

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTIGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

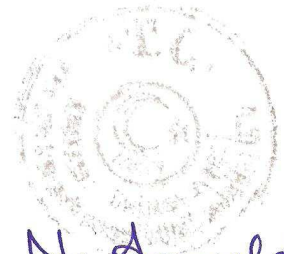
Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

Cengiz
Mehmet
Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODEL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castigliona metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

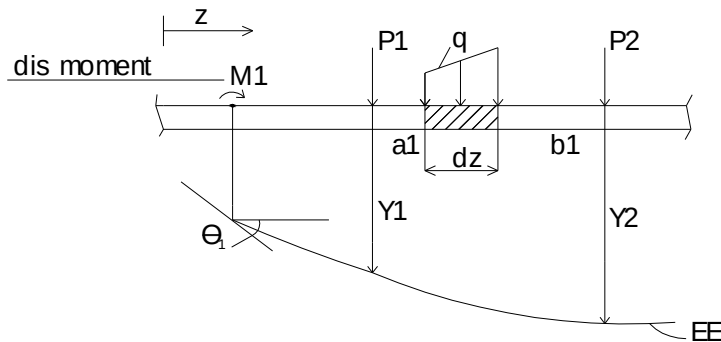
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

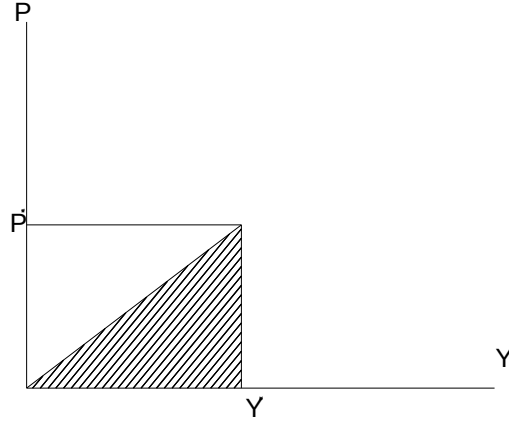
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

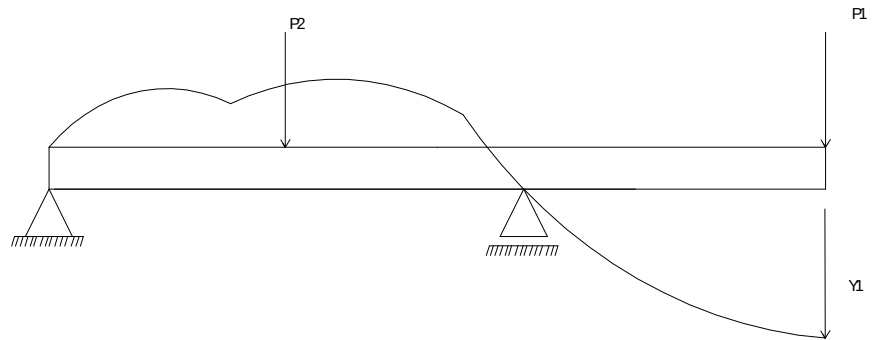
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

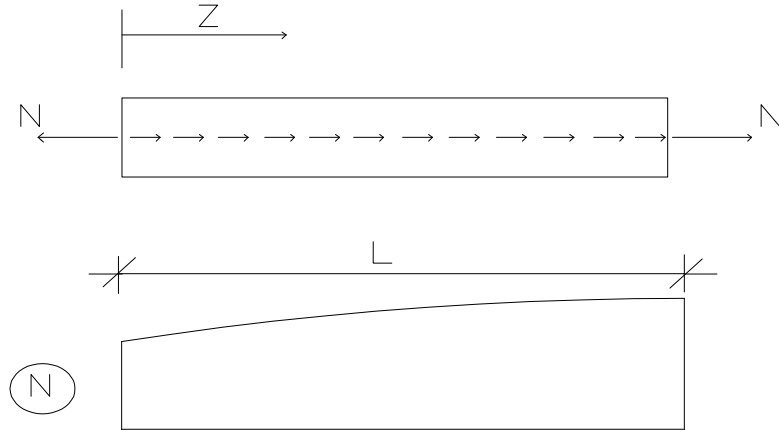
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilenecek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet olduğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değiştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değiştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değiştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönülür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değerinin M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

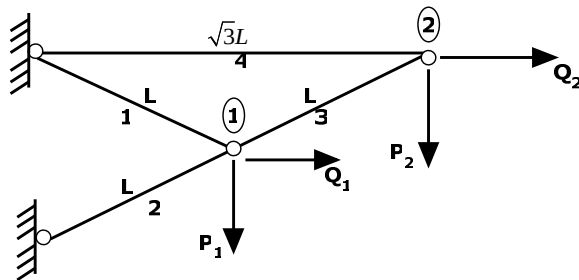
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

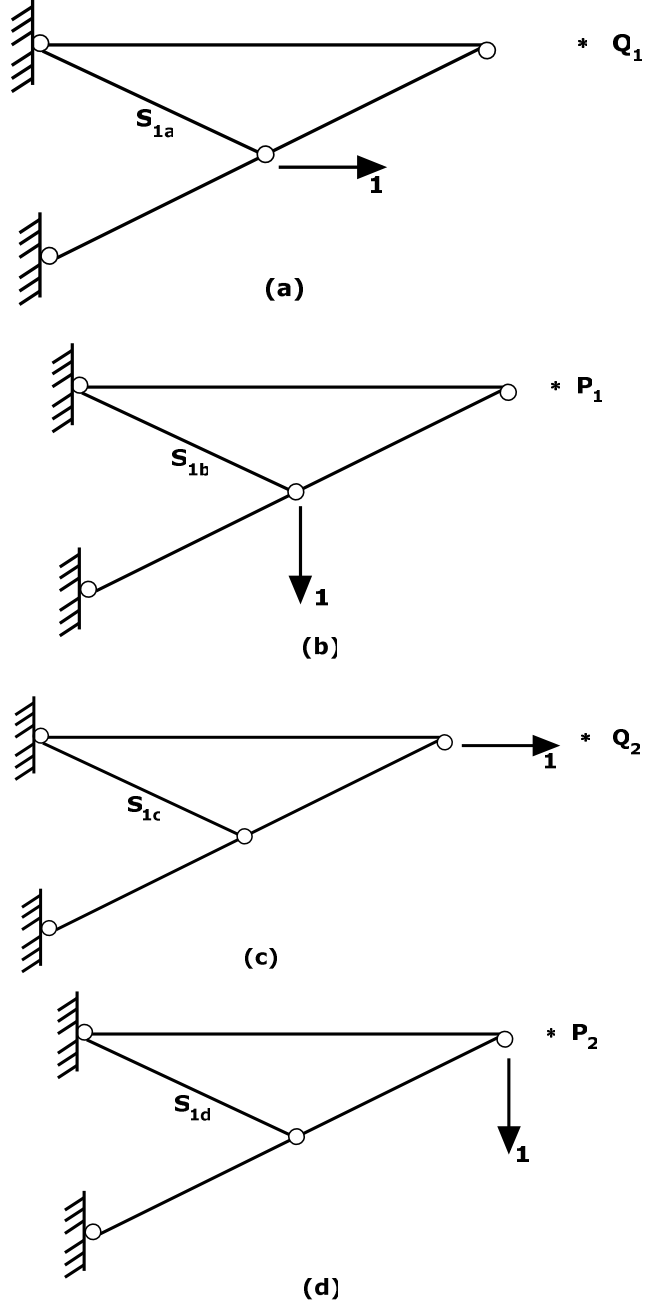
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyondan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu görülür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

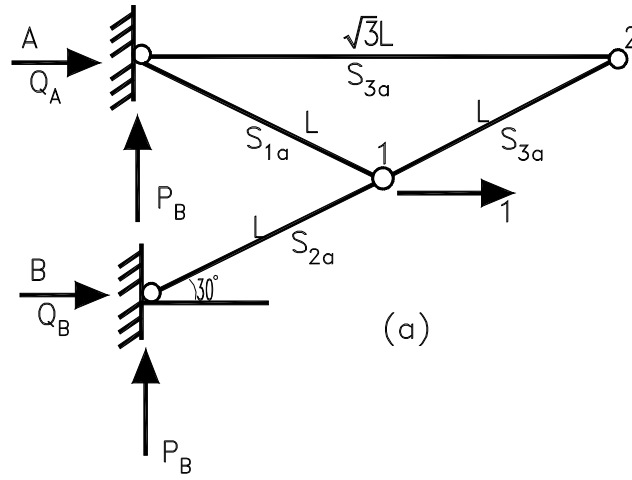
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

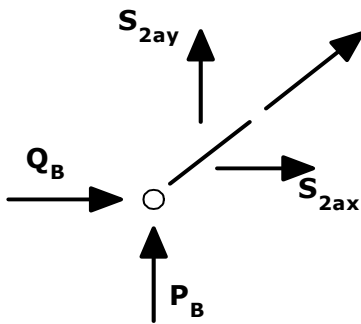
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

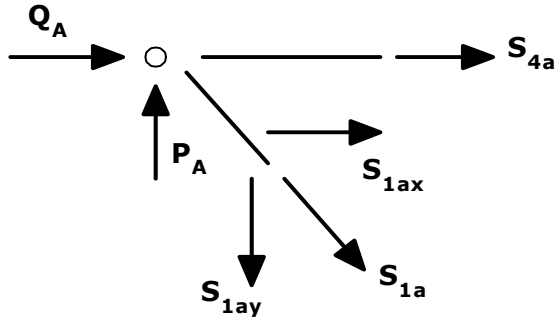
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

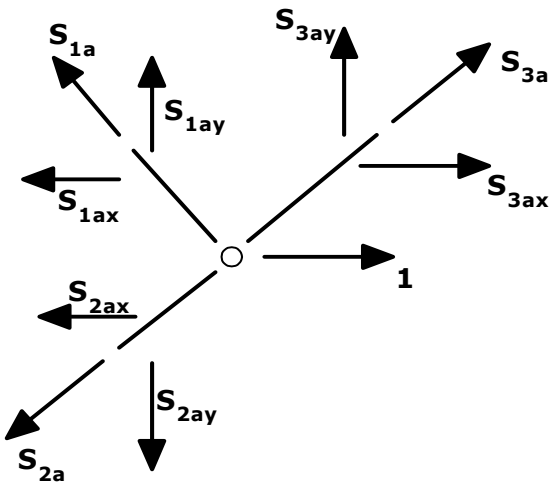
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

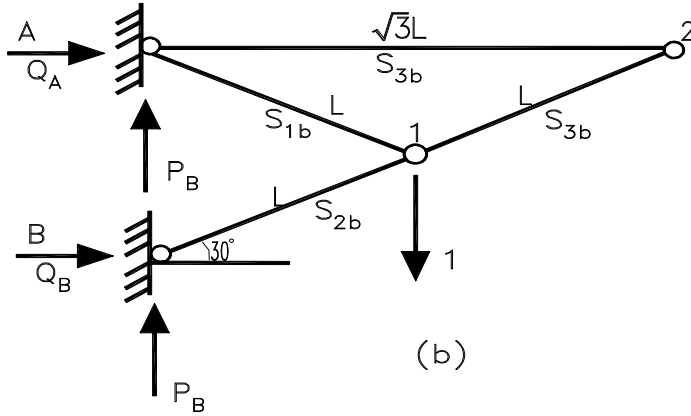
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

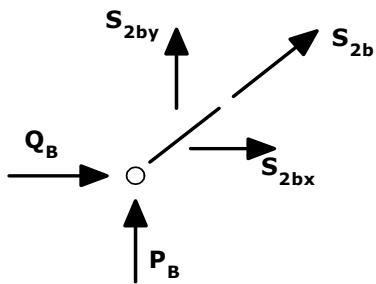
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

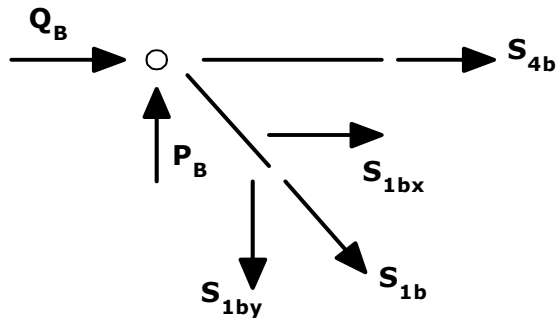
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

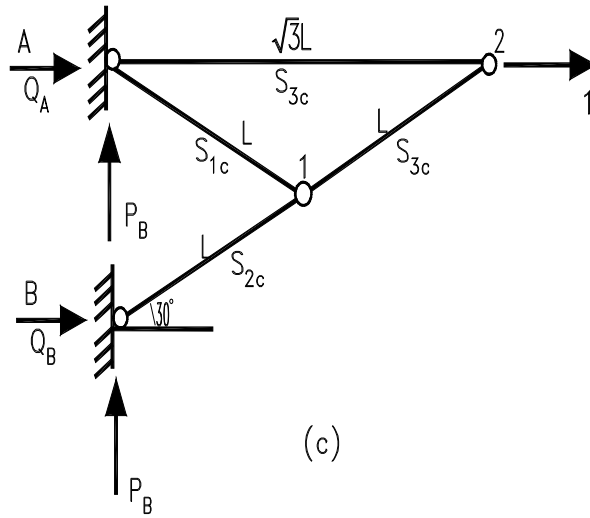
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

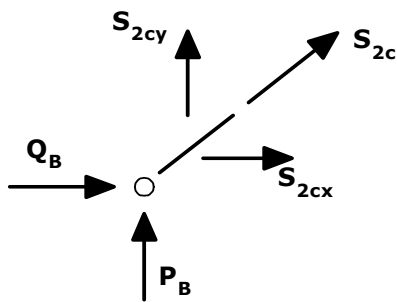
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

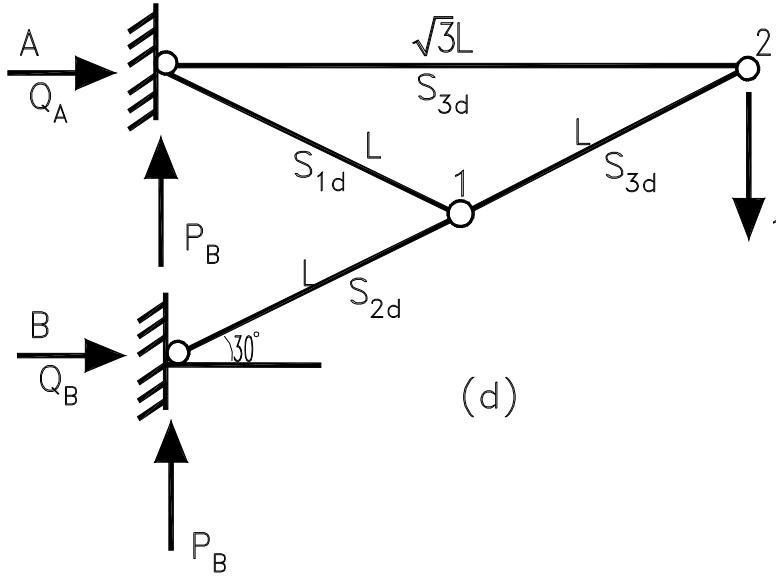
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

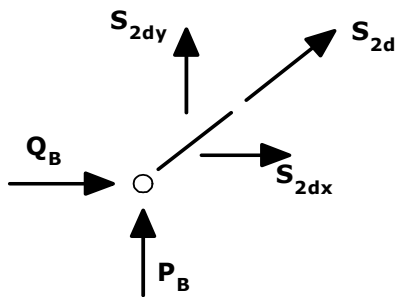
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

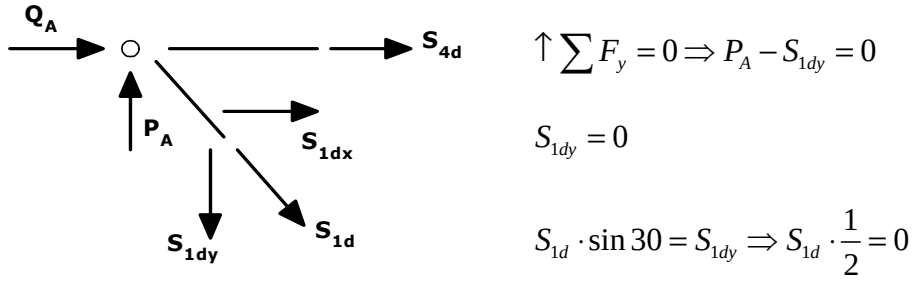
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

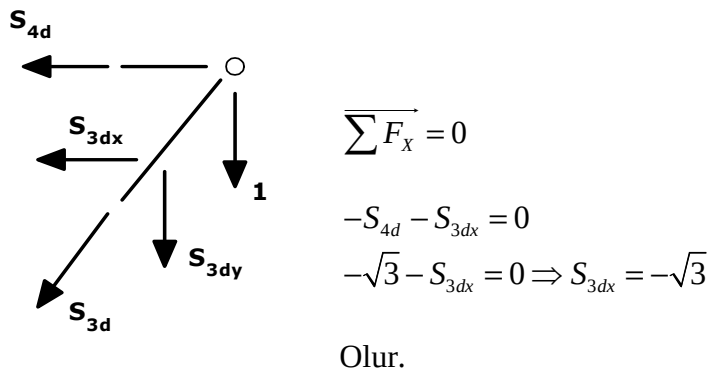
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

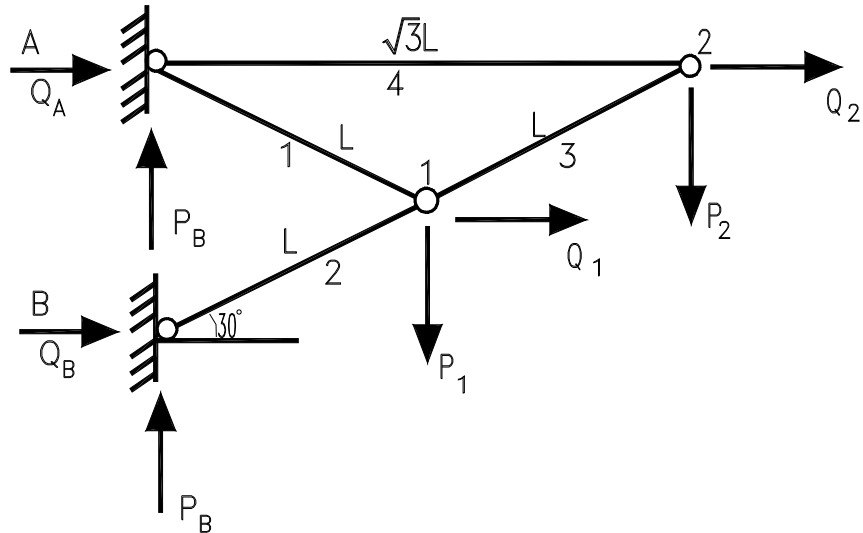
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

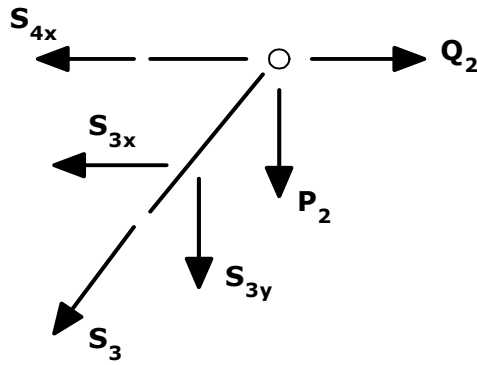
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

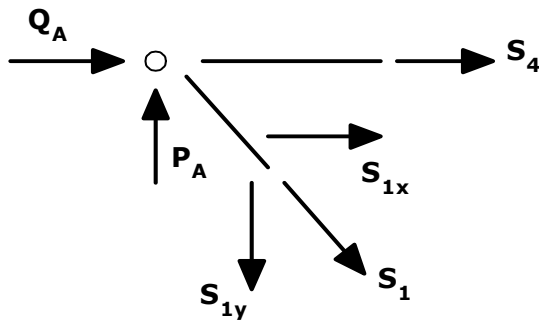
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

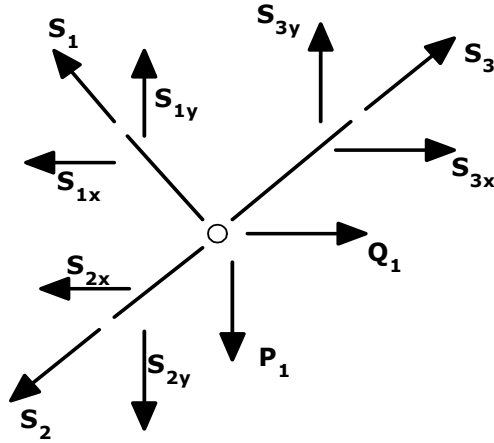
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

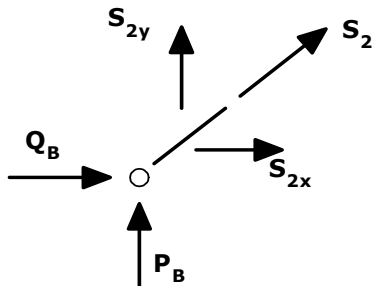
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

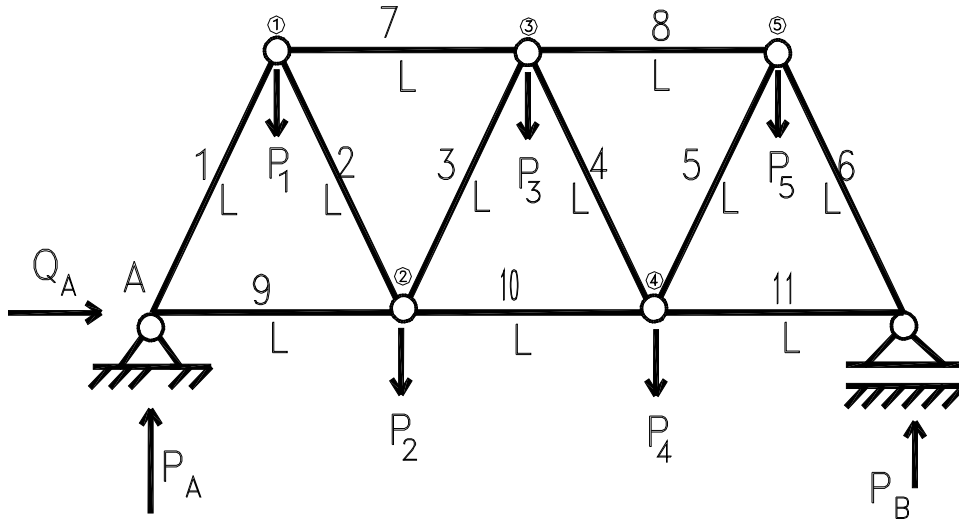
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2}P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2}P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2}P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{2}{3}P_4 + \frac{5}{6}P_5$$

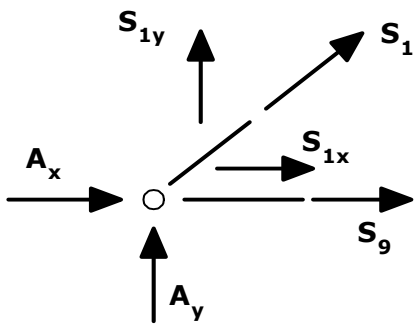
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{2}{3}P_4 - \frac{5}{6}P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{3}P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

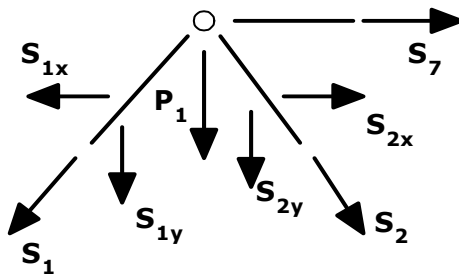
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

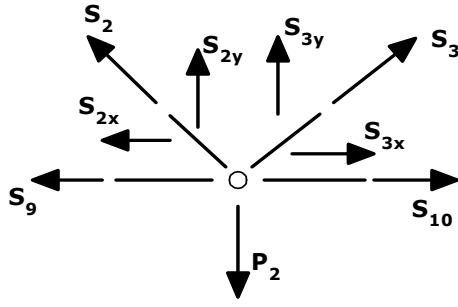
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

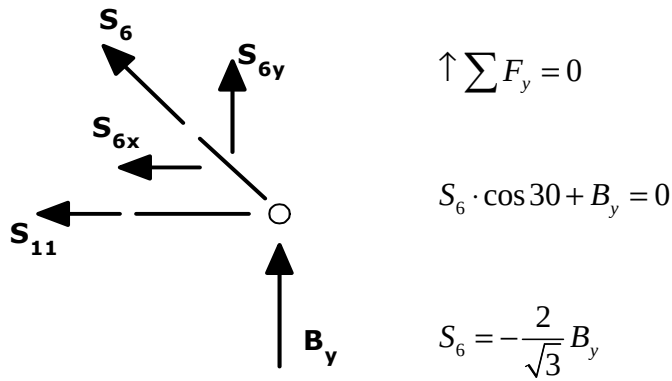
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

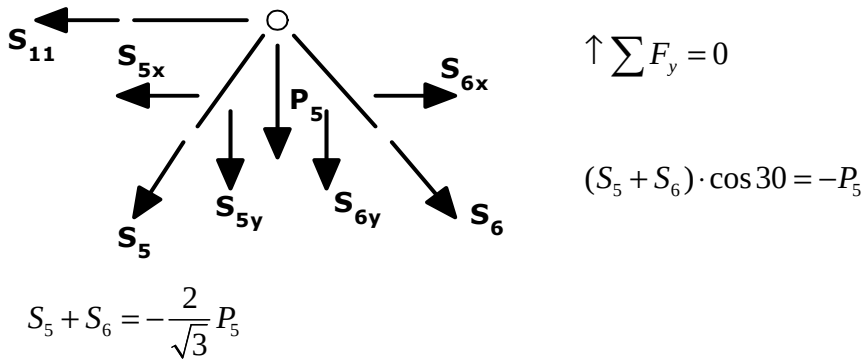
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

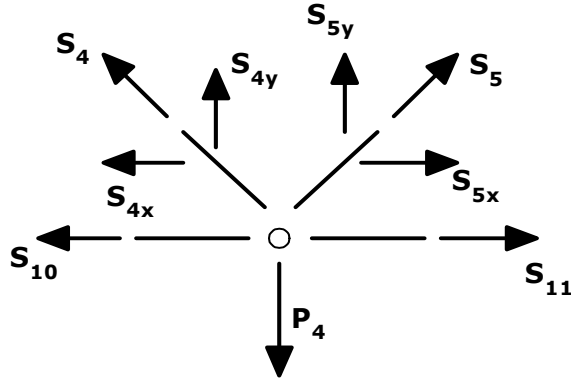
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

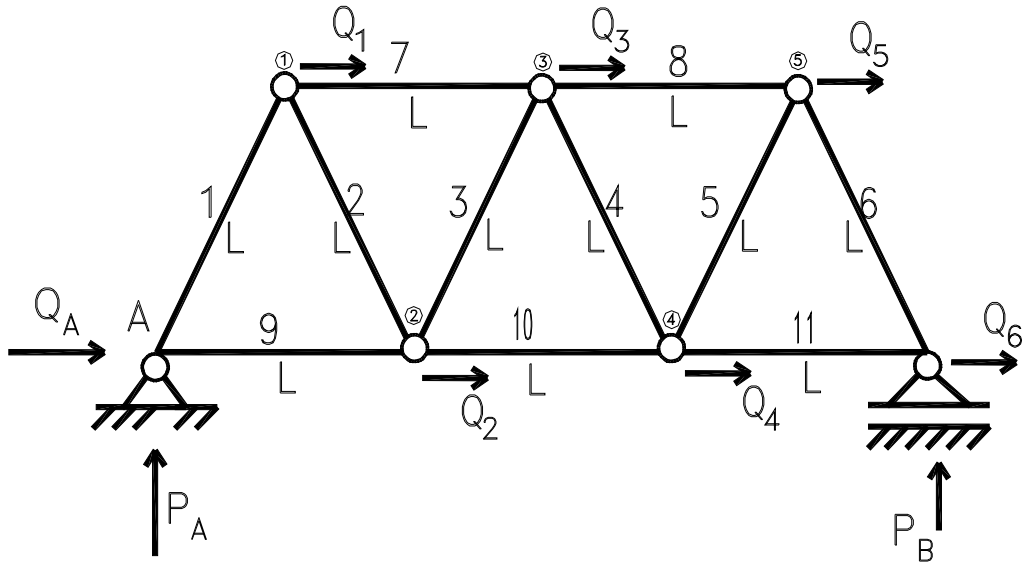
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

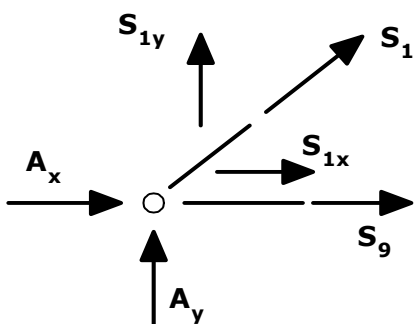
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

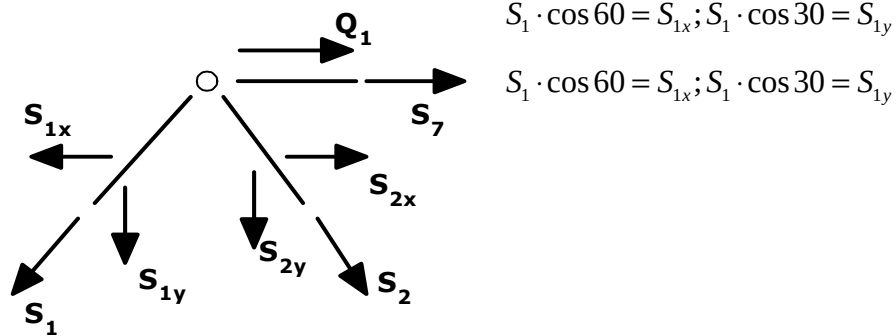
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

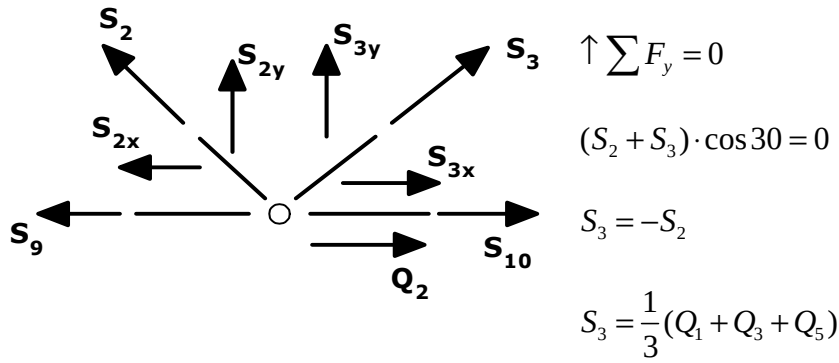
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

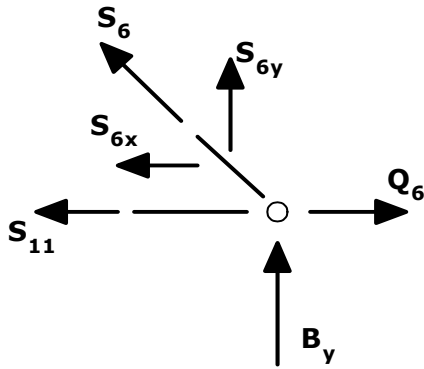
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

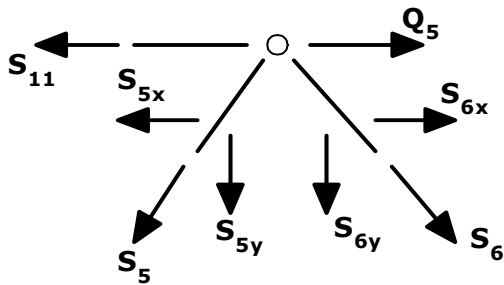
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

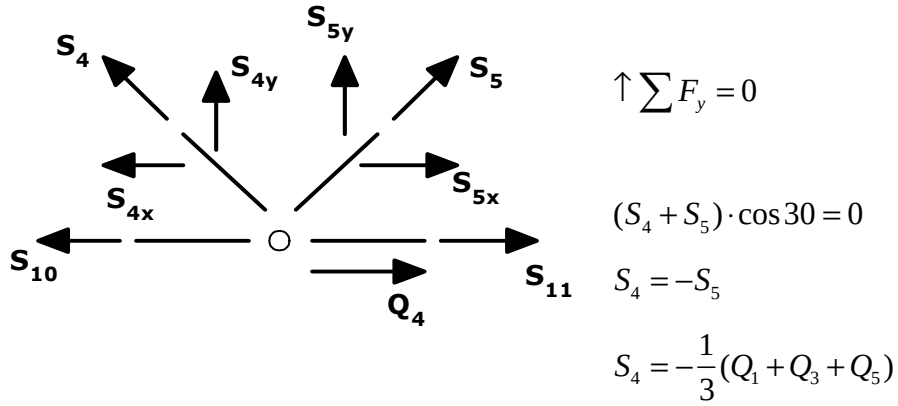
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemekten bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştı. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozmesini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

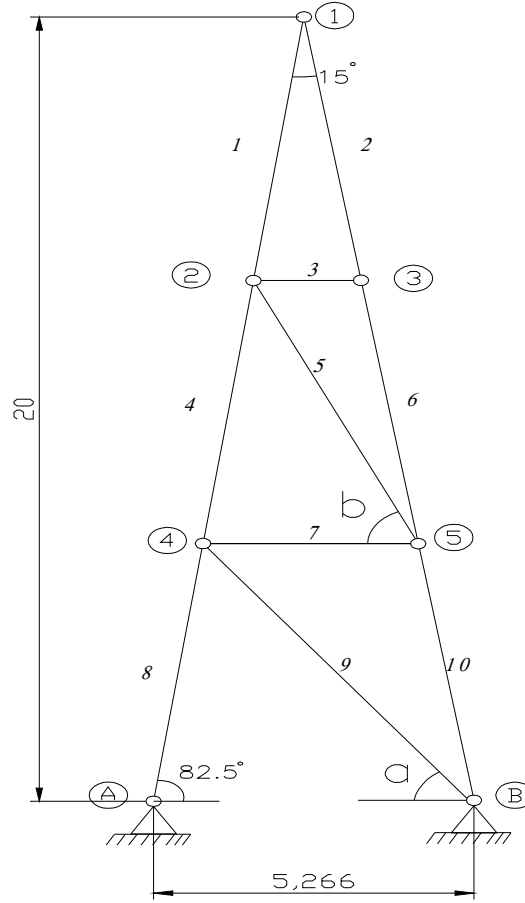
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
 Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
 X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
 Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
 X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
 Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
 X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
 Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
 X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
 Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümden elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

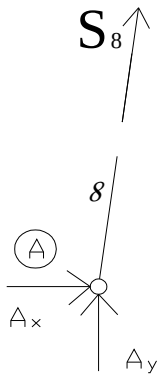
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

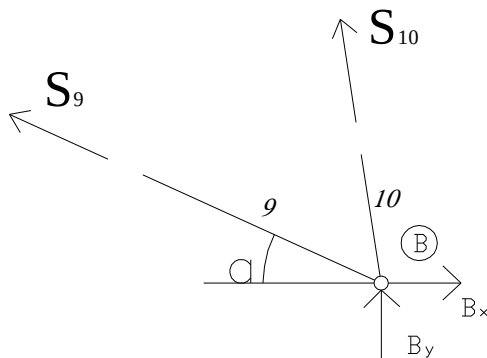
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

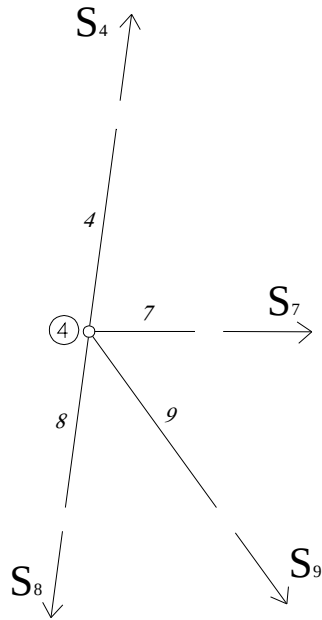
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

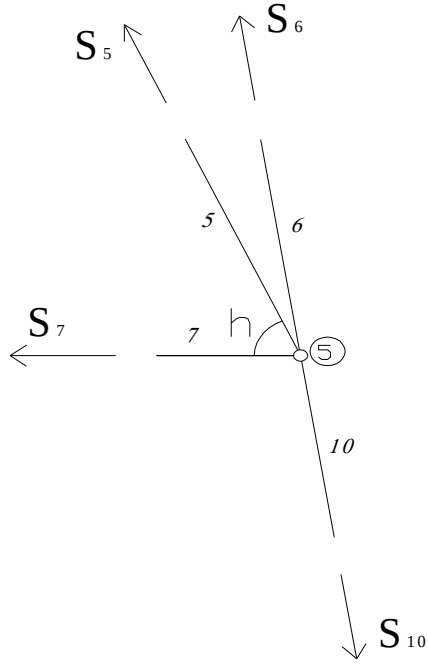
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

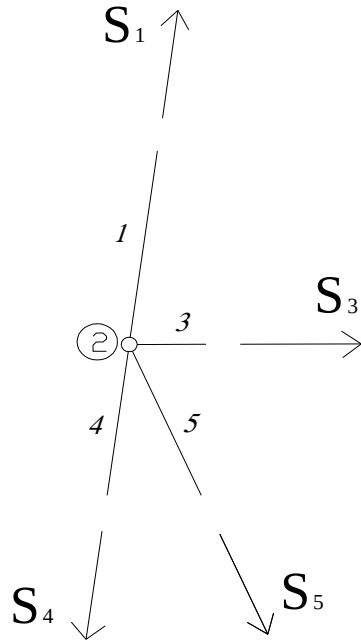
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

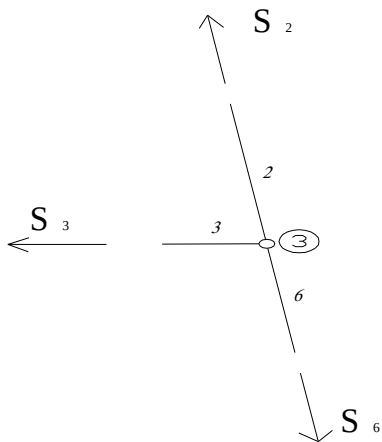
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

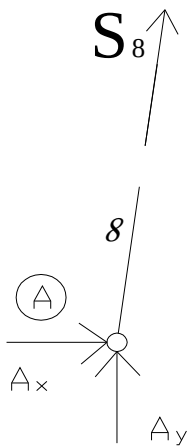
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

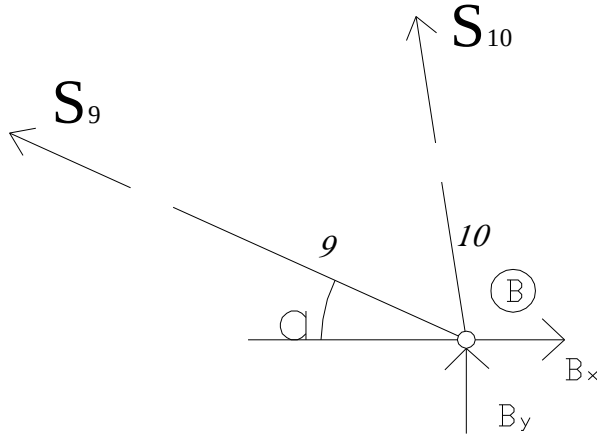
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

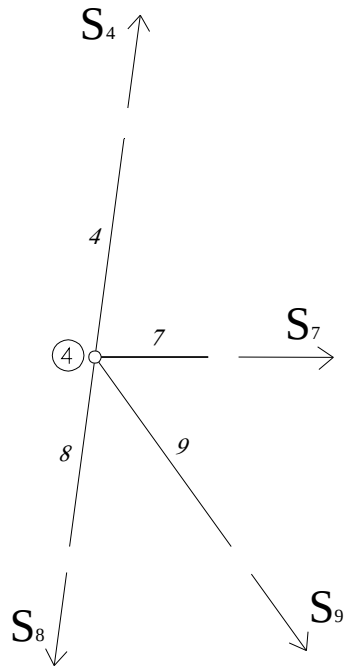
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

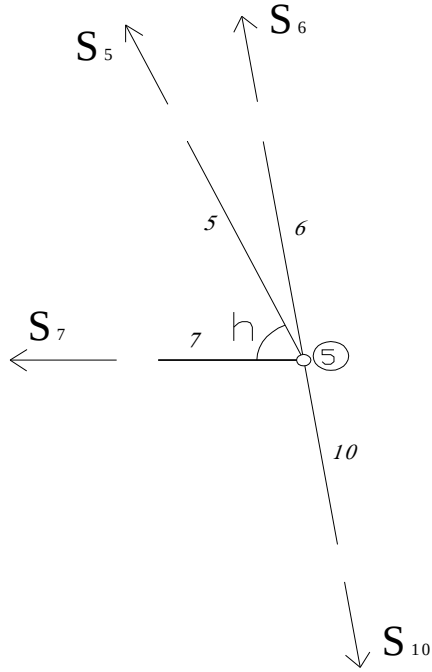
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

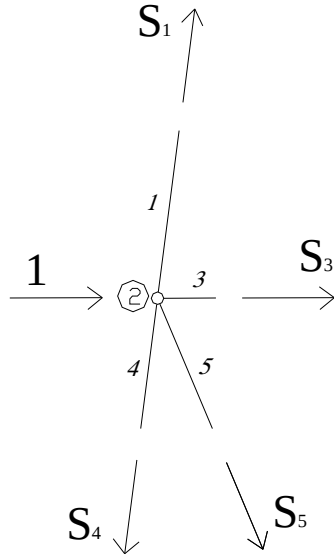
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

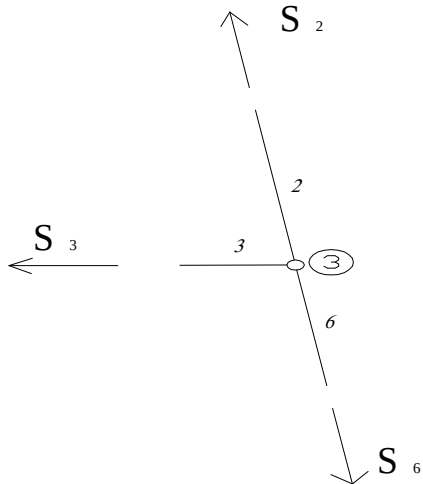
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

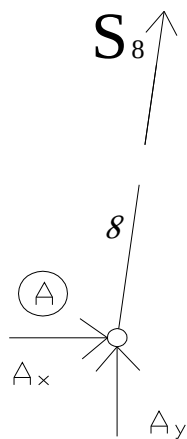
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

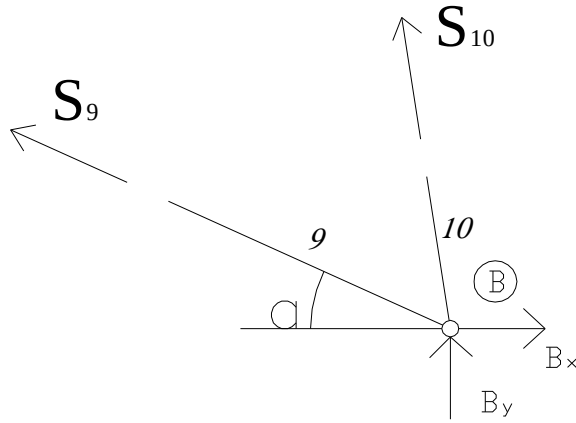
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

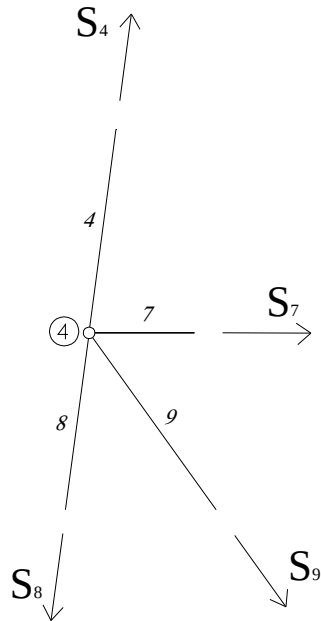
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

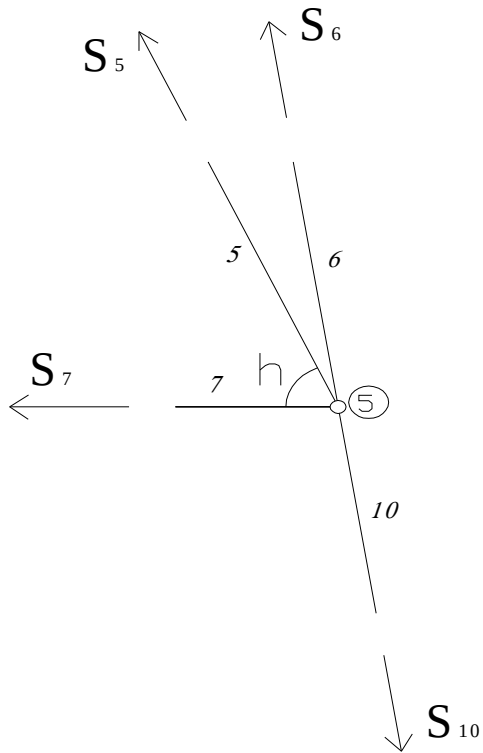
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

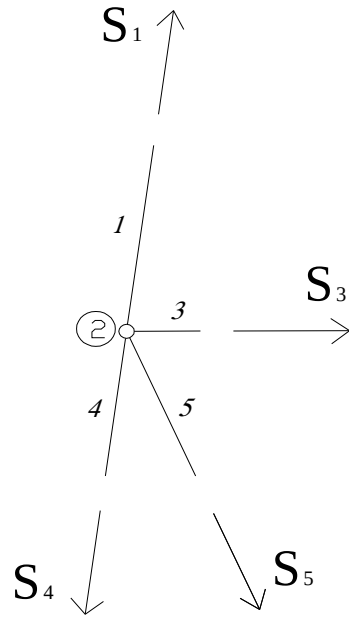
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

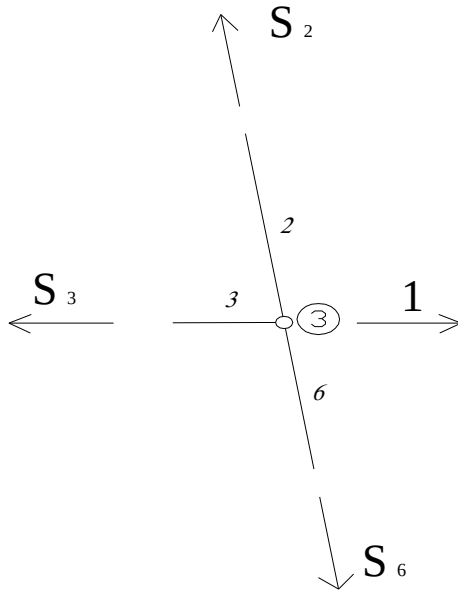
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_2 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_2 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

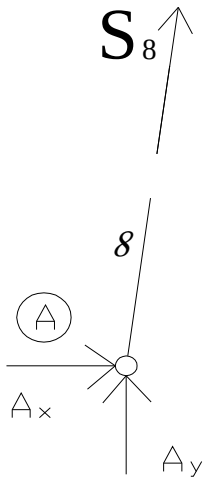
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

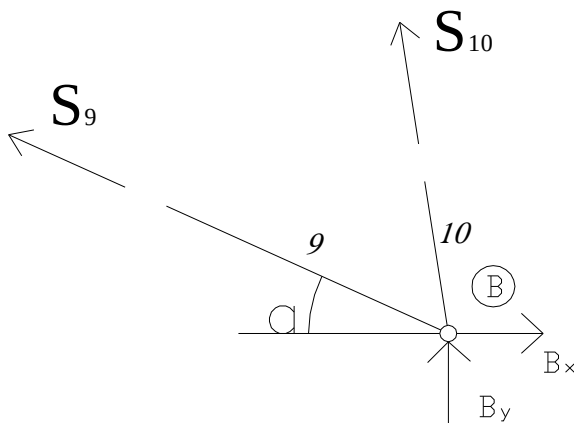
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

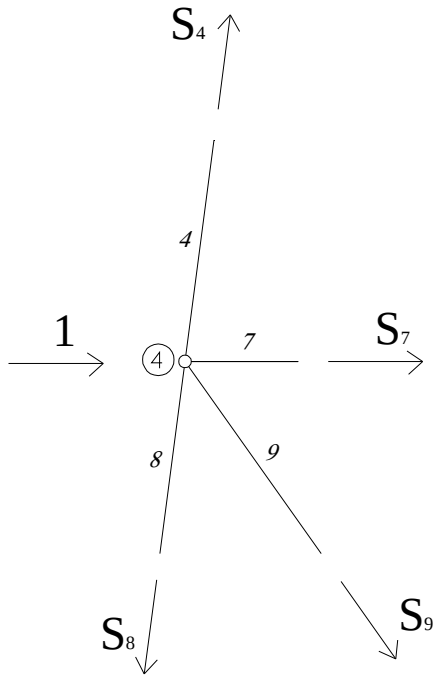
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515$ ve $S_{10} = 0,00$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

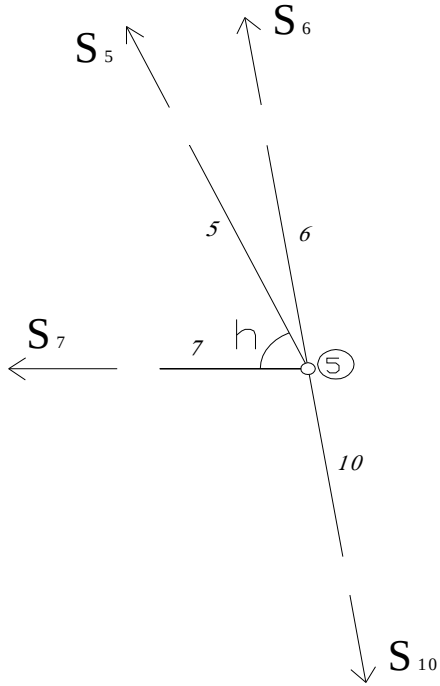
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

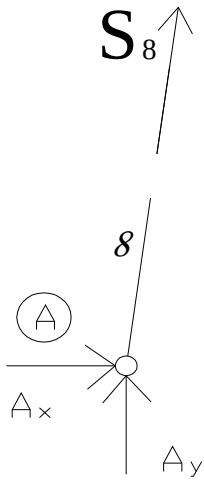
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

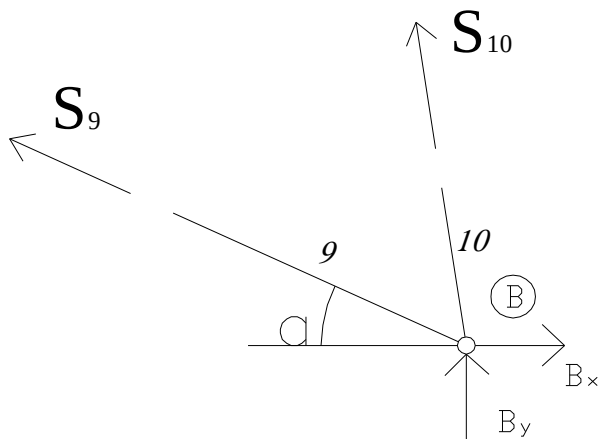
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

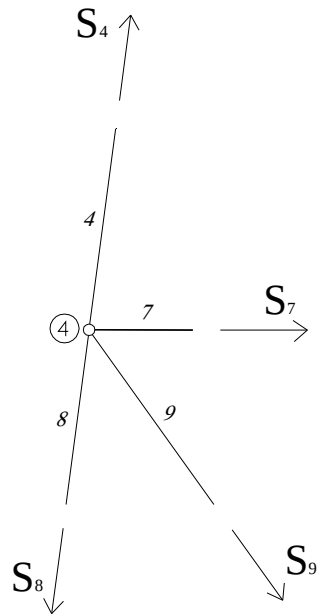
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

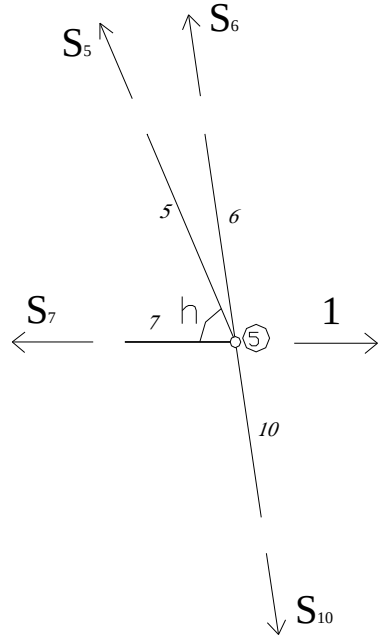
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

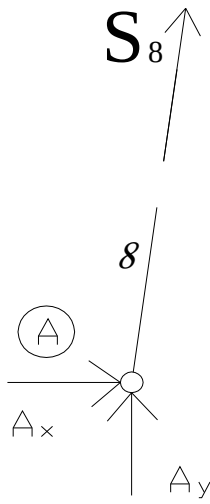
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

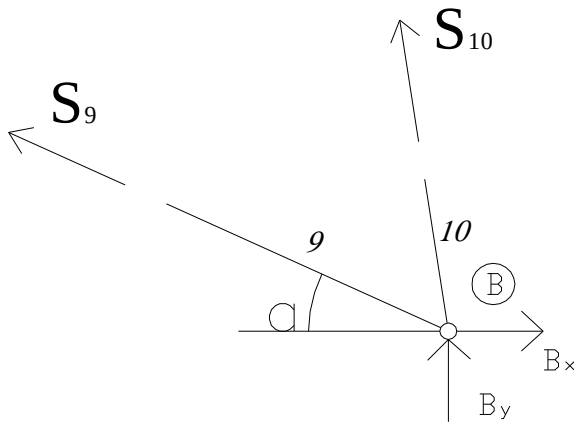
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

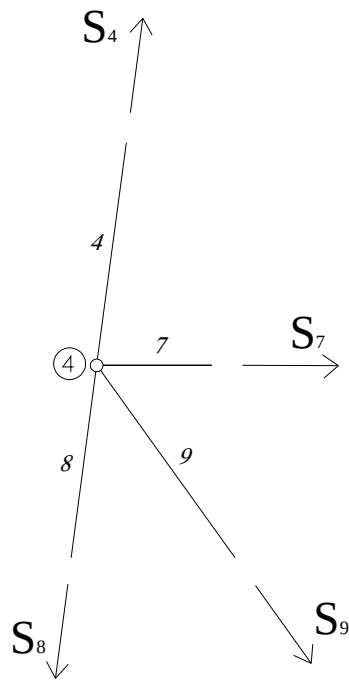
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

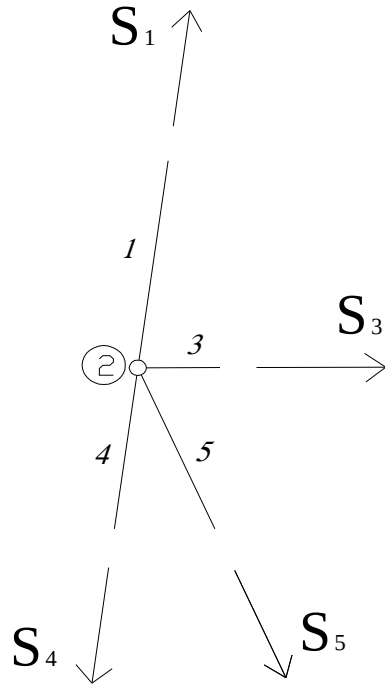
$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

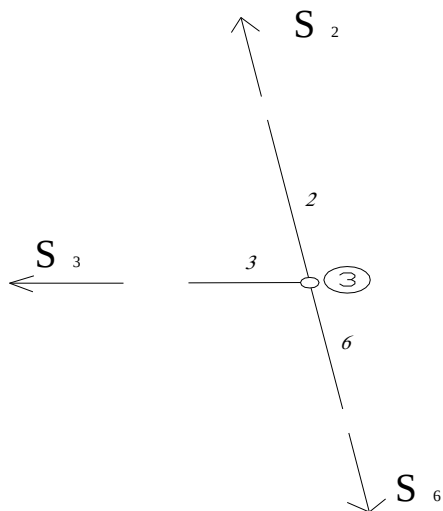
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

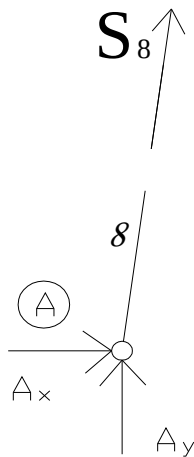
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

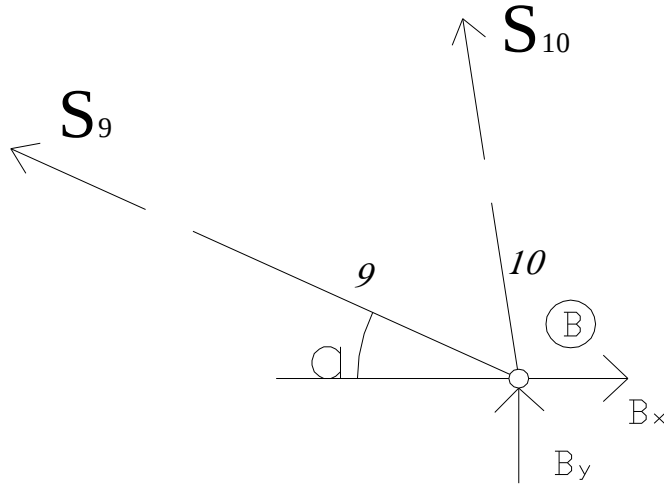
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

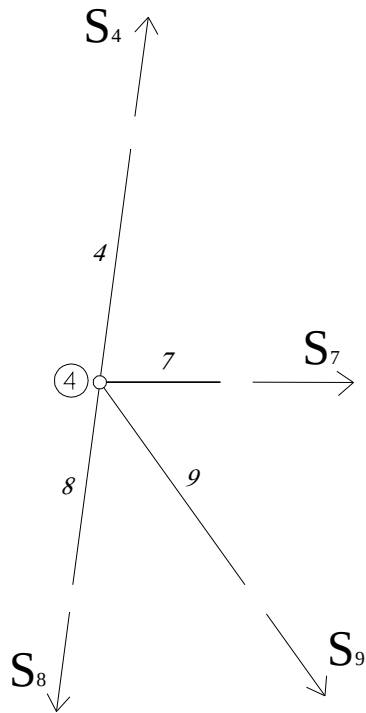
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,252 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

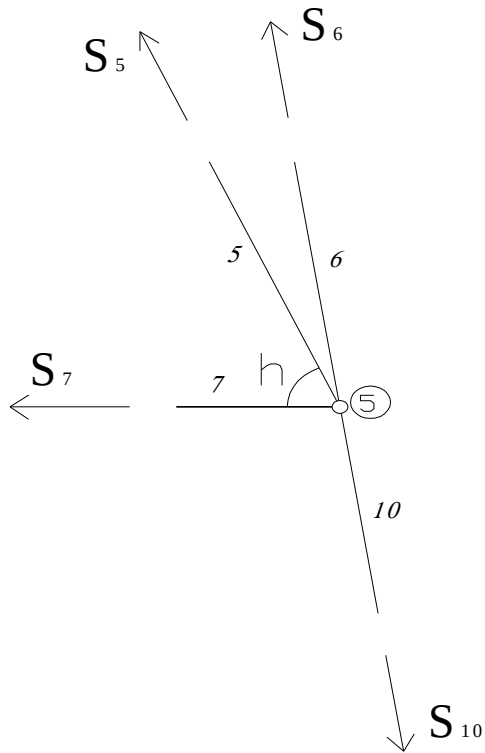
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

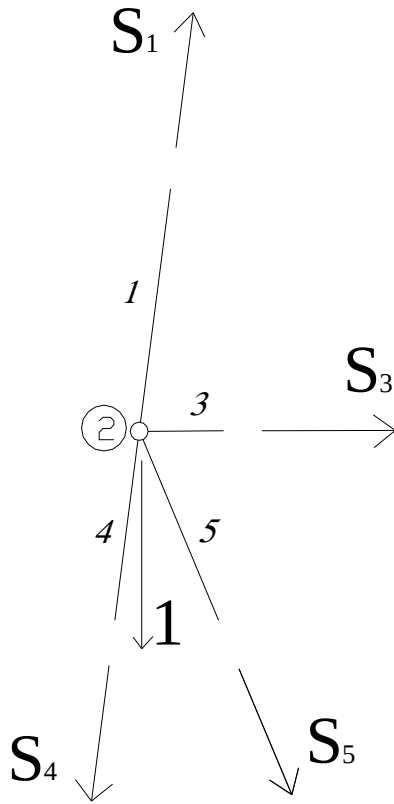
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

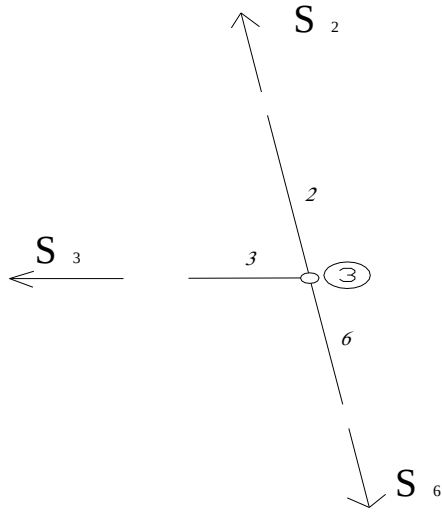
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

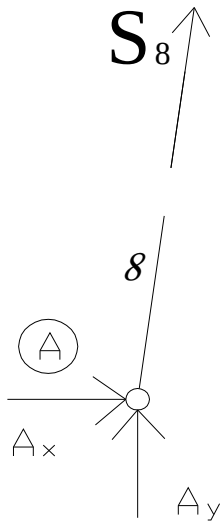
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

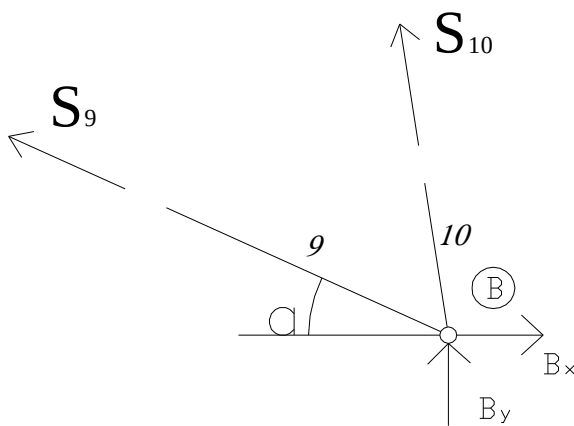
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

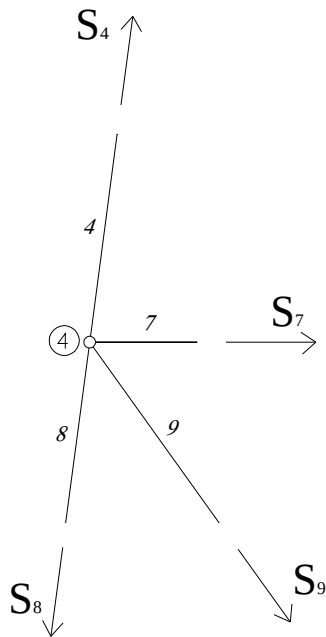
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

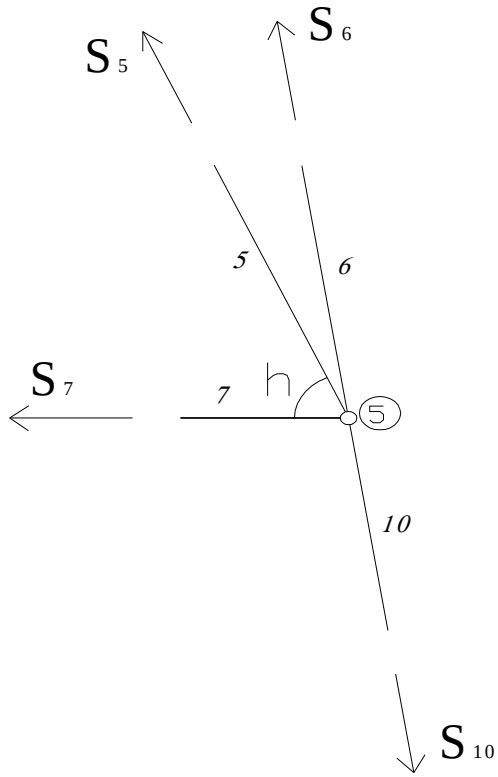
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

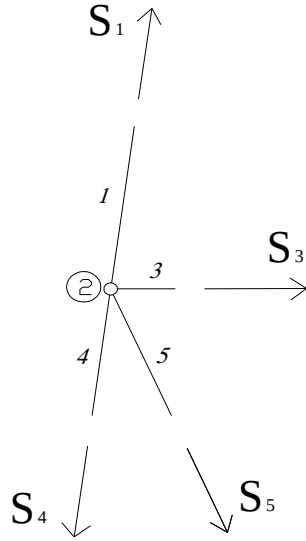
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

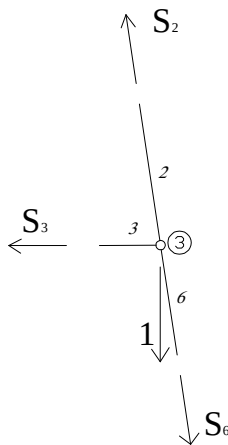
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

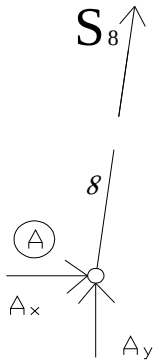
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

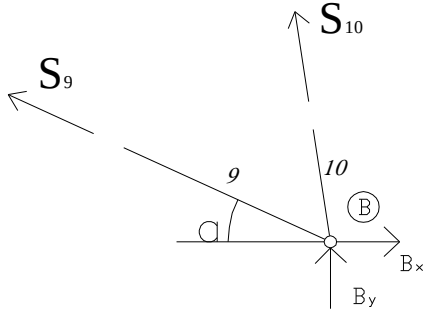
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

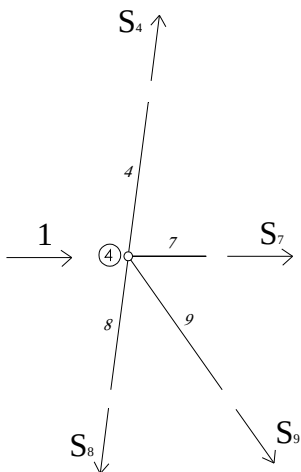
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

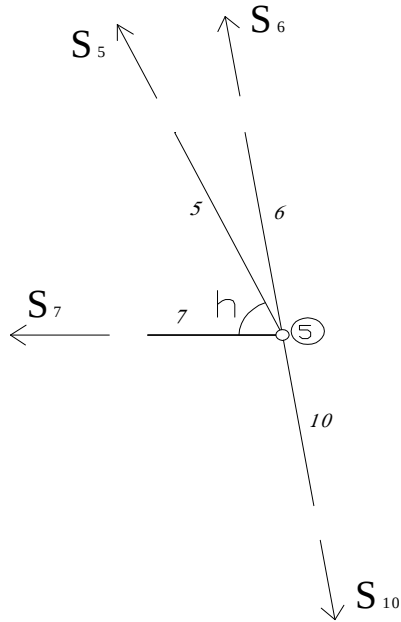
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

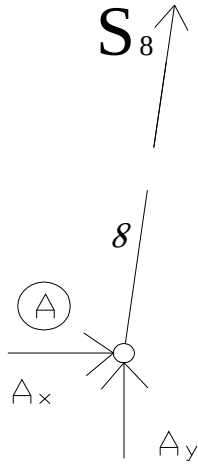
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

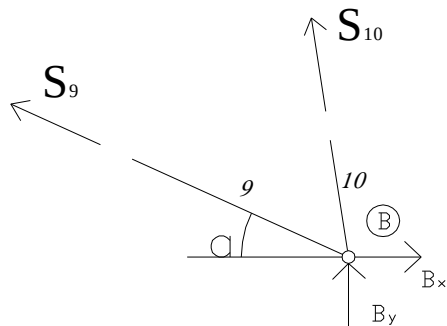
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

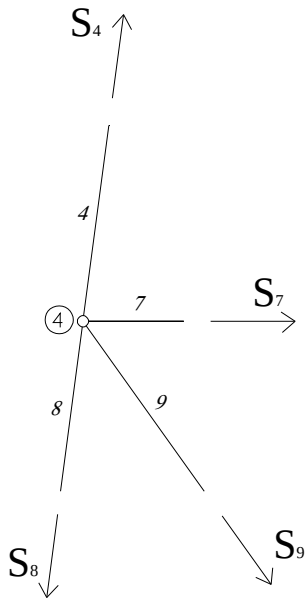
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

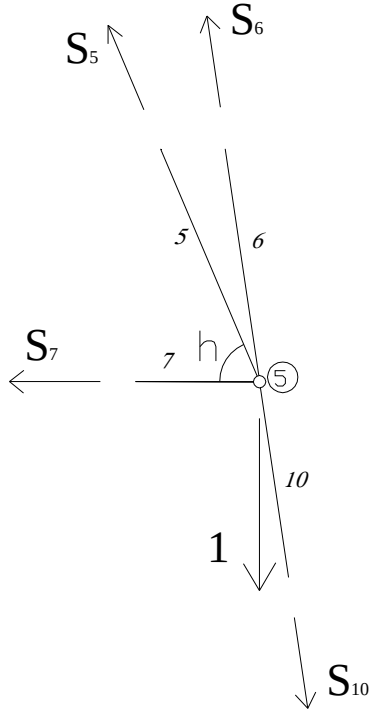
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_4] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
  np=100
  write(*,1)
1  format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
  read(*,3) dosya
3  format(a12)
  open(10,file=dosya)
  read(10,*) icubs,ideps
  write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
  write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
  read(*,*)
  write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
  do 22 i=1,icubs

```

```

      read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
      write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
      do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
          bunye(i,j)=0.
        30 continue
      27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
      read(*,*)
      do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
      55 continue
      89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
      read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
      read(10,*) nyd
      do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
      70 continue
      do 60 i=1,nyd
        read(10,*) Q(i)
      60 continue

c   mt*b*m
      read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
      call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
      write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
      do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
      46 continue
      read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
      call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
      write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
      do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
      48 continue
      read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
      call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
      write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```

```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```



```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTIGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

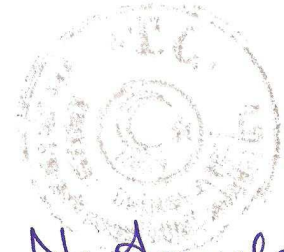


Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODAL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castigliona metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

