, diğer terimler, çözümde başlangıç problemine göre sapmayı tanımlarlar. A çözümüne yaklaşım için aşağıdaki küçük parametreye göre açılan (burada parametre ε ’dur) seri verilsin:

$$A = \varepsilon^0 A_0 + \varepsilon^1 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$$

Bu örnekte A_0 , tam olarak çözülebilen başlangıç probleminin bilinen çözümünü ve $A_1, A_2, \dots$, bir sistematik yöntemle iteratif olarak bulunan daha yüksek dereceden çözümleri gösterir. ε ’ un çok küçük olması durumunda, yukarıdaki serinin yakınsak olması, küçük ε değeri için bulunan daha yüksek dereceden çözümlerin daha az önemli olduğu anlamına gelir. Bir yaklaşık pertürbasyon çözümü, seriyi bir yerden sonra kesip, genelde sadece ilk iki terimi, başlangıç çözümü ve “birinci derece” pertürbasyon düzeltmesini, bırakarak elde edilir. ε çok küçük olmasına rağmen, bazı problemlerde çözüm yakınsak olmayabilir. Birçok önemli problemde küçük pertürbasyonların verilmesi, çözümlerin niceleyici ve niteleyici özelliklerini ortaya koyar fakat bu

özellikler, pertürbe edilmeyen problemlerin çözümlerinkilerden oldukça farklı olabilirler.

Örneğin ;

$$u' + u - \varepsilon = 0, \quad u(0) = 1$$

ve

$$u' - u - \varepsilon = 0, \quad u(0) = 1$$

denklemleri göz önüne alınsın. Birinci denklemin çözümü $u(t) = \varepsilon + (1 - \varepsilon)e^{-t}$ iken pertürbe edilmemiş denklemin çözümü $u_0(t) = e^{-t}$ 'dir. $\varepsilon \ll 1$ olduğunda $|u(t) - u_0(t)| \leq \varepsilon$ için pertürbasyon çözümünün doğruluğu yüksektir. İkinci denklem için ise pertürbe edilmemiş problemin çözümü $u_0(t) = e^t$ 'dir ve $|u(t) - u_0(t)| = \varepsilon |1 - e^t|$ elde edilir. Burada, $t > 1$ olduğunda u_0 , denklemin yaklaşık çözümü olarak düşünülemez.

Pertürbasyon metotları, orjinal problemin, tam olarak çözmeye yetecek kadar basitleştirilmiş formuyla başlar. Genel yöntem, fen ve mühendislikte çok kullanılan matematiksel bir araçtır: basitleştirilmiş bir problemle başlamak ve aşamalı olarak düzeltmeler eklerken düzelmiş problemin giderek gerçeği temsil eden formüle yaklaşmasını sağlamak.

Hemen hemen bütün pertürbasyon metotları, bir denklemde küçük bir parametrenin olması gerektiği varsayımına dayanır. Bu küçük parametre varsayımı, pertürbasyon tekniklerinin uygulamalarını önemli ölçüde kısıtlar. Nonlinear problemlerin özellikle kuvvetli nonlinearliğe sahip olanların hepsinde küçük parametreler yoktur. Bir küçük parametrenin belirlenmesi zor ve özel teknikler gerektirir. Küçük parametrenin uygun seçimi ideal sonuçlar vermesine rağmen, uygunsuz seçimi de ciddi anlamda kötü sonuçlara yol açabilir. Uygun bir küçük parametre bulunsa bile, çoğu durumda, pertürbasyon metotları ile bulunan yaklaşık çözümler, sadece parametrenin küçük değerleri için geçerlidir. Örneğin, çoklu ölçek metoduyla (the method of multiple scales) çözülen yaklaşımlar, sistem parametresi küçük olduğu sürece geçerlidir. Fakat yaklaşımlara da tamamen güvenilmez çünkü parametrenin ne kadar küçük olması gerektiğine dair bir kriter yoktur. Buna rağmen pertürbasyon teorisi, birçok dönemde, birçok farklı alanda kullanılmıştır. 20. yüzyılın sonunda, kuantum fiziğinde pertürbasyon teorisi ile ilgili göze çarpan memnuniyetsizlik, sadece açılımda ikinci dereceden öteye gitmedeki zorlukları

içermesi değil aynı zamanda pertürbatif açılımın yakınsak olup olmadığı hakkındaki sorularla da karşı karşıya kalınmasıdır. Bu da pertürbasyon metotlarının sınırlamaları olduğunu gösterir.

Pertürbasyon metotlarının kısıtlı olması, tam olarak çözülebilen modellerin çalışıldığı non-pertürbatif analiz alanına büyük bir ilgi duyulmasına yol açmıştır. Bu alandaki prototipik modeller; kuvvetli nonlinearliğe ve ilginç çözümlere sahip KdV denklemi ve sonsuz derecede pertürbasyon uygulanılsa bile pertürbasyon teorisi ile çözüme ulaşamayan solitonlardır.

Bu bölümde, topolojideki homotopi kavramı ile pertürbasyon tekniğini birleştirerek pertürbasyon metotlarının dezavantajlarını ortadan kaldıran ve sadece zayıf nonlinear denklemler için değil aynı zamanda kuvvetli nonlinearliğe sahip denklemler için de elde edilen çözümlerin, tüm çözüm bölgesinde geçerli olduğu, yarı analitik bir metot olan homotopi pertürbasyon metodu tanıtılacaktır.

1.1.3. Homotopi Pertürbasyon Metodunun Tanımı ve Uygulamaları

Homotopi, diferansiyel topolojinin önemli bir konusudur. Bir nonlinear cebirsel denklemin bütün köklerini bulmak için homotopi teknikleri uygulanabilir. Bunu göstermek için aşağıdaki denklem göz önüne alınsın:

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1.1)$$

Bu denklemde homotopiyi uygulayabilmek için, $p \in [0,1]$ bir gömme (embedding) parametresi, x_0 , (1.1.1) denkleminin başlangıç yaklaşımı olmak üzere aşağıdaki $H : \mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ homotopisi kurulabilir.

$$H(\xi, p) = pf(\xi) + (1-p)[f(\xi) - f(x_0)] = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad p \in [0,1] \quad (1.1.2.a)$$

veya

$$H(\xi, p) = f(\xi) - f(x_0) + pf(x_0) = 0 \quad \xi \in IR, \quad p \in [0,1] \quad (1.1.2.b)$$

Bu denklemlerden

$$H(\xi, 0) = f(\xi) - f(x_0) = 0 \quad (1.1.3)$$

$$H(\xi, 1) = f(\xi) = 0 \quad (1.1.4)$$

olduğu açıktır.

$p = 0$ 'dan $p = 1$ 'e değıştikçe, $H(\xi, p)$ değeri $f(\xi) - f(x_0)$ 'dan $f(\xi)$ 'ye değışir. Bu bir topolojik deformasyondur. $f(\xi) - f(x_0)$ ve $f(\xi)$ de homotopiktirler. $0 \leq p \leq 1$ olduğundan gömme (embedding) parametresi “küçük parametre” olarak düşünülebilir. Pertürbasyon tekniğı uygulanarak, (1.1.2) denkleminin çözümü aşağıdaki gibi p 'nin bir kuvvet serisi olarak yazılabilir;

$$\xi = \xi_0 + p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots \quad (1.1.5)$$

p parametresi 1'e yakınsarken (1.1.2.a.,b.) denklemleri, (1.1.1) denklemine karşı gelir ve (1.1.5) serisi, (1.1.1) denkleminin bir yaklaşık çözümü olur ve çözüm $x = \lim_{p \rightarrow 1} \xi = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \dots$ (1.1.6)

olarak bulunur.

(1.1.2) denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için $f(\xi)$ fonksiyonu, ξ_0 noktası civarında Taylor serisine açılır;

$$f(\xi) = f(\xi_0) + f'(\xi_0)(p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots) + \frac{1}{2!}f''(\xi_0)(p\xi_1 + p^2\xi_2 + \dots)^2 + \dots \quad (1.1.7)$$

(1.1.7) eşitliğı, (1.1.2.b) eşitliğinde yerine konup, p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek

$$p^0 : f(\xi_0) - f(x_0) = 0, \quad (1.1.8)$$

$$p^1 : f'(\xi_0)\xi_1 + f(x_0) = 0, \quad (1.1.9)$$

$$p^2 : f'(\xi_0)\xi_2 + \frac{1}{2!}f''(\xi_0)\xi_1^2 = 0, \quad (1.1.10)$$

$$p^3 : f'(\xi_0)\xi_3 + \frac{1}{2!}f''(\xi_0)2\xi_1\xi_2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi_0)\xi_1^3 = 0, \quad (1.1.11)$$

.

.

denklemleri elde edilir.

İlk dört denklemden ξ_1, ξ_2, ξ_3 çözülerek

$$\xi_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}, \quad (1.1.12)$$

$$\xi_2 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1^2}{2!f'(\xi_0)} = -\frac{f''(\xi_0)}{2!f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2, \quad (1.1.13)$$

$$\xi_3 = -\frac{f''(\xi_0)\xi_1\xi_2}{f'(\xi_0)} - \frac{f'''(\xi_0)\xi_1^3}{3!f'(\xi_0)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{f''(\xi_0)}{f'(\xi_0)}\right)^2\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 + \frac{f'''(\xi_0)}{6f'(\xi_0)}\left(\frac{f(x_0)}{f'(\xi_0)}\right)^3 \quad (1.1.14)$$

bulunur.

$p = 1$ iken birinci dereceden yaklaşık çözüm

$$x = \xi_0 + \xi_1 = \xi_0 - \frac{f(\xi_0)}{f'(\xi_0)}, \quad (1.1.15)$$

biçiminde elde edilir. Bu çözüm

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}. \quad (1.1.16)$$

iterasyon formülü kullanılarak da yazılabilir.

(1.1.8) denkleminin bir çözümü olan $\xi_0 = x_0$ da (1.1.16) denkleminde yerine konularak

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (1.1.17)$$

Newton iterasyon formülü elde edilir. Benzer olarak ikinci dereceden yaklaşık çözüm

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2, \quad (1.1.18)$$

biçimindedir ve iterasyon formülüyle

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)}\left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}\right)^2, \quad (1.1.19.a)$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)}\left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right)^2. \quad (1.1.19.b)$$

biçiminde gösterilir. Üçüncü dereceden yaklaşık çözüm ise

$$x = \xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (1.1.20)$$

olduğundan iterasyon formülüyle

$$x_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \frac{f'''(\xi_n)}{6f'(\xi_n)} \right\} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^3 \quad (1.1.21.a)$$

veya

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \right)^2 - \frac{f'''(x_n)}{6f'(x_n)} \right\} \left(\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right)^3 \quad (1.1.21.b)$$

ile verilir [47,48].

1.1.1.3. Örnek $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$ ikinci dereceden polinomunun çözümleri Homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur;

$x_0 = 0$ başlangıç çözümü ile başlanır ve $f(\xi_0) - f(x_0) = (\xi_0 - x_0)(\xi_0 + x_0 + 1) = 0$ denklemi çözülürse; $\xi_0^{(1)} = 0$ ve $\xi_0^{(2)} = -1$ çözümleri bulunur. Bu çözümler ikinci dereceden yaklaşık çözüm için (1.1.19.a) iterasyon formülünde yerine konularak

$$x_1^{(1)} = \xi_0^{(1)} - \frac{f(\xi_0^{(1)})}{f'(\xi_0^{(1)})} - \frac{f''(\xi_0^{(1)})}{2f'(\xi_0^{(1)})} \left(\frac{f(\xi_0^{(1)})}{f'(\xi_0^{(1)})} \right)^2 = -\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f''(0)}{2f'(0)} \left(\frac{f(0)}{f'(0)} \right)^2 = -2$$

$$x_1^{(2)} = \xi_0^{(2)} - \frac{f(\xi_0^{(2)})}{f'(\xi_0^{(2)})} - \frac{f''(\xi_0^{(2)})}{2f'(\xi_0^{(2)})} \left(\frac{f(\xi_0^{(2)})}{f'(\xi_0^{(2)})} \right)^2 = -\frac{f(-1)}{f'(-1)} - \frac{f''(-1)}{2f'(-1)} \left(\frac{f(-1)}{f'(-1)} \right)^2 = 1$$

$x_1^{(1)} = -2, x_1^{(2)} = 1$ çözümleri elde edilir. Bulunan çözümler denklemin tam çözümleridir.

1.1.1.4. Örnek $f(x) = x - \varepsilon \cosh x$ denkleminin $x = 0$ civarında bir kökünü bulmak için $x_0 = 0$ başlangıç çözümü ile başlanarak (1.1.19.b) denkleminde sadece bir iterasyonla

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(x_0)}{2f'(x_0)} \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right)^2 = -\frac{f(0)}{f'(0)} - \frac{f''(0)}{2f'(0)} \left(\frac{f(0)}{f'(0)} \right)^2 = \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}$$

çözümü bulunur. $\varepsilon = 0.20$ olduğunda, denklemin tam çözümü, $x_1 = 0.5050$ iken ikinci dereceden yaklaşık çözümü $x_1 = 0.49129$ 'dur.

Yukarıda, cebirsel denklemleri çözmek için homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak oluşturulan yeni iteratif metodun yakınsaklığı analiz edilerek metodun en az üçüncü dereceden yakınsak olduğu kanıtlanmıştır [48]:

(1.1.1) denkleminin çözümü için oluşturulan iteratif metot, aşağıdaki algoritmalarından birisi kullanılarak verilebilir.

1.1.1.1. Algoritma Verilen bir ξ_0 için oluşturulan iteratif yöntemle

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)}. \quad (1.1.22)$$

yaklaşık çözümü hesaplanır.

1.1.1.2. Algoritma Verilen bir ξ_0 için oluşturulan iteratif yöntemle

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 \quad (1.1.23)$$

yaklaşık çözümü hesaplanır.

1.1.1.3. Algoritma Verilen bir ξ_0 için oluşturulan iteratif yöntemle

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f''(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 - \frac{f'''(\xi_n)}{6f'(\xi_n)} \right\} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^3 \quad (1.1.24)$$

yaklaşık çözümü hesaplanır.

Aşağıda 1.1.1.2.Algoritmanın yakınsaklığı incelenecektir.

1.1.1.6. Tanım $e_n = \xi_n - r$, n . derecede kesme hatası olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^k} = c, \quad (1.1.25)$$

olacak biçimde bir $k \geq 1$ sayısı ve bir $c \neq 0$ sabiti varsa k 'ye **metodun yakınsaklık derecesi** denir.

1.1.1.TEOREM: $f(x)=0$ nonlinear bir denklem ve f yeterince diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise (1.1.23) denklemi ile tanımlanan iteratif metot için yakınsaklık derecesi en az üçtür.

Kanıt: r , f 'nin bir kökü olsun. f yeterince diferansiyellenebildiğinden, r civarında

$$f(\xi_n), f'(\xi_n) \text{ ve } f''(\xi_n) \text{ fonksiyonları seriye açılarak } c_n = \frac{1}{n!} \frac{f^{(n)}(r)}{f'(r)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \text{ ve}$$

$e_n = \xi_n - r$ olmak üzere ;

$$f(\xi_n) = f'(r) [e_n + c_2 e_n^2 + c_3 e_n^3 + c_4 e_n^4 + c_5 e_n^5 + \dots],$$

$$\begin{aligned}
f'(\xi_n) &= f'(r) [1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + 5c_5 e_n^4 + 6c_6 e_n^5 + \dots], \\
f''(\xi_n) &= f'(r) [2c_2 e_n + 6c_3 e_n + 12c_4 e_n^2 + 20c_5 e_n^3 + 30c_6 e_n^4 + 42c_7 e_n^5 + \dots],
\end{aligned}
\tag{1.1.26}$$

denklemleri elde edilir. (1.1.26)'dan

$$\begin{aligned}
\xi_n - r - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} &= e_n^2 \left[\frac{c_2 + 2c_3 e_n + 3c_4 e_n^2 + 4c_5 e_n^3 + \dots}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + \dots} \right], \\
-\frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 &= \\
\frac{e_n^2}{2} \left[\frac{2c_2 + (6c_3 + 4c_2^2)e_n + (12c_4 + 12c_2 c_3 + 2c_2(2c_3 + c_2^2))e_n^2 + ((120c_5 + 24c_2 c_5) + 6c_3(2c_3 + c_2^2) + 2c_2(2c_4 + 2c_2 c_3))e_n^3 + \dots}{1 + 2c_2 + (6c_3 + 4c_2^2)e_n + (3c_3 + 8c_2^2 + 6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + (12c_4 + 12c_2^2 c_3 + 24c_2 c_3 + 8c_2^3)e_n^3 + \dots} \right]
\end{aligned}
\tag{1.1.27}$$

$$A = \frac{c_2 + 2c_3 e_n + 3c_4 e_n^2 + 4c_5 e_n^3 + \dots}{1 + 2c_2 e_n + 3c_3 e_n^2 + 4c_4 e_n^3 + \dots}$$

ve

$$B = \frac{1}{2} \left[\frac{2c_2 + (6c_3 + 4c_2^2)e_n + (12c_4 + 12c_2 c_3 + 2c_2(2c_3 + c_2^2))e_n^2 + ((120c_5 + 24c_2 c_5) + 6c_3(2c_3 + c_2^2) + 2c_2(2c_4 + 2c_2 c_3))e_n^3 + \dots}{1 + 2c_2 + (6c_3 + 4c_2^2)e_n + (9c_3 + 8c_2^2 + 4c_2^2)e_n^2 + (12c_4 + 12c_2^2 c_3 + 24c_2 c_3 + 8c_2^3)e_n^3 + \dots} \right]$$

olmak üzere

$$\xi_n - r - \frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} - \frac{f''(\xi_n)}{2f'(\xi_n)} \left(\frac{f(\xi_n)}{f'(\xi_n)} \right)^2 = e_n^2 (A - B)$$

$$= e_n^3 \frac{8c_2^3 - 2c_3 - 4c_2^2 + [2c_2(3c_3 + 13c_2^2 + 6c_3) - (12c_4 + 16c_2c_3 + 2c_2^3)]e_n + \dots}{2(1 + 2c_2e_n + 3c_3e_n^2 + \dots)(1 + (2c_2 + 4c_2^2)e_n + (3c_3 + 8c_2^3 + 6c_3 + 4c_2^2)e_n^2 + \dots)} \cdot \quad (1.1.28)$$

Yukarıdaki terimlerin hepsi birleştirilerek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^3} = 4c_2^3 - c_3 - 2c_2^2 = 4 \left(\frac{1}{2!} \frac{f^{(2)}(r)}{f'(r)} \right)^3 - \frac{1}{3!} \frac{f^{(3)}(r)}{f'(r)} - 2 \left(\frac{1}{2!} \frac{f^{(2)}(r)}{f'(r)} \right)^2, \quad (1.1.29)$$

elde edilen (1.1.29) denklemi, 1.1.1.2.Algoritmanın yakınsaklık derecesi en az üç olan bir metod olduğunu gösterir.

Görüldüğü gibi, bu metod klasik Newton – Raphson iteratif kök bulma metodunu modifikasyonları ile birlikte sistematik olarak vermektedir.

Homotopi pertürbasyon metodunun kullanıldığı en geniş alan diferansiyel denklemlerdir. Metod, çözümü zor veya uzun olan bir nonlinear veya lineer problemi çözümü kolay olan lineer denklem sistemine indirger. Bu çalışmada homotopi pertürbasyon metodu diferansiyel denklemlere aşağıdaki gibi uygulanmıştır.

Homotopi pertürbasyon metodu, çeşitli lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümü için alışılmamış ve etkin bir metottur. Genel nonlinear bir denklem üzerinde metodun diferansiyel denklemlere uygulandığı gösterilsin. A genel bir diferansiyel operatör, B bir sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik bir fonksiyon, Γ , Ω bölgesinin sınırı olmak üzere;

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (1.1.30)$$

nonlinear denkleminin sınır koşulları;

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \quad (1.1.31)$$

olsun. A operatörü, L bir lineer ve N bir nonlinear operatör olmak üzere; L ve N gibi iki parçaya ayrılarak (1.1.30) denklemi aşağıdaki biçimde yeniden yazılır;

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (1.1.32)$$

Homotopi tekniğiyle, $v: \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbb{I}$ bir dönüşüm, $p \in [0,1]$ bir gömme parametresi, u_0 (1.1.30) denkleminin sınır koşullarını sağlayan başlangıç yaklaşımı olmak üzere; (1.1.33.a) veya (1.1.33.b) denklemlerini sağlayan bir $H(v(r, p), p) = 0$ homotopisi aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$H(v(r, p), p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0,1], \quad (1.1.33.a)$$

veya

$$H(v(\mathbf{r}, p), p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(\mathbf{r})] = 0 \quad (1.1.33.b)$$

Homotopilerinden

$$H(v(\mathbf{r}, 0), 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (1.1.34)$$

ve

$$H(v(\mathbf{r}, 1), 1) = A(v) - f(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.1.35)$$

denklemleri elde edilir.

$p = 0$ olduğunda (1.1.32) denklemi, lineer denklem olurken, $p = 1$ iken lineer olmayan orjinal denkleme dönüşür. p parametresinin $p = 0$ 'dan $p = 1$ 'e değişimi, $v(\mathbf{r}, p)$ çözüm serisinin, $u_0(\mathbf{r})$ başlangıç yaklaşımından, denklemin çözümü olan $u(\mathbf{r})$ 'ye değişimini verir. Bu bir deformasyondur. Bu durumda $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(\mathbf{r}) = 0$ denklemlerine de "homotopiktirler" denir. Burada görüldüğü gibi, homotopi pertürbasyon metodunun amacı, çözümü zor bir problemin, çözümü basit olan bir probleme sürekli bir deformasyonunu elde etmektir. Eğer p ($0 \leq p \leq 1$) gömme parametresi "küçük parametre" olarak düşünülürse, pertürbasyon tekniğiyle, (1.1.30) denkleminin çözümü p 'nin kuvvet serisi olarak yazılabilir;

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (1.1.36)$$

$p \rightarrow 1$ iken denklemin yaklaşık çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (1.1.37)$$

olarak bulunur. Buradan da görüldüğü gibi, (1.1.30) denkleminin çözümü olan $u(\mathbf{r})$ ve başlangıç yaklaşımı $u_0(\mathbf{r})$ homotopiktirler. Bu yüzden uygun bir başlangıç yaklaşımı ve uygun homotopi seçmek, problemin çözümü için önemlidir. Homotopinin uygun seçilmemesi durumunda çözümün yakınsaklığının garanti edilememesi, başlangıç yaklaşımının uygun olarak seçilmemesi durumunda istenilen çözüme ulaşılmaması, çözümü bulmak için sonsuz iterasyon gerekmesi, alınan çoğu örnekte yakınsaklığın sağlanmasına rağmen genel bir yakınsaklık kriteri verilmemiş olması bu metodun dezavantajlarından bazılarıdır. Metodun en büyük avantajı ise metodun klasik pertürbasyon tekniklerinin kısıtlamalarını ortadan kaldırıp, birçok alanda nonlineer tipte probleme uygulanması ve istenilen çözümlerin elde edilmesidir. Metodun yakınsaması homotopi yolunun doğru seçimine bağlıdır.

1.2. Değişken Katsayılı Isı -Tipi ve Dalga-Tipi Denklemlerin Çözümü için He'nin Homotopi Pertürbasyon Metodu

Literatürde, fiziksel problemler için büyük ilgi gören ısı-tipi ve dalga-tipi modeller üzerine çalışmalar vardır [49-55]. Bu fiziksel problemler, deprem şiddeti [49], bir çok bükümlü, iki katlı süper iletken yassı telde bağlaşımlı akımlar [50], topraktaki homojen olmayan elastik dalgalar [51], vb. fenomenleri tanımlarlar. Diğer taraftan Navier-Stokes denklemleri, bazı özel durumlarda çeşitli ısı-tipi denklemlere dönüştürülebilirler. Bu da bu tip problemlerin fiziksel bilimlerde önemini ortaya koyar. Literatürde olmasına rağmen çözümlerin analizi yapılamadığı için seri tabanlı çözümlere ihtiyaç duyulduğu açıktır. Seri çözüm elde eden bu tip tekniklerden biri de Adomian ayrışım metodudur (ADM) . Örneğin Wazwaz ve Gorguis [53] değişken katsayılı ısı -tipi ve dalga-tipi denklemlerin çözümü için Adomian ayrışım metodunu uygulamışlardır. Momani [54] aynı metodu değişken katsayılı zaman kesirsel ısı -tipi ve dalga-tipi denklemlere uygulamıştır. Shou ve He [55] farklı ısı-tipi ve dalga-tipi denklemleri çözmek için varyasyonel iterasyon metodunu kullanmışlar ve bu metot ile Adomian polinomlarının karmaşık hesabında ortaya çıkan hataları ortadan kaldırmışlardır. Bu yöntemlerin her birinin olumlu ve olumsuz yönleri vardır.

Çalışmamızda, ısı-tipi ve dalga-tipi denklemlere, He'nin homotopi pertürbasyon metodu uygulanarak metodun kolaylığı ve doğruluğu gösterildi. Bu metot, son zamanlarda fizik ve mühendislikte kullanılan çeşitli problemler için başarıyla kullanılmıştır.

1.2.1. Denklemin çözümü için homotopi pertürbasyon metodu

A genel bir diferansiyel operatör, B bir sınır operatörü, $f(\mathbf{r})$ bilinen bir analitik fonksiyon, Γ , Ω bölgesinin sınırı olmak üzere, aşağıdaki nonlinear diferansiyel denklem göz önüne alınsın;

$$A(u) - f(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Omega \quad (1.2.1)$$

Sınır koşulları;

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (1.2.2)$$

A operatörü, L lineer ve N nonlinear operatör olmak üzere; L ve N gibi iki parçaya ayrılabilir. (1.2.1) denklemi aşağıdaki biçimde yeniden yazılabilir ;

$$L(u) + N(u) - f(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.2.3)$$

Homotopi tekniğini kullanarak, $v: \Omega \times [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ olmak üzere; $p \in [0,1]$ 'nin bir gömme parametresi, u_0 'ın (1.2.1) denkleminin sınır koşullarını sağlayan başlangıç yaklaşımı olduğu, (1.2.4.a) veya (1.2.4.b) denklemlerini sağlayan bir $H(v(\mathbf{r}, p), p) = 0$ homotopisi oluşturulur.

$$H(v(\mathbf{r}, p), p) = (1-p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(\mathbf{r})] = 0, \quad p \in [0,1], \quad (1.2.4.a)$$

veya

$$H(v(\mathbf{r}, p), p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(\mathbf{r})] = 0 \quad (1.2.4.b)$$

(1.2.4.a) veya (1.2.4.b) denklemlerinden

$$H(v(\mathbf{r}, 0), 0) = L(v) - L(u_0) = 0 \quad (1.2.5)$$

ve

$$H(v(\mathbf{r}, 1), 1) = A(v) - f(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.2.6)$$

denklemleri elde edilir.

p parametresinin, $p = 0$ 'dan $p = 1$ 'e değişimi, $v(\mathbf{r}, p)$ çözüm serisinin, $u_0(\mathbf{r})$ başlangıç yaklaşımından, denklemin çözümü olan $u(\mathbf{r})$ 'ye değişimini verir.

Buna topolojide deformasyon denir. Ayrıca $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r) = 0$ denklemlerine de “homotopiktirler” denir. Eğer p ; ($0 \leq p \leq 1$) gömme (embedding) parametresi “küçük parametre” olarak düşünülürse, klasik pertürbasyon tekniği uygulanarak, (1.2.4) denkleminin çözümü p ’nin kuvvet serisi olarak yazılabilir;

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (1.2.7)$$

p parametresi 1’e yakınsarken (1.2.1) denkleminin yaklaşık çözümü ;

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (1.2.8)$$

olarak bulunur.

He’nin homotopi pertürbasyon metodunun başlıca avantajlarından biri, pertürbasyon denkleminin topolojideki homotopi kavramını kullanarak, serbestçe birçok farklı şekilde oluşturulabilmesidir. Bu çalışmada homotopi pertürbasyon metodu, değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi modellere uygulanmıştır.

1.2.2. Isı-tipi modeller

Yerkabuğunda, dipteki doymun-akışkan gözenekli ortamda akışkan geçişini gösteren termo-gözenekli-elastik denklemler ve termo-gözenekli-elastisite teorisi, her zaman ısı-tipi denklemlerle ifade edilebilir. Homotopi pertürbasyon metodunu kullanarak çözümü göstermek için aşağıdaki örnekler göz önüne alınmıştır.

1.2.2.1.Örnek

Sınır koşulları:

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = e^t, \quad (1.2.9)$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x,0) = x^2. \quad (1.2.10)$$

olan

$$u_t = \frac{1}{2} x^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1.2.11)$$

bir-boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi homotopi pertürbasyon metodu ile aşağıdaki gibi çözülür.

He'nin homotopi pertürbasyon metoduna göre, aşağıdaki homotopi oluşturulur:

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \left(\frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.2.12)$$

Çözüm serisi

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + p^3 v_3 + \dots \quad (1.2.13)$$

biçimindedir. (1.2.10) başlangıç koşulu göz önüne alınarak $u_0(x,t) = x^2$ seçilip, u_0 ve (1.2.13) denklemi, (1.2.12) denkleminde yerine konup p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$p^0 : \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad v_0(x,0) = x^2,$$

$$p^1 : \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t}, \quad v_1(x,0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
p^2 : \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, & v_2(x,0) &= 0, \\
p^3 : \quad \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}, & v_3(x,0) &= 0, \\
p^4 : \quad \frac{\partial v_4}{\partial t} &= \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}, & v_4(x,0) &= 0, \\
. & & & \\
. & & & \\
p^n : \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} &= \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2}, & v_n(x,0) &= 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots)
\end{aligned} \tag{1.2.14}$$

.
.
.

Sistem çözülerek

$$\begin{aligned}
v_0(x, t) &= x^2, \\
v_1(x, t) &= x^2 t, \\
v_2(x, t) &= \frac{x^2 t^2}{2!}, \\
v_3(x, t) &= \frac{x^2 t^3}{3!}, \\
v_4(x, t) &= \frac{x^2 t^4}{4!}, \\
. & \\
. & \\
v_n(x, t) &= \frac{x^2 t^n}{n!}, \\
. & \\
. & \\
. &
\end{aligned} \tag{1.2.15}$$

çözümleri elde edilir.

p parametresi 1'e yakınsarken (1.2.11) denkleminin çözümü ;

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots \quad (1.2.16)$$

olmak üzere

$$u(x, t) = x^2 + x^2 t + \frac{x^2 t^2}{2!} + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^4}{4!} + \dots + \frac{x^2 t^n}{n!} + \dots \quad (1.2.17)$$

bulunur. Bulunan bu seri çözümün kapalı formu

$$u(x, t) = x^2 e^t \quad (1.2.18)$$

incelenen problemin tam çözümünü verir.

1.2.2.2.Örnek

Neumann sınır koşulları:

$$\begin{aligned} u_x(0, y, t) &= 0, & u_x(1, y, t) &= 2 \sinh t, \\ u_y(x, 0, t) &= 0, & u_y(x, 1, t) &= 2 \cosh t, \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

ve başlangıç koşulu:

$$u(x, y, 0) = y^2. \quad (1.2.20)$$

olan

$$u_t = \frac{1}{2} (y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy}), \quad 0 < x, y < 1, t > 0, \quad (1.2.21)$$

iki-boyutlu ısı-tipi modeli, homotopi pertürbasyon metodu ile aşağıdaki gibi çözülür.

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{1}{2} p \left(y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.2.22)$$

Homotopisi oluşturulup (1.2.20) başlangıç koşulu göz önüne alınıp $u_0(x, y, t) = y^2$

seçilerek, u_0 ve (1.2.13) denklemi, (1.2.22) denkleminde yerine konup p 'nin aynı

kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad v_0(x, y, 0) = y^2,$$

$$p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right), \quad v_1(x, y, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned}
p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right), & v_2(x, y, 0) &= 0, \\
p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right), & v_3(x, y, 0) &= 0, \\
p^4 : \frac{\partial v_4}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial y^2} \right), & v_4(x, y, 0) &= 0, \\
p^5 : \frac{\partial v_5}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_4}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_4}{\partial y^2} \right), & v_5(x, y, 0) &= 0, \\
p^6 : \frac{\partial v_6}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_5}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_5}{\partial y^2} \right), & v_6(x, y, 0) &= 0, \\
. & & & \\
. & & & \\
. & & & \\
. & & & \\
p^n : \frac{\partial v_n}{\partial t} &= \frac{1}{2} \left(y^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} \right), & v_n(x, y, 0) &= 0, \\
. & & & \\
. & & & \\
. & & & \\
. & & &
\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

Sistem çözülerek

$$\begin{aligned}
v_0(x, y, t) &= y^2, \\
v_1(x, y, t) &= x^2 t, \\
v_2(x, y, t) &= \frac{y^2 t^2}{2!}, \\
v_3(x, y, t) &= \frac{x^2 t^3}{3!}, \\
v_4(x, y, t) &= \frac{y^2 t^4}{4!},
\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

$$v_5(x, y, t) = \frac{x^2 t^5}{5!},$$

$$v_6(x, y, t) = \frac{y^2 t^6}{6!},$$

.

.

.

$$v_{2n}(x, y, t) = \frac{y^2 t^{2n}}{(2n)!},$$

$$v_{2n+1}(x, y, t) = \frac{x^2 t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

.

.

.

çözümleri elde edilir.

(1.2.13) denkleminde p parametresi 1'e yakınsarken (1.2.21) denkleminin çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= y^2 + x^2 t + \frac{y^2 t^2}{2!} + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{y^2 t^4}{4!} + \frac{x^2 t^5}{5!} + \frac{y^2 t^6}{6!} + \dots \\ &= y^2 \left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots + \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + x^2 \left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

elde edilir.

Bulunan çözüm serisi kapalı formda yazılırsa

$$u(x, y, t) = y^2 \cosh t + x^2 \sinh t \quad (1.2.26)$$

problemin tam çözümünü verir.

1.2.2.3.Örnek

Neumann sınır koşulları:

$$\begin{aligned} u(0, y, z, t) &= 0, & u(1, y, z, t) &= y^4 z^4 (e^t - 1), \\ u(x, 0, z, t) &= 0, & u(x, 1, z, t) &= x^4 z^4 (e^t - 1), \\ u(x, y, 0, t) &= 0, & u(x, y, 1, t) &= x^4 y^4 (e^t - 1), \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x, y, z, 0) = 0. \quad (1.2.28)$$

$$\text{olan } u_t = x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} (x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz}), 0 < x, y, z < 1, t > 0,$$

(1.2.29)

üç-boyutlu, homojen olmayan başlangıç ve sınır değer problemi homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak çözülür. Burada homotopi

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \left(x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} \left(x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = 0, \quad (1.2.30)$$

$$0 < x, y, z < 1, t > 0,$$

biçiminde alınırsa (1.2.28) başlangıç koşulu göz önüne alınıp $u_0(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 t$

seçilerek, u_0 ve (1.2.13) denklemi, (1.2.30) denkleminde yerine konup p 'nin aynı

kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, \quad v_0(x, y, z, 0) = 0,$$

$$p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial t} = x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial u_0}{\partial t} \quad v_1(x, y, z, 0) = 0,$$

$$p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} = x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \quad v_2(x, y, z, 0) = 0,$$

$$p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial t} = x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) \quad v_3(x, y, z, 0) = 0,$$

.

.

.

$$p^n : \frac{\partial v_n}{\partial t} = x^4 y^4 z^4 + \frac{1}{36} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial z^2} \right) \quad v_n(x, y, z, 0) = 0$$

$$(n = 2, 3, 4, \dots)$$

.

.

$$(1.2.31)$$

Sistem çözülerek

$$\begin{aligned}
 v_0(x, y, z, t) &= x^4 y^4 z^4 t, \\
 v_1(x, y, z, t) &= \frac{x^4 y^4 z^4 t^2}{2!}, \\
 v_2(x, y, z, t) &= \frac{x^4 y^4 z^4 t^3}{3!}, \\
 v_3(x, y, z, t) &= \frac{x^4 y^4 z^4 t^4}{4!}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 v_n(x, y, z, t) &= \frac{x^4 y^4 z^4 t^{n+1}}{(n+1)!}, \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

çözümleri elde edilir.

(1.2.13) denkleminde, p parametresi 1'e yakınsarken, (1.2.29) denkleminin çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= x^4 y^4 z^4 t + \frac{x^4 y^4 z^4 t^2}{2!} + \frac{x^4 y^4 z^4 t^3}{3!} + \frac{x^4 y^4 z^4 t^4}{4!} + \dots + \frac{x^4 y^4 z^4 t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \\
 &= x^4 y^4 z^4 \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right)
 \end{aligned} \tag{1.2.33}$$

bulunur. Bu seri çözümün kapalı formu

$$u(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 (e^t - 1) \tag{1.2.34}$$

problemin tam çözümünü verir.

1.2.3. Dalga tipi modeller

Aşağıdaki dalga tipi denklemlerde de homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

1.2.2.4.Örnek

Neumann sınır koşulları:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 + \sinh t, \quad (1.2.35)$$

Başlangıç koşulları:

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x^2. \quad (1.2.36)$$

olan

$$u_{tt} = \frac{1}{2} x^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1.2.37)$$

bir-boyutlu başlangıç ve sınır değer probleminde

$$H(v, p) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - p \left(\frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) = 0, \quad (1.2.38)$$

homotopisi kullanılarak (1.2.36) başlangıç koşulları göz önüne alınıp $u_0(x, t) = x^2 t + x$ seçilerek, u_0 ve (1.2.13) denklemi, (1.2.38) denkleminde yerine konup p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$p^0 : \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0, \quad v_0(x, 0) = x, v_{0_t}(x, 0) = x^2$$

$$p^1 : \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \quad v_1(x, 0) = 0, v_{1_t}(x, 0) = 0$$

$$p^2 : \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad v_2(x, 0) = 0, v_{2_t}(x, 0) = 0$$

$$p^3 : \quad \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}, \quad v_3(x, 0) = 0, v_{3_t}(x, 0) = 0$$

.

.

.

.

$$p^n : \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \frac{1}{2} x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2},$$

$$v_n(x, 0) = 0, v_{n_t}(x, 0) = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

.

.

.

.

.

.

(1.2.39)

Sistem çözülerek

$$v_0(x, t) = x^2 t + x,$$

$$v_1(x, t) = \frac{x^2 t^3}{3!},$$

$$v_2(x, t) = \frac{x^2 t^5}{5!},$$

$$v_3(x, t) = \frac{x^2 t^7}{7!}, \quad (1.2.40)$$

.

.

.

$$v_n(x, t) = \frac{x^2 t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

.

.

.

çözümleri elde edilir.

(1.2.13) denkleminde, p parametresi 1'e yakınsarken, (1.2.37) denkleminin çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= x + x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^5}{5!} + \frac{x^2 t^7}{7!} + \dots + \frac{x^2 t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \\
&= x + x^2 \left(t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \dots + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{1.2.41}$$

bulunur. Seri çözümün kapalı formu

$$u(x,t) = x + x^2 \sinh t \tag{1.2.42}$$

problemin tam çözümüdür.

1.2.2.5.Örnek

Neumann sınır koşulları:

$$\begin{aligned}
u_x(0, y, t) &= 0, \quad u_x(1, y, t) = 4 \cosh t, \\
u_y(x, 0, t) &= 0, \quad u_y(x, 1, t) = 4 \sinh t,
\end{aligned} \tag{1.2.43}$$

Başlangıç koşulları:

$$u(x, y, 0) = x^4, \quad u_t(x, y, 0) = y^4. \tag{1.2.44}$$

olan

$$u_{tt} = \frac{1}{12} (x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy}), \quad 0 < x, y < 1, t > 0, \tag{1.2.45}$$

iki boyutlu başlangıç ve sınır değer probleminde aşağıdaki homotopi oluşturularak

$$H(v, p) = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - p \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) = 0, \tag{1.2.46}$$

(1.2.44) başlangıç koşulları göz önüne alınıp $u_0(x, y, t) = y^4 t + x^4$ seçilerek, u_0 ve

(1.2.13) denklemi (1.2.46) denkleminde yerine konup p 'nin aynı kuvvetlerinin

katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$p^0 : \quad \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0, \quad v_0(x, y, 0) = x^4, v_{0_t}(x, y, 0) = y^4$$

$$p^1 : \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right), \quad v_1(x, y, 0) = 0, v_{1_t}(x, y, 0) = 0$$

$$p^2 : \quad \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} \right), \quad v_2(x, y, 0) = 0, v_{2_t}(x, y, 0) = 0$$

$$p^3 : \quad \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} \right), \quad v_3(x, y, 0) = 0, v_{3_t}(x, y, 0) = 0$$

·
·
·
·
·

$$p^n : \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \frac{1}{12} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} \right), \quad v_n(x, y, 0) = 0, v_{n_t}(x, y, 0) = 0$$

($n = 2, 3, 4, \dots$)

·
·
·

(1.2.47)

Sistem çözülerek

$$v_0(x, y, t) = y^4 t + x^4,$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{x^4 t^2}{2!} + \frac{y^4 t^3}{3!},$$

$$\begin{aligned}
v_2(x, y, t) &= \frac{x^4 t^4}{4!} + \frac{y^4 t^5}{5!}, \\
v_3(x, y, t) &= \frac{x^4 t^6}{6!} + \frac{y^4 t^7}{7!}, \\
&\vdots \\
v_n(x, y, t) &= \frac{x^4 t^{2n}}{(2n)!} + \frac{y^4 t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{1.2.48}$$

·
·
·

$$v_n(x, y, t) = \frac{x^4 t^{2n}}{(2n)!} + \frac{y^4 t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

·
·

çözümleri elde edilir.

(1.2.13) denkleminde, p parametresi 1'e yakınsarken, (1.2.45) denkleminin çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= x^4 + y^4 t + x^4 \frac{t^2}{2!} + y^4 \frac{t^3}{3!} + x^4 \frac{t^4}{4!} + y^4 \frac{t^5}{5!} + x^4 \frac{t^6}{6!} + y^4 \frac{t^7}{7!} + \dots \\
&= x^4 \left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots \right) + y^4 \left(1 + t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \dots \right)
\end{aligned} \tag{1.2.49}$$

bulunur. Seri çözümün kapalı formu

$$u(x, t) = x^4 \cosh t + y^4 \sinh t \tag{1.2.50}$$

incelenen problemin tam çözümüdür

1.2.2.6.Örnek

Sınır koşulları:

$$u(0, y, z, t) = y^2 (e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(1, y, z, t) = (1 + y^2)(e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, 0, z, t) = x^2 (e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$\begin{aligned}
u(x, 1, z, t) &= (1 + x^2)(e^t - 1) + z^2(e^{-t} - 1), \\
u(x, y, 0, t) &= (x^2 + y^2)(e^t - 1), \\
u(x, y, 1, t) &= (x^2 + y^2)(e^t - 1) + (e^{-t} - 1),
\end{aligned} \tag{1.2.51}$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - z^2 \tag{1.2.52}$$

olan

$$u_{tt} = (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz}), \quad 0 < x, y, z < 1, t > 0, \tag{1.2.53}$$

üç-boyutlu başlangıç ve sınır değer probleminde

$$\begin{aligned}
H(v, p) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - p \left[(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right] = 0 \\
\end{aligned} \tag{1.2.54}$$

homotopisi oluşturularak (1.2.52) başlangıç koşulu göz önüne alınıp

$u_0(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - z^2)t$ seçilerek, u_0 ve (1.2.13) denklemi (1.2.54) denkleminde yerine konup p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenerek, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$p^0 : \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = 0, \quad v_0(x, y, z, 0) = 0, \quad v_{0t}(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - z^2$$

$$\begin{aligned}
p^1 : \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} &= \left((x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \right) \\
v_1(x, y, z, 0) &= 0, \quad v_{1t}(x, y, z, 0) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 : \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} \right) \\
v_2(x, y, z, 0) &= 0, \quad v_{2t}(x, y, z, 0) = 0
\end{aligned}$$

$$p^3 : \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} \right) \quad v_3(x, y, z, 0) = 0, v_{3,t}(x, y, z, 0) = 0$$

.

.

.

.

$$p^n : \frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \left(x^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial z^2} \right) \quad v_n(x, y, z, 0) = 0, v_{n,t}(x, y, z, 0) = 0$$

(n = 2, 3, 4, ...)

.

.

.

(1.2.55)

Sistem çözülerek

$$v_0(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - z^2)t,$$

$$v_1(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2) \frac{t^2}{2!} + (x^2 + y^2 - z^2) \frac{t^3}{3!},$$

$$v_2(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2) \frac{t^4}{4!} + (x^2 + y^2 - z^2) \frac{t^5}{5!},$$

$$v_3(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2) \frac{t^6}{6!} + (x^2 + y^2 - z^2) \frac{t^7}{7!}, \quad (1.2.56)$$

.

.

.

$$v_n(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2) \frac{t^{2n}}{(2n)!} + (x^2 + y^2 - z^2) \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots)$$

.

.

çözümleri bulunur.

(1.2.13) denkleminde, p parametresi 1'e yakınsarken, (1.2.53) denkleminin çözümü

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$u(x, y, z, t) = (x^2 + y^2) \left(t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right) + z^2 \left(-t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right) \quad (1.2.57)$$

elde edilir. Seri çözümün kapalı formu

$$u(x, y, z, t) = (x^2 + y^2)(e^t - 1) + z^2(e^{-t} - 1) \quad (1.2.58)$$

problemin tam çözümünü verir.

Görüldüğü gibi, örneklerin hepsinde, uygun homotopi ve uygun başlangıç yaklaşımları seçildiğinden tam çözümler elde edilmiştir. Yukarıdaki örneklerde bulunan çözümlerin yakınsaklık analizi, 1.2.4 alt bölümünde verilecektir.

1.2.4. Homotopi pertürbasyon metodunun değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi denklemler için yakınsaklığı

J.Biazar ve H.Ghazvini'nin makalesinde [59], yazarlar tarafından verilen aşağıdaki teoreme göre, değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi denklemlere, homotopi pertürbasyon metodu uygulanarak bulunan çözümün yakınsaklık analizi yapılmıştır.

1.2.4.1. Teorem: X ve Y Banach uzayları, $N : X \rightarrow Y$

$$\forall v, \tilde{v} \in X; \quad \|N(v) - N(\tilde{v})\| \leq \gamma \|v - \tilde{v}\|, \quad 0 < \gamma < 1.$$

sağlayan bir kesin daraltan dönüşüm olsun. Bu durumda Banach sabit nokta teoremine göre $N(u) = u$ olacak biçimde bir u sabit noktası vardır.

Homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen $V_n = N(V_{n-1})$, $V_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} u_i$, $n = 1, 2, 3, \dots$

serisi ve $B_r(u) = \{u^* \in X \mid \|u^* - u\| < r\}$ açık yuvarı ile $V_0 = v_0 = u_0 \in B_r(u)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\textbf{i)} \quad \|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|,$$

$$\textbf{ii)} \quad V_n \in B_r(u),$$

$$\textbf{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = u.$$

sağlanır.

Kanıt:

i) n üzerinden tümevarım yapılırsa, $n = 1$ için

$$\|V_1 - u\| = \|N(V_0) - N(u)\| \leq \gamma \|v_0 - u\|.$$

sağlanır.

Tümevarım hipotezine göre $\|V_{n-1} - u\| \leq \gamma^{n-1} \|v_0 - u\|$ olduğundan

$$\|V_n - u\| = \|N(V_{n-1}) - N(u)\| \leq \gamma \|V_{n-1} - u\| \leq \gamma \gamma^{n-1} \|v_0 - u\| = \gamma^n \|v_0 - u\|.$$

bulunur.

ii) (i)'yi kullanarak

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \leq \gamma^n r < r \Rightarrow V_n \in B_r(u).$$

elde edilir.

iii) (ii)'den ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n = 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = u$ bulunur.

1.2.5. Isı-tipi modellerde yakınsaklık

1.2.4.1. Teoremden yararlanılarak 1.2.2.1-1.2.2.6. örneklerde seçilen homotopilerin çözümlerin yakınsaklığı için uygun homotopiler olduğu gösterilecektir. Çözümlerin yakınsaklığını gösterirken uygun kesin daraltan bir N dönüşümünün var olduğunu göstermek yeterlidir.

1.2.2.1. Örnek için

Sınır koşulları:

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = e^t,$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x, 0) = x^2.$$

olan

$$u_t = \frac{1}{2} x^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

bir-boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi için çözümün yakınsaklığı incelenecektir.

Bulunan diferansiyel denklem sisteminden

$$v_0(x, t) = x^2,$$

$$v_1(x, t) = x^2 t,$$

$$v_2(x, t) = \frac{x^2 t^2}{2!},$$

$$v_3(x, t) = \frac{x^2 t^3}{3!},$$

$$v_4(x, t) = \frac{x^2 t^4}{4!},$$

.

.

$$v_n(x, t) = \frac{x^2 t^n}{n!},$$

.

.

.

çözümleri elde edilmiştir.

Elde edilen seri çözümün yakınsaklığı incelenerek de denklemin tam çözümü $u(x, t) = x^2 e^t$ olarak bulunur.

$V_0 = v_0 = u_0$ $V_n = \sum_{j=0}^n v_j$ olsun. 1.2.4.1. Teoremine göre, homotopi pertürbasyon

metodunun yakınsaklığı için yeterli şart $V_n = N(V_{n-1})$, sağlayan N 'nin kesin daraltan dönüşüm olmasıdır. Buradan

$$\|v_0 - u\| = \|x^2 - x^2 e^t\| = x^2 \|1 - e^t\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|V_1 - u\| &= \|v_0 + v_1 - u\| = \|x^2 + x^2 t - x^2 e^t\| = x^2 \|1 + t - e^t\|, \\ &\leq x^2 \|1 - e^t\| \left\| 1 + \frac{t}{1 - e^t} \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

Her $t \in [0, 1]$ için $\left\| 1 + \frac{t}{1 - e^t} \right\| \leq \gamma = 0.4180232930 < 1$ olduğundan,

$$\|V_1 - u\| \leq \gamma x^2 \|1 - e^t\| = \gamma \|v_0 - u\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|V_2 - u\| &= \|v_0 + v_1 + v_2 - u\| = \left\| x^2 + x^2 t + x^2 \frac{t^2}{2!} - x^2 e^t \right\| = x^2 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} - e^t \right\| \\ &\leq x^2 \|1 + t - e^t\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{1 + t - e^t} \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

Her $t \in [0,1]$ için $\left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{1+t-e^t} \right\| \leq 0.3038944040 < \gamma$ olduğu kullanılarak

$$\|V_2 - u\| \leq \gamma^2 \|v_0 - u\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|V_3 - u\| &= \|v_0 + v_1 + v_2 + v_3 - u\| = \left\| x^2 + x^2 t + x^2 \frac{t^2}{2!} + x^2 \frac{t^3}{3!} - x^2 e^t \right\| \\ &= x^2 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t \right\| \\ &\leq x^2 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} - e^t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{1+t+\frac{t^2}{2!}-e^t} \right\| \end{aligned}$$

bulunarak

Her $t \in [0,1]$ için $\left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{1+t+\frac{t^2}{2!}-e^t} \right\| \leq 0.2364611007 < \gamma$ olduğu kullanılarak

$$\|V_3 - u\| \leq \gamma^3 \|v_0 - u\|$$

elde edilir. Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\|.$$

elde edilir.

Buradan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \|v_0 - u\| = 0$ bulunur.

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n v_j = x^2 e^t \quad \text{denklemin tam çözümüdür.}$$

1.2.2.2.Örnek için

Neumann sınır koşulları:

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u_x(1, y, t) = 2 \sinh t,$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, 1, t) = 2 \cosh t,$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x, y, 0) = y^2.$$

olan

$$u_t = \frac{1}{2} (y^2 u_{xx} + x^2 u_{yy}), \quad 0 < x, y < 1, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

iki-boyutlu ısı-tipi model için çözümün yakınsaklığı incelenecektir.

Diferansiyel denklem sisteminden elde edilen çözümler

$$v_0(x, y, t) = y^2,$$

$$v_1(x, y, t) = x^2 t,$$

$$v_2(x, y, t) = \frac{y^2 t^2}{2!},$$

$$v_3(x, y, t) = \frac{x^2 t^3}{3!},$$

$$v_4(x, y, t) = \frac{y^2 t^4}{4!},$$

$$v_5(x, y, t) = \frac{x^2 t^5}{5!},$$

$$v_6(x, y, t) = \frac{y^2 t^6}{6!},$$

.

$$v_{2n}(x, y, t) = \frac{y^2 t^{2n}}{(2n)!},$$

$$v_{2n+1}(x, y, t) = \frac{x^2 t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

.

.

biçimindedir.

Elde edilen seri çözümün yakınsaklığı incelenerek de denklemin tam çözümü $u(x, y, t) = y^2 \cosh t + x^2 \sinh t$ olarak bulunur:

$u(x, y, t)$ tam çözümü, $u_1 = y^2 \cosh t$ ve $u_2 = x^2 \sinh t$ ve $u = u_1 + u_2$, V_n seri çözümü

de $V_{2n} = \sum_{j=0}^n v_{2j}$, $V_{2n+1} = \sum_{j=0}^n v_{2j+1}$ olmak üzere; $V_n = V_{2n} + V_{2n+1}$ biçiminde yazılarak

1.2.4.1. Teoreme göre $V_n = N(V_{n-1})$, $V_0 = v_0 = u_0$ için

$$\|v_0 - u_1\| = \|y^2 - y^2 \cosh t\| = y^2 \|1 - \cosh t\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_2 - u_1\| &= \|v_0 + v_2 - u_1\| = \left\| y^2 + \frac{y^2 t^2}{2!} - y^2 \cosh t \right\| = y^2 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t \right\| \\ &\leq y^2 \|1 - \cosh t\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{1 - \cosh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in [0, 2] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{1 - \cosh t} \right\| \leq 0.2759383390 = \gamma_1 < 1 \text{ olduğu kullanılarak}$$

$$\|V_2 - u_1\| \leq \gamma_1 \|v_0 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_4 - u_1\| &= \|v_0 + v_2 + v_4 - u_1\| = \left\| y^2 + \frac{y^2 t^2}{2!} + \frac{y^2 t^4}{4!} - y^2 \cosh t \right\| \\ &= y^2 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t \right\| \\ &\leq y^2 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!}}{1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in [0,2] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!}}{1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t} \right\| \leq 0.1253339866 < \gamma_1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_4 - u_1\| \leq \gamma_1^2 \|v_0 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_6 - u_1\| &= \|v_0 + v_2 + v_4 + v_6 - u_1\| = \left\| y^2 + \frac{y^2 t^2}{2!} + \frac{y^2 t^4}{4!} + \frac{y^2 t^6}{6!} - y^2 \cosh t \right\| \\ &= y^2 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \cosh t \right\| \\ &\leq y^2 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!}}{1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in [0,2] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!}}{1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t} \right\| \leq 0.0695090853 < \gamma_1 \text{ olduğundan}$$

$$\|V_6 - u_1\| \leq \gamma_1^3 \|v_0 - u_1\|$$

bulunur.

Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_{2n} - u_1\| \leq \gamma_1^n \|v_0 - u_1\| \text{ elde edilir.}$$

$$\|v_1 - u_2\| = \|x^2 t - x^2 \sinh t\| = x^2 \|t - \sinh t\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_1 - u_2\| &= \|v_1 + v_3 - u_2\| = \left\| x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} - x^2 \sinh t \right\| = x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t \right\| \\ &\leq x^2 \|t - \sinh t\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{t - \sinh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $t \in [0,2]$ için $\left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{t - \sinh t} \right\| \leq 0.1804254830 = \gamma_2 < 1$ olduğu kullanılarak

$$\|V_1 - u_2\| \leq \gamma_2 \|v_1 - u_2\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_3 - u_2\| &= \|v_1 + v_3 + v_5 - u_2\| = \left\| x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^5}{5!} - x^2 \sinh t \right\| \\ &= x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t \right\| \\ &\leq x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

Her $t \in [0,2]$ için $\left\| 1 + \frac{\frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t} \right\| \leq 0.0915091335 < \gamma_2$ olduğundan

$$\|V_3 - u_2\| \leq \gamma_2^2 \|v_1 - u_2\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|V_5 - u_2\| &= \|v_1 + v_3 + v_5 + v_7 - u_2\| = \left\| x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^5}{5!} + \frac{x^2 t^7}{7!} - x^2 \sinh t \right\| \\ &= x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \sinh t \right\| \\ &\leq x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t} \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

Her $t \in [0,2]$ için $\left\| 1 + \frac{\frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t} \right\| \leq 0.0544884725 < \gamma_2$ olduğu kullanılarak

$$\|V_5 - u_2\| \leq \gamma_2^3 \|v_1 - u_2\|$$

elde edilir. Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_{2n+1} - u_1\| \leq \gamma_2^n \|v_1 - u_2\| \text{ bulunur.}$$

$$\begin{aligned} \text{Buradan; } \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|(V_{2n} + V_{2n+1}) - (u_1 + u_2)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_{2n} - u_1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_{2n+1} - u_2\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1^n \|v_0 - u_1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2^n \|v_1 - u_2\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$u(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n v_j = y^2 \cosh t + x^2 \sinh t \text{ problemin tam çözümüdür.}$$

1.2.2.3.Örnek için

Sınır koşulları:

$$u(0, y, z, t) = y^2 (e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(1, y, z, t) = (1 + y^2)(e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, 0, z, t) = x^2 (e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, 1, z, t) = (1 + x^2)(e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, y, 0, t) = (x^2 + y^2)(e^t - 1),$$

$$u(x, y, 1, t) = (x^2 + y^2)(e^t - 1) + (e^{-t} - 1),$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - z^2$$

olan

$$u_{tt} = (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz}), \quad 0 < x, y, z < 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$$

üç-boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi için çözümün yakınsaklığı incelenecektir.

Diferansiyel denklem sisteminden

$$v_0(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 t,$$

$$v_1(x, y, z, t) = \frac{x^4 y^4 z^4 t^2}{2!},$$

$$v_2(x, y, z, t) = \frac{x^4 y^4 z^4 t^3}{3!},$$

$$v_3(x, y, z, t) = \frac{x^4 y^4 z^4 t^4}{4!},$$

.

.

$$v_n(x, y, z, t) = \frac{x^4 y^4 z^4 t^{n+1}}{(n+1)!},$$

.

.

çözümleri elde edilmiştir.

Elde edilen seri çözümün yakınsaklığı incelenerek de denklemin tam çözümü

$u(x, y, z, t) = x^4 y^4 z^4 (e^t - 1)$ bulunur.

$$V_n = N(V_{n-1}) \quad V_0 = v_0 = u_0 \quad V_n = \sum_{j=0}^n v_j \text{ olsun.}$$

1.2.4.1. Teorem kullanılarak

$$\|v_0 - u\| = \|x^4 y^4 z^4 t - x^4 y^4 z^4 (e^t - 1)\| = x^4 y^4 z^4 \|t - e^t + 1\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|V_1 - u\| &= \|v_0 + v_1 - u\| = \left\| x^4 y^4 z^4 t + \frac{x^4 y^4 z^4 t^2}{2!} - x^4 y^4 z^4 (e^t - 1) \right\| \\ &= x^4 y^4 z^4 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} - e^t \right\| \\ &\leq x^4 y^4 z^4 \|t - e^t + 1\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{t - e^t + 1} \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{t - e^t + 1} \right\| \leq \gamma = 0.1595015349 < 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\|V_1 - u\| \leq \gamma \|v_0 - u\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_2 - u\| &= \|v_0 + v_1 + v_2 - u\| = \left\| x^4 y^4 z^4 t + \frac{x^4 y^4 z^4 t^2}{2!} + \frac{x^4 y^4 z^4 t^3}{3!} - x^4 y^4 z^4 (e^t - 1) \right\| \\ &= x^4 y^4 z^4 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t \right\| \\ &\leq x^4 y^4 z^4 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} - e^t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{1 + t + \frac{t^2}{2!} - e^t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{1 + t + \frac{t^2}{2!} - e^t} \right\| \leq 0.121744643 < \gamma \text{ olduğu kullanılarak}$$

$$\|V_2 - u\| \leq \gamma^2 \|v_0 - u\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_3 - u\| &= \|v_0 + v_1 + v_2 + v_3 - u\| \\ &= \left\| x^4 y^4 z^4 t + \frac{x^4 y^4 z^4 t^2}{2!} + \frac{x^4 y^4 z^4 t^3}{3!} + \frac{x^4 y^4 z^4 t^4}{4!} - x^4 y^4 z^4 (e^t - 1) \right\| \\ &= x^4 y^4 z^4 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - e^t \right\| \\ &\leq x^4 y^4 z^4 \left\| 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!}}{1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!}}{1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t} \right\| \leq 0.0982608814 < \gamma \text{ olduğu kullanılarak}$$

$$\|V_3 - u\| \leq \gamma^3 \|v_0 - u\|$$

bulunur. Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \text{ elde edilir.}$$

Buradan; $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \|v_0 - u\| = 0$ bulunur.

$$u(x, y, z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n v_j = x^4 y^4 z^4 (e^t - 1) \text{ tam çözümdür.}$$

1.2.6. Dalga-tipi modellerde yakınsaklık

1.2.2.4. Örnek için

Neumann sınır koşulları:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 + \sinh t,$$

Başlangıç koşulları:

$$u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = x^2.$$

olan

$$u_{tt} = \frac{1}{2} x^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

bir-boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi için çözümün yakınsaklığı incelenecektir.

Diferansiyel denklem sisteminden

$$v_0(x, t) = x^2 t + x,$$

$$v_1(x, t) = \frac{x^2 t^3}{3!},$$

$$v_2(x, t) = \frac{x^2 t^5}{5!},$$

$$v_3(x, t) = \frac{x^2 t^7}{7!},$$

.

.

$$v_n(x, t) = \frac{x^2 t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

.

.

çözümleri bulunmuştur.