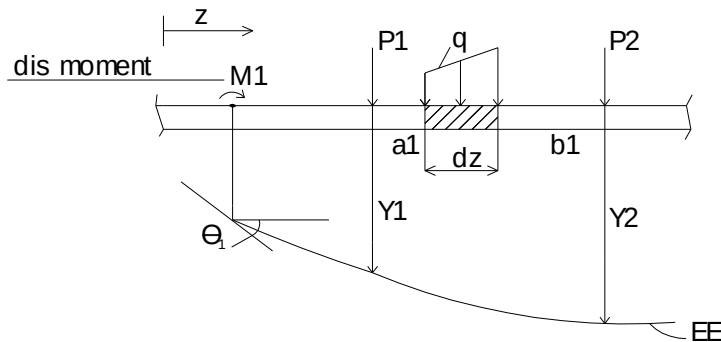
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

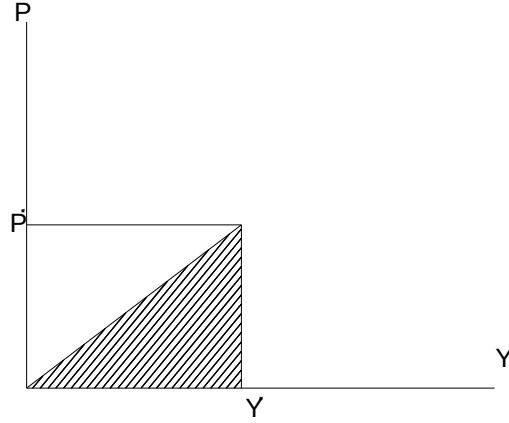
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

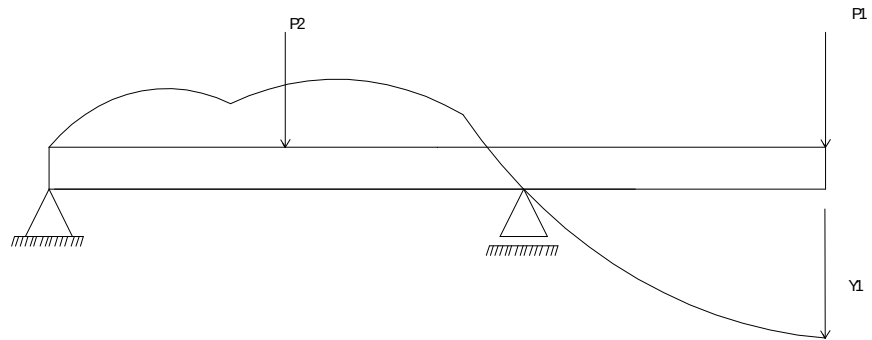
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

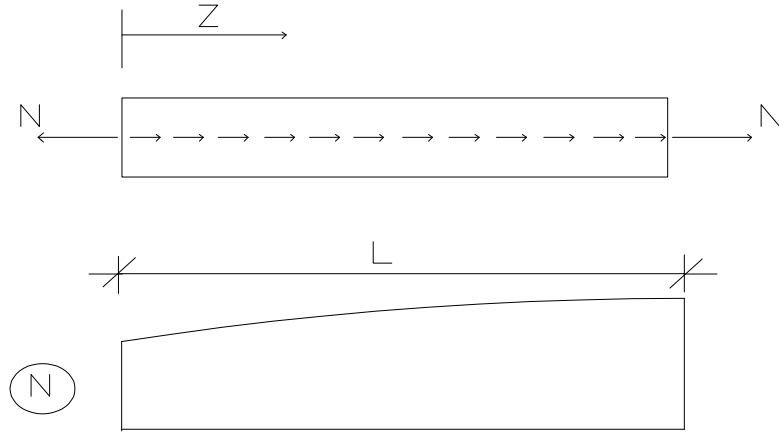
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilerek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet olduğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değiştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değiştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değiştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönülür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değerinin M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

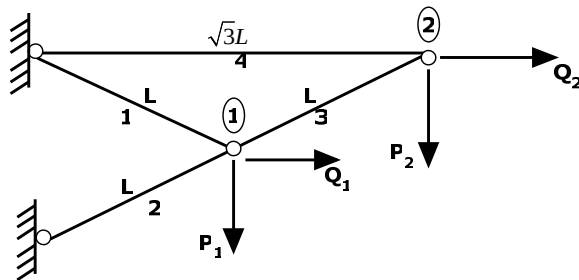
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

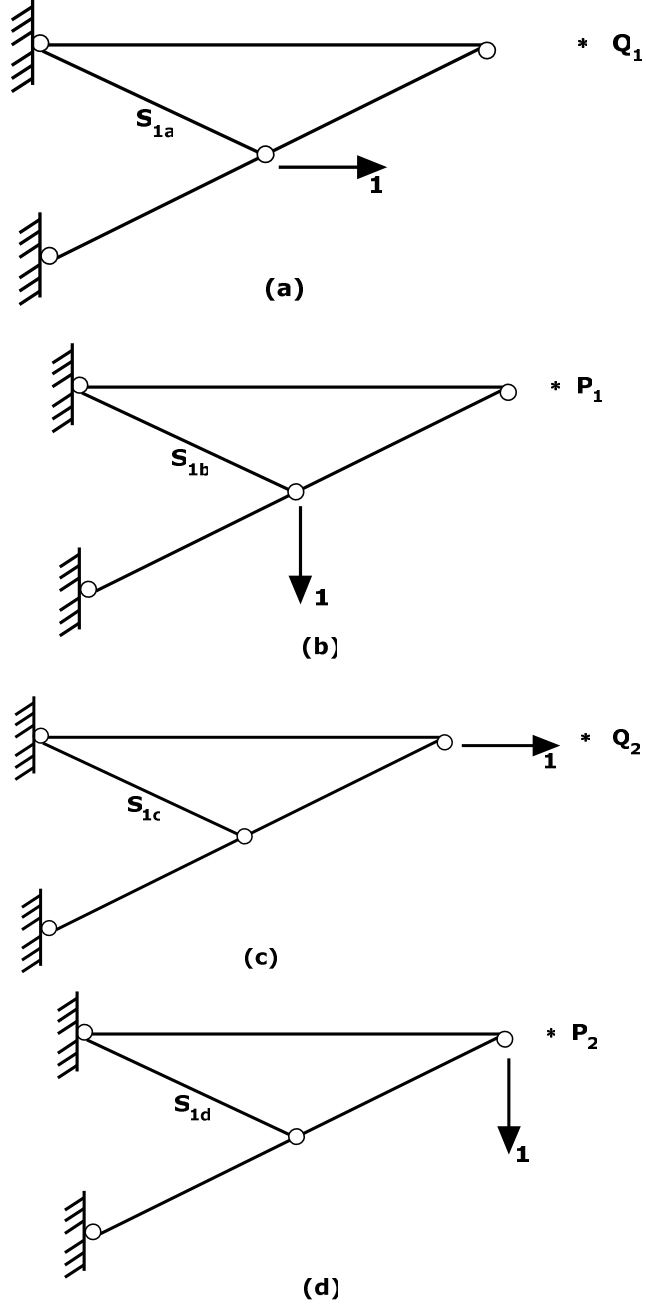
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyonundan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu gör÷lür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

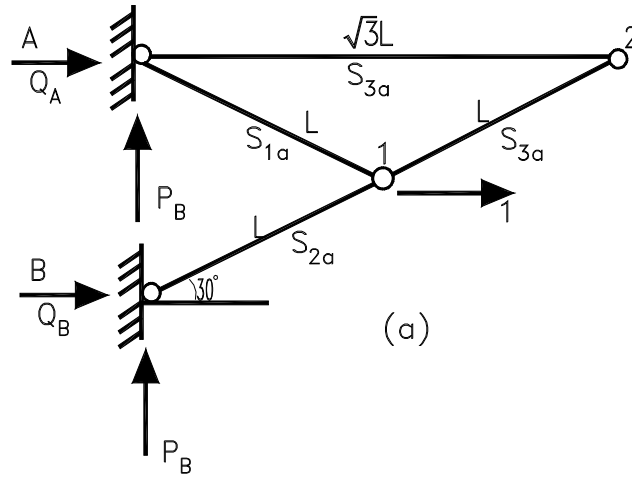
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

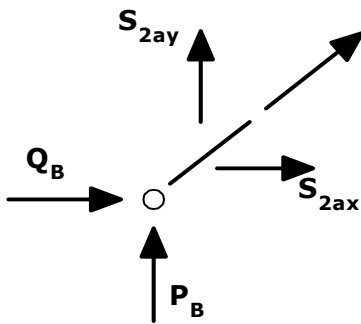
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

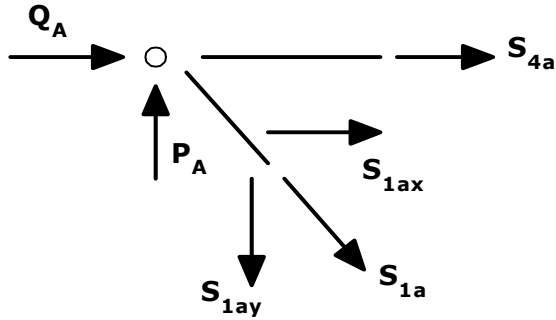
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

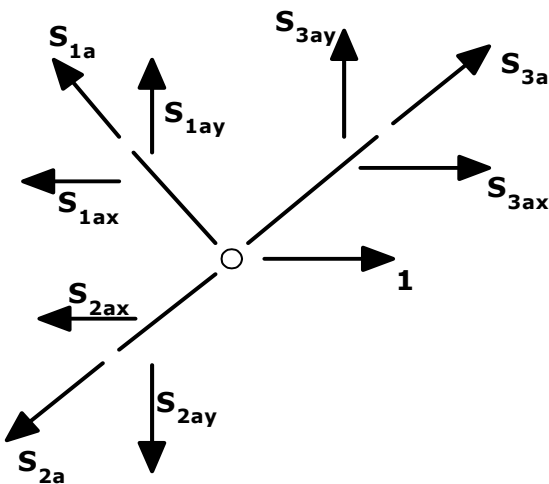
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

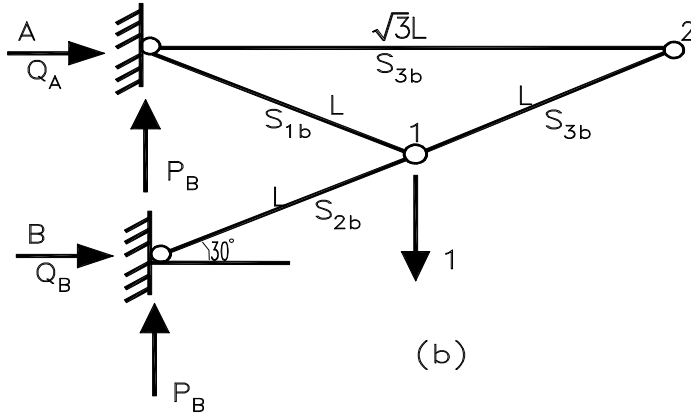
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

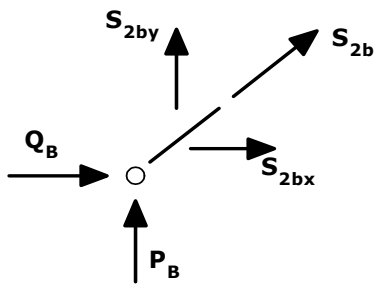
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

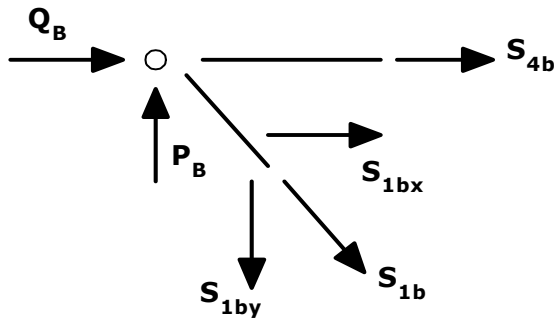
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

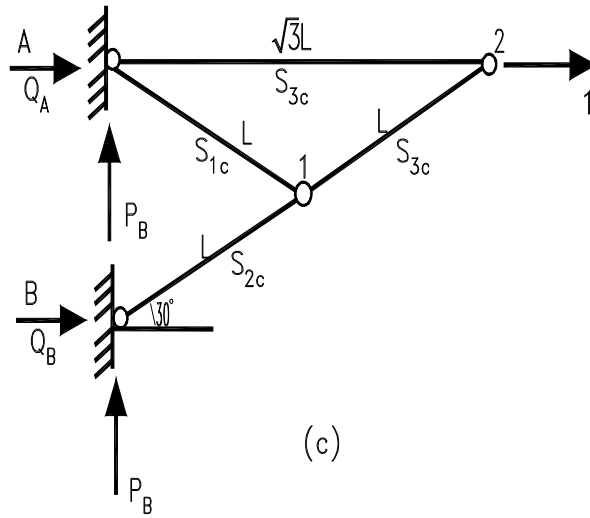
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

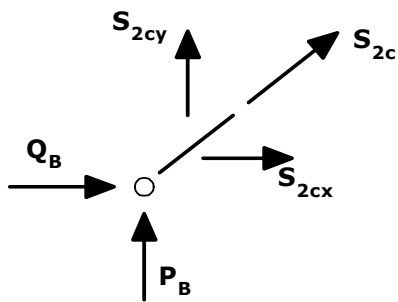
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

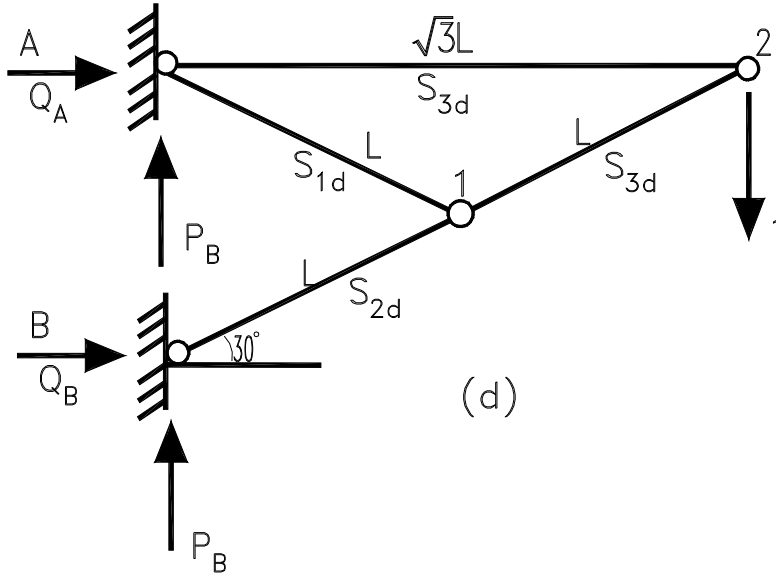
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

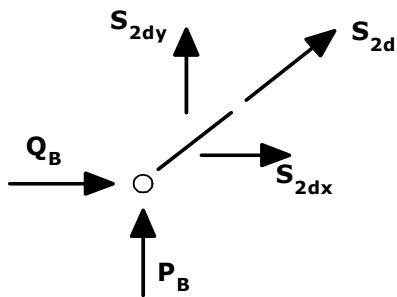
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

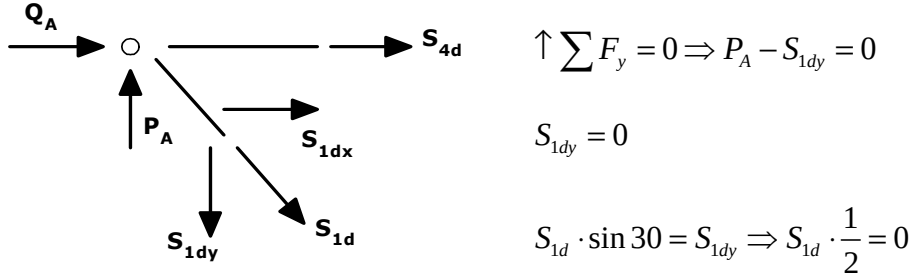
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

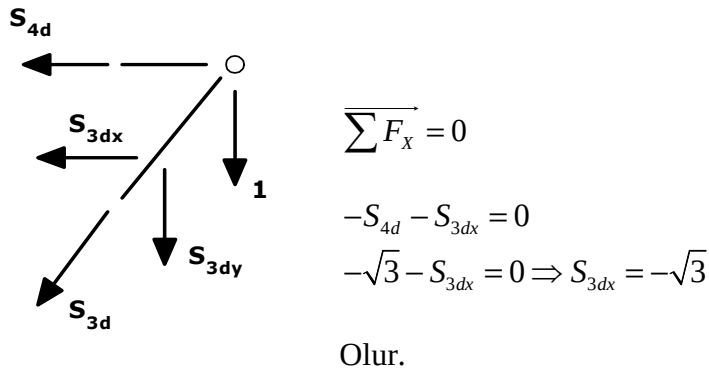
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

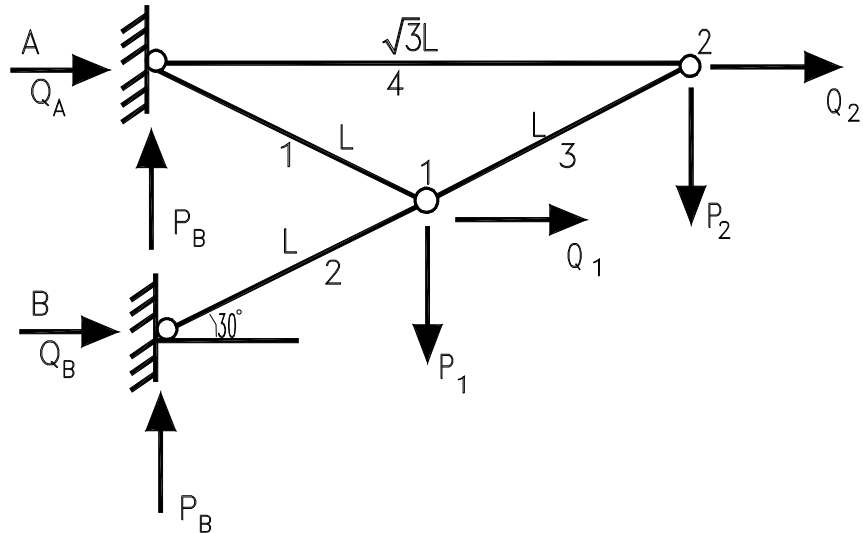
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

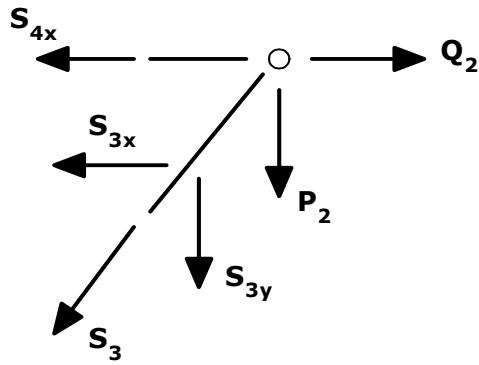
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

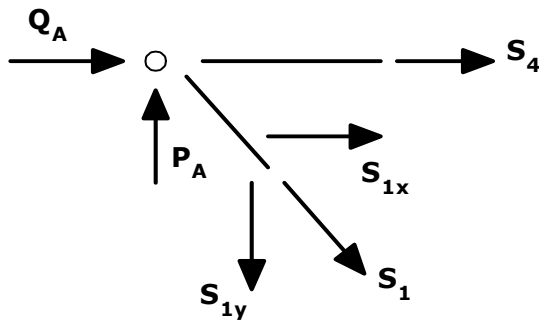
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

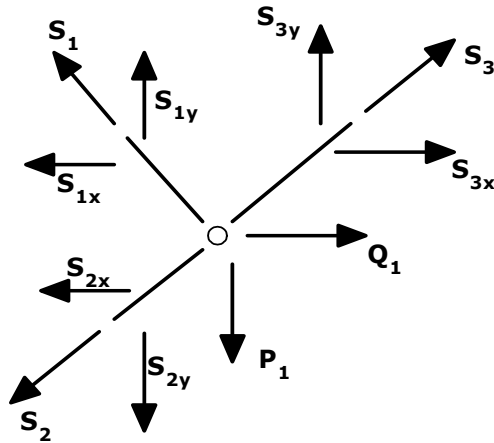
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

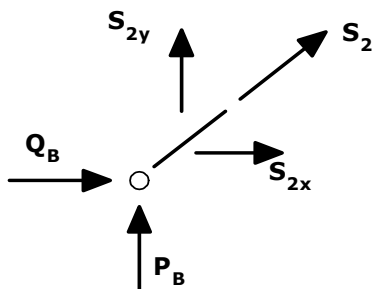
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

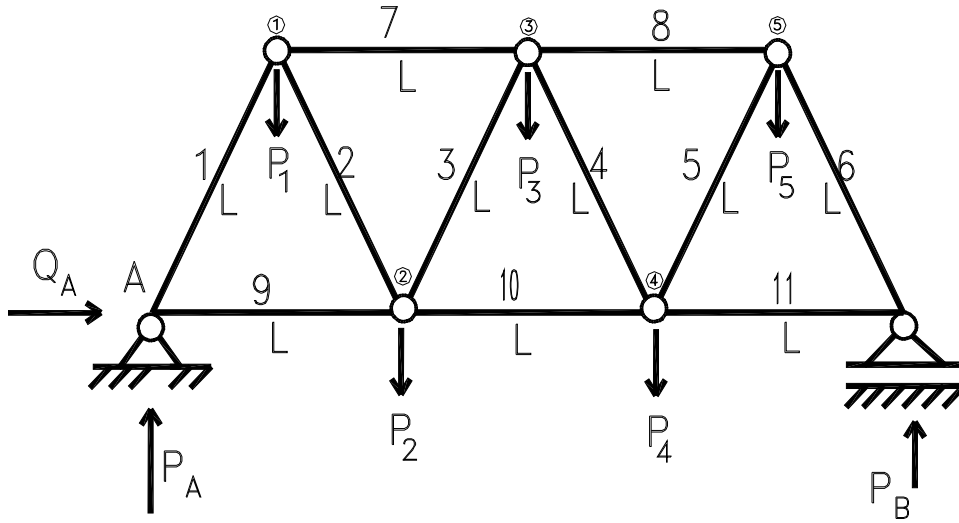
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2}P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2}P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2}P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{2}{3}P_4 + \frac{5}{6}P_5$$

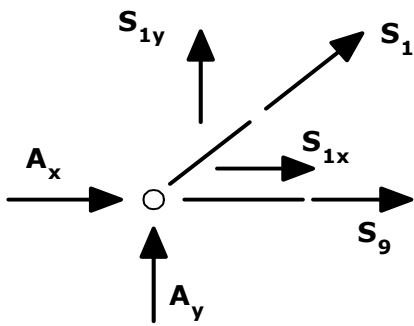
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{2}{3}P_4 - \frac{5}{6}P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{3}P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

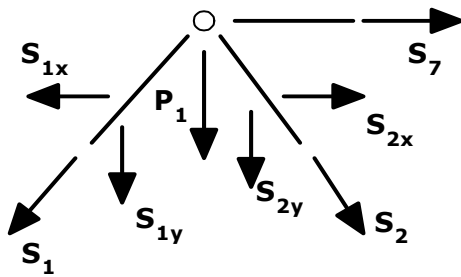
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

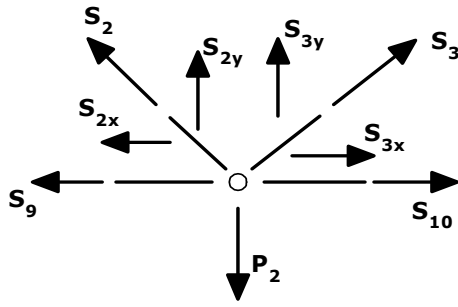
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

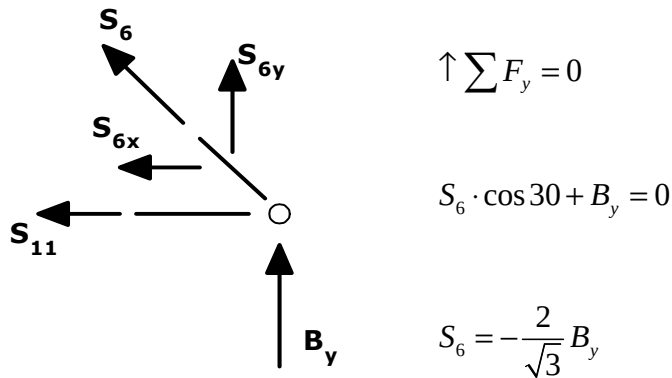
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

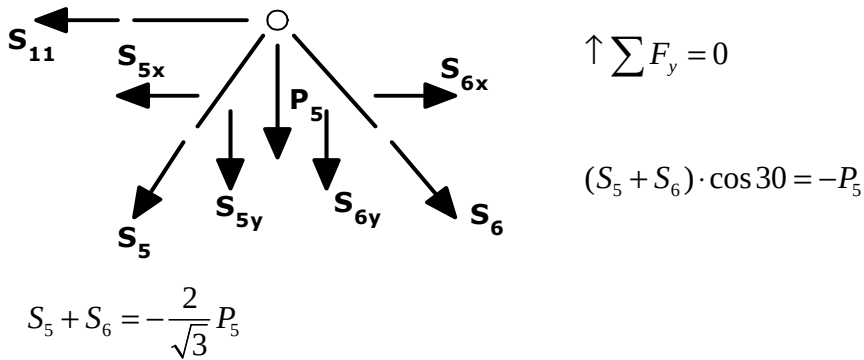
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

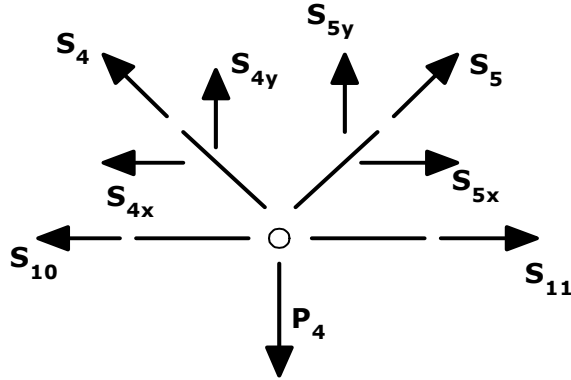
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

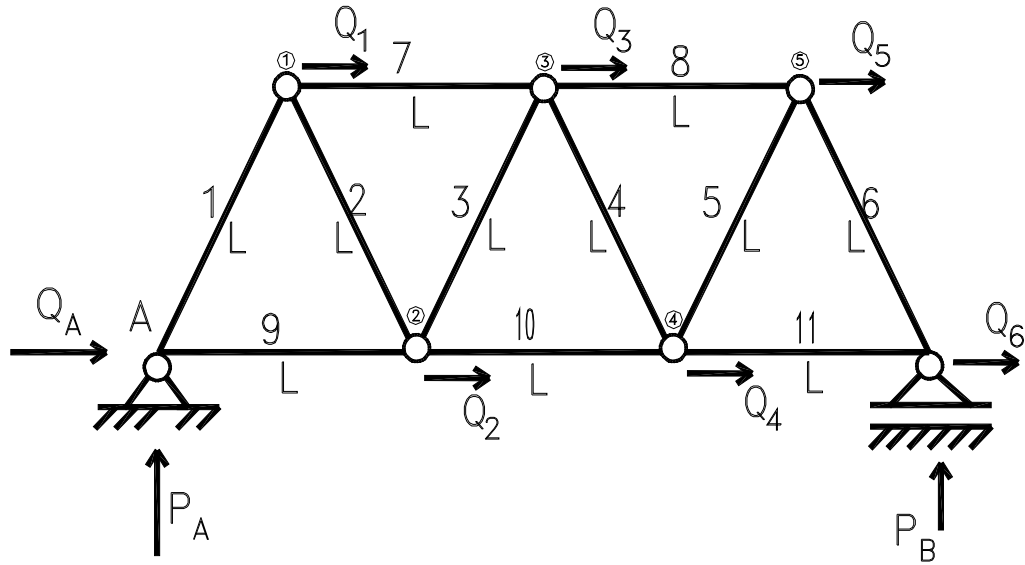
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

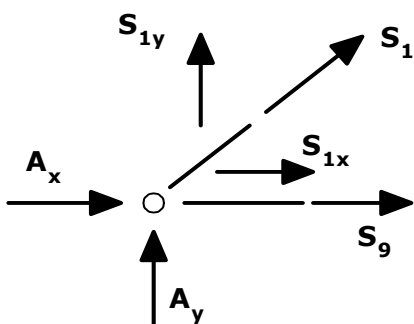
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

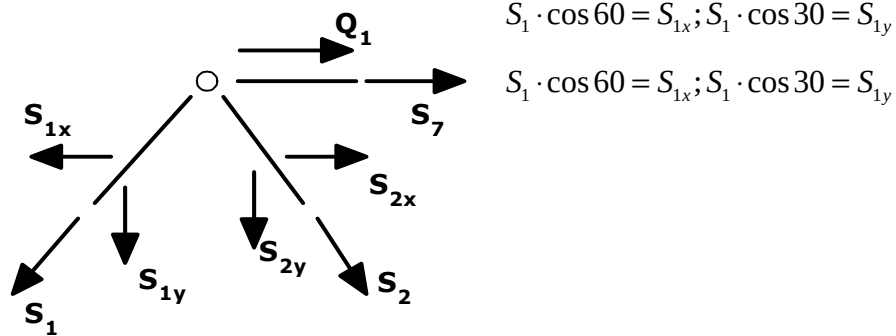
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

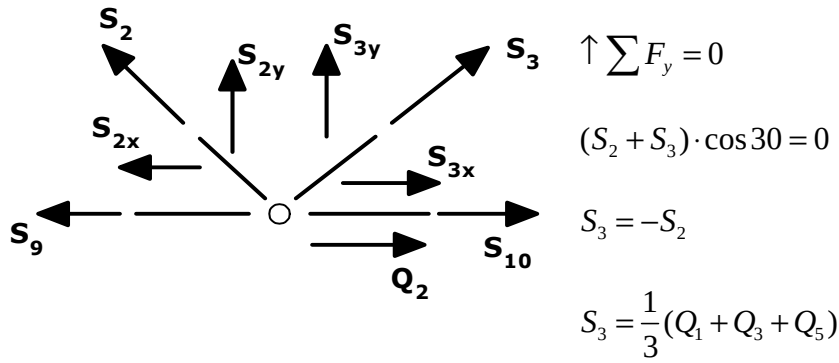
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

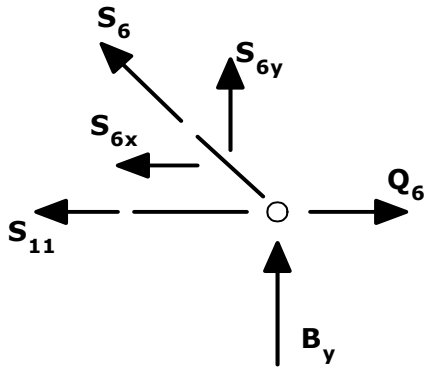
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

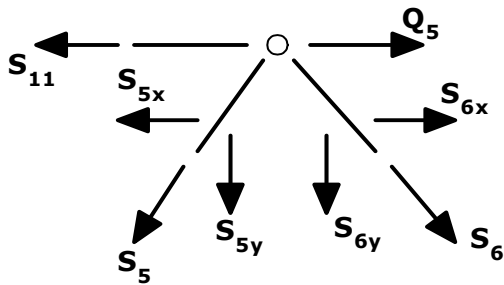
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

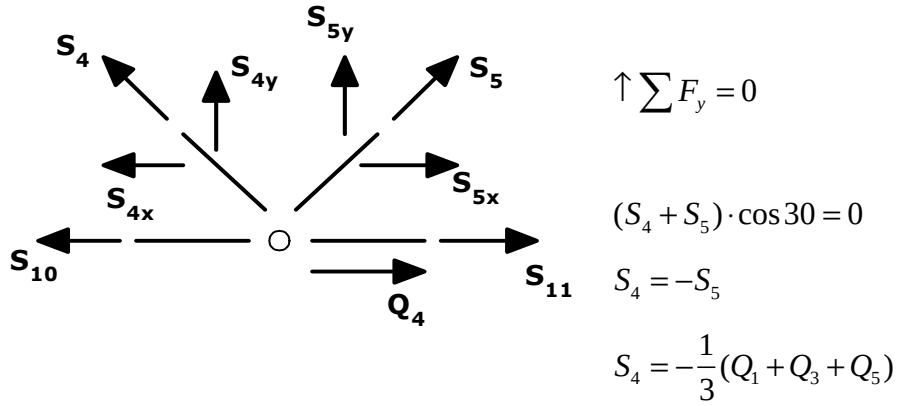
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemekten bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozisini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

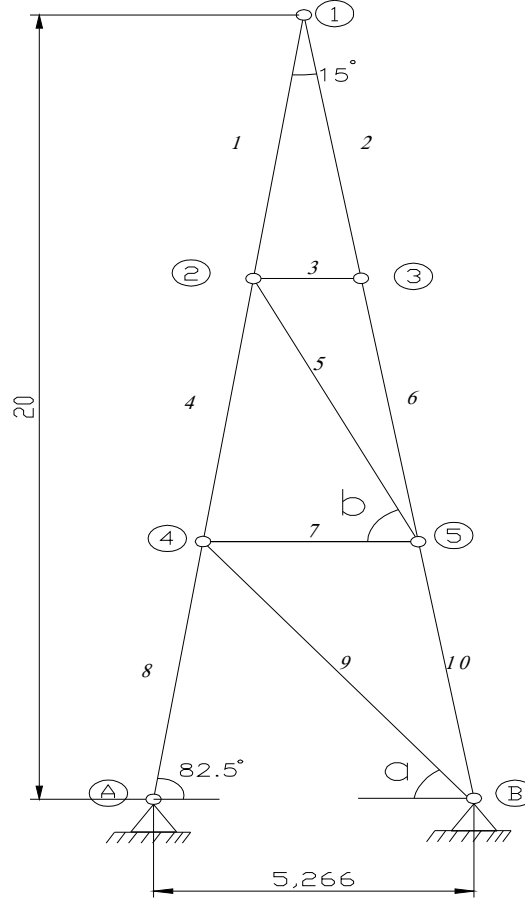
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
 Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
 X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
 Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
 X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
 Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
 X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
 Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
 X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
 Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümde elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

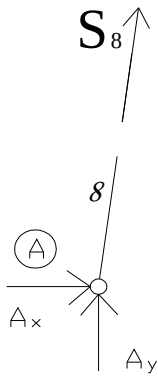
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

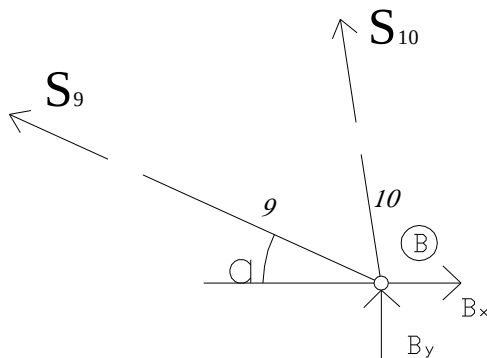
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

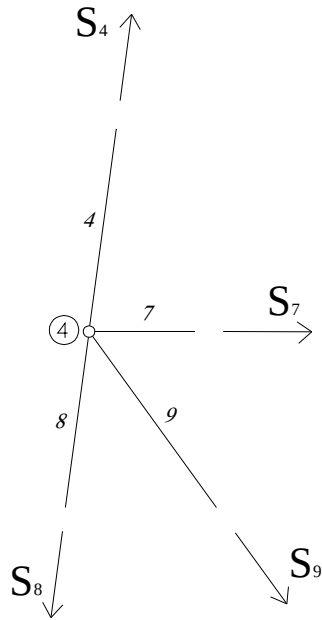
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

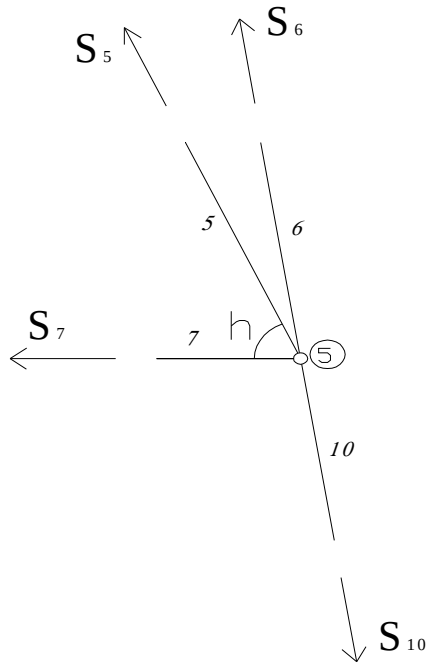
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

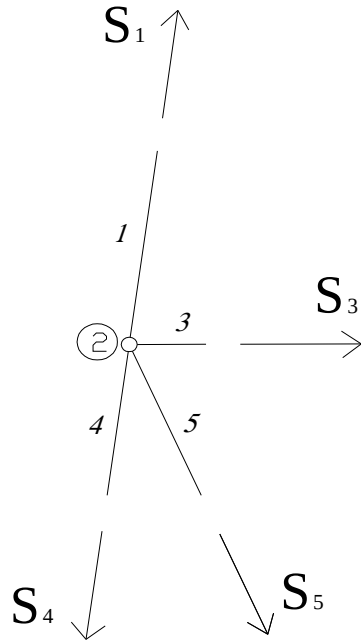
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

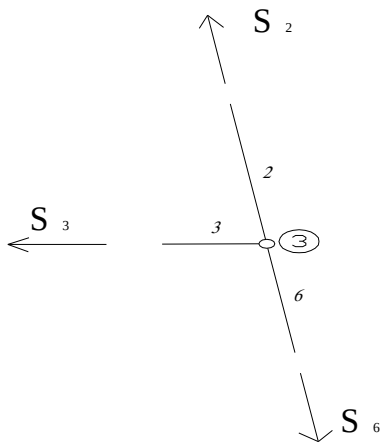
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

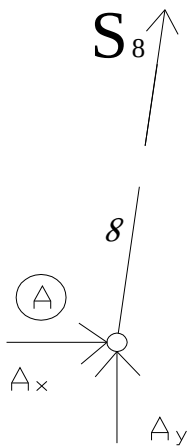
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

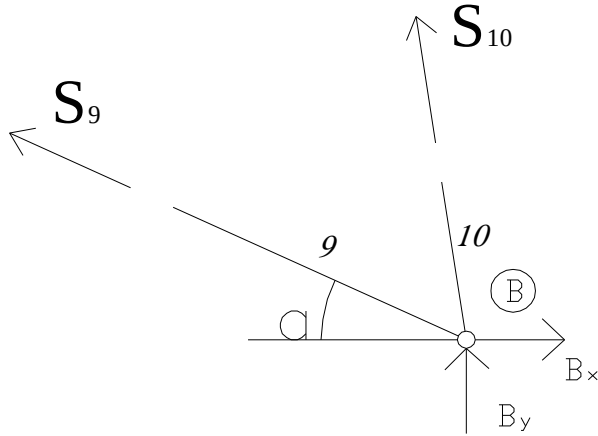
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

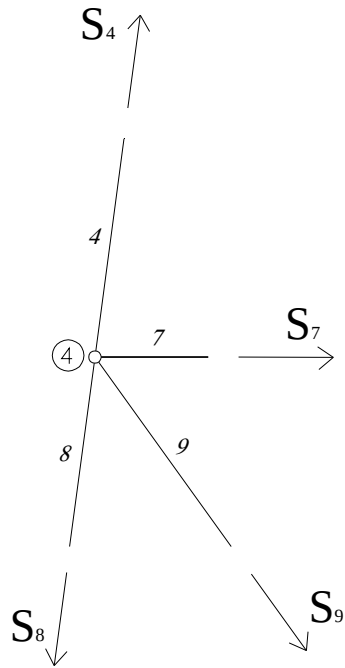
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

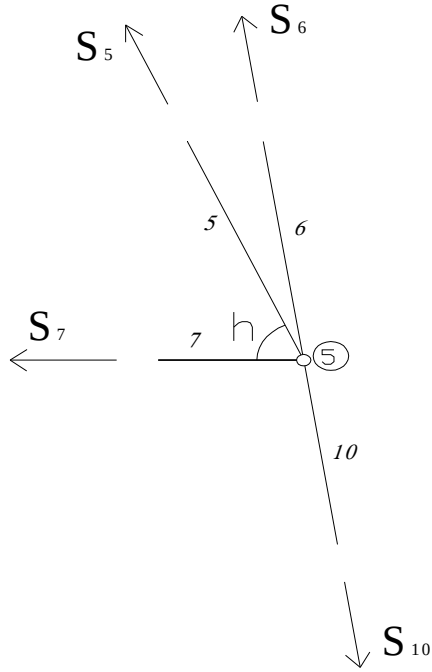
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

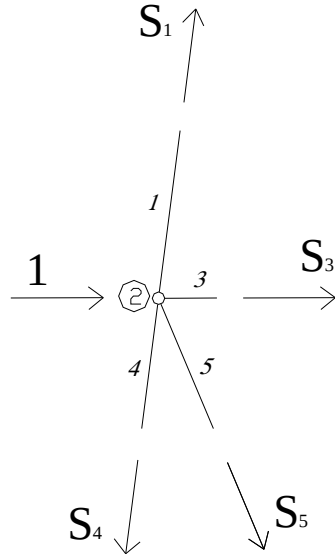
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

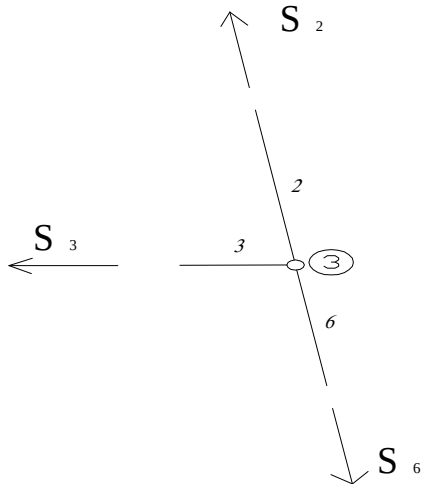
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

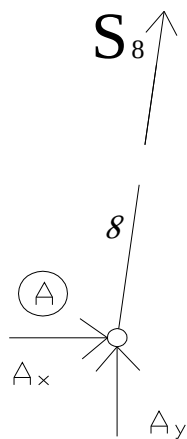
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

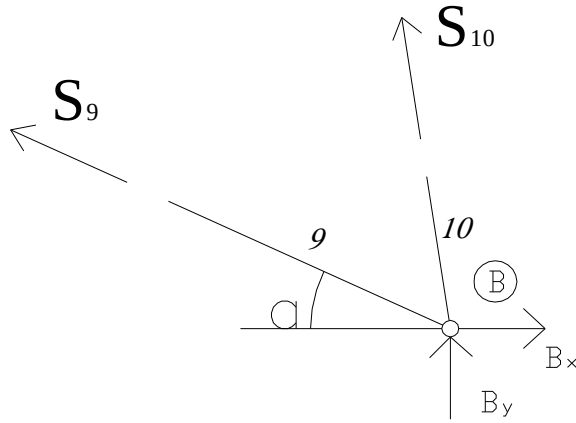
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

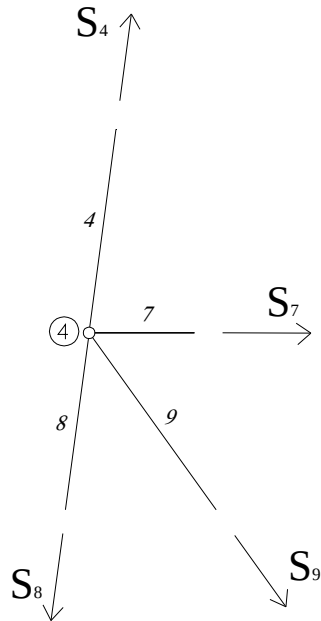
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

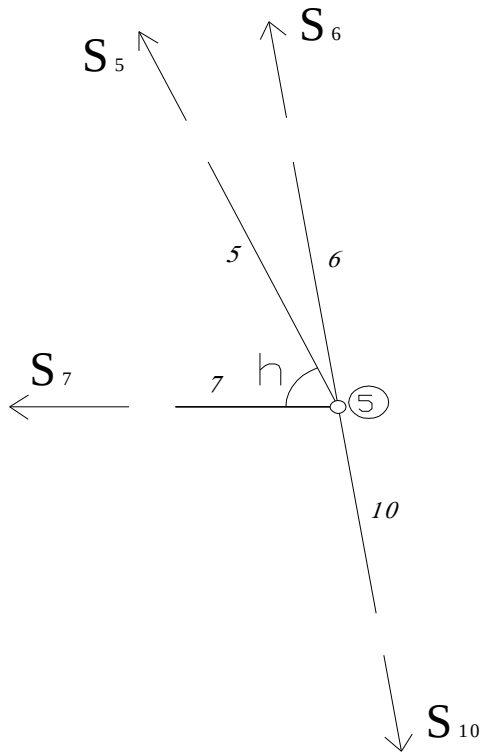
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

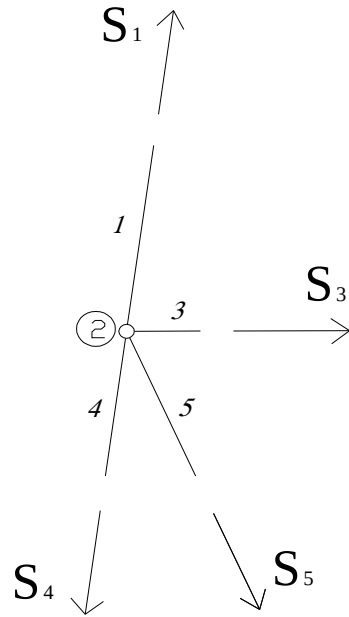
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

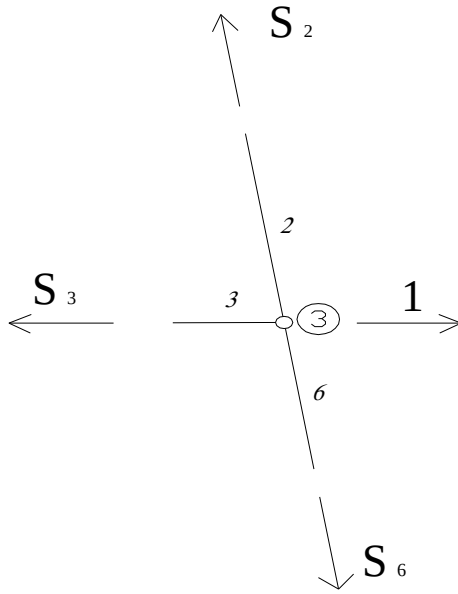
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_2 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_2 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

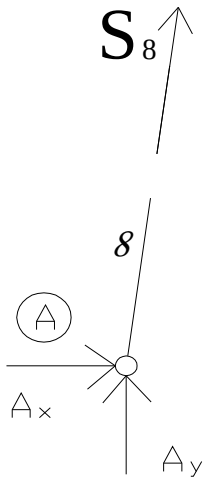
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

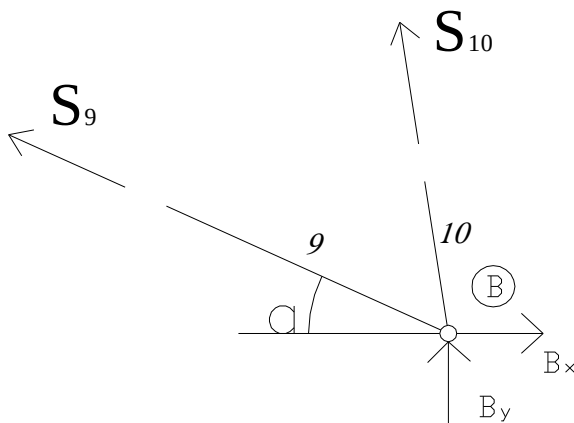
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

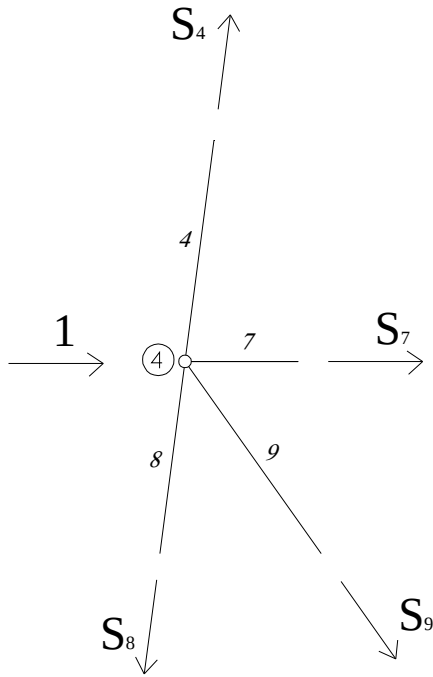
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515$ ve $S_{10} = 0,00$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

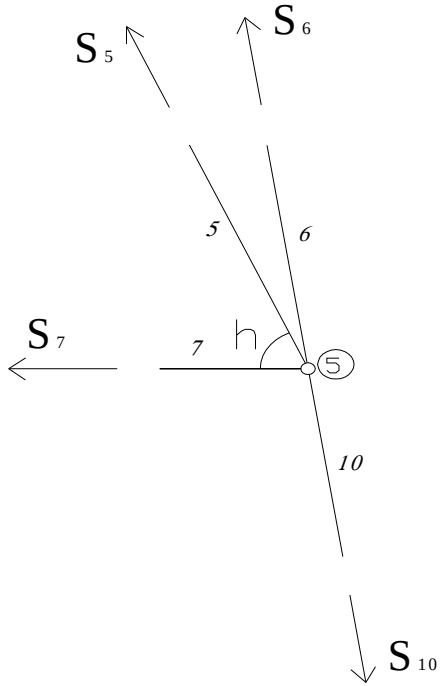
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

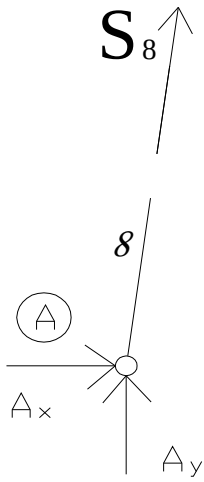
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

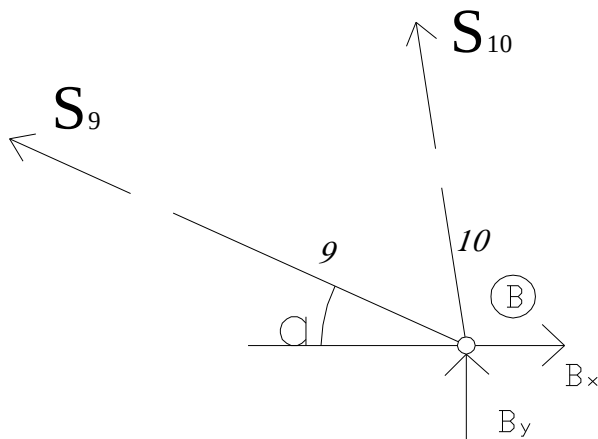
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

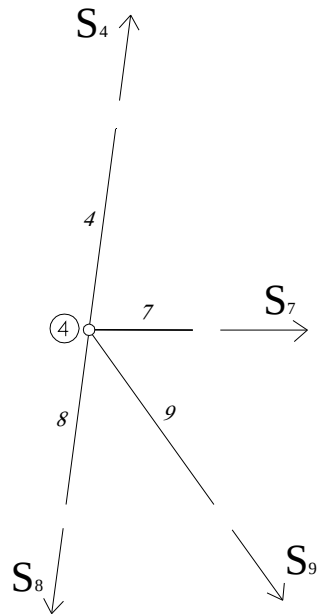
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

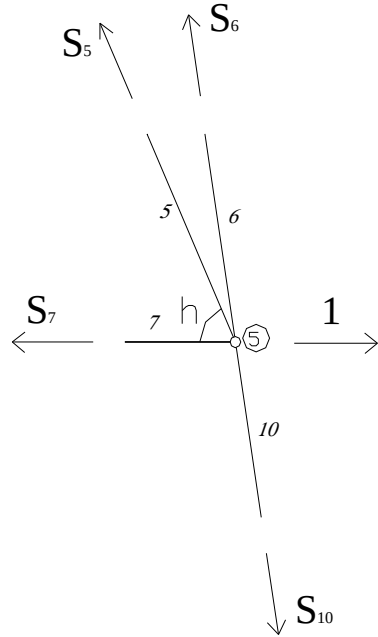
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

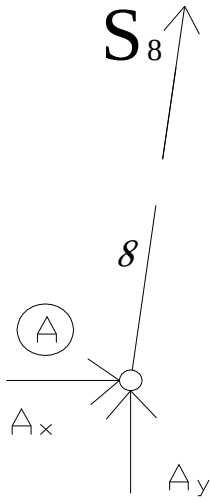
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

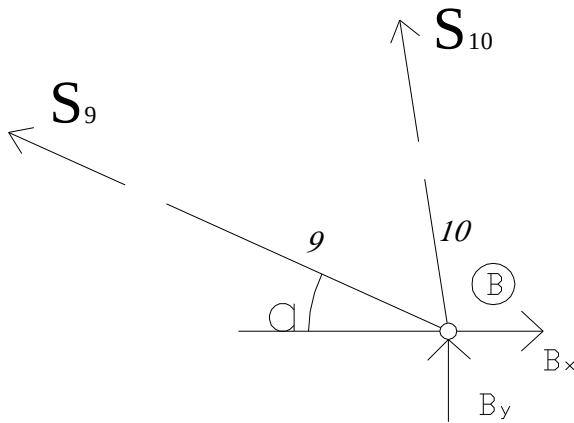
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

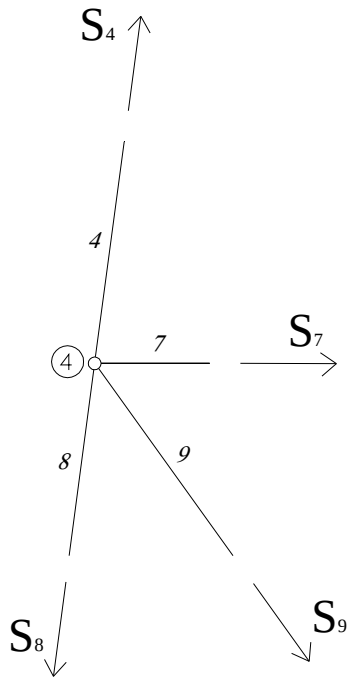
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

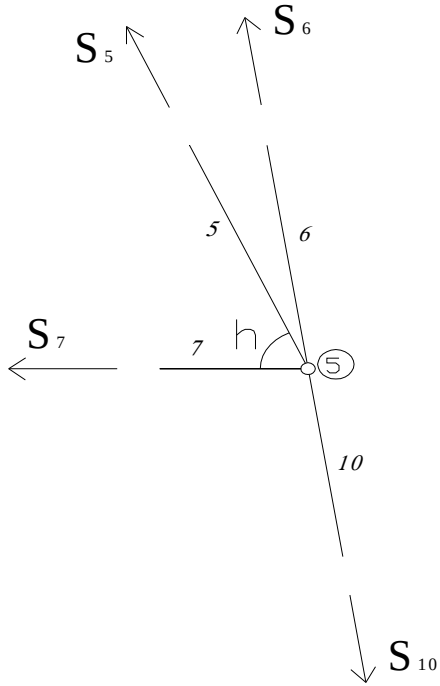
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

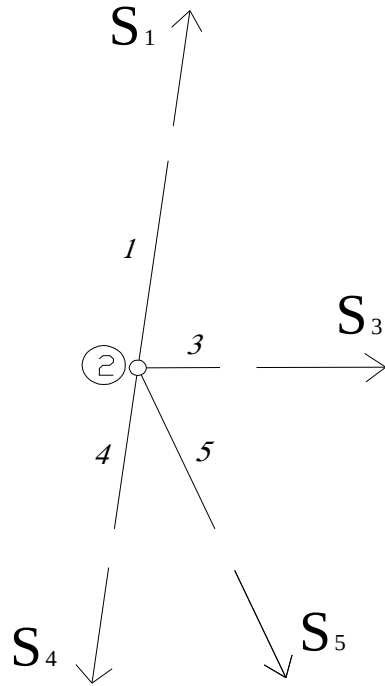
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -0,504$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

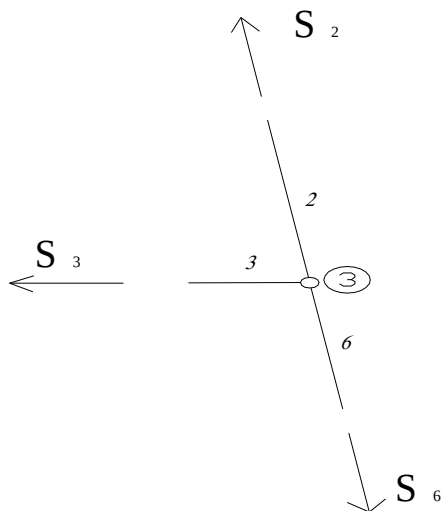
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

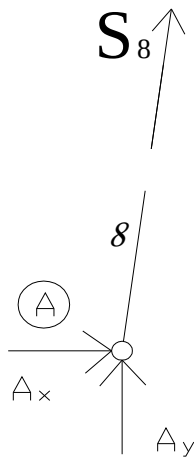
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

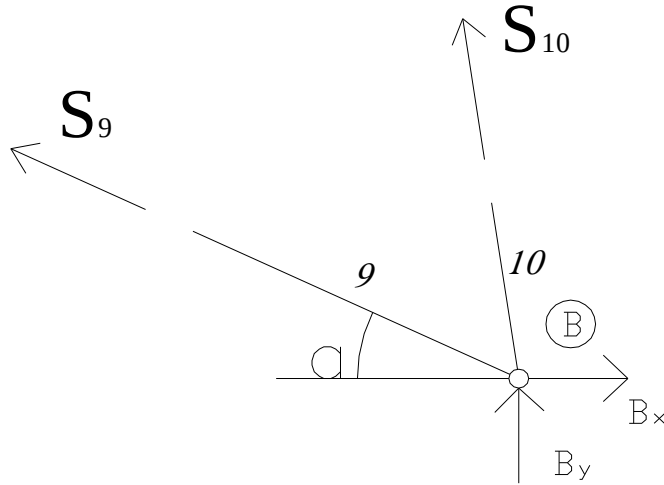
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

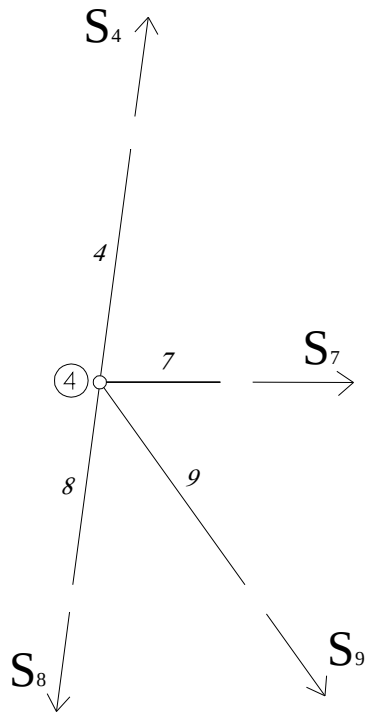
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100$ ve $S_{10} = -0,252$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

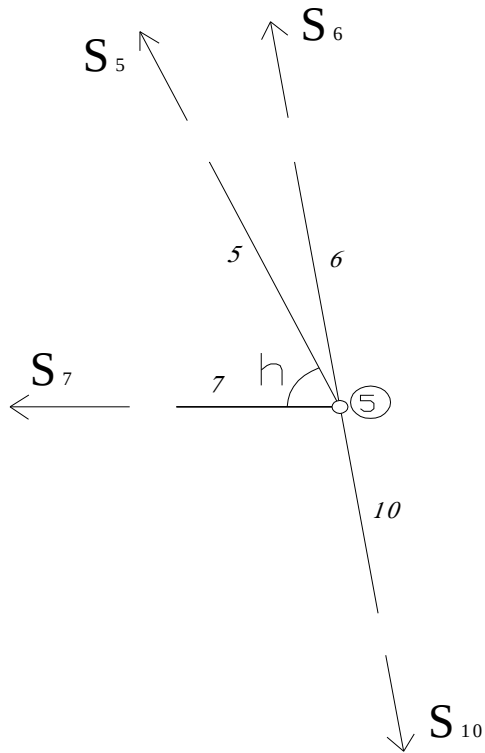
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

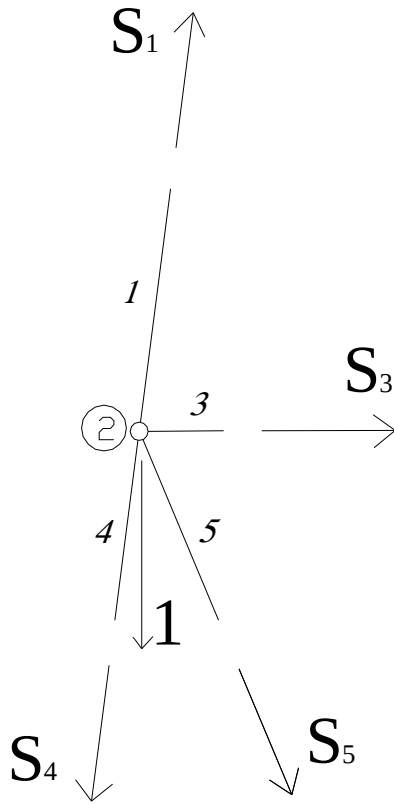
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

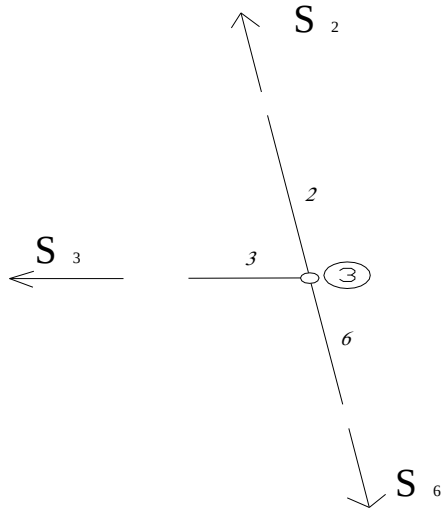
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

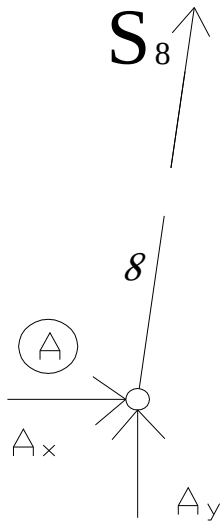
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

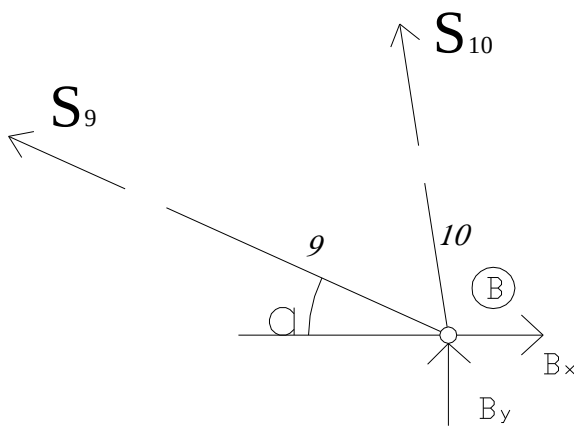
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

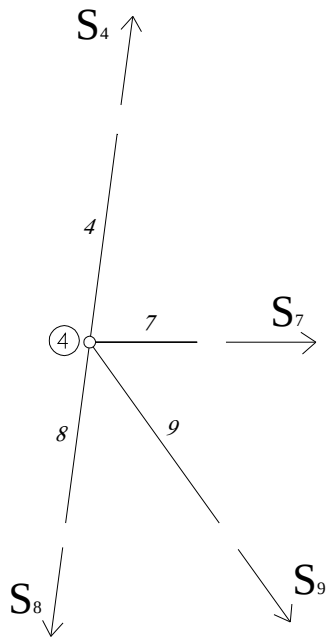
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

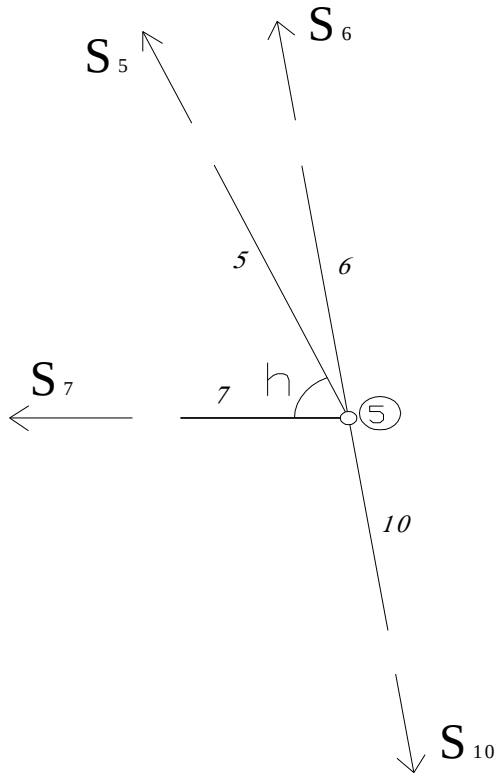
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

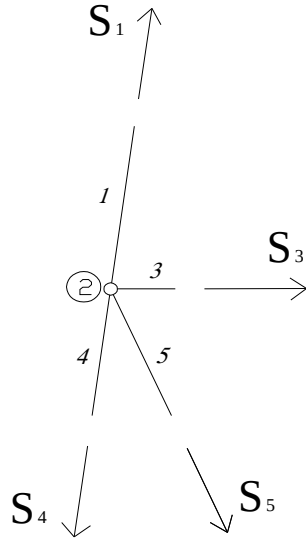
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

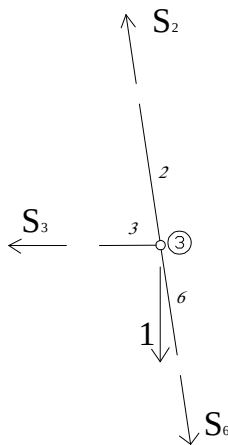
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

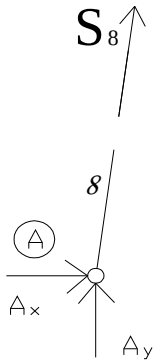
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

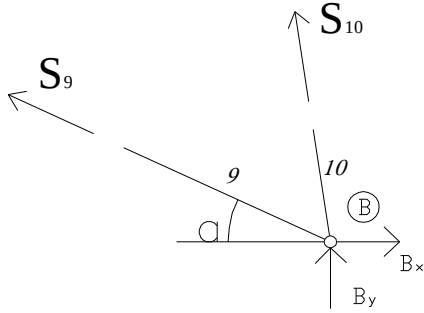
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

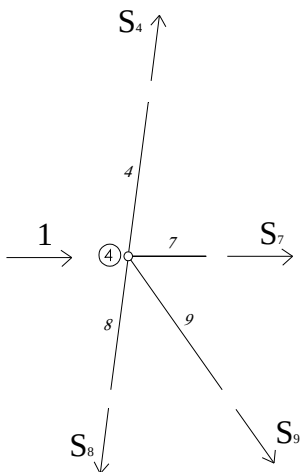
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

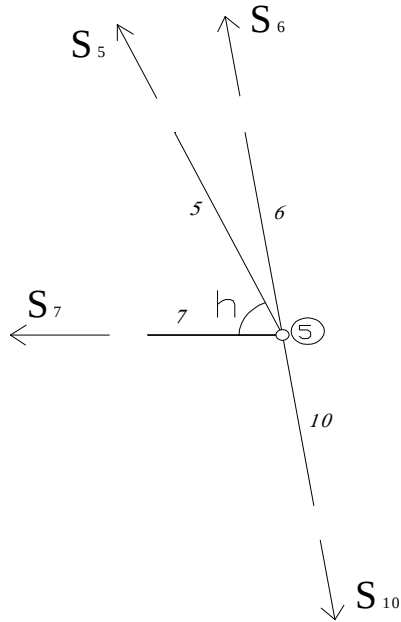
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

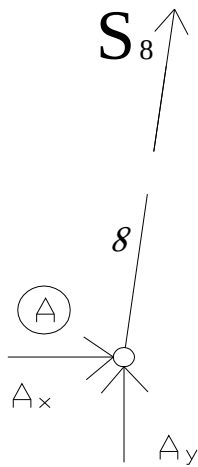
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

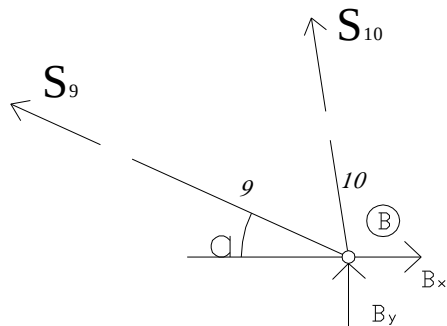
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

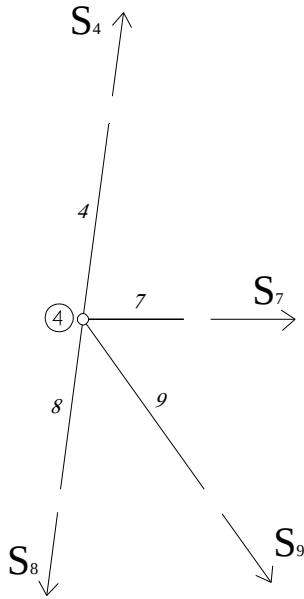
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

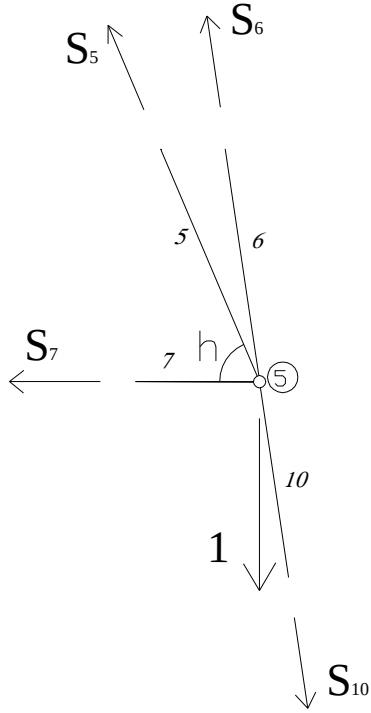
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
np=100
write(*,1)
1 format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
read(*,3) dosya
3 format(a12)
open(10,file=dosya)
read(10,*) icubs,ideps
write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
read(*,*)
write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
do 22 i=1,icubs

```

```

    read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
    write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
    do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
            bunye(i,j)=0.
30 continue
27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
    read(*,*)
    do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
55 continue
89 format('elem=',i5,' e=',f10.5, ' f=',f10.5,' l=',f10.5)
    read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
    read(10,*) nyd
    do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
70 continue
    do 60 i=1,nyd
        read(10,*) Q(i)
60 continue

c   mt*b*m
    read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
    call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
    write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
    do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
46 continue
    read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
    call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
    write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
    do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
48 continue
    read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
    call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
    write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```



```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```

```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTIGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

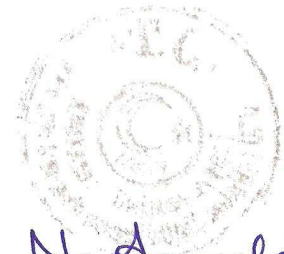


Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODEL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castigliona metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

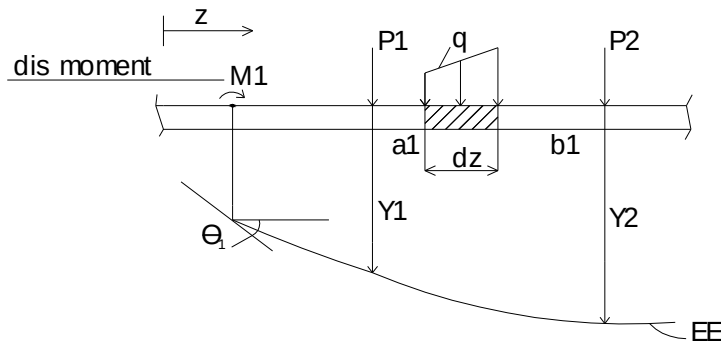
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

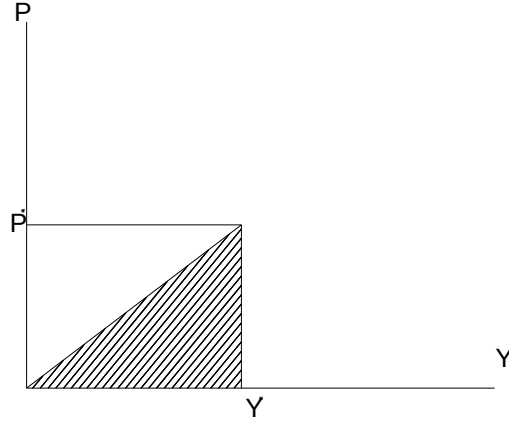
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

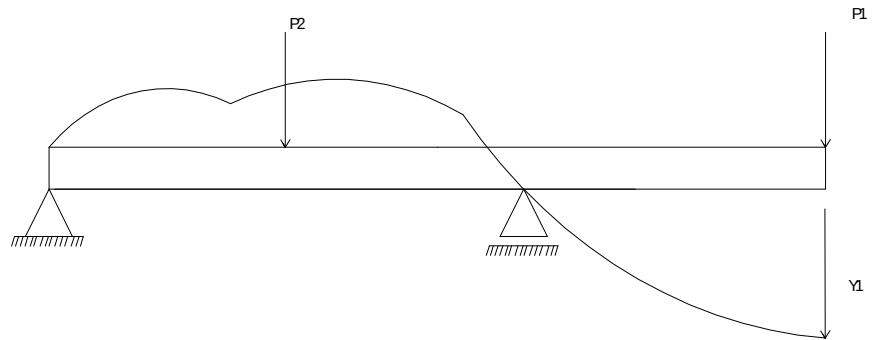
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

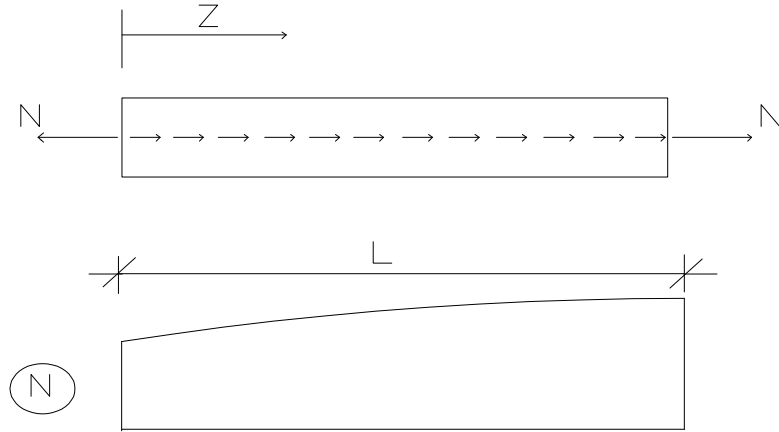
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilerek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet oluştuğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değiştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değiştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değiştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönülür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değerinin M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

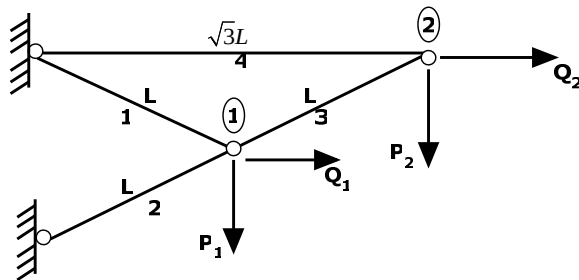
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

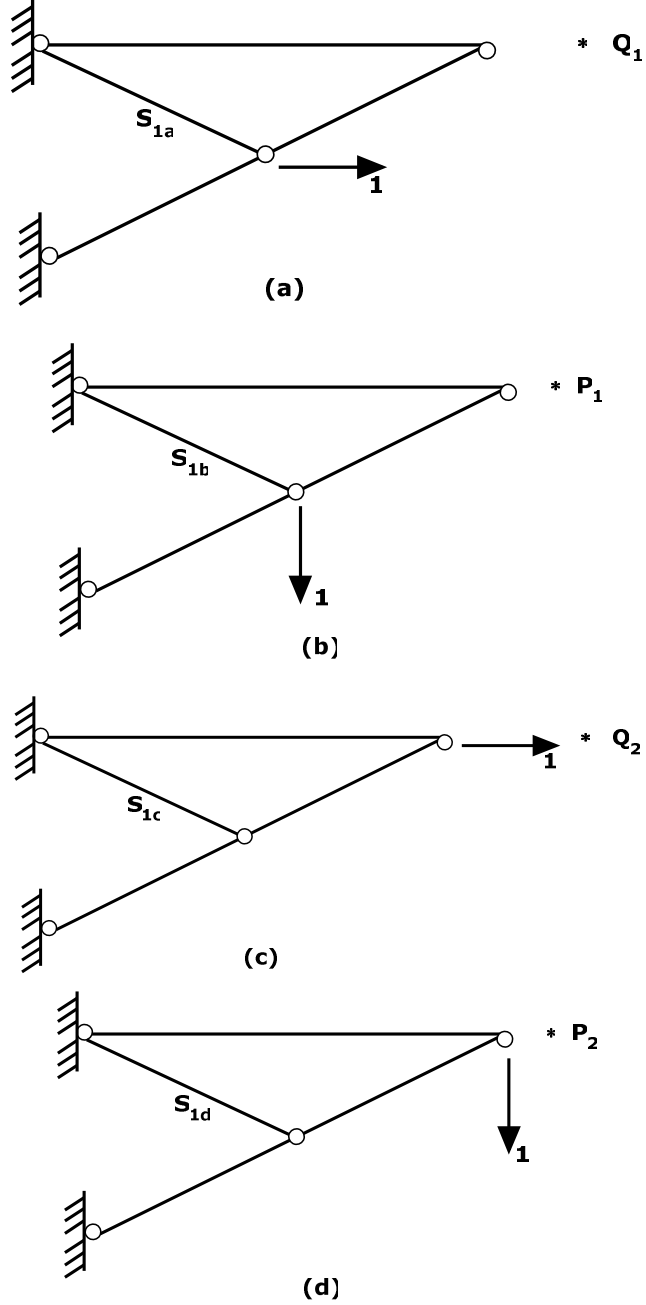
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyondan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu görülür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

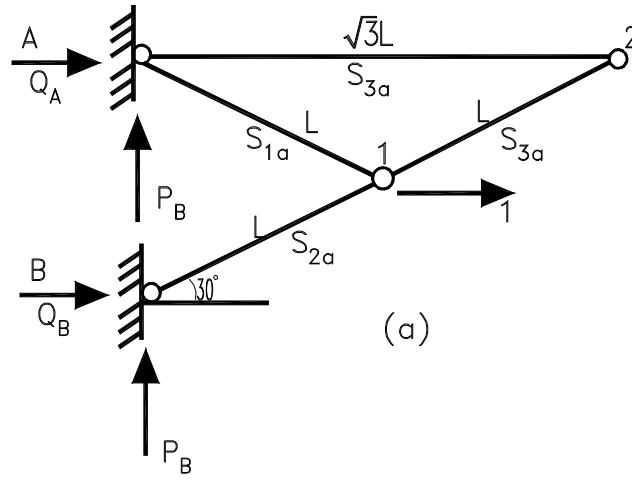
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

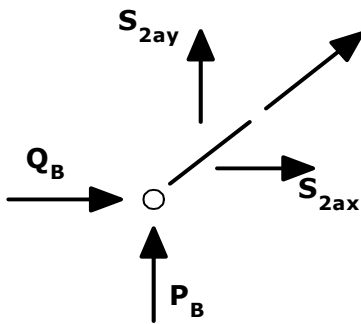
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

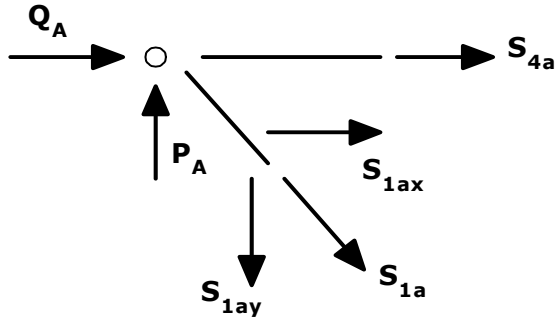
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

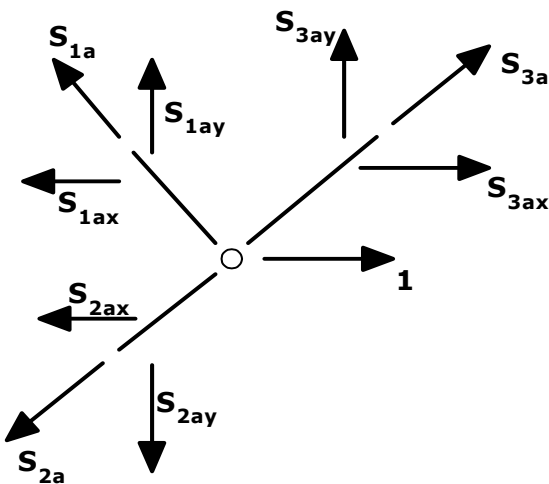
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

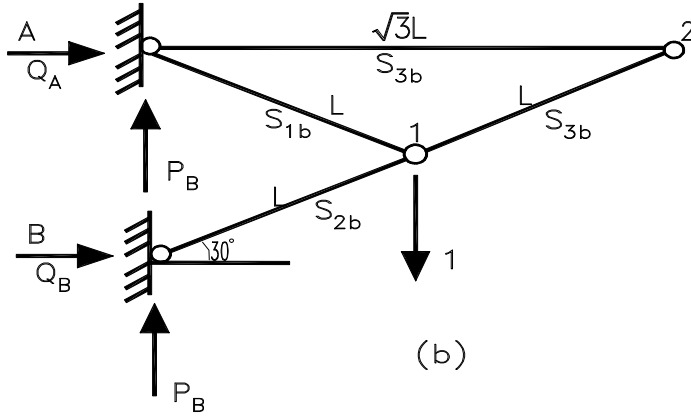
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

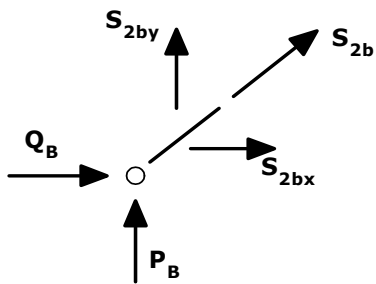
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

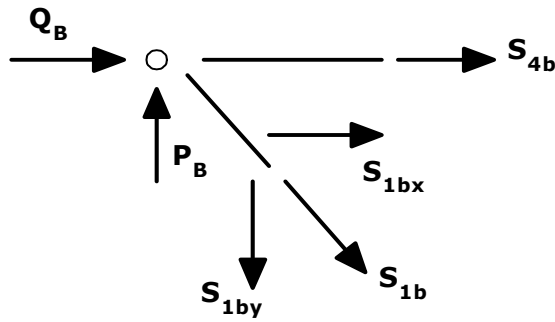
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

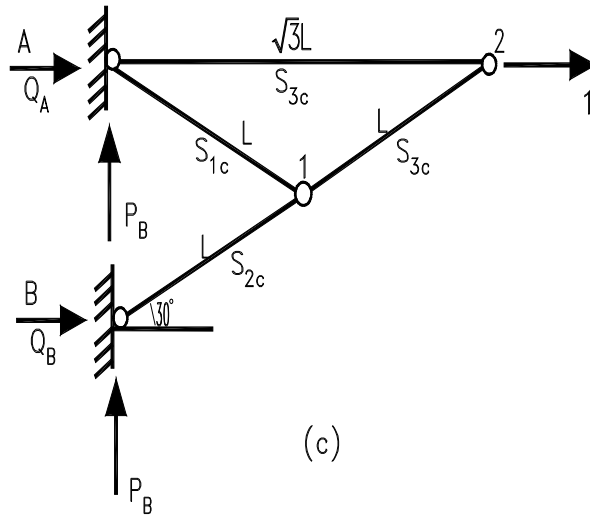
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

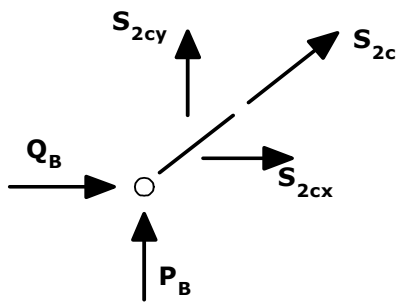
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

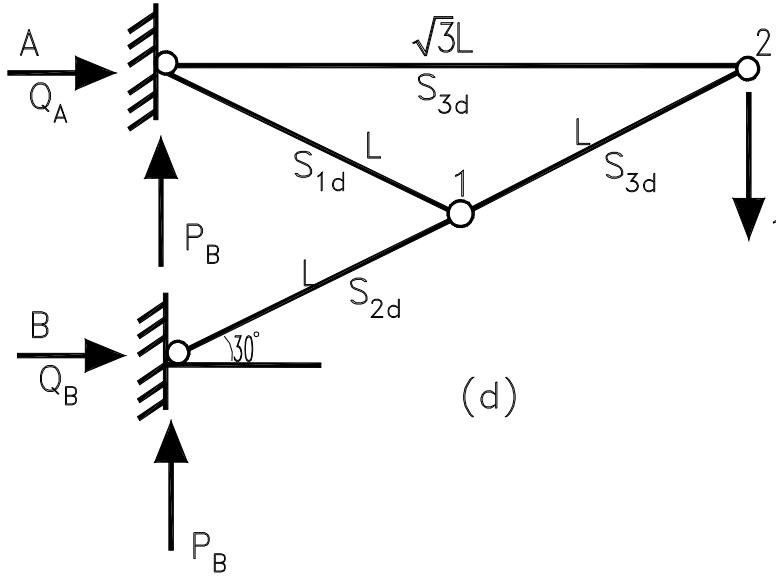
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

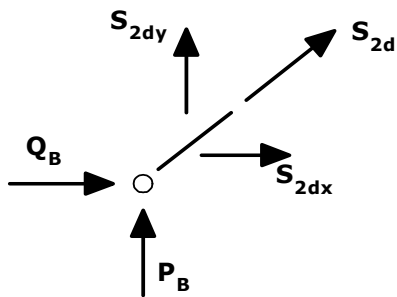
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

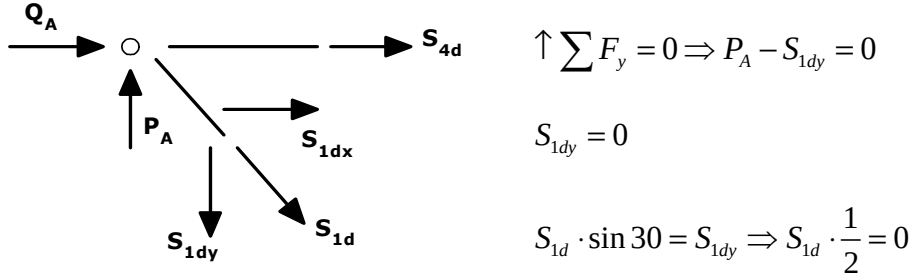
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

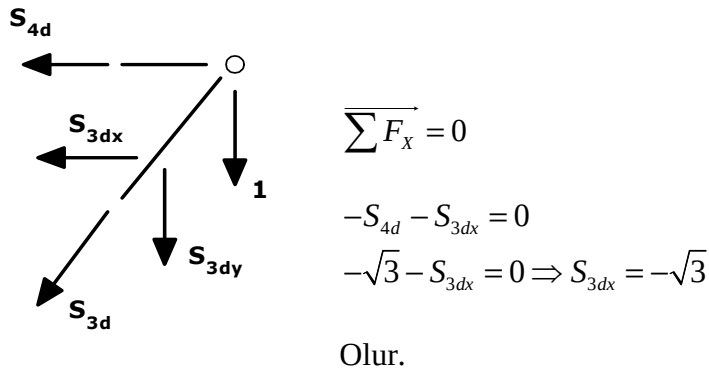
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

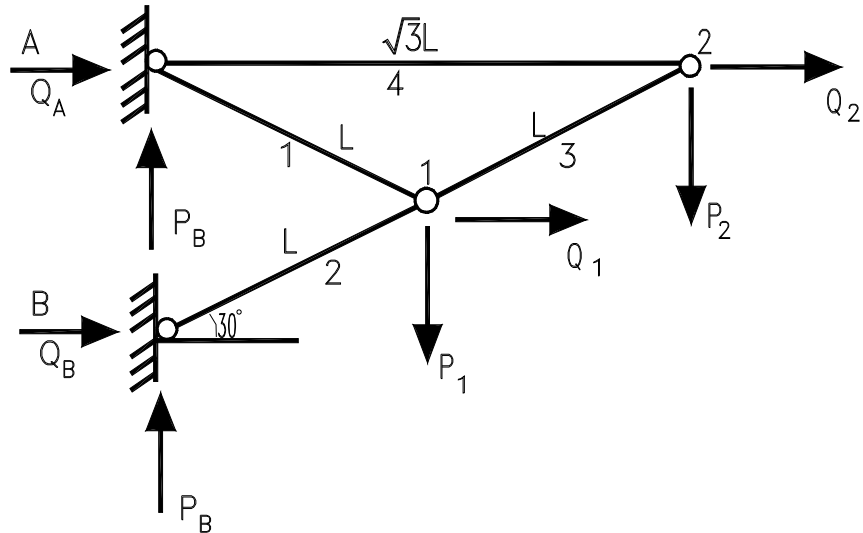
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

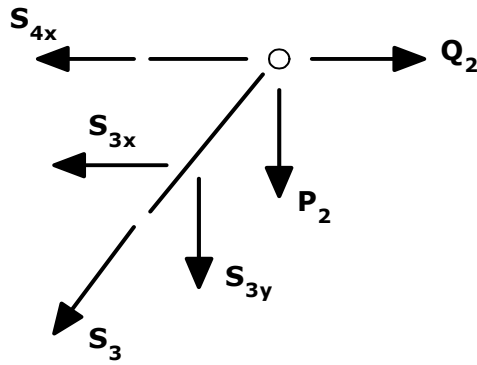
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

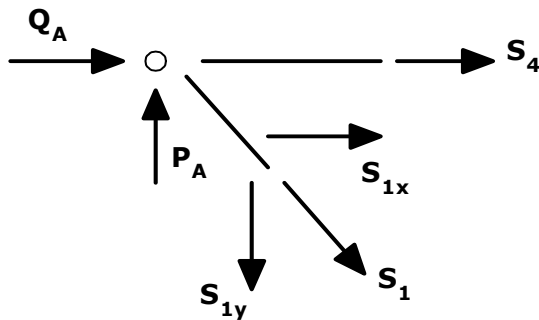
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

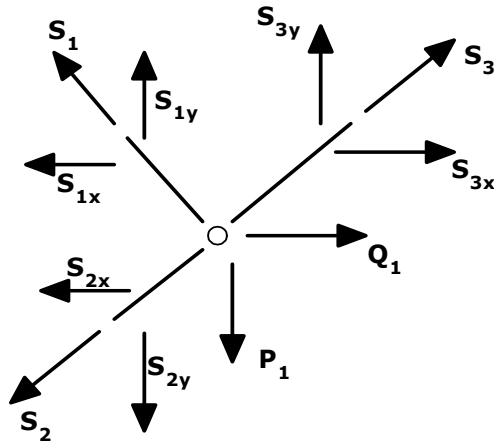
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

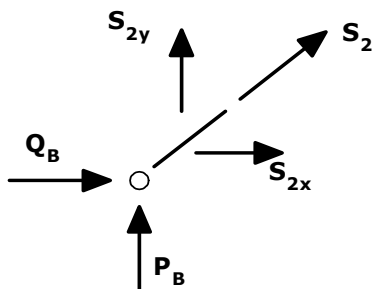
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

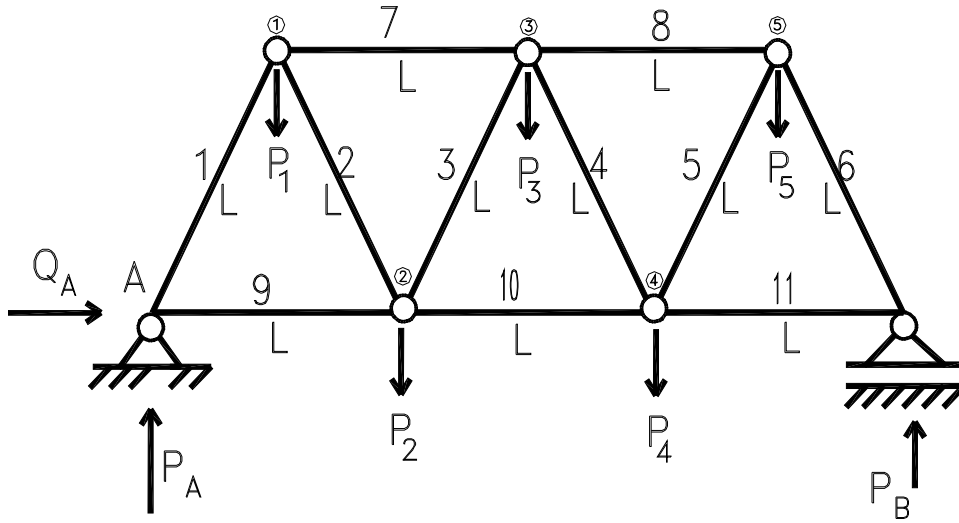
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2}P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2}P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2}P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{2}{3}P_4 + \frac{5}{6}P_5$$

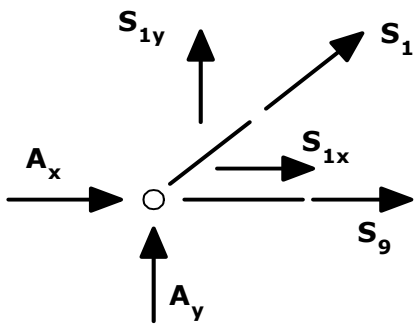
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{2}{3}P_4 - \frac{5}{6}P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{3}P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

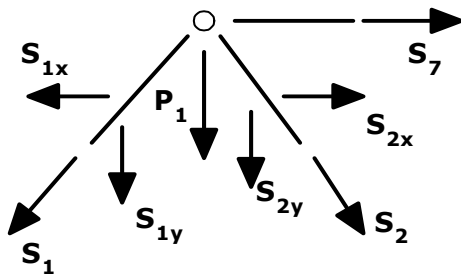
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

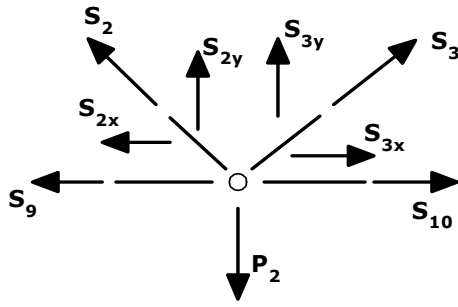
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

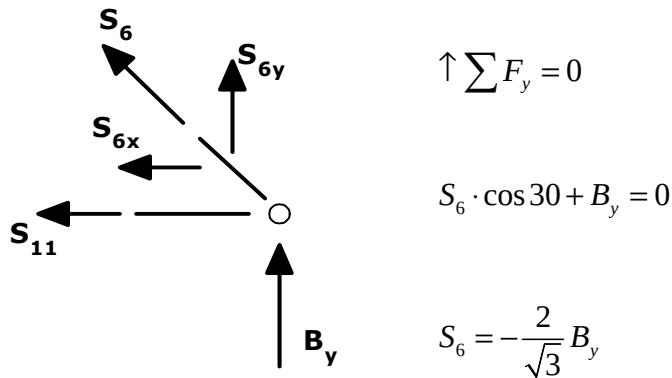
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

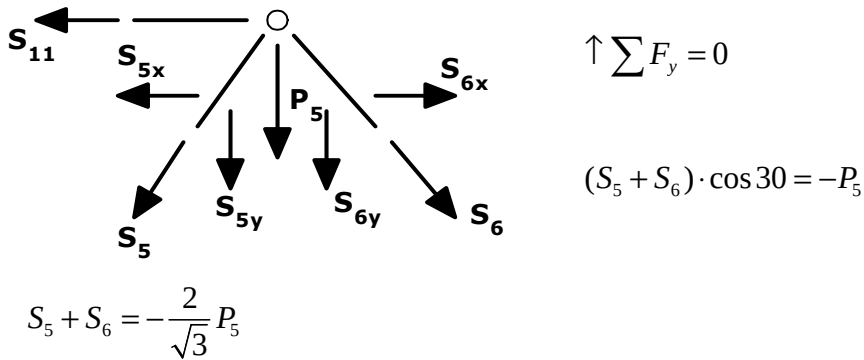
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

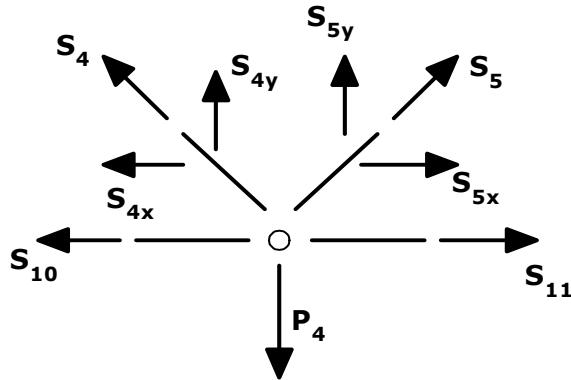
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

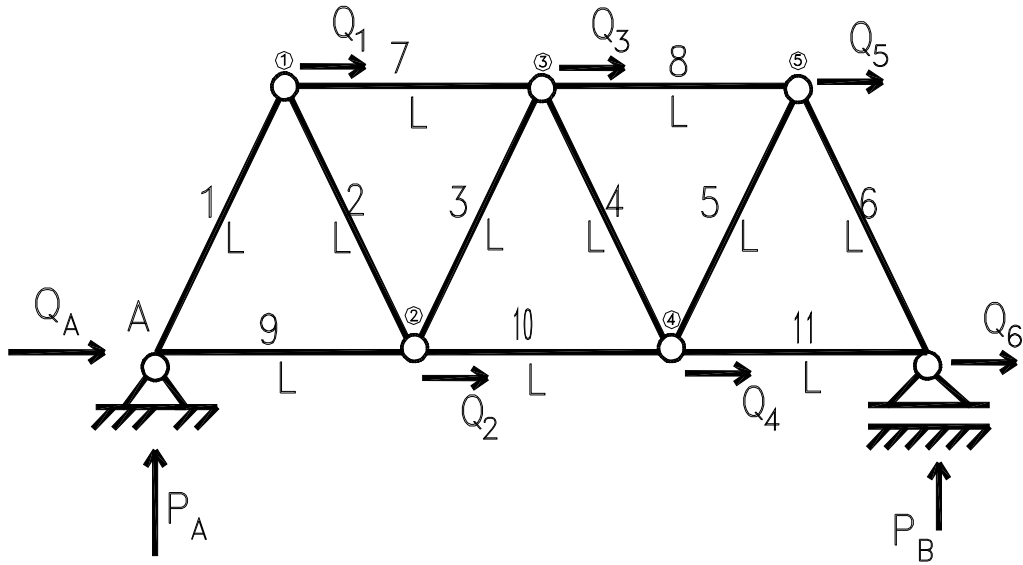
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

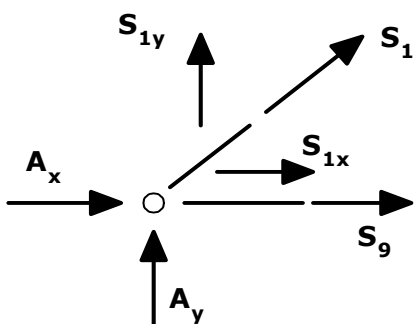
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

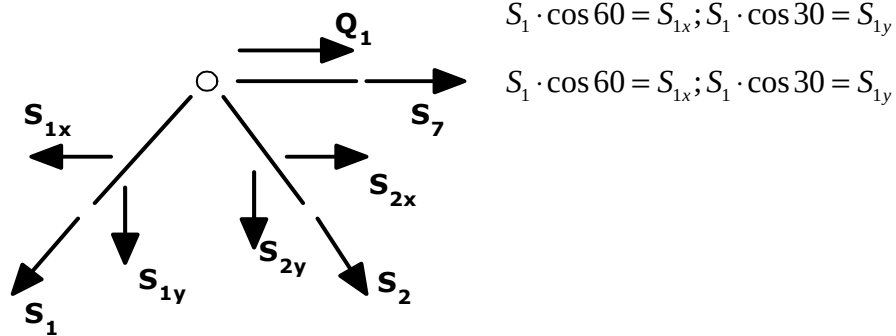
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

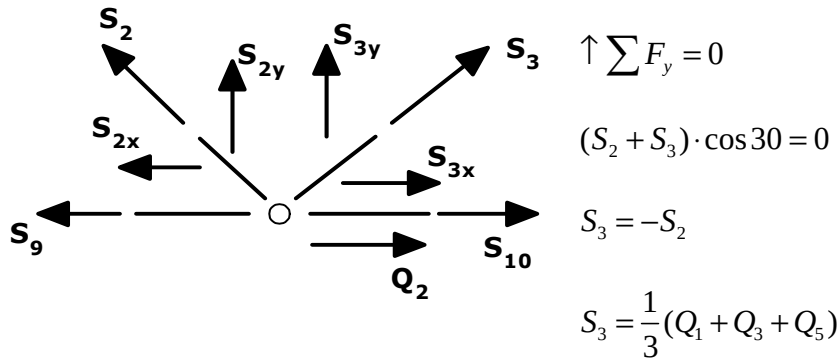
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

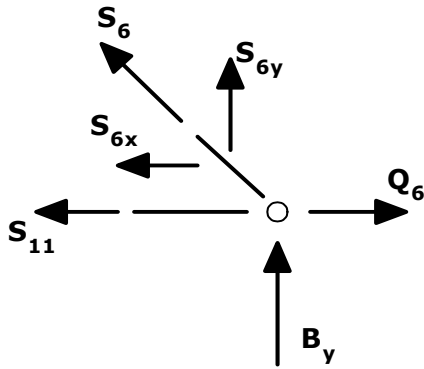
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

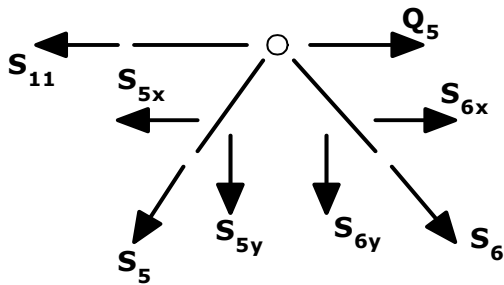
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

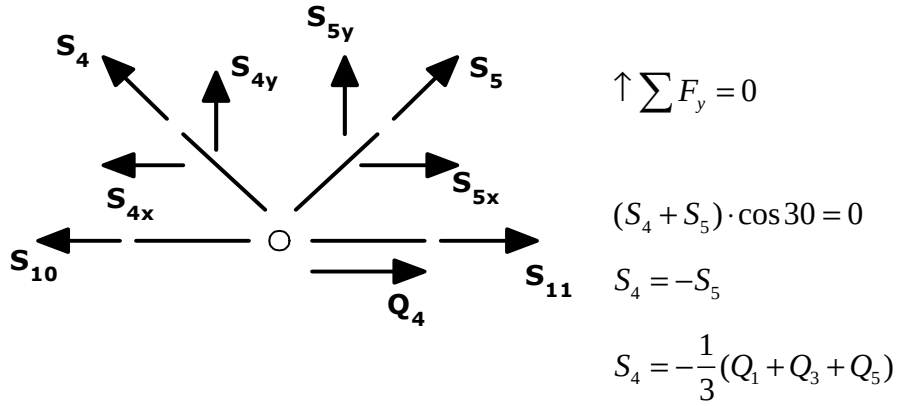
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemekten bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozisini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

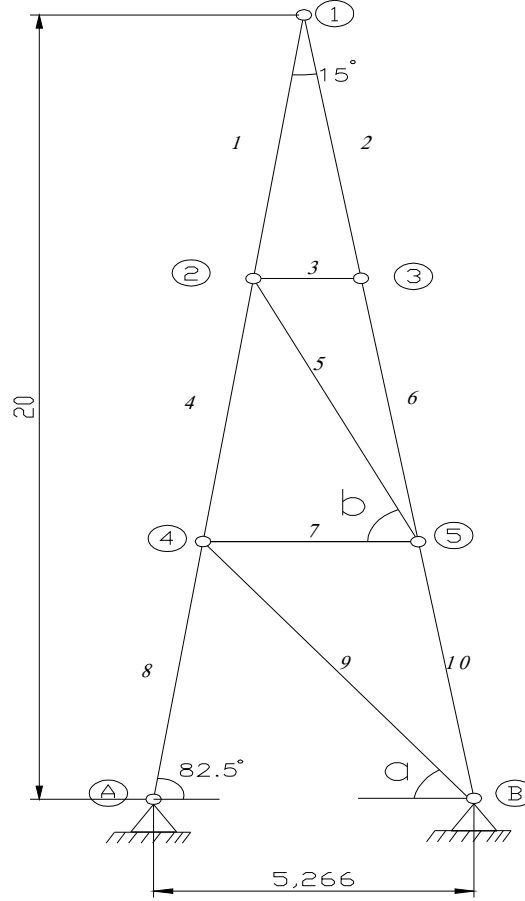
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümünden elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü; Sistemin Genel denge denklelerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

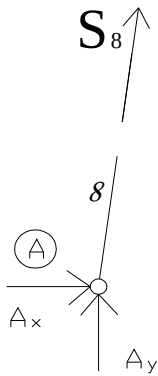
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

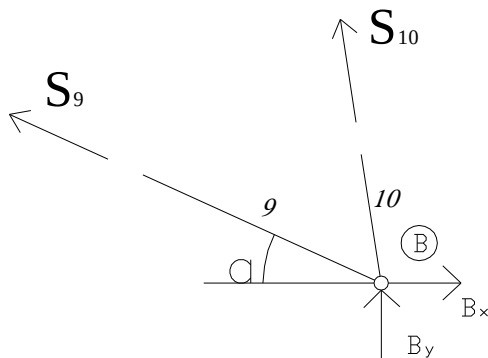
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

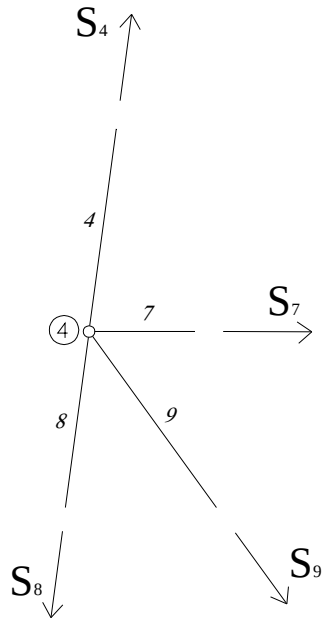
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

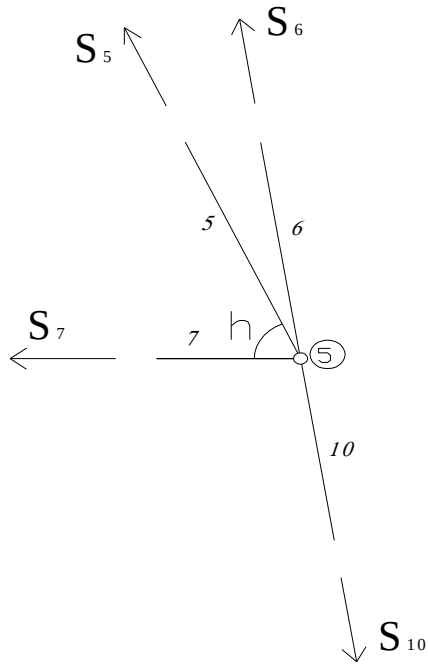
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

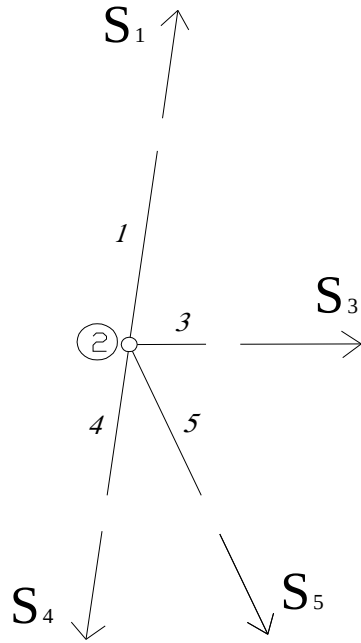
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

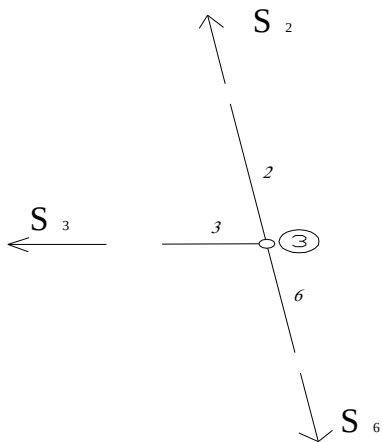
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

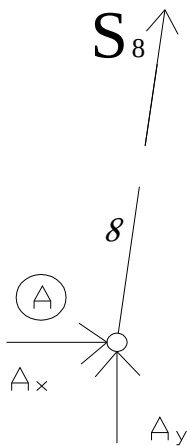
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

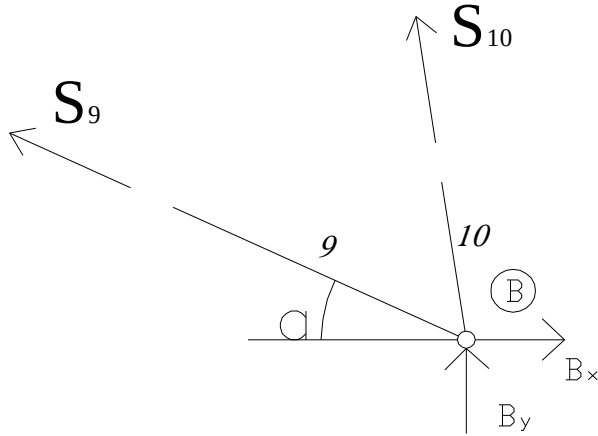
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

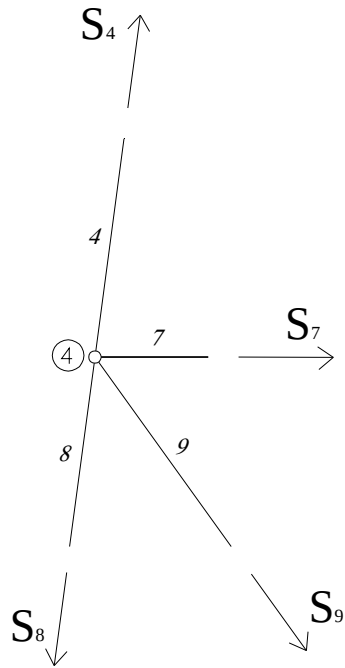
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

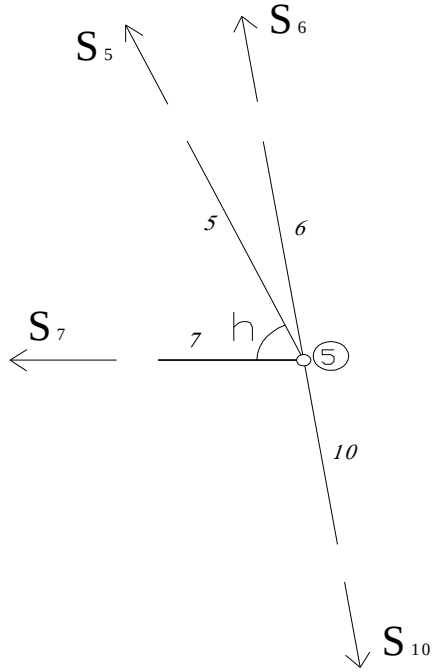
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

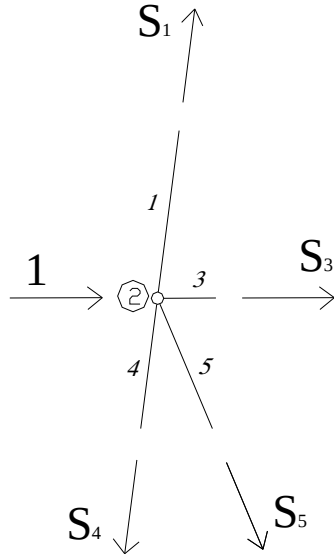
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

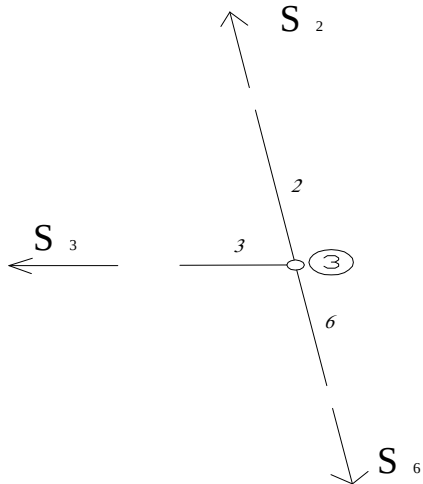
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

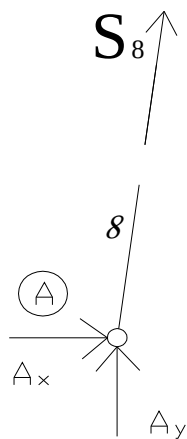
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

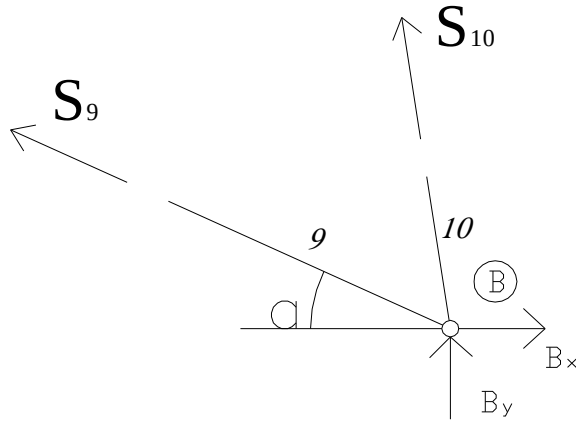
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

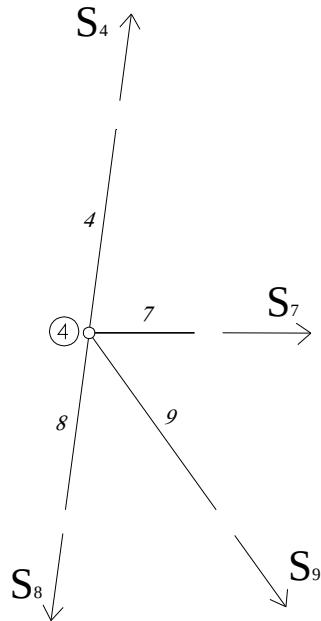
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

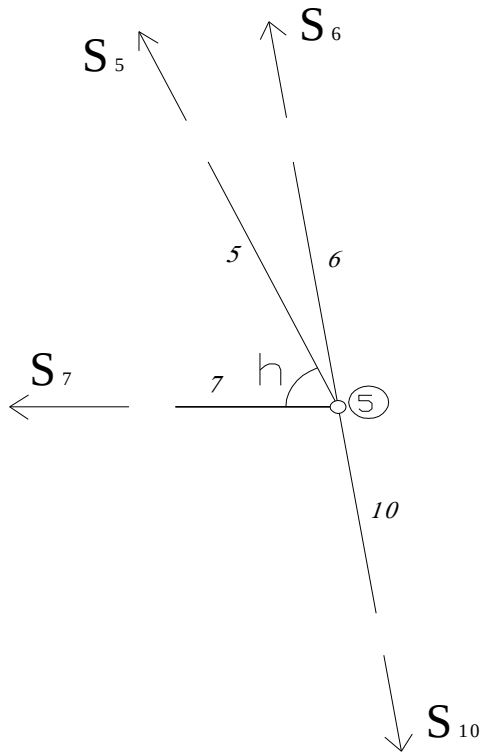
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

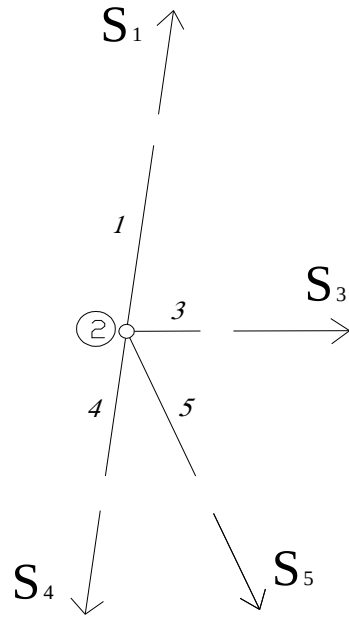
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

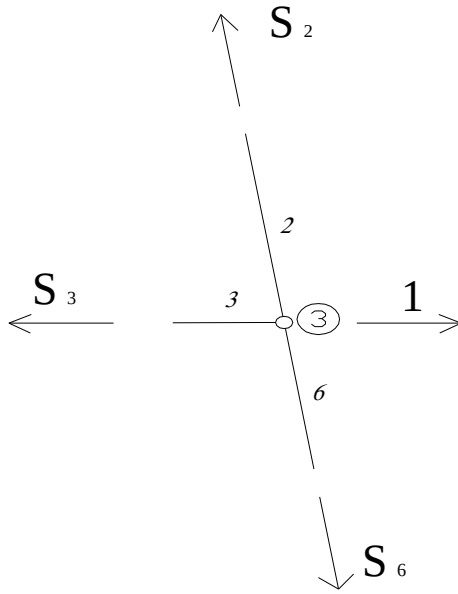
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

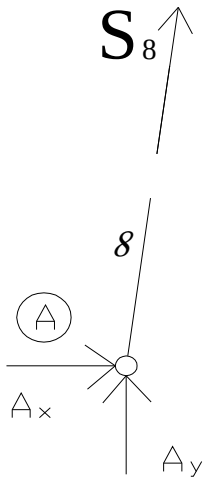
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

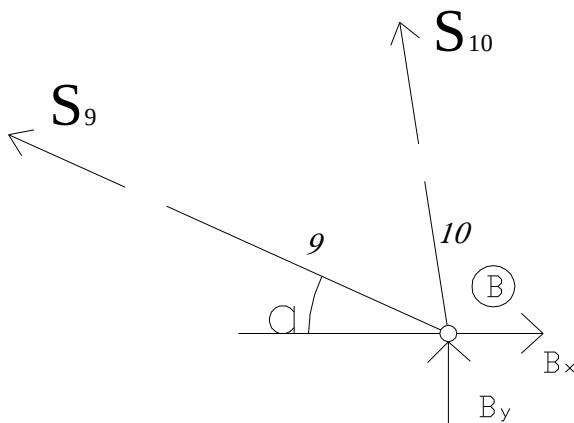
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

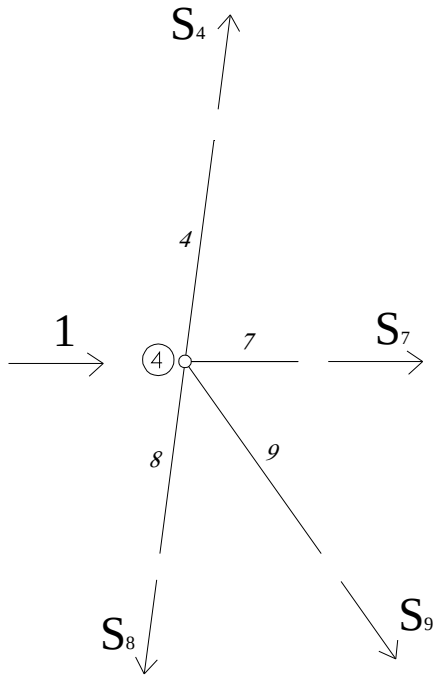
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515$ ve $S_{10} = 0,00$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

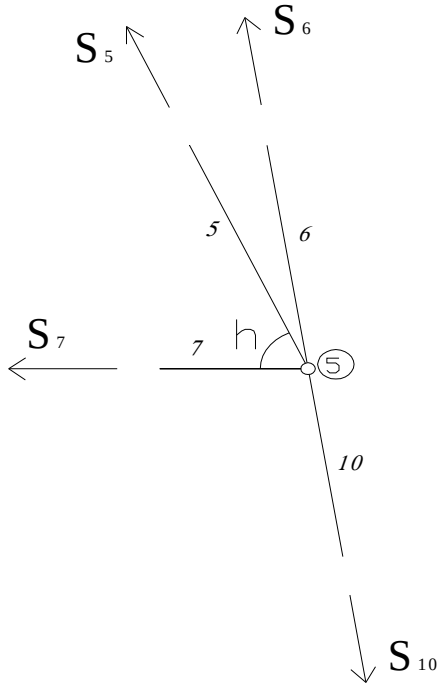
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

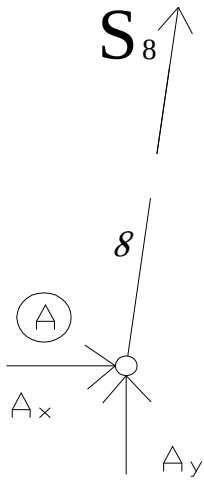
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

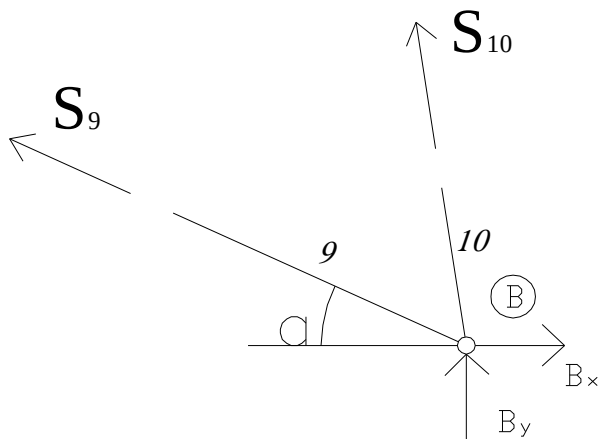
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

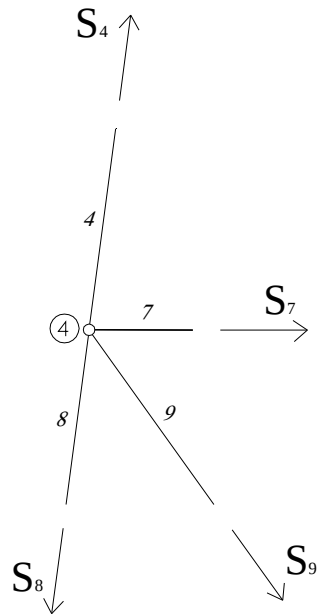
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

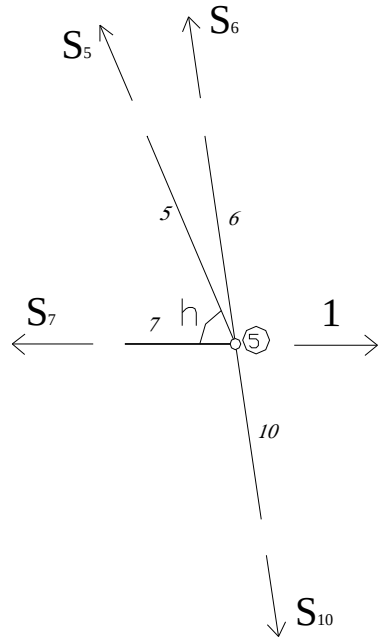
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

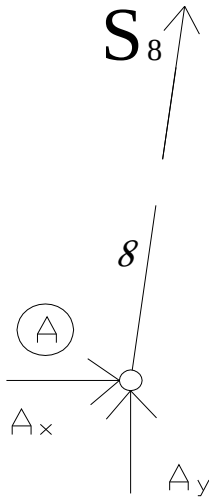
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

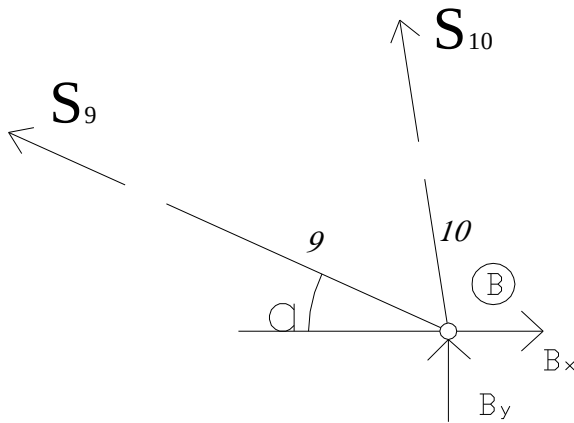
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

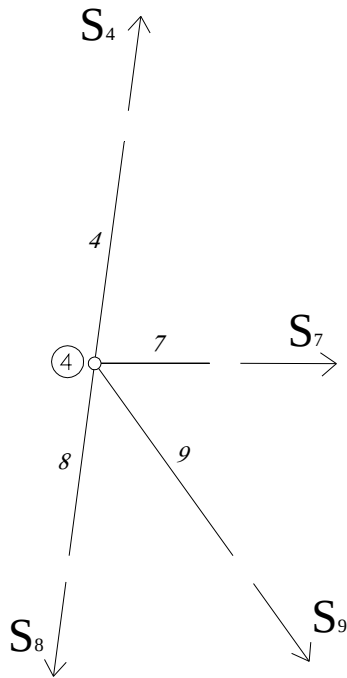
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

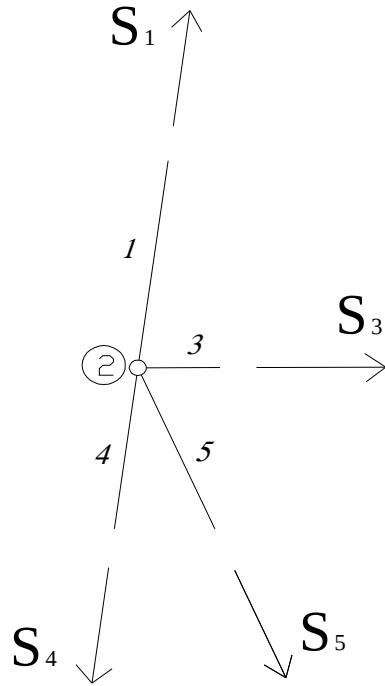
$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

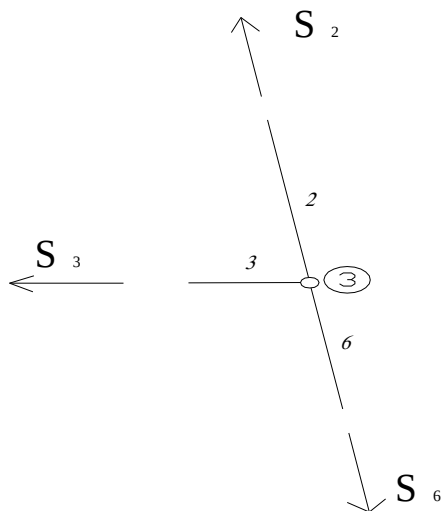
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

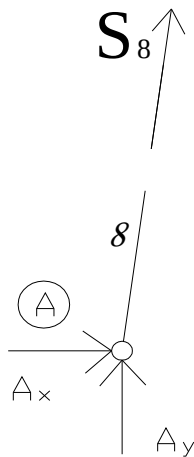
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

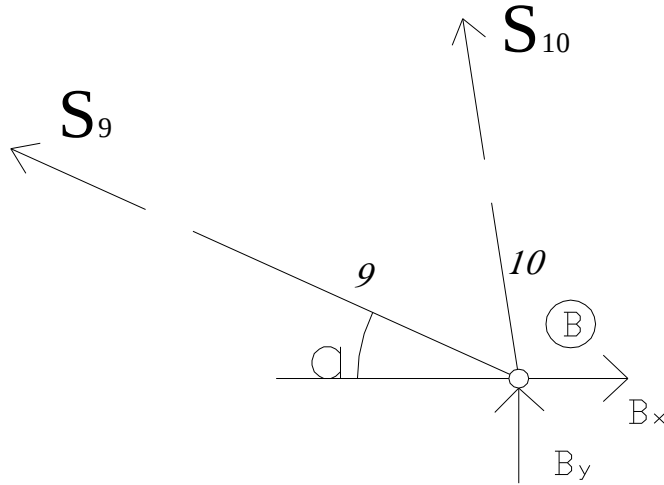
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

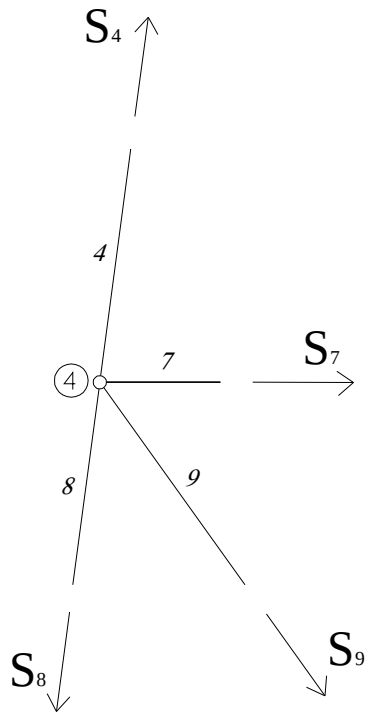
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100$ ve $S_{10} = -0,252$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

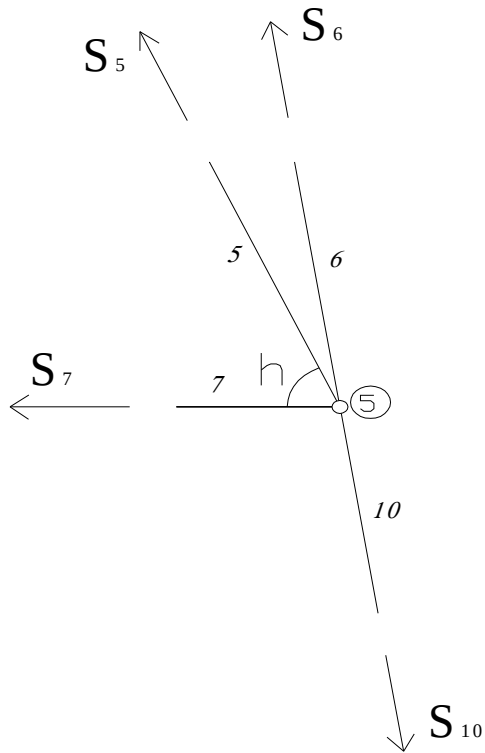
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

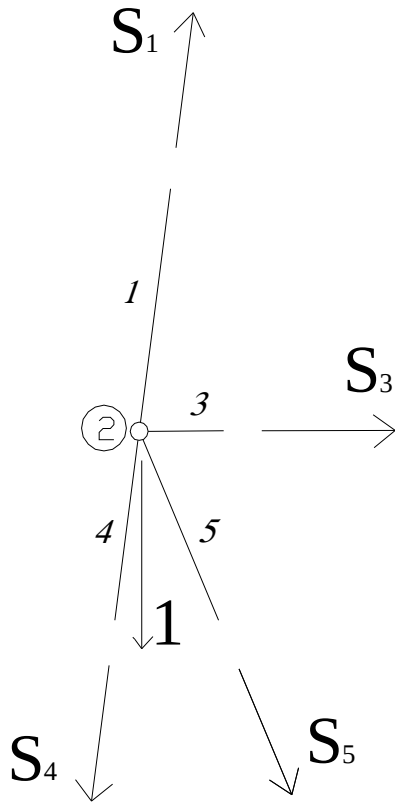
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

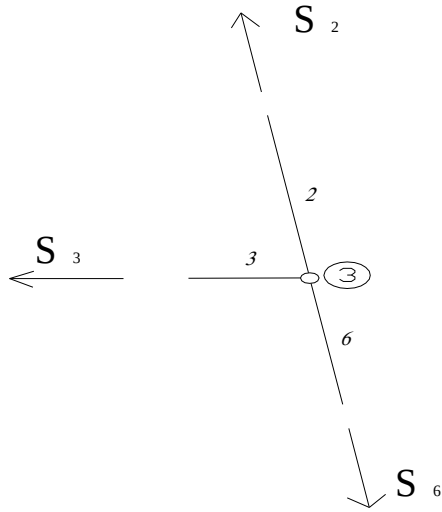
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

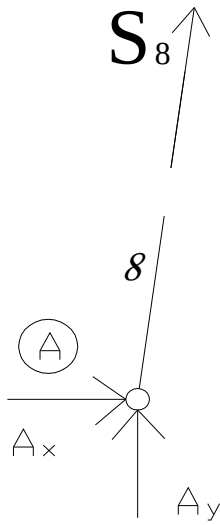
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

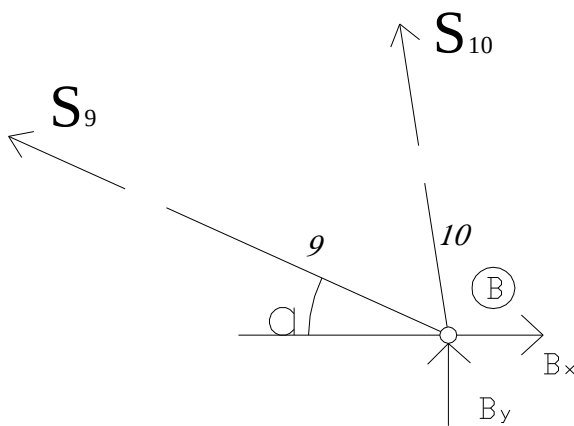
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

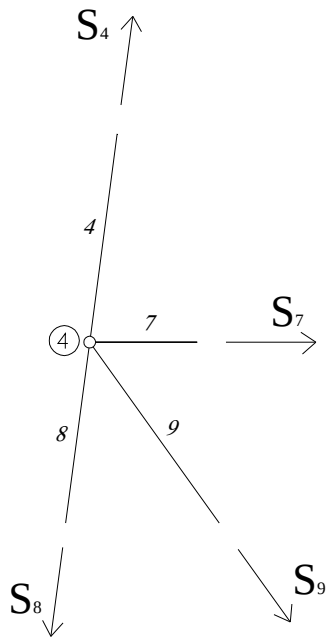
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

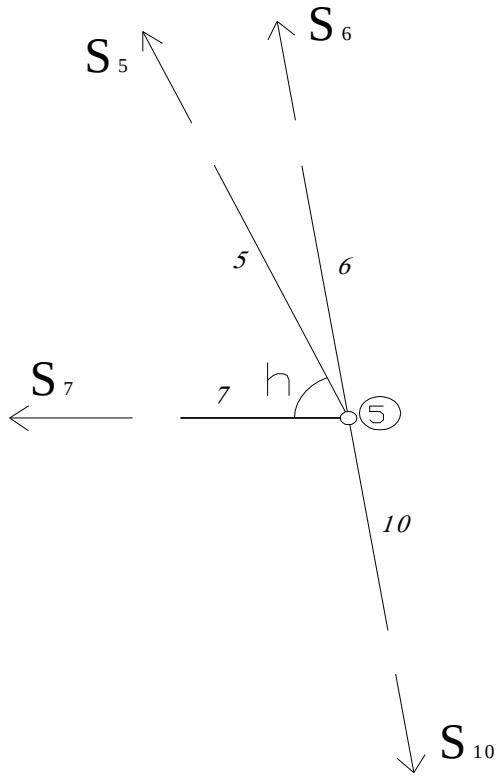
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

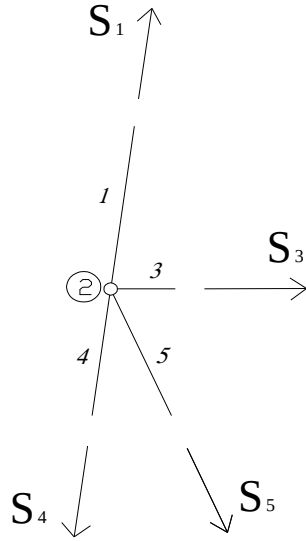
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

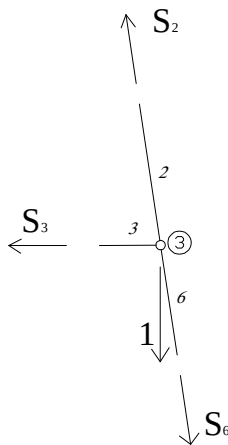
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

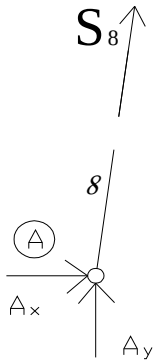
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

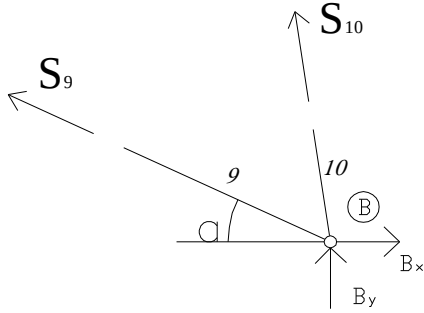
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

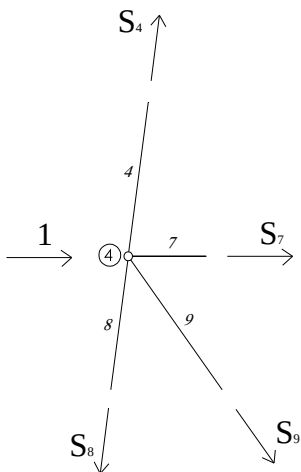
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

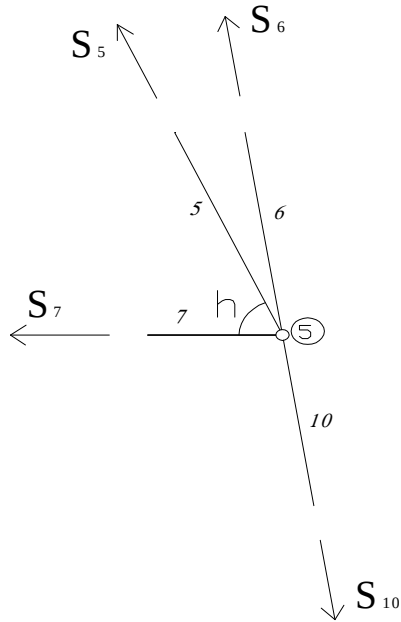
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

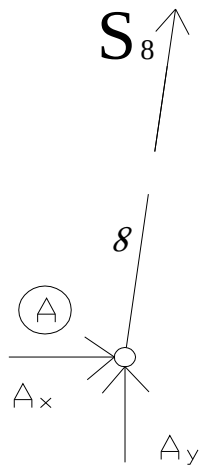
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

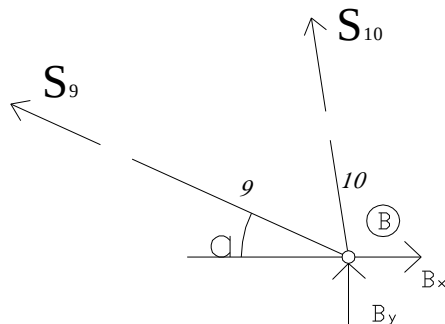
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

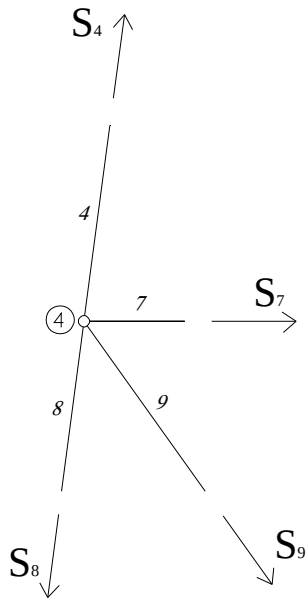
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

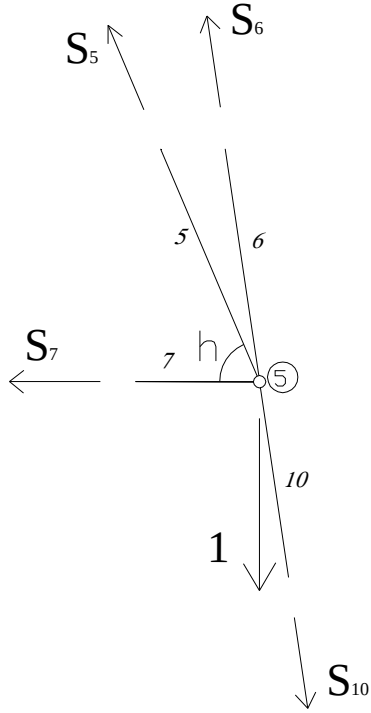
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
np=100
write(*,1)
1 format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
read(*,3) dosya
3 format(a12)
open(10,file=dosya)
read(10,*) icubs,ideps
write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
read(*,*)
write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
do 22 i=1,icubs

```