Elde edilen seri çözümün yakınsaklığı incelenerek de denklemin tam çözümü olan

$u(x, t) = x + x^2 \sinh t$ bulunur.

$$V_n = N(V_{n-1}) \quad V_0 = v_0 = u_0 \quad V_n = \sum_{j=0}^n v_j \text{ olsun.}$$

1.2.4.1. Teoreme göre

$$\|v_0 - u\| = \|x^2 t - x^2 \sinh t\| = x^2 \|t - \sinh t\|$$

bulunur.

$$\|V_1 - u\| = \|v_0 + v_1 - u\| = \left\| x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} - x^2 \sinh t \right\| = x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t \right\|,$$

$$\leq x^2 \|t - \sinh t\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{t - \sinh t} \right\|$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in [0,1] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{t - \sinh t} \right\| = \gamma = 0.0487127233 < 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\|V_1 - u\| \leq \gamma \|v_0 - u\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\|V_2 - u\| &= \|v_0 + v_1 + v_2 - u\| = \left\| x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^5}{5!} - x^2 \sinh t \right\| = x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t \right\| \\ &\leq x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t} \right\|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in [0,1] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t} \right\| \leq 0.0235740850 < \gamma \text{ olduğu görölerek}$$

$$\|V_2 - u\| \leq \gamma^2 \|v_0 - u\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\|V_3 - u\| &= \|v_0 + v_1 + v_2 + v_3 - u\| = \left\| x^2 t + \frac{x^2 t^3}{3!} + \frac{x^2 t^5}{5!} + \frac{x^2 t^7}{7!} - x^2 \sinh t \right\| \\ &= x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \sinh t \right\| \\ &\leq x^2 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t} \right\|\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in [0,1] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t} \right\| \leq 0.0138239788 < \gamma \text{ olduğu kullanılarak}$$

$$\|V_3 - u\| \leq \gamma^3 \|v_0 - u\| \text{ bulunur. Benzer biçimde devam edilerek}$$

$$\|V_n - u\| \leq \gamma^n \|v_0 - u\| \text{ elde edilir.}$$

$$\text{Buradan } \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n \|v_0 - u\| = 0 \text{ bulunur.}$$

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n v_j = x + x^2 \sinh t \text{ denklemin tam çözümüdür.}$$

1.2.2.5.Örnek için

Neumann sınır koşulları:

$$u_x(0, y, t) = 0, \quad u_x(1, y, t) = 4 \cosh t,$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, \quad u_y(x, 1, t) = 4 \sinh t,$$

Başlangıç koşulları:

$$u(x, y, 0) = x^4, \quad u_t(x, y, 0) = y^4.$$

olan

$$u_{tt} = \frac{1}{12} (x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy}), \quad 0 < x, y < 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{3}$$

iki boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi için çözümün yakınsaklığı incelenecektir.

Diferansiyel denklem sisteminden

$$v_0(x, y, t) = y^4 t + x^4,$$

$$v_1(x, y, t) = \frac{x^4 t^2}{2!} + \frac{y^4 t^3}{3!},$$

$$v_2(x, y, t) = \frac{x^4 t^4}{4!} + \frac{y^4 t^5}{5!},$$

$$v_3(x, y, t) = \frac{x^4 t^6}{6!} + \frac{y^4 t^7}{7!},$$

.

.

$$v_n(x, y, t) = \frac{x^4 t^{2n}}{(2n)!} + \frac{y^4 t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

.

.

çözümleri bulunmuştur.

Elde edilen seri çözümün yakınsaklığı incelenerek de denklemin tam çözümü olan $u(x, t) = x^4 \cosh t + y^4 \sinh t$ bulunur. $u(x, t)$ tam çözümü,

$$u_1 = x^4 \cosh t, \quad u_2 = y^4 \sinh t \quad \text{ve} \quad u = u_1 + u_2, \quad v_j^1 = \frac{x^4 t^{2j}}{(2j)!}, \quad v_j^2 = \frac{y^4 t^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad \text{ve} \quad v_j = v_j^1 + v_j^2$$

olmak üzere, $V_n^1 = \sum_{j=0}^n v_j^1, V_n^2 = \sum_{j=0}^n v_j^2, \quad V_n = V_n^1 + V_n^2 = \sum_{j=0}^n v_j^1 + \sum_{j=0}^n v_j^2 = \sum_{j=0}^n v_j$ biçiminde

yazılarak 1.2.4.1. Teoreme göre $V_n = N(V_{n-1}), \quad V_0 = v_0 = u_0$ için

$$\|v_0^1 - u_1\| = \|x^4 - x^4 \cosh t\| = x^4 \|1 - \cosh t\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \|V_1^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 - u_1\| = \left\| x^4 + x^4 \frac{t^2}{2!} - x^4 \cosh t \right\| = x^4 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t \right\| \\ &\leq x^4 \|1 - \cosh t\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{1 - \cosh t} \right\| \end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!}}{1 - \cosh t} \right\| \leq 0.0092080477 = \gamma_1 < 1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_1^1 - u_1\| \leq \gamma_1 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_2^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 - u_1\| = \left\| x^4 + x^4 \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - x^4 \cosh t \right\| \\ &= x^4 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t \right\| \\ &\leq x^4 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!}}{1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!}}{1 + \frac{t^2}{2!} - \cosh t} \right\| \leq 0.0036968107 < \gamma_1 \text{ olduğundan}$$

$$\|V_2^1 - u_1\| \leq \gamma_1^2 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_3^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + v_3^1 - u_1\| = \left\| x^4 + \frac{x^4 t^2}{2!} + \frac{x^4 t^4}{4!} + \frac{x^4 t^6}{6!} - x^4 \cosh t \right\| \\ &= x^4 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \cosh t \right\| \\ &\leq x^4 \left\| 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!}}{1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!}}{1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cosh t} \right\| \leq 0.0019919445 < \gamma_1 \text{ olduğu kullanılarak}$$

$$\|V_3^1 - u_1\| \leq \gamma_1^3 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur. Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_n^1 - u_1\| \leq \gamma_1^n \|v_0^1 - u_1\| \text{ elde edilir.}$$

$$\|v_0^2 - u_2\| = \|y^4 t - y^4 \sinh t\| = y^4 \|t - \sinh t\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_1^2 - u_2\| &= \|v_0^2 + v_1^2 - u_2\| = \left\| y^4 t + \frac{y^4 t^3}{3!} - y^4 \sinh t \right\| = y^4 \left\| t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t \right\| \\ &\leq y^4 \|t - \sinh t\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{t - \sinh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^3}{3!}}{t - \sinh t} \right\| \leq 0.0055394161 = \gamma_2 < 1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_1^2 - u_2\| \leq \gamma_2 \|v_0^2 - u_2\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_2^2 - u_2\| &= \|v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_2\| = \left\| y^4 t + \frac{y^4 t^3}{3!} + \frac{y^4 t^5}{5!} - y^4 \sinh t \right\| \\ &= y^4 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t \right\| \\ &\leq y^4 \left\| t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^3}{3!} - \sinh t} \right\| \leq 0.0026421050 < \gamma_2$$

olduğundan

$$\|V_2^2 - u_2\| \leq \gamma_2^2 \|v_0^2 - u_2\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_3^2 - u_2\| &= \|v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - u_2\| = \left\| y^4 t + \frac{y^4 t^3}{3!} + \frac{y^4 t^5}{5!} + \frac{y^4 t^7}{7!} - y^4 \sinh t \right\| \\ &= y^4 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} - \sinh t \right\| \\ &\leq y^4 \left\| t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{3}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \sinh t} \right\| \leq 0.0008404769 < \gamma_2$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_3^2 - u_2\| \leq \gamma_2^3 \|v_0^2 - u_2\| \text{ bulunur. Benzer biçimde devam edilerek}$$

$$\|V_n^2 - u_2\| \leq \gamma_2^n \|v_0^2 - u_2\| \text{ elde edilir.}$$

$$\begin{aligned} \text{Buradan } \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^1 + V_n^2 - (u_1 + u_2)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^1 - u_1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^2 - u_2\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1^n \|v_0^1 - u_1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2^n \|v_0^2 - u_2\| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur.

$$u(x, y, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n v_j = x^4 \cosh t + y^4 \sinh t \text{ problemin tam çözümüdür.}$$

1.2.2.6.Örnek için

Sınır koşulları:

$$u(0, y, z, t) = y^2 (e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(1, y, z, t) = (1 + y^2)(e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, 0, z, t) = x^2 (e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, 1, z, t) = (1 + x^2)(e^t - 1) + z^2 (e^{-t} - 1),$$

$$u(x, y, 0, t) = (x^2 + y^2)(e^t - 1),$$

$$u(x, y, 1, t) = (x^2 + y^2)(e^t - 1) + (e^{-t} - 1),$$

Başlangıç koşulu:

$$u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - z^2$$

olan

$$u_{tt} = (x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz}), \quad 0 < x, y, z < 1, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

üç-boyutlu başlangıç ve sınır değer problemi için çözümün yakınsaklığı incelenecektir.

Diferansiyel denklem sisteminden

$$v_0(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 - z^2)t,$$

$$v_1(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{t^2}{2!} + (x^2 + y^2 - z^2)\frac{t^3}{3!},$$

$$v_2(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{t^4}{4!} + (x^2 + y^2 - z^2)\frac{t^5}{5!},$$

$$v_3(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{t^6}{6!} + (x^2 + y^2 - z^2)\frac{t^7}{7!},$$

.

.

$$v_n(x, y, z, t) = (x^2 + y^2 + z^2)\frac{t^{2n}}{(2n)!} + (x^2 + y^2 - z^2)\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (n=1,2,3,\dots)$$

.

.

çözümleri bulunmuştur.

Elde edilen seri çözümün yakınsaklığı incelenerek de denklemin tam çözümü

$$u(x, y, z, t) = (x^2 + y^2)(e^t - 1) + z^2(e^{-t} - 1) \text{ bulunur. } u(x, y, z, t) \text{ tam çözümü,}$$

$$u_1 = (x^2 + y^2)(e^t - 1), \quad u_2 = z^2(e^{-t} - 1) \text{ ve } u = u_1 + u_2; \quad v_0^1 = (x^2 + y^2)t, \quad v_0^2 = -z^2t \text{ ve}$$

$$v_j^1 = (x^2 + y^2)\left(\frac{t^{2j}}{(2j)!} + \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\right), \quad v_j^2 = z^2\left(\frac{t^{2j}}{(2j)!} - \frac{t^{2j+1}}{(2j+1)!}\right) \quad (j=1,2,3,\dots) \text{ olmak üzere;}$$

$$v_j = v_j^1 + v_j^2, \quad V_n^1 = \sum_{j=0}^n v_j^1, \quad V_n^2 = \sum_{j=0}^n v_j^2 \quad \text{ve} \quad V_n = V_n^1 + V_n^2 = \sum_{j=0}^n v_j^1 + \sum_{j=0}^n v_j^2 = \sum_{j=0}^n v_j$$

biçiminde yazılırsa 1.2.4.1. Teoreme göre $V_n = N(V_{n-1})$, $V_0 = v_0 = u_0$ için

$$\|v_0^1 - u_1\| = \|(x^2 + y^2)t - (x^2 + y^2)(e^t - 1)\| = (x^2 + y^2)\|t - e^t + 1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\|V_1^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 - u_1\| = \left\| (x^2 + y^2)t + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) - (x^2 + y^2)(e^t - 1) \right\| \\
&= (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1 \right\| \\
&\leq (x^2 + y^2) \left\| t - e^t + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}}{t - e^t + 1} \right\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}}{t - e^t + 1} \right\| \leq \gamma_1 = 0.0050930118 < 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\|V_1^1 - u_1\| \leq \gamma_1 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
\|V_2^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 - u_1\| \\
&= \left\| (x^2 + y^2)t + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) - (x^2 + y^2)(e^t - 1) \right\| \\
&= (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1 \right\| \\
&\leq (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1} \right\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1} \right\| \leq 0.0020529198 < \gamma_1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_2^1 - u_1\| \leq \gamma_1^2 \|v_0^1 - u_1\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|V_3^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + v_3^1 - u_1\| \\
&= \left\| (x^2 + y^2)t + (x^2 + y^2)\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) + (x^2 + y^2)\left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}\right) \right. \\
&\quad \left. + (x^2 + y^2)\left(\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!}\right) - (x^2 + y^2)(e^t - 1) \right\| \\
&= (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} - e^t + 1 \right\| \\
&\leq (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1} \right\|
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1} \right\| \leq 0.0022887744 < \gamma_1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_3^1 - u_1\| \leq \gamma_1^3 \|v_0^1 - u_1\| \text{ elde edilir. Benzer biçimde devam edilerek}$$

$$\|V_n^1 - u_1\| \leq \gamma_1^n \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur.

$$\|v_0^2 - u_1\| = \|-z^2t - z^2(e^{-t} - 1)\| = z^2\|t + e^{-t} - 1\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|V_1^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 - u_1\| = \left\| (x^2 + y^2)t + (x^2 + y^2)\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}\right) - (x^2 + y^2)(e^t - 1) \right\| \\
&= (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1 \right\| \\
&\leq (x^2 + y^2) \left\| t - e^t + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}}{t - e^t + 1} \right\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!}}{t - e^t + 1} \right\| \leq \gamma_1 = 0.0050930118 < 1 \text{ olduğundan,}$$

$$\|V_1^1 - u_1\| \leq \gamma_1 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_2^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 - u_1\| \\ &= \left\| (x^2 + y^2)t + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) - (x^2 + y^2)(e^t - 1) \right\| \\ &= (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1 \right\| \\ &\leq (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} - e^t + 1} \right\| \leq 0.0020529198 < \gamma_1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_2^1 - u_1\| \leq \gamma_1^2 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_3^1 - u_1\| &= \|v_0^1 + v_1^1 + v_2^1 + v_3^1 - u_1\| \\ &= \left\| (x^2 + y^2)t + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} \right) + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} \right) \right. \\ &\quad \left. + (x^2 + y^2) \left(\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} \right) - (x^2 + y^2)(e^t - 1) \right\| \\ &= (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!} - e^t + 1 \right\| \end{aligned}$$

$$\leq (x^2 + y^2) \left\| t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1} \right\|$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!} + \frac{t^7}{7!}}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} - e^t + 1} \right\| \leq 0.0022887744 < \gamma_1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_3^1 - u_1\| \leq \gamma_1^3 \|v_0^1 - u_1\|$$

bulunur. Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_n^1 - u_1\| \leq \gamma_1^n \|v_0^1 - u_1\| \text{ elde edilir.}$$

$$\|v_0^2 - u_2\| = \left\| -z^2 t - z^2 (e^{-t} - 1) \right\| = z^2 \left\| -t - e^{-t} + 1 \right\|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \|V_1^2 - u_2\| &= \|v_0^2 + v_1^2 - u_2\| = \left\| -z^2 t + z^2 \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \right) - z^2 (e^{-t} - 1) \right\| \\ &= z^2 \left\| -t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - e^{-t} + 1 \right\| \\ &\leq z^2 \left\| -t - e^{-t} + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}}{-t - e^{-t} + 1} \right\| \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!}}{-t - e^{-t} + 1} \right\| \leq 0.0053800540 = \gamma_2 < 1$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_1^2 - u_2\| \leq \gamma_2 \|v_0^2 - u_2\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|V_2^2 - u_2\| &= \|v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 - u_2\| = \left\| -z^2 t + z^2 \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \right) + z^2 \left(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} \right) - z^2 (e^{-t} - 1) \right\| \\
&= z^2 \left\| -t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} - e^{-t} + 1 \right\| \leq z^2 \left\| -t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - e^{-t} + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}}{-t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - e^{-t} + 1} \right\|
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4} \right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!}}{-t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} - e^{-t} + 1} \right\| \leq 0.0021129695 < \gamma_2 \text{ olduğundan}$$

$$\|V_2^2 - u_2\| \leq \gamma_2^2 \|v_0^2 - u_2\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|V_3^2 - u_2\| &= \|v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - u_2\| \\
&= \left\| -z^2 t + z^2 \left(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} \right) + z^2 \left(\frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} \right) + z^2 \left(\frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!} \right) - z^2 (e^{-t} - 1) \right\| \\
&= z^2 \left\| -t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!} - e^{-t} + 1 \right\| \\
&\leq z^2 \left\| -t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} - e^{-t} + 1 \right\| \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!}}{-t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} - e^{-t} + 1} \right\|
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\text{Her } t \in \left[0, \frac{1}{4} \right] \text{ için } \left\| 1 + \frac{\frac{t^6}{6!} - \frac{t^7}{7!}}{-t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^5}{5!} - e^{-t} + 1} \right\| \leq 0.0013010039 < \gamma_2$$

olduğu kullanılarak

$$\|V_3^2 - u_2\| \leq \gamma_2^3 \|v_0^2 - u_2\|$$

elde edilir. Benzer biçimde devam edilerek

$$\|V_n^2 - u_2\| \leq \gamma_2^n \|v_0^2 - u_2\|.$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \text{Buradan, } \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n - u\| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^1 + V_n^2 - (u_1 + u_2)\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^1 - u_1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^2 - u_2\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_1^n \|v_0^1 - u_1\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_2^n \|v_0^2 - u_2\| = 0 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

$$u(x, y, z, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n v_j = (x^2 + y^2)(e^t - 1) + z^2(e^{-t} - 1) \text{ tam çözümdür.}$$

Bu bölümde, He'nin homotopi pertürbasyon metodu [1] incelenerek bu metotla değişken katsayılı ısı-tipi ve dalga-tipi denklemlerin tam çözümleri bulunmuş ve çözüm serilerinin yakınsaklığı gösterilmiştir.

Ayrıca, Biazar vd. [44] tarafından elde edilen parabolik tipte bir başlangıç değer problemi olan Fokker-Planck denkleminin homotopi pertürbasyon metodu ile çözümü, metotların analizinde kullanılmak üzere detaylı bir şekilde verilmiştir.

1.3. Fokker-Planck Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümü

Fokker-Planck denklemi, doğa bilimlerinin katı-hal fiziği, kuantum optiği, kimyasal fizik, teorik biyoloji ve akım teorisini içeren birçok farklı alanında kullanılır. Fokker-Planck denklemi [56], ilk olarak parçacıkların Brownien hareketini tanımlamak için kullanılmıştır. Eğer küçük bir parçacığın kütlesi m , bir akışkana batırılırsa, v ; küçük bir parçacığın parçacıkların Brownien hareketi için hızı, t ; zaman, γ ; fraksiyon sabiti, K ; Boltzmann sabiti ve T ; akışkanın sıcaklığı olmak üzere; dağılım fonksiyonu için hareket denklemi,

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \gamma \frac{\partial(vW)}{\partial v} + \gamma \frac{KT}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \quad (1.3.1)$$

ile verilir.(1.3.1), Fokker-Planck denklemlerinin en basit tiplerinden biridir.

x değişkeni için genel Fokker-Planck denklemi aşağıdaki biçimdedir :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} A(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) \right] u, \quad (1.3.2)$$

$u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere;

başlangıç koşulu:

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in IR, \quad (1.3.3)$$

ile verilir.

(1.3.2)'deki $B(x) > 0$ 'e difüzyon katsayısı ve $A(x)$ 'e sürüklenme katsayısı denir.

Sürüklenme ve difüzyon katsayıları zamana bağlı da olabilirler. Yani;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} A(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,t) \right] u. \quad (1.3.4)$$

(1.3.1) denklemi, Fokker-Planck denkleminin, sürüklenme katsayısının lineer, difüzyon katsayısının sabit olduğu bir özel halidir. (1.3.2) denklemi, $u(x,t)$ dağılım fonksiyonu için bir hareket denklemidir. Matematiksel olarak, bu denklem parabolik tipte ikinci mertebeden lineer bir denklemdir. Literatürde, (1.3.2) denklemin forward Kolmogorov

denklemini denir. Benzer kısmi diferansiyel denklem olan backward Kolmogorov denklemini aşağıdaki biçimdedir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left[A(x,t) \frac{\partial}{\partial x} + B(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u. \quad (1.3.5)$$

(1.3.2) denkleminin N değişkene $(x_1, \dots, x_N)$ genelleştirilmesi $x = (x_1, \dots, x_N)$ olmak üzere:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[- \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_{i,j}(x) \right] u, \quad (1.3.6)$$

başlangıç koşulu:

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.3.7)$$

ile verilir. A_i ve $B_{i,j}$ genelde N değişkene $(x_1, \dots, x_N)$ bağlıdırlar.

Fokker-Planck denkleminin analitik çözümleri bulunabilir. Genelde, özellikle değişkenlere ayıramıyorsa veya değişkenlerin sayısı çoksa çözümleri elde etmek zordur. Çözüm için simülasyon metotları, Fokker-Planck denkleminin Schrödinger denklemine dönüştürülmesi, nümerik integrasyon metotları gibi farklı metotlar vardır.

Fokker-Planck denkleminin daha genel bir hali vardır. Nonlinear Fokker-Planck denklemini, plazma fiziği, yüzey fiziği, popülasyon dinamiği, biyofizik, mühendislik, nonlinear hidrodinamik, polimer fiziği, lazer fiziği, psikoloji, pazarlama gibi birçok farklı alanda, önemli uygulamalara sahiptir [57]. Tek değişkenli nonlinear Fokker-Planck denklemini aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[- \frac{\partial}{\partial x} A(x,t,u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,t,u) \right] u. \quad (1.3.8)$$

N değişken $x_1, \dots, x_N$ için $x = (x_1, \dots, x_N)$ olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[- \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,t,u) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_{i,j}(x,t,u) \right] u, \quad (1.3.9)$$

$A_i(x,t,u) = A_i(x)$ ve $B_{i,j}(x,t,u) = B_{i,j}(x)$ iken (1.3.9) nonlinear Fokker-Planck denklemini, (1.3.6) lineer Fokker-Planck denklemine indirgenir.

Bu alt bölümde farklı tipte, farklı değişkenler ve başlangıç koşulları ile verilen Fokker-Planck ve Kolmogorov denklemlerine homotopi pertürbasyon metodu uygulanmıştır.

Metodun etkinliğini göstermek için bir ve iki boyutlu durumlarda, analitik çözümlere sahip farklı örnekler seçilmiştir.

1.3.1.Örnek Fokker-Planck denklemi (1.3.2) göz önüne alınsın :

$$u(x,0) = x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A(x) = -1, \quad B(x) = 1. \quad (1.3.10)$$

Homotopi pertürbasyon metodunu kullanarak aşağıdaki homotopi oluşturulur:

$$H(v, p) = (1-p) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1.3.11)$$

(1.2.7) denklemi, (1.3.11) denkleminde yerine konup p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek:

$$\begin{aligned} p^0 : \quad & \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, & v_0(x,0) &= x, \\ p^1 : \quad & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, & v_1(x,0) &= 0, \\ p^2 : \quad & \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, & v_2(x,0) &= 0, \\ p^3 : \quad & \frac{\partial v_3}{\partial t} - \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, & v_3(x,0) &= 0, \\ p^4 : \quad & \frac{\partial v_4}{\partial t} - \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, & v_4(x,0) &= 0, \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ p^j : \quad & \frac{\partial v_j}{\partial t} - \frac{\partial v_{j-1}}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2} = 0, & v_j(x,0) &= 0, \quad (j = 2,3,\dots) \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç koşulunu sağlayan $u_0(x,t) = x$ başlangıç yaklaşımı seçilerek, (1.3.12) denklem sisteminin çözümleri;

$$\begin{aligned} v_0(x,t) &= x, \\ v_1(x,t) &= t, \\ v_2(x,t) &= 0, \\ v_3(x,t) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_4(x,t) &= 0, \\
. \\
. \\
. \\
v_n(x,t) &= 0 \quad (n=2,3,\dots) \\
. \\
.
\end{aligned}
\tag{1.3.13}$$

bulunur. $p \rightarrow 1$ iken (1.3.10) denkleminin tam çözümü, $u(x,t) = x + t$ bulunur.

1.3.2.Örnek : (1.3.4) denkleminde

$$f(x) = \sinh(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1.3.14}$$

$$A(x,t) = \exp(t) \coth(x) \cosh(x) + \exp(t) \sinh(x) - \coth(x),$$

$$B(x,t) = \exp(t) \cosh(x).$$

olmak üzere aşağıdaki homotopi oluşturulsun:

$$H(v,p) = (1-p) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} A(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x,t) \right) v \right) = 0 \tag{1.3.15}$$

(1.2.7) denklemi, (1.3.15) denkleminde yerine konup p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek:

$$\begin{aligned}
p^0 : \quad \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} &= 0, & v_0(x,0) &= \sinh(x), \\
p^1 : \quad \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial v_0 A(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_0 B(x,t)}{\partial x^2} &= 0, & v_1(x,0) &= 0, \\
p^2 : \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1 A(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_1 B(x,t)}{\partial x^2} &= 0, & v_2(x,0) &= 0, \\
p^3 : \quad \frac{\partial v_3}{\partial t} - \frac{\partial v_2 A(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_2 B(x,t)}{\partial x^2} &= 0, & v_3(x,0) &= 0, \\
p^4 : \quad \frac{\partial v_4}{\partial t} - \frac{\partial v_3 A(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_3 B(x,t)}{\partial x^2} &= 0, & v_4(x,0) &= 0, \\
. \\
. \\
p^j : \quad \frac{\partial v_j}{\partial t} - \frac{\partial v_{j-1} A(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 v_{j-1} B(x,t)}{\partial x^2} &= 0, \quad (j = 2,3,\dots) & v_j(x,0) &= 0, \\
. \\
. \\
.
\end{aligned}
\tag{1.3.16}$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç koşulunu sağlayan $u_0(x, t) = \sinh(x)$ başlangıç yaklaşımı seçilerek, (1.3.16) denklem sisteminin çözümleri;

$$\begin{aligned}
 v_0(x, t) &= \sinh(x), \\
 v_1(x, t) &= t \sinh(x), \\
 v_2(x, t) &= \frac{t^2}{2!} \sinh(x), \\
 v_3(x, t) &= \frac{t^3}{3!} \sinh(x), \\
 v_4(x, t) &= \frac{t^4}{4!} \sinh(x), \\
 &\vdots \\
 v_n(x, t) &= \frac{t^n}{n!} \sinh(x) \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{1.3.17}$$

bulunur. Bu durumda $p \rightarrow 1$ iken (1.3.14) denkleminin çözümü,

$u(x, t) = \sinh(x) \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = e^t \sinh(x)$ elde edilir. Bu da denklemin tam çözümüdür.

1.3.3.Örnek Backward Kolmogorov denklemi (1.3.5) göz önüne alınsın.

$$u(x, 0) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad A(x, t) = -(x + 1), \quad B(x, t) = x^2 e^t. \tag{1.3.18}$$

Homotopi aşağıdaki gibi oluşturulsun:

$$H(v, p) = (1 - p) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) v \right) = 0 \tag{1.3.19}$$

(1.2.7) denklemi, (1.3.19) denkleminde yerine konup p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek:

$$\begin{aligned}
p^0 : \quad & \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, & v_0(x,0) &= x+1, \\
p^1 : \quad & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + A(x,t) \frac{\partial v_0}{\partial x} + B(x,t) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} = 0, & v_1(x,0) &= 0, \\
p^2 : \quad & \frac{\partial v_2}{\partial t} + A(x,t) \frac{\partial v_1}{\partial x} + B(x,t) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = 0, & v_2(x,0) &= 0, \\
p^3 : \quad & \frac{\partial v_3}{\partial t} + A(x,t) \frac{\partial v_2}{\partial x} + B(x,t) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} = 0, & v_3(x,0) &= 0, \\
p^4 : \quad & \frac{\partial v_4}{\partial t} + A(x,t) \frac{\partial v_3}{\partial x} + B(x,t) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2} = 0, & v_4(x,0) &= 0, \\
& \cdot & & \\
& \cdot & & \\
& \cdot & & \\
p^j : \quad & \frac{\partial v_j}{\partial t} + A(x,t) \frac{\partial v_{j-1}}{\partial x} + B(x,t) \frac{\partial^2 v_{j-1}}{\partial x^2} = 0, \quad (j = 2,3,\dots) & v_j(x,0) &= 0. \\
& \cdot & & \\
& \cdot & & \\
& \cdot & &
\end{aligned} \tag{1.3.20}$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç koşulunu sağlayan $u_0(x,t) = x+1$ başlangıç yaklaşımı seçilerek, (1.3.20) denklem sisteminin çözümleri;

$$\begin{aligned}
v_0(x,t) &= x+1, \\
v_1(x,t) &= t(x+1), \\
v_2(x,t) &= \frac{t^2}{2!}(x+1), \\
v_3(x,t) &= \frac{t^3}{3!}(x+1), \\
v_4(x,t) &= \frac{t^4}{4!}(x+1), \\
& \cdot \\
& \cdot \\
v_n(x,t) &= \frac{t^n}{n!}(x+1), \\
& \cdot \\
& \cdot
\end{aligned}$$

(1.3.21)

bulunur.

Buradan, $p \rightarrow 1$ iken (1.3.18) denkleminin çözümü, aynı zamanda denklemin tam

çözümü olan $u(x, t) = (x+1) \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = (x+1)e^t$, dir.

1.3.4.Örnek Genelleştirilmiş lineer (1.3.6) denklemi göz önüne alınsın.

$$\begin{aligned}
 u(x, 0) &= x_1 & x &= (x_1, x_2) \in R^2 \\
 A_1(x_1, x_2) &= x_1, \\
 A_2(x_1, x_2) &= 5x_2 \\
 B_{1,1}(x_1, x_2) &= x_1^2, \\
 B_{1,2}(x_1, x_2) &= 1, \\
 B_{2,2}(x_1, x_2) &= x_2^2.
 \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

Homotopi pertürbasyon metodu uygulanarak aşağıdaki homotopi oluşturulsun.

$$H(v, p) = (1-p) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x_1, x_2) - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_{i,j}(x_1, x_2) \right) v \right) = 0. \tag{1.3.23}$$

(1.2.7) denklemi, (1.3.23) denkleminde yerine konup p ' nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek:

$$\begin{aligned}
 p^0 : \quad & \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, & v_0(x, 0) &= x_1, \\
 p^1 : \quad & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_0 A_i(x_1, x_2)}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_0 B_{i,j}(x_1, x_2)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, & v_1(x, 0) &= 0, \\
 p^2 : \quad & \frac{\partial v_2}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_1 A_i(x_1, x_2)}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_1 B_{i,j}(x_1, x_2)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, & v_2(x, 0) &= 0, \\
 p^3 : \quad & \frac{\partial v_3}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_2 A_i(x_1, x_2)}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_2 B_{i,j}(x_1, x_2)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, & v_3(x, 0) &= 0, \\
 p^4 : \quad & \frac{\partial v_4}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_3 A_i(x_1, x_2)}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_3 B_{i,j}(x_1, x_2)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, & v_4(x, 0) &= 0, \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 p^n : \quad & \frac{\partial v_n}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_{n-1} A_i(x_1, x_2)}{\partial x_i} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_{n-1} B_{i,j}(x_1, x_2)}{\partial x_i \partial x_j} = 0, (n=2, 3, \dots) & v_n(x, 0) &= 0, \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & &
 \end{aligned} \tag{1.3.24}$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç koşulunu sağlayan $u_0(x_1, x_2, t) = x_1$ başlangıç yaklaşımı seçilerek, (1.3.24) denklem sisteminin çözümleri;

$$v_0(x_1, x_2, t) = x_1,$$

$$v_1(x_1, x_2, t) = tx_1,$$

$$v_2(x_1, x_2, t) = \frac{t^2}{2!} x_1,$$

$$v_3(x_1, x_2, t) = \frac{t^3}{3!} x_1,$$

$$v_4(x_1, x_2, t) = \frac{t^4}{4!} x_1,$$

.

.

$$v_n(x_1, x_2, t) = \frac{t^n}{n!} x_1,$$

.

.