```

    read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
    write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
    do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
            bunye(i,j)=0.
        30 continue
    27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
    read(*,*)
    do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
    55 continue
    89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
    read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
    read(10,*) nyd
    do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
    70 continue
        do 60 i=1,nyd
            read(10,*) Q(i)
        60 continue

c   mt*b*m
    read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
    call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
    write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
    do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
    46 continue
    read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
    call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
    write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
    do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
    48 continue
    read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
    call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
    write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```

```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c  bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c  X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```

```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

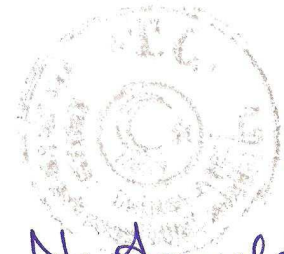


Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODEL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castigliona metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

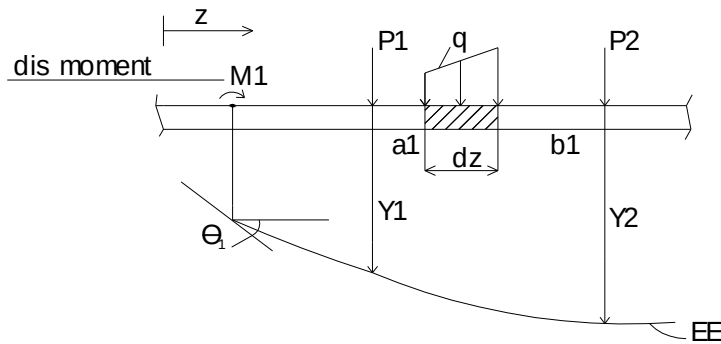
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

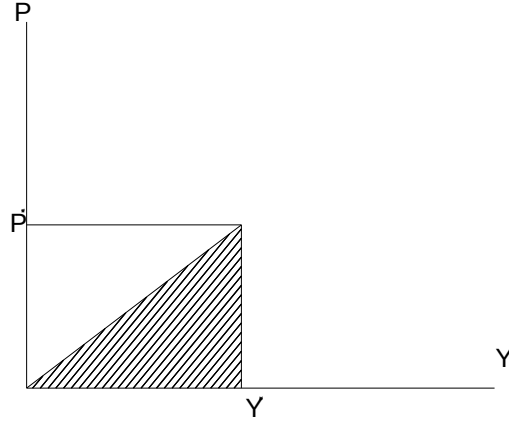
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

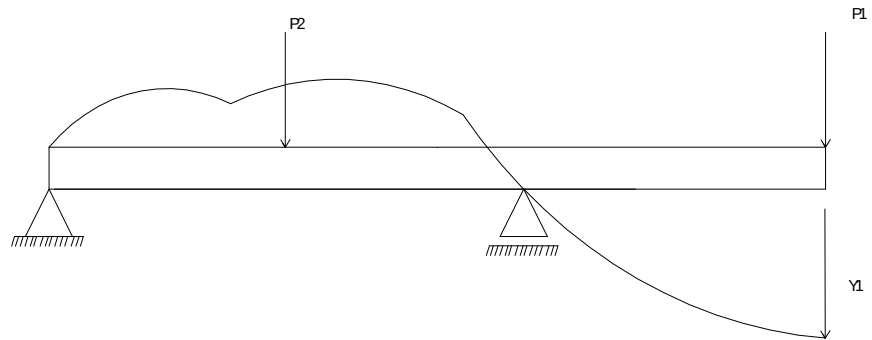
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

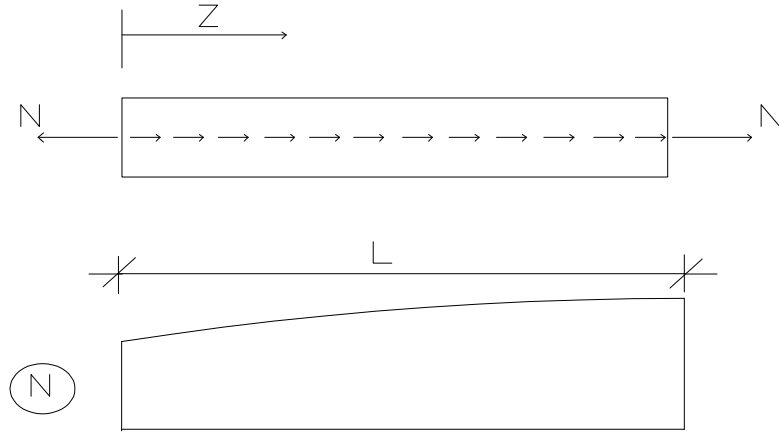
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilerek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet oluştuğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değıştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değıştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değıştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönölür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değeri M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

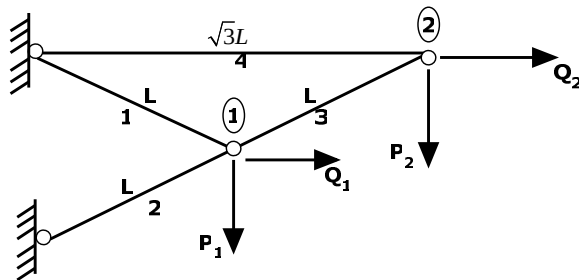
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

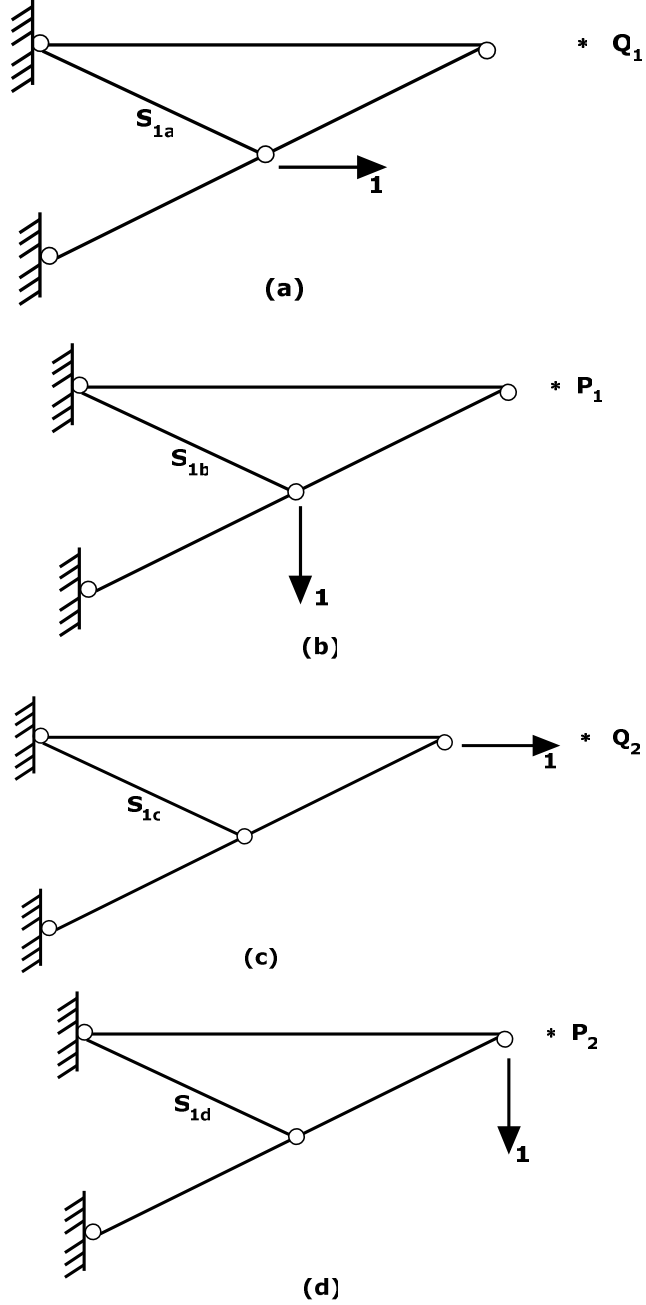
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyondan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu gör÷lür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda} \quad \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S] \text{ elde edilir. } [S] = [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ elde edilir.}$$

$$[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \text{ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup } [E] \text{ ile gösterebiliriz.}$$

$$[D] = [E] \cdot [F] \text{ ifade edilebilir.}$$

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

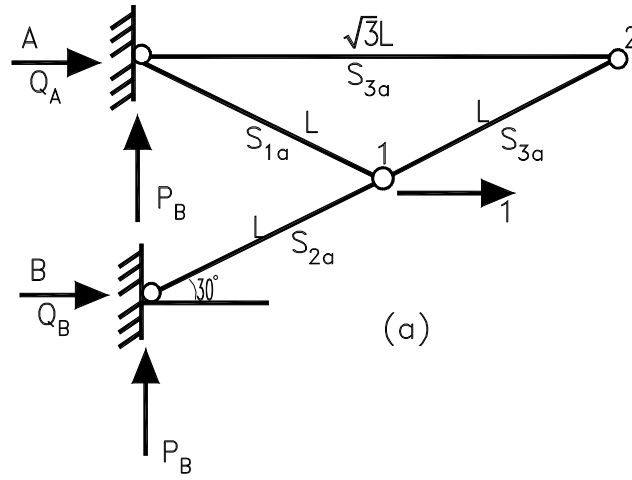
$$[F] = [K] \cdot [D] \text{ bulunur. Buradan ;}$$

$$[K] = [E]^{-1} \text{ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;}$$

$$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1} \text{ dir.}$$

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

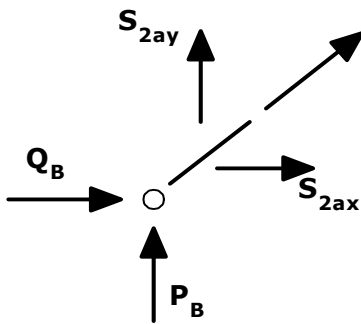
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

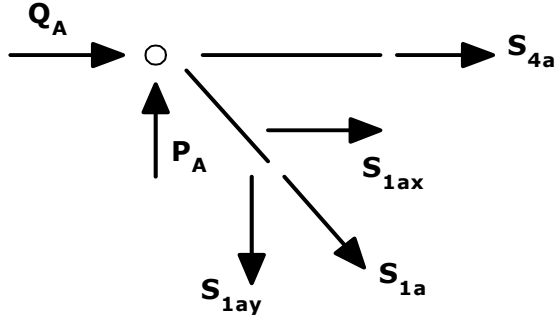
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

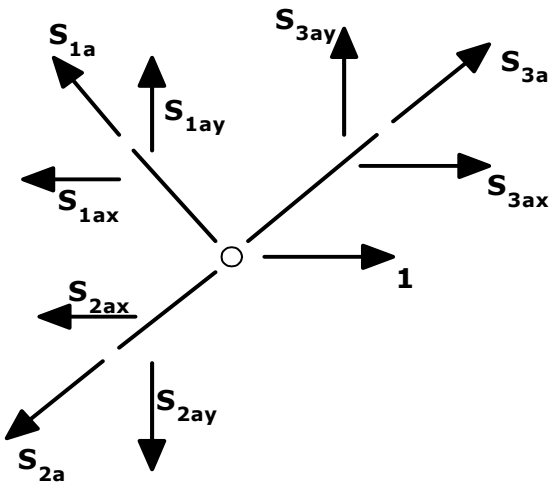
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

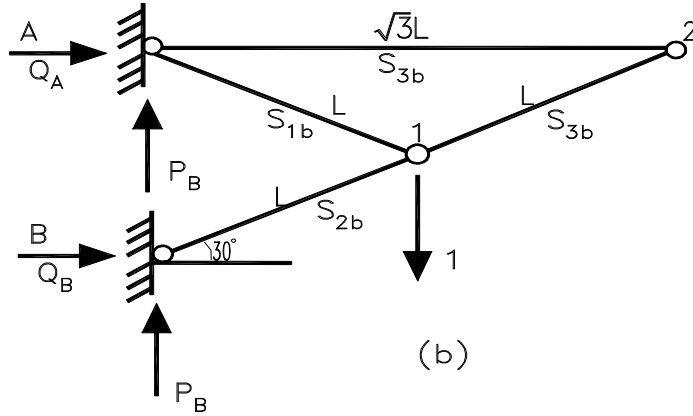
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

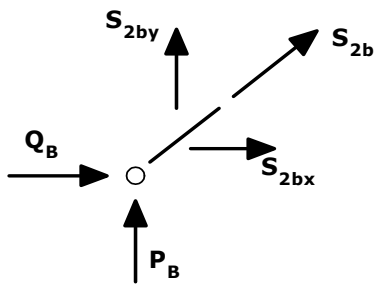
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

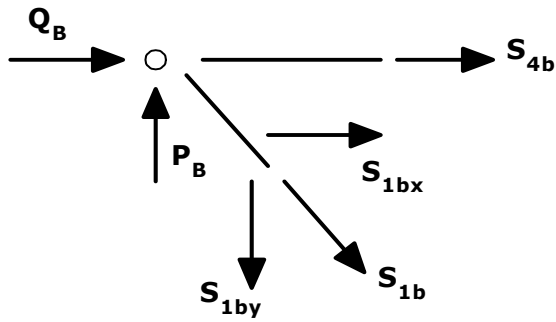
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

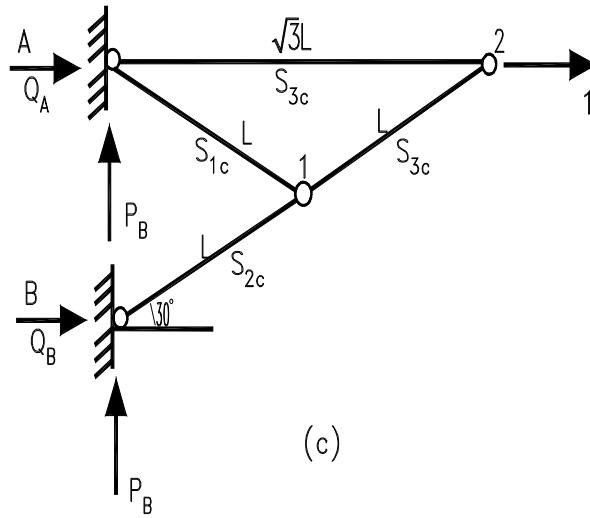
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

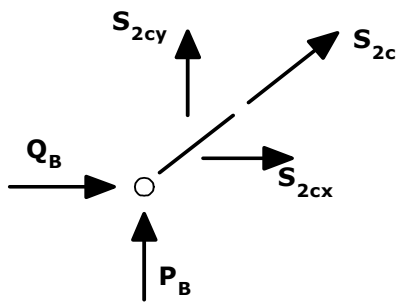
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

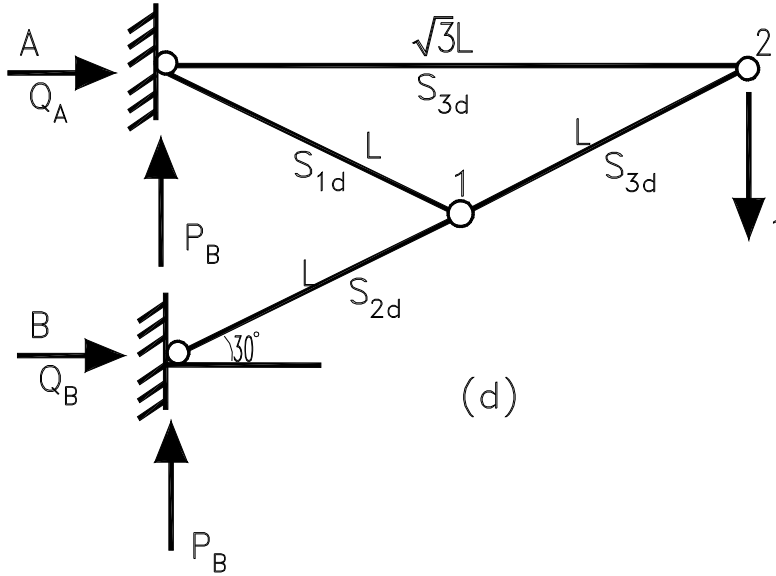
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

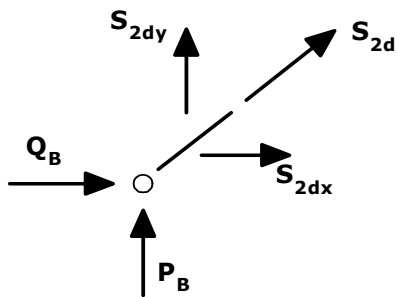
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

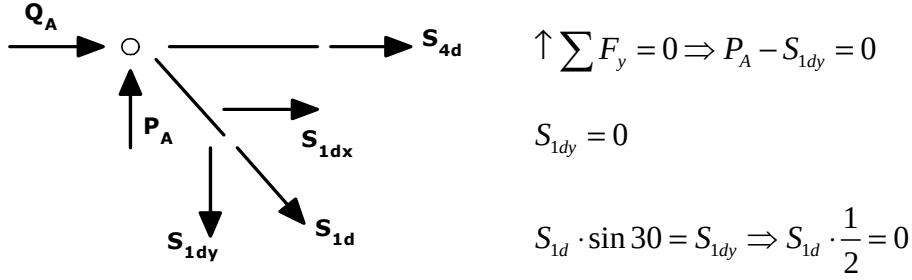
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

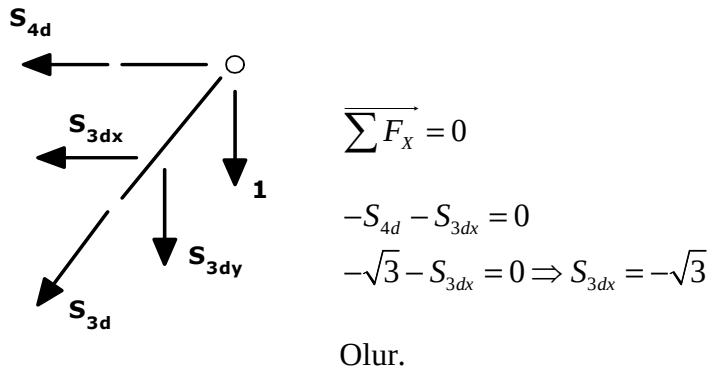
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

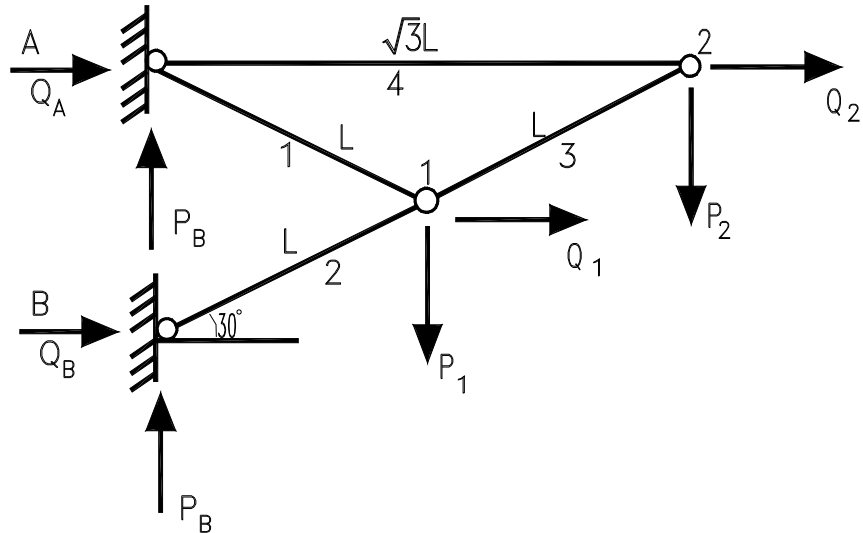
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

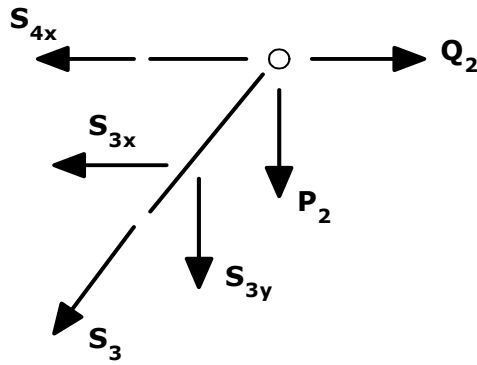
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

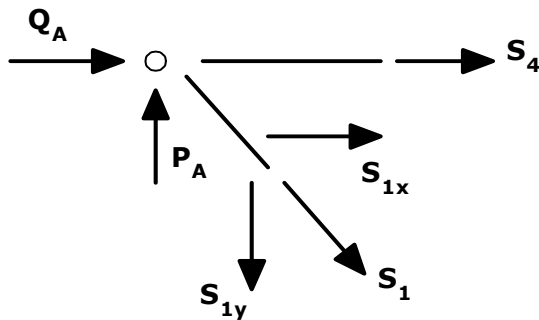
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

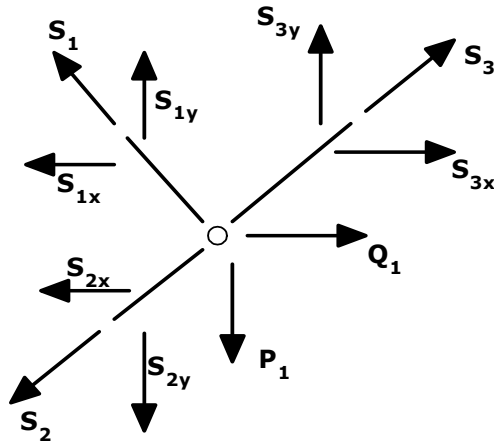
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

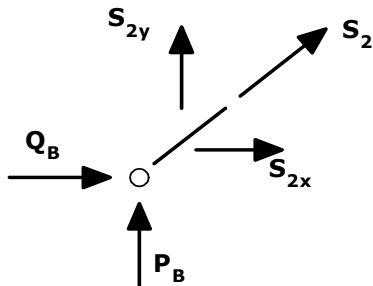
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

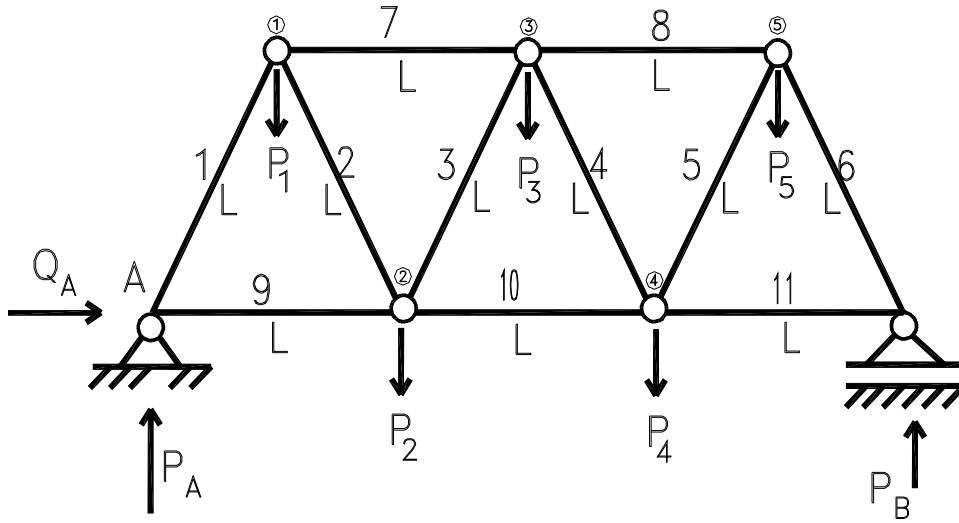
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2} P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2} P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2} P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5$$

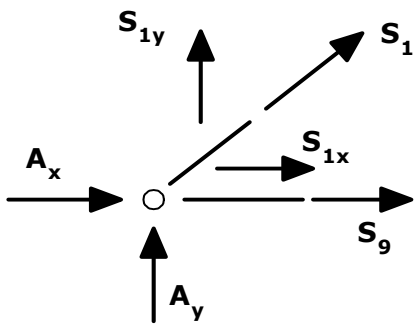
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6} P_1 - \frac{1}{3} P_2 - \frac{1}{2} P_3 - \frac{2}{3} P_4 - \frac{5}{6} P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{1}{3} P_4 + \frac{1}{6} P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

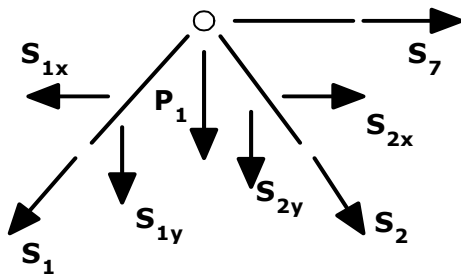
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

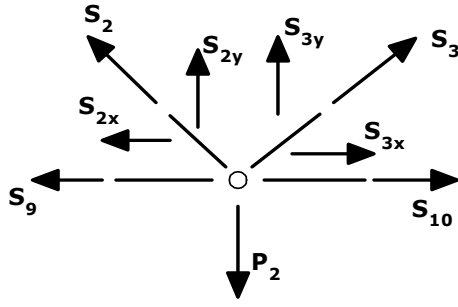
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

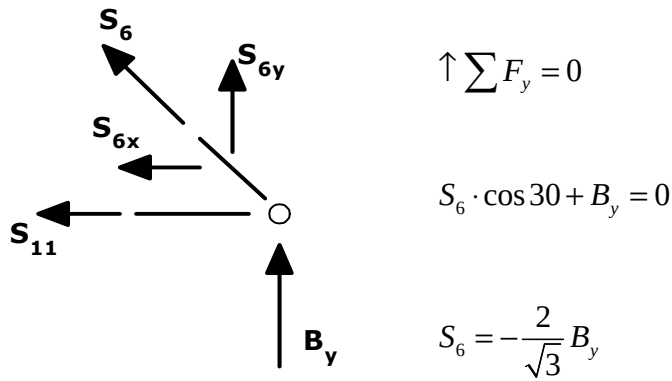
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

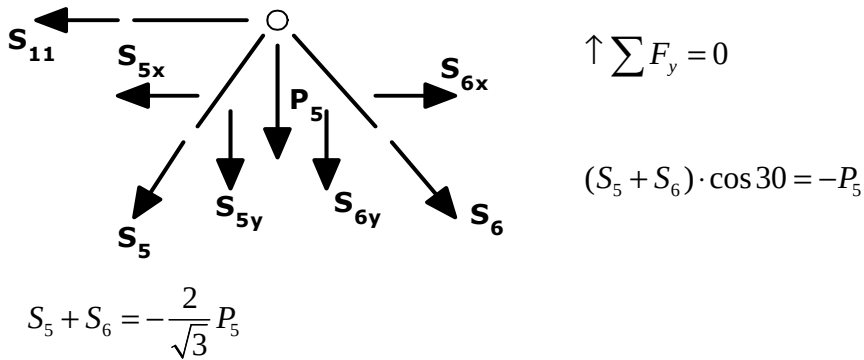
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}}P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}}P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

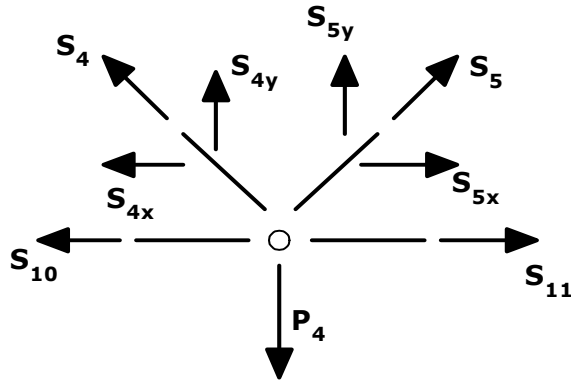
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

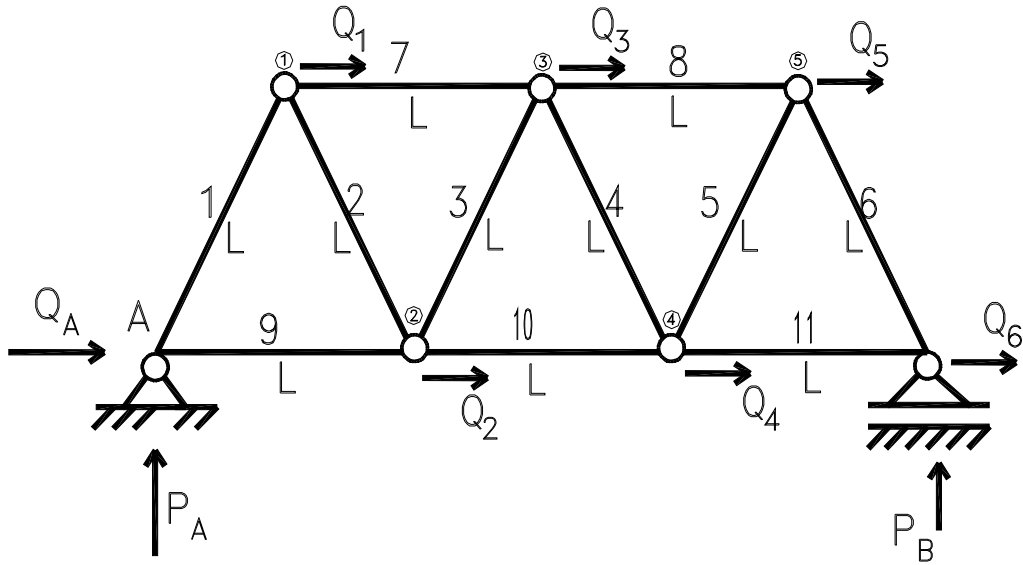
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

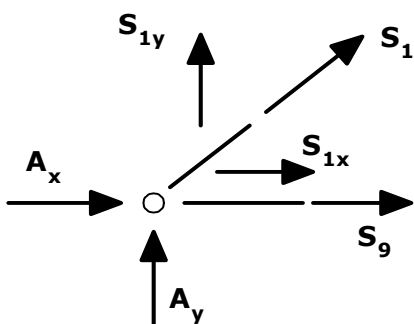
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

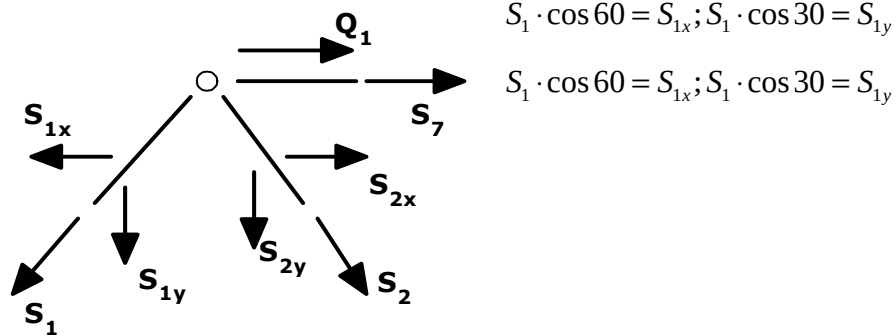
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

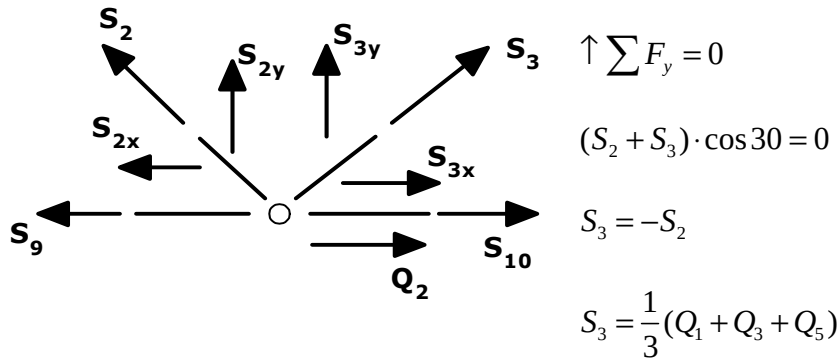
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

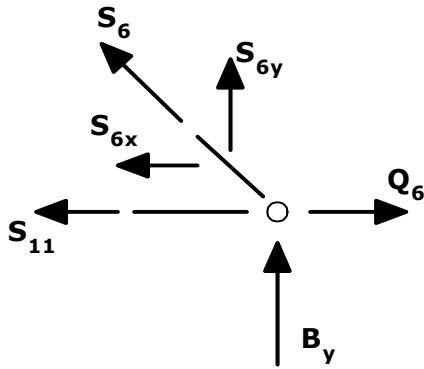
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

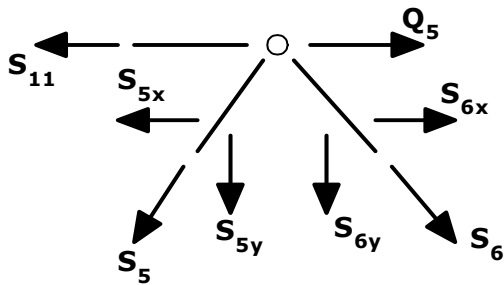
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

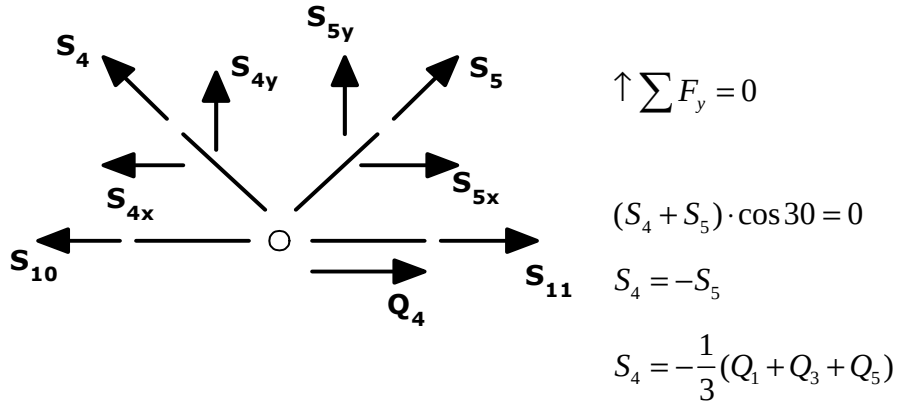
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemekten bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozmesini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

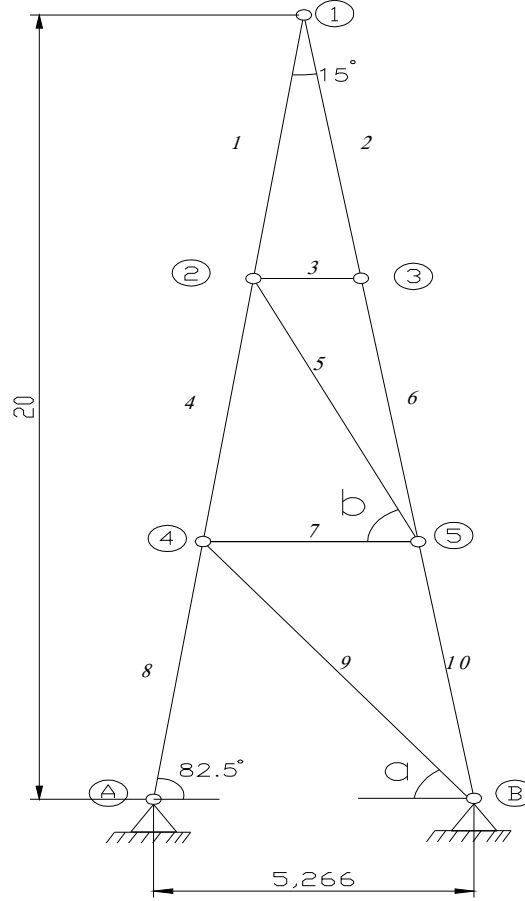
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
 Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
 X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
 Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
 X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
 Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
 X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
 Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
 X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
 Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümde elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

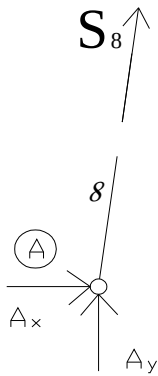
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

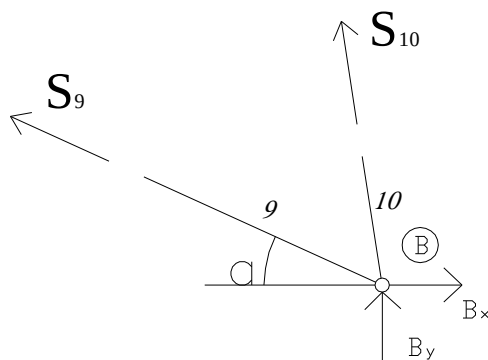
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

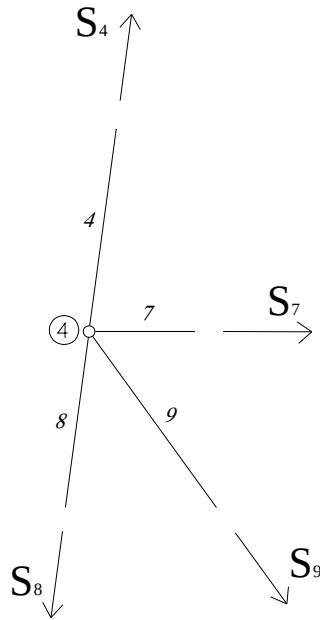
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

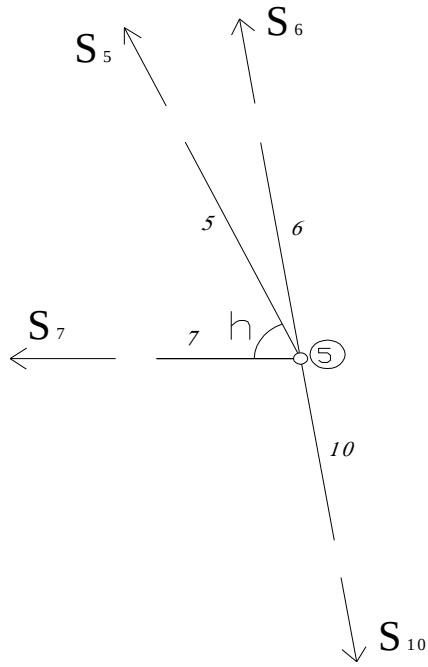
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

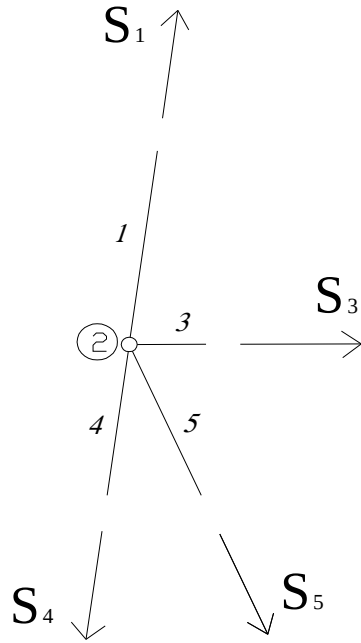
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

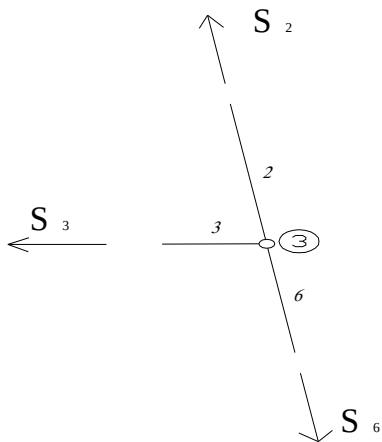
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

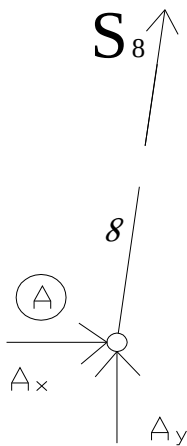
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

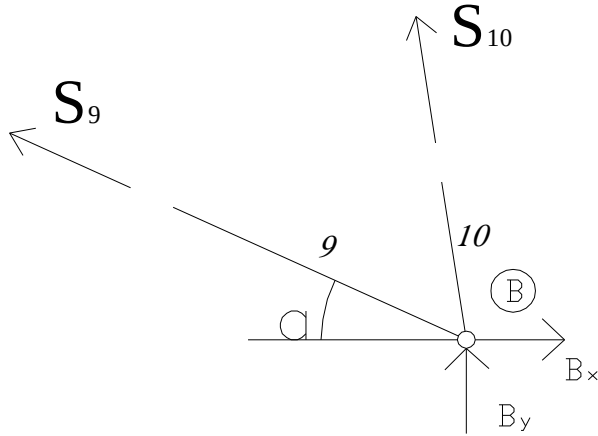
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

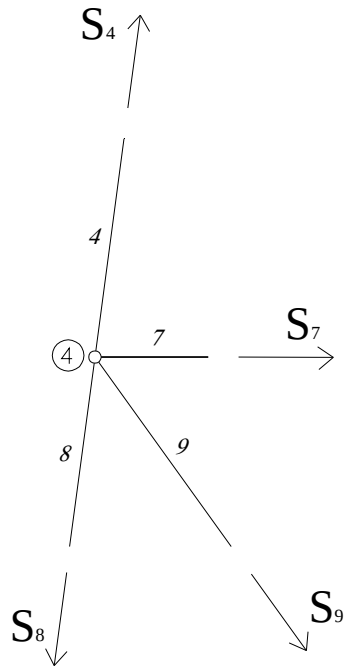
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

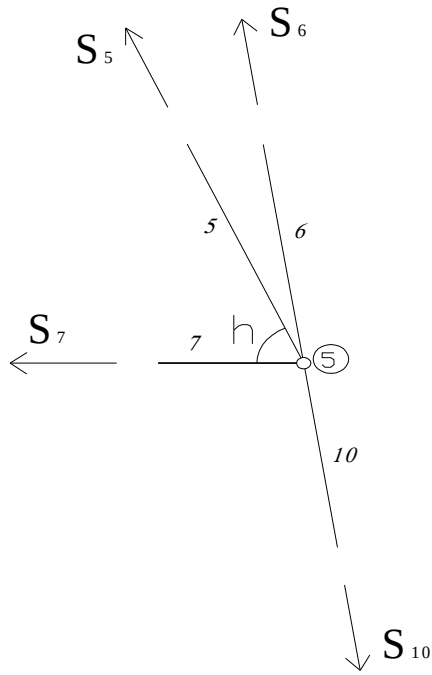
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

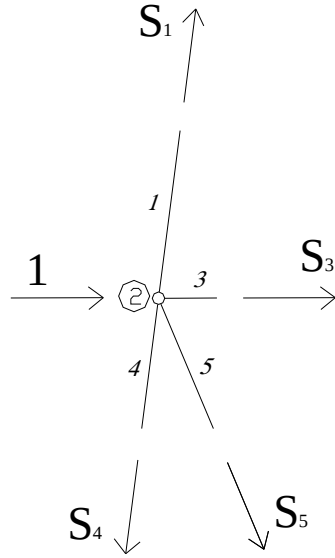
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

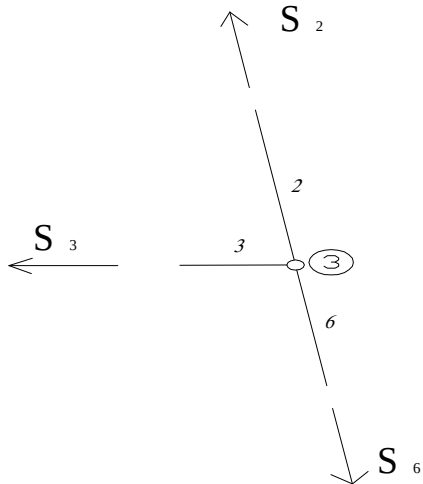
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

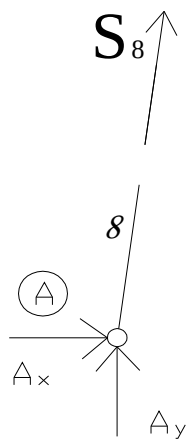
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

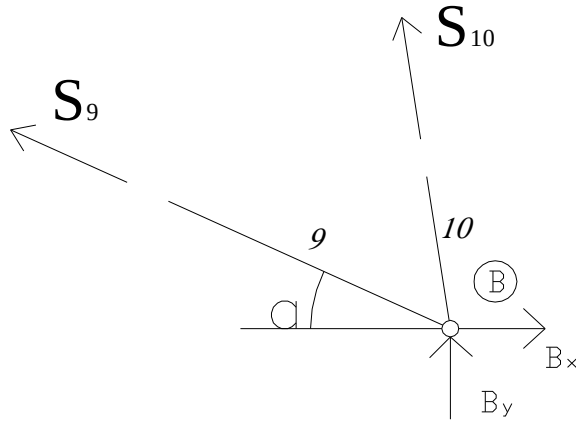
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

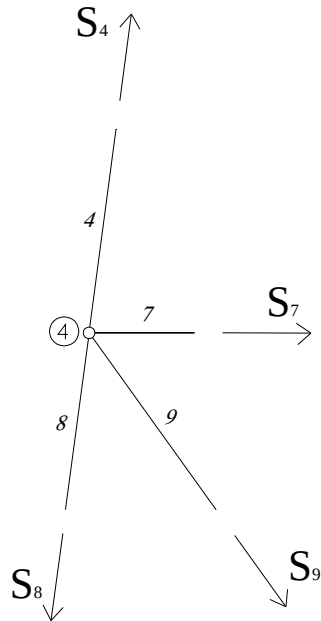
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

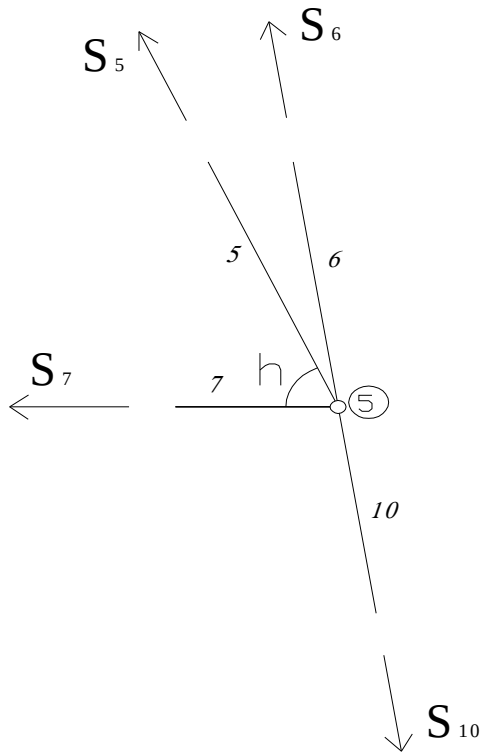
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

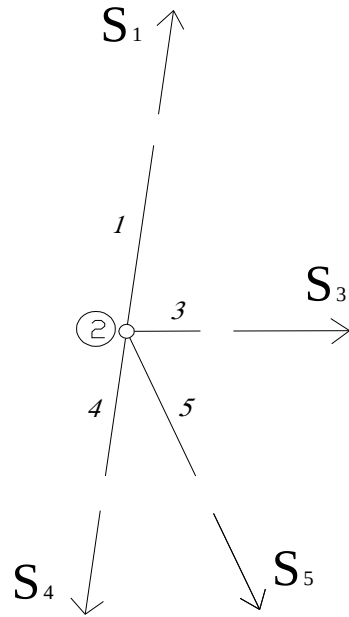
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

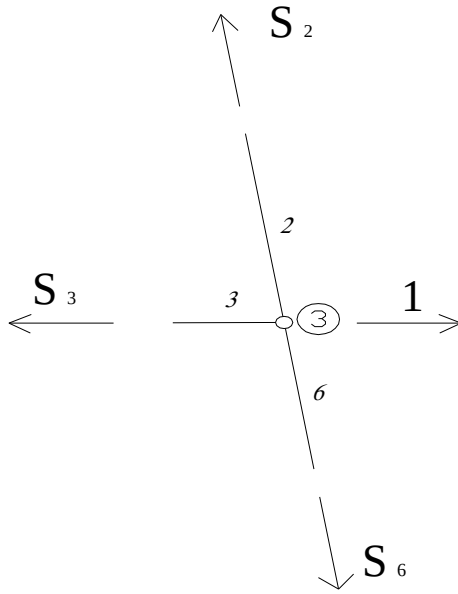
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

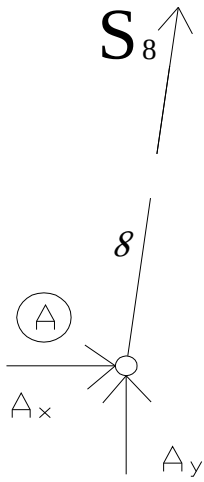
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

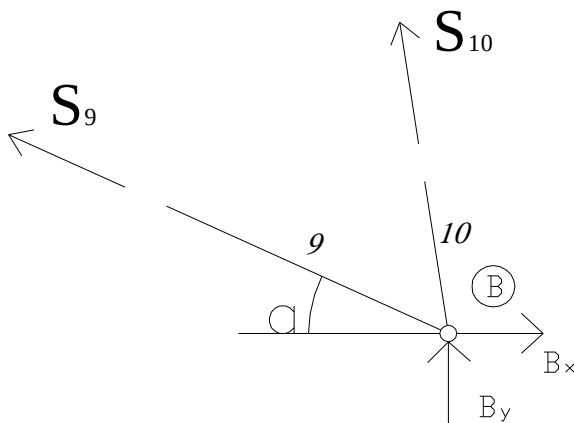
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

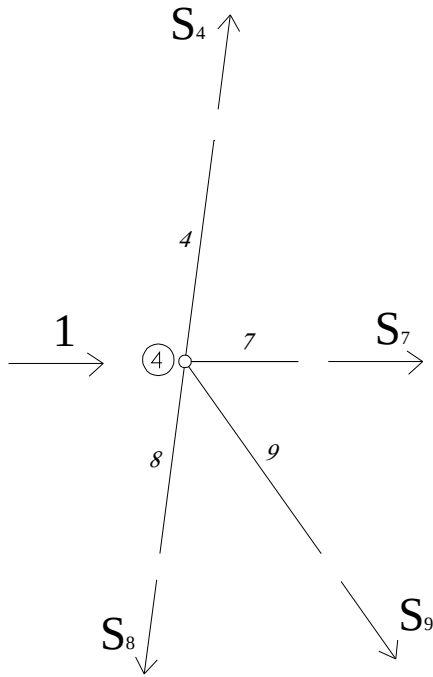
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515$ ve $S_{10} = 0,00$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

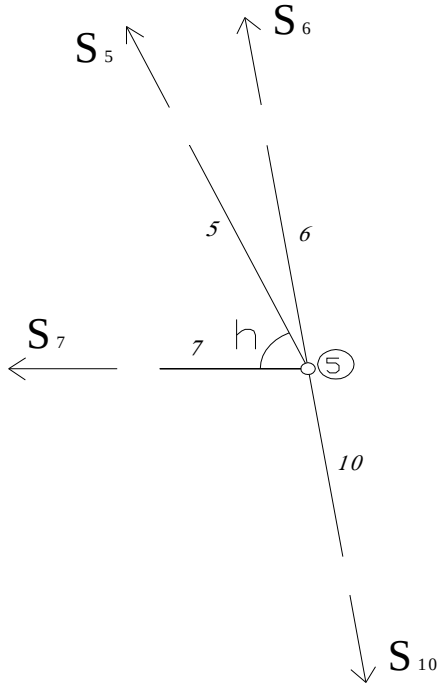
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

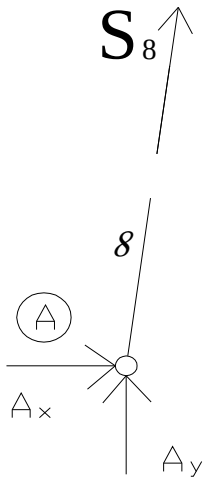
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

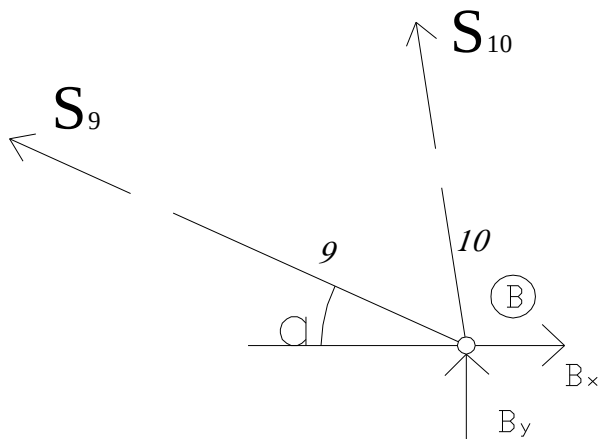
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

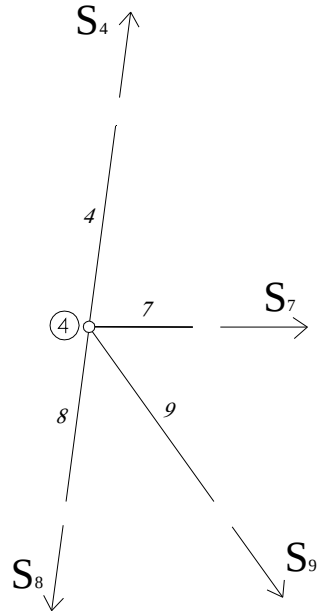
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

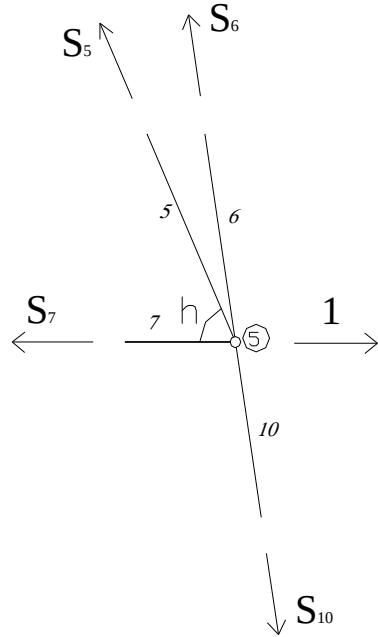
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

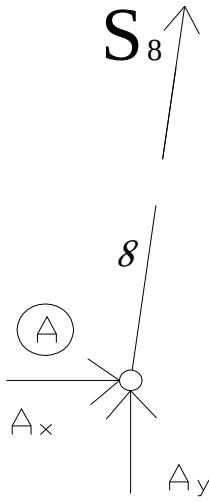
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

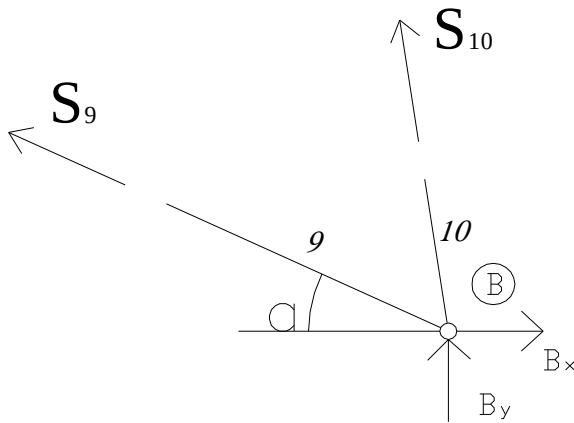
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

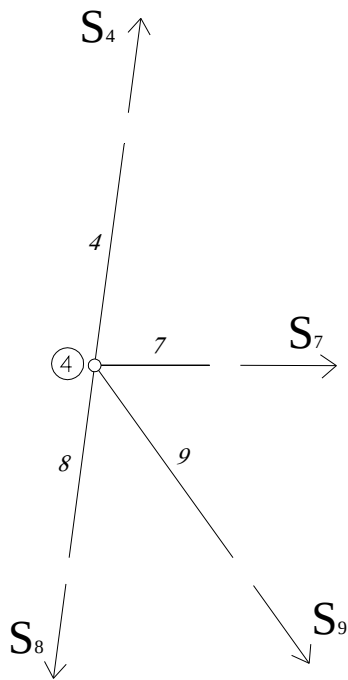
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

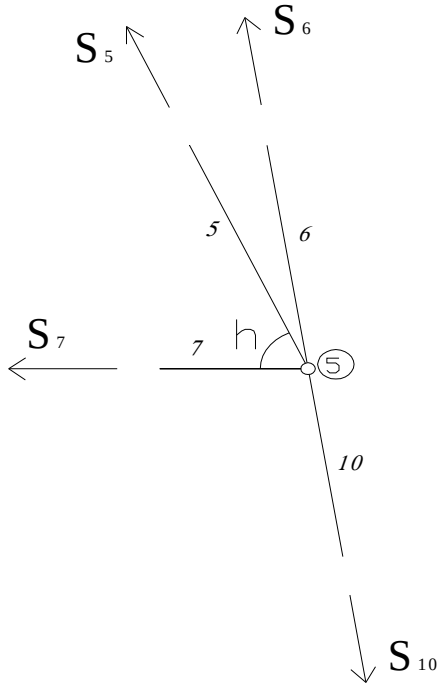
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

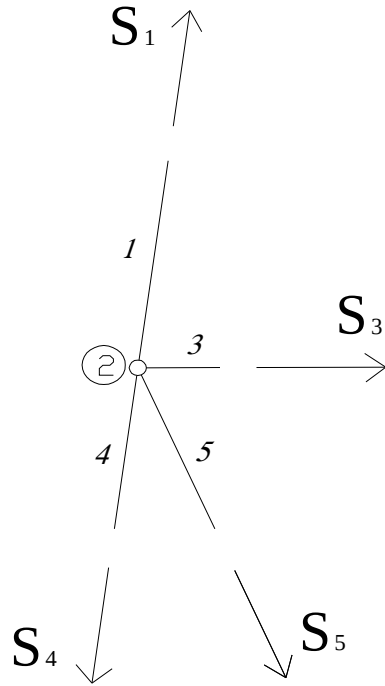
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -0,504$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

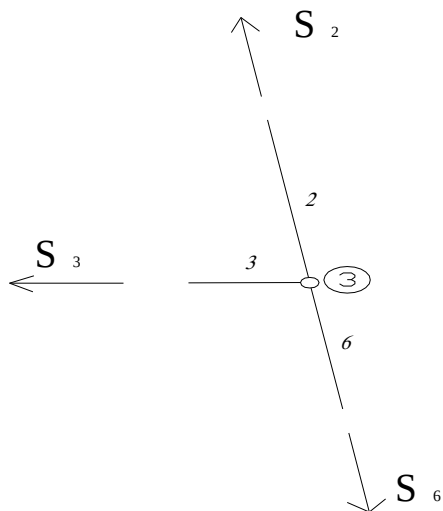
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

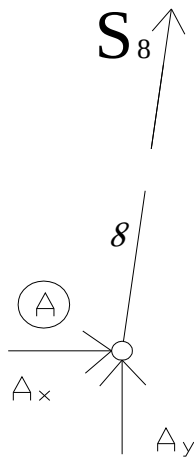
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

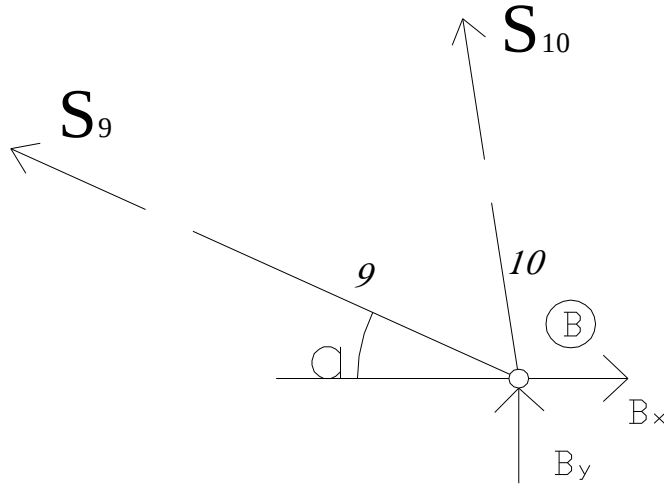
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

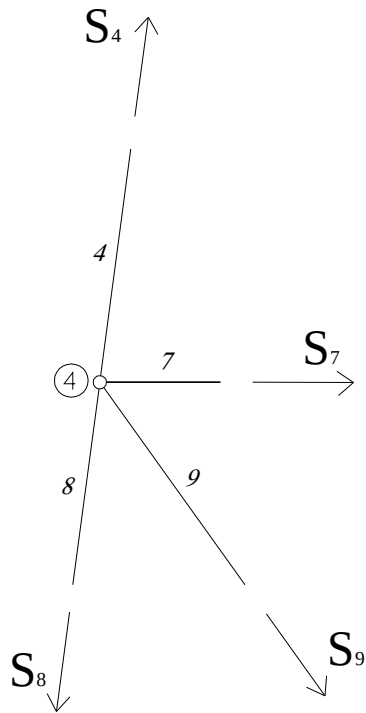
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,252 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

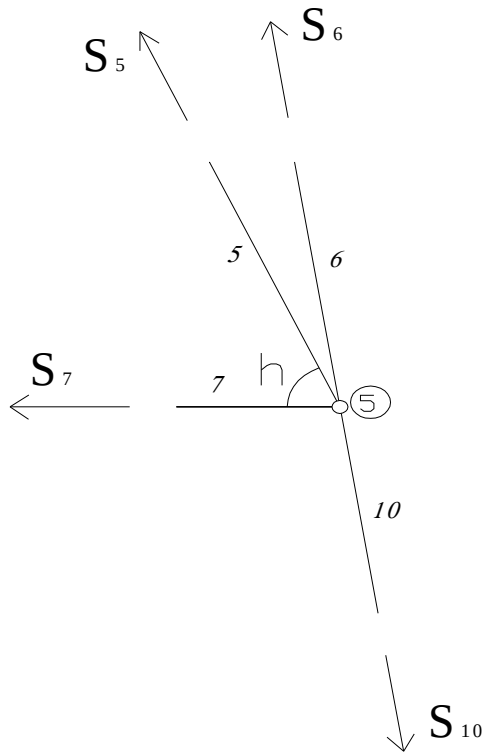
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

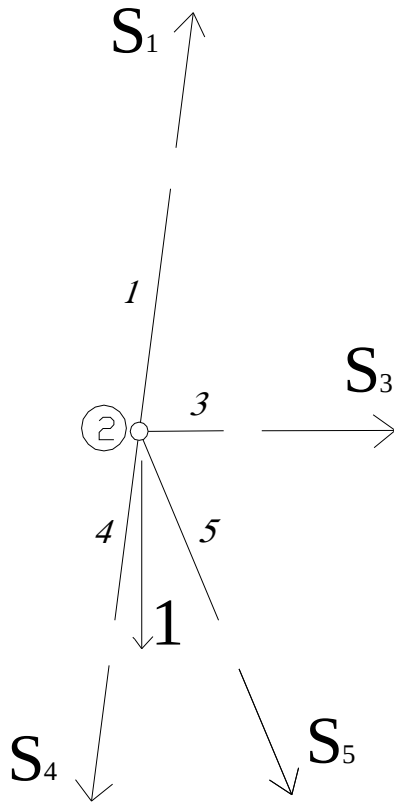
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

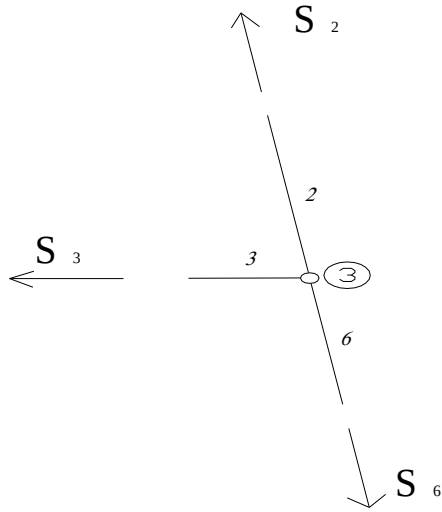
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

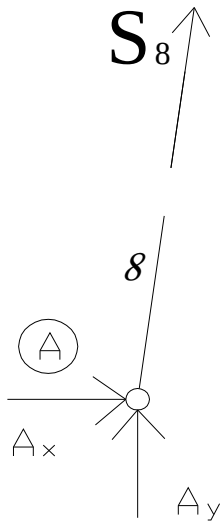
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

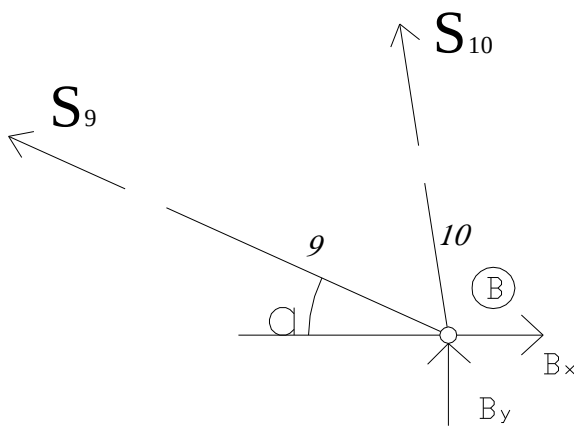
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

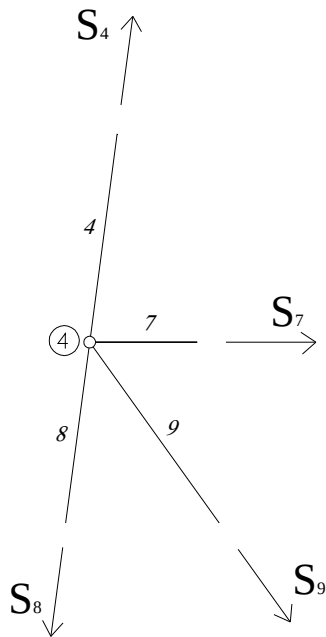
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

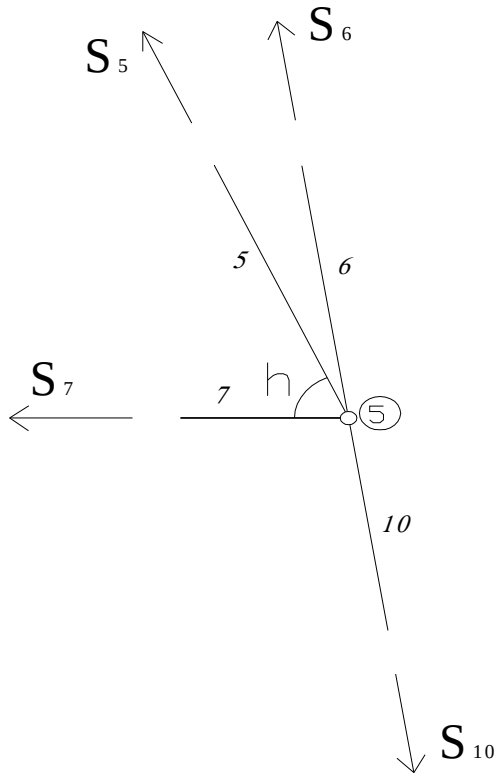
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

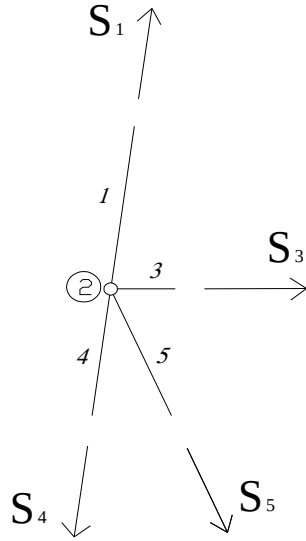
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

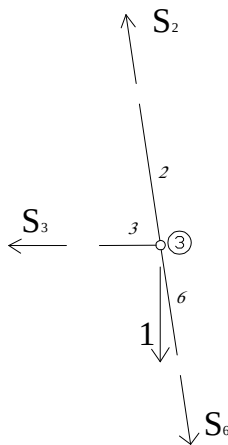
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

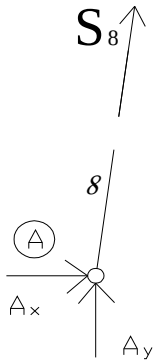
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

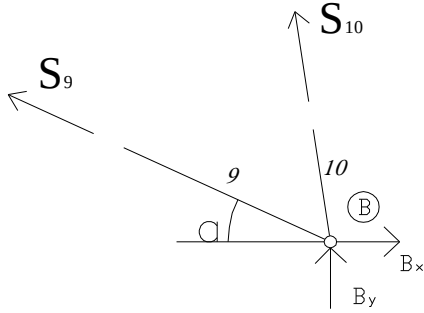
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

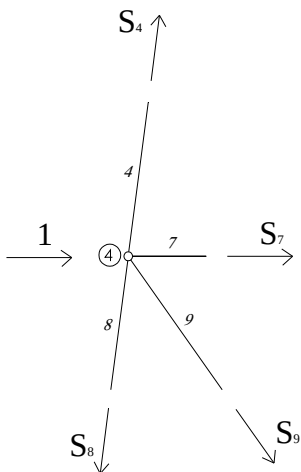
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

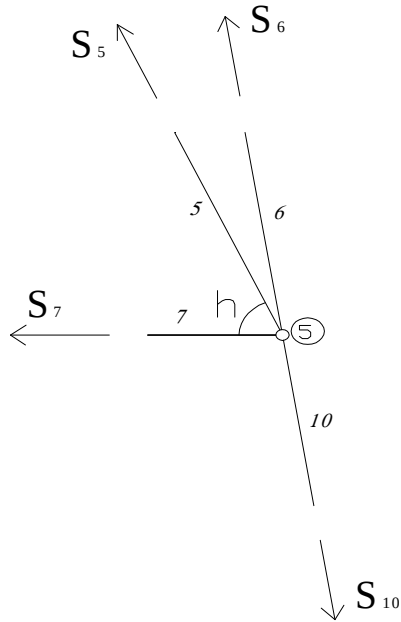
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

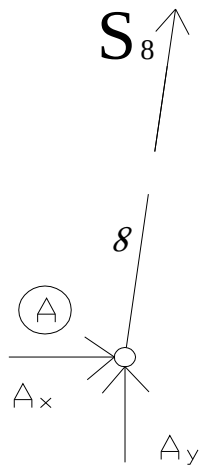
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

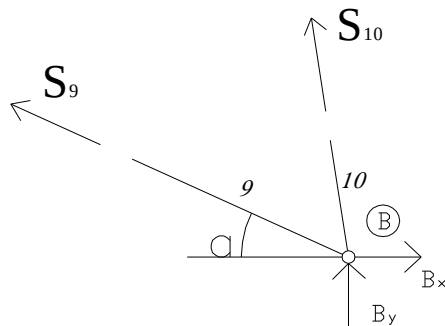
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

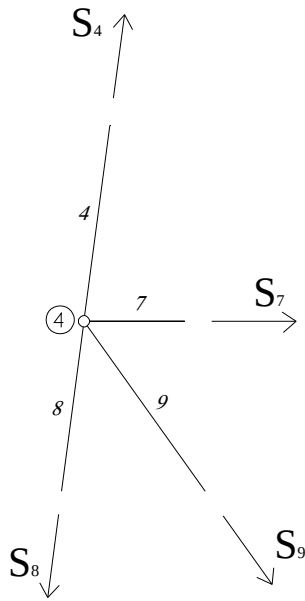
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

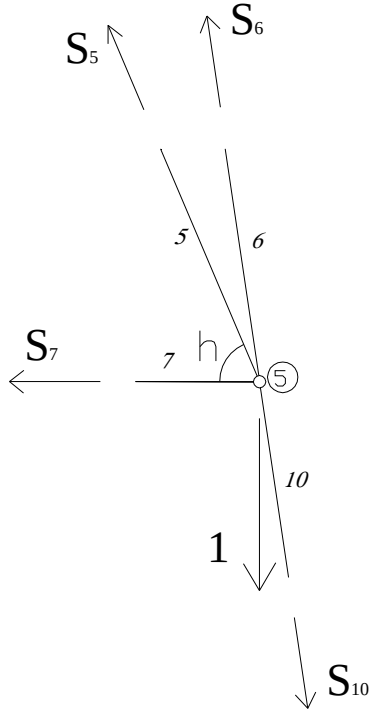
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
  np=100
  write(*,1)
1  format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
  read(*,3) dosya
3  format(a12)
  open(10,file=dosya)
  read(10,*) icubs,ideps
  write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
  write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
  read(*,*)
  write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
  do 22 i=1,icubs

```

```

      read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
      write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
      do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
          bunye(i,j)=0.
30 continue
27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
      read(*,*)
      do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
55 continue
89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
      read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
      read(10,*) nyd
      do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
70 continue
      do 60 i=1,nyd
        read(10,*) Q(i)
60 continue

c   mt*b*m
      read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
      call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
      write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
      do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
46 continue
      read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
      call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
      write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
      do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
48 continue
      read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
      call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
      write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```

```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```

```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTIGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

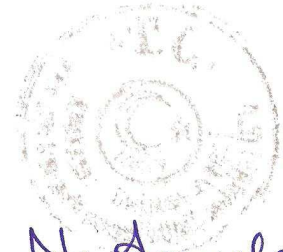


Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODEL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castigliona metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

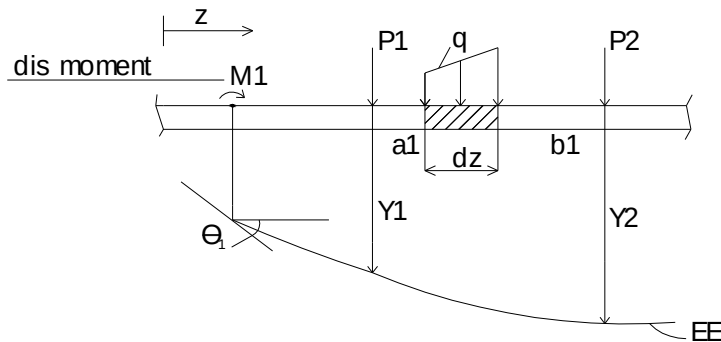
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

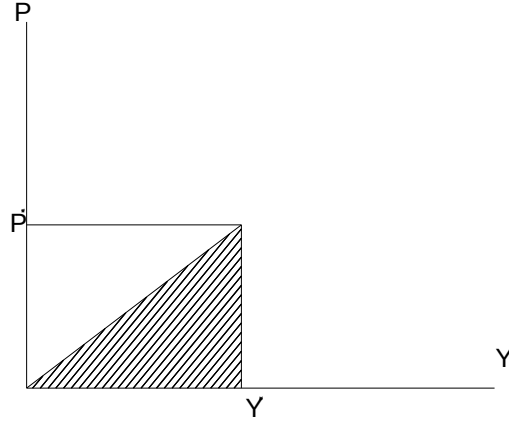
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

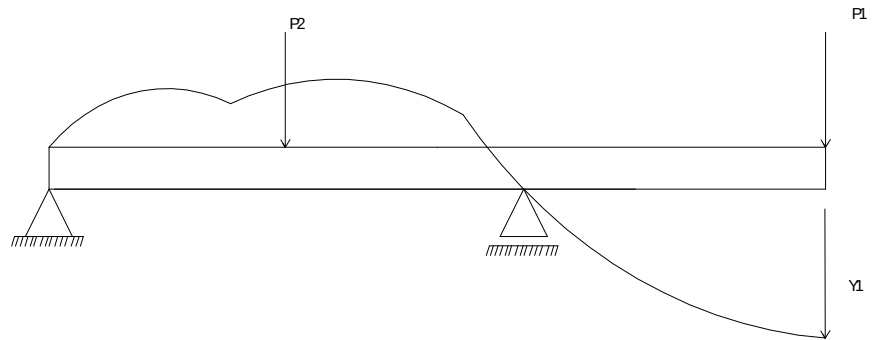
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

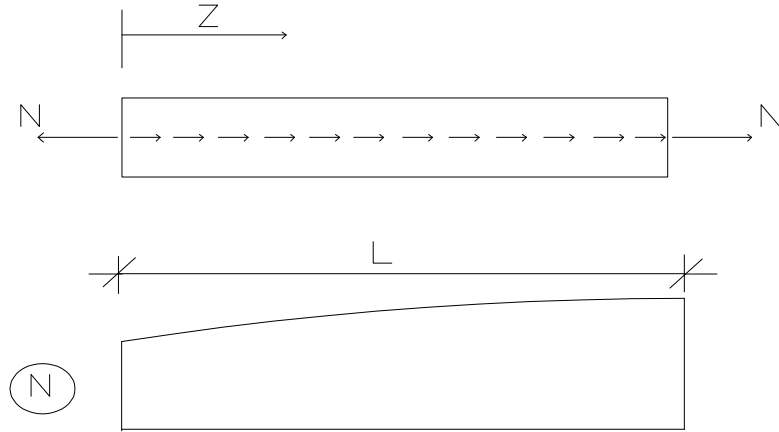
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilenecek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet oluştuğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değıştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değıştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değıştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönölür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değerin M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

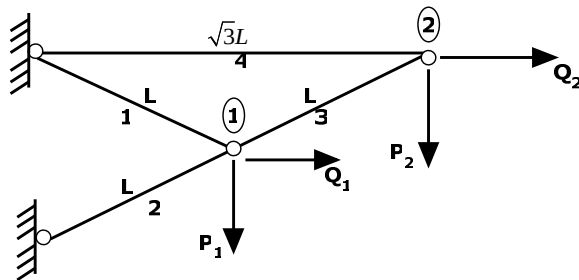
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

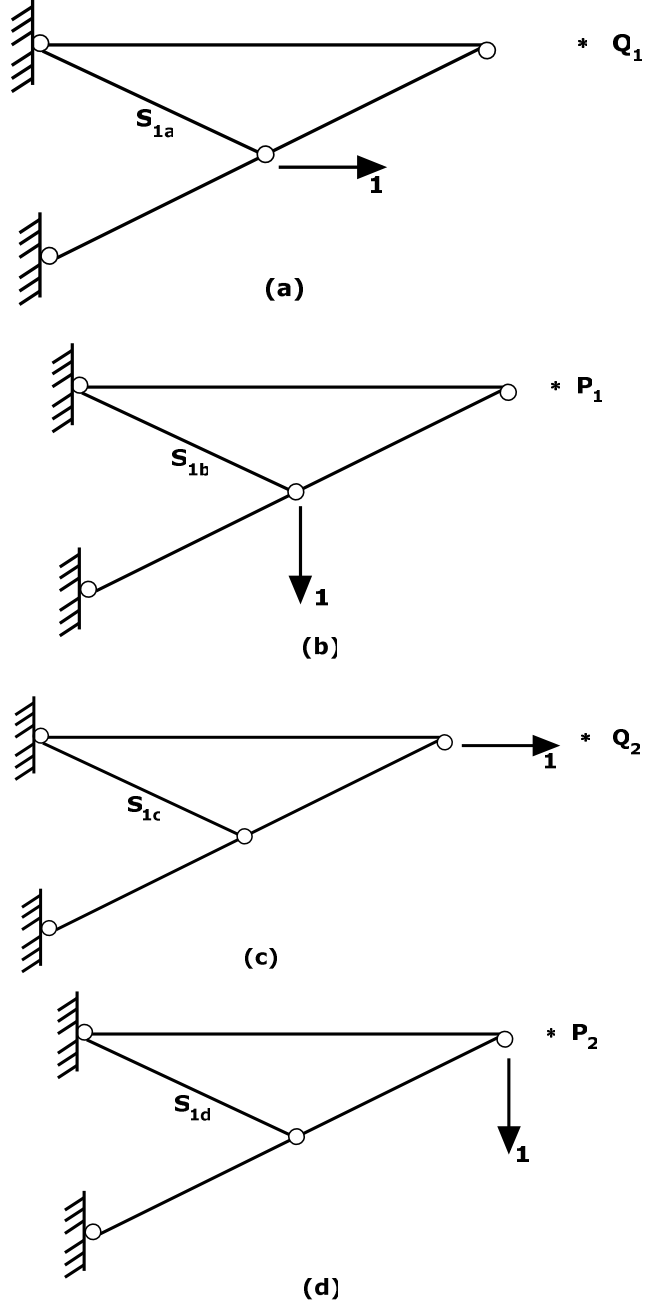
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyondan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu gör÷lür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

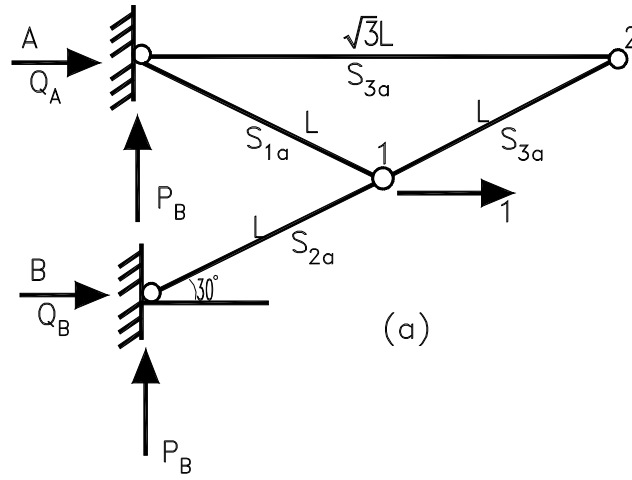
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

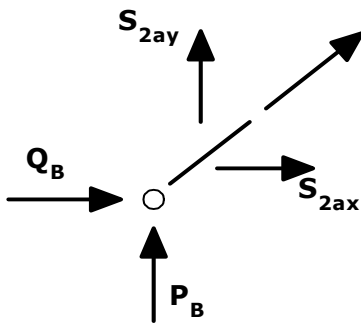
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

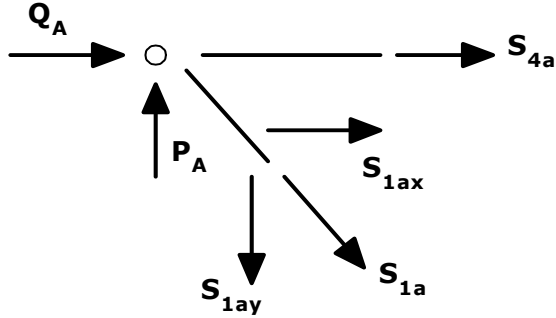
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

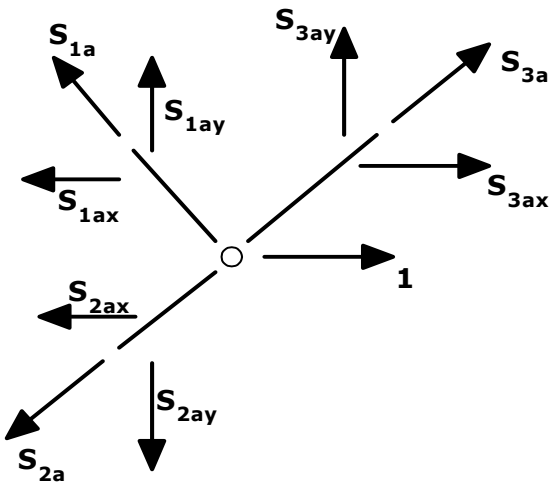
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

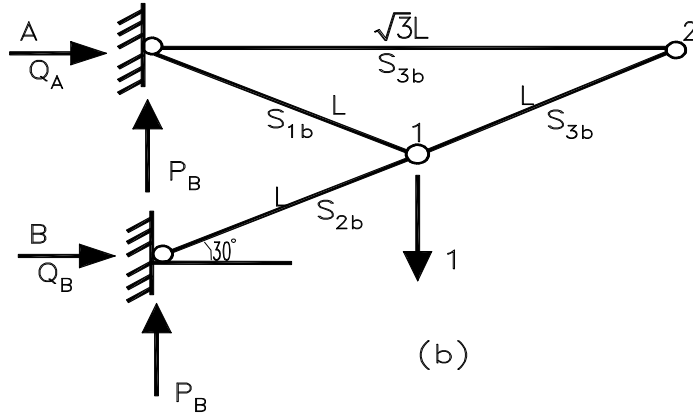
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

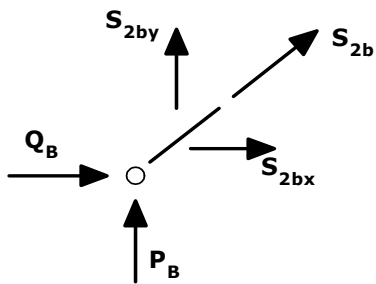
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

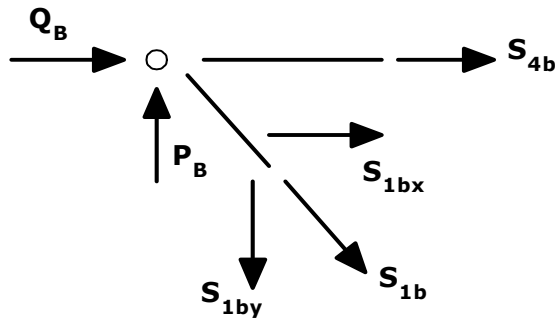
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

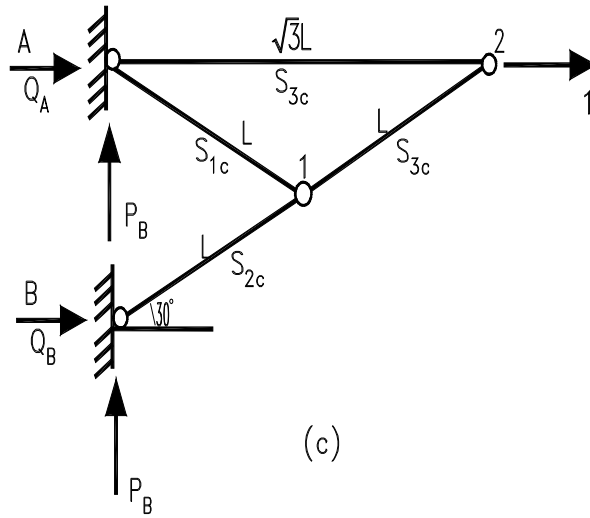
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

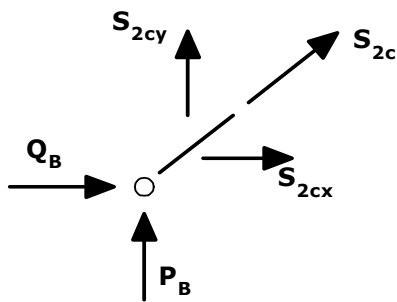
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

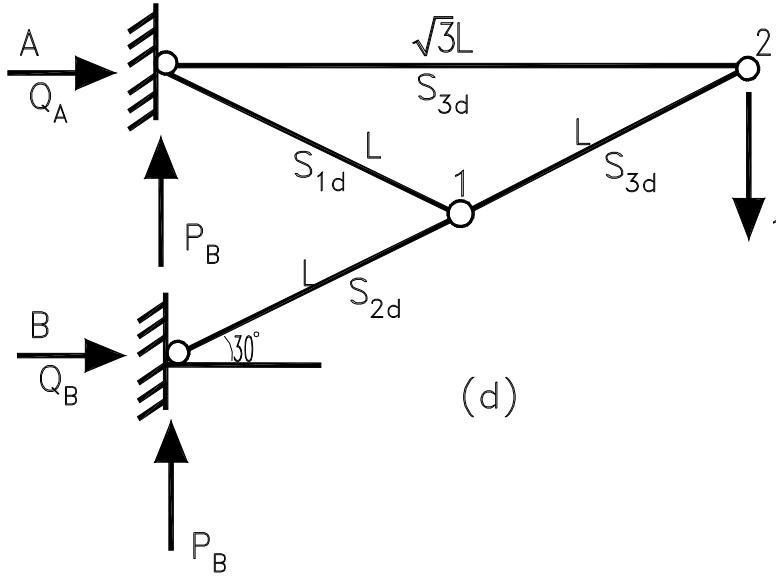
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

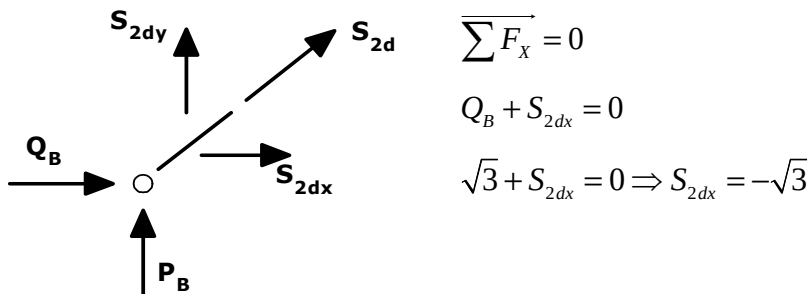
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

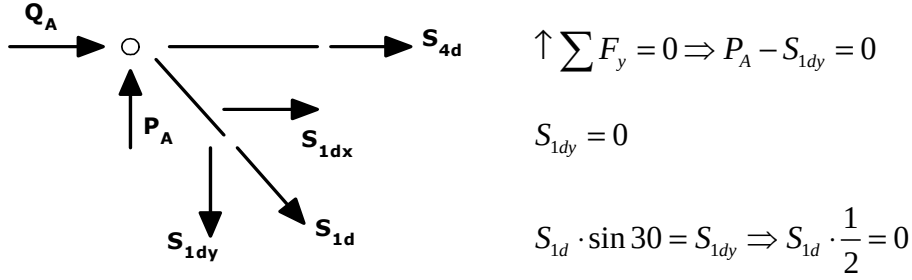
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

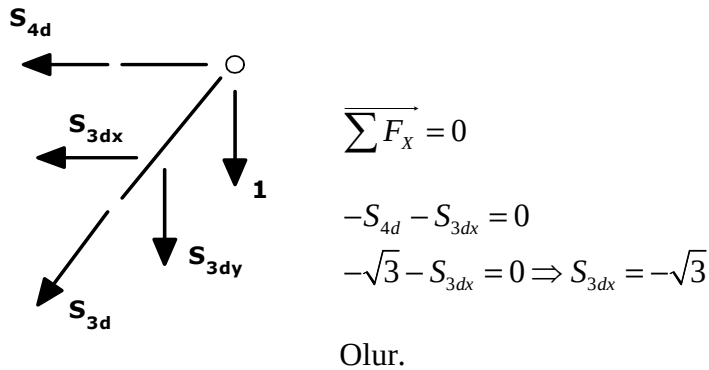
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1 \text{ ve } S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

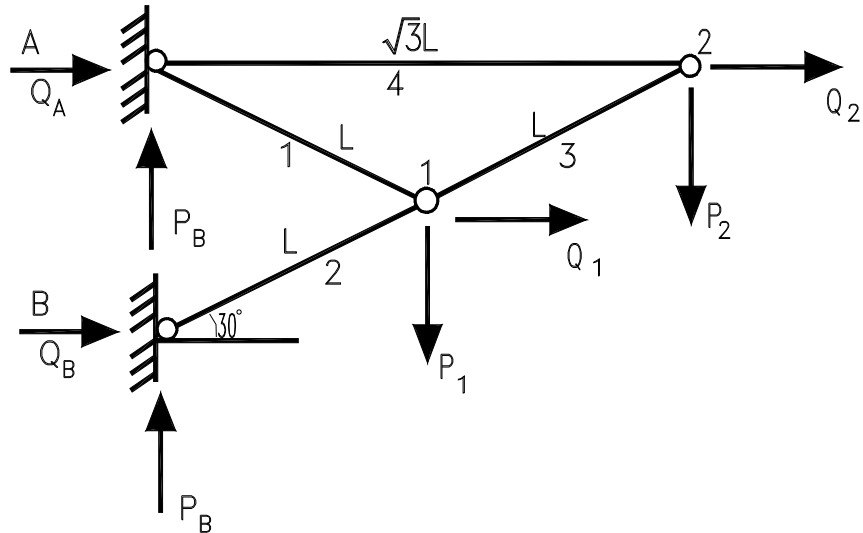
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

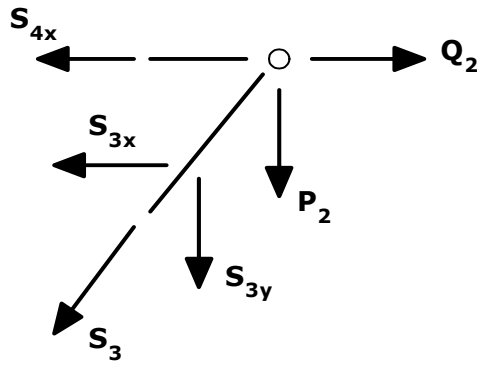
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

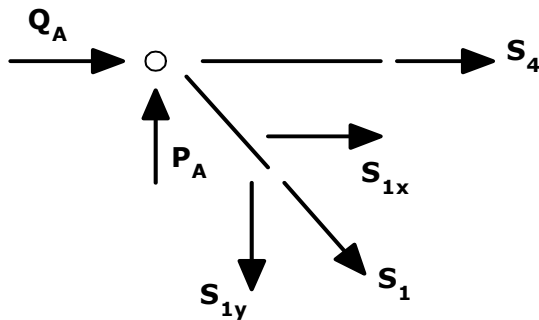
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

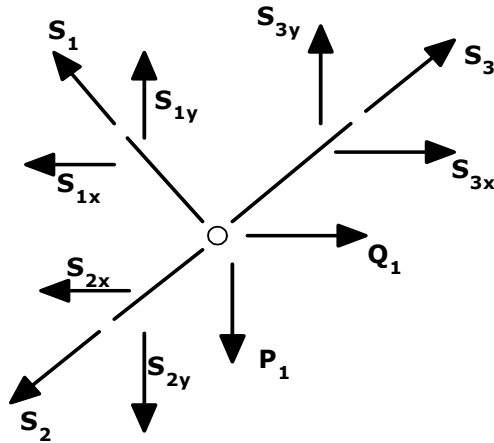
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

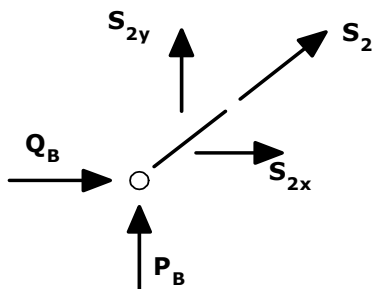
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

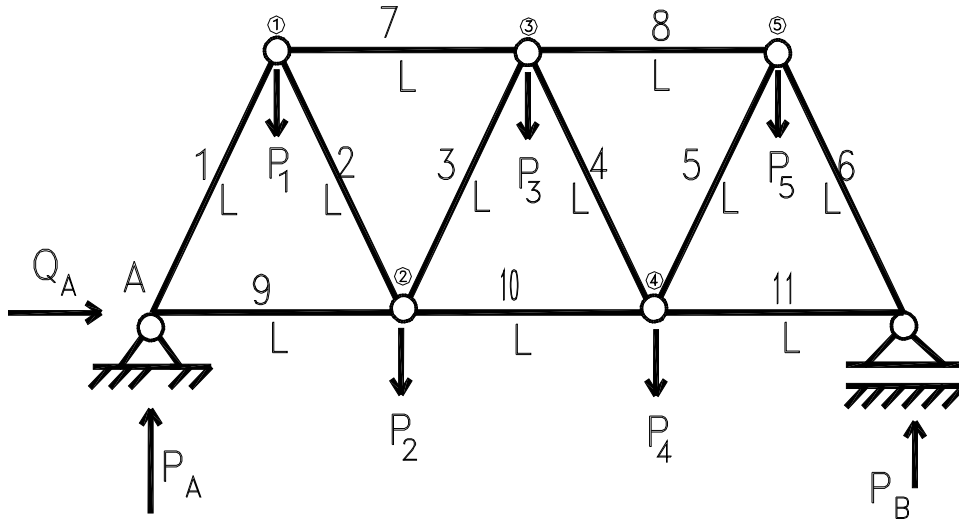
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2}P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2}P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2}P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{2}{3}P_4 + \frac{5}{6}P_5$$

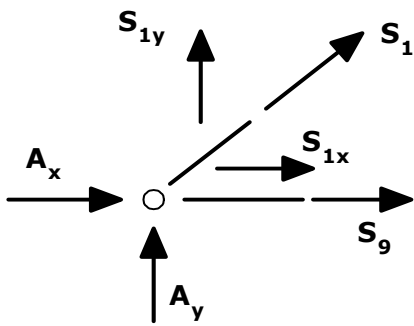
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{2}{3}P_4 - \frac{5}{6}P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{3}P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

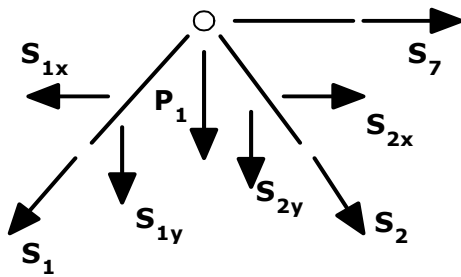
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

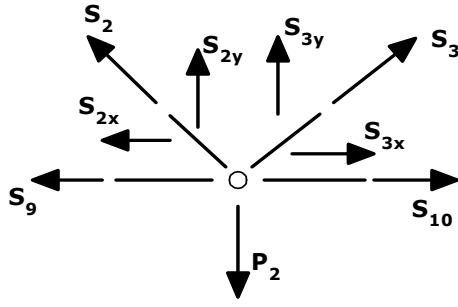
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

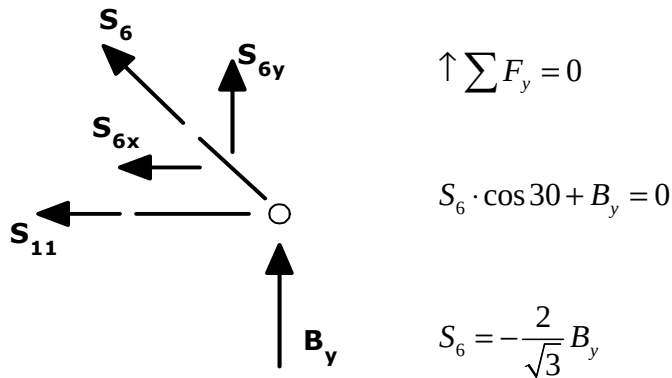
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

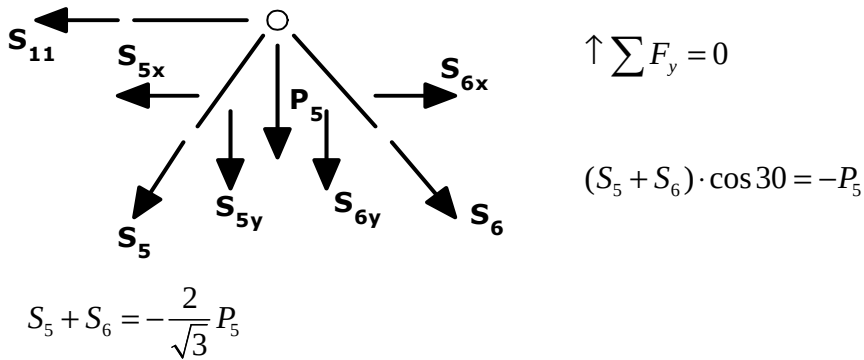
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}}P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}}P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

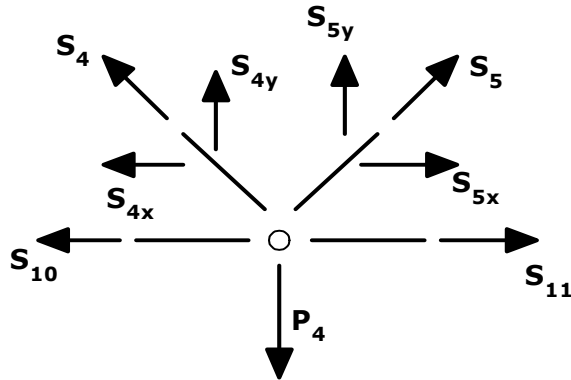
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

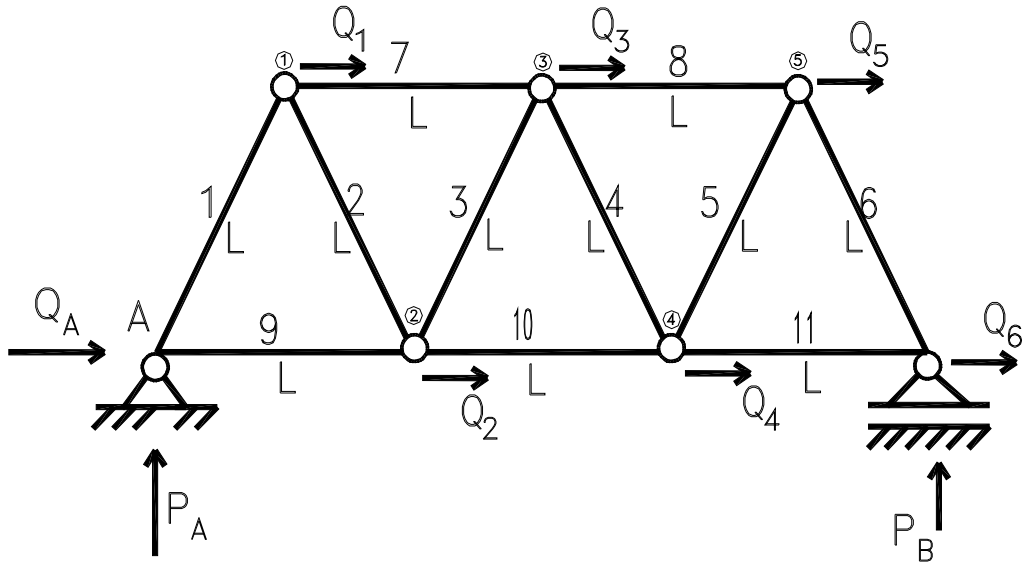
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

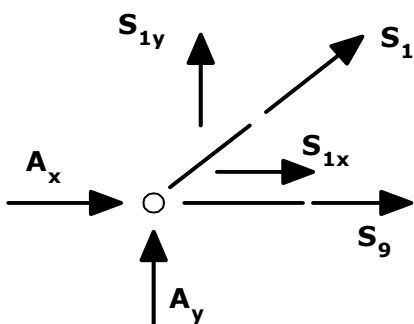
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

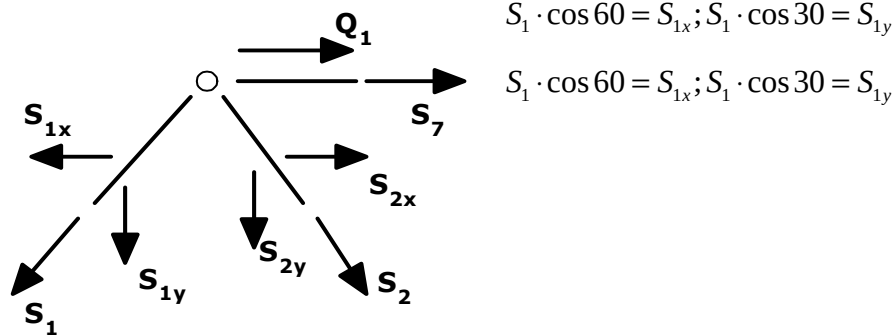
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

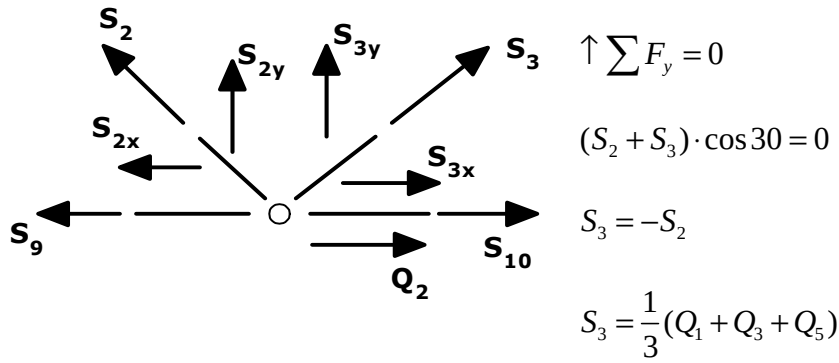
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

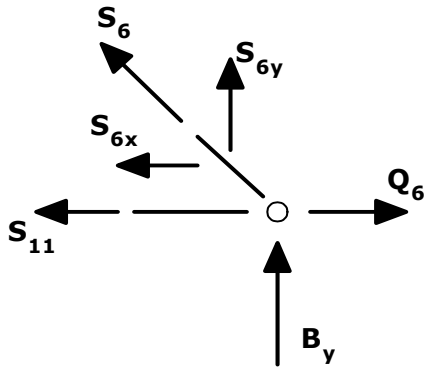
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

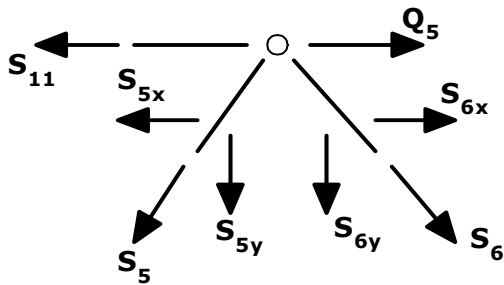
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

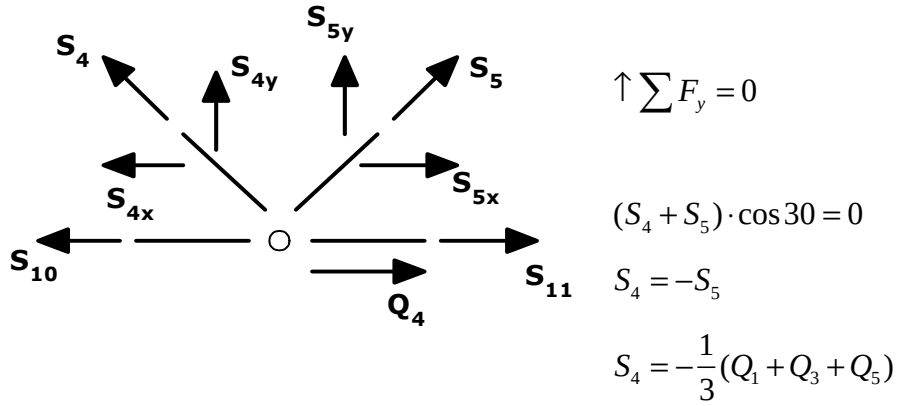
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemeden bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozmesini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

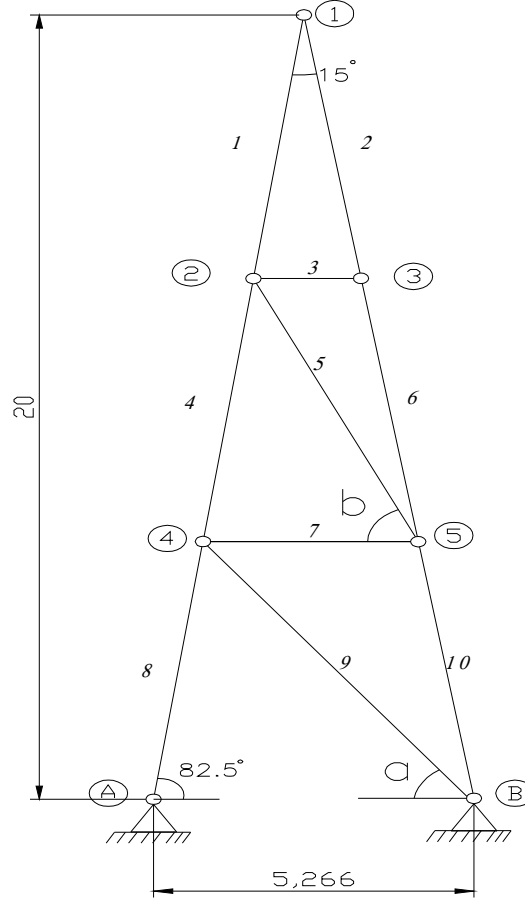
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
\end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümde elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü; Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

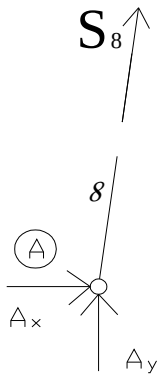
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

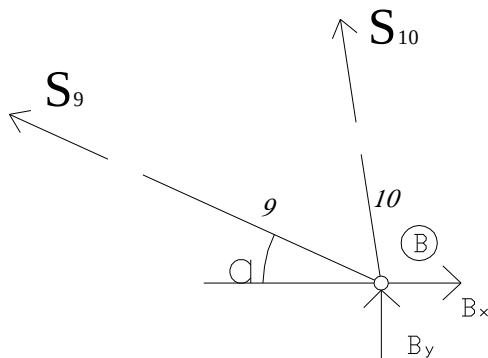
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

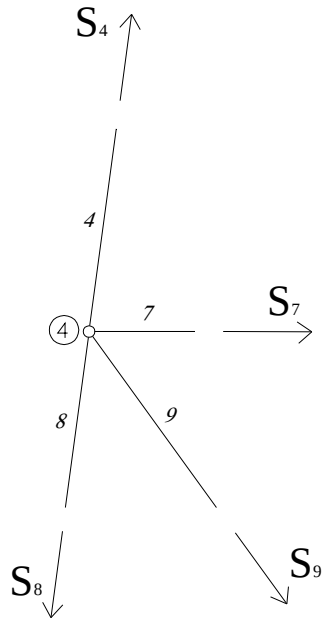
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

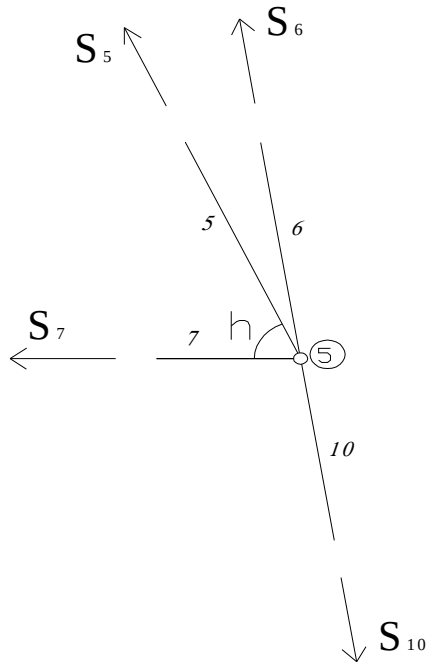
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

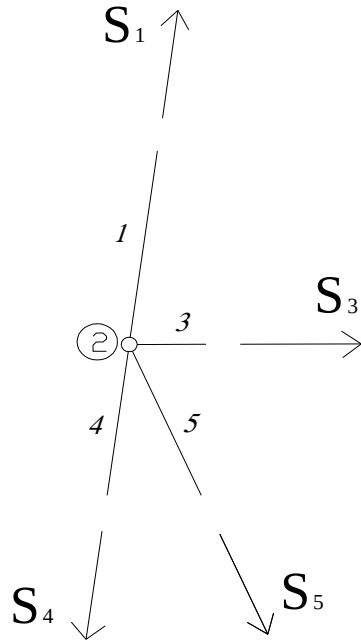
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

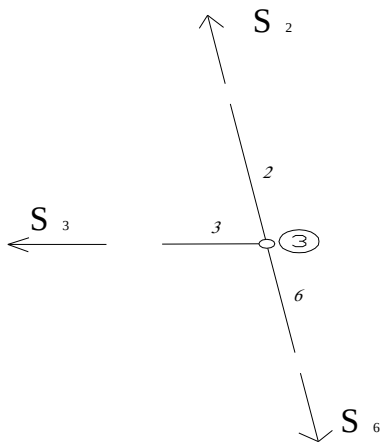
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

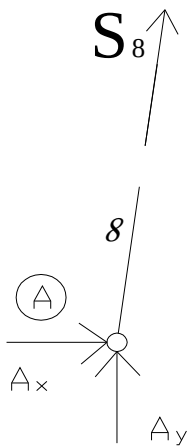
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

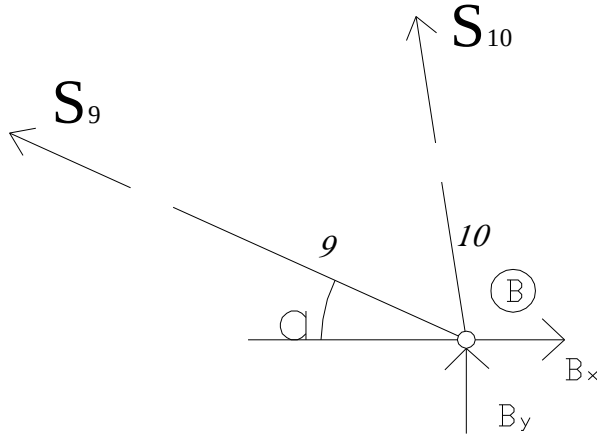
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

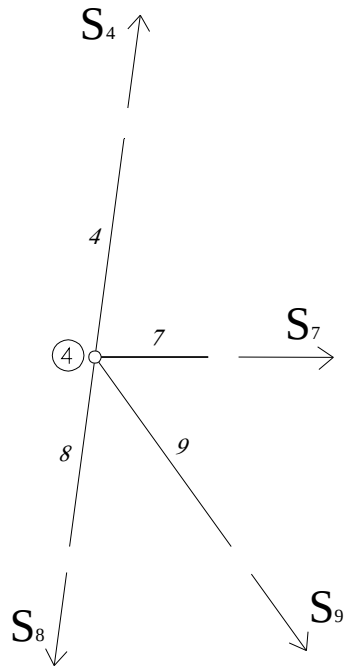
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

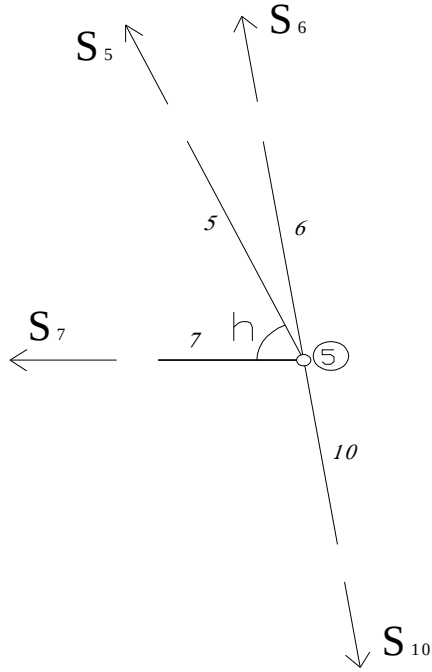
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

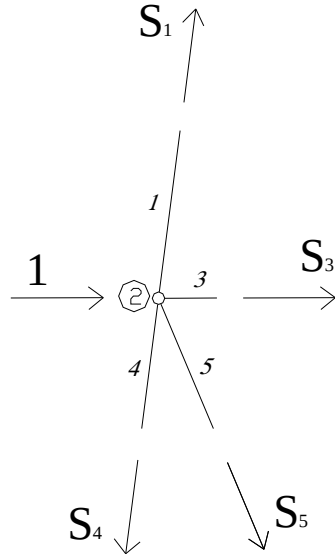
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

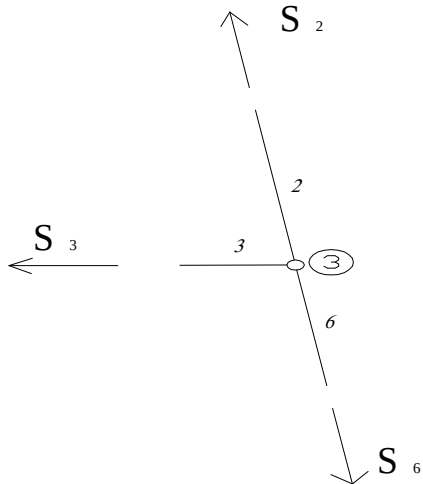
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

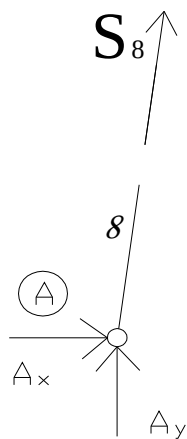
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

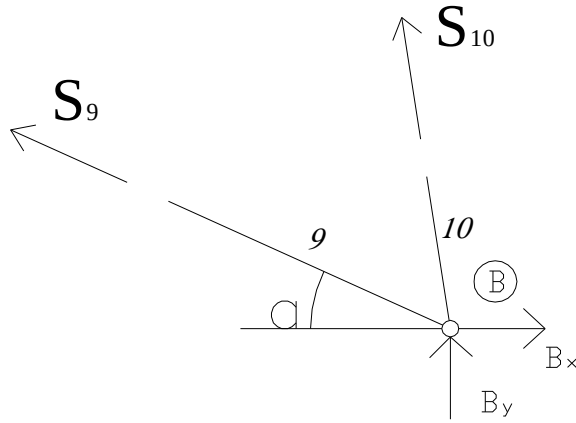
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum F_x = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

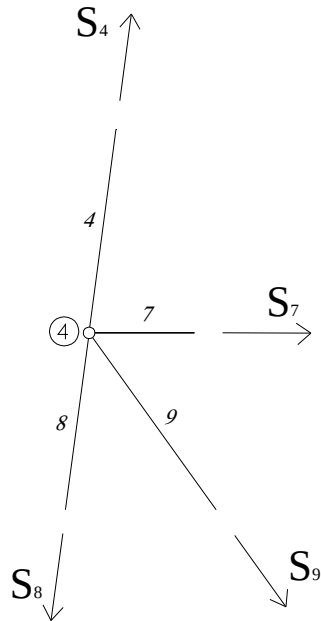
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

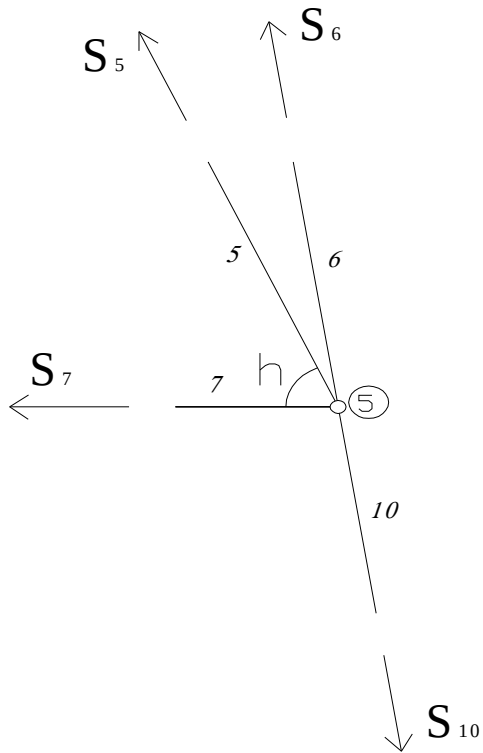
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

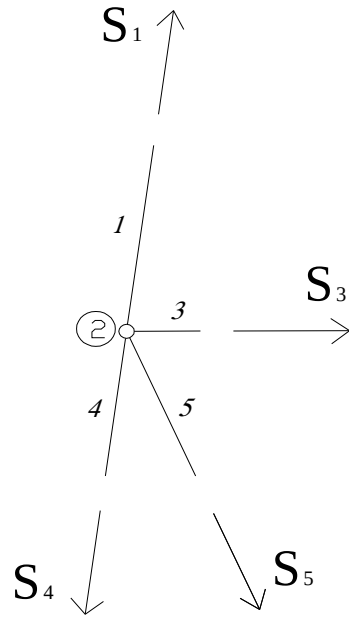
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

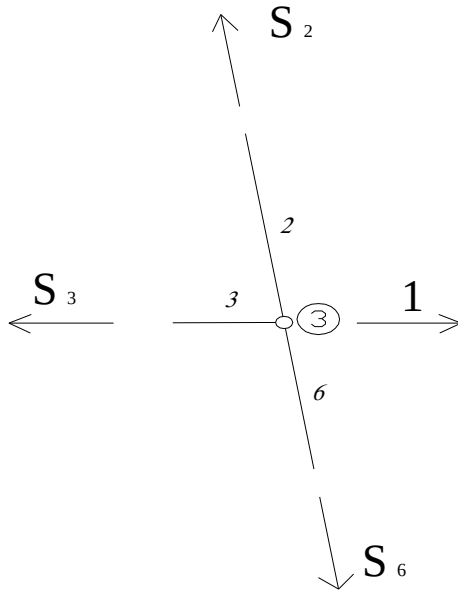
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_2 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_2 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

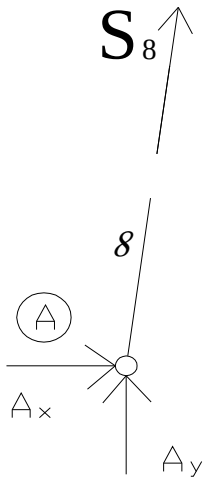
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

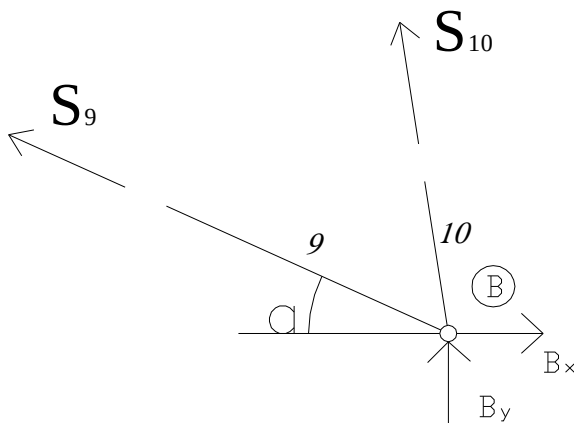
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

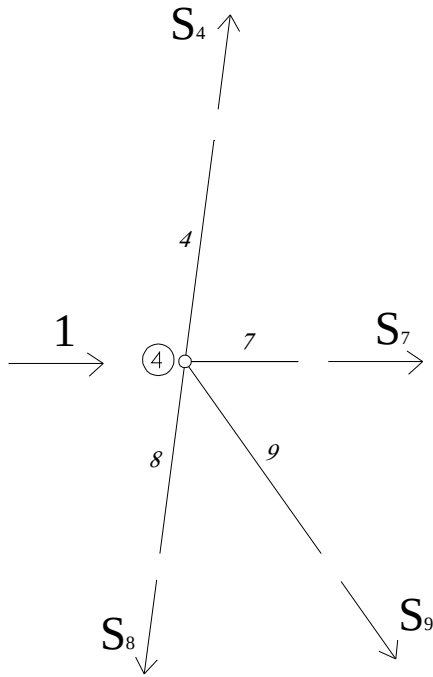
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515$ ve $S_{10} = 0,00$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

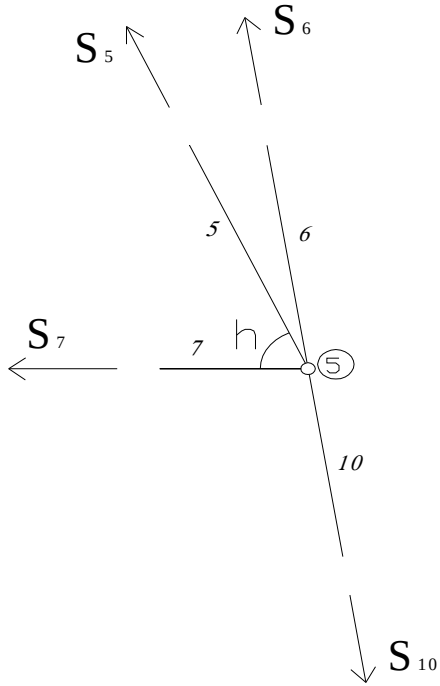
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

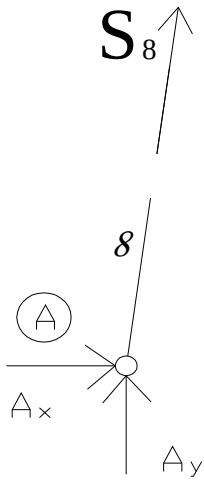
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

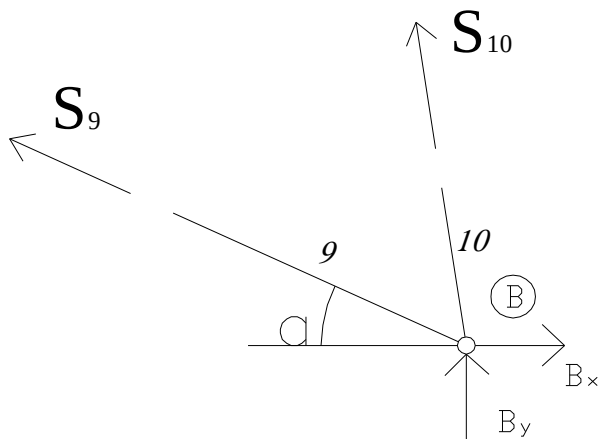
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

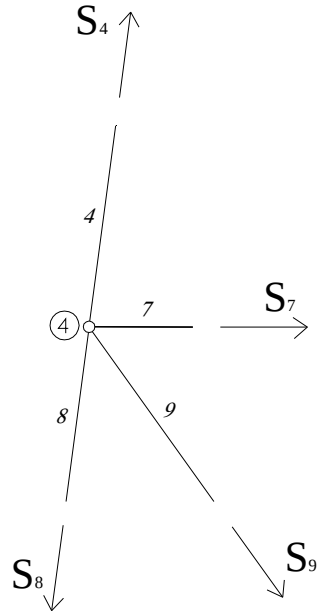
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

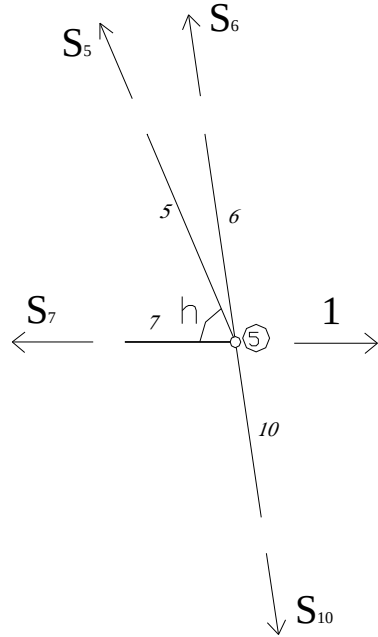
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

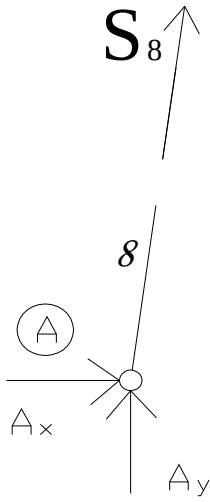
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

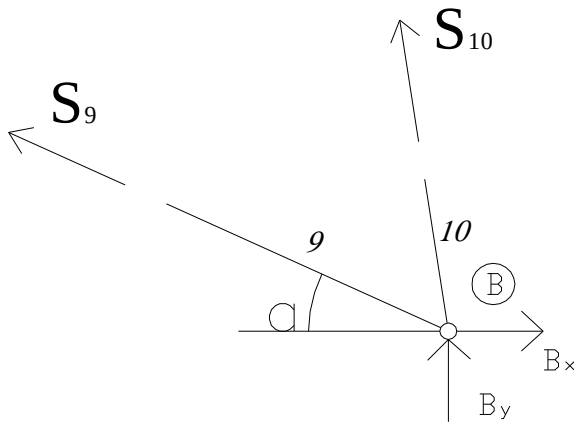
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

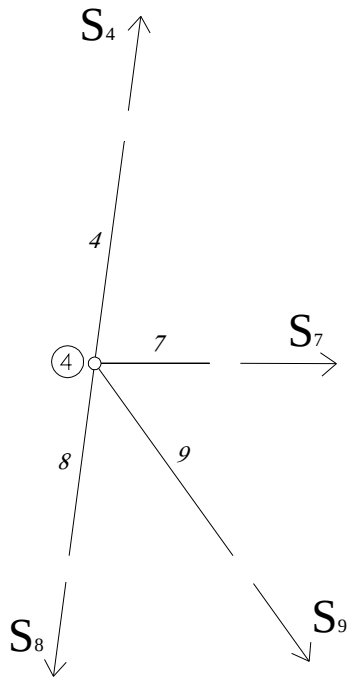
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

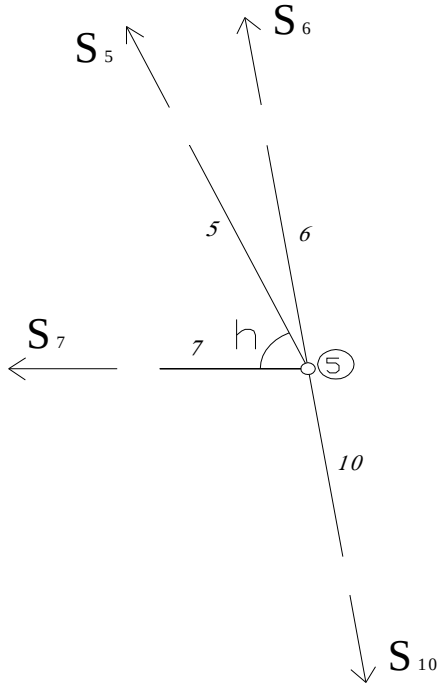
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

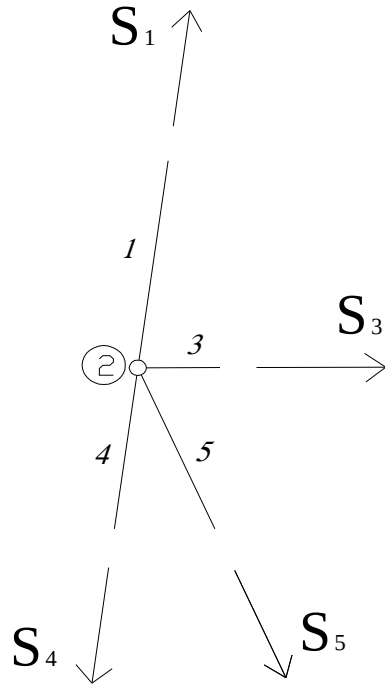
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -0,504$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

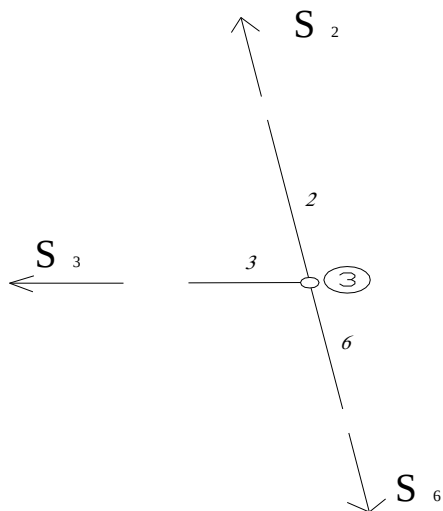
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

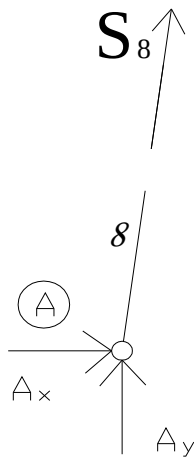
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

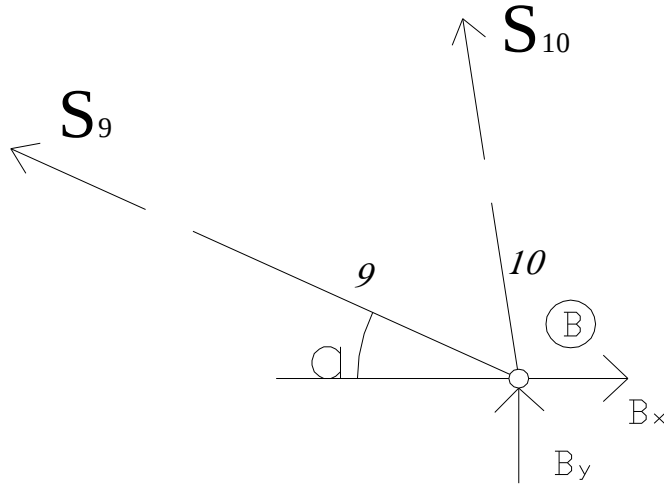
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

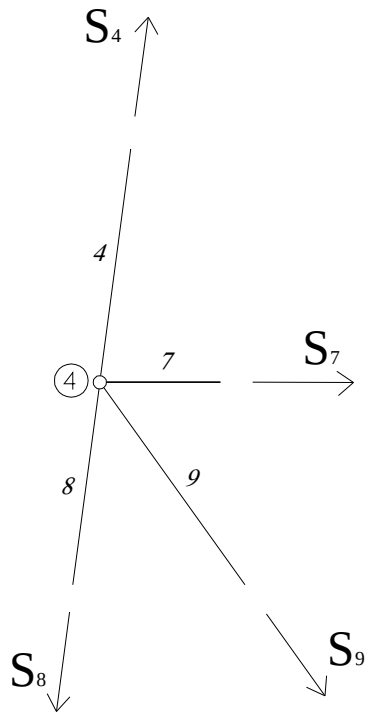
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,252 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

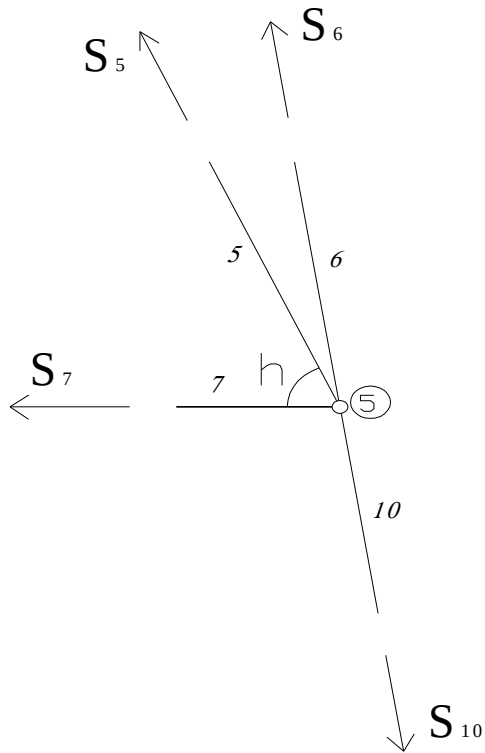
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

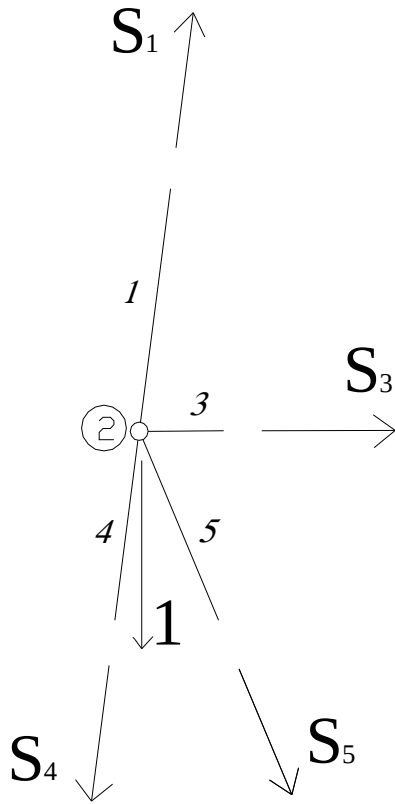
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

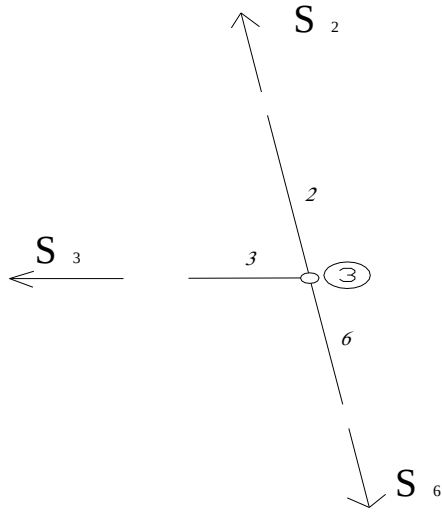
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

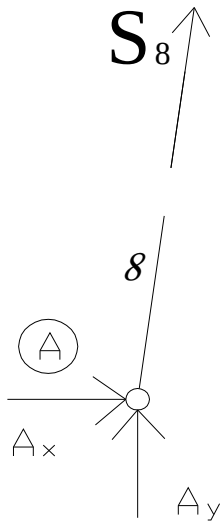
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

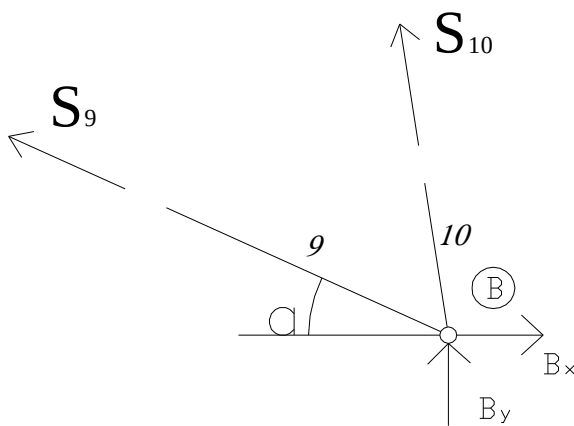
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

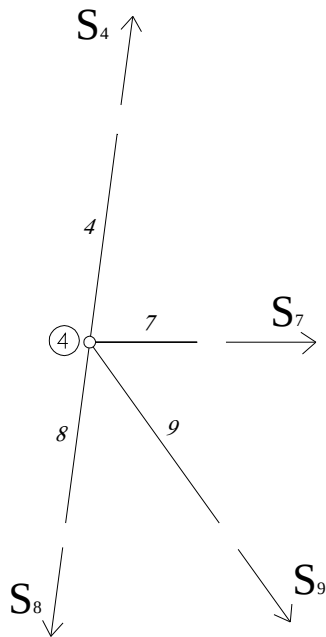
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

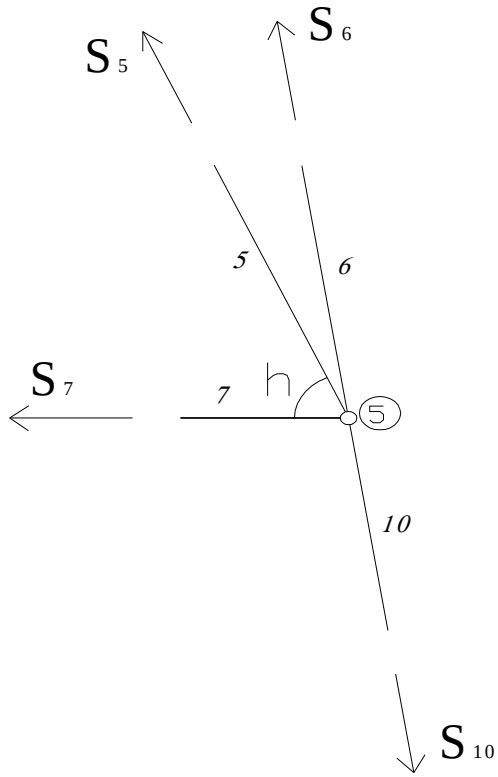
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

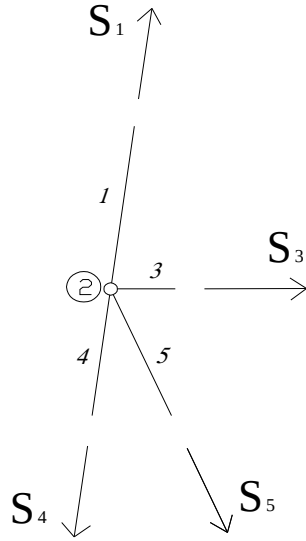
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

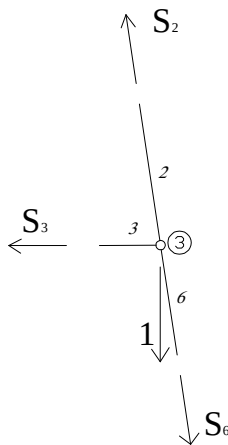
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

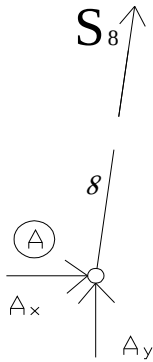
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

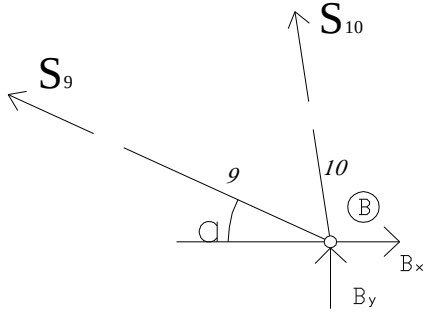
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

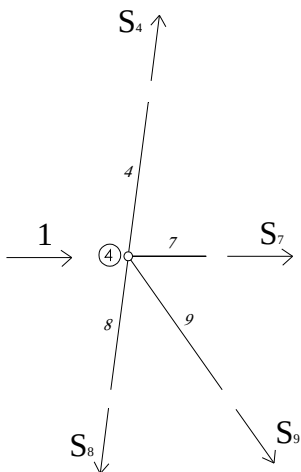
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

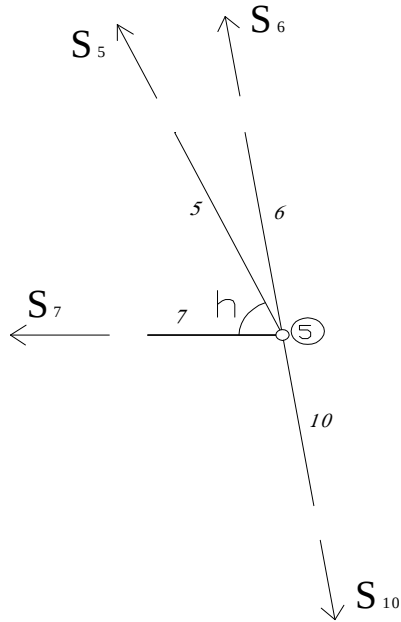
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

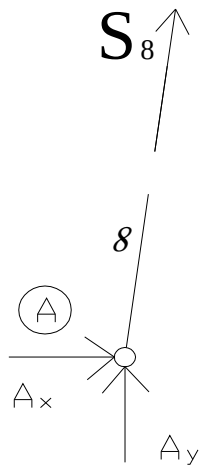
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