(1.3.25)

bulunur. $p \rightarrow 1$ iken (1.3.22) denkleminin çözümü, aynı zamanda denklemin tam

çözümü olan $u(x_1, x_2, t) = x_1 \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = x_1 e^t$ elde edilir.

1.3.5.Örnek (1.3.8) nonlineer denklemi göz önüne alınsın:

$$u(x, 0) = x^2, \quad x \in IR.$$

$$A(x, t, u) = 4\frac{u}{x} - \frac{x}{3}, \quad (1.3.26)$$

$$B(x, t, u) = u.$$

Homotopi pertürbasyon metodu kullanılarak

$$H(v, p) = (1 - p) \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + p \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} A(x, t, v) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, t, v) \right) v \right) = 0 \quad (1.3.27)$$

homotopisi oluşturulsun. (1.2.7) denklemi, (1.3.27) denkleminde yerine konup p 'nin kuvvetlerine göre katsayılar eşitlenerek:

$$\begin{aligned}
p^0 : \quad & \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} = 0, & v_0(x,0) &= x^2, \\
p^1 : \quad & \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{4}{x} (v_0)^2 - \frac{x}{3} v_0 \right)}{\partial x} - \frac{\partial^2 (v_0)^2}{\partial x^2} = 0, & v_1(x,0) &= 0, \\
p^2 : \quad & \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{8}{x} v_0 v_1 - \frac{x}{3} v_1 \right)}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 (v_0 v_1)}{\partial x^2} = 0, & v_2(x,0) &= 0, \\
p^3 : \quad & \frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{\partial \left[\frac{4}{x} (2v_0 v_2 + v_1^2) - \frac{x}{3} v_2 \right]}{\partial x} - \frac{\partial^2 (2v_0 v_2 + v_1^2)}{\partial x^2} = 0, & v_3(x,0) &= 0, \\
p^4 : \quad & \frac{\partial v_4}{\partial t} + \frac{\partial \left[\frac{8}{x} (v_1 v_2 + v_0 v_3) - \frac{x}{3} v_3 \right]}{\partial x} - \frac{\partial^2 (2v_1 v_2 + 2v_0 v_3)}{\partial x^2} = 0, & v_4(x,0) &= 0. \\
& \cdot \\
& \cdot
\end{aligned} \tag{1.3.28}$$

denklem sistemi elde edilir. Başlangıç koşulunu sağlayan $u_0(x,t) = x^2$ başlangıç yaklaşımı seçilerek, (1.3.28) denklem sisteminin çözümleri;

$$\begin{aligned}
v_0(x,t) &= x^2, \\
v_1(x,t) &= tx^2, \\
v_2(x,t) &= \frac{t^2}{2!} x^2, \\
v_3(x,t) &= \frac{t^3}{3!} x^2, \\
v_4(x,t) &= \frac{t^4}{4!} x^2, \\
& \cdot \\
& \cdot \\
v_n(x,t) &= \frac{t^n}{n!} x^2, \\
& \cdot \\
& \cdot
\end{aligned} \tag{1.3.29}$$

bulunur. $p \rightarrow 1$ iken (1.3.26) denkleminin çözümü, aynı zamanda denklemin tam

çözümü olan, $u(x,t) = x^2 \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = x^2 e^t$ elde edilir.

Görüldüğü gibi, metot etkin, kullanımı kolay, güvenilir bir metottur. Metodun başlıca avantajı analitik yaklaşım vermesi, çoğu durumda hızlı yakınsak seri formunda tam çözüme götürmesidir. Fakat homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözümün, bazı problemlerde, bütün çözüm bölgesi için yakınsak olmadığını gösteren örnekler de mevcuttur. Böyle bir örnek, [43] numaralı kaynakta ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Ayrıca, homotopi pertürbasyon metodu ile elde edilen sınırlı sayıdaki terim kullanılarak, bulunan kısmi çözüm serisinin hangi kapalı fonksiyona yakınsadığını veya yakınsak bir seri oluşturup oluşturmadığını görmek de kolay değildir.

Seçilen bütün örneklerdeki tam çözümler bilindiğinden, homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan seri çözümlerin, tam çözümlere yakınsadığını göstermek kolay olmuştur. Fakat tam çözümü bilinmeyen problemlerde, elde edilen çözüm serisinin, tam çözüme yakınsamasını veren bir teori homotopi pertürbasyon metodunda yoktur. Belki yakınsama, homotopi yolunun doğru seçilebilmesi ile mümkündür, bu, ancak deneme ve yanılma ile kısmen sağlanabilir. Homotopi pertürbasyon metodunun analizini tam olarak yapabilmek için benzer bir metot olan homotopi analiz metodu incelenip bu iki metot arasındaki farklılıklar sonuç bölümünde tartışmaya açılmıştır.

II.BÖLÜM

2. HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN FOKKER-PLANCK DENKLEMİNE UYGULANMASI

2.1. Homotopi Analiz Metodu

Kuvvetli nonlinearliğe sahip nonlinear problemlerin analitik çözümlerini elde etmek genelde zordur. Yarı analitik yöntemlerde, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesi çoğu zaman fiziksel parametrelere bağlıdır. Bu yarı analitik yaklaşımlar, nonlinearlik kuvvetli olduğunda, çoğu zaman başarısız sonuçlar verir. Pertürbasyon yaklaşımları ise sadece zayıf nonlinearliğe sahip problemler için geçerlidir. Bu tip problemlerin çözümleri için daha önceki tekniklerden farklı olarak, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini ve hızını kontrol etme imkanı sağlayan “Homotopi Analiz Metodu (HAM)” Liao tarafından verilmiştir. Bu metot aynı zamanda, Adomian ayrışım metodu, Lyapunov küçük yapay parametre metodu, δ -açılım metodu gibi önceden verilmiş non-pertürbatif metotların genel halidir [19]. Yani, önceki metotların genelleştirilmiş veya birleştirilmiş bir teorisi olarak düşünülebilir.

Homotopi analiz metodu, farklı tipteki nonlinear denklemlerin seri çözümlerini elde etmek için kullanılan genel bir yarı analitik yaklaşımdır. Bu metot cebirsel denklemlerin, adi diferansiyel denklemlerin, integro-diferansiyel denklemlerin vb. çözümlerini bulmak için kullanılır. Pertürbasyon metotlarının aksine, homotopi analiz metodu, küçük /büyük fiziksel parametrelerden bağımsızdır ve metodun uygulanması için problemin küçük /büyük fiziksel parametre içerip içermediği önemli değildir. Bütün pertürbasyon metotlarından ve klasik non-pertürbatif metotlardan farklı olarak, homotopi analiz metodu, çözüm serilerinin yakınsaklık bölgesini kontrol etme imkanı sağlar. Homotopi analiz metodu metodu, homotopi pertürbasyon metoduna benzer biçimde, topolojinin temel kavramlarından biri olan homotopiyi kullanır. Bu metotta da ele alınan denklemin başlangıç yaklaşımından tam çözüme götüren sürekli bir dönüşüm oluşturulur. Bu tip bir sürekli dönüşümü oluşturmak için bir yardımcı lineer operatör seçilir. Bulunan çözüm serisinin yakınsaklığını garantilemek için bir yardımcı

parametre kullanılır. Bu metot, başlangıç yaklaşımı ve yardımcı lineer operatörlerin seçiminde serbestlik sağlar. Homotopi analiz metodu yardımıyla zor bir nonlinear problem, daha basit sonsuz sayıda lineer alt probleme dönüştürülür.

Örneğin homotopi pertürbasyon metodunu anlatırken incelenen nonlinear cebirsel denklem göz önüne alınsın.

$$f(x) = 0.$$

x_0 , x 'in bir başlangıç yaklaşımı ve $q \in [0,1]$ homotopi parametresi (topolojide gömme parametresi olarak adlandırılır.) olmak üzere;

$$H[x;q] = (1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x),$$

homotopisi kurulsun. $q = 0$ ve $q = 1$ iken

$$H[x;0] = f(x) - f(x_0) \text{ ve } H[x;1] = f(x),$$

elde edilir. q parametresi 0'dan 1'e değiştikçe, $H[x;q]$ homotopisi sürekli olarak $f(x) - f(x_0)$ 'dan $f(x)$ 'e değişir. Böyle bir sürekli değişim, topolojide deformasyon olarak adlandırılır. $H[x;q] = 0$ alınarak

$$(1-q)[f(x) - f(x_0)] + qf(x) = 0,$$

cebirsel denklemlerin bir ailesi bulunur. Bu cebirsel denklemler ailesinin bir çözümü, homotopi parametresi q 'ya bağlıdır. Bu yüzden, denklemlerin ailesi

$$(1-q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] + qf[\phi(q)] = 0. \quad (2.1.1)$$

biçiminde tekrar yazılabilir. $q = 0$ iken

$$f[\phi(q)] - f(x_0) = 0; \quad q = 0,$$

bulunur. Bu denklemin çözümü;

$$\phi|_{q=0} = \phi(0) = x_0 \text{ 'dır.}$$

$q = 1$ iken

$$f[\phi(q)] = 0; \quad q = 1.$$

denklemini başlangıçta alınan cebirsel denklem $f(x) = 0$ ile tam olarak aynıdır. Buradan

$$\phi|_{q=1} = \phi(1) = x$$

elde edilir. Yani homotopi parametresi q , 0'dan 1'e değiştikçe, $\phi(q)$ 'nin değeri, başlangıç yaklaşımı x_0 'dan $f(x) = 0$ denkleminin çözümü olan x 'e değişir (veya

deforme olur). (2.1.1) tipindeki denklemlerin ailesine *sıfırıncı-derece deformasyon denklemi* denir. Bu da homotopi pertürbasyon metodundaki homotopiye denktir. Homotopi pertürbasyon metodu, bu noktadan itibaren farklılıklar gösterir. Burada, $\phi(q)$, homotopi parametresi q 'nın bir fonksiyonu olduğundan, pertürbasyon serisi yerine Taylor serisine açılarak ifade edilir. Böylece $\phi(0) = x_0$ olmak üzere

$$\phi(q) = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k q^k \quad (2.1.2)$$

bulunur. (2.1.2) serisinde x_k ,

$$x_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k \phi(q)}{\partial q^k} \right|_{q=0} = D_k(\phi) \quad (2.1.3)$$

biçimindedir.

(2.1.2) serisine homotopi-serisi, $D_k(\phi)$ ' ye ise k .mertebeden homotopi-türevi denir.

Homotopi-serisi (2.1.2), $q = 1$ 'de yakınsak ise $\phi(1) = x$ eşitliği kullanılarak homotopi-serisi çözümü

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \quad (2.1.4)$$

elde edilir.

Taylor serisinde katsayılar tek biçimde verildiğinden, (2.1.2) homotopi serisinin x_k katsayıları da tektir. Bu yüzden x_k 'lerden oluşan denklem de tektir ve sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.1)'den doğrudan elde edilebilir. Sıfırıncı-derece deformasyon denkleminin her iki tarafının, (2.1.3) ile tanımlanan 1.mertebeden homotopi-türevi alınarak

$$(1-q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] + qf'[\phi(q)] = f'[\phi(q)] - (1-q)f'(x_0) = 0$$

$$\frac{d\phi(q)}{dq} f'[\phi(q)] + f'(x_0) = 0$$

1.derece deformasyon denklemi

$$x_1 f'(x_0) + f'(x_0) = 0$$

elde edilir.

Bulunan bu denklemin çözümü:

$$x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{ dir.}$$

(2.1.1) denkleminin her iki tarafının 2. mertebeden homotopi-türevi alınarak $(1-q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] + qf[\phi(q)] = f[\phi(q)] - (1-q)f(x_0) = 0$

$$\frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 \phi(q)}{dq^2} \right|_{q=0} f'[\phi(q)]_{q=0} + \frac{1}{2!} \left(\left. \frac{d\phi(q)}{dq} \right|_{q=0} \right)^2 f''[\phi(q)]_{q=0} = 0$$

2.derece deformasyon denklemi

$$x_2 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0$$

elde edilir.

Bu denklemin çözümü:

$$x_2 = -\frac{x_1^2 f''(x_0)}{2f'(x_0)} = -\frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}$$

bulunur. Bu yolla $k = 1, 2, 3, \dots$ dereceden x_k 'lar sırayla elde edilir. Oluşturulan bütün bu yüksek derece deformasyon denklemleri lineer ve çözülmesi kolay denklemlerdir. Birinci-derece homotopi-serisi yaklaşımı;

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.1.5)$$

ve ikinci-derece homotopi-serisi yaklaşımı homotopi pertürbasyon metodundaki gibi

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad (2.1.6)$$

olarak bulunur. (2.1.5)'in Newton iterasyon formülüyle aynı olduğu, (2.1.6)'nın da 2.derece Newton iterasyon formülü olarak düşünülebileceği görülür.

Yukarıdaki yaklaşım, hiçbir fiziksel parametreye bağlı değildir. Bir nonlinear problemin küçük/büyük fiziksel parametre içerip içermediği fark etmeksizin her zaman sıfır-derece deformasyon denklemi oluşturmak için $q \in [0, 1]$ homotopi-parametresi verilebilir. (2.1.2)'deki homotopi serisi her zaman $q = 1$ 'de yakınsak olmayabilir. Bu yüzden, buna karşı gelen (2.1.4) homotopi çözüm serisi de ıraksak olabilir. Örneğin 1. derece Newton iterasyon formülü, çoğu zaman ıraksak sonuçlar verir. Bunun nedeni ise yukarıdaki yaklaşımın $q = 1$ 'de yakınsak olduğu varsayımına dayanmasıdır. Fakat bu

yaklaşım, genelde kuvvetli nonlinearliğe sahip nonlinear problemler için sağlanmaz. Homotopi analiz metodunda, bu kısıtlamayı ortadan kaldırmak için Liao [19], bir sıfırıncı-derece deformasyon denklemini oluştururken, bir yardımcı $\hbar \neq 0$ parametresi vermiştir:

$$(1-q)[f[\phi(q)] - f(x_0)] = q\hbar f[\phi(q)]. \quad (2.1.7)$$

$\hbar \neq 0$ olduğundan (2.1.7) denklemi, $q=1$ 'de $x=\phi(1)$ 'i sağlayan $f(x)=0$ denklemine karşı gelir:

$$\hbar f[\phi(q)] = 0; \quad q=1$$

olur. Yüksek-derece deformasyon denklemi hariç diğer formüller, (2.1.2) ve (2.1.4) ile aynıdır. 1.derece deformasyon denklemi:

$$x_1 f'(x_0) - \hbar f(x_0) = 0$$

olur. Bu denklemin çözümü:

$$x_1 = \hbar \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \text{dır.}$$

(2.1.7) denkleminin her iki tarafının 2. mertebeden homotopi-türevi alınarak 2.derece deformasyon denklemi:

$$x_2 f'(x_0) - (1+\hbar)x_1 f'(x_0) + \frac{1}{2}x_1^2 f''(x_0) = 0$$

bulunur. Bu denklemin çözümü:

$$x_2 = (1+\hbar)x_1 f'(x_0) - \frac{1}{2}x_1^2 \frac{f''(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{\hbar(1+\hbar)f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{\hbar^2 f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}$$

elde edilir. Buradan birinci-derece homotopi-serisi yaklaşımı:

$$x \approx x_0 + x_1 = x_0 + \hbar \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (2.1.8)$$

ve 2.derece homotopi-serisi yaklaşımı:

$$x \approx x_0 + x_1 + x_2 = x_0 + \hbar(\hbar+2) \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \hbar^2 \frac{f^2(x_0)f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3} \quad (2.1.9)$$

elde edilir.

(2.1.5), (2.1.6) denklemleri, (2.1.8) ve (2.1.9) denklemlerinin, sırasıyla $\hbar = -1$ olduğu durumdaki özel halleridirler. (2.1.5) denkleminde, $\hbar$ yardımcı parametresinin, nümerik hesaplamalarda sıkça kullanılan bir iterasyon çarpanı olduğu düşünülebilir. Uygun

seçilen bir iterasyon çarpanı, iterasyonun yakınsak olmasını sağlar. Bunun gibi, (2.1.2) homotopi-serisinin yakınsaklığı da $\hbar$ yardımcı parametresinin değerine bağlıdır. $\hbar$ yardımcı parametresinin uygun bir değeri seçilerek, homotopi-seri çözümünün yakınsaklığı garanti edilebilir. Bu yüzden $\hbar$, yakınsaklık-kontrol parametresi olarak adlandırılır.

$\hbar$ yakınsaklık parametresi kullanılmadığında, (2.1.2) homotopi-serisinin yakınsak olduğu varsayılmak zorundadır. $\hbar$ yakınsaklık parametresinin kullanımıyla böyle bir varsayıma gerek yoktur. Yakınsak homotopi-seri çözümü elde etmek için her zaman uygun bir $\hbar$ değeri seçilebilir. Homotopi-türevi ve deformasyon denklemi ile ilgili bazı teorem ve yardımcı teoremler verilmiştir [31].

2.1.1. Homotopi-türevinin özellikleri

Homotopi-türevi, daha yüksek derece deformasyon denklemini türetmek için kullanılır. Bu alt bölümde, bu türevin tam olarak tanımıyla birlikte bazı özellikleri verilmiştir.

2.1.1.1. Tanım ϕ , q homotopi-parametresinin bir fonksiyonu olsun. $m \geq 0$ bir tamsayı olmak üzere;

$$D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \quad (2.1.10)$$

$D_m(\phi)$ 'ye ϕ 'nin m .**mertebeden homotopi-türevi** denir.

2.1.1.2. Tanım $N[u] = 0$; bir nonlineer denklem, ϕ ; Maclaurin serisi

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k \quad (2.1.11)$$

olan, $q \in [0,1]$ homotopi-parametresinin bir fonksiyonu olsun.

$$\Pi[\phi, q] = 0, \quad q \in [0, 1]$$

denklemler ailesine $N[u] = 0$ ' ın **sıfırıncı derece deformasyon denklemi** denir. Eğer $q = 1$ ise bu denklem

$$u = \phi|_{q=1} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \quad (2.1.12)$$

olmak üzere başlangıçta alınan $N[u] = 0$ denklemine denktir. $q = 0$ 'da ise denklemin çözümü açıktır. (2.1.11) serisine **homotopi serisi** ve (2.1.12) serisine $N[u] = 0$ 'ın **homotopi seri çözümü** denir. u_k 'ların oluşturduğu denklemlere **k.derece deformasyon denklemleri** denir.

2.1.1.1. Teorem f ve g homotopi parametresi q ' dan bağımsız fonksiyonlar olsunlar.

$$\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i q^i, \quad \psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j q^j$$

homotopi serileri için

$$D_m(f\phi + g\psi) = fD_m(\phi) + gD_m(\psi)'dir.$$

Kanıt: f ve g fonksiyonları q ' dan bağımsız ve (2.1.10) ile tanımlanan D_m lineer operatör olduğundan

$$D_m(f\phi + g\psi) = D_m(f\phi) + D_m(g\psi) = fD_m(\phi) + gD_m(\psi)$$

sağlanır.

2.1.1.2. Teorem $\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i q^i$, $\psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j q^j$ homotopi serileri için $m \geq 0$, $n \geq 0$, $l \geq 0$

ve $0 \leq k \leq m$ tamsayılar olmak üzere

$$(a) \quad D_m(\phi) = u_m$$

$$(b) \quad D_m(q^k \phi) = D_{m-k}(\phi)$$

$$(c) \quad D_m(\phi\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\phi)D_{m-i}(\psi) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi)D_{m-i}(\phi)$$

$$(d) \quad D_m(\phi^n \psi^l) = \sum_{i=0}^m D_i(\phi^n)D_{m-i}(\psi^l) = \sum_{i=0}^m D_i(\psi^l)D_{m-i}(\phi^n)$$

sağlanır.

Kanıt:

(a) Taylor teoremine göre, ϕ 'nin Maclaurin serisinin tek biçimde tanımlanan u_m katsayıları

$$u_m = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$$

ile verilir. (2.1.10) ile verilen $D_m(\phi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}$ tanımından $D_m(\phi) = u_m$ bulunur.

(b) $q^k \phi = q^k \sum_{i=0}^{+\infty} u_i q^i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i q^{i+k} = \sum_{m=k}^{+\infty} u_{m-k} q^m$ sağlanır. (a) yardımıyla

$$D_m(q^k \phi) = u_{m-k} = D_{m-k}(\phi) \text{ bulunur.}$$

(c) çarpımın türevleri için Leibnitz kuralına göre

$$\frac{\partial^m(\phi\psi)}{\partial q^m} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{\partial^i \phi}{\partial q^i} \frac{\partial^{m-i} \psi}{\partial q^{m-i}} = \sum_{i=0}^m \frac{m!}{i!(m-i)!} \frac{\partial^i \psi}{\partial q^i} \frac{\partial^{m-i} \phi}{\partial q^{m-i}}$$

(2.1.10) tanımı ile

$$D_m(\phi\psi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m(\phi\psi)}{\partial q^m} \right|_{q=0} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{i!} \left. \frac{\partial^i \phi}{\partial q^i} \right|_{q=0} \right) \left(\frac{1}{(m-i)!} \left. \frac{\partial^{m-i} \psi}{\partial q^{m-i}} \right|_{q=0} \right) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\phi) D_{m-i}(\psi)$$

sağlanır. Benzer biçimde

$$D_m(\phi\psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\psi) D_{m-i}(\phi) \text{ sağlanır.}$$

(d) $\Phi = \phi^n$ ve $\Psi = \psi^l$ yazılsın. (c)'ye göre

$$D_m(\phi^n \psi^l) = D_m(\Phi\Psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\Phi) D_{m-i}(\Psi) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\phi^n) D_{m-i}(\psi^l)$$

sağlanır. Benzer biçimde

$$D_m(\phi^n \psi^l) = \sum_{i=0}^{+\infty} D_i(\psi^l) D_{m-i}(\phi^n) \text{ sağlanır.}$$

2.1.1.3. Teorem L, q homotopi-parametresinden bağımsız lineer bir operatör olsun.

$$\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k \text{ homotopi serisi için } D_m(L\phi) = L[D_m(\phi)] \text{ sağlanır.}$$

Kanıt: L, q 'dan bağımsız olduğundan

$$L\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} [L(u_k)] q^k.$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafının m .mertebeden homotopi-türevi alınıp 2.1.1.2. Teoremin (a) şıkkı kullanılarak $D_m(L\phi) = L(u_m)$ elde edilir. Ayrıca yine 2.1.1.2. Teoremin (a) şıkkına göre $L[D_m(\phi)] = L(u_m)$ 'dir. Buradan $D_m(L\phi) = L[D_m(\phi)]$ sağlanır.

2.1.1.4. Teorem $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k$ homotopi serisi için $m \geq 1$ tamsayı olmak üzere aşağıdaki formüller sağlanır;

$$D_0(e^\phi) = e^{u_0},$$

$$D_m(e^\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^\phi) D_{m-k}(\phi).$$

Kanıt: (2.1.10) tanımına göre $D_0(e^\phi) = e^{u_0}$ sağlanır.

$\frac{\partial e^\phi}{\partial q} = e^\phi \frac{\partial \phi}{\partial q}$, dur. Çarpımın türevi için Leibnitz kuralına göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m e^\phi}{\partial q^m} &= \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} \left(e^\phi \frac{\partial \phi}{\partial q} \right) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!(m-1-k)!} \frac{\partial^k e^\phi}{\partial q^k} \frac{\partial^{m-k} \phi}{\partial q^{m-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(m-k)}{m} \left[\frac{1}{k!} \frac{\partial^k e^\phi}{\partial q^k} \right] \left[\frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} \phi}{\partial q^{m-k}} \right]. \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlikte (2.1.10) tanımı kullanılarak

$$D_m(e^\phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^\phi) D_{m-k}(\phi) \text{ elde edilir.}$$

2.1.1.5. Teorem $\phi = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k q^k$ homotopi serisi için $m \geq 1$ tamsayı olmak üzere

$$D_0(\sin \phi) = \sin(u_0), \quad D_0(\cos \phi) = \cos(u_0),$$

$$D_m(\sin \phi) = \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(\cos \phi) D_{m-k}(\phi),$$

$$D_m(\cos \phi) = - \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(\sin \phi) D_{m-k}(\phi),$$

bağıntıları sağlanır.

Kanıt: (2.1.10) tanımına göre;

$$D_0(\sin \phi) = \sin(u_0), \quad D_0(\cos \phi) = \cos(u_0) \text{ sağlanır.}$$

$i = \sqrt{-1}$ yazılırsa Euler formülü ve 2.1.1.1. Teorem kullanılarak $m \geq 1$ tamsayısı için

$$D_m(\sin \phi) = D_m\left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\right) = \frac{1}{2i} [D_m(e^{i\phi}) - D_m(e^{-i\phi})] \quad (2.1.13)$$

$$D_m(\cos \phi) = D_m\left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}\right) = \frac{1}{2} [D_m(e^{i\phi}) + D_m(e^{-i\phi})] \quad - \quad (2.1.14)$$

sağlanır.

2.1.1.4. Teorem ve 2.1.1.1. Teorem kullanılarak

$$\begin{aligned} D_m(e^{i\phi}) &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^{i\phi}) D_{m-k}(i\phi) \\ &= i \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^{i\phi}) D_{m-k}(\phi) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$D_m(e^{-i\phi}) = -i \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_k(e^{-i\phi}) D_{m-k}(\phi)$$

elde edilir.

Yukarıdaki iki eşitlik (2.1.13) ve (2.1.14) denklemlerinde yerine konarak 2.1.1.1.

Teorem ve Euler formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} D_m(\sin \phi) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) [D_k(e^{i\phi}) + D_k(e^{-i\phi})] \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k\left(\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k(\cos \phi) \end{aligned}$$

bulunur. Benzer biçimde

$$\begin{aligned} D_m(\cos \phi) &= \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) [D_k(e^{i\phi}) - D_k(e^{-i\phi})] \\ &= - \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k\left(\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\right) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{k}{m}\right) D_{m-k}(\phi) D_k(\sin \phi)$$

bulunur.

2.1.1.6. Teorem Eğer homotopi serileri $\phi = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i q^i$, $\psi = \sum_{j=0}^{+\infty} v_j q^j$, bir $q \in [0, a)$

bölgesinde $\phi = \psi$ eşitliğini sağarlarsa her $m \geq 0$ tamsayısı ve bir $a > 0$ reel sayısı için $u_m = v_m$ ve $D_m(\phi) = D_m(\psi)$ 'dir.

Kamıt: $\phi = \psi$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k - v_k) q^k = 0.$$

sağlanır. Yukarıdaki eşitlik her $q \in [0, a)$ noktası için sağlanır $\Leftrightarrow u_m = v_m$, $m \geq 0$.

2.1.1.2. Teoremin.(a) şikkına göre $D_m(\phi) = D_m(\psi)$ 'dir.

2.1.2. Deformasyon denklemleri

2.1.1. alt bölümünde verilen homotopi-türevinin özellikleri, farklı tipte sıfırıncı-derece deformasyon denklemleri için yüksek derece deformasyon denklemleri elde edilirken kullanılır.

2.1.2.1. Yardımcı Teorem $q \in [0, 1]$ bir homotopi-parametresi, u_m ; $\vec{x}$ uzay, t zaman

değişkeninin bir fonksiyonu olmak üzere ; $\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t) q^m$ bir homotopi serisini, L ;

$\vec{x}$ ve t 'ye göre bir yardımcı lineer operatörünü, u_0 ; bir başlangıç çözümünü gösterebilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1 \\ 1, & m > 1. \end{cases} \quad (2.1.15)$$

olmak üzere, (2.1.10) ile tanımlanan D_m operatörü için

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)]$$

sağlanır.

Kanıt: L , q 'dan bağımsız bir lineer operatör olduğundan

$$(1-q)L[\phi - u_0] = L[\phi - q\phi + u_0 q - u_0]$$

sağlanır. 2.1.1.1., 2.1.1.2., 2.1.1.3. Teoremler kullanılarak

$$\begin{aligned} D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} &= D_m \{L[\phi - q\phi + u_0 q - u_0]\} \\ &= L\{D_m [\phi - q\phi + u_0 q - u_0]\} \\ &= L[D_m(\phi) - D_m(q\phi) + u_0 D_m(q)] \\ &= L[u_m - u_{m-1} + u_0 D_m(q)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade, $m=1$ iken $L[u_m]$ 'ye, $m > 1$ iken $L[u_m - u_{m-1}]$ 'e eşittir. χ_m 'in

(2.1.15) tanımı kullanılarak

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}].$$

bulunur.

2.1.2.1. Teorem $q \in [0,1]$ bir homotopi-parametresi olmak üzere, $\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$

homotopi serisi için L bir yardımcı lineer operatörü, N bir nonlineer operatörü, $u_0(\bar{x}, t)$ bir başlangıç çözümünü, $\hbar$, q 'dan bağımsız yakınsaklık-kontrol parametresini ve $H(\bar{x}, t)$, q 'dan bağımsız bir yardımcı fonksiyonu gösterebilir.

$$(1-q)L[\phi - u_0] = q\hbar H(\bar{x}, t)N[\phi] \quad (2.1.16)$$

ile tanımlanan sıfırıncı-derece deformasyon denkleminin karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m \geq 1$), D_{m-1} operatörü, (2.1.10), χ_m fonksiyonu (2.1.15) ile tanımlanmak üzere;

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = \hbar H(\bar{x}, t) D_{m-1}(N[\phi]) \quad (2.1.17)$$

ile verilir.

Kanıt: 2.1.1.6. Teorem kullanılarak

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = D_m (q\hbar H(\bar{x}, t)N[\phi]) \quad (2.1.18)$$

elde edilir. Yardımcı teorem 2.1'e göre

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (2.1.19)$$

bulunur. 2.1.1.1. Teorem ve 2.1.1.2. Teoreme göre

$$D_m (q\hbar H(\bar{x}, t)N[\phi]) = \hbar H(\bar{x}, t)D_m (N[\phi]) \quad (2.2.20)$$

bulunur. (2.1.19) ve (2.1.20)'yi (2.1.18)'de yerine koyarak m.derece deformasyon denkleminde ulaşılır:

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = \hbar H(\bar{x}, t)D_{m-1}(N[\phi]).$$

2.1.2.2. Teorem $q \in [0, 1]$ bir homotopi-parametresi, α_k bir sabit olmak üzere;

$\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t)q^m$, $\psi = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k q^k$ homotopi serilerini, L bir yardımcı lineer operatörü,

N bir nonlinear operatörü, $u_0(\bar{x}, t)$ bir başlangıç çözümünü, $H(\bar{x}, t)$, q 'dan bağımsız bir yardımcı fonksiyonu gösterebilir.

$$(1-q)L[\phi - u_0] = H(\bar{x}, t) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k q^k \right) N[\phi] \quad (2.1.21)$$

ile tanımlanan sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m \geq 1$), D_k operatörü (2.1.10), χ_m fonksiyonu (2.1.15) ile tanımlanmak üzere;

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = H(\bar{x}, t) \sum_{k=1}^m \alpha_k D_{m-k}(N[\phi]) \quad (2.1.22)$$

olur.

Kanıt: 2.1.1.6. Teorem kullanılarak

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = D_m (H(\bar{x}, t)\psi N[\phi]) \quad (2.1.23)$$

bulunur. 2.1.1.1. Yardımcı teoremine göre

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (2.1.24)$$

sağlanır. 2.1.1.1. Teorem ve 2.1.1.2. Teorem kullanılarak

$$D_m (H(\bar{x}, t)\psi N[\phi]) = H(\bar{x}, t) \sum_{k=0}^m D_k(\psi) D_{m-k}(N[\phi]) = H(\bar{x}, t) \sum_{k=0}^m \alpha_k D_{m-k}(N[\phi]),$$

$\alpha_0 = 0$ olduğundan,

$$D_m (H(\bar{x}, t) \psi N[\phi]) = H(\bar{x}, t) \sum_{k=0}^m \alpha_k D_{m-k} (N[\phi]) \quad (2.1.25)$$

bulunur. (2.1.24) ve (2.1.25), (2.1.23)'de yerine konursa kanıt biter.

Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.16), $\alpha_1 = \hbar$ ve $k > 1$ için $\alpha_k = 0$ olduğu durumda (2.1.21) sıfırıncı-derece deformasyon denkleminin bir özel halidir.

2.1.2.3. Teorem $q \in [0,1]$ bir homotopi-parametresi, $\beta_k(\bar{x}, t)$, sıfıra eşit veya en az bir

k için $\beta_k(\bar{x}, t) = 0$ olan sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere; $\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$,

$\psi = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k$ homotopi serileri, L bir yardımcı lineer operatör, N bir nonlinear

operatör, $u_0(\bar{x}, t)$ bir başlangıç çözümü olsunlar.

$$(1-q)L[\phi - u_0] = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k \right) N[\phi] \quad (2.1.26)$$

ile tanımlanan sıfırıncı-derece deformasyon denklemine karşı gelen m .derece deformasyon denklemi ($m \geq 1$), D_k operatörü (2.1.10), χ_m fonksiyonu (2.1.15) ile tanımlanmak üzere;

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = \sum_{k=1}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k} (N[\phi]), \quad (2.1.27)$$

ile verilir.

Kanıt: 2.1.1.6. Teorem kullanılarak

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = D_m (\psi N[\phi]) \quad (2.1.28)$$

bulunur. 2.1.1.1. Yardımcı teoremine göre

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (2.1.29)$$

sağlanır. 2.1.1.1. Teorem ve 2.1.1.2. Teorem kullanılarak

$$D_m (\psi N[\phi]) = \sum_{k=0}^m D_k (\psi) D_{m-k} (N[\phi]) = \sum_{k=0}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k} (N[\phi]),$$

bulunur. $\beta_0(\bar{x}, t) = 0$ olduğundan

$$D_m (\psi N[\phi]) = \sum_{k=0}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k} (N[\phi]). \quad (2.1.30)$$

elde edilir. (2.1.29) ve (2.1.30) denklemleri, (2.1.28) denkleminde yerine konularak istenen elde edilir.

Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.21), $k \geq 1$ için $\beta_k(\bar{x}, t) = \alpha_k H(\bar{x}, t)$ olduğu durumda, (2.1.26) sıfırıncı-derece deformasyon denkleminin bir özel halidir.

2.1.2.4. Teorem $q \in [0, 1]$ bir homotopi-parametresi, $\beta_k(\bar{x}, t)$ sıfıra eşit veya en az bir

k için $\beta_k(\bar{x}, t) = 0$ olan sıfırdan farklı bir fonksiyon olmak üzere; $\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$,

$\psi = \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k$ homotopi serileri, L bir yardımcı lineer operatör, N bir nonlineer

operatör, $u_0(\bar{x}, t)$ bir başlangıç çözümü olsunlar. $A[\phi, \bar{x}, t, q]$, $\phi, \bar{x}, t$ ve q 'nin, $q = 0$ ve $q = 1$ iken $A[\phi, \bar{x}, t, q] = 0$ 'ı sağlayan bir fonksiyonu olsun.

Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi,

$$(1-q)L[\phi - u_0] = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k(\bar{x}, t) q^k \right) N[\phi] + A[\phi, \bar{x}, t, q], \quad (2.1.31)$$

ile tanımlanır. Buna karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m \geq 1$), D_k operatörü (2.1.10), χ_m fonksiyonu (2.1.15) ile tanımlanmak üzere;

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = \sum_{k=1}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k}(N[\phi]) + D_m(A[\phi, \bar{x}, t, q]) \quad (2.1.32)$$

ile verilir.

Kanıt: 2.1.1.6. Teorem ve 2.1.1.1. Teorem kullanılarak

$$D_m \{ (1-q)L[\phi - u_0] \} = D_m (\psi N[\phi]) + D_m (A[\phi, \bar{x}, t, q]) \quad (2.1.33)$$

2.1.1.1. Yardımcı teoreme göre

$$D_m \{ (1-q)L[\phi - u_0] \} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (2.1.34)$$

sağlanır. 2.1.1.1. Teorem ve 2.1.1.2. Teorem kullanılarak

$$D_m (\psi N[\phi]) = \sum_{k=0}^m D_k (\psi) D_{m-k} (N[\phi]) = \sum_{k=0}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k} (N[\phi])$$

bulunur. $\beta_0(\bar{x}, t) = 0$ olduğundan

$$D_m (\psi N[\phi]) = \sum_{k=0}^m \beta_k(\bar{x}, t) D_{m-k} (N[\phi]). \quad (2.1.35)$$

olur. (2.1.34) ve (2.1.35), (2.1.33)'de yerine konarak kanıt biter. Δ

Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.26), $A[\phi, \bar{x}, t, q] = 0$ olduğu durumda, (2.1.31) sıfırıncı-derece deformasyon denkleminin bir özel halidir.

2.1.2.5. Teorem $q \in [0,1]$ bir homotopi-parametresi olmak üzere; $\phi = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m$ homotopi-serisi, L bir yardımcı lineer operatör, N bir nonlinear operatör, $u_0(\bar{x}, t)$ bir başlangıç çözümü olsunlar. $\gamma(\bar{x}, t) \neq 0$ bir fonksiyon olmak üzere; $B[\phi, \bar{x}, t, q]$, $\phi, \bar{x}, t$ ve q 'nin,

$$q = 0 \text{ iken } B[\phi, \bar{x}, t, q] = 0,$$

$$q = 1 \text{ iken } B[\phi, \bar{x}, t, q] = \gamma(\bar{x}, t)N[\phi]$$

denklemlerini sağlayan bir fonksiyonu olsun.

$$(1-q)L[\phi - u_0] = B[\phi, \bar{x}, t, q] \quad (2.1.36)$$

ile tanımlanan sıfırıncı-derece deformasyon denkleminde karşı gelen m.derece deformasyon denklemi ($m \geq 1$), D_k operatörü (2.1.10), χ_m fonksiyonu (2.1.15) ile tanımlanmak üzere;

$$L[u_m(\bar{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\bar{x}, t)] = D_m(B[\phi, \bar{x}, t, q]) \quad (2.1.37)$$

ile verilir.

Kanıt: 2.1.1.6. Teorem kullanılarak

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = D_m(B[\phi, \bar{x}, t, q]). \quad (2.1.38)$$

elde edilir. 2.1.1.1. Yardımcı teoreme göre

$$D_m \{(1-q)L[\phi - u_0]\} = L[u_m - \chi_m u_{m-1}] \quad (2.1.39)$$

sağlanır. (2.1.38) ve (2.1.39)'dan kanıt biter. Δ

Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.16), (2.1.21), (2.1.26) ve (2.1.31), sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.36)'nın özel halleridirler. Çoğu zaman homotopi seri çözümünü elde etmek için (2.1.16) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi kullanılır. Eğer yardımcı lineer operatör L , yardımcı fonksiyon $H(\bar{x}, t)$, ve yakınsaklık parametresi $\hbar$ uygun olarak seçilirse istenen çözüme ulaşılır. Bir nonlinear $N[u] = 0$ denkleminin yüksek derece deformasyon denklemlerini elde etmek için $D_k(N(\phi))$ terimleri hesaplanmalıdır. (2.1.16) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi,

$$\dot{L} = \frac{L}{\hbar H(\bar{x}, t)} \text{ olmak üzere;}$$

$$(1-q)\dot{L}[\phi - u_0] = qN[\phi] \quad (2.1.40)$$

denklemlerle tekrar yazılırsa $\dot{L}$ bir yardımcı lineer operatör gibi düşünülebilir. Bu durumda, yardımcı lineer operatörün seçimi için; ilk önce bir temel lineer operatör seçilir, sonra yardımcı fonksiyon belirlenir ve son olarak yakınsaklık-kontrol parametresi h , homotopi-seri çözümü yakınsak olacak biçimde belirlenir. Sıfırıncı-derece deformasyon denklemleri (2.1.21), (2.1.26), (2.1.31) ve (2.1.36), h yakınsaklık-kontrol parametresi kavramını genelleştirerek elde edilirler.

$$\vec{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\}$$

vektörü tanımlansın. (2.1.21) denklemindeki $\vec{\alpha}$ vektörü, (2.1.16) denklemindeki h yakınsaklık-kontrol parametresinin bir genelleştirmesidir. Benzer şekilde, (2.1.26) ve (2.1.31) denklemlerindeki

$$\vec{\beta} = \{\vec{\beta}_1(\vec{x}, t), \vec{\beta}_2(\vec{x}, t), \vec{\beta}_3(\vec{x}, t), \dots\}$$

vektörü (2.1.21) denkleminde yakınsaklık kontrol vektörü $\vec{\alpha}$ 'nın bir genelleştirmesidir. $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ vektörlerinin uygun seçimiyle homotopi-seri çözümünün yakınsaklığı garanti edilebilir. Liao (2.1.16) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi için h -eğrilerini çizerek homotopi serisinin yakınsaklık bölgesini uygun bir h değeri ile belirlemeyi önermiştir. (2.1.16), (2.1.21), (2.1.26), (2.1.31) ve (2.1.36) gibi farklı tipte sıfırıncı derece deformasyon denklemleri, homotopi analiz metodunun uygulanmasında esneklik sağlarlar. Bunun yanında, her tipte sıfırıncı derece deformasyon denklemi için yardımcı lineer operatör L 'yi seçme serbestliği vardır. Hatta L 'nin mertebesi, orjinal nonlinear denkleminkinden farklı olabilir [58]. İkinci mertebeden bir nonlinear kısmi diferansiyel denklem, dördüncü veya altıncı mertebeden sonsuz sayıda lineer kısmi diferansiyel denklem ile yer değiştirebilir ve bir nonlinear kısmi diferansiyel denklem, sonsuz sayıda lineer adi diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Değişken katsayılı bir nonlinear diferansiyel denklem, sabit katsayılı, sonsuz sayıda lineer diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu tip serbestlik ve esneklik, verilen bir nonlinear problemin, istenen çözümünü daha kolay yoldan bulma imkanı sağlar.

Eğer bir nonlinear denklemin en az bir çözümü varsa yakınsak homotopi-seri çözümü elde etmek için sıfırıncı-derece deformasyon denklemi her zaman oluşturulabilir.

Bu çalışmada, homotopi pertürbasyon metodu ile karşılaştırmayı yapabilmek için, homotopi analiz metodu ile çözüm bulurken oluşturulan (2.1.16) tipindeki sıfırıncı-

derece deformasyon denkleminde göre homotopi analiz metodunun genel nonlinear problemler için sistematik bir tanımı verilmiştir.

2.1.3. Sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

Genel biçimde, N bir nonlinear operatör, $\bar{x}$ uzay, t zaman değişkenleri, $u(\bar{x}, t)$ bu değişkenlere bağlı bir fonksiyon olmak üzere

$$N[u(\bar{x}, t)] = 0 \quad (2.1.41)$$

nonlinear (linear) denklemi göz önüne alınsın.

$u_0(\bar{x}, t)$, $u(\bar{x}, t)$ tam çözümünün bir başlangıç yaklaşımı, $\hbar \neq 0$ bir yakınsaklık kontrol parametresi, $H(\bar{x}, t) \neq 0$ bir yardımcı fonksiyon ve L aşağıdaki özelliği sağlayan bir yardımcı linear operatör

$$f(\bar{x}, t) = 0 \text{ iken } L[f(\bar{x}, t)] = 0 \quad (2.1.42)$$

olsunlar. $q \in [0, 1]$ homotopi (gömme) parametresi kullanılarak

$$H[\phi(\bar{x}, t; q); u_0(\bar{x}, t), H(\bar{x}, t), \hbar, q] = (1 - q)\{L[\phi(\bar{x}, t; q) - u_0(\bar{x}, t)]\} - q\hbar H(\bar{x}, t)N[\phi(\bar{x}, t; q)] \quad (2.1.43)$$

homotopisi kurulabilir. Yakınsaklık kontrol parametresi $\hbar$ ve yardımcı fonksiyon $H(\bar{x}, t)$, homotopi analiz metodunda önemli rol oynarlar. Metot, $u_0(\bar{x}, t)$ başlangıç yaklaşımını, L yardımcı linear operatörünü, yakınsaklık kontrol parametresi $\hbar$ 'yi ve $H(\bar{x}, t)$ yardımcı fonksiyonunu seçme serbestliği tanır. (2.1.43) homotopisi 0'a eşitlenerek

$$H[\phi(\bar{x}, t; q); u_0(\bar{x}, t), H(\bar{x}, t), \hbar, q] = 0,$$

sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q)\{L[\phi(\bar{x}, t; q) - u_0(\bar{x}, t)]\} = q\hbar H(\bar{x}, t)N[\phi(\bar{x}, t; q)], \quad (2.1.44)$$

elde edilir.

Denklemin çözümü $\phi(\bar{x}, t; q)$, sadece $u_0(\bar{x}, t)$, L , $H(\bar{x}, t)$ ve $\hbar$ 'ye bağlı değil, aynı zamanda $q \in [0, 1]$ 'ya da bağlıdır. $q = 0$ iken (2.1.44) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi,

$$L[\phi(\bar{x}, t; 0) - u_0(\bar{x}, t)] = 0, \quad (2.1.45)$$

denkleme dönüşür. (2.1.42) özelliği kullanılarak

$$\phi(\bar{x}, t; 0) = u_0(\bar{x}, t). \quad (2.1.46)$$

bulunur. $q = 1$ iken $\hbar \neq 0$ ve $H(\bar{x}, t) \neq 0$ olduğundan (2.1.44) sıfırıncı-derece deformasyon denklemi,

$$N[\phi(\bar{x}, t; 1)] = 0, \quad (2.1.47)$$

denkleme karşı gelir. Bu denklem ilk başta alınan (2.1.41) denkleminin aynısıdır.

Buradan

$$\phi(\bar{x}, t; 1) = u(\bar{x}, t) \quad (2.1.48)$$

denklemi sağlanır. (2.1.46) ve (2.1.48) denklemlerine göre, homotopi-parametresi q , 0'dan 1'e artarken $\phi(\bar{x}, t; q)$, $u_0(\bar{x}, t)$ başlangıç yaklaşımından, (2.1.41) denkleminin tam çözümü olan $u(\bar{x}, t)$ 'ye sürekli olarak değişir. (veya deforme olur) Bu tip sürekli değişime, homotopide deformasyon denir. (2.1.44) denkleme sıfırıncı-derece deformasyon denklemi denmesinin nedeni budur. m. derece deformasyon denklemlerinin türevleri

$$u_0^{[m]}(\bar{x}, t) = \left. \frac{\partial^m \phi(\bar{x}, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (2.1.49)$$

ile tanımlanır. Taylor teoremi ile $\phi(\bar{x}, t; q)$, q 'nun kuvvet serisine açılabilir:

$$\phi(\bar{x}, t; q) = \phi(\bar{x}, t; 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{u_0^{[m]}(\bar{x}, t)}{m!} q^m. \quad (2.1.50)$$

Buradan

$$u_m(\bar{x}, t) = \frac{u_0^{[m]}(\bar{x}, t)}{m!} = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(\bar{x}, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} = D_m(\phi) \quad (2.1.51)$$

bulunur. (2.1.46) denklemi kullanılarak (2.1.50) $\phi(\bar{x}, t; q)$ 'nin kuvvet serisi

$$\phi(\bar{x}, t; q) = u_0(\bar{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m \quad (2.1.52)$$

elde edilir.

L yardımcı lineer operatörü, $u_0(\vec{x}, t)$ başlangıç çözümü, $\hbar \neq 0$ yakınsaklık-kontrol parametresi ve $H(\vec{x}, t)$, yardımcı fonksiyonu, aşağıdaki özellikleri sağlayacak biçimde seçilir:

1. Her $q \in [0, 1]$ için $\phi(\vec{x}, t; q)$, (2.1.44) sıfırıncı-derece deformasyon denkleminin çözümüdür.
2. $m = 1, 2, 3, \dots$ için deformasyon türevi $u_0^{[m]}(\vec{x}, t)$ mevcuttur.
3. $\phi(\vec{x}, t; q)$ 'nin kuvvet serisi (2.1.52) $q = 1$ 'de yakınsaktır.

(2.1.48) ve (2.1.52) denklemlerinden, çözüm serisi

$$u(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t) \quad (2.1.53)$$

bulunur. Bu ifade, tam çözüm $u(\vec{x}, t)$ ve başlangıç yaklaşımı $u_0(\vec{x}, t)$ arasında, yüksek derece deformasyon denklemleri ile belirlenen $u_m(\vec{x}, t)$ terimleri yardımıyla bir ilişki kurar.

2.1.4. Yüksek-derece deformasyon denklemi

$\vec{u}_n = \{u_0(\vec{x}, t), u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), \dots, u_n(\vec{x}, t)\}$ vektörü tanımlansın. (2.1.51) tanımına göre, $u_m(\vec{x}, t)$ 'nin denklemi, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi (2.1.44)'den türetilir.

χ_m fonksiyonu (2.1.15) ile tanımlanmak üzere;

$$L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] = \hbar H(\vec{x}, t) R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}; t) \quad (2.1.54)$$

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\vec{x}, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \quad (2.1.55)$$

m.derece deformasyon denklemi elde edilir. (2.1.10) tanımından,

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}, t) = D_{m-1}(N[\phi]) \quad (2.1.56)$$

denklemini bulunur. (2.1.56) denklemini, (2.1.54) denkleminde yerine konularak

$$L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] = \hbar H(\vec{x}, t) D_{m-1}(N[\phi]) \quad (2.1.57)$$

denklemini bulunur. (2.1.52) denklemini, (2.1.55) denkleminde yerine konularak

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{\partial^{m-1}}{\partial q^{m-1}} N \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\vec{x}, t) q^n \right] \right\} \Big|_{q=0} \quad (2.1.58)$$

bulunur. Bu da (2.1.10) tanımına göre

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}, t) = D_{m-1} \left(N \left[\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\vec{x}, t) \right] \right) = D_{m-1}(N[u]) \quad (2.1.59)$$

denklemini verir.

(2.1.57) yüksek derece lineer deformasyon denklemini birbiri ardınca çözülerek

$u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), \dots$ elde edilir. $u(\vec{x}, t)$ 'nin m.yaklaşımı;

$$u(\vec{x}, t) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\vec{x}, t) \quad (2.1.60)$$

ile verilir.

2.1.5. Yakınsaklık teoremi

Bir serinin yakınsaklığı önemlidir. Homotopi analiz metodu ile verilen (2.1.53) çözüm serisinin, yakınsak olduğu sürece, ele alınan nonlinear problemin çözümü olduğu kanıtlanabilir.

2.1.5.1. Teorem $u(\vec{x}, t) = u_0(\vec{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\vec{x}, t)$ serisi yakınsak ise (2.1.41) denkleminin

bir çözümüdür. [33]

Kant:

Eğer seri yakınsak ise

$$s = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m$$

yazılabilir.

Ayrıca seri yakınsak olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

sağlanır. (2.1.54) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \hbar H(\vec{x}, t) \sum_{m=1}^{+\infty} R_m [\vec{u}_{m-1}(\vec{x}; t)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] \\ &= L \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n [u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] \right\} \\ &= L \left[\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(\vec{x}, t) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\hbar \neq 0$, $H(\vec{x}, t) \neq 0$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m [\vec{u}_{m-1}(\vec{x}; t)] = 0.$$

bulunur. $u(\vec{x}, t)$, (2.1.41) denkleminin bir çözümüdür.

2.2. Fokker-Planck Denkleminin Çözümü için Homotopi Analiz Metodu

N nonlineer bir operatör, $\bar{x}$ uzay, t zaman değişkenlerini göstermek üzere

$$N[u(\bar{x}, t)] = 0, \quad (2.2.1)$$

nonlineer denklemi göz önüne alınsın.

Liao, klasik homotopi kavramını kullanarak **sıfırıncı-derece deformasyon denklemini** oluşturmuştur. $q \in [0, 1]$ homotopi-parametresi, $\hbar$ yakınsaklık-kontrol parametresi, L yardımcı bir lineer operatör, $H(\bar{x}, t)$ yardımcı bir fonksiyon, $u_0(\bar{x}, t)$, $u(\bar{x}, t)$ 'nin başlangıç yaklaşımı olmak üzere $\phi(\bar{x}, t; q)$ çözüm serisi için sıfırıncı-derece deformasyon denklemi

$$(1 - q)L[\phi(\bar{x}, t; q) - u_0(\bar{x}, t)] = q\hbar H(\bar{x}, t)N[\phi(\bar{x}, t; q)] \quad (2.2.2)$$

ile verilir. Homotopi analiz metodunda $\hbar$ ve L 'nin seçiminde bir kısıtlama yoktur.

$$\phi(\bar{x}, t; 0) = u_0(\bar{x}, t) \text{ ve } \phi(\bar{x}, t; 1) = u(\bar{x}, t), \quad (2.2.3)$$

eşitlikleri sağlanır. q , 0'dan 1'e değiştikçe, $\phi(\bar{x}, t; q)$ çözümü, $u_0(\bar{x}, t)$ başlangıç yaklaşımından denklemin çözümü olan $u(\bar{x}, t)$ 'ye değişir. $\phi(\bar{x}, t; q)$, q 'ya göre Taylor serisine açılarak

$$u_m(\bar{x}, t) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \phi(\bar{x}, t; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} = D_m(\phi) \quad (2.2.4)$$

olmak üzere;

$$\phi(\bar{x}, t; q) = u_0(\bar{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) q^m, \quad (2.2.5)$$

bulunur.

Eğer (2.2.5) kuvvet serisi $q = 1$ 'de yakınsak olacak biçimde uygun yardımcı bir lineer operatör ve yardımcı bir fonksiyon seçilerek

$$\phi(\bar{x}, t; 1) = u_0(\bar{x}, t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(\bar{x}, t) = u(\bar{x}, t) \quad (2.2.6)$$

bulunur.

Liao tarafından kanıtlandığı gibi, (2.2.6) verilen nonlinear denklemin çözümü olur.

$\hbar = -1$ ve $H(\vec{x}, t) = 1$ seçilirse (2.2.2) denklemi,

$$(1-q)L[\phi(\vec{x}, t; q) - u_0(\vec{x}, t)] + qN[\phi(\vec{x}, t; q)] = 0 \quad (2.2.7)$$

homotopi pertürbasyon metodunda kullanılan forma dönüşür.

$\vec{u}_n = \{u_0(\vec{x}, t), u_1(\vec{x}, t), u_2(\vec{x}, t), \dots, u_n(\vec{x}, t)\}$ vektörü tanımlanarak (2.2.4) eşitliğine göre,

$u_m(\vec{x}, t)$ 'nin denklemi, (2.2.2) sıfıncı-derece deformasyon denkleminde türetilir.

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases} \text{ ile tanımlanan } \chi_m \text{ fonksiyonu da kullanılarak ;}$$

$$L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] = \hbar H(\vec{x}, t) R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}; t) \quad (2.2.8)$$

bulunur.

$$R_m(\vec{u}_{m-1}, \vec{x}, t) = \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} N[\phi(\vec{x}, t; q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} = D_{m-1}(N[\phi]) \quad (2.2.9)$$

kullanılarak

$$L[u_m(\vec{x}, t) - \chi_m u_{m-1}(\vec{x}, t)] = \hbar H(\vec{x}, t) D_{m-1}(N[u]) \quad (2.2.10)$$

m.derece deformasyon denklemi elde edilir.

Yüksek derece lineer deformasyon denklemleri birbiri ardınca çözülerek bulunan çözümlerden oluşturulan homotopi serisi $q = 1$ 'de yakınsak olarak alındığından verilen problemin çözümü olan

$$u(\vec{x}, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\vec{x}, t) \quad (2.2.11)$$

elde edilir.

2.2.1. Fokker-Planck denkleminin homotopi analiz metodu ile çözümü için örnekler

Yukarıda özetlenen homotopi analiz metodunun etkinliğini göstermek için bazı örnekler verilecektir. Homotopi analiz metodunun ne kadar doğru sonuçlar verdiğini göstermek için tam çözümleri bilinen Fokker-Planck denklemleri seçilmiştir. 1.3. alt bölümde verilen Biazar tarafından homotopi pertürbasyon metodu ile çözülen denklemler, bu alt bölümde homotopi analiz metodu kullanılarak çözülecektir.

1.3.1.Örnek için

(1.3.3) başlangıç koşulu :

$$f(x) = x, \quad x \in IR. \quad (2.2.12)$$

(1.3.2) denkleminde

$$A(x) = -1, \quad (2.2.13)$$

ve

$$B(x) = 1. \quad (2.2.14)$$

olmak üzere denklemin tam çözümü $u(x, t) = x + t$ biçimindedir.

$$u_0(x, t) = x \quad (2.2.15)$$

başlangıç yaklaşımı olarak seçilsin. Yardımcı fonksiyon $H(x, t) = 1$, c_1 bir integral sabiti olmak üzere; $L[c_1] = 0$ eşitliğini sağlayan

$$L(\phi(x, t; q)) = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t}, \quad (2.2.16)$$

yardımcı lineer operatör L olsun. Bir N operatörü

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(-\phi(x, t; q)) - \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} \quad (2.2.17)$$

ile tanımlansın.

(2.2.2) denkleminde, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi :

$$(1-q)\frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial t}-q\hbar\left[\frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial t}-\frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial x}-\frac{\partial^2\phi(x,t;q)}{\partial x^2}\right]=0 \quad (2.2.18)$$

biçiminde bulunur. Buradan (2.2.8) m.derece deformasyon denklemi kullanılarak

$$L[u_m(x,t)-\chi_m u_{m-1}(x,t)]=\hbar R_m(\vec{u}_{m-1},x;t) \quad (2.2.19)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.9) denklemleri kullanılarak

$$m \geq 1 \quad \text{için} \quad u_m(x,0)=0 \quad (2.2.20)$$

başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} R_1(\vec{u}_0) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &= -1 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

olarak bulunur. χ_m fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$L(u_1)=\hbar R_1(\vec{u}_0) \quad (2.2.22)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem verilen başlangıç koşuluna göre çözülerek

$$u_1(x,t)=-\hbar t \quad (2.2.23)$$

çözümü bulunur.

Yine aynı yöntem uygulanarak

$$\begin{aligned} R_2(\vec{u}_1) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ &= -\hbar \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

ve

$$L(u_2)-L(u_1)=\hbar R_2(\vec{u}_1) \quad (2.2.25)$$

denklemi çözülerek

$$u_2(x,t)=-\hbar(1+\hbar)t, \quad (2.2.26)$$

çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned} R_3(\vec{u}_2) &= \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ &= -\hbar(1+\hbar) \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

ve

$$L(u_3)-L(u_2)=\hbar R_3(\vec{u}_2) \quad (2.2.28)$$

denklemi çözülerek

$$u_3(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)^2 t, \quad (2.2.29)$$

çözümü bulunur.

$$\begin{aligned} R_4(\vec{u}_3) &= \frac{\partial u_3}{\partial t} - \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \\ &= -\hbar(1 + \hbar)^2 \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

ve

$$L(u_4) - L(u_3) = \hbar R_3(\vec{u}_3) \quad (2.2.31)$$

denkleminin çözümünden

$$u_4(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)^3 t, \quad (2.2.32)$$

çözümü elde edilir.

Benzer biçimde denklemler oluşturulup çözülmeye devam edilerek

$$u_0(x, t) = x,$$

$$u_1(x, t) = -\hbar t,$$

$$u_2(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)t,$$

$$u_3(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)^2 t,$$

$$u_4(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)^3 t,$$

.

.

$$u_n(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)^{n-1} t, \quad (n \geq 1)$$

.

.

.

(2.2.33)

çözümleri bulunur. $q = 1$ 'de, homotopi analiz metodu ile elde edilen seri çözüm

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots + u_n(x, t) + \dots \quad (2.2.34)$$

olduğundan

$$u(x, t) = x - \hbar t - \hbar(1 + \hbar)t - \hbar(1 + \hbar)^2 t - \hbar(1 + \hbar)^3 t + \dots - \hbar(1 + \hbar)^{n-1} t + \dots \quad (2.2.35)$$

çözümü elde edilir.

1.3.2.Örnek için

(1.3.3) başlangıç koşulu :

$$f(x) = \sinh(x), \quad x \in IR, \quad (2.2.36)$$

olmak üzere; (1.3.4) denkleminde A ve B katsayıları,

$$A(x, t) = e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x), \quad (2.2.37)$$

$$B(x, t) = e^t \cosh(x). \quad (2.2.38)$$

olmak üzere denklemin tam çözümü $u(x, t) = e^t \sinh(x)$ biçimindedir.

$$u_0(x, t) = \sinh(x) \quad (2.2.39)$$

başlangıç yaklaşımı olarak seçilsin.

$H(x, t) = 1$ yardımcı fonksiyon, c_1 bir integral sabiti olmak üzere; $L[c_1] = 0$ eşitliğini sağlayan

$$L(\phi(x, t; q)) = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t}, \quad (2.2.40)$$

yardımcı lineer operatör olsun. Bir N operatörü

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - \left[\begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x} (e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x)) \\ + \frac{\partial^2 (e^t \cosh(x))}{\partial x^2} \end{array} \right] \phi(x, t; q) \quad (2.2.41)$$

ile tanımlansın.

(2.2.11) denkleminde , sıfırıncı-derece deformasyon denklemi :

$$(1-q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - q \hbar \left[\frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - \left[\begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x} (e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x)) \\ + \frac{\partial^2 (e^t \cosh(x))}{\partial x^2} \end{array} \right] \phi(x, t; q) \right] = 0 \quad (2.2.42)$$

biçiminde bulunur. Buradan (2.2.8) m.derece deformasyon denklemi kullanılarak

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\bar{u}_{m-1}, x; t) \quad (2.2.43)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.9) denklemleri kullanılarak

$$m \geq 1 \quad \text{için} \quad u_m(x, 0) = 0 \quad (2.2.44)$$

başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} R_1(\bar{u}_0) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x)) u_0 - \frac{\partial^2 (e^t \cosh(x))}{\partial x^2} u_0 \\ &= -\sinh x \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

bulunur. χ_m fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$L(u_1) = \hbar R_1(\bar{u}_0) \quad (2.2.46)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem verilen başlangıç koşuluna göre çözülerek

$$u_1(x, t) = -\hbar \sinh(x)t, \quad (2.2.47)$$

çözümü bulunur. Yine aynı yöntem uygulanarak

$$\begin{aligned} R_2(\bar{u}_1) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x)) u_1 - \frac{\partial^2 (e^t \cosh(x))}{\partial x^2} u_1 \\ &= -\hbar \sinh(x)(1-t) \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

ve

$$L(u_2) - L(u_1) = \hbar R_2(\bar{u}_1) \quad (2.2.49)$$

denklemini çözülerek

$$u_2(x, t) = -\hbar(1+\hbar)\sinh(x)t + \frac{\hbar^2 t^2}{2!} \sinh(x) \quad (2.2.50)$$

çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned} R_3(\bar{u}_2) &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x)) u_2 - \frac{\partial^2 (e^t \cosh(x))}{\partial x^2} u_2 \\ &= \hbar(1+\hbar)\sinh(x)t - \hbar(1+\hbar)\sinh(x) + \hbar^2 t \sinh(x) - \frac{\hbar^2 t^2}{2!} \sinh(x) \end{aligned} \quad (2.2.51)$$

ve

$$L(u_3) - L(u_2) = \hbar R_3(\bar{u}_2) \quad (2.2.52)$$

denkleminin çözümünden

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & -\hbar(1 + \hbar)\sinh(x)t + \frac{\hbar^2 t^2}{2!}\sinh(x) + \frac{\hbar^2(1 + \hbar)t^2}{2!}\sinh(x) - \hbar^2(1 + \hbar)\sinh(x)t \\
& + \frac{\hbar^3 t^2}{2!}\sinh(x) - \frac{\hbar^3 t^3}{3!}\sinh(x)
\end{aligned} \tag{2.2.53}$$

çözümü bulunur.