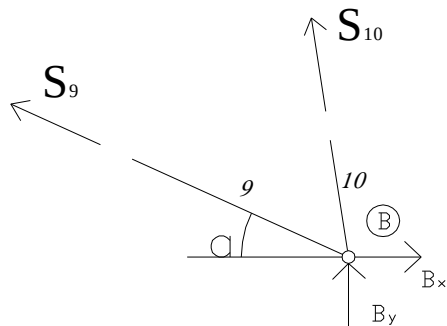
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

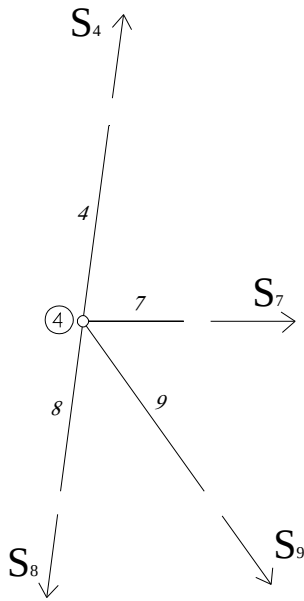
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

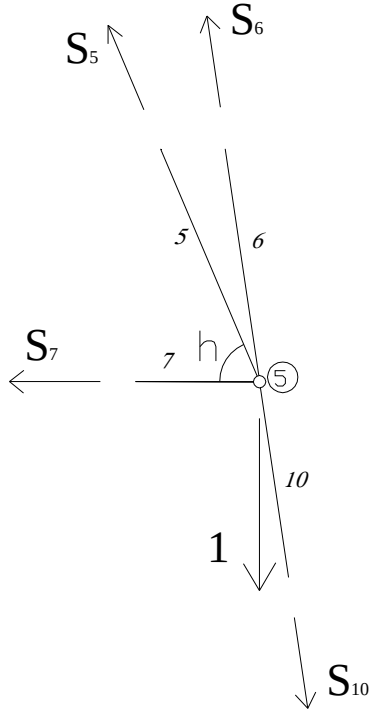
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
np=100
write(*,1)
1 format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
read(*,3) dosya
3 format(a12)
open(10,file=dosya)
read(10,*) icubs,ideps
write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
read(*,*)
write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
do 22 i=1,icubs

```

```

      read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
      write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
      do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
          bunye(i,j)=0.
        30 continue
      27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
      read(*,*)
      do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
      55 continue
      89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
      read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
      read(10,*) nyd
      do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
      70 continue
      do 60 i=1,nyd
        read(10,*) Q(i)
      60 continue

c   mt*b*m
      read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
      call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
      write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
      do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
      46 continue
      read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
      call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
      write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
      do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
      48 continue
      read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
      call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
      write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```

```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```



```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTIGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

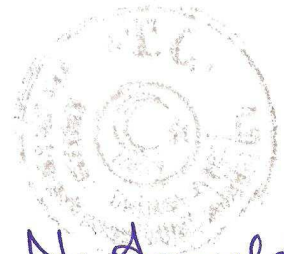
Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

Cengiz
Mehmet
Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODEL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castiglione metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

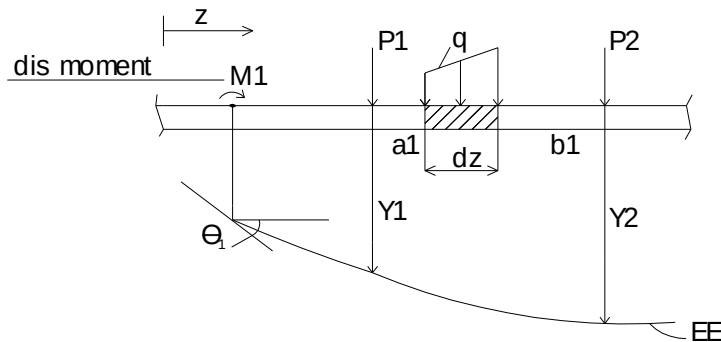
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

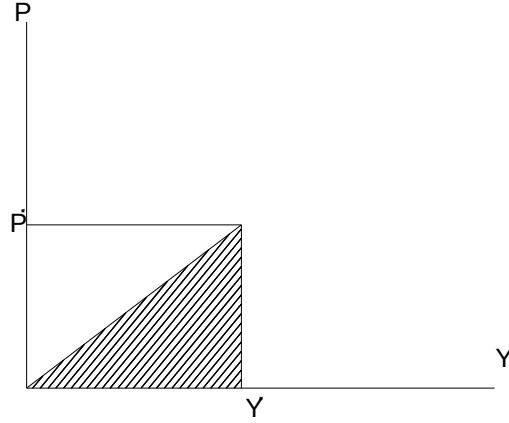
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

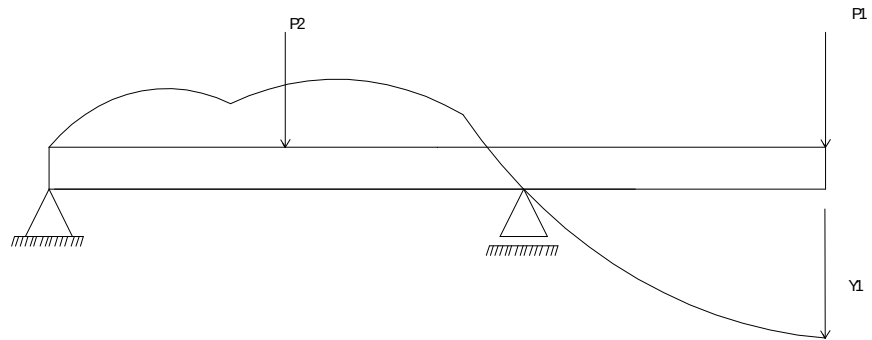
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

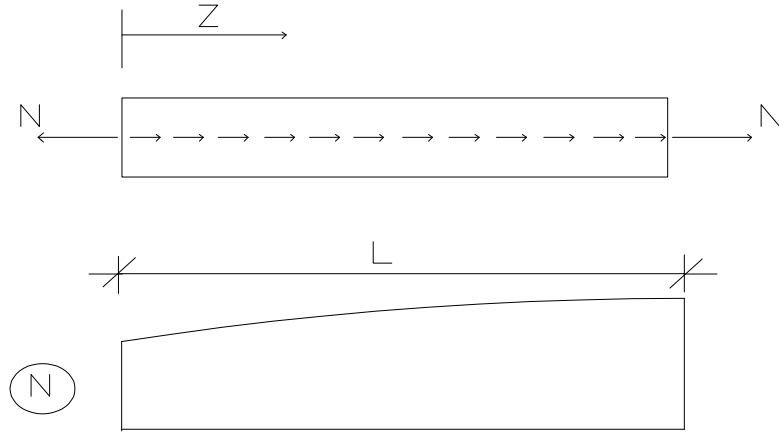
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilerek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet oluştuğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değıştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değıştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değıştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönülür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değerin M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

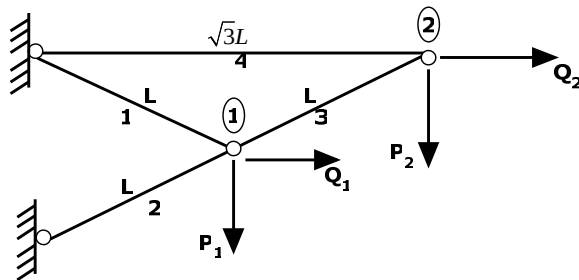
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

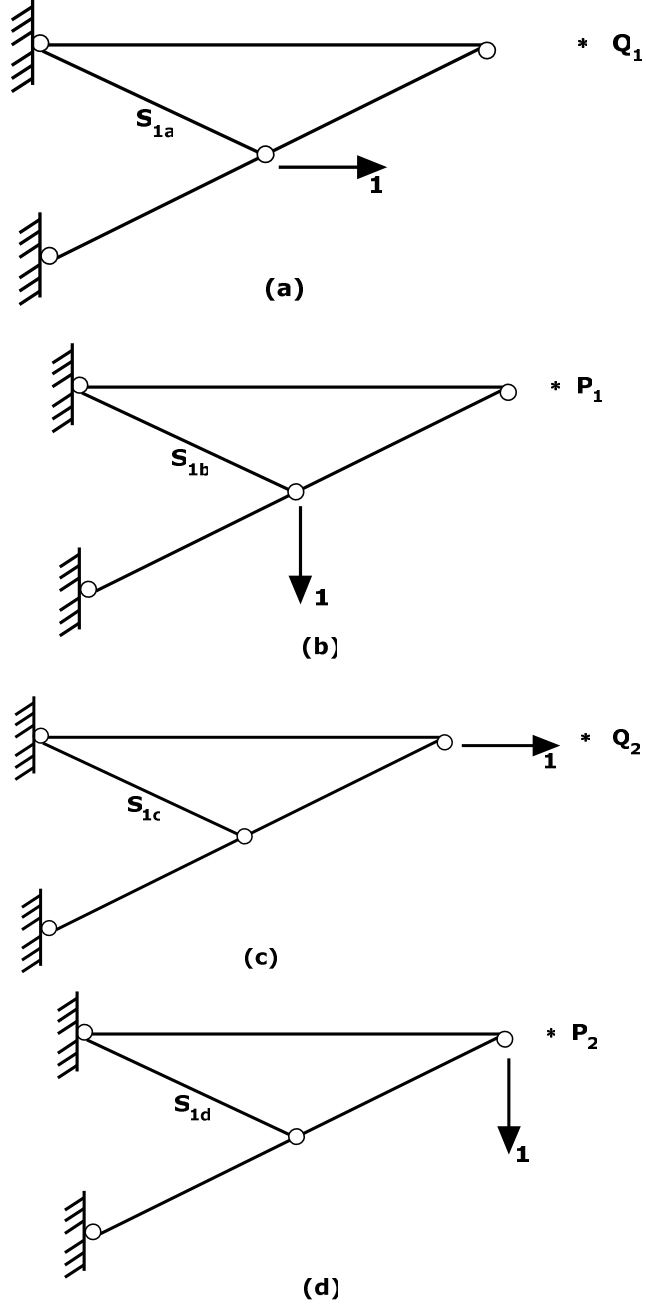
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyonundan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu görölür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

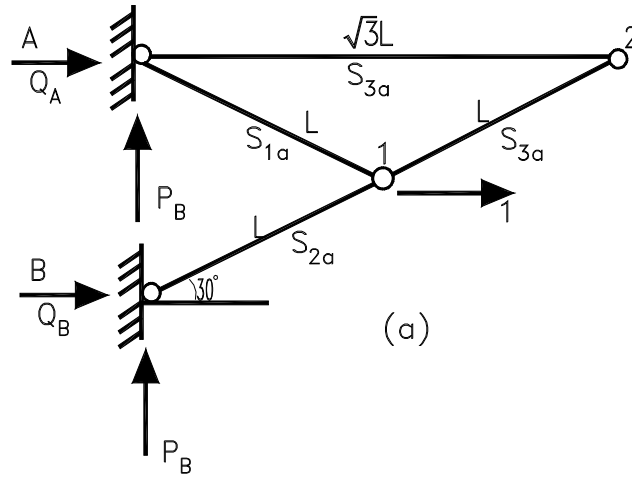
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

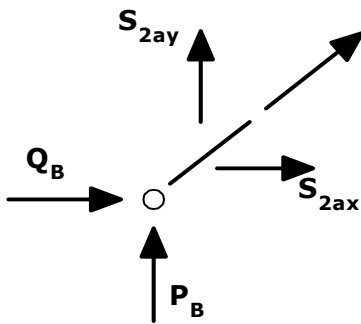
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

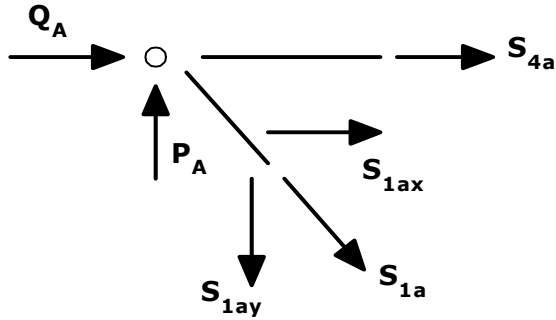
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

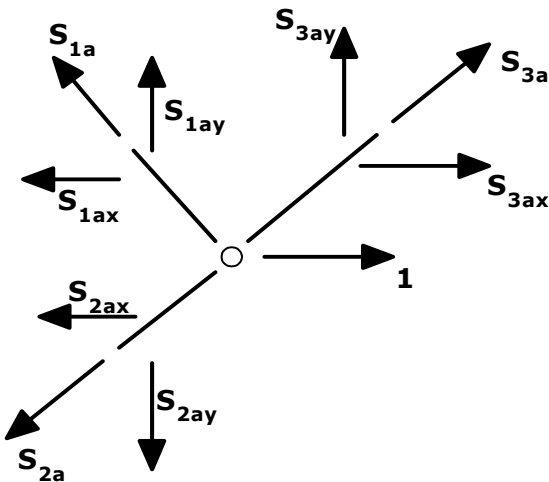
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

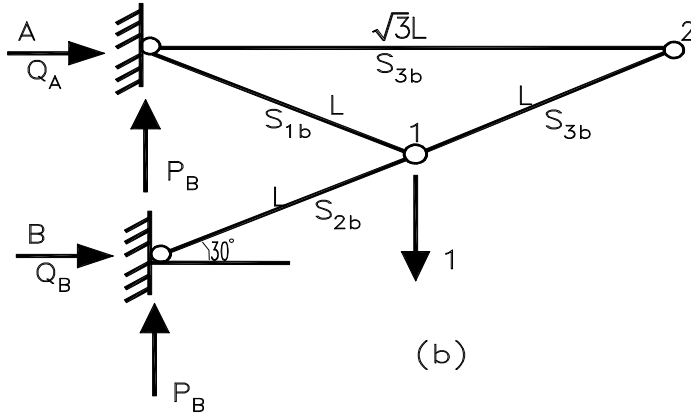
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

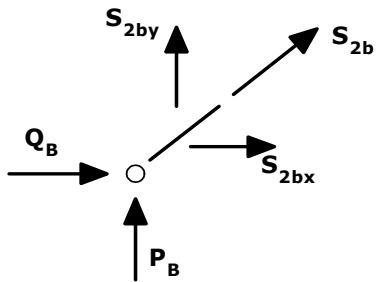
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

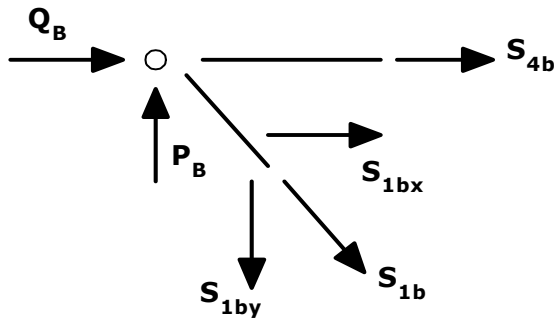
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

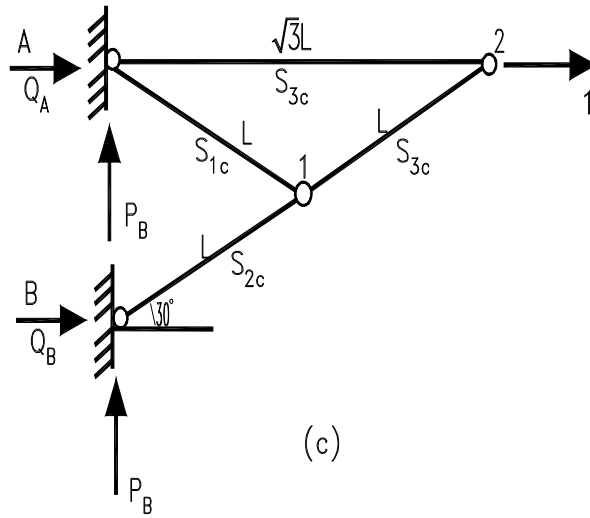
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

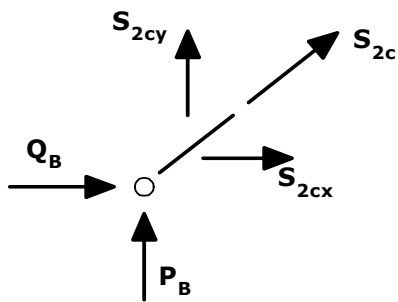
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

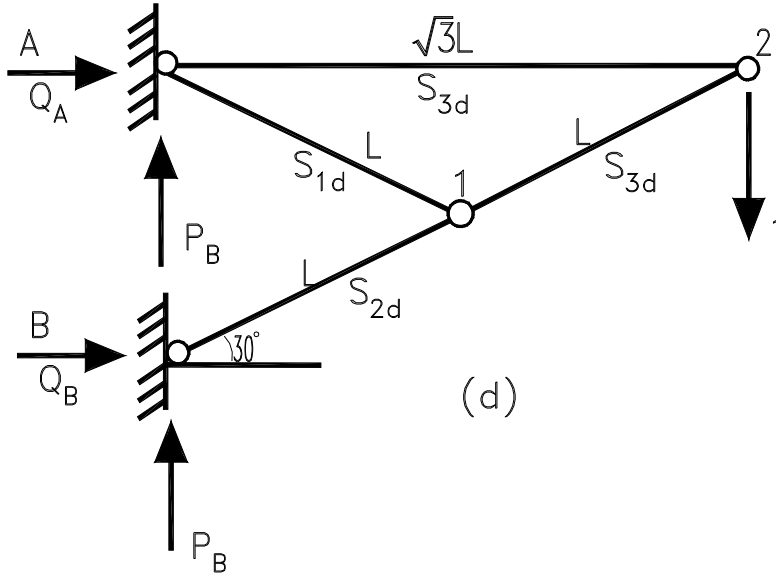
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

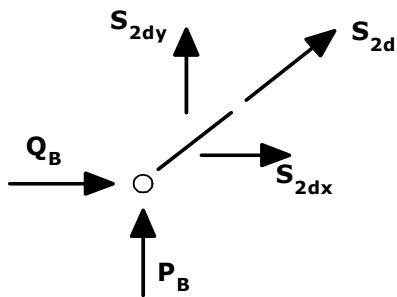
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

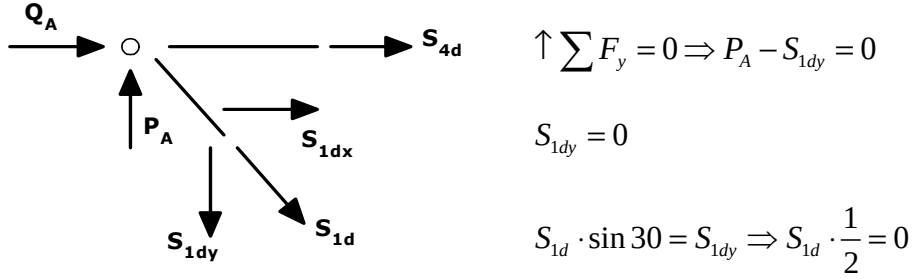
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

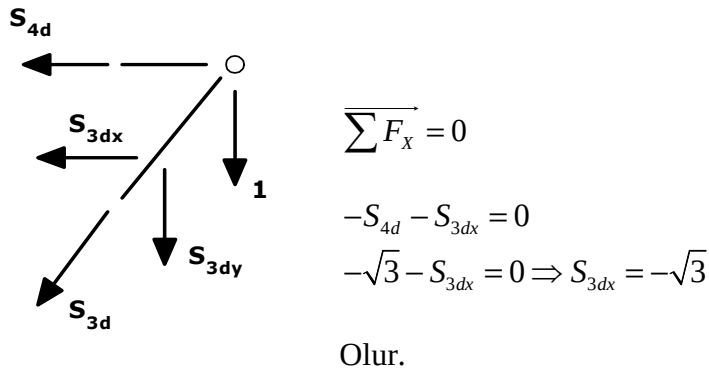
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

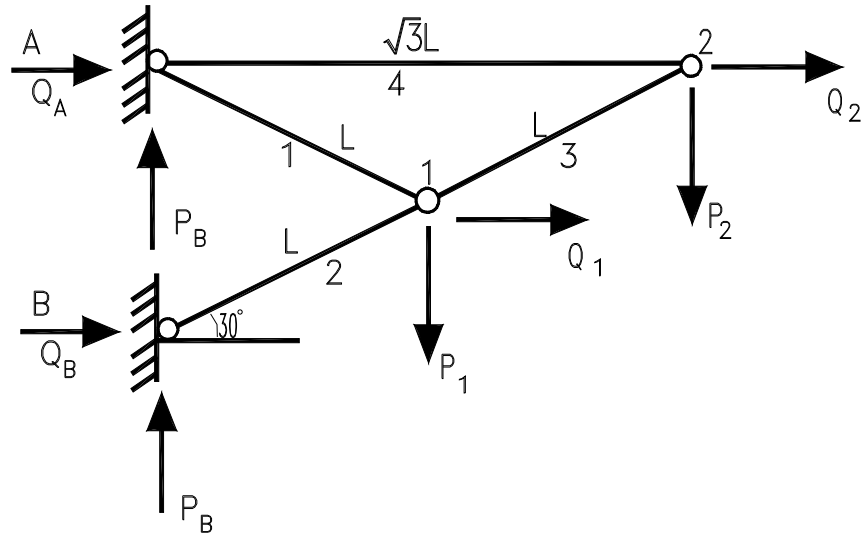
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

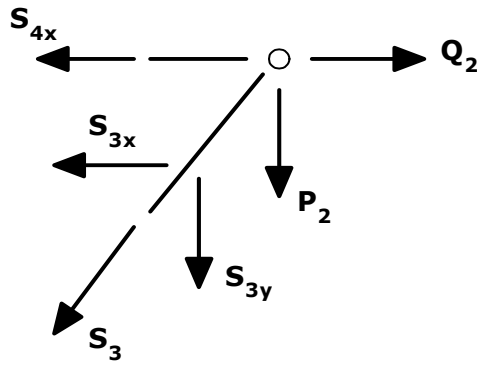
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

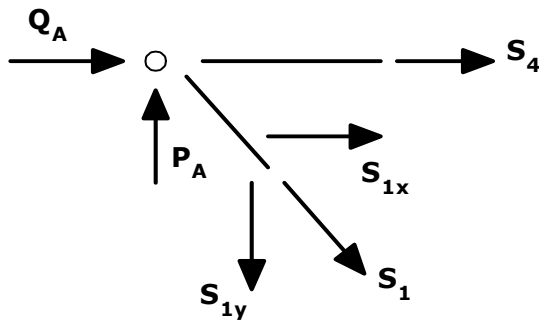
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

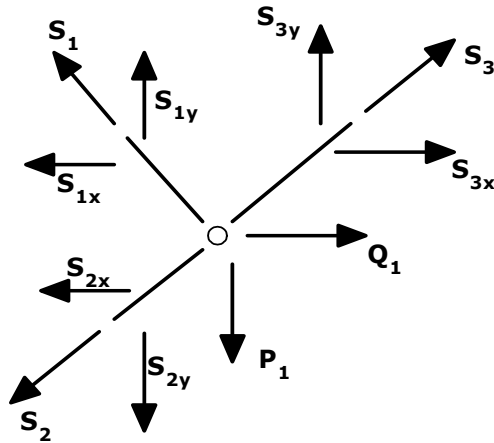
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

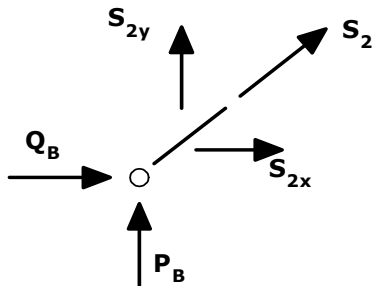
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

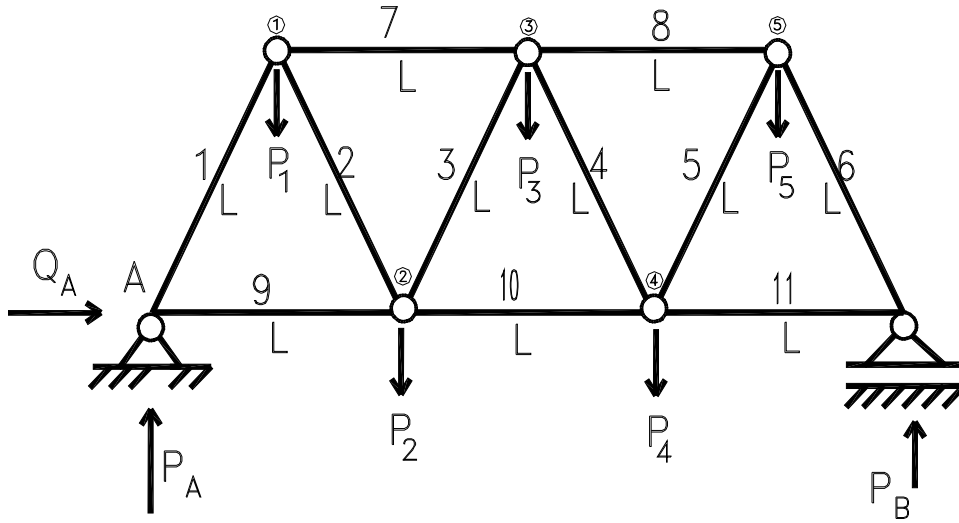
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2} P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2} P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2} P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5$$

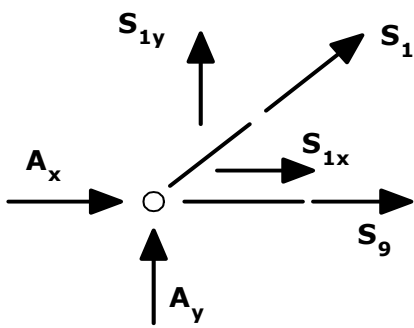
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6} P_1 - \frac{1}{3} P_2 - \frac{1}{2} P_3 - \frac{2}{3} P_4 - \frac{5}{6} P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{1}{3} P_4 + \frac{1}{6} P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

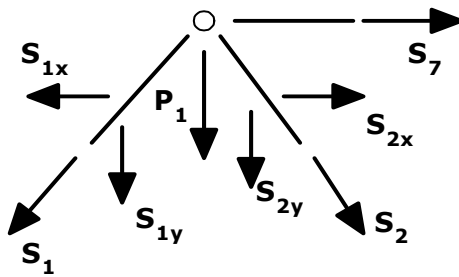
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

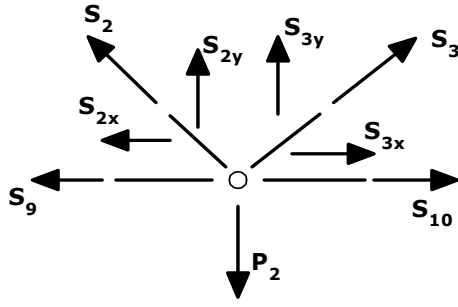
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

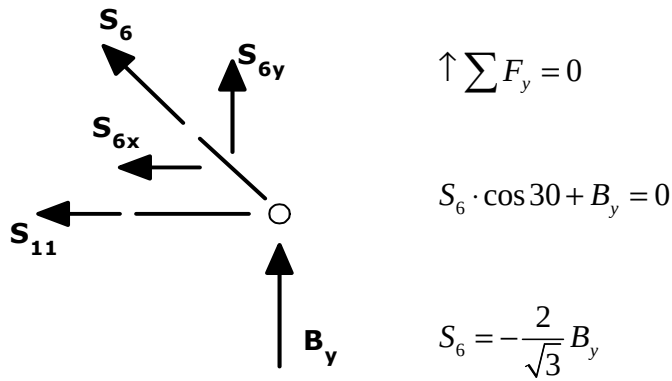
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

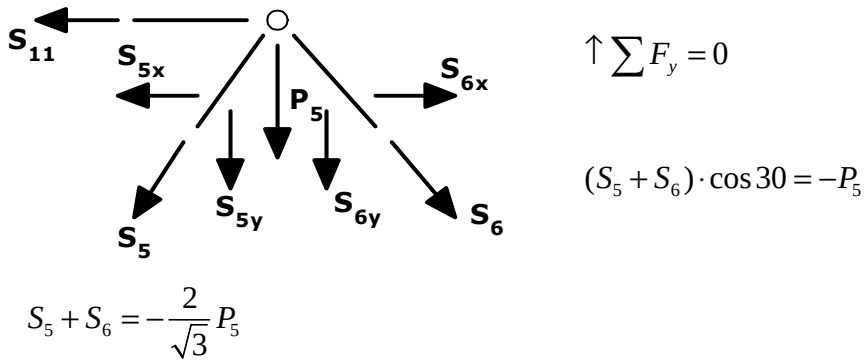
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

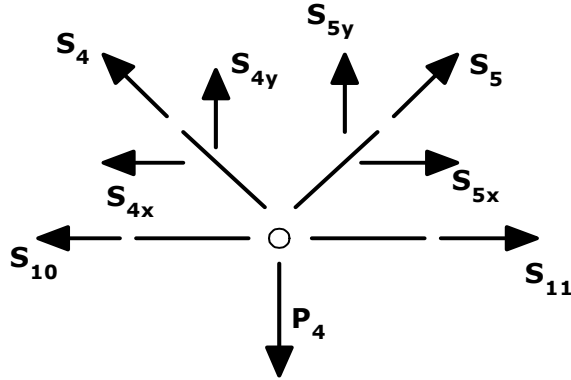
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

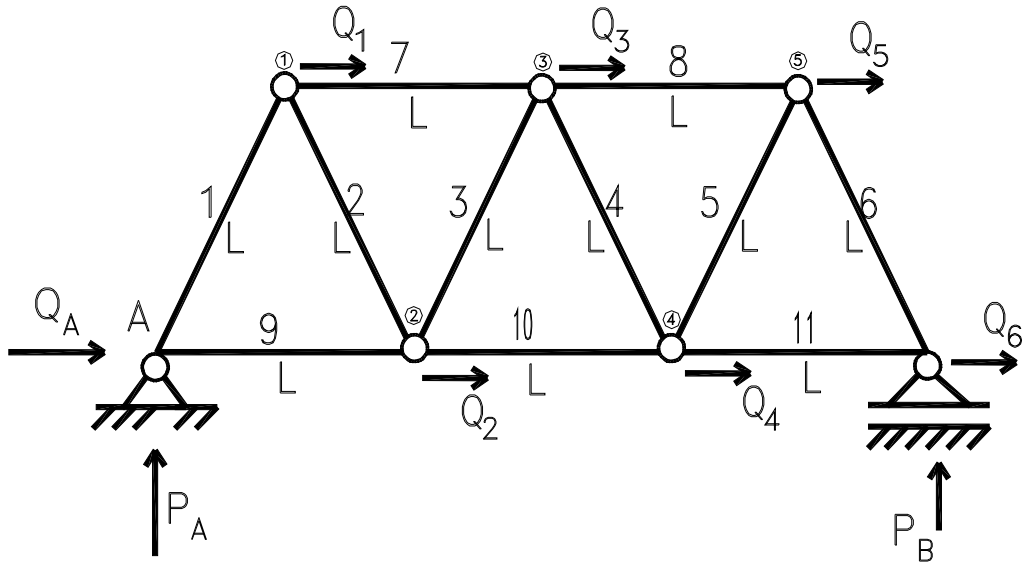
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

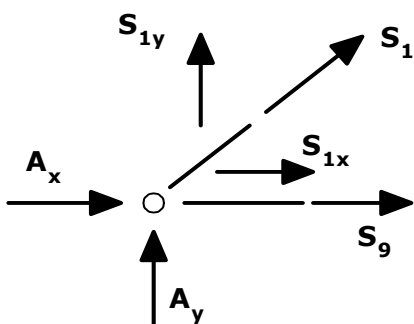
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

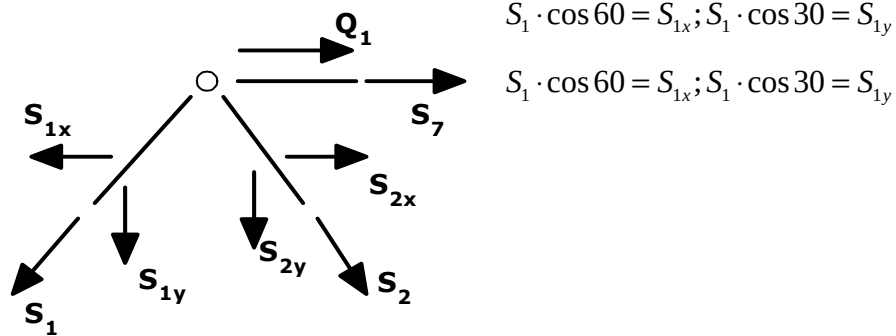
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

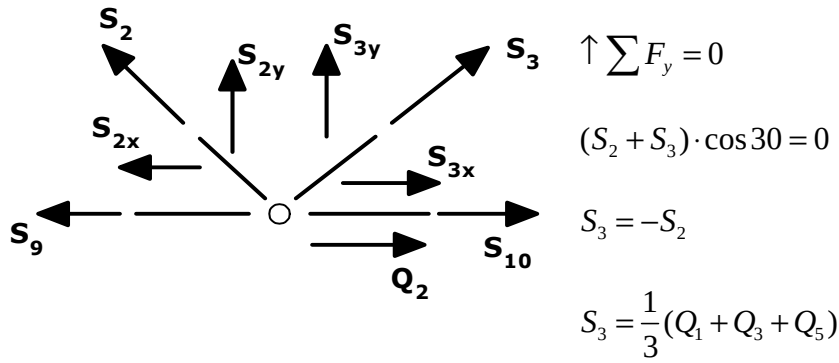
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

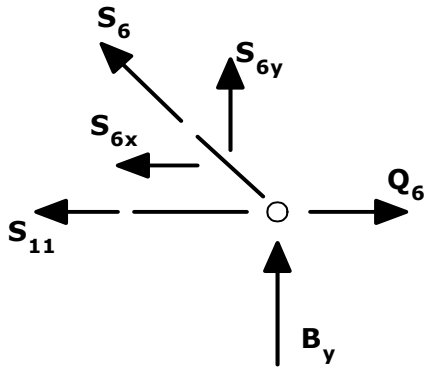
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

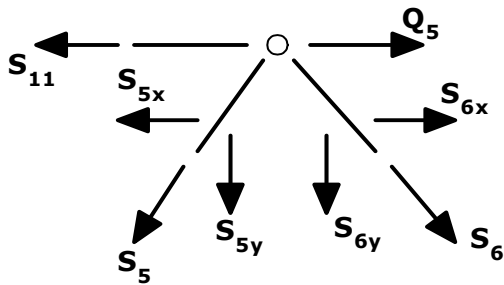
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

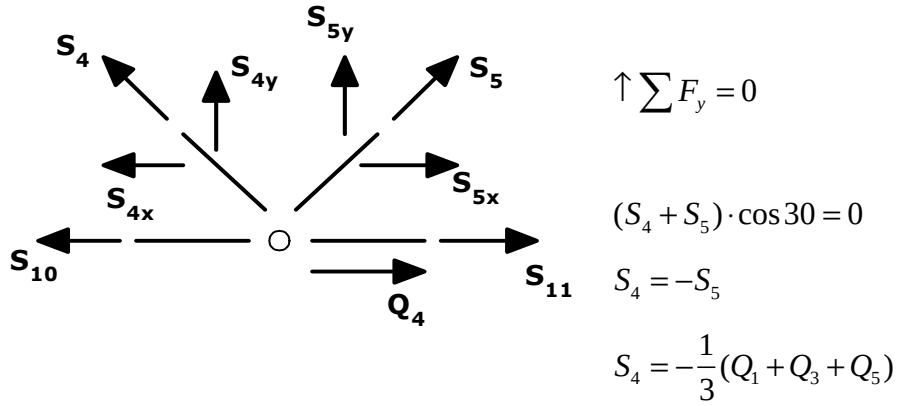
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemekten bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozisini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

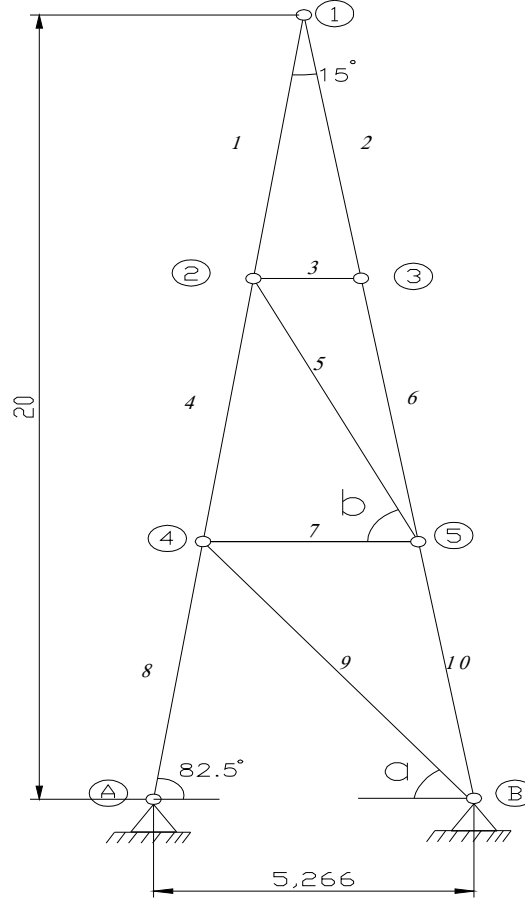
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
 Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
 X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
 Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
 X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
 Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
 X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
 Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
 X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
 Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümde elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü; Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

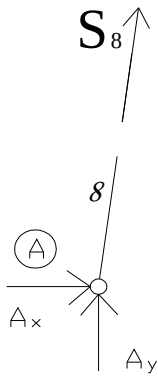
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

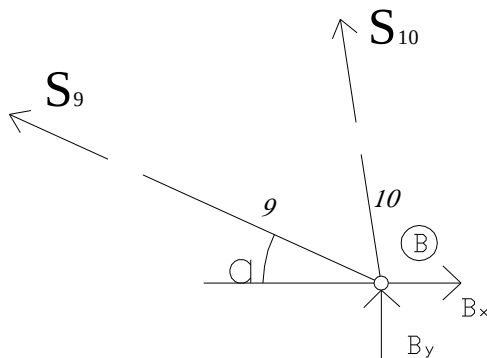
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

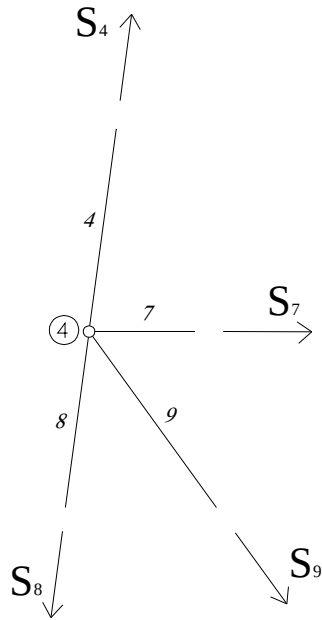
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

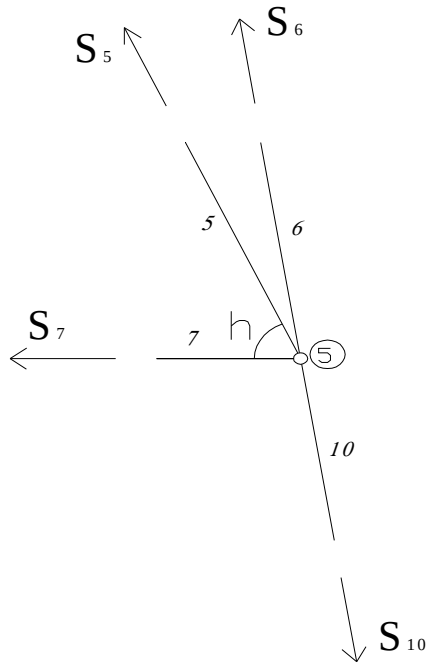
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

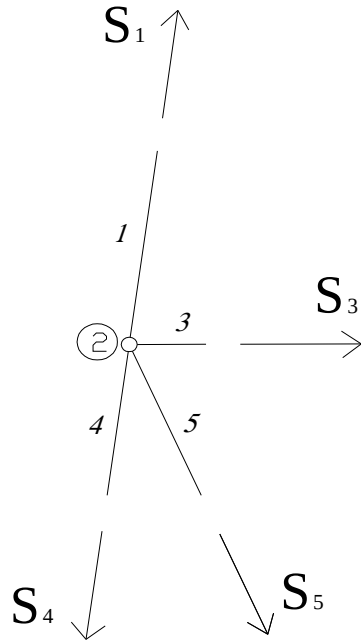
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

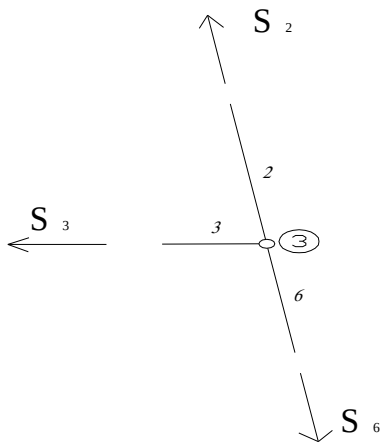
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

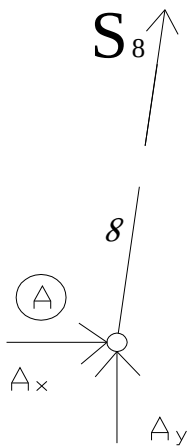
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

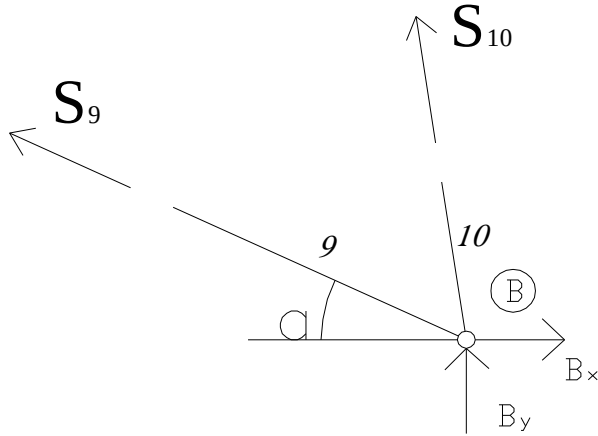
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

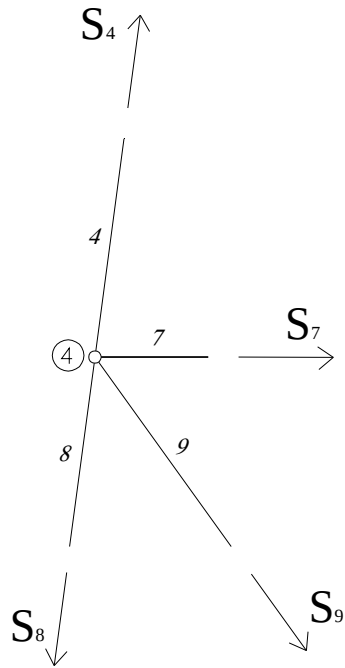
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

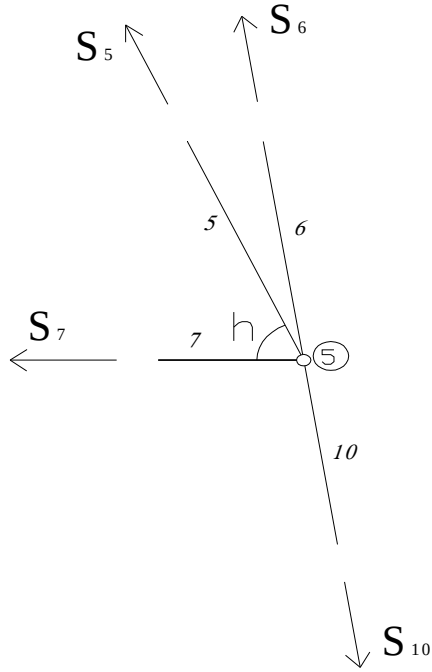
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

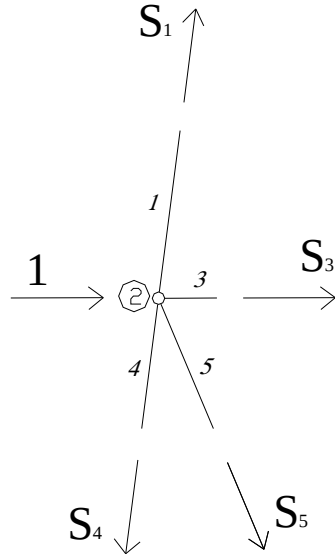
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

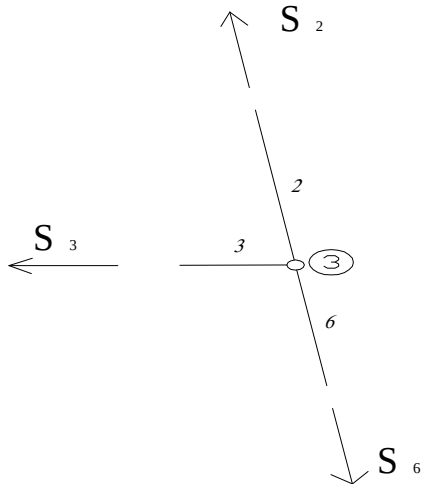
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

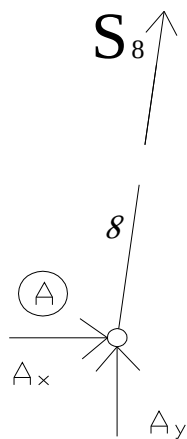
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

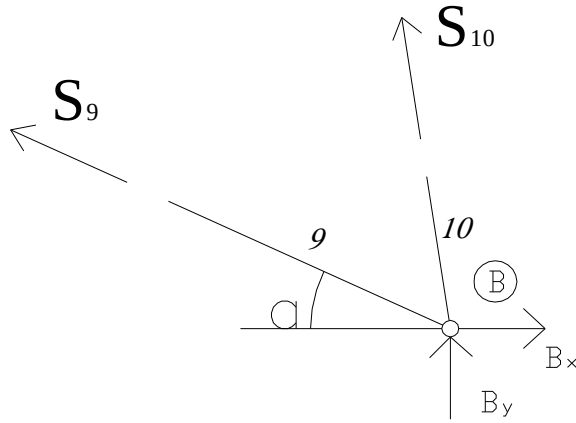
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

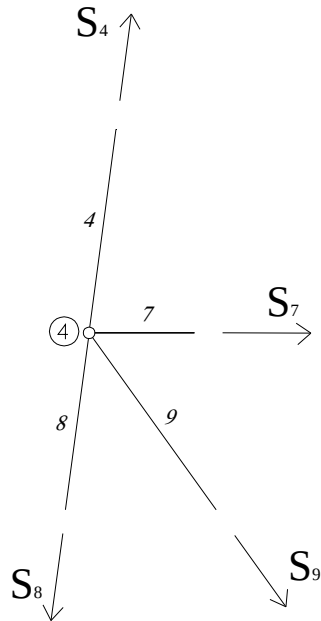
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

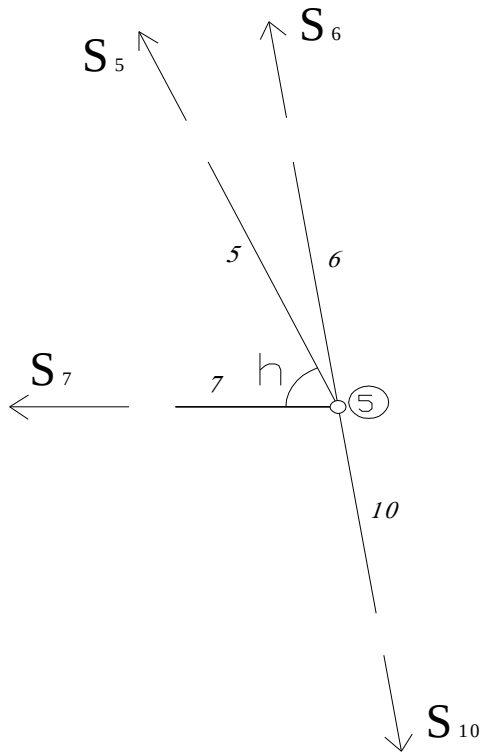
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

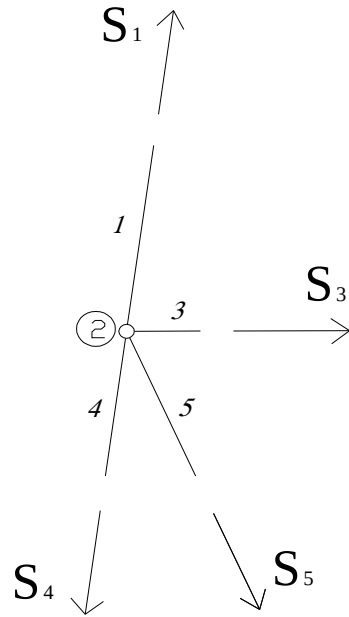
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

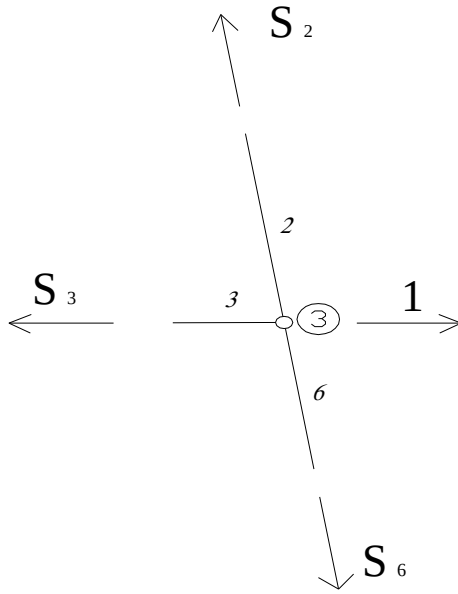
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

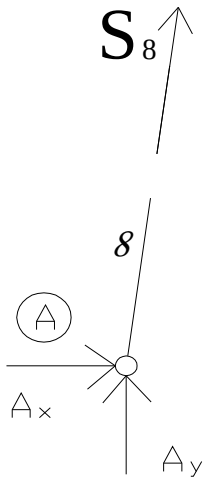
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

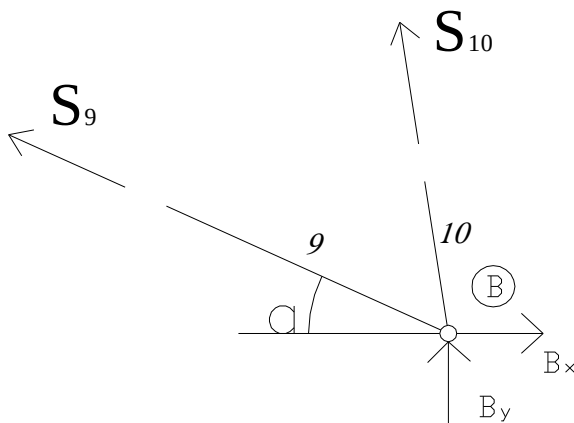
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

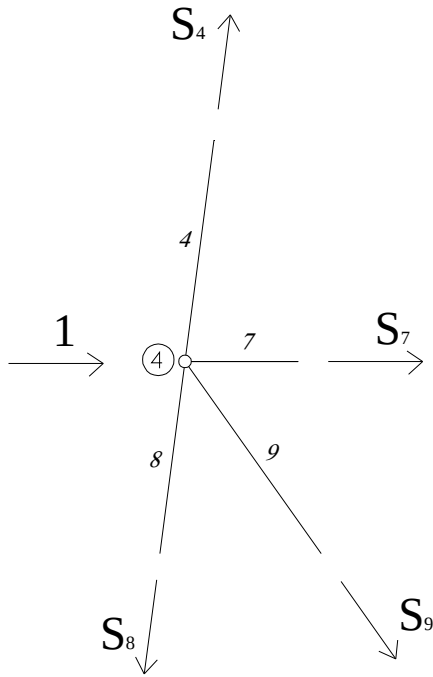
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515$ ve $S_{10} = 0,00$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

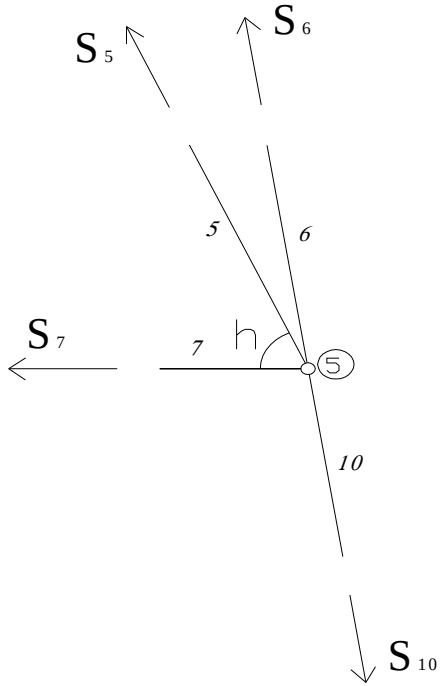
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

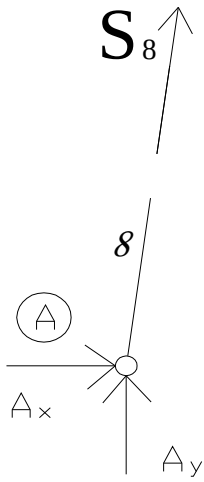
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

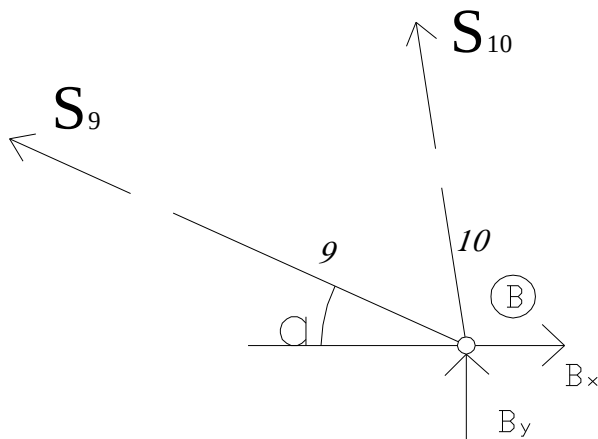
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

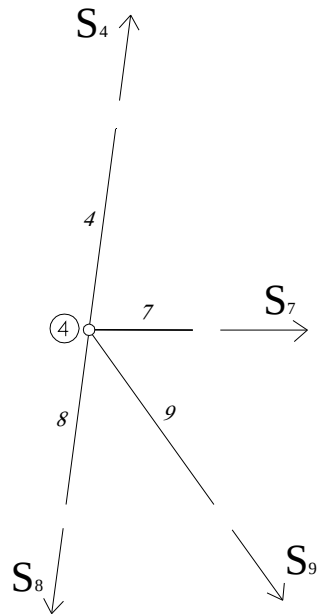
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

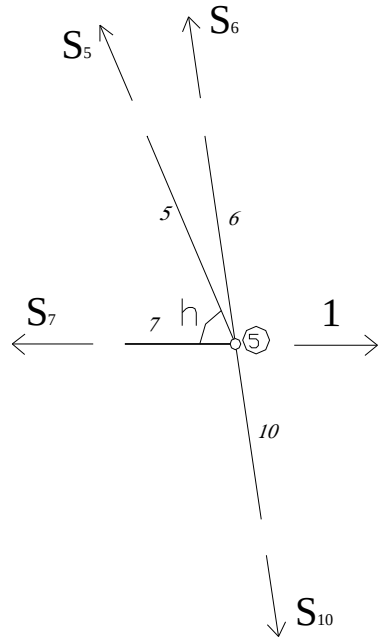
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

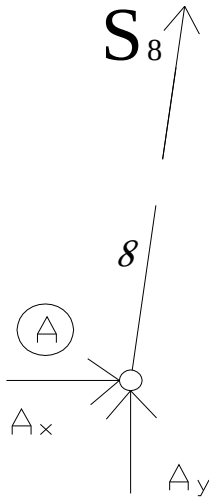
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

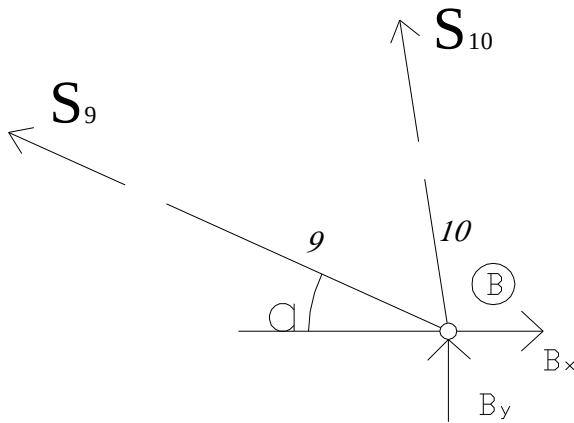
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

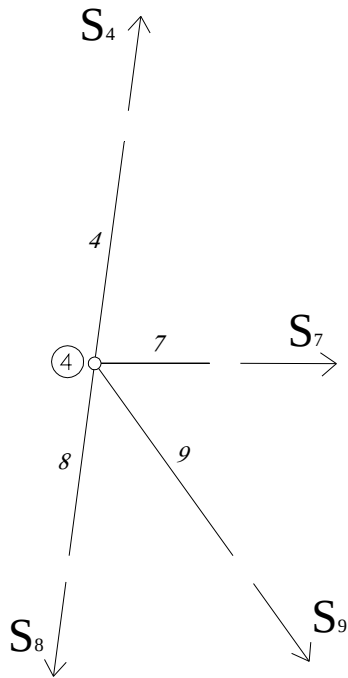
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

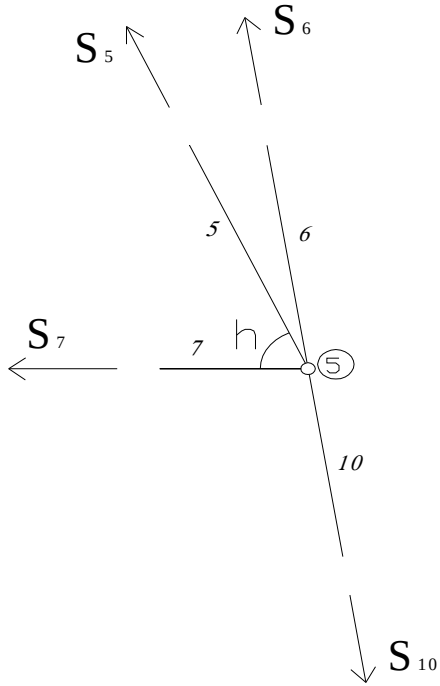
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

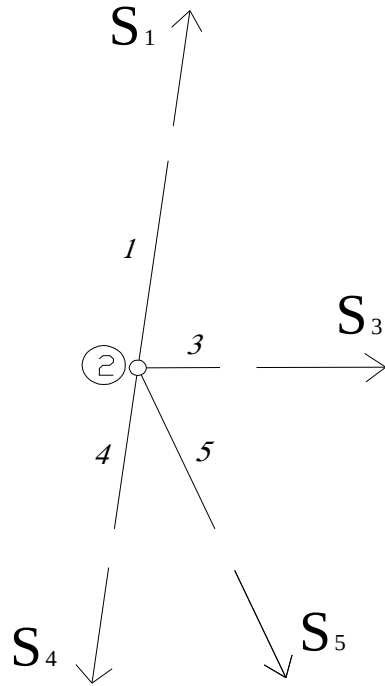
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -0,504$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

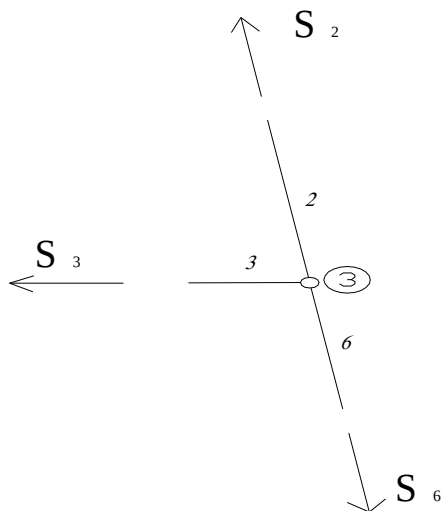
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

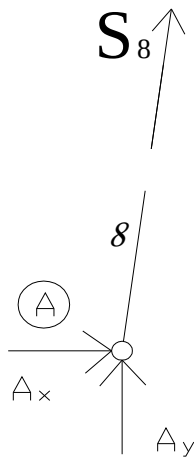
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

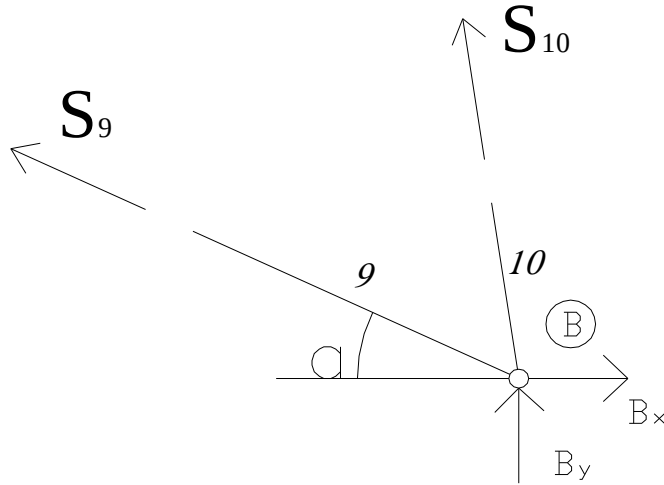
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

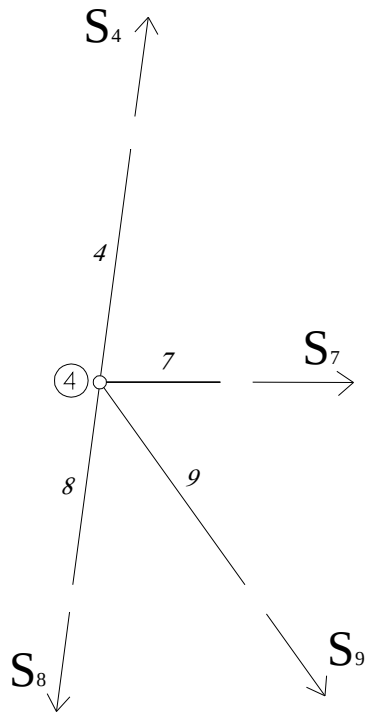
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100$ ve $S_{10} = -0,252$ olarak bulunur.

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

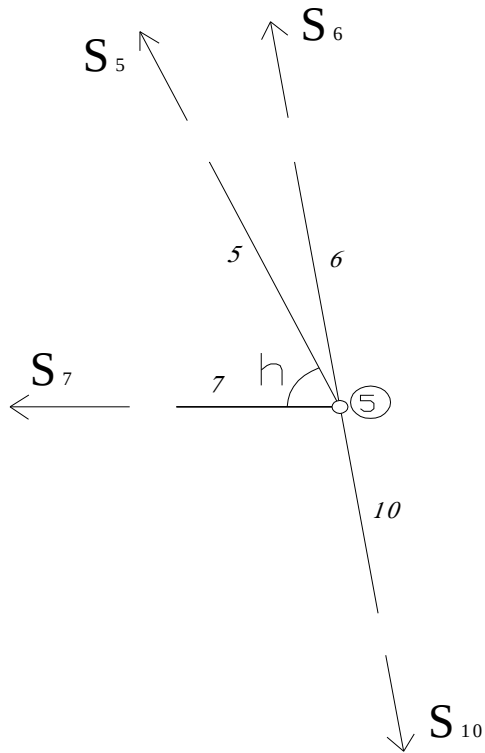
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

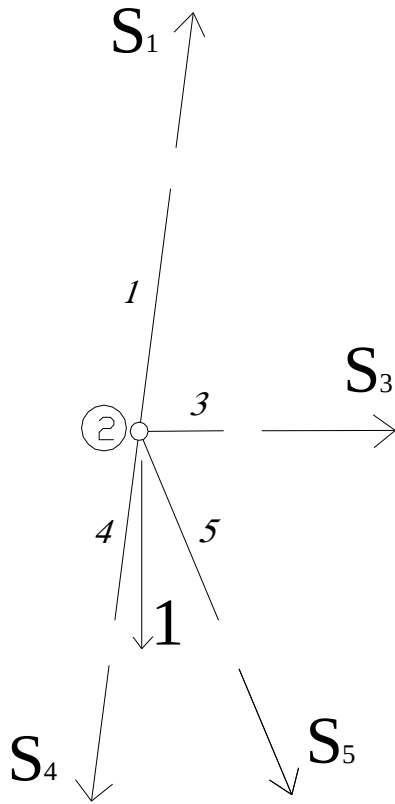
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

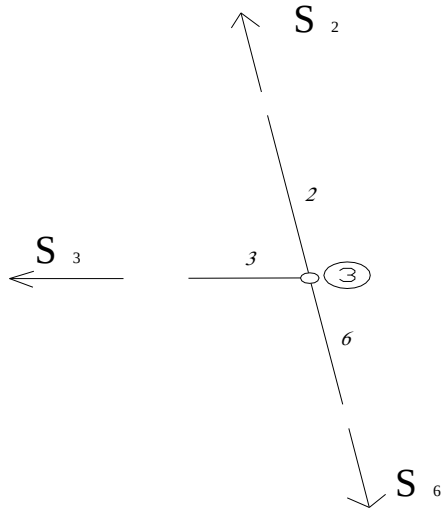
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

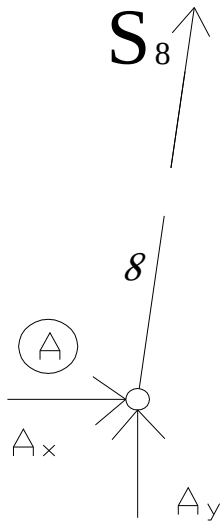
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

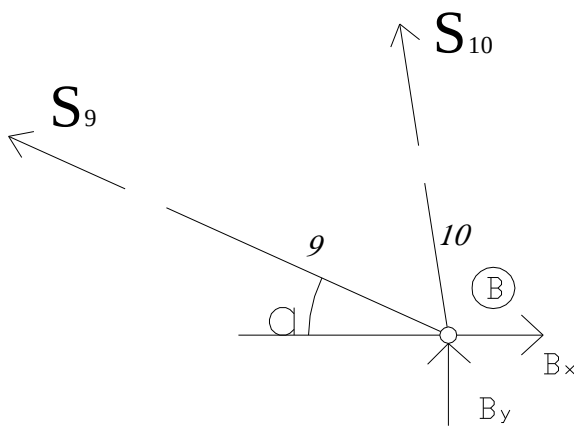
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

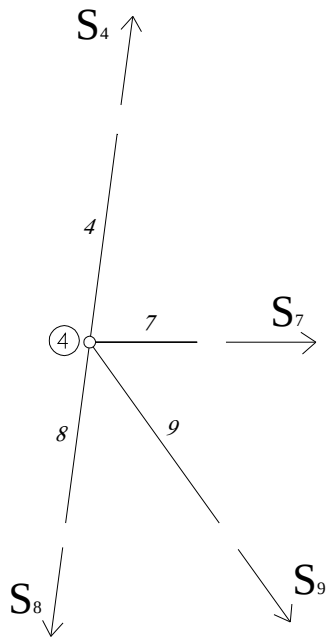
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

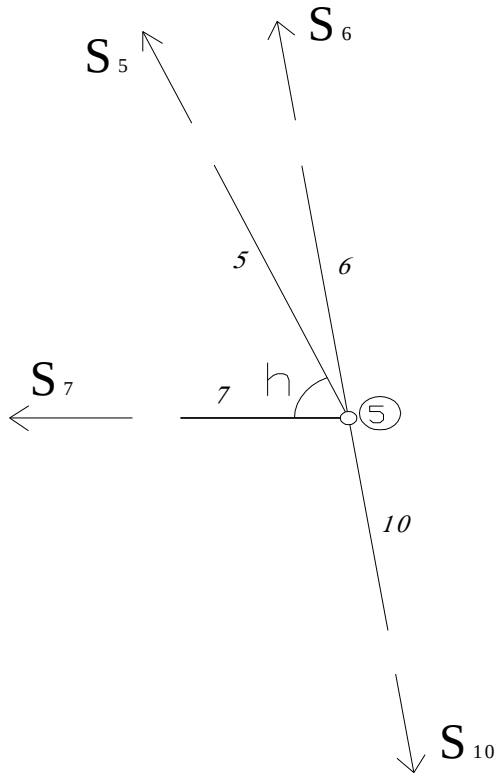
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

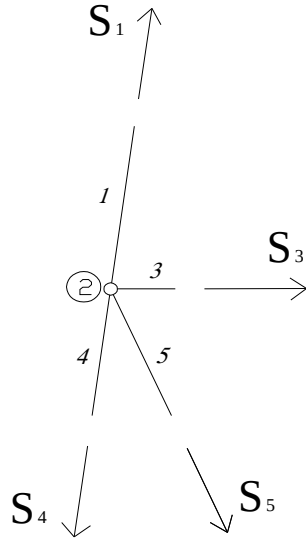
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

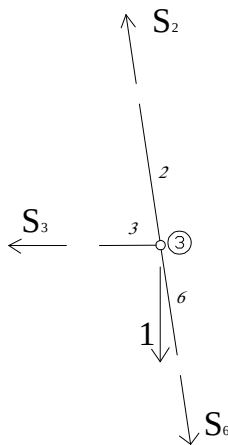
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

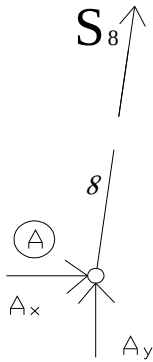
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

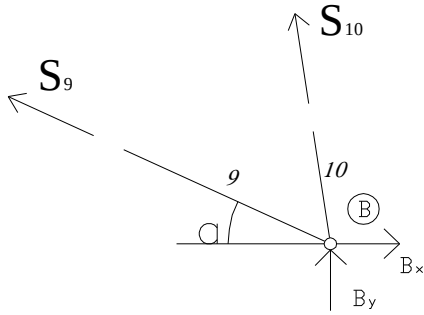
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

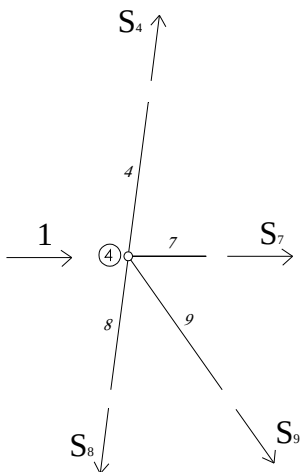
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

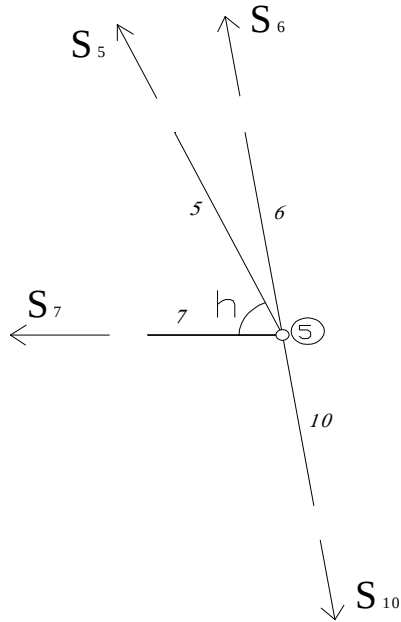
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

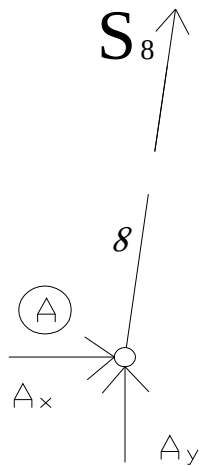
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

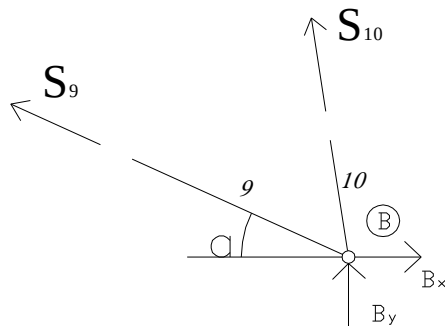
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

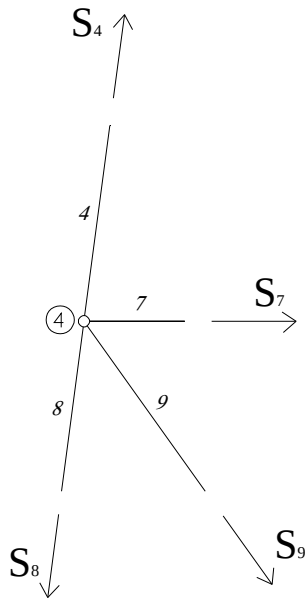
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

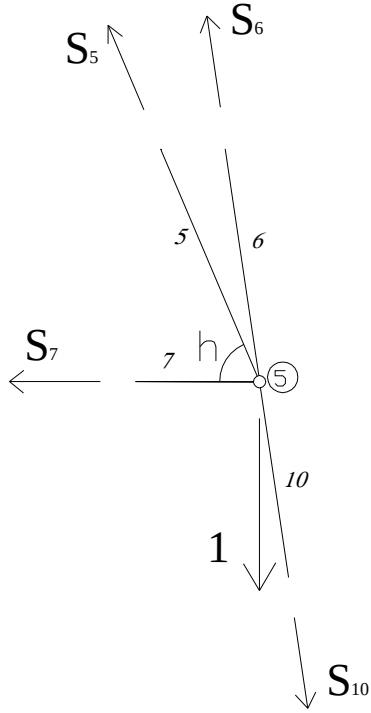
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
np=100
write(*,1)
1 format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
read(*,3) dosya
3 format(a12)
open(10,file=dosya)
read(10,*) icubs,ideps
write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
read(*,*)
write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
do 22 i=1,icubs

```

```

      read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
      write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
      do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
          bunye(i,j)=0.
30 continue
27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
      read(*,*)
      do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
55 continue
89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
      read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
      read(10,*) nyd
      do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
70 continue
      do 60 i=1,nyd
        read(10,*) Q(i)
60 continue

c   mt*b*m
      read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
      call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
      write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
      do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
46 continue
      read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
      call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
      write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
      do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
48 continue
      read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
      call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
      write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```



```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
DO I = 1, N
  DO J = 1, N
    B(I,J) = 0.0
  END DO
END DO
DO I = 1, N
  B(I,I) = 1.0
END DO
CALL ELGS (A,N,INDX)
DO I = 1, N-1
  DO J = I+1, N
    DO K = 1, N
      B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
    END DO
  END DO
END DO
DO I = 1, N
  X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
  DO J = N-1, 1, -1
    X(J,I) = B(INDX(J),I)
    DO K = J+1, N
      X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
    END DO
    X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
  END DO
END DO
return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
DO I = 1, N
  INDX(I) = I
END DO
DO I = 1, N
  C1= 0.0
  DO J = 1, N

```

```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

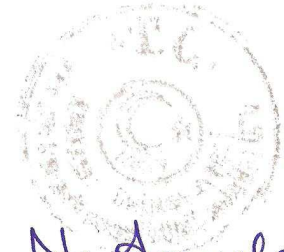


Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODEL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castigliona metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

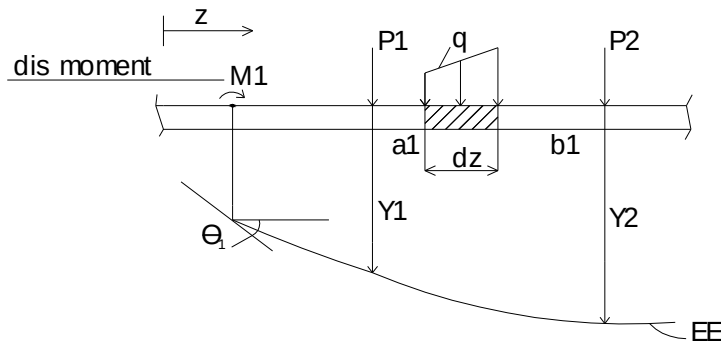
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

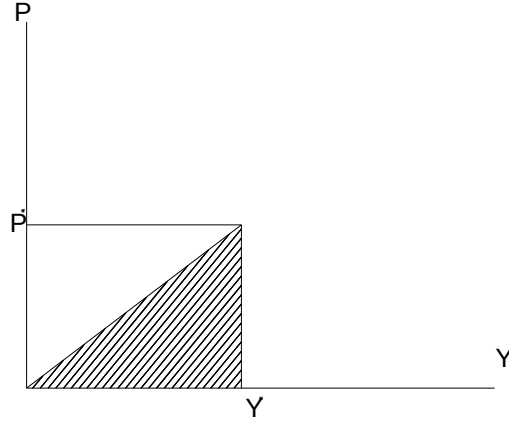
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

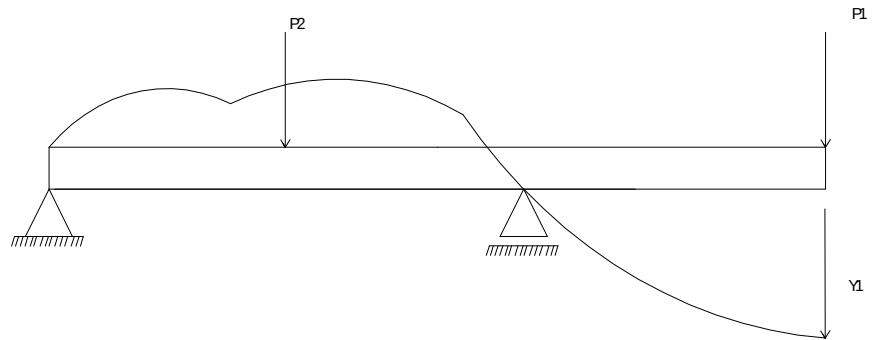
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

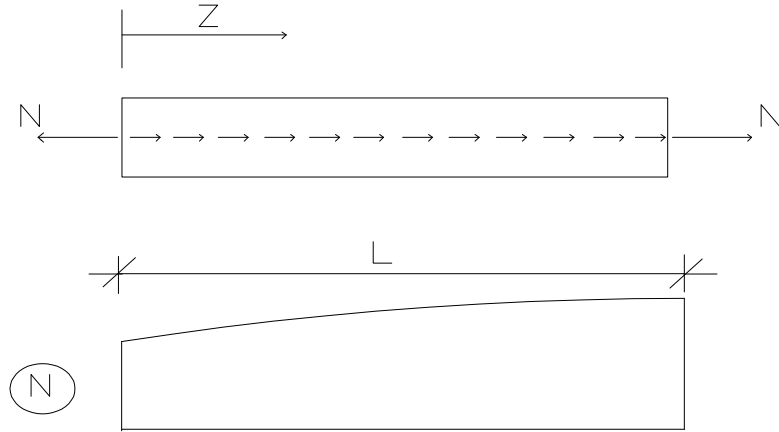
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilerek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet oluştuğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değıştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değıştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değıştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönölür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değeri M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

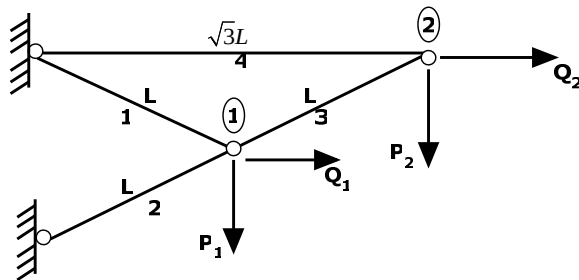
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

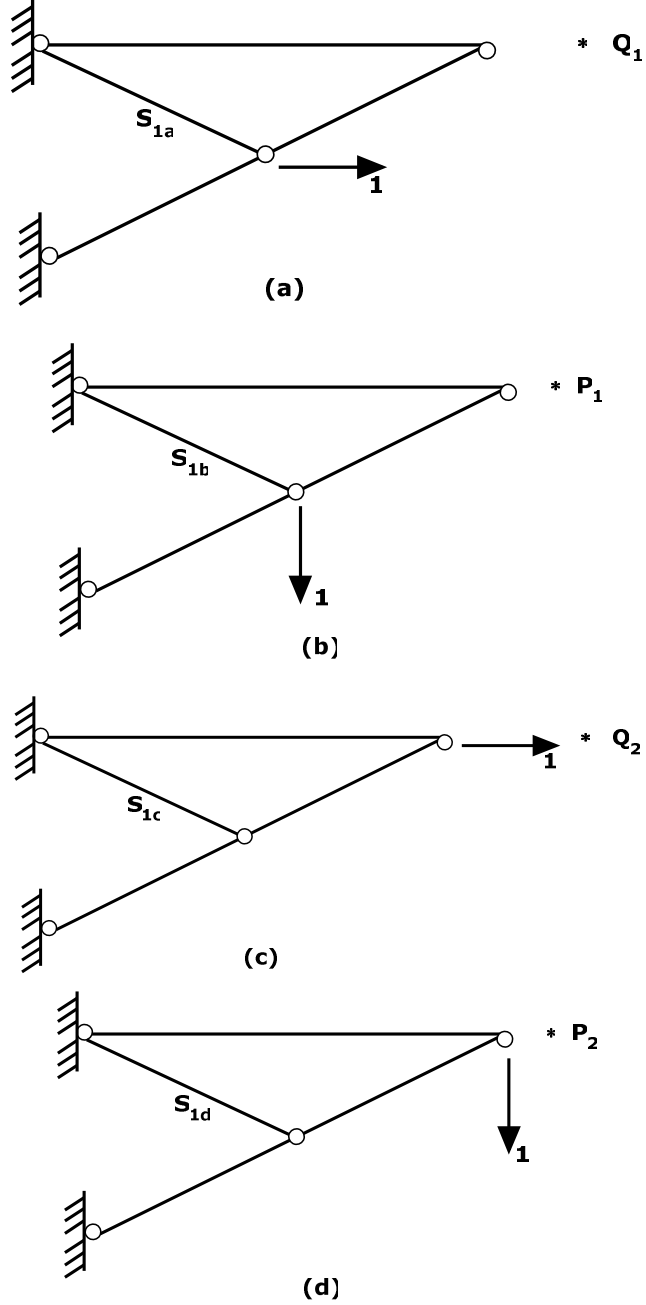
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyondan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu görölür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 l_1 \\ S_2 l_2 \\ S_3 l_3 \\ S_4 l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a} Q_1 + S_{1b} P_1 + S_{1c} Q_2 + S_{1d} P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a} Q_1 + S_{2b} P_1 + S_{2c} Q_2 + S_{2d} P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a} Q_1 + S_{3b} P_1 + S_{3c} Q_2 + S_{3d} P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a} Q_1 + S_{4b} P_1 + S_{4c} Q_2 + S_{4d} P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_1 l_1 \\ S_2 l_2 \\ S_3 l_3 \\ S_4 l_4 \end{bmatrix}^T = [S_1 l_1 \quad S_2 l_2 \quad S_3 l_3 \quad S_4 l_4] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_1 l_1 \\ S_2 l_2 \\ S_3 l_3 \\ S_4 l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

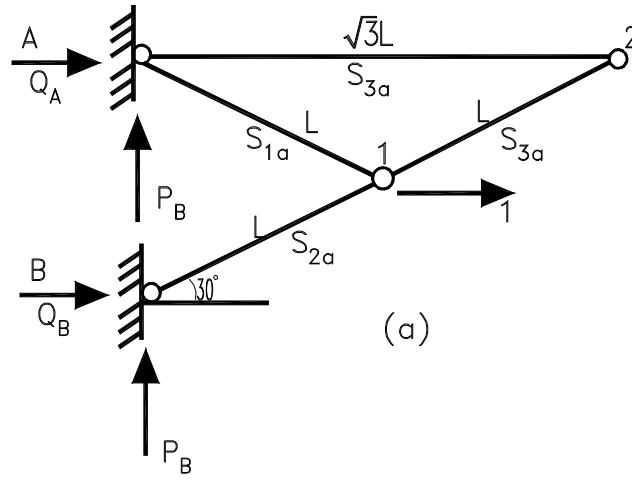
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

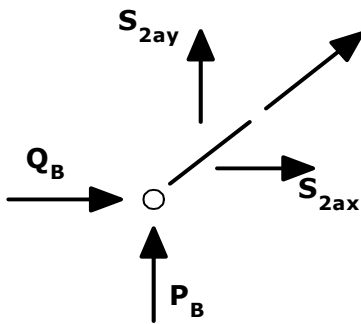
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

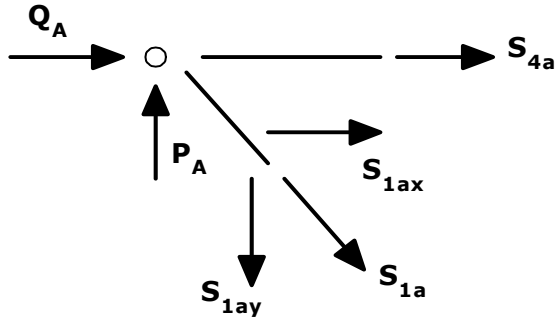
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

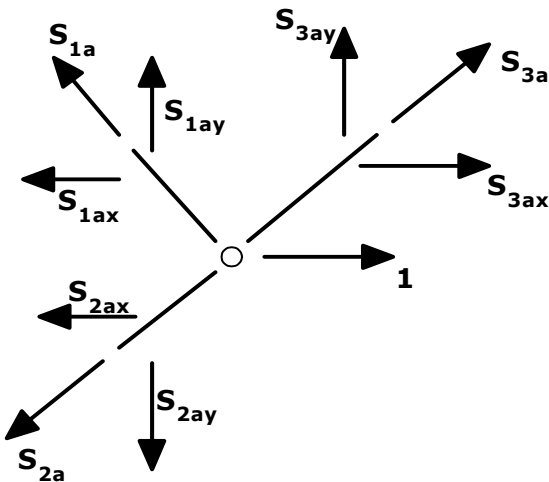
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

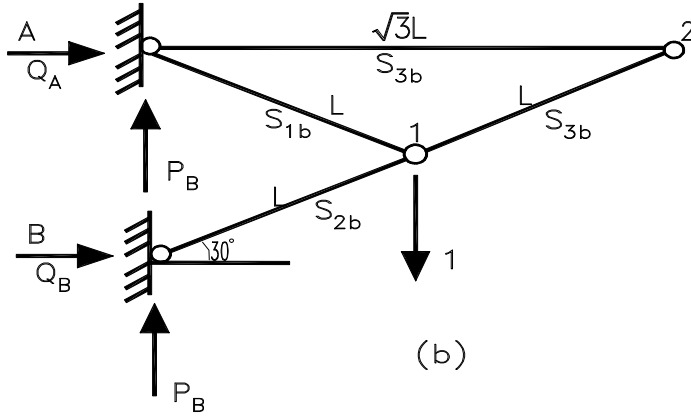
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

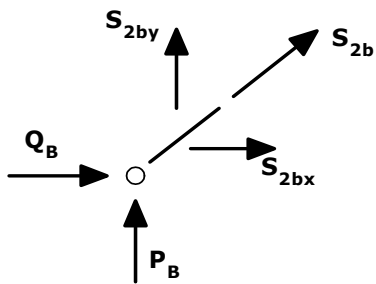
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

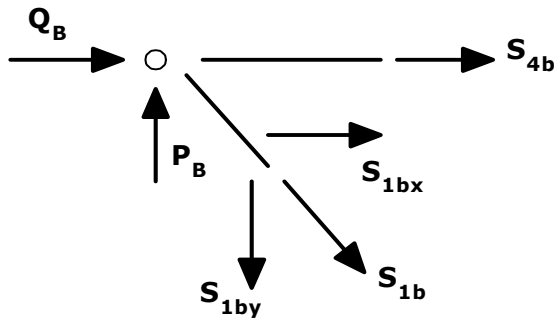
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

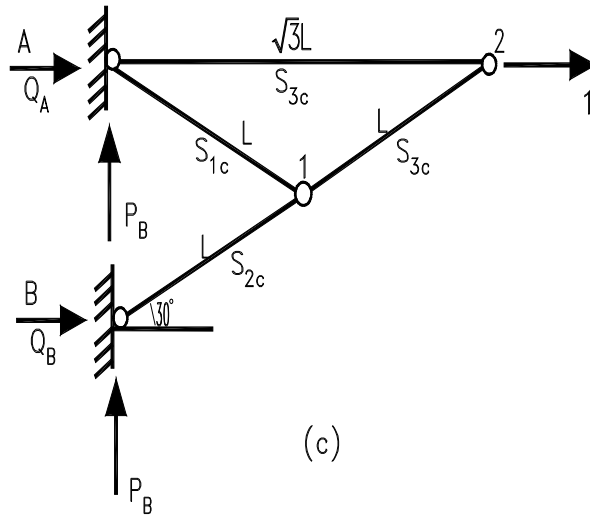
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

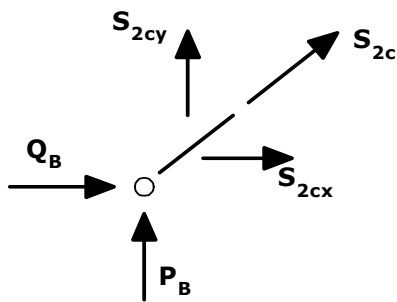
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

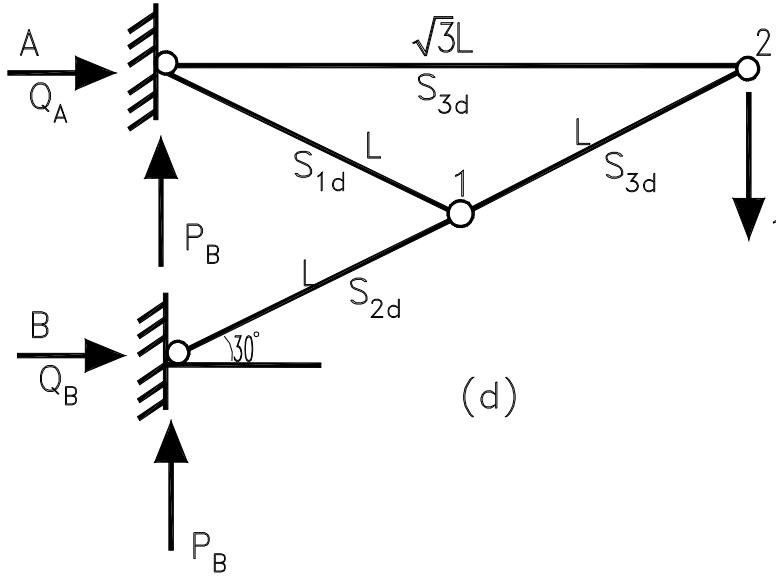
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

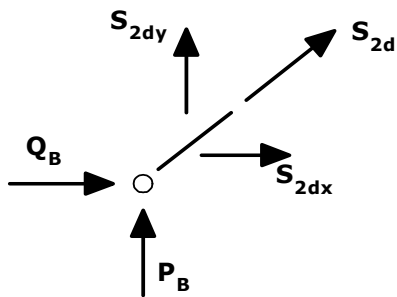
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

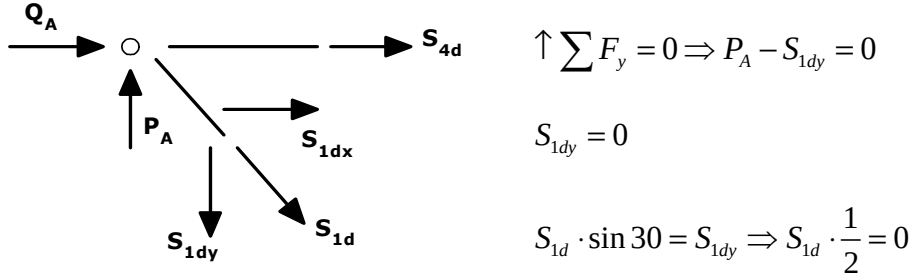
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

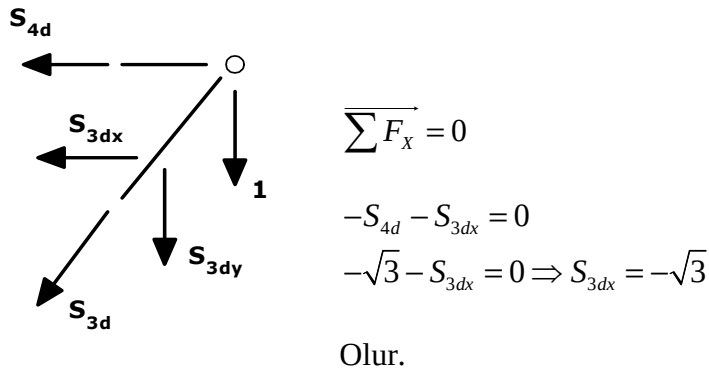
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

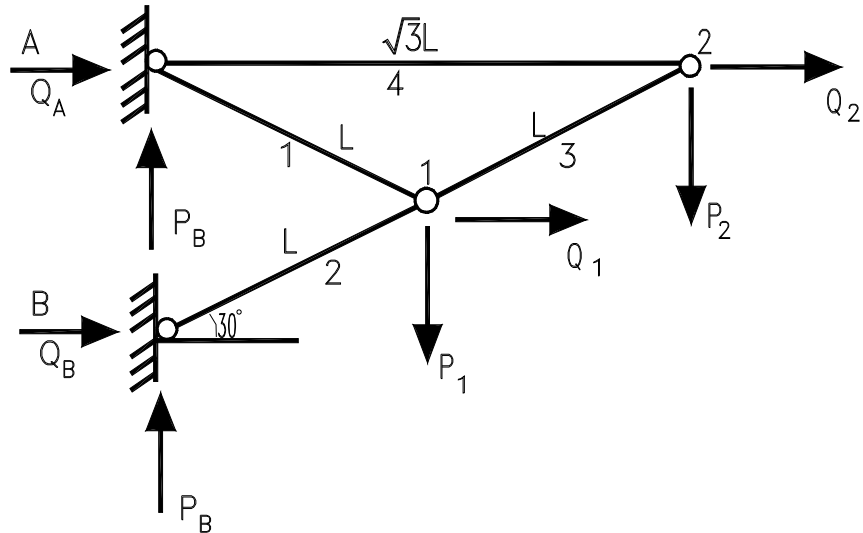
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

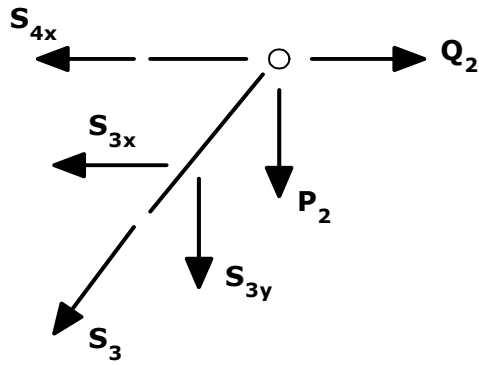
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

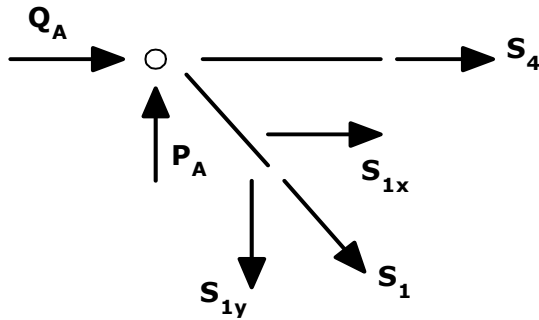
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

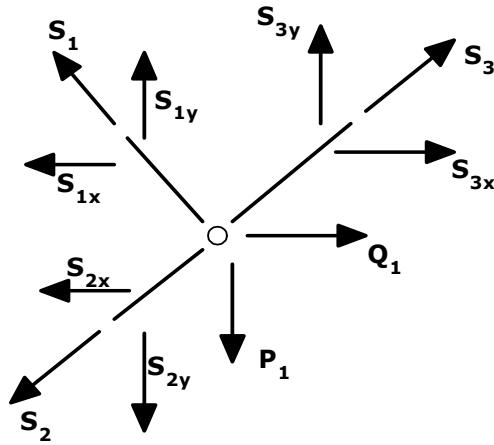
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

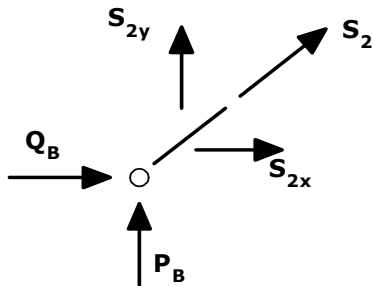
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

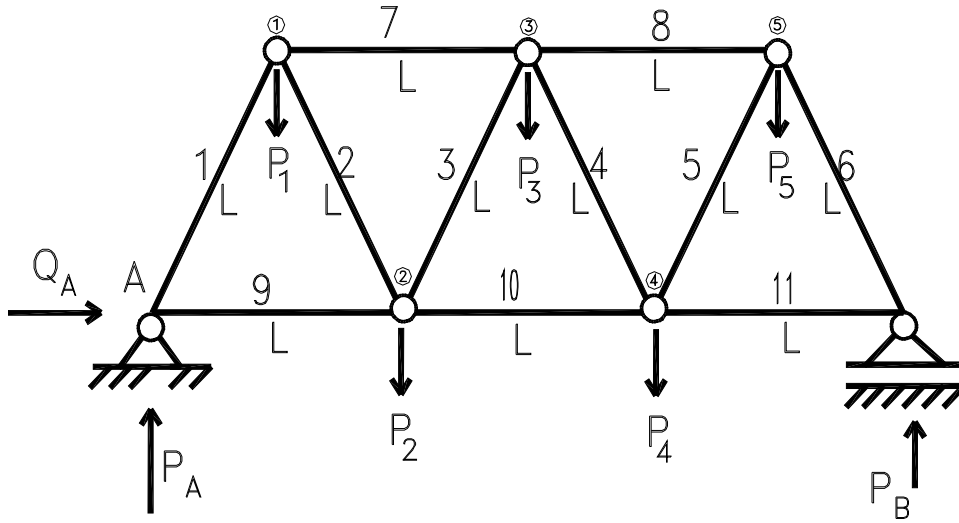
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2} P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2} P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2} P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5$$

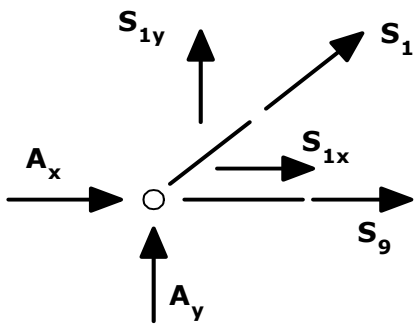
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6} P_1 - \frac{1}{3} P_2 - \frac{1}{2} P_3 - \frac{2}{3} P_4 - \frac{5}{6} P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{1}{3} P_4 + \frac{1}{6} P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

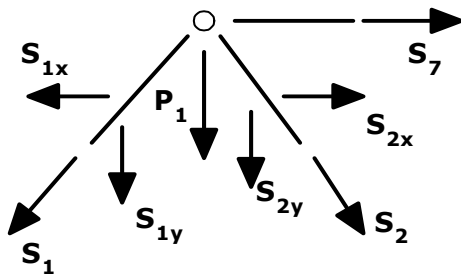
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

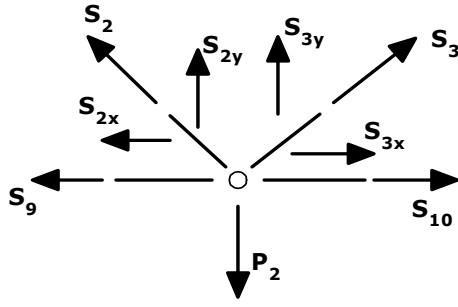
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

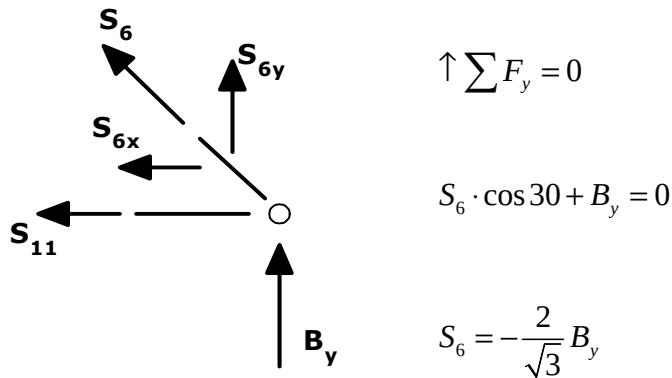
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

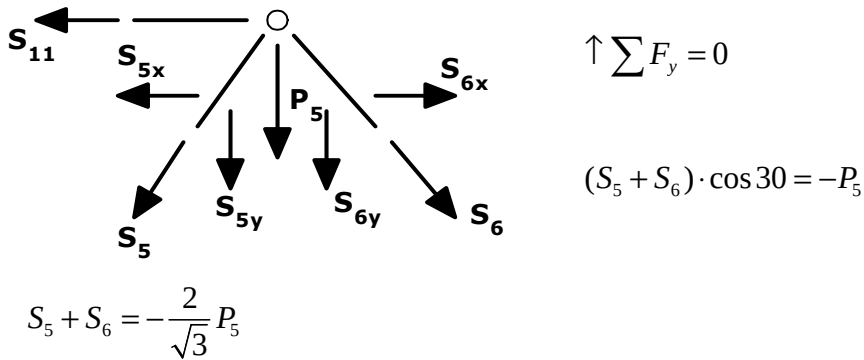
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}}P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}}P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}}P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

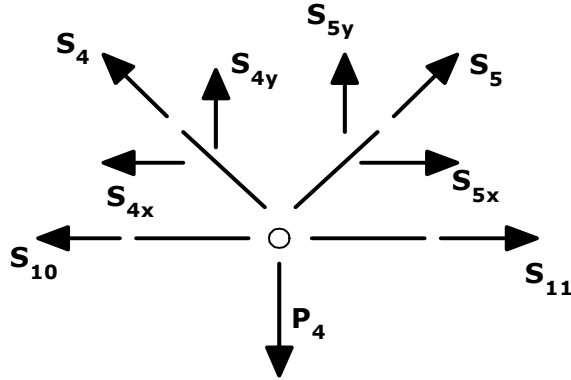
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

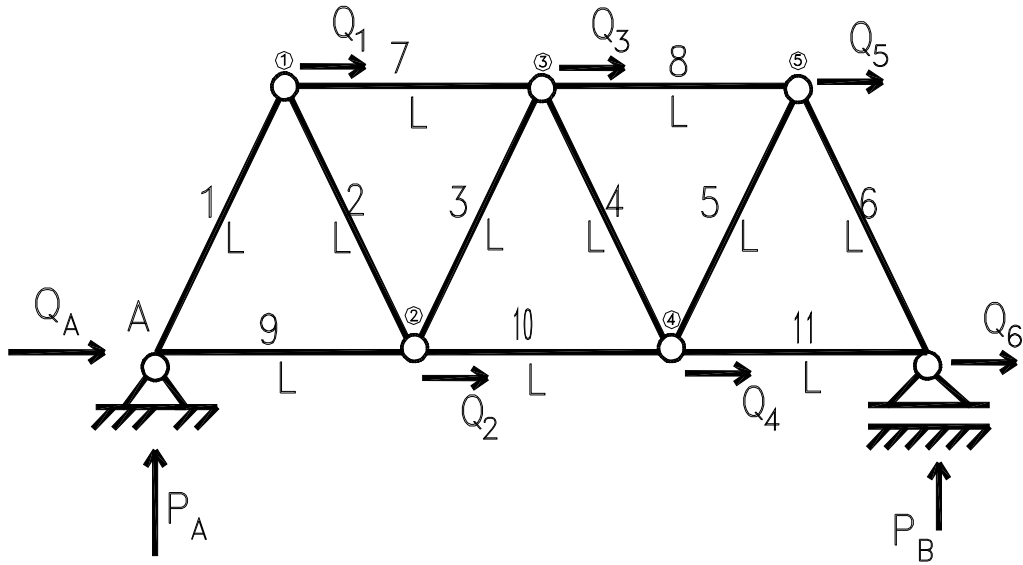
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

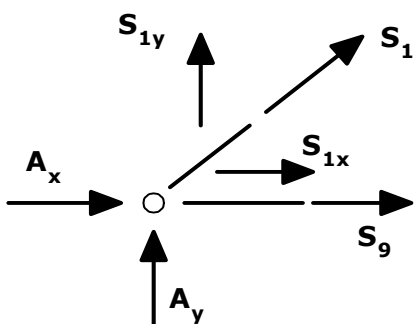
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

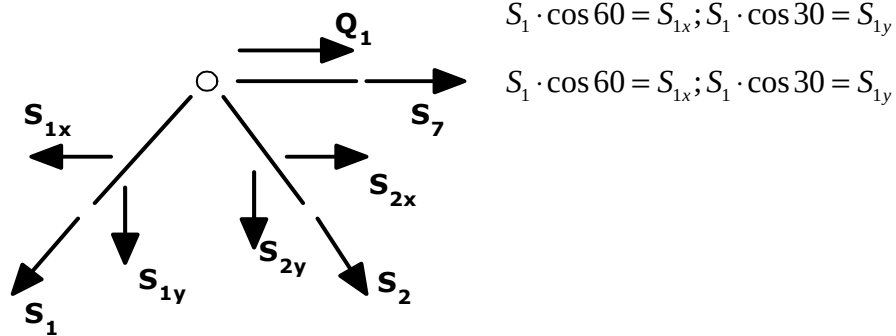
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

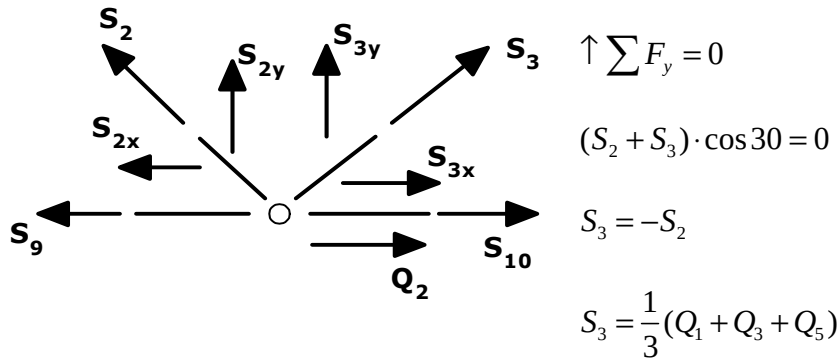
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

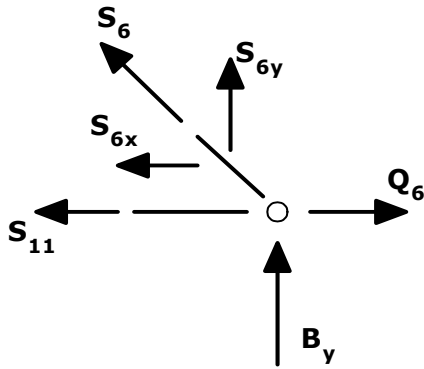
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

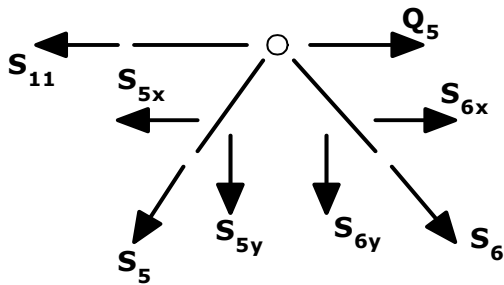
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

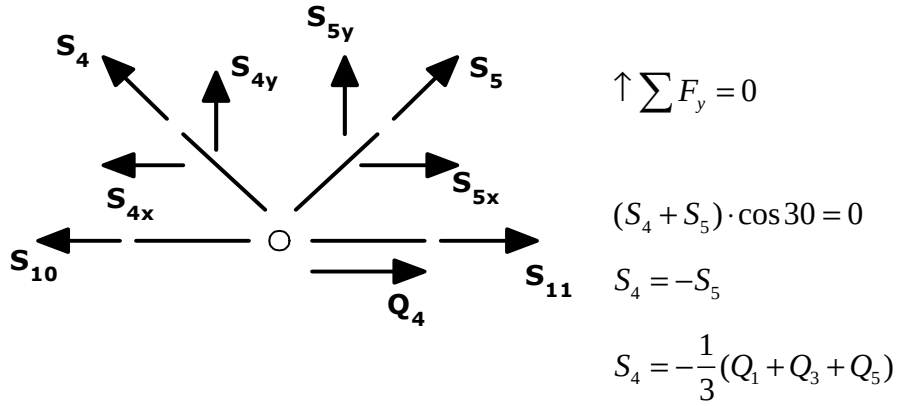
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemeden bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozmesini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

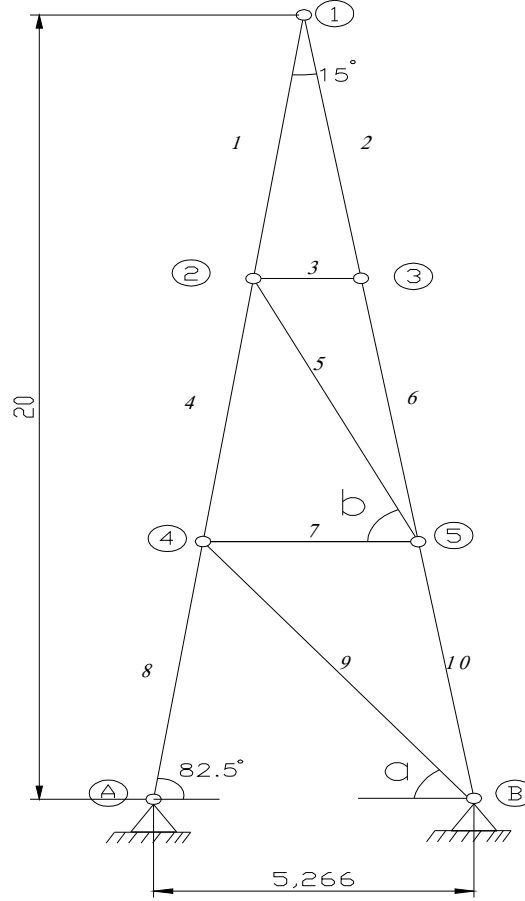
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
 Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
 X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
 Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
 X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
 Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
 X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
 Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
 X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
 Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümde elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü; Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

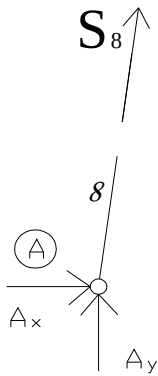
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

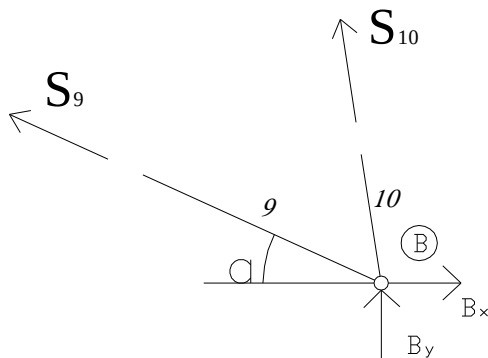
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

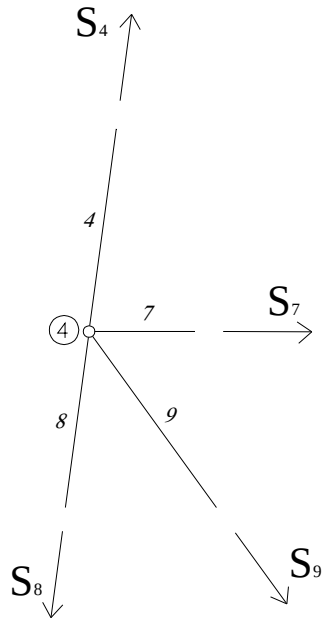
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

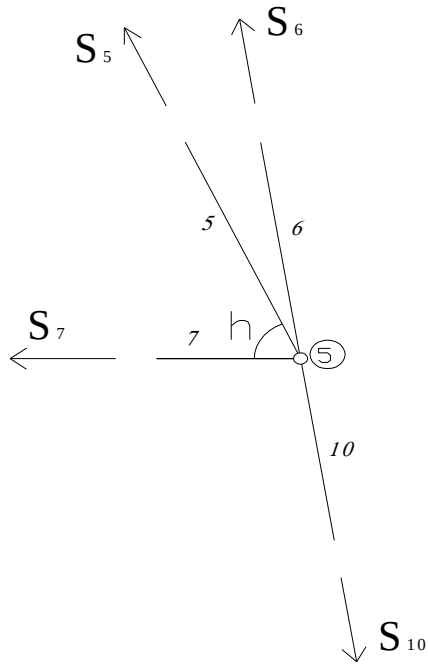
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

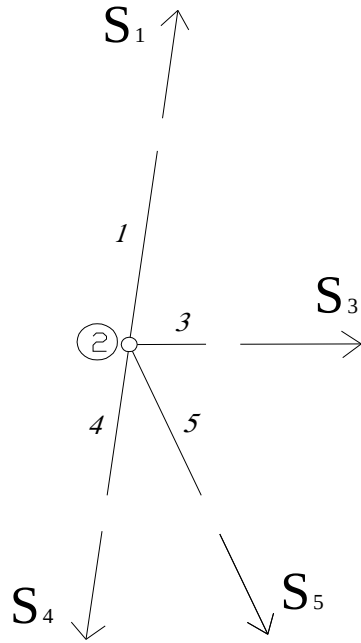
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

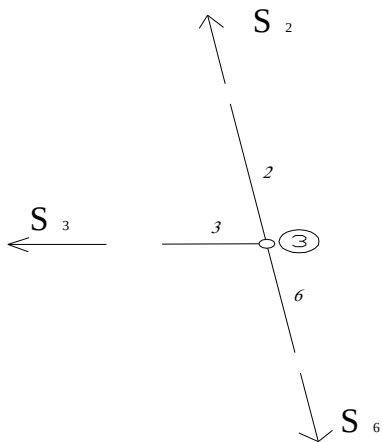
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

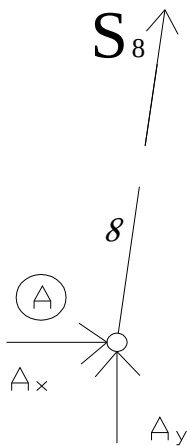
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

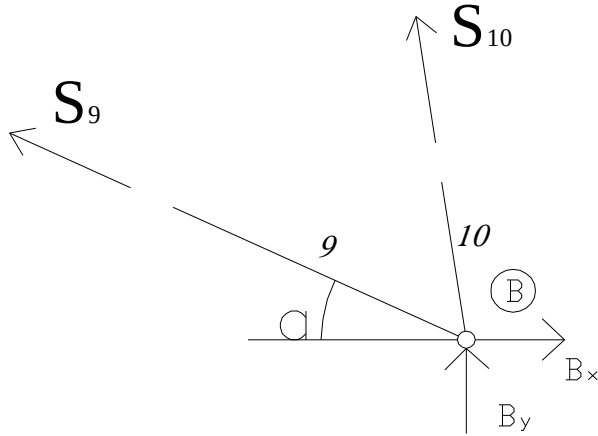
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

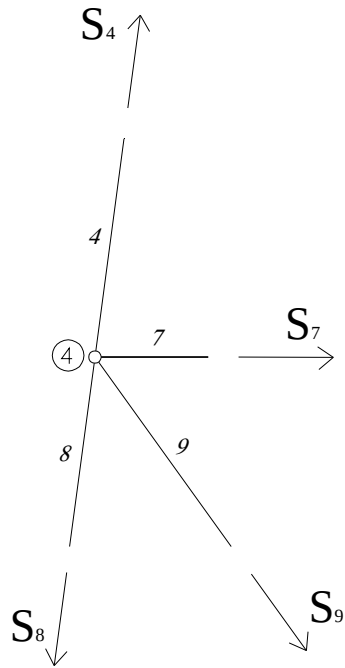
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

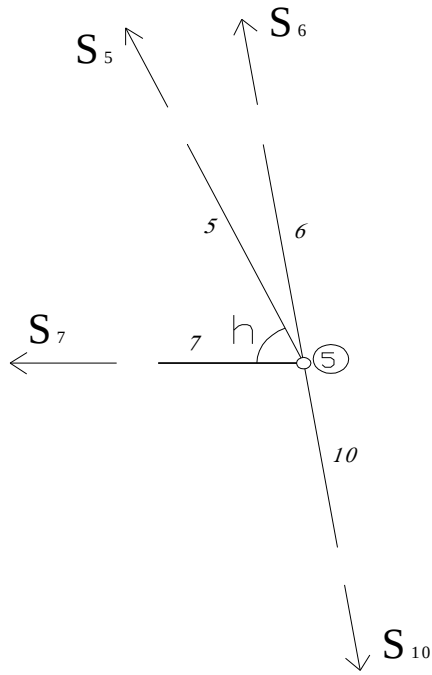
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

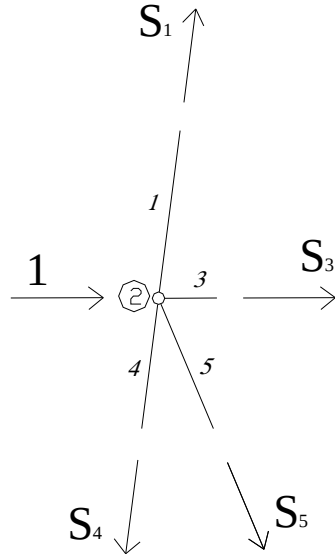
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

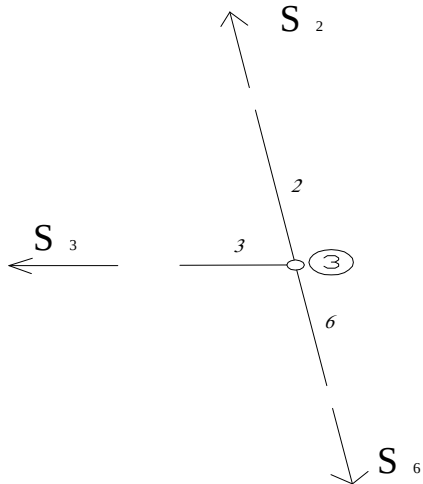
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

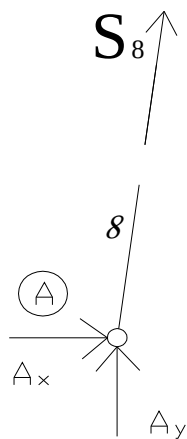
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

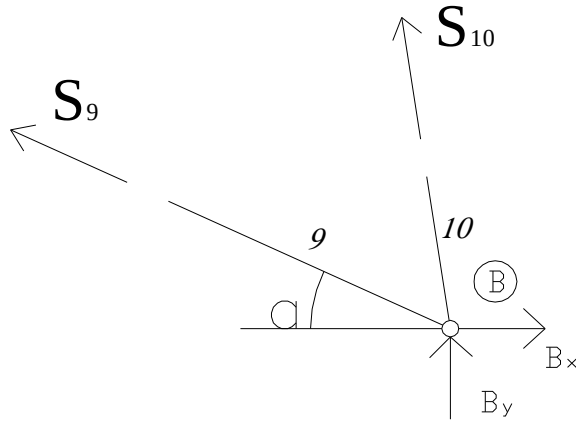
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

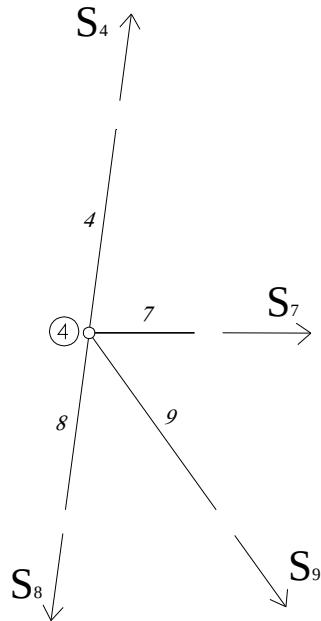
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

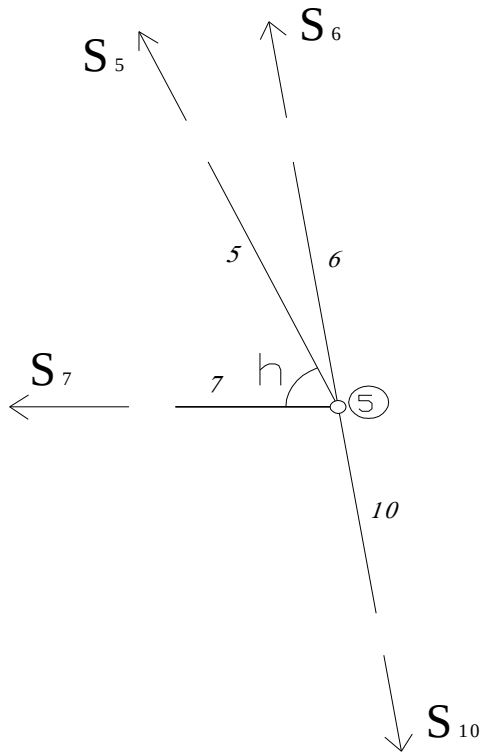
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

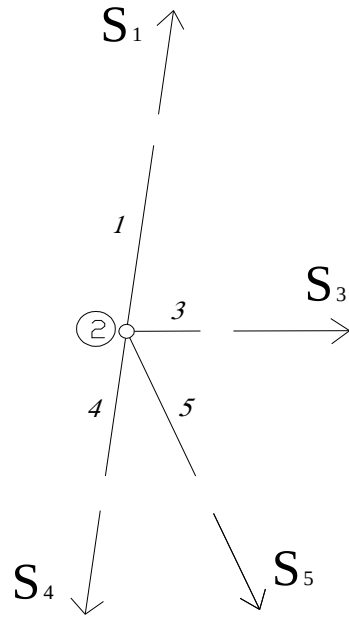
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

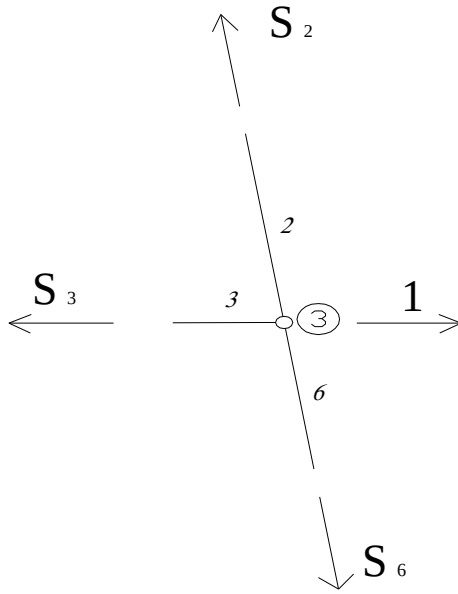
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_2 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_2 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

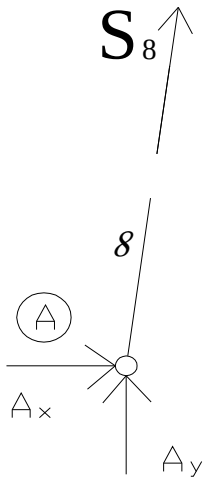
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

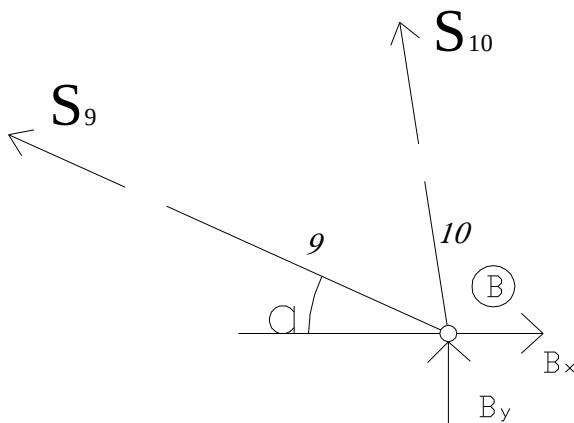
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

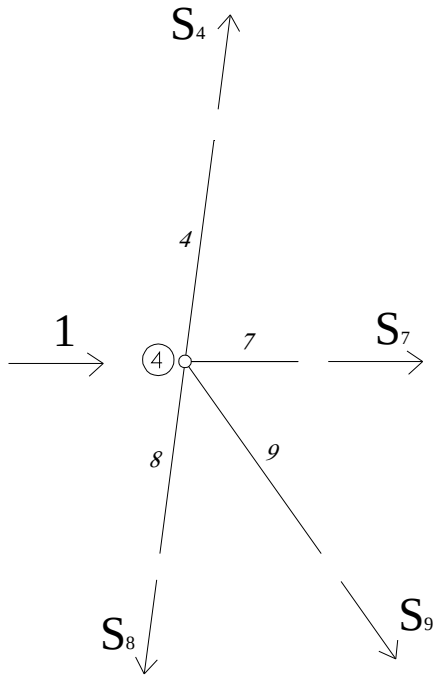
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

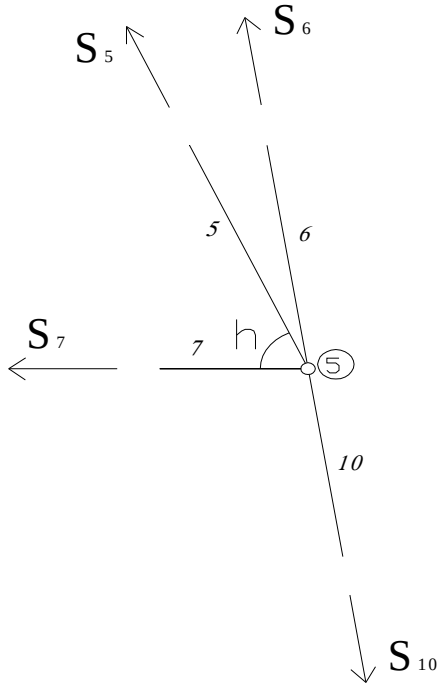
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

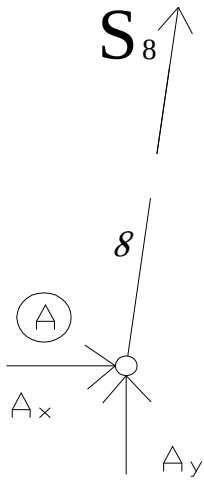
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

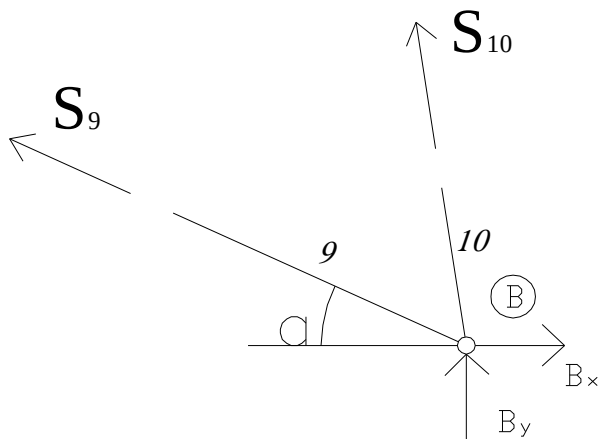
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

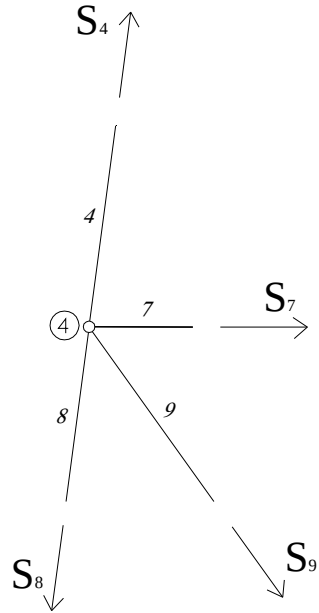
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

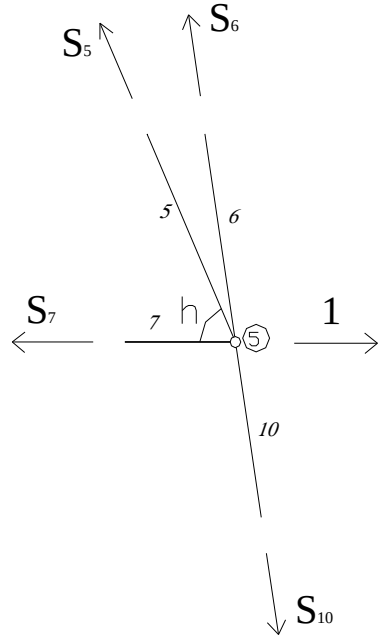
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

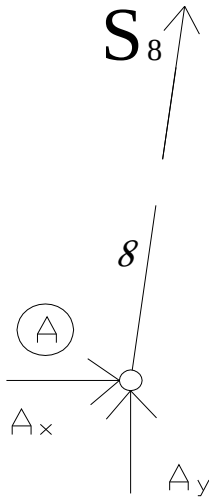
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

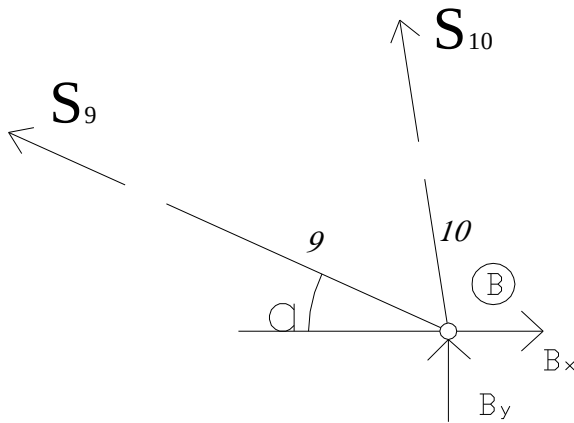
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

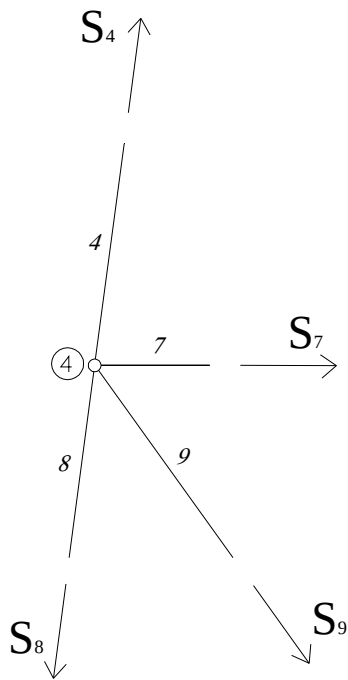
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

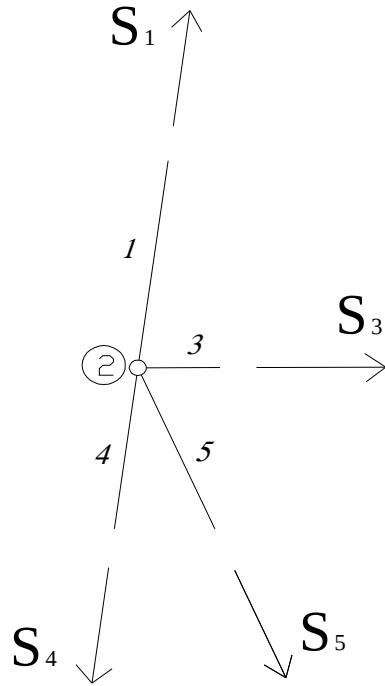
$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

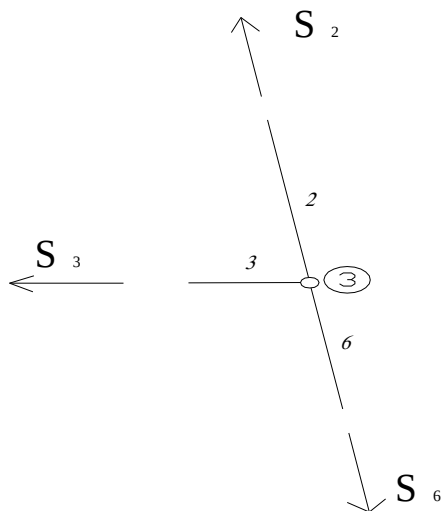
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

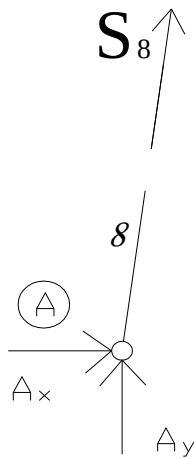
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

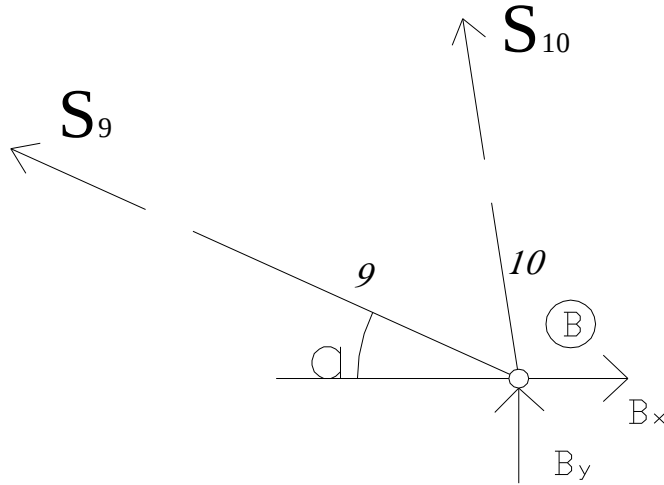
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

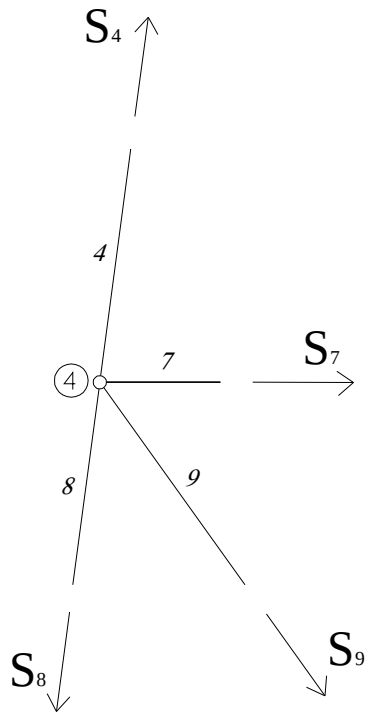
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,252 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

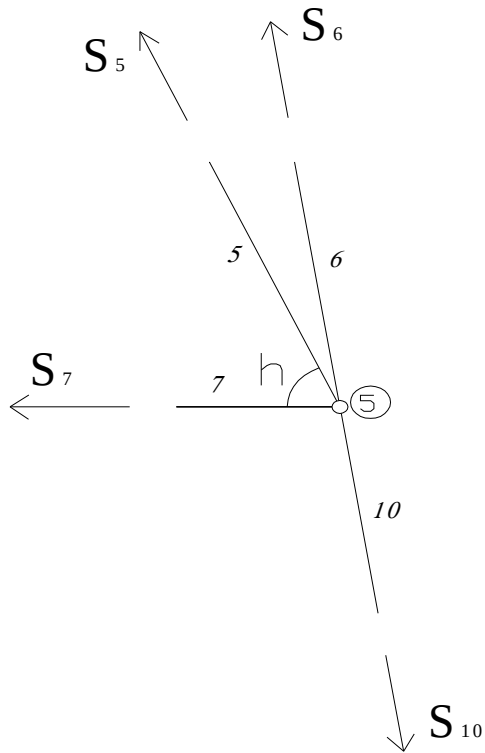
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

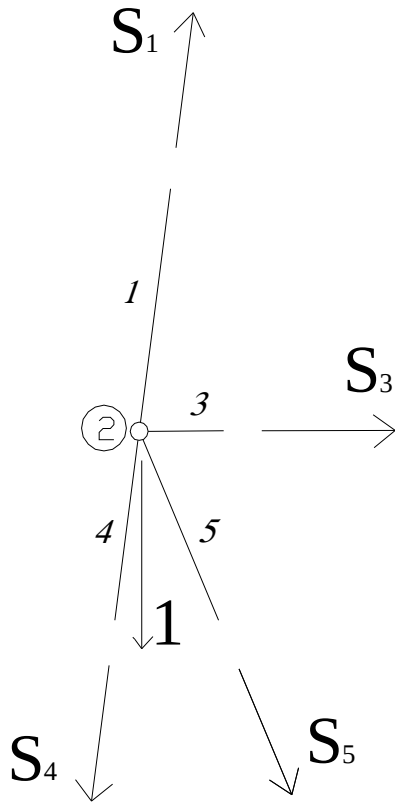
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

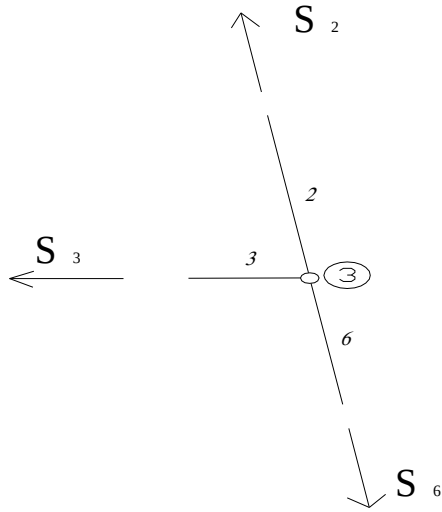
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

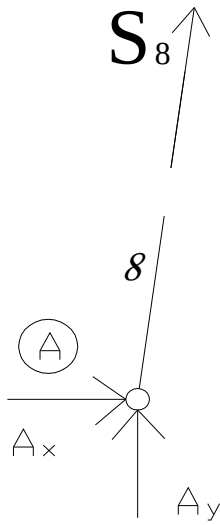
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

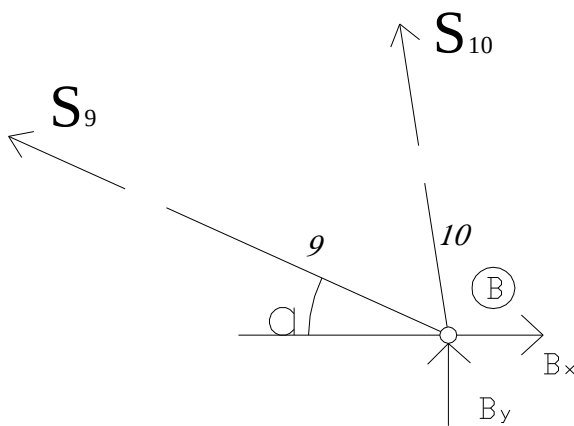
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

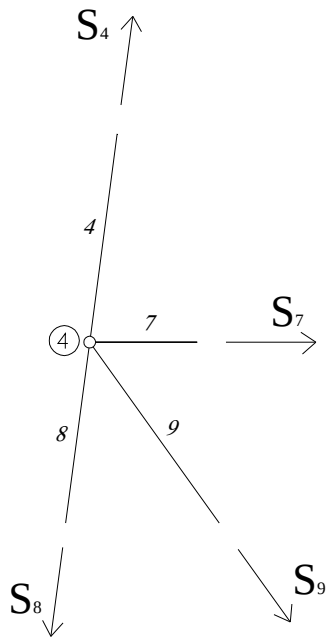
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

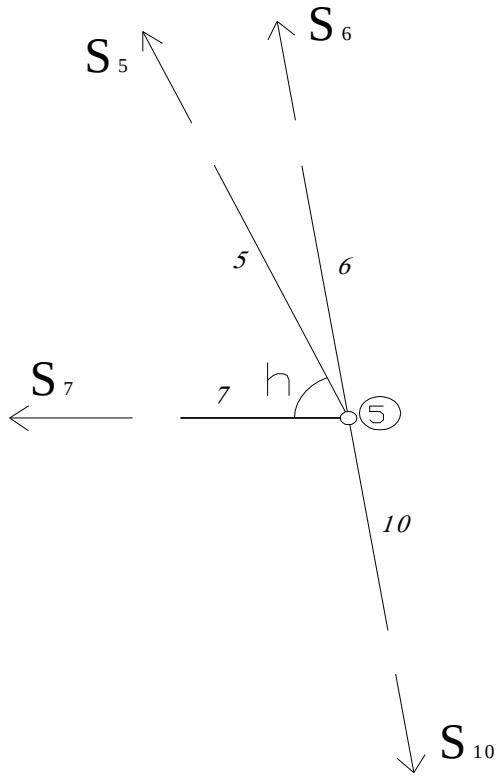
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

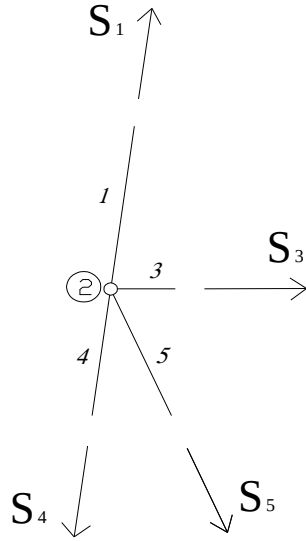
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Dügüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

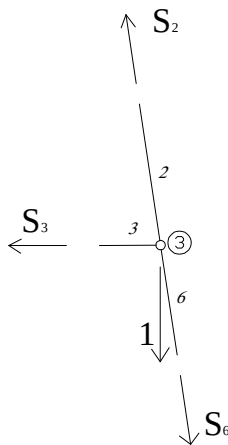
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Dügüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

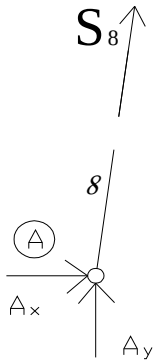
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

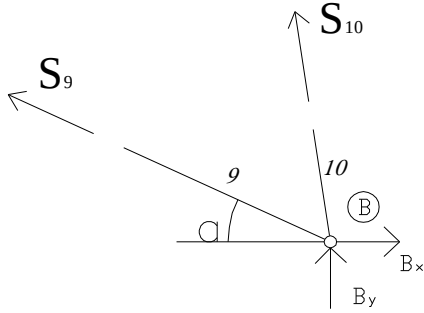
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

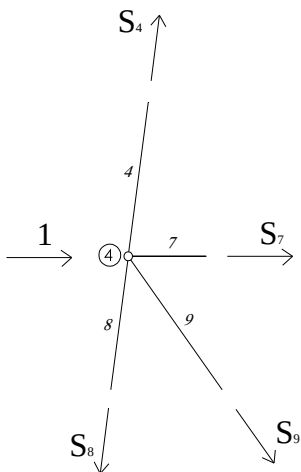
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

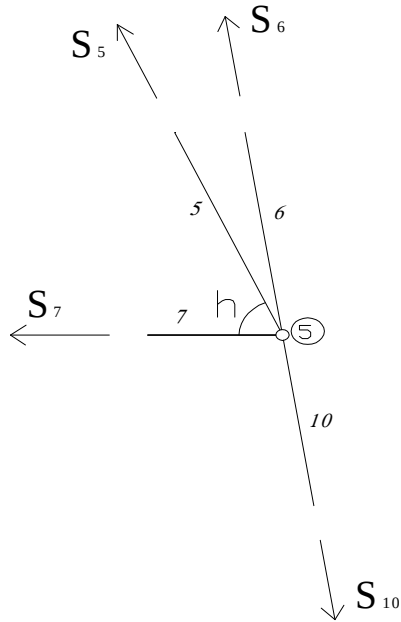
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

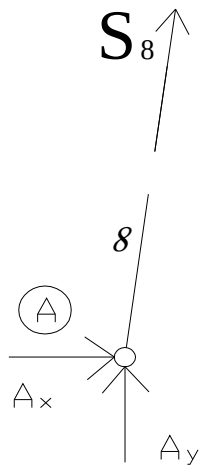
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

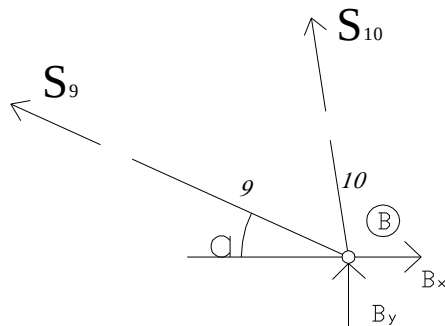
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

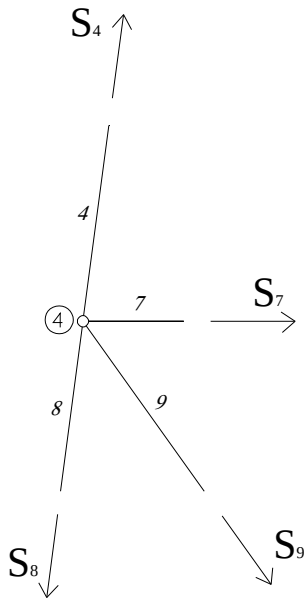
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

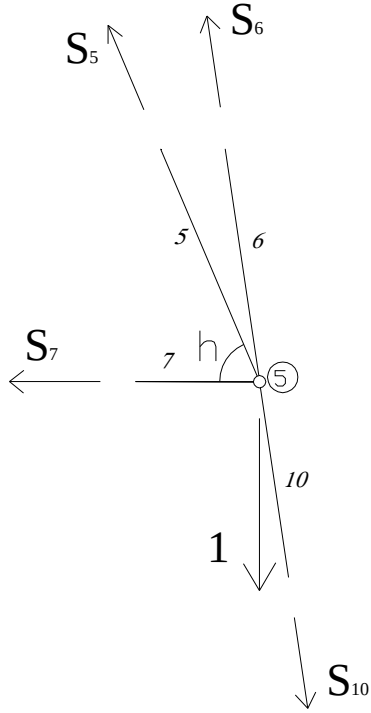
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
X_1 \\
Y_1 \\
X_2 \\
Y_2 \\
X_3 \\
Y_3 \\
X_4 \\
Y_4 \\
X_5 \\
Y_5
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
-30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
-21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
Q_1 \\
P_1 \\
Q_2 \\
P_2 \\
Q_3 \\
P_3 \\
Q_4 \\
P_4 \\
Q_5 \\
P_5
\end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
np=100
write(*,1)
1 format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
read(*,3) dosya
3 format(a12)
open(10,file=dosya)
read(10,*) icubs,ideps
write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
read(*,*)
write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
do 22 i=1,icubs

```

```

      read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
      write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
      do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
          bunye(i,j)=0.
        30 continue
      27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
      read(*,*)
      do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
      55 continue
      89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
      read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
      read(10,*) nyd
      do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
      70 continue
      do 60 i=1,nyd
        read(10,*) Q(i)
      60 continue

c   mt*b*m
      read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
      call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
      write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
      do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
      46 continue
      read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
      call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
      write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
      do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
      48 continue
      read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
      call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
      write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```

```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c  bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c  X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```

```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com

**T.C.
ERCIYES ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTIGLIANO METODU İLE
BULUNMASI**

**Tezi Hazırlayan
Uğur ERDOĞAN**

**Tezi Yöneten
Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ**

**İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi**

**Ağustos 2009
KAYSERİ**

Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ danışmanlığında Uğur ERDOĞAN tarafından hazırlanan “Düzlemsel Kafes Kiriş Sistemlerinde Düğüm Deplasmanlarının Castigliano Metodu İle Bulunması” adlı bu çalışma, jürimiz tarafından Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında **Yüksek Lisans** tezi olarak kabul edilmiştir.

19 / 08 / 2009

JÜRİ:

Başkan : Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

Üye : Doç. Dr. Mehmet ARDIÇLIOĞLU

Üye : Doç. Dr. Kamil AYDIN

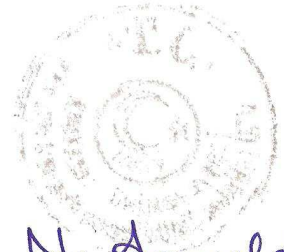


Kamil Aydın

ONAY:

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulunun 25/08/2009 tarih ve 2009/29-05 sayılı kararı ile onaylanmıştır.

25. / 08. / 2009...



N. Ayyıldız
Prof. Dr. Nusret AYYILDIZ
Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez araştırmamın gerçekleştirilmesinde çalışmalarına yön vererek çalışmalarımı takip eden, bu konuda bana her türlü desteği sağlayan, büyük bir anlayış ve sabır gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ' e teşekkür ederim.

Ayrıca ilk danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kamil AYDIN' a bana göstermiş olduğu ilgi ve hoşgörüsünden dolayı teşekkürlerimi bir borç bilirim.

**DÜZLEMSEL KAFES KİRİŞ SİSTEMLERİNDE DÜĞÜM
DEPLASMANLARININ CASTİGLİANO METODU İLE BULUNMASI**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Yüksek Lisans Tezi, Ağustos 2009

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ÖZET

Bu çalışmada düzlemsel kafes kiriş sistemlerinin deplasmanlarının hesabında Castigliano metodunun uygulaması yapılmıştır. Castigliano metodunda yer alan her çubuk için elde edilen enerji denklemlerinin türev ifadelerinin birim yükleme sonucu elde edilen çubuk kuvvetlerine eşit olduğu da gösterilmiştir. Castigliano metodunun kafes sistem üzerinde uygulamasının matris formu elde edilerek sunulmuştur.

Çalışmada izostatik olarak seçilen düzlemsel kafes kiriş sistemleri seçilmiştir. Bu kafes sistemlerin oluşturulan matris çözümüyle genelleştirilmiş çözümü elde edilerek ve yüklerin değişim durumuna göre deplasmanlar bu genelleştirilmiş matris üzerinden çözülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Kafes Sistem, Deplasman, İzostatik, Matris

**DETERMINATION OF NODAL DISPLACEMENTS OF 2D TRUSS SYSTEM
USING CASTIGLIANO'S PRINCIPLE**

Uğur ERDOĞAN

Erciyes University, Graduate School of Natural and Applied Sciences

M.Sc. Thesis, August 2009

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Cengiz Duran ATİŞ

ABSTRACT

Nodal displacements of a 2D truss system were determined using Castigliano's method. It is shown that the partial derivatives of internal stress-strain energy equation, which takes places in Castigliano's principle, is equal to the results of a unit nodal loading used in the case of virtual work principle. Matrix form of Castigliano's method of a 2D truss system was obtained and presented for the application of Castigliano's method.

Determinate (isostatic) 2D truss system was chosen and considered in the study. Flexibility matrix of a 2D system is obtained using Castigliano's method for the determination of nodal displacement for any nodal loading case.

Keywords: Truss System, Displacement, Castigliano's Principle, Flexibility Matrix

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER.....	vi
1. BÖLÜM	
GİRİŞ	1
2. BÖLÜM	
CASTİGLİANO METODU.....	2
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı	2
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı.....	5
2.2.1. Castigliano Teoremi	6
2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi	7
2.2.3 Castigliano metodunun örnek bir kafes sistemde matris formda uygulanması	8
3. BÖLÜM	
ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLİANO YÖNTEMİYLE	
DEPLASMANLARININ BULUNMASI	23
3.1 Örnek 1.....	23
3.2. Örnek 2.....	29
3.3 Örnek 3.....	47
4. BÖLÜM	
SONUÇ	92
KAYNAKLAR	93
EK-1	94
ÖZGEÇMİŞ	99

KISALTMALAR VE SİMGELER

W	: Dış kuvvetlerin yaptığı iş
q	: Yayılı yük
P	: Kuvvet
M	: Moment
U	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
E	: Elastisite modülü
N	: Çubuk kuvveti
L	: Çubuk boyu
A	: Kesit alanı
Q_m	: Genelleştirilmiş kuvvet
d_m	: Genelleştirilmiş serbestlik
T	: Kesme kuvveti

1. BÖLÜM

GİRİŞ

İnşaat mühendisliğinde üretimi yapılacak yapıların imalinden önce projelendirilerek tasarım ve boyutlandırılması yapılır. Yapıların yerçekimi etkisi nedeniyle ağırlık yüklerine maruz oldukları bilinmektedir. Ağırlık yükleri yapı elemanlarının içinde iç zorlanmalara – iç kuvvetlere- neden olmaktadır. Boyutlandırma aşamasında, üretilecek yapıların üzerine gelen ağırlık kuvvetlerinin iç tesirlerinin bilinmesi ve hesap edilmesi gerekmektedir. İç kuvvetlerin hesap edilmesinde ise mekanikte iki yaklaşım vardır. Bunlardan birincisi klasik yöntemdir. Klasik yöntemde denge denklemleri kullanılır. Denge denklemleri ile izostatik yapı sistemlerinin çözümü mümkün olur, ancak yapı sisteminin fazla bağlı (hiper statik) olması durumunda çözüm için denge denklemleri yetmez. Bu durumda, kullanılacak yöntemlerden biri de enerji yöntemleridir. Yapı üzerine gelen yükler nedeniyle yapı elemanlarında yüksüz duruma göre yer ve şekil değiştirmeler oluşur. Enerji yönteminde ise yapıda oluşan bu yer değiştirme ve yükler arasındaki bağıntıdan faydalanılır. Yapıya etkiyen dış kuvvetlerin yaptığı bir iş vardır (W), aynı zamanda yapı elemanlarının içinde oluşan iç kuvvetlerinde yaptığı bir iş vardır (U), iç kuvvetlerin yaptığı işe şekil değiştirme enerjisi de denir. Enerjinin korunumu kanunu gereğince iç kuvvetlerin yaptığı işin dış kuvvetlerin yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Böylece enerji yönteminin temel denklemi elde edilmiş olur ($W=U$). Enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak ve uygunluk şartlarının yazılmasıyla elde edilen denklemlerin vasıtasıyla fazla bağlı sistemler çözülür. Enerji yönteminin temel denklemi sadece hiperstatik sistemler için geçerli olmayıp, izostatik sistemler içinde geçerlidir.

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması kullanılabilirlik sınırları açısından önemlidir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak

yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engelleyebilir. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir. Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler aşağıdaki gibi verilmiştir [7];

Tablo 1.1. Eğilen yapı taşıyıcı elemanlarında düşey şekil değiştirmelerinin izin verilebilir değerleri.

Yapı Taşıyıcı Elemanları	Sehimin Eleman Açıklığına Oranı (f/l)
Çok katlı yapıların döşemelerinin kirişleri, sanayi binalarının çalışma alanları kirişleri (kren rayları göz önüne alınmadığı durumda;	
Esas kirişler	1/400
Döşeme kirişleri	1/250
Çelik döşeme	1/150
Krenaltı kirişler;	
Ağır çalışma rejiminde olan binalarda	1/600
Orta çalışma rejiminde olan binalarda	1/500
Çatıaltı kirişleri	
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asıldığında	Kullanım şartlarına bağlı olarak özel araştırmaya göre tayin edilir.
Kirişlere kullanım şartı ve tertibatı asılmadığında	1/250
Aşıklar	1/200
Özel çelik çatı döşemesi	1/150

Bu çalışmada kullanılacak olan Castiglione metodunun uygulanmasında enerji yönteminin temel denklemi kullanılarak, kafes kiriş düğüm noktalarında oluşan deplasmanların farklı yük kombinasyonları için çözümü bulunabilmektedir.

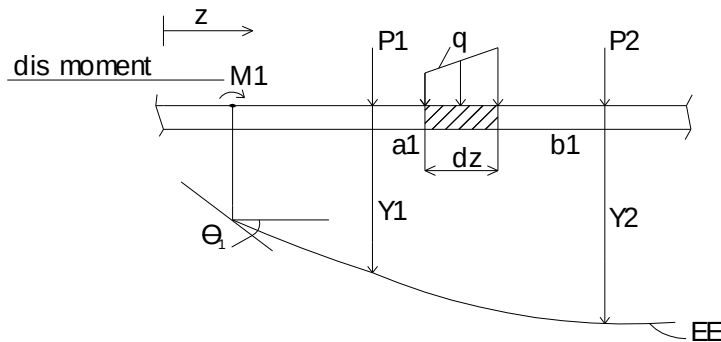
2. BÖLÜM

CASTİGLİANO METODU

Bu çalışmada kullanılan Castigliano metodunun uygulanmasında, enerji yönteminin temel denklemi kullanılmaktadır. Bu nedenle aşağıda iç ve dış kuvvetlerin yaptığı işin ifadesi elde edilmektedir. Castigliano metodunun tarifi aşağıda yer almaktadır.

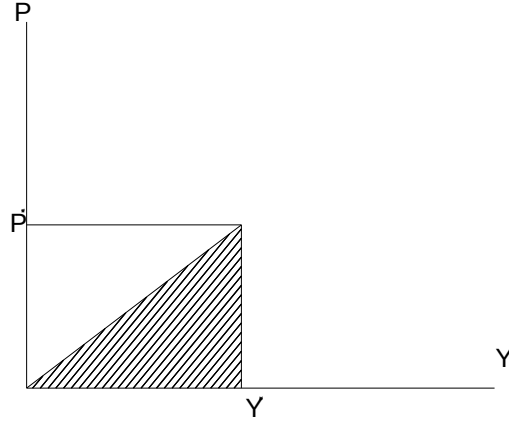
2.1. Dış Kuvvetlerin Yaptığı İşin (W) Hesabı

Aşağıda şekil 2.1 de üzerinde muhtelif yükler bulunan bir çubuk elemanı parçası verilmektedir. Çubuğa ait elastik eğride görülmektedir. Çubuk üzerinde bulunan her bir yükün altında oluşan ve elastik eğri fonksiyonundan bulunabilen deplasmanlarda şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1. Yük ve Elastik Eğri İlişkisi.

Aşağıdaki şekilde ise P yükünün sıfırdan başlayıp, yavaş yavaş artırılmasıyla, P yükünün değerlerine karşılık gelen deplasman değişimi grafik olarak gösterilmiştir. Çalışma elastik sınırlar içinde olduğu kabulüne göre yapıldığından yük deplasman ilişkisi doğrusal olup, Hooke kanununun bir ifadesidir.



Şekil 2.2. Yavaş Yükleme Durumu.

P^* ve Y^* denge konumuna tekabül eden değerler olmak üzere, P^* yükü sıfırdan başlayıp yavaş yavaş artırılarak Y^* deplasmanına erişilmiştir. Y^* deplasmanının oluşturan P^* yükünün yaptığı iş hesaplandığında;

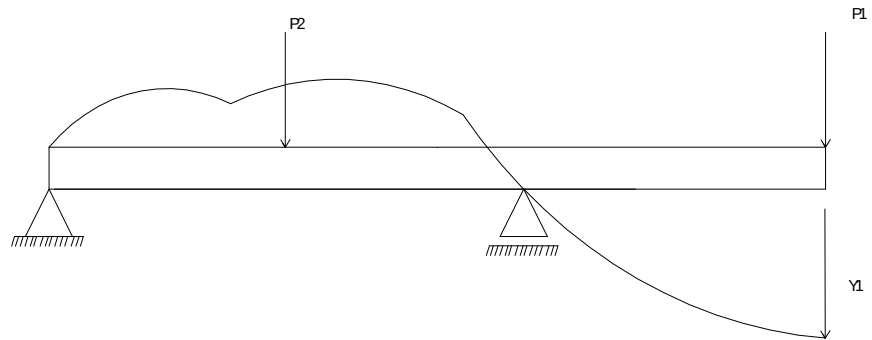
$W = \frac{1}{2} \cdot P^* \cdot Y^*$ elde edilir (taralı alanın değeri). Bundan hareketle, yüklerin tamamı göz önüne alındığında, tüm sistem için, dış kuvvetlerin yaptığı iş aşağıdaki gibi elde edilir.

$$W = \frac{1}{2} \cdot P_1 \cdot Y_1 + \frac{1}{2} \cdot P_2 \cdot Y_2 + \dots + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \theta_1 + \dots + \int_{a_1}^{b_1} \frac{1}{2} \cdot Y \cdot q \cdot dz + \dots \quad \text{denklem (2.1)}$$

Bu ifade aşağıda toplu ve kapalı halde verilmektedir.

$$W = \frac{1}{2} \sum P \cdot Y + \sum M \cdot \theta + \frac{1}{2} \sum \int q \cdot Y \cdot dz$$

Yük ve yaptırdığı deplasman aynı yönde ise yapılan işin işareti pozitif, yük ve yaptırdığı deplasmanın yönleri farklı ise yapılan işin işareti negatif olur.



Şekil 2.3. Yükün Yaptırdığı Deplasmana Göre Pozitif veya Negatif Olma Hali.

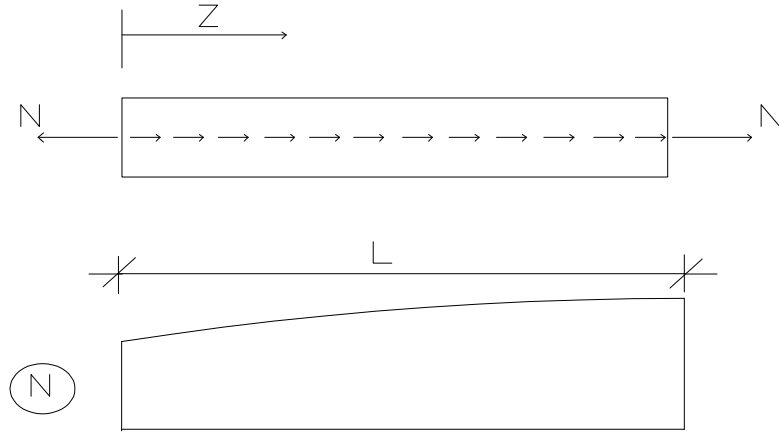
2.2. İç kuvvetlerin yaptığı işin (U) Hesabı

İç kuvvetlerin yaptığı iş genel olarak cisim içinde oluşan iç gerilmelerin ve o gerilmelerin sebep olduğu şekil değiştirmelerin çarpımının toplamı olarak ifade edilir. Bu ifade ise gerilme şekil değiştirme çarpımlarının tüm hacim üzerinde integrali ile bulunur. İç kuvvetlerin yaptığı iş olan bu ifade ise aşağıda U ile verilmektedir. integral ifadesinin başındaki $\frac{1}{2}$ katsayısı ise yükün yavaş yavaş etkilerek denge konumuna getirilmesinden dolayıdır.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \cdot \epsilon_x + \sigma_y \cdot \epsilon_y + \sigma_z \cdot \epsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{xz} \cdot \gamma_{xz} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz}] dV \text{ verilmektedir.}$$

Bu çalışmada sadece düzlemsel kafes kirişler ile ilgilendiğinden, kafes çubuk elemanlarının üzerinde ise sadece normal kuvvet oluştuğundan dolayı özel hal olarak şekil değiştirme enerjisi normal kuvvet için elde edilerek gösterilmektedir.

Eksenel Kuvvet Hali için şekil değiştirme enerjisi



Şekil 2.4. Eksenel Kuvvet Hali İçin N Kuvvet Diyagramı.

$$\sigma = N / A$$

Burada,

A= Kesit Alanı, N ise A alanına dik etkiyen normal kuvveti göstermektedir.

$\epsilon = \sigma / E \Rightarrow$ burada E elastisite modülü olup, yukarıda verilen σ yerine konulunca,

$\epsilon = N / (E \cdot A)$ elde edilir. Sabit çubuk kesiti için iç kuvvetlerin yaptığı işin

$U=(NL)/(EA)$ olduğu gösterilebilir. Burada N çubuk kuvveti, L çubuk boyu, A çubuk kesit alanı olup, E çubuk malzemesine ait elastisite modülüdür.

Düzlemsel kafes kiriş çubukları sadece normal kuvvete çalıştığından, üzerlerinde eğilme veya burulma momenti ile kesme kuvvetleri oluşmaz, bu nedenle şekil değiştirme enerjisi U sadece çubuk normal kuvvetine bağlı olur.

2.2.1. Castigliano Teoremi

Castigliano teoremi aşağıdaki ifade edilmektedir. Bir elastik sistemde, şekil değiştirme enerjisi U_i nin herhangi bir dış kuvvete göre kısmi türevi, o kuvvetin etki ettiği

noktadaki yer değiştirmeyi verir. Şöyle ki; $U_i = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n Q_m d_m$ de U_i nin Q_m cinsinden ikinci derece fonksiyonundan yararlanılırsa,

$$d_m = \frac{\partial U_i}{\partial Q_m} \quad (2.2)$$

elde edilir. (2.2) de d_m genelleştirilmiş serbestlik, Q_m de genelleştirilmiş kuvvettir. Şimdi

çubuk kuramına göre iç kuvvetlerin işi,

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N^2}{EA} + k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{GI_b} \right) dz \quad (2.3)$$

biçiminde yazılır ve (2.2) de (2.3) yerleştirilirse, P_m kuvvetinin etkidiği bir m noktasındaki u_m yer değiştirmesi,

$$u_m = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial P_m} \int_0^L \left(k'_x \frac{T_x^2}{GA} + k'_y \frac{T_y^2}{GA} + \frac{N^2}{EA} + \frac{M_x^2}{EI_x} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_b^2}{EI_b} \right) dz$$

olur. Eğer integral operatörüyle türev operatörünün yeri değiştirilirse,

$$u_m = \int_0^L \left(\frac{k'_x T_x}{GA} \frac{\partial T_x}{\partial P_m} + \frac{k'_y T_y}{GA} \frac{\partial T_y}{\partial P_m} + \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} + \frac{M_x}{EI_x} \frac{\partial M_x}{\partial P_m} + \frac{M_y}{EI_y} \frac{\partial M_y}{\partial P_m} + \frac{M_b}{EI_b} \frac{\partial M_b}{\partial P_m} \right) dz$$

elde edilir. Gösterim kolaylığı bakımından P_m kuvvetine göre kısmi türev işlemi $\overline{(\dots)}' = \partial(\dots)/\partial P_m$ biçiminde ifade edilirse, yukarıdaki denklem daha sade biçimde,

$$u_m = \int_0^L \left(k_x' \frac{T_x \overline{T_x'}}{GA} + k_y' \frac{T_y \overline{T_y'}}{GA} + \frac{N \overline{N'}}{EA} + \frac{M_x \overline{M_x'}}{EI_x} + \frac{M_y \overline{M_y'}}{EI_y} + \frac{M_b \overline{M_b'}}{EI_b} \right) dz \quad (2.4)$$

olur.

Kafes sistemler için her bir çubukta ona ait normal kuvvet sabit olduğundan, moment ve kesme kuvveti sıfır olduğundan (2.4) denklemi oldukça sadeleşir moment (M) ve kesme kuvveti (T) içeren kısımlar denklemden kaybolarak, integral bir toplama dönüşür,

$$u_m = \sum_{j=1}^n \frac{N_j}{A_j E_j} \left(\frac{\partial N}{\partial P_m} \right) \quad (2.5)$$

yazılır. (2.5) de m mafsasında P_m kuvvetinin doğrultusundaki yer değıştirme u_m olup, n kafes sistemdeki toplam çubuk sayısıdır [3].

Castigliano teoremi uygulanırken dikkat edilmesi gereken iki önemli husus vardır;

-Cisme etkiyen tüm dış etkilerin birbirlerinden bağımsız olduğu varsayılır. Onun için aynı şiddetteki dış etkiler farklı harfler kullanılarak ifade edilir.

-Yer değıştirme veya dönme hesabının yapılacağı noktada onunla uyumlu bir dış etki yoksa gerçek yüklere ek olarak bu noktaya uygun bir tekil yük etkitilir. Yer değıştirme hesabı için tekil kuvvet, dönme hesabı için tekil moment uygulanır. Esasında böyle bir yük olmadığı için, türev işlemi tamamlandıktan sonra denklemlerde bu yük terimi sıfırlanarak gerçek duruma geri dönölür.

2.2.2. Castigliano İfadesindeki Türevin Birim Yükleme ile İlişkisi

Herhangi düzlemsel bir çubuk elemanı üzerine herhangi bir noktada tekil birim yük yüklendiğinde çubuk elemanında oluşacak kesit tesirlerinin değerin M, N, T olduğu bilinmektedir.

Aynı çubuk elemanın üzerine, yukarıda bahsedilen birim tekil yük yönünde P değerinde bir tekil yük yüklendiğinde, çubuk elemanda oluşacak kesit tesirlerinin değerleri süper pozisyonun kuralı gereğince $P \cdot M$, $P \cdot N$, $P \cdot T$ olacaktır.

Castigliano metodu göz önüne alınarak, P yüklü çubuk elemanda oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevleri hesaplandığında, yani,

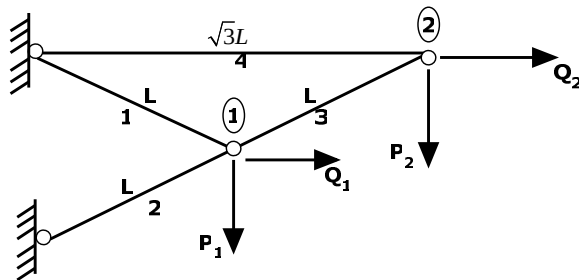
$$\frac{\partial P_M}{\partial P}, \frac{\partial P_N}{\partial P}, \frac{\partial P_T}{\partial P} \text{ nin hesabında, } \frac{\partial P_M}{\partial P} = M, \frac{\partial P_N}{\partial P} = N, \frac{\partial P_T}{\partial P} = T \text{ olduğu görülür. Çubuk}$$

elemanda P yükü nedeniyle oluşan kesit tesirinin P ye göre kısmi türevinin M , N , T olduğu görülür. M , N , T kesit tesirlerinin yukarıda belirtildiği üzere birim tekil yükten elde edilen M , N , T kesit tesirlerine eşit olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak P yükü nedeniyle çubukta oluşan kesit tesirlerinin P ye göre kısmi türevlerinin, P yönünde yüklenecek birim yük nedeniyle elde edilen kesit tesirlerine eşit olduğu anlaşılmaktadır. Bu hal bir çubuk elemanı olan kafes kiriş içinde geçerlidir.

Castigliano teoremine göre bir P yükü altında ve P yükü yönünde oluşan deplasman hesabında oluşan kesit tesirlerin P ye göre kısmi türevlerinin elde edilmesi gerekmektedir. Castigliano metodunun kısmi türevinin tesirleri, türev almadan birim yükleme yardımıyla da yapılabilir. Esasen Castigliano türev ifadesi virtüel iş prensibinde kullanılan birim yüklemenin eşitidir [8].

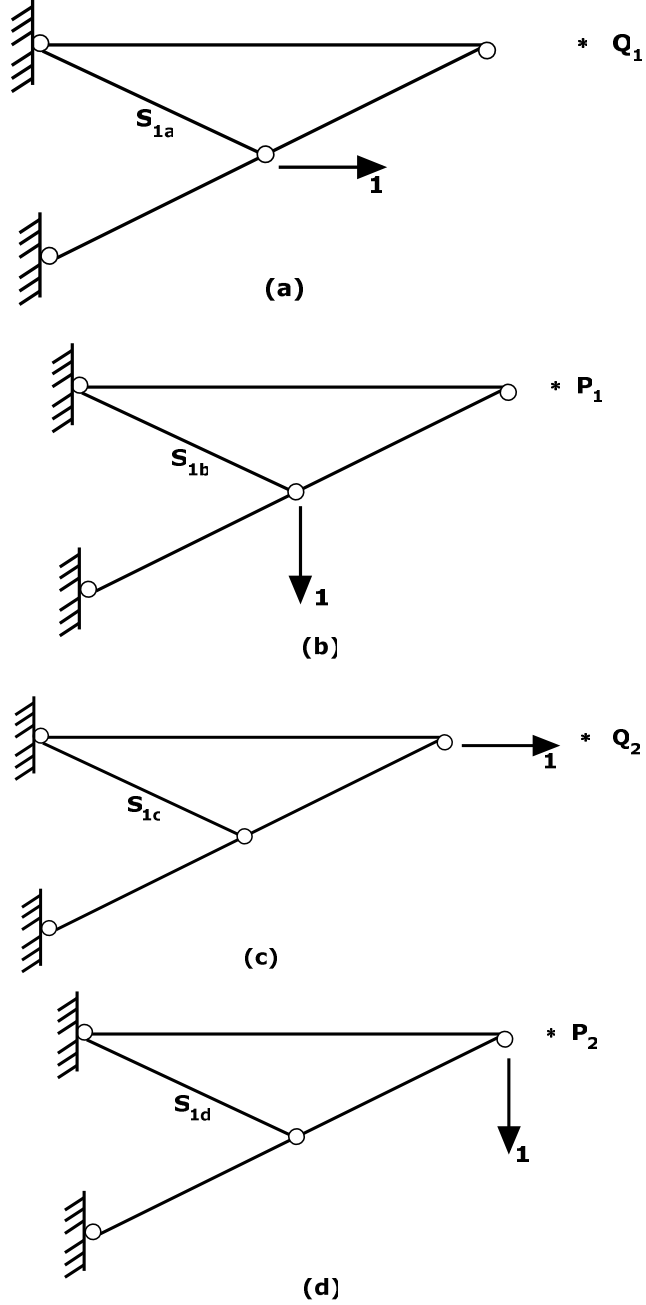
2.2.3. Castigliano Metodunun Örnek Bir Kafes Sistemde Matris Formda Uygulanması

Yukarıda düzlemsel kafes sistemler için elde edilen (2.5) deplasman denklemi kafes sistemler için aşağıdaki gibi uygulanabilir. Bu uygulama için dört çubuklu, dört düğümlü ve iki düğümünden basit mesnetli izostatik bir kafes kiriş sistemi seçilmiş olup, sistem aşağıda verilmektedir.



Şekil 2.5. Dört elemanlı kafes sistem.

Yukarıdaki kafes sistem süperpoze edilirse, sistem aşağıdaki gibi ifade edilebilir;



Şekil 2.6. Şekil 1 in süperpoze edilmiş hali (a,b,c ve d).

Bu durumda her bir çubuk kuvveti herhangi bir yöntemle (düğüm noktası dengesi, kesim metodu v.s.) çözüldüğünde çubuk kuvvetleri olan S_1, S_2, S_3, S_4 değerler süperpozisyonundan gelen katkıların bir toplamı olarak ifade edilirse, çubuk kuvvetleri aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2) \quad \text{olur.}$$

Yukarıdaki denklemler matris formda aşağıdaki biçimde ifade edilebilir ;

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{olduğu gösterilebilir.}$$

Burada; matris form incelendiğinde,

- 1. sütun Q_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 2. sütun P_1 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 3. sütun Q_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,
- 4. sütun P_2 yönünde 1 birim yük ve diğer yönlerde ise sıfır yük yükleme durumuna,

karşılık olarak gösterilebilir.

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \quad \text{denklemini}$$

$[S] = [M] * [F]$ şeklinde gösterilebilir.

Örnek kafes sistemin düğümlerinin deplasmanları X_1 , X_2 , Y_1 ve Y_2 olarak ifade edilsin. X ler düğümün X yönündeki deplasmanını, Y ler ise Y yönündeki deplasmanı

gösterebilirsin. Bu deplasmanların değerleri Castigliano ile ifade edilirse; çubuk kuvvetlerinin,

$$S_1 = S_{1a}(Q_1) + S_{1b}(P_1) + S_{1c}(Q_2) + S_{1d}(P_2)$$

$$S_2 = S_{2a}(Q_1) + S_{2b}(P_1) + S_{2c}(Q_2) + S_{2d}(P_2)$$

$$S_3 = S_{3a}(Q_1) + S_{3b}(P_1) + S_{3c}(Q_2) + S_{3d}(P_2)$$

$$S_4 = S_{4a}(Q_1) + S_{4b}(P_1) + S_{4c}(Q_2) + S_{4d}(P_2)$$

denklemleri de kullanılarak Castigliano yöntemi uygulandığında;

$$X_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{dQ_1} dl + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{dQ_1} dl + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{dQ_1} dl + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{dQ_1} dl$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 \frac{dS_1}{dQ_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 \frac{dS_2}{dQ_1} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 \frac{dS_3}{dQ_1} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 \frac{dS_4}{dQ_1}$$

S_1, S_2, S_3, S_4 denklemlerinden;

$$\frac{dS_1}{dQ_1} = S_{1a}; \frac{dS_2}{dQ_1} = S_{2a}; \frac{dS_3}{dQ_1} = S_{3a}; \frac{dS_4}{dQ_1} = S_{4a} \quad X_1 \text{ denkleminde yerine yazılırsa;}$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} S_1 S_{1a} + \frac{L_2}{E_2 F_2} S_2 S_{2a} + \frac{L_3}{E_3 F_3} S_3 S_{3a} + \frac{L_4}{E_4 F_4} S_4 S_{4a} \text{ burada;}$$

$$\frac{L_1}{E_1 F_1} = l_1; \frac{L_2}{E_2 F_2} = l_2; \frac{L_3}{E_3 F_3} = l_3; \frac{L_4}{E_4 F_4} = l_4 \text{ denirse denklem basitçe;}$$

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a} \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Bu durumda diğer deplasmanlar da benzer şekilde yazılınca;

$$X_1 = l_1 S_1 S_{1a} + l_2 S_2 S_{2a} + l_3 S_3 S_{3a} + l_4 S_4 S_{4a}$$

$$Y_1 = l_1 S_1 S_{1b} + l_2 S_2 S_{2b} + l_3 S_3 S_{3b} + l_4 S_4 S_{4b}$$

$$X_2 = l_1 S_1 S_{1c} + l_2 S_2 S_{2c} + l_3 S_3 S_{3c} + l_4 S_4 S_{4c}$$

$$Y_2 = l_1 S_1 S_{1d} + l_2 S_2 S_{2d} + l_3 S_3 S_{3d} + l_4 S_4 S_{4d}$$

Daha sonra bu 4 denklem matris formda aşağıdaki gibi

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} \quad \text{ifade edilebilir.}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ matrisinin } [M]^T \text{ olduğu görülür.}$$

Ayrıca;

$$\begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (S_{1a}Q_1 + S_{1b}P_1 + S_{1c}Q_2 + S_{1d}P_2) \cdot l_1 \\ (S_{2a}Q_1 + S_{2b}P_1 + S_{2c}Q_2 + S_{2d}P_2) \cdot l_2 \\ (S_{3a}Q_1 + S_{3b}P_1 + S_{3c}Q_2 + S_{3d}P_2) \cdot l_3 \\ (S_{4a}Q_1 + S_{4b}P_1 + S_{4c}Q_2 + S_{4d}P_2) \cdot l_4 \end{bmatrix} \quad \text{matrisinin transpozmesini alırsak}$$

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix}^T = [S_{1l_1} \quad S_{2l_2} \quad S_{3l_3} \quad S_{4l_4}] = [S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4] \cdot \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \quad \text{şeklinde}$$

yazılabilir.

yada

$$\begin{bmatrix} S_{1l_1} \\ S_{2l_2} \\ S_{3l_3} \\ S_{4l_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} = [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \quad \text{yazılabilir.}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix} \text{ matrisine } [B] \text{ bünye matrisi olarak isimlendirilir.}$$

$$\text{Bu durumda } \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{2a} & S_{3a} & S_{4a} \\ S_{1b} & S_{2b} & S_{3b} & S_{4b} \\ S_{1c} & S_{2c} & S_{3c} & S_{4c} \\ S_{1d} & S_{2d} & S_{3d} & S_{4d} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix}$$

denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot \begin{bmatrix} l_1 S_1 \\ l_2 S_2 \\ l_3 S_3 \\ l_4 S_4 \end{bmatrix} = [M]^T \cdot [B] \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix}$ matrisine $[D]$ ve $\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ matrisine $[S]$ dersek;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [S]$ elde edilir. $[S] = [M] \cdot [F]$ idi.

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ elde edilir.

$[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ çarpım ifadesi esneklik matrisi olup $[E]$ ile gösterebiliriz.

$[D] = [E] \cdot [F]$ ifade edilebilir.

Burada E matrisinin ters matrisi K olarak isimlendirilirse ve her iki taraf soldan E matrisinin tersi yani K ile çarpıldığında,

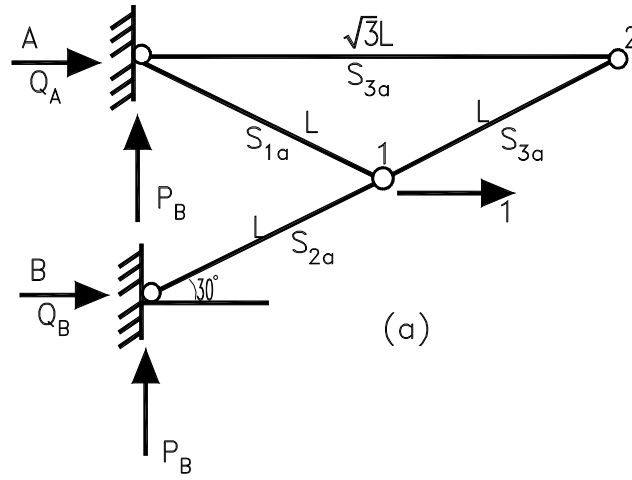
$[F] = [K] \cdot [D]$ bulunur. Buradan ;

$[K] = [E]^{-1}$ E matrisinin ters matrisine rijitlik matrisi denmektedir. Bu durumda ;

$[K] = \left[[M]^T \cdot [B] \cdot [M] \right]^{-1}$ dir.

Yukarıda ki kafes sistemi sayısal olarak çözersek;

(a) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

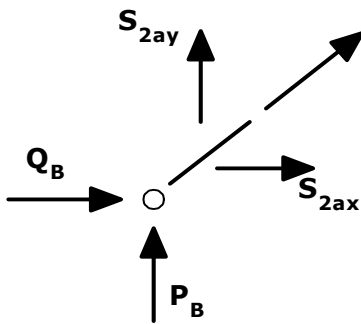
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \frac{L}{2} \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = -\frac{1}{2}$$

$$Q_A - \frac{1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{1}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} + S_{2ax} = 0 \Rightarrow S_{2ax} = \frac{1}{2}$$

$$S_{2a} \cdot \sin 30 = S_{2ay}$$

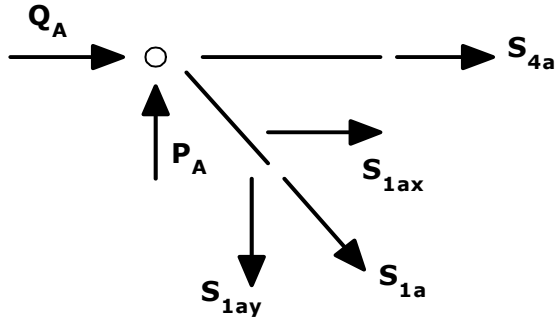
$$S_{2a} \cdot \cos 30 = S_{2ax}$$

$$S_{2a} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2ay} = 0 \Rightarrow P_B = -\frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A - S_{1ay} = 0$$

$$S_{1ay} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} \cdot \sin 30 = S_{1ay} \Rightarrow S_{1a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ bulunur. Buradan;}$$

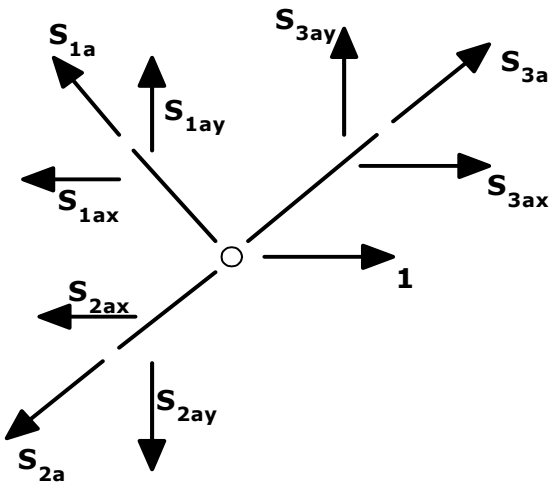
$$S_{1a} \cdot \cos 30 = S_{1ax} \Rightarrow S_{1ax} = \frac{1}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + S_{1ax} + S_{4a} = 0 \text{ değerleri yerine koyarsak;}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + S_{4a} = 0 \Rightarrow S_{4a} = 0 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası;



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{1ax} - S_{2ax} + 1 + S_{3ax} = 0$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 + S_{3ax} = 0 \Rightarrow S_{3ax} = 0$$

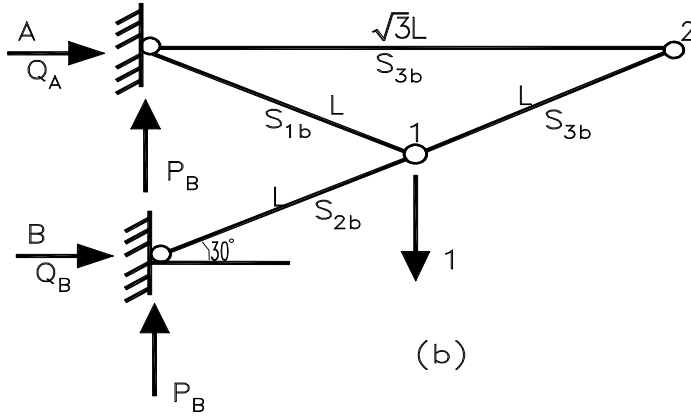
Olur.

Bu durumda ; S_{3ay} ve $S_{3a} = 0$ olarak

bulunur.

Bu durumda $S_{1a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{2a} = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$ olarak bulunur.

(b) 1 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

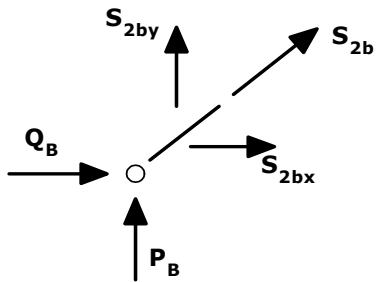
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L + \frac{\sqrt{3}}{2} L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_A + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow Q_A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2bx} = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + S_{2bx} = 0 \Rightarrow S_{2bx} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{2b} \cdot \sin 30 = S_{2by}$$

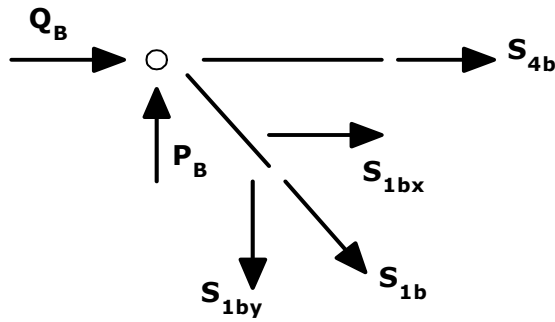
$$S_{2b} \cdot \cos 30 = S_{2bx}$$

$$S_{2b} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{2b} = -1, S_{2by} = -\frac{1}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2by} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2by} = 0 \Rightarrow P_B = \frac{1}{2} \text{ ve } P_A = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B - S_{1by} = 0$$

$$S_{1by} = \frac{1}{2}$$

$$S_{1b} \cdot \sin 30 = S_{1by} \Rightarrow S_{1b} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$S_{1a} = 1$ bulunur. Buradan;

$$S_{1b} \cdot \cos 30 = S_{1bx} \Rightarrow S_{1bx} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{4b} + S_{1ax} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

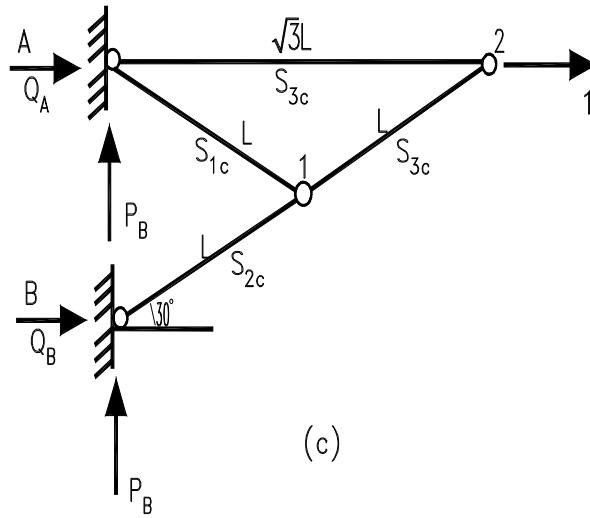
$$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + S_{4b} = 0 \Rightarrow S_{4b} = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda;

$$S_{1a} = 1, S_{2a} = -1, S_{3a} = 0, S_{4a} = 0$$

olarak bulunur.

(c) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik yatay yük hali



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

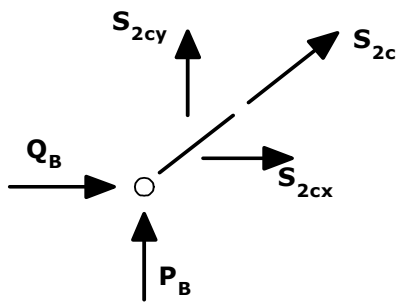
$$Q_A + Q_B + 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$Q_B \cdot L = 0 \Rightarrow Q_B = 0$$

$$Q_A + 0 + 1 = 0 \Rightarrow Q_A = -1$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2cx} = 0$$

$$0 + S_{2cx} = 0 \Rightarrow S_{2cx} = 0$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cy}$$

$$S_{2c} \cdot \sin 30 = S_{2cx}$$

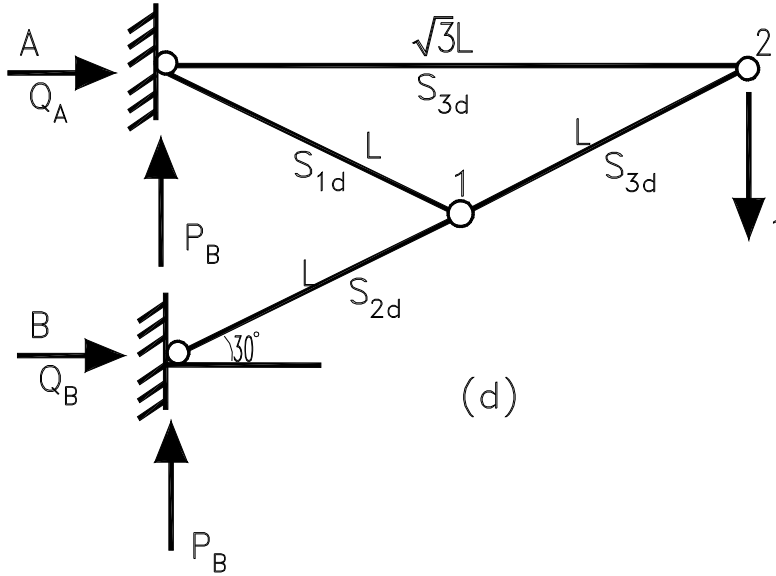
$$S_{2c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow S_{2c} = 0, S_{2cy} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_B + S_{2cy} = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B = 0 \text{ ve } P_B + S_{2cy} = 0 \Rightarrow P_B = 0 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

Bu durumda $S_{1c} = 0, S_{2c} = 0, S_{3c} = 0, S_{4c} = 1$ olarak bulunur.

(d) 2 Nolu düğüm noktasında 1 birimlik düşey yük hali:



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

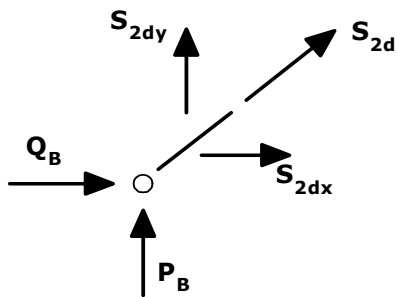
$$Q_A + Q_B = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$-Q_B \cdot L - \sqrt{3} \cdot L \cdot 1 = 0 \Rightarrow Q_B = \sqrt{3}$$

$$Q_A + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow Q_A = -\sqrt{3}$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_B + S_{2dx} = 0$$

$$\sqrt{3} + S_{2dx} = 0 \Rightarrow S_{2dx} = -\sqrt{3}$$

$$S_{2d} \cdot \sin 30 = S_{2dy}$$

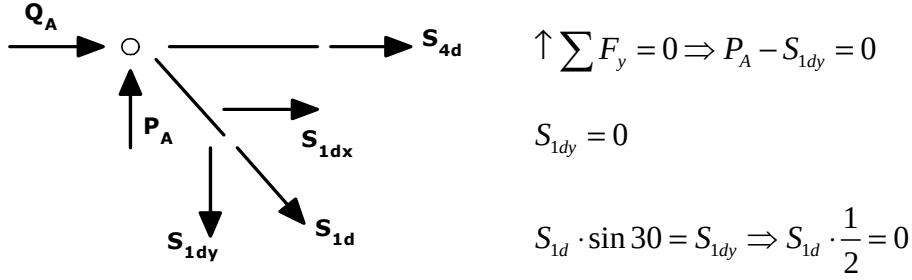
$$S_{2d} \cdot \cos 30 = S_{2dx}$$

$$S_{2d} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3} \Rightarrow S_{2d} = -2, \quad S_{2dy} = -1$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ buradan;}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow P_A + P_B + 1 = 0 \text{ ve } P_B + S_{2dy} = 0 \Rightarrow P_B = 1 \text{ ve } P_A = 0 \text{ olur.}$$

A Düğüm Noktası



$S_{1d} = 0$ bulunur. Buradan;

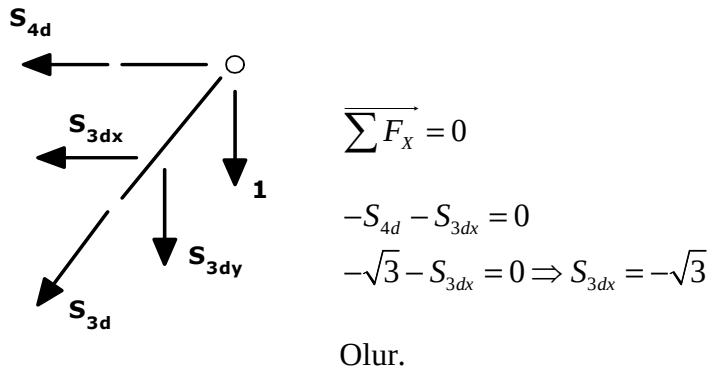
$$S_{1d} \cdot \cos 30 = S_{1dx} \Rightarrow S_{1dx} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_{1dx} + S_{4d} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$-\sqrt{3} + 0 + S_{4d} = 0 \Rightarrow S_{4d} = \sqrt{3} \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası ;



Bu durumda ; $S_{3dy} = -1$ ve $S_{3d} = -2$ olarak bulunur.

Bu durumda $S_{1d} = 0, S_{2d} = -2, S_{3d} = -2, S_{4c} = \sqrt{3}$ olarak bulunur.

(a), (b), (c) ve (d) durumlarının çözümleri ile M matrisi aşağıdaki gibi yazılır.

$$[M] = \begin{bmatrix} S_{1a} & S_{1b} & S_{1c} & S_{1d} \\ S_{2a} & S_{2b} & S_{2c} & S_{2d} \\ S_{3a} & S_{3b} & S_{3c} & S_{3d} \\ S_{4a} & S_{4b} & S_{4c} & S_{4d} \end{bmatrix} \text{ olarak verilmiştir.}$$

Bulunan değerleri burada yerine koyarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olarak bulunur.}$$

Ayrıca B matrisi de aşağıdaki gibi yazılır.

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix}$$

Sayısal örnek olarak L_1, E_1 ve F_1 de değerler verilebilir. Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 kuvvetleri için değerler verilerek, M ve B matrisleri ve ayrıca M^T elde edilir. Bu durumda;

$[D] = [M^T][B][M][F]$ işlemi yapılarak sistemde oluşacak düğüm noktası deplasmanları bulunabilir. Ayrıca $[M^T][B][M]$ çarpım matrisi bulunabilir. Çarpımın sonuç matrisinin de ters matrisi alınarak sistemin rijitlik matrisi elde edilebilir. Bunu elde etmek için Fortran dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Bu programın kodu Ek-1 de verilmektedir. Örnek için L, E, F değerleri ile Q_1, P_1, Q_2 ve P_2 değerleri aşağıdaki sabitler seçilmiş ve bilgisayar programına girilmiştir. Yukarıda elde edilen M matrisi de programa girilerek hem esneklik matrisi hem de rijitlik matrisi

hesaplanmıştır. Verilen kuvvetler için ne kadar deplasman oluşacağı hesaplanmıştır. Bu deplasmanlar sonlu elemanlar yöntemi ile de bulunarak karşılaştırılmış olup, aynısı olduğu gözlenmiştir.

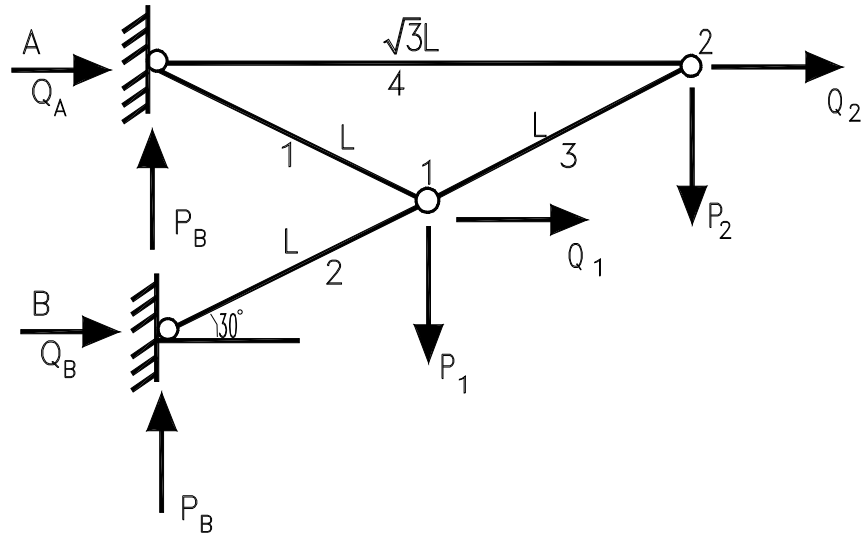
3. BÖLÜM

ÖRNEK KAFES SİSTEMLERİN CASTİGLIANO YÖNTEMİYLE DEPLASMANLARININ BULUNMASI

3.1 Örnek 1

Kafes sistemin Q ve P kuvvetleriyle genel çözümü:

Daha önce verilmiş olan örnek burada süperpozisyon uygulanmadan çözülmekte ve Castigliano metodu uygulanarak deplasman ifadeleri bulunmaktadır. Aynı zamanda deplasman ifadeleri matris formda da elde edilmekte ve her iki sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Aşağıda daha önce çözülen örnek sistem görülmektedir. Kafes çubuk kuvvetleri doğrudan Q ve P cinsinden ifade edilerek bulunmaktadır.



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$Q_A + Q_B + Q_1 + Q_2 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L - Q_B \cdot L - Q_1 \cdot \frac{1}{2}L = 0$$

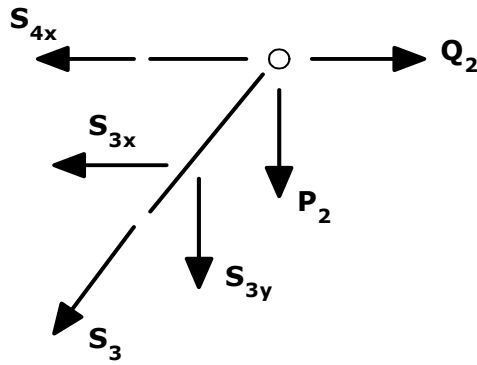
$$Q_B = \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1$$

$$\sum \overrightarrow{M_B} = 0$$

$$Q_A \cdot L + Q_2 \cdot L + Q_1 \cdot \frac{1}{2}L + P_2 \cdot \sqrt{3}L + P_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}L = 0$$

$$Q_A = -(Q_2 + \frac{1}{2}Q_1 + \sqrt{3}P_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-P_2 - S_{3y} = 0 \Rightarrow S_{3y} = -P_2$$

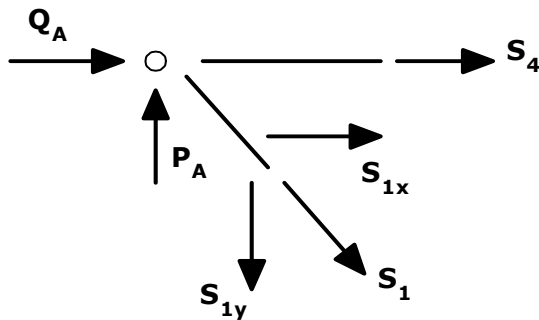
$$S_3 \cdot \sin 30 = S_{3y} ; S_3 \cdot \cos 30 = S_{3x}$$

$$S_3 = 2S_{3y} \Rightarrow S_3 = -2P_2 \text{ ve } S_{3x} = -\sqrt{3}P_2$$

$-S_{4x} + Q_2 - S_{3x} = 0$ olarak bulunmuştur. Bu durumda değerleri yerine koyarsak;

$S_{4x} = S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$ olarak bulunur.

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_A + S_4 + S_{1x} = 0$ yukarıda bulduğumuz değerleri yerine koyarsak;

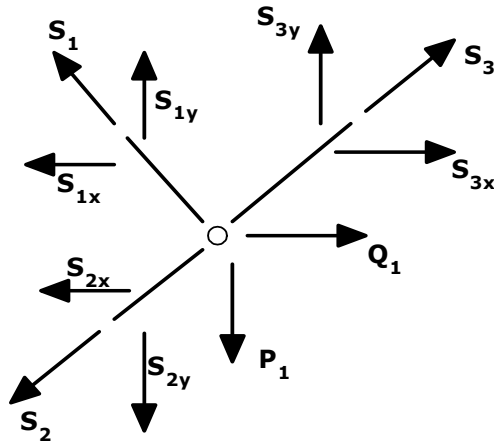
$$-Q_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 + Q_2 + S_{1x} = 0$$

$$S_{1x} = \frac{1}{2}Q_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ buradan } S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1 \text{ ve } S_{1y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$P_A - S_{1y} = 0 \Rightarrow P_A = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 \text{ olur.}$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$S_{3x} + Q_1 - S_{1x} - S_{2x} = 0$ bu durumda;

$$-\sqrt{3}P_2 + Q_1 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - S_{2x} = 0 \text{ ise}$$

$$S_{2x} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \text{ olarak}$$

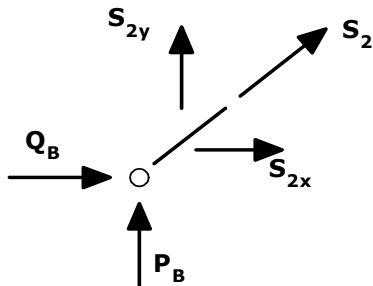
bulunur.

$$S_2 \cdot \sin 30 = S_{2y} ; S_2 \cdot \cos 30 = S_{2x}$$

$$S_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}Q_1 - \sqrt{3}P_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 \Rightarrow S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1 \text{ olarak bulunur.}$$

$$S_{2y} = \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 - P_2 - \frac{1}{2}P_1$$

B Düğüm Noktası (Sistemin Sağlaması)



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$Q_B + S_{2x} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$\frac{\sqrt{3}}{2}P_1 + \sqrt{3}P_2 - \frac{1}{2}Q_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}P_1 - \sqrt{3}P_2 + \frac{1}{2}Q_1 = 0$$

$$0=0 \quad \checkmark$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$P_B + S_{2y} = 0$ değerleri yerine koyarsak;

$$P_A + P_B + P_1 + P_2 = 0$$

$$P_B = -S_{2y} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 \text{ idi;}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2\sqrt{3}}Q_1 + \frac{1}{2}P_1 = P_1 + P_2$$

$$P_1 + P_2 = P_1 + P_2 \quad \checkmark$$

Sistemin çözümünse S_1, S_2, S_3 ve S_4 değerleri;

$$S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 + P_1$$

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}Q_1 - 2P_2 - P_1$$

$$S_3 = -2P_2$$

$$S_4 = \sqrt{3}P_2 + Q_2$$

S_1, S_2, S_3 ve S_4 için $Q_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $P_1 = 1$ diğer yüklemeler 0, $Q_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 ve $P_2 = 1$ diğer yüklemeler 0 alındığında aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\left[\begin{array}{ccccc} & Q_1=1 & P_1=1 & Q_2=1 & P_2=1 \\ S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ S_3 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ S_4 & 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{array} \right] \text{ elde edilir.}$$

Bu daha önce bulduğumuz M matrisi idi.

Castigliano yöntemiyle deplasmanlar çubuk kuvvetlerine bağlı olarak yazılınca;

$$Y_1 = \int_0^{L_1} \frac{S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_2} \frac{S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_3} \frac{S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} \cdot dz + \int_0^{L_4} \frac{S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1} \cdot dz$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{dS_1}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{dS_2}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{dS_3}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{dS_4}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_1}$$

$$Y_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1 + 2P_2)$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_1} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_1} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_1}$$

$$X_1 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot 0 + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot 0$$

$$X_1 = \frac{L_1}{E_1 F_1} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} P_1) + \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} P_2)$$

$$Y_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial P_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial P_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial P_2}$$

$$Y_2 = \frac{L_2}{E_2 F_2} \cdot (-\frac{2}{\sqrt{3}} Q_1 + 2P_1 + 4P_2) + \frac{L_3}{E_3 F_3} \cdot (4P_2) + \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (\sqrt{3}Q_2 + 3P_2)$$

$$X_2 = \frac{L_1 S_1}{E_1 F_1} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 + P_1)}{\partial Q_2} + \frac{L_2 S_2}{E_2 F_2} \cdot \frac{d(\frac{1}{\sqrt{3}} Q_1 - P_1 - 2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_3 S_3}{E_3 F_3} \cdot \frac{d(-2P_2)}{\partial Q_2} + \frac{L_4 S_4}{E_4 F_4} \cdot \frac{d(Q_2 + \sqrt{3}P_2)}{\partial Q_2}$$

$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot (Q_2 + \sqrt{3}P_2)$$

Aynı zamanda deplasmanları yukarıda daha önce gösterdiğimiz matris formda da bulabiliriz.

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ ve } [B] = \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ ifadesini;}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{L_1}{E_1 F_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L_2}{E_2 F_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L_3}{E_3 F_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu çarpımın neticesinde;

$$[D] = \begin{bmatrix} (\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}) & (\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ \frac{-2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & (4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Bu durumda;

$$[D] = \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} \text{ olduğuna göre;}$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) & 0 & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} \\ 0 & 0 & \frac{L_4}{E_4 F_4} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2} & 2 \frac{L_2}{E_2 F_2} & \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} & \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Olarak gösterebiliriz. Buradan deplasmanları;

$$X_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

$$Y_1 = \left(\frac{1}{3} \frac{L_1}{E_1 F_1} - \frac{1}{3} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(\frac{L_1}{E_1 F_1} + \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_2$$

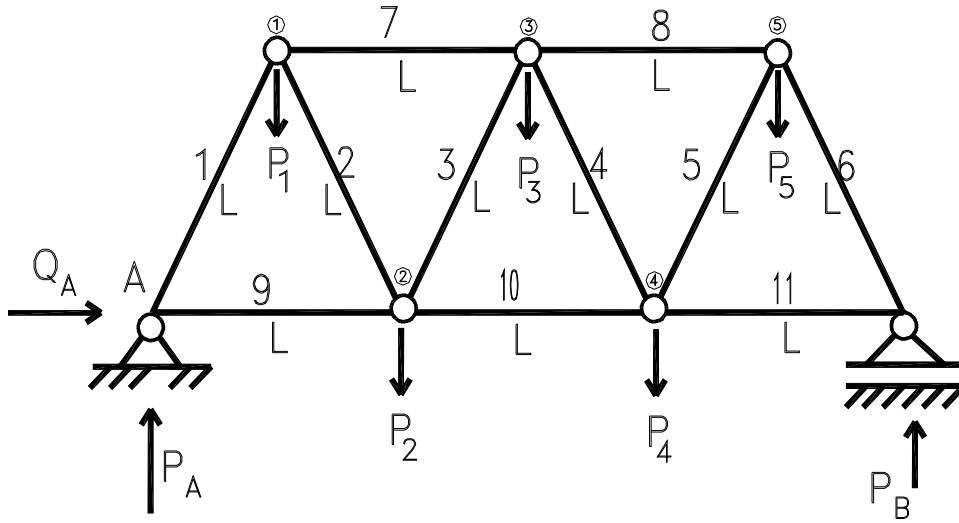
$$X_2 = \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot Q_2 + \sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4} \cdot P_2$$

$$Y_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot Q_1 + \left(2 \frac{L_2}{E_2 F_2}\right) \cdot P_1 + \left(\sqrt{3} \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot Q_2 + \left(4 \frac{L_2}{E_2 F_2} + 4 \frac{L_3}{E_3 F_3} + 3 \frac{L_4}{E_4 F_4}\right) \cdot P_2$$

olarak daha önce bulunan değerlerin aynısı bulunur.

3.2. Örnek 2

Bu örnekte aşağıda verilen kafes sistem göz önüne alınmaktadır. Örnekte her bir düğüm noktasına Q ve P yükleri etkililmiş olup, kafes sistemin çözümü önce düşey yükler göz önüne alınarak daha sonra aynı kafes sistem düşey yüklerin çözümündeki kabullerle yatay yükler göz önüne alınarak çözülecektir. İki çözüm birleştirilerek (süperpoze edilerek) sistemin M matrisi elde edilip, düğüm noktasında deplasmanlar hesaplanmaktadır. Sistemdeki çubuk boyları eşit ve tek bir malzeme kullanılacağı kabulüyle L ve E sabit alınmıştır. Aynı zamanda çözümün anlaşılabilir olması için tek bir kesit alanı kullanılacaktır.



$$A_x = 0$$

$$\overline{\sum M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{1}{2}P_1 \cdot L + P_2 \cdot L + \frac{3}{2}P_3 \cdot L + 2P_4 \cdot L + \frac{5}{2}P_5 \cdot L$$

$$B_y = \frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{2}{3}P_4 + \frac{5}{6}P_5$$

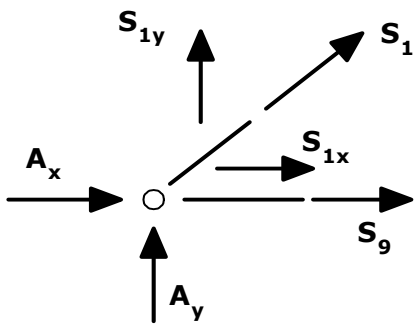
$$\overline{\sum F_y} = 0$$

$$A_y + B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5$$

$$A_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 - \frac{1}{6}P_1 - \frac{1}{3}P_2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{2}{3}P_4 - \frac{5}{6}P_5$$

$$A_y = \frac{5}{6}P_1 + \frac{2}{3}P_2 + \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{3}P_4 + \frac{1}{6}P_5$$

A Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = -\frac{1}{2} S_1$$

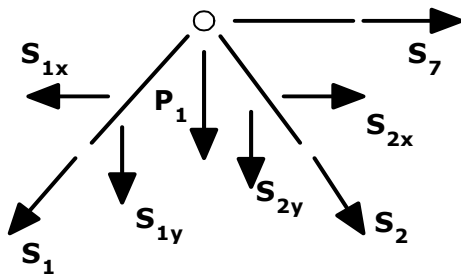
$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 60 + S_7 = 0$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 - P_1 = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - S_1$$

$$S_2 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

$$S_2 = -\left(\frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right)$$

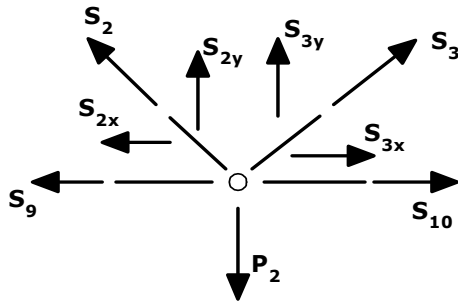
$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = \frac{S_1 - S_2}{2} \text{ idi.}$$

$$S_7 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_7 = -\frac{1}{6\sqrt{3}} (5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5 - P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$



2 Nolu Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_2 + S_3) \cdot \cos 30 - P_2 = 0$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - S_2$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_2 + \frac{1}{3\sqrt{3}} P_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{4}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} P_2 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + S_2 \cdot \cos 60 - S_3 \cdot \cos 60$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2} (S_2 - S_3)$$

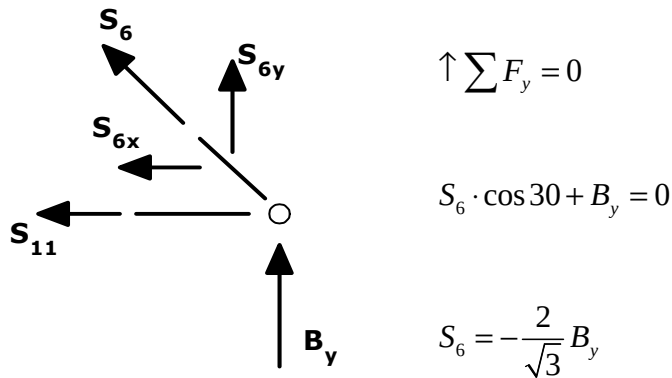
$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) \right)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5) + \frac{1}{6\sqrt{3}}(-2P_1 + 2P_2 + 6P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(3P_1 + 6P_2 + 9P_3 + 6P_4 + 3P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

B Düğüm Noktası



$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{6} P_1 + \frac{1}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3 + \frac{2}{3} P_4 + \frac{5}{6} P_5 \right)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