Benzer biçimde denklemler oluşturulup çözülmeye devam edilerek

$$u_0(x, t) = \sinh(x),$$

$$u_1(x, t) = -\hbar \sinh(x)t,$$

$$u_2(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)\sinh(x)t + \frac{\hbar^2 t^2}{2!}\sinh(x)$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) = & -\hbar(1 + \hbar)\sinh(x)t + \frac{\hbar^2 t^2}{2!}\sinh(x) + \frac{\hbar^2(1 + \hbar)t^2}{2!}\sinh(x) - \hbar^2(1 + \hbar)\sinh(x)t \\
& + \frac{\hbar^3 t^2}{2!}\sinh(x) - \frac{\hbar^3 t^3}{3!}\sinh(x)
\end{aligned}$$

$$u_4(x, t) = \frac{1}{24}\hbar \sinh(x)t \begin{pmatrix} 72\hbar^2 t - 12\hbar^3 t^2 + 36\hbar^3 t + 36\hbar t - 12\hbar^2 t^2 - 72\hbar \\ -72\hbar^2 - 24\hbar^3 - 24 + \hbar^3 t^3 \end{pmatrix}$$

.

.

.

.

.

(2.2.54)

çözümleri bulunur. $q = 1$ 'de, homotopi analiz metodu ile elde edilen seri çözüm

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots + u_n(x, t) + \dots \tag{2.2.55}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & \sinh(x) - \hbar \sinh(x)t - \hbar(1 + \hbar) \sinh(x)t + \frac{\hbar^2 t^2}{2!} \sinh(x) \\
& - \hbar(1 + \hbar) \sinh(x)t + \frac{\hbar^2 t^2}{2!} \sinh(x) + \frac{\hbar^2 (1 + \hbar)t^2}{2!} \sinh(x) \\
& - \hbar^2 (1 + \hbar) \sinh(x)t + \frac{\hbar^3 t^2}{2!} \sinh(x) - \frac{\hbar^3 t^3}{3!} \sinh(x) \\
& + \frac{1}{24} \hbar \sinh(x)t \left(\begin{array}{l} 72\hbar^2 t - 12\hbar^3 t^2 + 36\hbar^3 t + 36\hbar t - 12\hbar^2 t^2 - 72\hbar \\ - 72\hbar^2 - 24\hbar^3 - 24 + \hbar^3 t^3 \end{array} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{2.2.56}$$

çözümü elde edilir.

1.3.3.Örnek için

Sürüklenme ve difüzyon katsayıları

$$A(x, t) = -(x + 1), \tag{2.2.57}$$

$$B(x, t) = x^2 e'. \tag{2.2.58}$$

ve tam çözümü $u(x, t) = (x + 1)e'$ olan (1.3.5) backward Kolmogorov denkleminde

(1.3.3) denkleminde başlangıç koşulu:

$$f(x) = x + 1, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2.59}$$

ile verilsin.

$$u_0(x, t) = x + 1 \tag{2.2.60}$$

başlangıç yaklaşımı seçilsin.

$H(x, t) = 1$ yardımcı fonksiyon, c_1 bir integral sabiti olmak üzere; $L[c_1] = 0$ eşitliğini sağlayan

$$L(\phi(x, t; q)) = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t}, \tag{2.2.61}$$

yardımcı lineer operatör olsun.

Bir N operatörü

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - (x + 1) \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x, t; q)) + x^2 e' \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} \tag{2.2.62}$$

ile tanımlansın.

(2.2.2) denkleminde, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi :

$$(1 - q) \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - q \hbar \left[\frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - (x + 1) \frac{\partial}{\partial x} (\phi(x, t; q)) + x^2 e' \frac{\partial^2 \phi(x, t; q)}{\partial x^2} \right] = 0 \tag{2.2.63}$$

olarak bulunur. Buradan (2.2.8) m.derece deformasyon denklemi kullanılarak

$$L[u_m(x, t) - \chi_m u_{m-1}(x, t)] = \hbar R_m(\bar{u}_{m-1}, x; t) \quad (2.2.64)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.9) denklemleri kullanılarak

$$m \geq 1 \quad \text{için} \quad u_m(x, 0) = 0 \quad (2.2.65)$$

başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} R_1(\bar{u}_0) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} - (x+1) \frac{\partial u_0}{\partial x} + x^2 e^t \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \\ &= -(x+1) \end{aligned} \quad (2.2.66)$$

bulunur. χ_m fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$L(u_1) = \hbar R_1(\bar{u}_0) \quad (2.2.67)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem verilen başlangıç koşuluna göre çözülerek

$$u_1(x, t) = -\hbar(x+1)t, \quad (2.2.68)$$

çözümü bulunur. Yine aynı yöntem uygulanarak

$$\begin{aligned} R_2(\bar{u}_1) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} - (x+1) \frac{\partial u_1}{\partial x} + x^2 e^t \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \\ &= -\hbar(x+1) + \hbar(x+1)t \end{aligned} \quad (2.2.69)$$

ve

$$L(u_2) - L(u_1) = \hbar R_2(\bar{u}_1) \quad (2.2.70)$$

denklemi çözülerek

$$u_2(x, t) = -\hbar(x+1)t - \hbar^2(x+1)t + \frac{\hbar^2(x+1)t^2}{2!} \quad (2.2.71)$$

çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned} R_3(\bar{u}_2) &= \frac{\partial u_2}{\partial t} - (x+1) \frac{\partial u_2}{\partial x} + x^2 e^t \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \\ &= -\hbar(x+1) - \hbar^2(x+1) + 2\hbar^2(x+1)t + \hbar(x+1)t - \frac{\hbar^2(x+1)t^2}{2!} \end{aligned} \quad (2.2.72)$$

ve

$$L(u_3) - L(u_2) = \hbar R_3(\bar{u}_2) \quad (2.2.73)$$

denkleminin çözümünden

$$u_3(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)(x + 1)t - \hbar^2(1 + \hbar)(x + 1)t + \hbar^2(1 + \hbar)(x + 1)t^2 - \hbar^3(x + 1)\frac{t^3}{3!} \quad (2.2.74)$$

bulunur.

Benzer biçimde denklemler oluşturulup çözülmeye devam edilerek

$$u_0(x, t) = x + 1,$$

$$u_1(x, t) = -\hbar(x + 1)t,$$

$$u_2(x, t) = -\hbar(x + 1)t - \hbar^2(x + 1)t + \frac{\hbar^2(x + 1)t^2}{2!}$$

$$u_3(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)(x + 1)t - \hbar^2(1 + \hbar)(x + 1)t + \hbar^2(1 + \hbar)(x + 1)t^2 - \hbar^3(x + 1)\frac{t^3}{3!}$$

$$\begin{aligned} u_4(x, t) = & 3\hbar^3 t^2 x - 3\hbar^3 tx - \hbar^4 tx + \frac{3}{2}\hbar^2 t^2 x - 3\hbar^2 tx - \hbar tx - \frac{1}{2}\hbar^3 t^3 x - \frac{1}{2}\hbar^3 t^3 \\ & + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x - \hbar t + \frac{3}{2}\hbar^2 t^2 - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 x + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x - 3\hbar^2 t + 3\hbar^3 t^2 - 3\hbar^3 t - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3, \\ & + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 - \hbar^4 t \end{aligned}$$

.

.

(2.2.75)

çözümleri bulunur.

$q = 1$ 'de, homotopi analiz metodu ile elde edilen seri çözüm

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots + u_n(x, t) + \dots \quad (2.2.76)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} u(x, t) = & x + 1 - \hbar(x + 1)t - \hbar(x + 1)t - \hbar^2(x + 1)t + \frac{\hbar^2(x + 1)t^2}{2!} - \hbar(1 + \hbar)(x + 1)t \\ & - \hbar^2(1 + \hbar)(x + 1)t + \hbar^2(1 + \hbar)(x + 1)t^2 - \hbar^3(x + 1)\frac{t^3}{3!} + 3\hbar^3 t^2 x - 3\hbar^3 tx - \hbar^4 tx \\ & + \frac{3}{2}\hbar^2 t^2 x - 3\hbar^2 tx - \hbar tx - \frac{1}{2}\hbar^3 t^3 x - \frac{1}{2}\hbar^3 t^3 + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x - \hbar t + \frac{3}{2}\hbar^2 t^2 - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 x \\ & + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x - 3\hbar^2 t + 3\hbar^3 t^2 - 3\hbar^3 t - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 - \hbar^4 t + \dots \end{aligned} \quad (2.2.77)$$

elde edilir.

1.3.4.Örnek için

(1.3.6) denklemi göz önüne alınsın.

$$A_1(x, y) = x, \quad (2.2.78)$$

$$A_2(x, y) = 5y, \quad (2.2.79)$$

$$B_{1,1}(x, y) = x^2, \quad (2.2.80)$$

$$B_{1,2}(x, y) = 1, \quad (2.2.81)$$

$$B_{2,1}(x, y) = 1, \quad (2.2.82)$$

olmak üzere denklemin tam çözümü $u(x, y, t) = xe^t$ biçimindedir.

(1.3.7) başlangıç koşulu:

$$f(x, y) = x, \quad x, y \in IR. \quad (2.2.83)$$

olmak üzere

$$u_0(x, y, t) = x \quad (2.2.84)$$

başlangıç yaklaşımı seçilsin.

$H(x, y, t) = 1$ yardımcı fonksiyon, c_1 bir integral sabiti olmak üzere; $L[c_1] = 0$ eşitliğini sağlayan

$$L(\phi(x, y, t; q)) = \frac{\partial \phi(x, y, t; q)}{\partial t}, \quad (2.2.85)$$

yardımcı lineer operatör olsun.

Bir N operatörü

$$N[\phi(x, y, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, y, t; q)}{\partial t} - \left[-\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 5y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} y^2 \right] \phi(x, y, t; q) \quad (2.2.86)$$

olarak tanımlansın.

(2.2.2) denkleminde, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi :

$$(1-q)\frac{\partial\phi(x,y,t;q)}{\partial t} - q\hbar\left[\frac{\partial\phi(x,y,t;q)}{\partial t} - \left[-\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}5y + \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}y^2\right]\phi(x,y,t;q)\right] = 0 \quad (2.2.87)$$

olarak bulunur. Buradan (2.2.8) m.derece deformasyon denklemi kullanılarak

$$L[u_m(x,y,t) - \chi_m u_{m-1}(x,y,t)] = \hbar R_m(\tilde{u}_{m-1}, x, y, t) \quad (2.2.88)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.9) denklemleri kullanılarak

$$m \geq 1 \quad \text{için} \quad u_m(x,0) = 0 \quad (2.2.89)$$

başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$R_1(\tilde{u}_0) = \frac{\partial u_0}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}5y - \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}y^2 \right] u_0 = -x \quad (2.2.90)$$

bulunur. χ_m fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$L(u_1) = \hbar R_1(\tilde{u}_0) \quad (2.2.91)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem verilen başlangıç koşuluna göre çözülerek

$$u_1(x,y,t) = -\hbar xt, \quad (2.2.92)$$

çözümü bulunur.

Yine aynı yöntem uygulanarak

$$R_2(\tilde{u}_1) = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}5y - \frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2 - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}y^2 \right] u_1 = -\hbar x + \hbar xt \quad (2.2.93)$$

ve

$$L(u_2) - L(u_1) = \hbar R_2(\tilde{u}_1) \quad (2.2.94)$$

denklemi çözülerek

$$u_2(x,y,t) = -\hbar(1+\hbar)xt + \frac{\hbar^2 xt^2}{2!} \quad (2.2.95)$$

çözümü elde edilir.

$$\begin{aligned}
R_3(\bar{u}_2) &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} 5y - \frac{\partial^2}{\partial x^2} x^2 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} y^2 \right] u_2 \\
&= (1 + \hbar) \hbar x + \hbar^2 x t + 3(1 + \hbar) \hbar x t - \frac{\hbar^2 x t^2}{2!}
\end{aligned} \tag{2.2.96}$$

ve

$$L(u_3) - L(u_2) = \hbar R_3(\bar{u}_2) \tag{2.2.97}$$

denklemini çözümlere

$$u_3(x, y, t) = (1 + \hbar) \hbar x t + 2(1 + \hbar) \hbar^2 x t^2 + (1 + \hbar) \hbar^2 x t - \frac{\hbar^3 x t^3}{3!} \tag{2.2.98}$$

çözümü bulunur.

Benzer biçimde denklemler oluşturulup çözmeye devam edilerek

$$u_0(x, y, t) = x,$$

$$u_1(x, y, t) = -\hbar x t,$$

$$u_2(x, y, t) = -\hbar(1 + \hbar) x t + \frac{\hbar^2 x t^2}{2!},$$

$$u_3(x, y, t) = (1 + \hbar) \hbar x t + 2(1 + \hbar) \hbar^2 x t^2 + (1 + \hbar) \hbar^2 x t - \frac{\hbar^3 x t^3}{3!},$$

$$u_4(x, y, t) = 3\hbar^3 t^2 x + 3\hbar^3 t x + \hbar^4 t x + \frac{3}{2} \hbar^2 t^2 x + 3\hbar^2 t x + \hbar t x - \frac{5}{6} \hbar^3 t^3 x + \frac{3}{2} \hbar^4 t^2 x$$

$$- \frac{5}{6} \hbar^4 t^3 x + \frac{1}{24} \hbar^4 t^4 x$$

.

.

.

.

(2.2.99)

çözümleri bulunur.

$q = 1$ 'de, homotopi analiz metodu ile elde edilen seri çözüm

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t) + \dots + u_n(x, y, t) + \dots \tag{2.2.100}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) = & x - \hbar xt - \hbar(1 + \hbar)xt + \frac{\hbar^2 xt^2}{2!}(1 + \hbar)\hbar xt + 2(1 + \hbar)\hbar^2 xt^2 + (1 + \hbar)\hbar^2 xt \\
& - \frac{\hbar^3 xt^3}{3!} + 3\hbar^3 t^2 x + 3\hbar^3 tx + \hbar^4 tx + \frac{3}{2}\hbar^2 t^2 x + 3\hbar^2 tx + \hbar tx - \frac{5}{6}\hbar^3 t^3 x + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x \\
& - \frac{5}{6}\hbar^4 t^3 x + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x + \dots
\end{aligned} \tag{2.2.101}$$

çözümü bulunur.

1.3.5.Örnek için

(1.3.8) nonlinear Fokker-Planck denklemi denklemi göz önüne alınsın:

$$A(x, t, u) = 4\frac{u}{x} - \frac{x}{3}, \tag{2.2.102}$$

$$B(x, t, u) = u. \tag{2.2.103}$$

ve başlangıç koşulu:

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2.104}$$

olmak üzere denklemin tam çözümü $u(x, t) = x^2 e^t$ biçimindedir.

$$u_0(x, t) = x^2 \tag{2.2.105}$$

başlangıç yaklaşımı seçilsin.

$H(x, t) = 1$ yardımcı fonksiyon, c_1 bir integral sabiti olmak üzere; $L[c_1] = 0$ eşitliğini sağlayan

$$L(\phi(x, t; q)) = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t}, \tag{2.2.106}$$

yardımcı lineer operatör olsun.

Bir N nonlinear operatörü

$$N[\phi(x, t; q)] = \frac{\partial \phi(x, t; q)}{\partial t} - \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(4\frac{\phi(x, t; q)}{x} - \frac{x}{3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t; q) \right] \phi(x, t; q) \tag{2.2.107}$$

olarak tanımlansın.

(2.2.11) denkleminde, sıfırıncı-derece deformasyon denklemi :

$$(1-q)\frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial t} - q\hbar\left[\frac{\partial\phi(x,t;q)}{\partial t} - \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(4\frac{\phi(x,t;q)}{x} - \frac{x}{3}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x,t;q)\right]\phi(x,t;q)\right] = 0 \quad (2.2.108)$$

olarak bulunur. Buradan (2.2.8) m.derece deformasyon denklemi kullanılarak

$$L[u_m(x,t) - \chi_m u_{m-1}(x,t)] = \hbar R_m(\bar{u}_{m-1}, x; t) \quad (2.2.109)$$

elde edilir.

(2.2.8), (2.2.9) denklemleri kullanılarak

$$m \geq 1 \quad \text{için} \quad u_m(x, 0) = 0 \quad (2.2.110)$$

başlangıç koşulları göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} R_1(\bar{u}_0) &= \frac{\partial u_0}{\partial t} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(4 \frac{u_0}{x} - \frac{x}{3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0 \right] u_0 \\ &= -x^2 \end{aligned} \quad (2.2.111)$$

bulunur. χ_m fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$L(u_1) = \hbar R_1(\bar{u}_0) \quad (2.2.112)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem verilen başlangıç koşuluna göre çözülerek

$$u_1(x, t) = -\hbar x^2 t, \quad (2.2.113)$$

çözümü bulunur. Yine aynı yöntem uygulanarak

$$\begin{aligned} R_2(\bar{u}_1) &= \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{8u_0 u_1}{x} - \frac{x u_1}{3} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 u_1) \\ &= -\hbar x^2 + \hbar x^2 t \end{aligned} \quad (2.2.114)$$

ve

$$L(u_2) - L(u_1) = \hbar R_2(\bar{u}_1) \quad (2.2.115)$$

denklemi çözülerek

$$u_2(x, t) = -\hbar(1 + \hbar)x^2 t + \frac{\hbar^2 x^2 t^2}{2!} \quad (2.2.116)$$

çözümü bulunur.

$$\begin{aligned}
R_3(\bar{u}_2) &= \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{8u_0 u_2}{x} - \frac{x u_2}{3} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 u_2) \\
&= -\hbar(1+\hbar)x^2 + \hbar(1+\hbar)x^2 t + \hbar^2 x^2 t - \frac{\hbar^2 x^2 t^2}{2!}
\end{aligned} \tag{2.2.117}$$

ve

$$L(u_3) - L(u_2) = \hbar R_3(\bar{u}_2) \tag{2.2.118}$$

denkleminin çözümünden

$$u_3(x, t) = -\hbar(1+\hbar)x^2 t - \hbar^2(1+\hbar)x^2 t + \hbar^2(1+\hbar)x^2 t^2 - \frac{\hbar^3 x^2 t^3}{3!} \tag{2.2.119}$$

elde edilir.

Benzer biçimde denklemler oluşturulup çözülmeye devam edilerek

$$u_0(x, t) = x^2,$$

$$u_1(x, t) = -\hbar x^2 t,$$

$$u_2(x, t) = -\hbar(1+\hbar)x^2 t + \frac{\hbar^2 x^2 t^2}{2!},$$

$$u_3(x, t) = -\hbar(1+\hbar)x^2 t - \hbar^2(1+\hbar)x^2 t + \hbar^2(1+\hbar)x^2 t^2 - \frac{\hbar^3 x^2 t^3}{3!},$$

$$\begin{aligned}
u_4(x, t) &= -\hbar x^2 t - 3\hbar^2 x^2 t + \frac{3}{2}\hbar^2 x^2 t^2 + 3\hbar^3 x^2 t^2 - 3\hbar^3 x^2 t \\
&\quad - \frac{1}{2}\hbar^3 x^2 t^3 - \hbar^4 x^2 t - \frac{1}{2}\hbar^4 x^2 t^3 + \frac{1}{24}\hbar^4 x^2 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 x^2 t^2,
\end{aligned}$$

.

.

.

.

(2.2.120)

çözümleri bulunur.

$q = 1$ 'de, homotopi analiz metodu ile elde edilen seri çözüm

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots + u_n(x, t) + \dots \tag{2.2.121}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & x^2 - \hbar x^2 t - \hbar(1+\hbar)x^2 t + \frac{\hbar^2 x^2 t^2}{2!} - \hbar(1+\hbar)x^2 t \\
& - \hbar^2(1+\hbar)x^2 t + \hbar^2(1+\hbar)x^2 t^2 - \frac{\hbar^3 x^2 t^3}{3!} - \hbar x^2 t - 3\hbar^2 x^2 t + \frac{3}{2}\hbar^2 x^2 t^2 + 3\hbar^3 x^2 t^2 - 3\hbar^3 x^2 t \\
& - \frac{1}{2}\hbar^3 x^2 t^3 - \hbar^4 x^2 t - \frac{1}{2}\hbar^4 x^2 t^3 + \frac{1}{24}\hbar^4 x^2 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 x^2 t^2 +
\end{aligned}
\tag{2.2.122}$$

çözümü bulunur.

Görüldüğü gibi homotopi analiz metodu, Fokker-Planck denkleminin çözümü için başarıyla uygulanmıştır. Fakat (2.2.35), (2.2.56), (2.2.77), (2.2.101) ve (2.2.122) çözümleri $\hbar$ parametresine bağlı olduklarından, bu seri çözümlerinin kapalı formda yazılabilmeleri ancak seriler belirlenen bir aralıkta yakınsak ise mümkündür. Dolayısı ile (2.2.35), (2.2.56), (2.2.77), (2.2.101) ve (2.2.122) çözümlerinin yakınsaklıklarının ayrıca incelenmesi gerekir. Bu inceleme, birkaç farklı yolla yapılabilir. Örnek olarak, 4. dereceden yaklaşık çözümler, belirli $\hbar$ değerleri için tablolarla incelenebilir. Farklı $\hbar$ değerleri için oluşturulan tablolar aşağıda verilmiştir.

$\hbar$ değeri	4.dereceden yaklaşık çözüm u_{app}
$\hbar = -2$	$u_{app} = x$
$\hbar = -1.7$	$u_{app} = x + 0.7599t$
$\hbar = -1.5$	$u_{app} = x + 0.9375t$
$\hbar = -1.1$	$u_{app} = x + 0.9999t$
$\hbar = -1$	$u_{app} = x + t$
$\hbar = -0.8$	$u_{app} = x + 0.9984t$
$\hbar = -0.5$	$u_{app} = x + 0.9375t$
$\hbar = -0.4$	$u_{app} = x + 0.8704t$
$\hbar = -0.2$	$u_{app} = x + 0.5904t$
$\hbar = 0$	$u_{app} = x$
$\hbar = 0.1$	$u_{app} = x - 0.4641t$
$\hbar = 0.2$	$u_{app} = x - 1.0736t$
$\hbar = 0.4$	$u_{app} = x - 2.8419t$

1.Tablo 1.3.1.Örnekteki homotopi analiz metodu ile çözülen farklı $\hbar$ değerlerine karşı gelen 4. dereceden yaklaşık çözüm

$\hbar$ değeri	4.dereceden yaklaşık çözüm u_{app}
$\hbar = -3$	$u_{app} = \sinh(x)(1 - 15t + 40.5t^2 - 22.5t^3 + 3.375t^4)$
$\hbar = -2.2$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 - 1.0736t + 7.0664t^2 - 4.614133333t^3 + 0.9760666667t^4\right)$
$\hbar = -2$	$u_{app} = \sinh(x)(1 + 4t^2 - 2.66666667t^3 + 0.666666667t^4)$
$\hbar = -1.7$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 + 0.7599t + 1.54615t^2 - 0.9007166666t^3 + 0.3480041667t^4\right)$
$\hbar = -1.5$	$u_{app} = \sinh(x)(1 - 0.9375t - 0.84375t^2 + 0.28125t^3 + 0.2109375t^4)$
$\hbar = -1.1$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 + 0.9999t + 0.50215t^2 + 0.1552833333t^3 + 0.06100416666t^4\right)$
$\hbar = -1$	$u_{app} = \sinh(x)(1 + t + 0.5t^2 + 0.166666667t^3 + 0.0416666667t^4)$
$\hbar = -0.5$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 + 0.9375t + 0.34375t^2 + 0.05208333332t^3 + 0.002604166666t^4\right)$
$\hbar = -0.07$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 + 0.25194799t + 0.013364015t^2 + 0.0002166616667t^3 + 0.000001000416667t^4\right)$
$\hbar = 0$	$u_{app} = \sinh(x)$
$\hbar = 0.5$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 - 4.0625t + 1.34375t^2 - 0.1145833333t^3 + 0.002604166666t^4\right)$
$\hbar = 0.7$	$u_{app} = \sinh(x)\left(1 - 7.3521t + 3.20215t^2 - 0.3487166667t^3 + 0.01000416667t^4\right)$
$\hbar = 1$	$u_{app} = \sinh(x)(1 - 15t + 8.5t^2 - 1.166666667t^3 + 0.0416666667t^4)$

2.Tablo 1.3.2.Örnekteki homotopi analiz metodu ile çözülen farklı $\hbar$ değerlerine karşı gelen 4. dereceden yaklaşık çözüm

$\hbar$ değeri	4.dereceden yaklaşık çözüm u_{app}
$\hbar = -2$	$u_{app} = (x+1)(1 + 4t^2 - 2.666666667t^3 + 0.666666667t^4)$
$\hbar = -1.8$	$u_{app} = (x+1)(1 + 0.5904t + 2.1384t^2 - 1.3608t^3 + 0.4374t^4)$
$\hbar = -1.5$	$u_{app} = (x+1)\left(1 + 0.9375t + 0.5273437538t^2 - 0.28125t^3 + 0.2109375t^4\right)$
$\hbar = -1.3$	$u_{app} = (x+1)\left(1 + 0.9919t + 0.56615t^2 + 0.0366166666t^3 + 0.1190041667t^4\right)$
$\hbar = -1$	$u_{app} = (x+1)(1 + t + 0.5t^2 + 0.166666667t^3 + 0.041666667t^4)$
$\hbar = -0.8$	$u_{app} = (x+1)\left(1 + 0.9984t + 0.4864t^2 + 0.1365333333t^3 + 0.01706666666t^4\right)$
$\hbar = -0.4$	$u_{app} = (x+1)\left(1 + 0.8704t + 0.2624t^2 + 0.2986666666t^3 + 0.001066666667t^4\right)$
$\hbar = -0.03$	$u_{app} = (x+1)\left(1 + 0.11470719t + 0.00640386t^2 + 0.0007739145t^3 + 3.375 \times 10^{-8}t^4\right)$
$\hbar = 0$	$u_{app} = x + 1$
$\hbar = 0.6$	$u_{app} = (x+1)(1 - 5.5536t + 1.2168t^2 + 0.0216t^3 + 0.0054t^4)$
$\hbar = 1.2$	$u_{app} = (x+1)(1 - 22.4256t + 14.3424t^2 + 2.1888t^3 + 0.0864t^4)$
$\hbar = 1.8$	$u_{app} = (x+1)(1 - 60.4656t + 48.7944t^2 - 9.1368t^3 + 0.04374t^4)$
$\hbar = 2$	$u_{app} = (x+1)(1 - 80t + 68t^2 - 13.3333333333t^3 + 0.6666666666t^4)$

3.Tablo 1.3.3.Örnekteki homotopi analiz metodu ile çözülen farklı $\hbar$ değerlerine karşı gelen 4. dereceden yaklaşık çözüm

$\hbar$ değeri	4.dereceden yaklaşık çözüm u_{app}
$\hbar = -2$	$u_{app} = x(1 - 5.33333333t^3 + 0.666666667t^4)$
$\hbar = -1.7$	$u_{app} = x(1 + 0.2601t - 0.47685t^2 - 2.047083333t^3 + 0.3480041667t^4)$
$\hbar = -1.5$	$u_{app} = x(1 + 0.5625t - 0.28125t^2 - 0.84375t^3 + 0.2109375t^4)$
$\hbar = -1.2$	$u_{app} = x(1 + 0.9216t - 0.2304t^2 + 0.0864t^4)$
$\hbar = -1$	$u_{app} = x(1 + t + 0.5t^2 + 0.166666667t^3 + 0.0416666667t^4)$
$\hbar = -0.65$	$u_{app} = x \left(1 + 0.77000625t + 0.584634375t^2 + 0.1258697917t^3 + 0.007437760417t^4 \right)$
$\hbar = 0$	$u_{app} = x$
$\hbar = 0.7$	$u_{app} = x \left(1 + 3.5721t + 4.03515t^2 - 0.5430833333t^3 + 0.01000416667t^4 \right)$
$\hbar = 0.3$	$u_{app} = x(1 + 0.4761t + 0.50715t^2 - 0.03375t^3 + 0.0003375t^4)$
$\hbar = 1$	$u_{app} = x(1 + 9t + 10.5t^2 - 1.83333333t^3 + 0.0416666667t^4)$
$\hbar = 1.3$	$u_{app} = x \left(1 + 18.4041t + 22.02915t^2 - 4.577083333t^3 + 0.1190041667t^4 \right)$
$\hbar = 1.6$	$u_{app} = x \left(1 + 33.1776t + 40.5504t^2 - 9.557333333t^3 + 0.2730666667t^4 \right)$
$\hbar = 1.9$	$u_{app} = x(1 + 54.908t + 68.28315t^2 - 17.71908333t^3 + 0.5430041667t^4)$
$\hbar = 2$	$u_{app} = x(1 + 64t + 80t^2 - 21.33333333t^3 + 0.6666666667t^4)$

4.Tablo 1.3.4.Örnekteki homotopi analiz metodu ile çözülen farklı $\hbar$ değerlerine karşı gelen 4. dereceden yaklaşık çözüm

$\hbar$ değeri	4.dereceden yaklaşık çözüm u_{app}
$\hbar = -2$	$u_{app} = x^2(1 + 4t^2 - 2.666666667t^3 + 0.666666667t^4)$
$\hbar = -1.7$	$u_{app} = x^2(1 + 0.7599t + 1.54615t^2 - 0.900716667t^3 + 0.3480041667t^4)$
$\hbar = -1.5$	$u_{app} = x^2(1 + 0.9375t + 0.84375t^2 - 0.28125t^3 + 0.2109375t^4)$
$\hbar = -1.3$	$u_{app} = x^2(1 + 0.9919t + 0.56615t^2 + 0.036616667t^3 + 0.1190041667t^4)$
$\hbar = -1.1$	$u_{app} = x^2\left(1 + 0.9999t + 0.50215t^2 + 0.1552833333t^3 + 0.06100416667t^4\right)$
$\hbar = -1$	$u_{app} = x^2(1 + t + 0.5t^2 + 0.166666667t^3 + 0.0416666667t^4)$
$\hbar = -0.99$	$u_{app} = x^2\left(1 + 0.99999999t + 0.499998t^2 + 0.166567995t^3 + 0.04002483375t^4\right)$
$\hbar = -0.8$	$u_{app} = x^2(1 + 0.9984t + 0.4864t^2 + 0.1365333333t^3 + 0.01706666667t^4)$
$\hbar = -0.09$	$u_{app} = x^2\left(1 + 0.31425039t + 0.021482415t^2 + 0.000453195t^3 + 0.00000273375t^4\right)$
$\hbar = 0$	$u_{app} = x^2$
$\hbar = 0.45$	$u_{app} = x^2\left(1 - 3.42050625t + 1.033509375t^2 - 0.081253125t^3 + 0.00170859375t^4\right)$
$\hbar = 0.6$	$u_{app} = x^2(1 - 5.5536t + 2.1384t^2 - 0.2088t^3 + 0.0054t^4)$
$\hbar = 0.85$	$u_{app} = x^2\left(1 - 10.71350625t + 5.407009375t^2 - 0.6704197917t^3 + 0.02175026042t^4\right)$
$\hbar = 0.95$	$u_{app} = x^2\left(1 - 13.45900625t + 7.358759375t^2 - 0.9788364583t^3 + 0.03393776042t^4\right)$
$\hbar = 1$	$u_{app} = x^2(1 + 0.9984t + 0.4864t^2 + 0.1365333333t^3 + 0.01706666667t^4)$

5.Tablo 1.3.5.Örnekteki homotopi analiz metodu ile çözülen farklı $\hbar$ değerlerine karşı gelen 4. dereceden yaklaşık çözüm

Tablolar incelendiğinde ve $n = 4$ için elde edilen seri çözümlerle tam çözümlerin ilk 4 terimi karşılaştırıldığında, bütün örnekler için $\hbar = 0$ değerlerinde problemlerin başlangıç yaklaşımlarının ve $\hbar = -1$ değerlerinde ise bulunan yaklaşık çözümlerle tam çözümlerin ilk dört terimlerinin çakıştığı görülebilir. $R_{\hbar}$ bölgesinden alınan $\hbar \neq -1$ değerleri için elde edilen tüm serilerin de bölge içindeki $\hbar = -1$ olduğu durumda elde edilen seriye yakınsadığı görülmektedir. Fakat bu gözlem yakınsamanın analizini tam olarak yapmaya yeterli olmayacaktır. Liao [19] kitabında, çözüm serisinin yakınsaklık bölgesini belirlemek için $\hbar$ 'yi bağımsız değişken gibi düşünüp $\hbar$ 'ye bağlı fonksiyonun grafiklerinin çizilmesi gerektiğini belirtmiştir. Örneğin

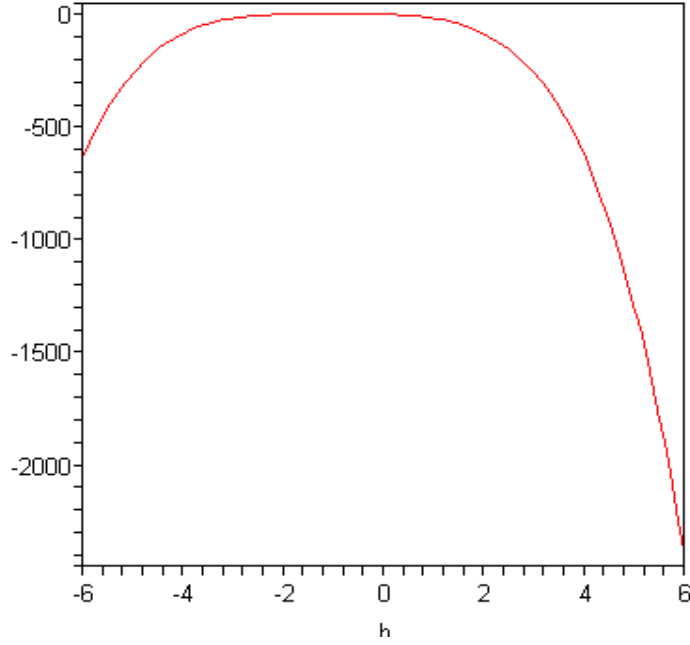
$$\gamma = u_{tt}(\vec{x}, t) \Big|_{\vec{x}=0, t=0}$$

γ , $\hbar$ 'nin bir fonksiyonudur. Buradan bir $\gamma \sim \hbar$ eğrisi çizilebilir. 2.1.5.1. Teoreme göre γ 'nın farklı $\hbar$ değerleri için verilen bütün yakınsak seriler, alınan terim sayısına bağlı olarak tam çözüme yakınsar. Bu yüzden $\gamma \sim \hbar$ eğrisinin grafiğinde $\hbar$ -eksenine paralel bir doğru parçası görülür. Bu doğru parçasına karşı gelen $\hbar$ değerlerinin oluşturduğu bölge, serinin yakınsak olduğu bölgedir. Bu bölgeye $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi denir ve bu bölge $R_{\hbar}$ ile gösterilir. Göz önüne alınan probleme göre, çözüm serisinden $\hbar$ 'ye bağlı bir fonksiyon elde etmek için alınan türevin mertebesi ve türev alınan değişken farklılık gösterir. Eğer $\hbar$ yerine, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden herhangi bir değer konursa buna karşı gelen çözüm serisinin yakınsak olduğu kesindir. Daha önce bulunan tüm yarı analitik tekniklerin aksine, homotopi analiz metodu, bir problemin yardımcı $\hbar$ parametresi cinsinden çözüm ailesini verir. Aile içindeki her bir çözümün yakınsak bölgesi, $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi ile belirlenir. Bu sonuca göre, her bir tabloda $\hbar$ 'nin geçerli bölgesindeki farklı $\hbar$ değerleri için verilen çözümler birer çözüm ailesi oluşturacaktır. Verilen tablolarla Liao'nun tanımladığı $\hbar$ -eğrileri karşılaştırılmak istenirse $\hbar$ -eğrilerinin, örneğin, 4. dereceden yaklaşık çözümlerinin grafikleri oluşturularak incelenirse:

1.3.1. Örnekteki 4. dereceden yaklaşık çözüm

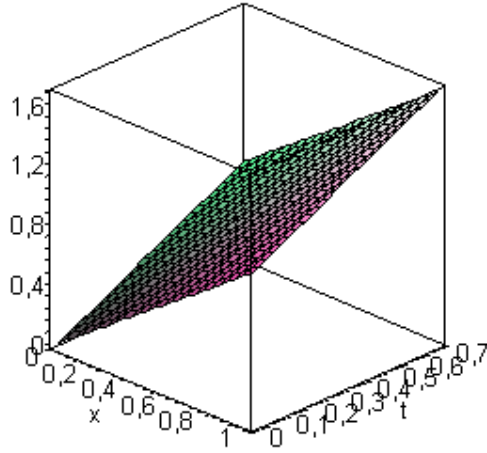
$$u_{app} = x - \sum_{n=0}^3 \hbar (1 + \hbar)^n t$$

olarak bulunur ve $u_{app_t}(0,0)$ 'ın $\hbar$ -eğrisi çizilerek, eğrinin $\hbar$ -eksenine paralel olduğu $-2 \leq \hbar \leq 0.4$ aralığında, bu çözümün yakınsak olduğu görülebilir(2.1.Şekil).

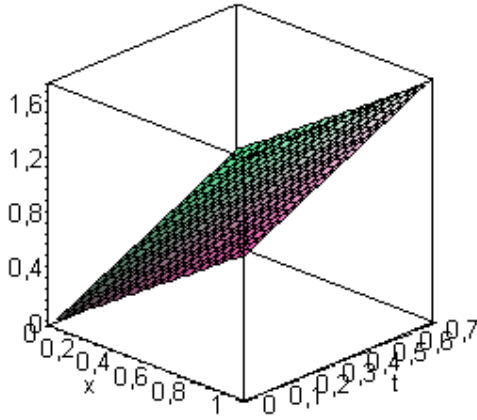


2.1.Şekil. $u'_{app}(0,0)$ 'ın 4. yaklaşımdaki $\hbar$ -eğrisi .

Örneğin, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden, $\hbar = -0.5$ değeri seçilirse çözüm ailesinden biri olan 4.dereceden yaklaşık çözüm $u_{app} = x + 0.9375 t$ (2.2.Şekil) olarak hesaplanır.



2.2.Şekil $\hbar = -0.5$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm

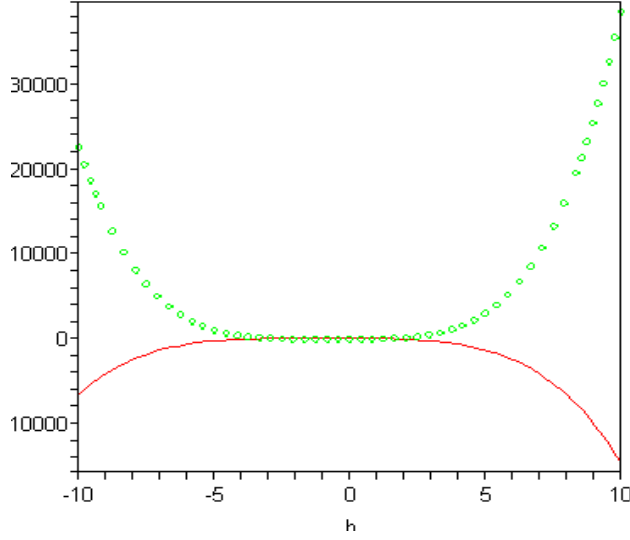


2.3.Şekil Tam çözüm

1.3.2.Örnekteki 4. dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app} = \sum_{n=0}^4 u_n = \frac{1}{24} \sinh(x) \left(24 - 96\hbar t - 144\hbar^2 t + 72\hbar^2 t^2 + 96\hbar^3 t^2 - 96\hbar^3 t - 16\hbar^3 t^3 - 12\hbar^4 t^3 \right. \\ \left. + 36\hbar^4 t^2 - 24\hbar^4 t + \hbar^4 t^4 \right)$$

bulunur ve $u_{app_{xt}}(0,0)$, $u_{app_{xtt}}(0,0)$ 'nin $\hbar$ -eğrileri çizilerek, $u_{app_{xt}}(0,0)$ 'nin $\hbar$ -eksenine $-3 \leq \hbar \leq 1$ aralığında, $u_{app_{xtt}}(0,0)$ 'nin ise $-3 \leq \hbar \leq 2$ aralığında paralel oldukları görülür. İki eğrinin de $\hbar$ -eksenine paralel olduğu $-3 \leq \hbar \leq 1$ aralığı, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi olarak belirlenmiş olur. Bu bölgede, elde edilen seri çözümün yakınsak olduğu bulunur (2.4.Şekil).

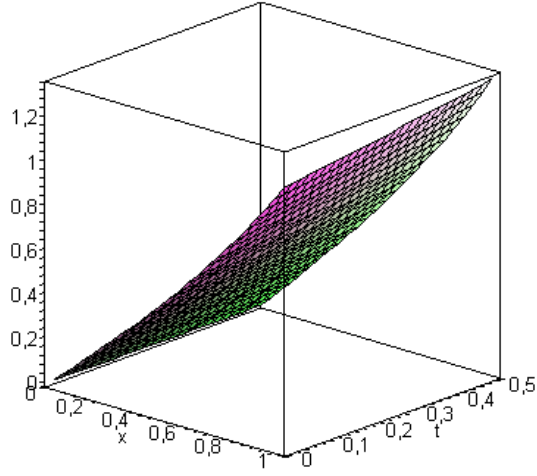


2.4.Şekil $u''_{app}(0,0)$ ve $u'''_{app}(0,0)$ 'nin 4. yaklaşımdaki h -eğrileri, yuvarlak semboller: $u''_{app}(0,0)$ 'ın; düz çizgi: $u'''_{app}(0,0)$ 'nin 4.dereceden yaklaşımı

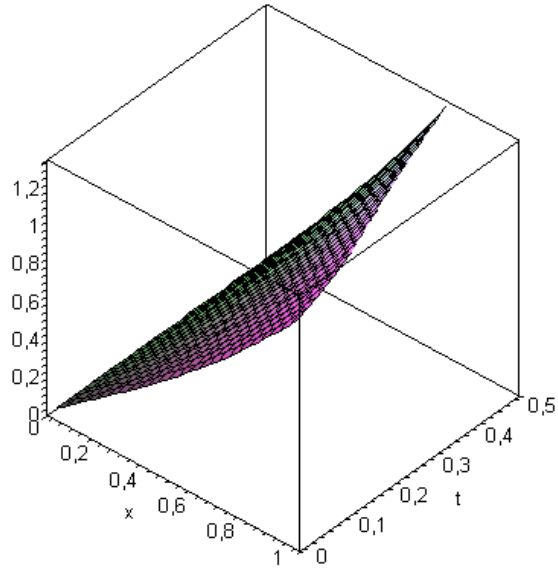
Örneğin, h 'nin geçerli bölgesinden, $h = -0.07$ değeri seçilirse çözüm ailesinden biri olan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app}(x,t) = \sinh(x) \left(1 + 0.25194799t + 0.013364015t^2 + 0.0002166616667t^3 + 0.0000100041667t^4 \right)$$

(2.5.Şekil) olarak hesaplanır.



2.5.Şekil $h = -0.07$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm

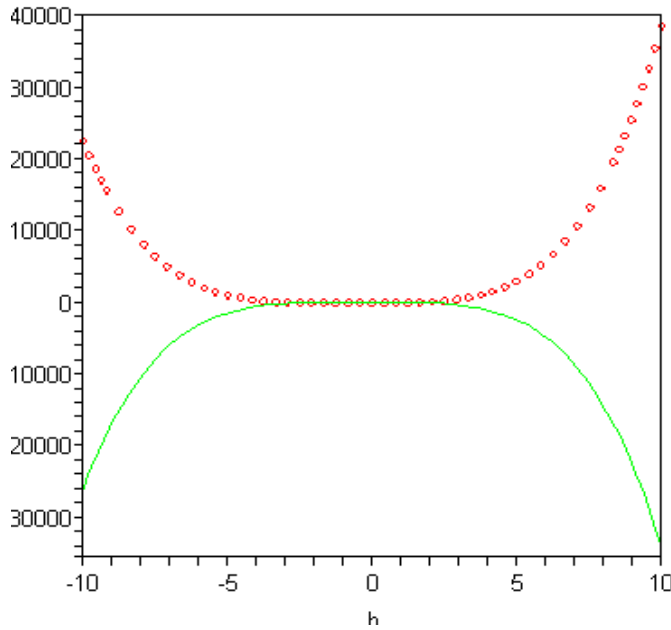


2.6.Şekil. Tam çözüm

1.3.3.Örnekteki 4. dereceden yaklaşık çözüm,

$$u_{app} = x + 1 + 4\hbar^3 t^2 x - 4\hbar^3 tx - \hbar^4 tx + 3\hbar^2 t^2 x - 6\hbar^2 tx - 4\hbar tx - \frac{2}{3}\hbar^3 t^3 x - \frac{2}{3}\hbar^3 t^3 \\ + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x - 4\hbar t + 3\hbar^2 t^2 - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 x + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x - 6\hbar^2 t + 4\hbar^3 t^2 - 4\hbar^3 t - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 \\ + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 - \hbar^4 t$$

bulunur ve $u_{app_{II}}(0,0)$, $u_{app_{III}}(0,0)$ 'nin $\hbar$ -eğrileri çizilerek, $u_{app_{II}}(0,0)$ 'nin $\hbar$ -eksenine $-3 \leq \hbar \leq 2$ aralığında , $u_{app_{III}}(0,0)$ 'nin ise $-2 \leq \hbar \leq 2$ aralığında paralel oldukları görülür. İki eğrinin de $\hbar$ -eksenine paralel olduğu $-2 \leq \hbar \leq 2$ aralığı, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi olarak belirlenmiş olur. Bu bölgede, elde edilen seri çözümün yakınsak olduğu bulunur (2.7.Şekil).

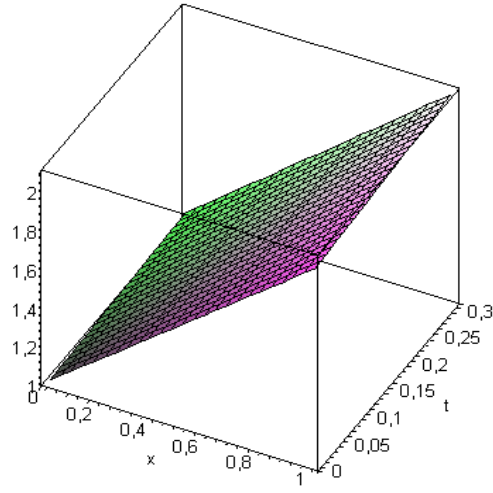


2.7.Şekil $u_{app}''(0,0)$ ve $u_{app}'''(0,0)$ 'nin 4. yaklaşımdaki $\hbar$ -eğrileri, yuvarlak semboller: $u_{app}'''(0,0)$ 'ın; düz çizgi: $u_{app}''(0,0)$ 'nin 4.dereceden yaklaşımı

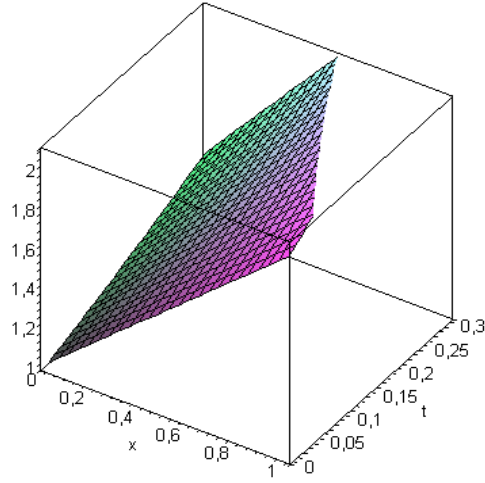
Örneğin, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden, $\hbar = -0.03$ değeri seçilirse çözüm ailesinden biri olan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app}(x,t) = (x+1)\left(1 + 0.11470719t + 0.00640386t^2 + 0.0007739145t^3 + 3.375 \cdot 10^{-8}t^4\right)$$

(2.8.Şekil) olarak hesaplanır.



2.8.Şekil $h = -0.03$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm

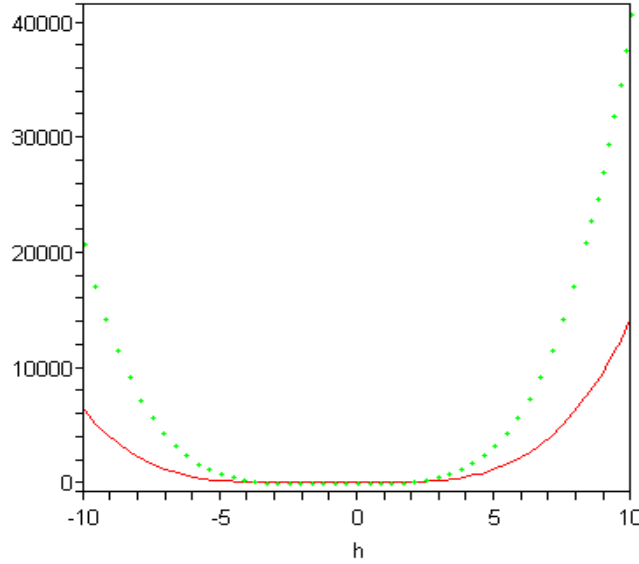


2.9.Şekil Tam çözüm

1.3.4.Örnekteki 4. dereceden yaklaşık çözüm,

$$u_{app} = x + 4\hbar^2 tx + 4\hbar^2 t^2 x + 5\hbar^3 t^2 x + 4\hbar^3 tx - \hbar^3 t^3 x + \hbar^4 tx - \frac{5}{6}\hbar^4 t^3 x + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x$$

bulunur ve $u_{app_{xt}}(0,0,0)$, $u_{app_{xtt}}(0,0,0)$ 'nin $\hbar$ -eğrileri çizilerek, $u_{app_{xt}}(0,0,0)$ 'nin $\hbar$ -eksenine $-3 \leq \hbar \leq 3$ aralığında, $u_{app_{xtt}}(0,0,0)$ 'nin ise $-2 \leq \hbar \leq 2$ aralığında paralel oldukları görülür. İki eğrinin de $\hbar$ -eksenine paralel olduğu $-2 \leq \hbar \leq 2$ aralık $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi olarak belirlenmiş olur. Bu bölgede, elde edilen seri çözümün yakınsak olduğu bulunur (2.10 Şekil).

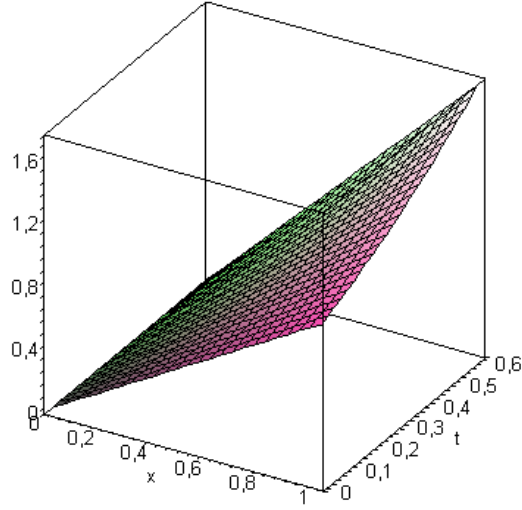


2.10.Şekil $u''_{app}(0,0,0)$ ve $u'''_{app}(0,0,0)$ 'nin 4. yaklaşımdaki $\hbar$ -eğrileri, düz çizgi: $u''_{app}(0,0,0)$ 'in, yuvarlak semboller: $u'''_{app}(0,0,0)$ 'in 4.dereceden yaklaşımı

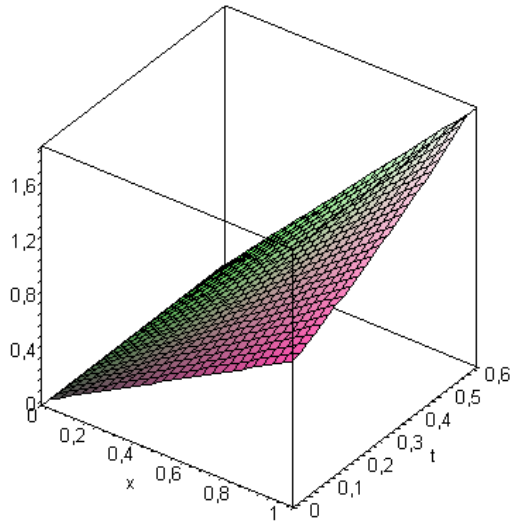
Örneğin, h 'nin geçerli bölgesinden, $h = -0.65$ değeri seçilirse çözüm ailesinden biri olan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app} = x + 0.77000625xt + 0.584634375xt^2 + 0.1258697917xt^3 + 0.007437760417xt^4$$

(2.11.Şekil) olarak hesaplanır.



2.11.Şekil $h = -0.65$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm

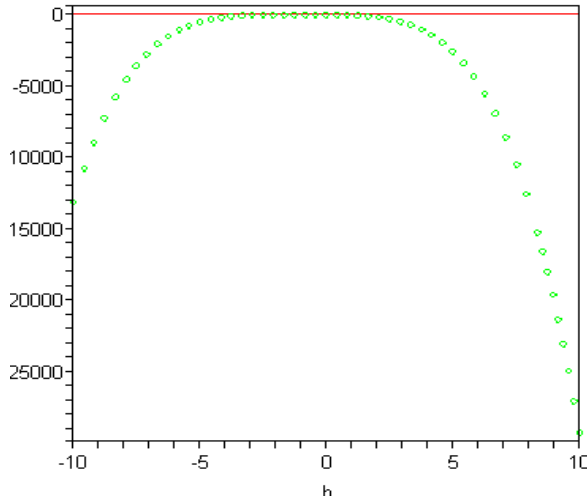


2.12.Şekil Tam çözüm

1.3.5.Örnekteki 4. dereceden yaklaşık çözüm,

$$u_{app}(x,t) = x^2 - 4\hbar x^2 t - 6\hbar^2 x^2 t + 3\hbar^2 x^2 t^2 + 4\hbar^3 x^2 t^2 - 4\hbar^3 x^2 t \\ - \frac{2}{3}\hbar^3 x^2 t^3 - \hbar^4 x^2 t - \frac{1}{2}\hbar^4 x^2 t^3 + \frac{1}{24}\hbar^4 x^2 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 x^2 t^2$$

olarak bulunur ve $u_{app,xx}(0,0)$, $u_{app,xx}(0,0)$ 'nin $\hbar$ -eğrileri çizilerek, $u_{app,xx}(0,0)$ 'nin $\hbar$ -eksenine $-\infty < \hbar < \infty$ aralığında, $u_{app,xx}(0,0)$ 'nin ise $-2 \leq \hbar \leq 1$ aralığında paralel oldukları görülür. İki eğrinin de $\hbar$ -eksenine paralel olduğu $-2 \leq \hbar \leq 1$ aralığı, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi olarak belirlenmiş olur. Bu bölgede, elde edilen seri çözümün yakınsak olduğu bulunur (2.13.Şekil).

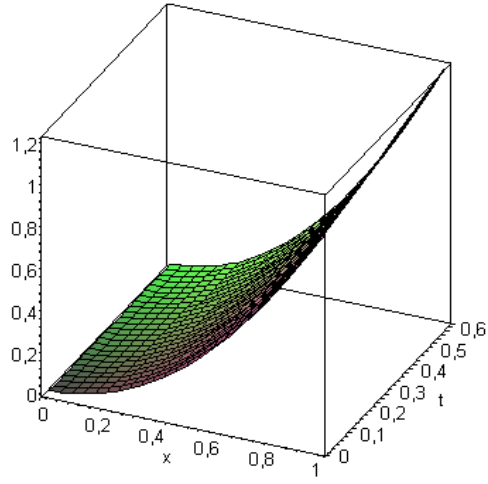


2.13.Şekil $u''_{app}(0,0)$ ve $u'''_{app}(0,0)$ 'nin 4. yaklaşımdaki $\hbar$ -eğrileri, düz çizgi: $u''_{app}(0,0)$ 'in, yuvarlak semboller: $u'''_{app}(0,0)$ 'in 4.yaklaşımı

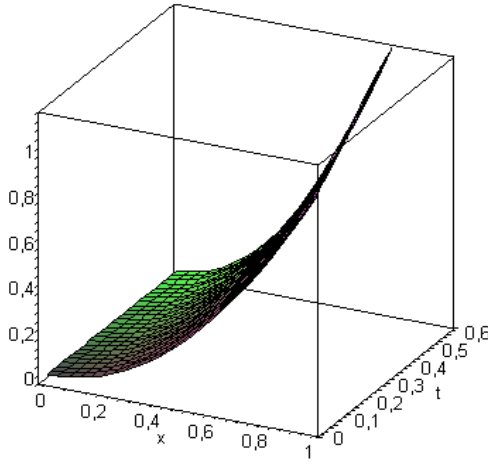
Örneğin, $\hbar$ 'in geçerli bölgesinden, $\hbar = -0.09$ değeri seçilirse çözüm ailesinden biri olan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app} = x^2 + 0.31425039x^2 t + 0.021482415x^2 t^2 + 0.000453195x^2 t^3 + 0.00000273375x^2 t^4$$

(2.13.Şekil) olarak hesaplanır.



2.14.Şekil $h = -0.09$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm



2.15.Şekil Tam çözüm

Fakat Liao'nun yaklaşımı da verilen tablolarda önerilen yaklaşım gibi analitik bir yaklaşımdan ziyade gözlemler sonunda elde edilen sonuçlardır. Şimdi tarafımızdan verilecek analitik yaklaşımla en uygun hangi $\hbar$ değeri ile yakınsamanın sağlanabileceği gösterilecektir. Liao'nun tanımladığı $\hbar$ 'ye bağlı fonksiyonların optimum değerlerinden birisi, istenen en uygun $\hbar$ değeri olacaktır. Bu da $\hbar$ 'ye bağlı fonksiyonların birinci mertebeden türevlerinin köklerinden biri olacaktır. Yukarıdaki örneklere uygulanırsa:

1.3.1.Örnek için:

$$u_{app_t}(0,0) = -\hbar - \hbar(1+\hbar) - \hbar(1+\hbar)^2 - \hbar(1+\hbar)^3 \quad -2 \leq \hbar \leq 0.4$$

$$\frac{du_{app_t}(0,0)}{d\hbar} = -4 - 12\hbar - 12\hbar^2 - 4\hbar^3 = -4(1+\hbar)^3 = 0$$

elde edilir ve denklemin çözümünden $\hbar = -1$ bulunur ve bu değer altında çözüm serisi en hızlı şekilde tam çözüme yakınsar.

1.3.2.Örnek için:

$$u_{app_{xt}}(0,0) = -\hbar^4 - 4\hbar^3 - 6\hbar^2 - 4\hbar \quad -3 \leq \hbar \leq 2$$

$$u_{app_{xt\hbar}} = -4\hbar^3 - 12\hbar^2 - 12\hbar - 4 = -4(1+\hbar)^3 = 0$$

denkleminin çözümünden $\hbar = -1$ elde edilir. $\hbar = -1$ için çözüm serisi en hızlı şekilde tam çözüme yakınsar.

1.3.3.Örnek için:

$$u_{app_{tt}}(0,0) = 3\hbar^4 + 8\hbar^3 + 6\hbar^2 \quad -3 \leq \hbar \leq 2$$

$$\frac{du_{app_{tt}}(0,0)}{d\hbar} = 12\hbar^3 + 24\hbar^2 + 12\hbar = 12\hbar(\hbar^2 + 2\hbar + 1) = 12\hbar(1+\hbar)^2 = 0$$

denkleminin çözümünden $\hbar = 0$, $\hbar = -1$ kökleri bulunur. $\hbar = -1$ için çözüm serisi en hızlı şekilde tam çözüme yakınsar.

1.3.4.Örnek için:

$$u_{xt}(0,0,0) = 4\hbar^2 + 4\hbar^3 + \hbar^4 \quad -3 \leq \hbar \leq 3$$

$$\frac{du_{xt}(0,0,0)}{d\hbar} = 8\hbar + 12\hbar^2 + 4\hbar^3 = 4\hbar(2+\hbar)(1+\hbar) = 0 \text{ denkleminin çözümünden}$$

$\hbar = -1$, $\hbar = 0$, $\hbar = -2$ kökleri elde edilir. $\hbar = -1$ için çözüm serisi en hızlı şekilde tam çözüme yakınsar.

1.3.5.Örnek için:

$$u_{app_{xt}}(0,0) = -8\hbar - 12\hbar^2 - 8\hbar^3 - 2\hbar^4 \quad -2 \leq \hbar \leq 1$$

$$\frac{du_{app_{xt}}(0,0)}{d\hbar} = -8 - 24\hbar - 24\hbar^2 - 8\hbar^3 = -8(1 + \hbar)^3 = 0 \text{ denkleminin çözümünden}$$

$\hbar = -1$ kökü elde edilir. $\hbar = -1$ için çözüm serisi en hızlı şekilde tam çözüme yakınsar.

Homotopi analiz metodu uygulanırken başlangıç yaklaşımını, yardımcı lineer operatörü, yardımcı fonksiyonu ve $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresini seçme serbestliği vardır. 2.1.5.1.Teoreme göre homotopi çözüm serisi, yakınsak olması şartıyla, verilen problemin çözümlerinden biridir. Çözüm serisinin yakınsak olmasını sağlamak için yardımcı lineer operatör, yardımcı fonksiyon ve $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi uygun seçilmelidir. Fakat metodun dezavantajlarından biri, bu uygun değerlerin seçimi için kesin teoremlerin henüz verilmemiş olmasıdır.

III. BÖLÜM

3. HOMOTOPİ PERTÜRBASYON METODU İLE HOMOTOPİ ANALİZ METODUNUN KARŞILAŞTIRILMASI

Bu bölümde, Fokker- Planck denklemi için homotopi pertürbasyon metodu ve homotopi analiz metodu ile elde edilen çözümlerin analizleri yapılmıştır.

1.3.1.Örnekte homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözümde, dördüncü dereceden yaklaşık çözüm

$$v_{app}(x, t) = x + t \quad (3.1.1)$$

tam çözümle çakışır.

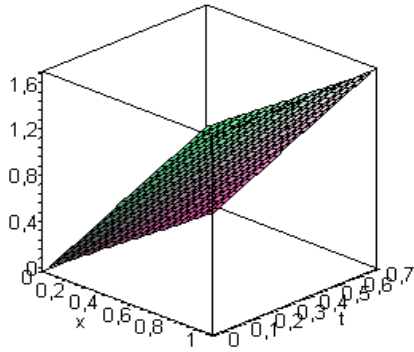
Fakat bu çözüm, konuya hakim olmayanlar için yanıltıcı olabilir. Homotopi pertürbasyon çözüm serisinin ikinci terimden sonraki terimlerinin hepsi sıfıra eşit olduğundan, ilk iki terim, tam çözüme karşı gelmektedir. Bu, özel bir durumdur ve genel analiz yapmak için yeterli değildir.

Homotopi analiz metodu ile bulunan dördüncü dereceden yaklaşık çözüm ise

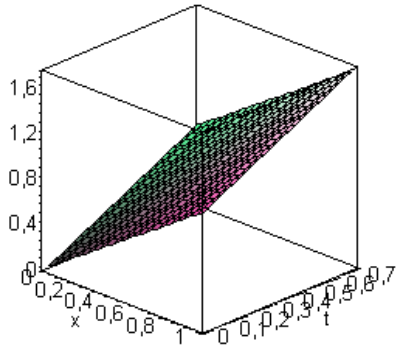
$$u_{app} = x - \sum_{n=0}^3 \hbar (1 + \hbar)^n t \quad (3.1.2)$$

dir. Bu çözüm serisinin yakınsak olduğu bölgeyi belirlemek için analiz yapılırsa, $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi olarak adlandırılan yakınsaklık aralığı, $-2 \leq \hbar \leq 0.4$, elde edilir. ve $\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden, $\hbar = -0.5$ değeri seçildiğinde 4.dereceden yaklaşık çözüm $u_{app} = x + 0.9375 t$ olarak bulunur. Bu çözüm bulunan aralıktaki $\hbar$ seçimi için yakınsak çözümdür. Bu iki metotla da bulunan 4. dereceden yaklaşık çözümler, grafiklerle karşılaştırılırsa homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözümün tam çözümle çakıştığı görülmüştür. Burada homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözüm daha iyi bir yaklaşım veriyormuş gibi görünse de homotopi analiz metodunda çözümün yakınsaklığı, $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin seçimine bağlıdır. $\hbar$ 'nin

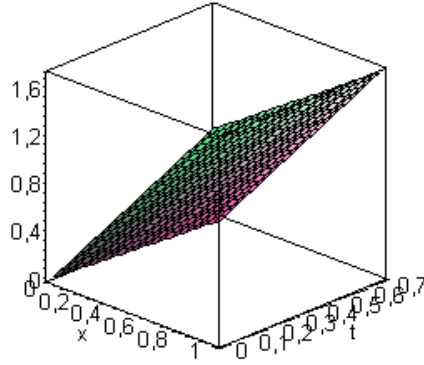
geçerli bölgesinden $\hbar = -1$ değeri seçilirse çözüm tam çözüme yakınsar ve 4.dereceden yaklaşık çözüm, homotopi pertürbasyon metodunda bulunan yaklaşık çözümle aynı olur. Yani bu örnek için her iki metotla bulunan seri çözümler tam çözüme yakınsarlar. Yaklaşık çözümlerin ve tam çözümün grafikleri 3.1.a.,b.,c.Şekillerde verilmiştir.



3.1.a. Şekil HAM ile bulunan $\hbar = -0.5$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.1.b. Şekil HPM ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.1.c. Şekil Tam çözüm

1.3.2.Örnekte ise homotopi pertürbasyon metodu ile bulunan çözümde 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$v_{app}(x,t) = \frac{1}{24} \sinh(x)(24 + 24t + 12t^2 + 4t^3 + t^4) \quad (3.1.3)$$

iken homotopi analiz metodu ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app} = \sum_{n=0}^4 u_n = \frac{1}{24} \sinh(x) \left(\begin{aligned} &24 - 96\hbar t - 144\hbar^2 t + 72\hbar^2 t^2 + 96\hbar^3 t^2 - 96\hbar^3 t - 16\hbar^3 t^3 - 12\hbar^4 t^3 \\ &+ 36\hbar^4 t^2 - 24\hbar^4 t + \hbar^4 t^4 \end{aligned} \right) \quad (3.1.4)$$

olur.

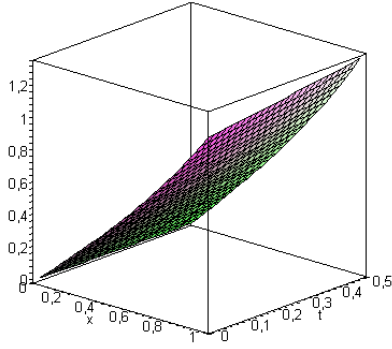
Bu çözüm için $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi, $-3 \leq \hbar \leq 1$ olarak belirlenmiştir. Bu bölgeden alınan $\hbar = -0.07$ değeri için çözüm yakınsak olup 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$u_{app}(x,t) = \sinh(x) \left(\begin{aligned} &1 + 0.25194799t + 0.013364015t^2 \\ &+ 0.0002166616667t^3 + 0.0000100041667t^4 \end{aligned} \right)$$

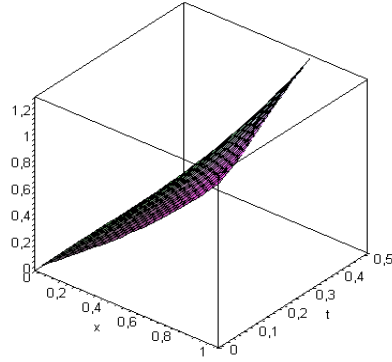
olarak hesaplanmıştır.

Yine 4. dereceden yaklaşık çözümler iki metot için de karşılaştırılırsa homotopi pertürbasyon metodu daha iyi sonuç veriyormuş gibi gözükür. Fakat $\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden alınan $\hbar = -1$ değeri için iki çözümün çakıştığı, aynı zamanda 4.dereceden

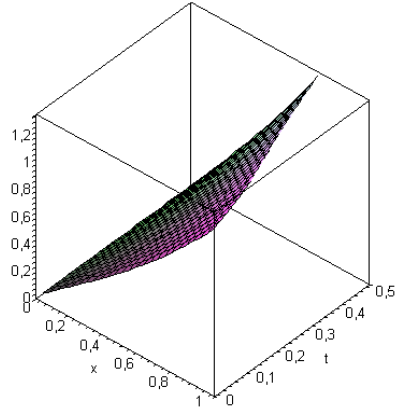
yaklaşık çözümlerinin de çakıştığı görülür. Bu durumda çözümün yakınsaklığını kontrol eden ve yakınsak olmasını garantileyen homotopi analiz metodu daha avantajlıdır. Homotopi pertürbasyon metodu, bu metodun $\hbar = -1$ değeri için özel halidir denebilir. Yine her iki metotla da bulunan çözümler tam çözüme yakınsar. Her iki metotla da bulunan yaklaşık çözümler ve tam çözüm grafiklerle 3.2.a.,b.,c.Şekillerde gösterilmiştir.



3.2.a. Şekil HAM ile bulunan $\hbar = -0.07$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.2.b. Şekil HPM ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.2.c. Şekil Tam çözüm

1.3.3.Örnekte homotopi pertürbasyon metodu ile çözülen örnekte 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$v_{app}(x, t) = x + 1 + tx + t + \frac{1}{2}t^2x + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3x + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4x + \frac{1}{24}t^4 \quad (3.1.5)$$

olarak bulunmuştur.

Homotopi analiz metodu ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} u_{app} = & x + 1 + 4\hbar^3 t^2 x - 4\hbar^3 tx - \hbar^4 tx + 3\hbar^2 t^2 x - 6\hbar^2 tx - 4\hbar tx - \frac{2}{3}\hbar^3 t^3 x - \frac{2}{3}\hbar^3 t^3 \\ & + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x - 4\hbar t + 3\hbar^2 t^2 - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 x + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x - 6\hbar^2 t + 4\hbar^3 t^2 - 4\hbar^3 t - \frac{1}{2}\hbar^4 t^3 \\ & + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 - \hbar^4 t \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

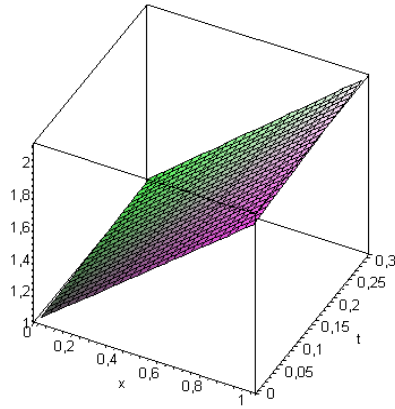
olur.

Bu çözüm için $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi $-2 \leq \hbar \leq 2$ olarak belirlenmiştir. Bu bölgeden alınan $\hbar = -0.03$ değeri için çözüm yakınsak olup 4.dereceden yaklaşık çözüm

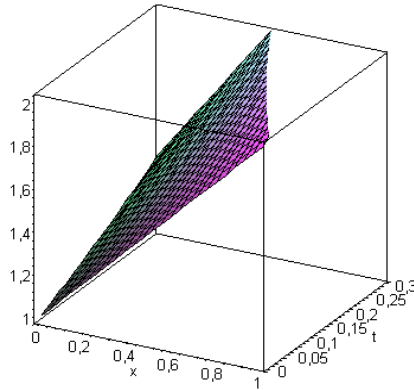
$$u_{app}(x, t) = (x + 1) \left(1 + 0.11470719t + 0.00640386t^2 + 0.0007739145t^3 + 3.375 \cdot 10^{-8}t^4 \right)$$

bulunmuştur.

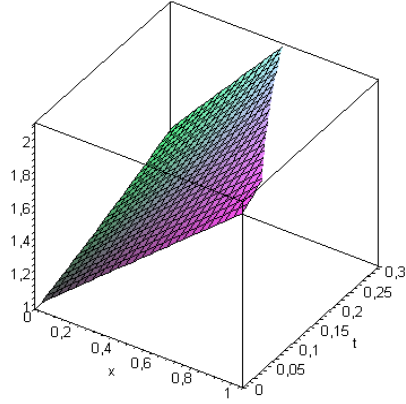
$\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden alınan $\hbar = -1$ değeri için iki çözümün çakıştığı, aynı zamanda 4.dereceden yaklaşık çözümlerinin de çakıştığı görülür. Yine her iki metotla da bulunan çözümler tam çözüme yakınsar. Her iki metotla da bulunan yaklaşık çözümler ve tam çözüm grafiklerle 3.3.a.,b.,c.Şekillerde gösterilmiştir. Bir önceki örnekte olduğu gibi 4.derece yaklaşım için homotopi analiz metodundaki $\hbar$ -yakınsaklık kontrol parametresi ile çözümün tam çözüme yakınsama hızı kontrol edilebilir. Homotopi pertürbasyon metodu ise homotopi analiz metodunun $\hbar = -1$ değeri seçilerek bulunan özel bir halidir.



3.3.a. Şekil HAM ile bulunan $\hbar = -0.03$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.3.b. Şekil HPM ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.3.c. Şekil Tam çözüm

1.3.4.Örnekte homotopi pertürbasyon metodu ile çözülen örnekte 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$v_{app}(x_1, x_2, t) = x_1 \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 \right) \quad (3.1.7)$$

iken homotopi analiz metodu ile bulunan yaklaşık çözüm

$$u_{app} = x + 4\hbar^2 tx + 4\hbar^2 t^2 x + 5\hbar^3 t^2 x + 4\hbar^3 tx - \hbar^3 t^3 x + \hbar^4 tx - \frac{5}{6}\hbar^4 t^3 x + \frac{3}{2}\hbar^4 t^2 x + \frac{1}{24}\hbar^4 t^4 x \quad (3.1.8)$$

bulunmuştur.

Bu çözüm için $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi $-2 \leq \hbar \leq 2$ olarak belirlenmiştir. Bu bölgeden alınan $\hbar = -0.65$ değeri için çözüm yakınsak olup 4.dereceden yaklaşık çözüm

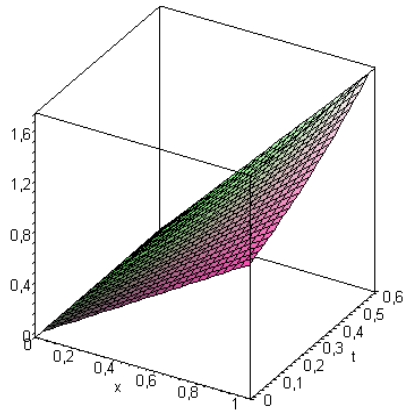
$$u_{app} = x + 0.77000625xt + 0.584634375xt^2 + 0.1258697917xt^3 + 0.007437760417xt^4$$

elde edilmiştir.

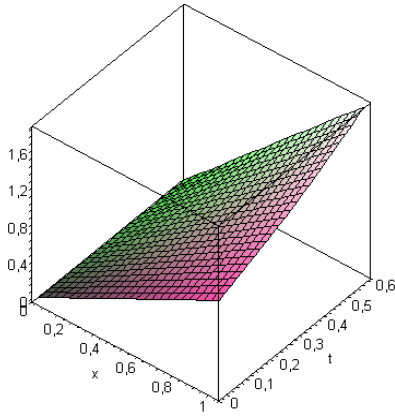
$\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden alınan $\hbar = -1$ değeri için iki seri çözümün çakıştığı, homotopi analiz metodunda 4.dereceden yaklaşık çözümün ise

$$u_{app}(x, y, t) = x \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^4 \right) \quad (3.1.9)$$

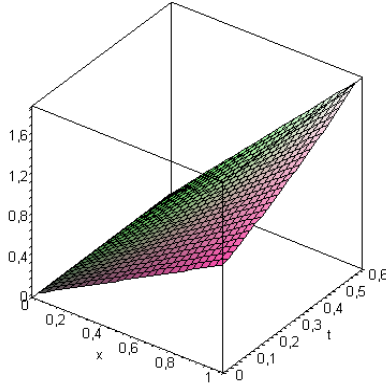
olduğu görülür. Yine her iki metotla da bulunan çözümler tam çözüme yakınsar. Her iki metotla da bulunan yaklaşık çözümler ve tam çözüm grafiklerle 3.4.a.,b.,c. Şekillerde gösterilmiştir. Homotopi pertürbasyon metodunda, seri çözüm tam çözüme yakınsar. Homotopi analiz metodunda da seri çözümde $h = -1$ değeri alınırsa çözümün tam çözüme yakınsadığı görülür.



3.4.a. Şekil HAM ile bulunan $h = -0.65$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.4.b. Şekil HPM ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.4.c. Şekil Tam çözüm

1.3.5.Örnekte homotopi pertürbasyon metodu ile çözülen örnekte 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$v_{app}(x,t) = x^2 + tx^2 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{6}t^3x^2 + \frac{1}{24}t^4x^2 \quad (3.1.10)$$

ve homotopi analiz metodu ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm

$$\begin{aligned} u_{app}(x,t) = & x^2 - 4\hbar x^2t - 6\hbar^2 x^2t^2 + 3\hbar^2 x^2t^2 + 4\hbar^3 x^2t^2 - 4\hbar^3 x^2t \\ & - \frac{2}{3}\hbar^3 x^2t^3 - \hbar^4 x^2t - \frac{1}{2}\hbar^4 x^2t^3 + \frac{1}{24}\hbar^4 x^2t^4 + \frac{3}{2}\hbar^4 x^2t^2 \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

bulunmuştur.

Bu çözüm için $\hbar$ 'nin geçerli bölgesi, $-2 \leq \hbar \leq 1$ olarak belirlenmiştir. Bu bölgeden alınan $\hbar = -0.09$ değeri için çözüm yakınsak olup 4.dereceden yaklaşık çözüm

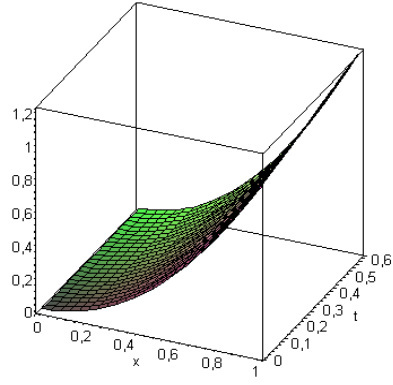
$$u_{app} = x^2 + 0.31425039x^2t + 0.021482415x^2t^2 + 0.000453195x^2t^3 + 0.00000273375x^2t^4$$

elde edilmiştir.

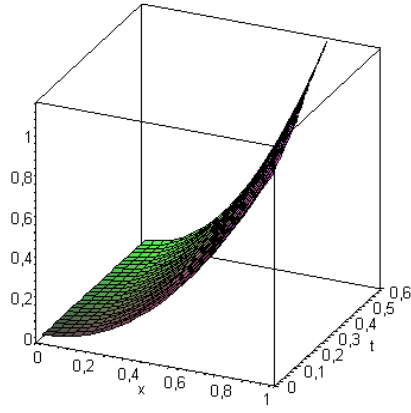
$\hbar$ 'nin geçerli bölgesinden alınan $\hbar = -1$ değeri için iki seri çözümün çakıştığı, homotopi analiz metodunda 4.dereceden yaklaşık çözümün ise

$$u_{app}(x,t) = x^2 + tx^2 + \frac{1}{2}t^2x^2 + \frac{1}{6}t^3x^2 + \frac{1}{24}t^4x^2 \quad (3.1.12)$$

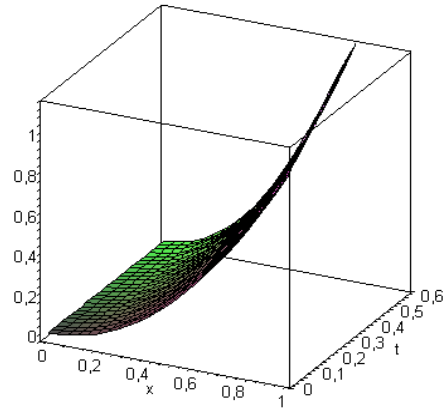
olduğu görülür. Her iki metotla bulunan yaklaşık çözümler ve tam çözüm grafiklerle 3.5.a.,b.,c. Şekillerde gösterilmiştir. Her iki metotla da bulunan seri çözümler tam çözüme yakınsarlar.



3.5.a. Şekil HAM ile bulunan $h = -0.09$ için 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.5.b. Şekil HPM ile bulunan 4.dereceden yaklaşık çözüm



3.5.c.Şekil Tam çözüm

SONUÇLAR

Bu çalışmada, homotopi pertürbasyon ve homotopi analiz metotlarıyla elde edilen çözümlerin özel analizleri, bir önceki bölümde detaylı bir şekilde verilmiştir. Önceki bölümlerdeki çalışmalardan çıkarılan genel sonuçlar aşağıdaki gibidir.

- Homotopi analiz metodu genelleştirilmiş Taylor serisine dayanan ve sonsuz seri çözümlerini araştıran bir metottur.
- Homotopi analiz metodunda, $(\hbar$ 'nin geçerli bölgesi) $R_{\hbar}$ yardımıyla yani metotta $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresi verilerek metodun yakınsaklık bölgesinin genişletilmesi sağlanmıştır.
- Homotopi pertürbasyon metodu, homotopi analiz metodundaki Taylor serisi yerine pertürbasyon serisi kullanılarak sonsuz seri çözümlerini araştıran bir metottur.
- Her iki metot da birkaç terim hesaplanarak analitik çözüme hızlı yakınsayan metotlardır.
- Homotopi analiz metodunda $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin uygun seçilebilmesi durumunda yakınsama hızlandırılabilir ve analitik çözüme hızlı yakınsar.
- Homotopi pertürbasyon metodunda ise yakınsama, başlangıç yaklaşımının yeterince iyi seçilmesine bağlıdır. Ayrıca yakınsama homotopi yoluna da bağlıdır.
- Homotopi analiz metodunda ise başlangıç yaklaşımı ne seçilirse seçilsin analitik çözüme ulaşılmasa bile yakınsak seri çözüm bulmak mümkündür.
- Homotopi analiz metodunda $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin -1 ve $H(\bar{x}, t)$ yardımcı fonksiyonunun 1'e eşit olması durumunda çözüm serisi, homotopi pertürbasyon metodunda elde edilen çözüm serisi ile çakışır. Bazı araştırmacılar homotopi pertürbasyon metodunun homotopi analiz metodunun bir özel hali olduğunu iddia etmektedirler.
- Bu iki metodun karmaşıklığı incelendiğinde, homotopi analiz metodunda çözüm serisinin oluşturulması yardımcı lineer operatörün, yardımcı fonksiyonun, başlangıç yaklaşımının ve $\hbar$ yakınsaklık kontrol parametresinin seçimine bağlı

iken homotopi pertürbasyon metodunda çözüm serisinin bulunması için başlangıç yaklaşımı ve uygun homotopinin kurulması yeterlidir. Bu da homotopi pertürbasyon metodunun homotopi analiz metoduna göre uygulanmasının daha kolay olduğunu gösterir.

Sonuç olarak denilebilir ki her iki metodun da problemlere bağlı olarak iyi ve zayıf yönleri mevcuttur. Metotların dezavantajlarının ortadan kaldırılması için literatürde yeterli problem çözümü olmadığından genel bir teori oluşturmak bu aşamada mümkün değildir.

KAYNAKLAR

- [1] He J.H, 2006, Non-Perturbative Methods for Strongly nonlinear Problems, dissertation, de -verlag im Internet GmbH, Berlin.
- [2] He J.H., 2006, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, Int. J. Modern Phys. B 20(10) 1141-1199.
- [3] He J.H., 2006, New interpretation of homotopy perturbation method, International Journal of Modern Physics B 20, 2561-2568.
- [4] He J.H., 2000, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, Int. J. Nonlinear Mech. 35, 37-43.
- [5] He J.H., 1999, Homotopy perturbation technique, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 178, 257-262.
- [6] He J.H., 2005, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos, Solitons and Fractals 26, 695-700.
- [7] He J.H., 2005, Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 6, 207-208.
- [8] Ozis T., Agirseven D., 2008, He's homotopy perturbation method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients, Phys. Lett. A, 372, 5944-5950.
- [9] Abbasbandy S., 2006, Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, Applied Mathematics and Computation, 173, 493-500.
- [10] Abbasbandy, S., 2006, Application of He's homotopy perturbation method for Laplace transform, Chaos Solitons & Fractals, 30, 1206-1212.
- [11] Siddiqui A.M., Ahmed M., Ghorı Q.K., 2007, Thin film flow of non-newtonian fluids on a moving belt, Chaos Solitons & Fractals, 33, 1006-1016.
- [12] Ghorı QK, Ahmed M, Siddiqui AM, 2007, Application of homotopy perturbation method to squeezing flow of a Newtonian fluid, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8 (2): 179-184.
- [13] Tari H, Ganji DD, Rostamian M, 2007, Approximate solutions of K (2,2), KdV and modified KdV equations by variational iteration method, homotopy perturbation method and homotopy analysis method, International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 8 (2): 203-210.

- [14] Ghorbani A, Saberi-Nadjafi J, 2007, He's homotopy perturbation method for calculating Adomian polynomials, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 8 (2): 229-232.
- [15] Ariel PD, Hayat T, Asghar S, 2006, Homotopy perturbation method and axisymmetric flow over a stretching sheet, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7 (4): 399-406.
- [16] Ganji DD, Sadighi A, 2006, Application of He's homotopy-perturbation method to nonlinear coupled systems of reaction-diffusion equations, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 7 (4): 411-418.
- [17] Rafei M, Ganji DD, 2006, Explicit solutions of Helmholtz equation and fifth-order KdV equation using homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 7 (3): 321-328.
- [18] Siddiqui AM, Mahmood R, Ghori QK, 2006, Thin film flow of a third grade fluid on a moving belt by He's homotopy perturbation method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation* 7 (1): 7-14.
- [19] Liao S.J., 2003, *Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method*, Boca Raton:Chapman&Hall/CRC Press.
- [20] Liao S.J., 1992, A second-order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method, *ASME J. Appl. Mech.*, 59, 970-975.
- [21] Liao S.J., 1995, An approximate solution technique not depending on small parameters: a special example, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 30 (3), 371-380.
- [22] Liao S.J., 1997, A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters—II: an application in fluid mechanics, *Int. J. Non-Linear Mech.* 32(5), 815-822.
- [23] Liao S.J., 1998, Homotopy analysis method: a new analytic method for nonlinear problems, *Appl. Math. Mech. (English-Ed.)* 19 (10), 957-962.
- [24] Liao S.J., 1998, Homotopy analysis method: a new analytical method for nonlinear problems without small parameters, in: *The 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai, 829-833.
- [25] Liao S.J., 1999, An explicit totally analytic approximate solution for Blasius viscous flow problem, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 34, 759-778.
- [26] Liao S.J., Chwang AT, 1996, General boundary element method for nonlinear problems, *Int.J Numer Meth Fluids*, 23, 467-83.

- [27] Liao S.J., 1997, General boundary element method for nonlinear heat transfer problems governed by hyperbolic heat conduction equation, *Comput.Mech.*, 20(5), 397-406.
- [28] Liao S.J., 1999, On the general boundary element method and its further generalization, *Int J. Numer Meth Fluids* , 31, 627-55.
- [29] Liao S.J., 1999, A uniformly valid analytic solution of two dimensional viscous flow over a semiinfinite flat plate, *J. Fluid Mech.* 385, 101–128.
- [30] Liao S.J., 2001, A non-iterative numerical approach for 2-D viscous flow problems governed by the Falkner–Skan equation, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 35 (5), 495–518.
- [31] Liao S.J., 2009, “Notes on the homotopy analysis method: Some definitions and theorems”, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 14, 983-997.
- [32] Song H, Tao L., 2007, Homotopy analysis of 1D unsteady, nonlinear groundwater flow through porous media. *J Coastal Res* ., 50, 292–295.
- [33] Molabahrami A, Khani F., 2009, The homotopy analysis method to solve the Burgers–Huxley equation. *Nonlinear Anal B: Real World Appl*, 10,2,589-600.
- [34] Bataineh AS, Noorani MSM, Hashim I., 2007, Solutions of time-dependent Emden–Fowler type equations by homotopy analysis method. *Phys Lett A*, 371:72–82.
- [35] Wang Z, Zou L, Zhang H., 2007, Applying homotopy analysis method for solving differential-difference equation. *Phys Lett A* , 369, 77–84.
- [36] Mustafa Inc., 2007, On exact solution of Laplace equation with Dirichlet and Neumann boundary conditions by the homotopy analysis method. *Phys Lett A*, 365, 412–15.
- [37] Abbasbandy S., 2006, “The application of the homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer”, *Physics Letters A*, 360, 109-113.
- [38] Abbasbandy S., 2007, “The application of homotopy analysis method to solve a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation”, *Physics Letters A*, 361, 478-483.
- [39] He J.H., 2004, Comparison of homotopy perturbation method and homotopy analysis method, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 527-539.
- [40] Liao S.J., 2005, Comparison between the homotopy analysis method and homotopy perturbation method, *Appl. Math. Comput.*, 169, 1186–1194.
- [41] Sajid M., Hayat T., 2008, Comparison of HAM and HPM methods in nonlinear heat conduction and convection equations, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 9, 2296-2301.

- [42] Sajid M., Hayat T., 2009, Comparison of HAM and HPM solutions in heat radiation equations, *Int. Communications in Heat and Mass Transfer*, 36, 59-62.
- [43] Liang S., Jeffrey D.J., 2009, Comparison of homotopy analysis method and homotopy perturbation method through an evolution equation, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, doi:10.1016/j.cnsns.2009.02.016.
- [44] Biazar J., Hosseini K., Gholamin P., 2008, Homotopy Perturbation Method Fokker-Planck Equation, *International Mathematical Forum*, 3-19, 945-954.
- [45] Gray B., 1975, *Homotopy Theory: An Introduction to Algebraic Topology* Academic Pr , ISSN: 0122960505.
- [46] Cropper A., William H., 2004, *Great Physicists: The Life and Times of Leading Physicists from Galileo to Hawking*, Oxford University Press, p.34, ISBN 978-0-19-517324-6.
- [47] He,J.H., Newton-like iteration method for solving algebraic equations, 1998, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 3 (2), 106–109.
- [48] Javidi M., 2007, Iterative methods to nonlinear equations, *Applied Mathematics and Computation*, 193, 360-365.
- [49] Holliday JR, Rundle JB, Tiampo KF, et al, 2006, Modification of the pattern informatics method for forecasting large earthquake events using complex eigenfactors *Tectonophysics*, 413 ,1-2, 87-91.
- [50] Akhmetov AA, 2003, Long current loops as regular solutions of the equation for coupling currents in a flat two-layer superconducting cable *Cryogenics*, 43, 3-5, 317-322.
- [51] Manolis GD, Rangelov TV, 2006, Non-homogeneous elastic waves in soils: Notes on the vector decomposition technique, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 26, 952-959.
- [52] Nochetto RH, Pyo JH, 2005, Error estimates for semi-discrete gauge methods for the Navier-Stokes equations *Mathematics of Computation* 74, 521-542.
- [53] Wazwaz AM, Gorguis A, 2004, Exact solutions for heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *Applied Mathematics and Computation*, 149,1, 15-29.
- [54] Momani S, 2005, Analytical approximate solution for fractional heat-like and wave-like equations with variable coefficients using the decomposition method *Applied Mathematics and Computation*, 165, 2, 459-472
- [55] Shou D.H, He J.H., 2008, Beyond Adomian method: The variational iteration method for solving heat-like and wave-like equations with variable coefficients, *Phys. Lett. A* 372 (3), 233–237.

- [56] Risken H., 1989, The Fokker-Planck Equation: Method of Solution and Applications, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [57] Frank T.D., 2004, Stochastic feedback, nonlinear families of Markov processes and nonlinear Fokker-Planck equations, Physica A 331, 391-408.
- [58] Liao S.J., Tan Y., 2007, A general Approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations, Studies in Applied Mathematics, 119, 297-354.
- [59] Biazar J., Ghazvini H., 2009, Convergence of the homotopy perturbation method for partial differential equations, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10(5), 2633-2640.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Deniz AĞIRSEVEN

Uyruğu: T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri: 29 Mart 1979, Edirne

Medeni Hali: Bekar

email: denizagirseven@trakya.edu.tr

EĞİTİM DURUMU

İlkokul: Edirne Kurtuluş İlkokulu, 1989.

Ortaokul: Edirne Anadolu Lisesi, 1993.

Lise: Edirne Anadolu Lisesi, 1996.

Lisans: Trakya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2000.

Yüksek Lisans: Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 2003.

Yabancı Dil: İngilizce, Almanca.

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Çalıştığı Kurum	Görevi
2000 -	Trakya Ün. Fen-Ed. Fak. Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi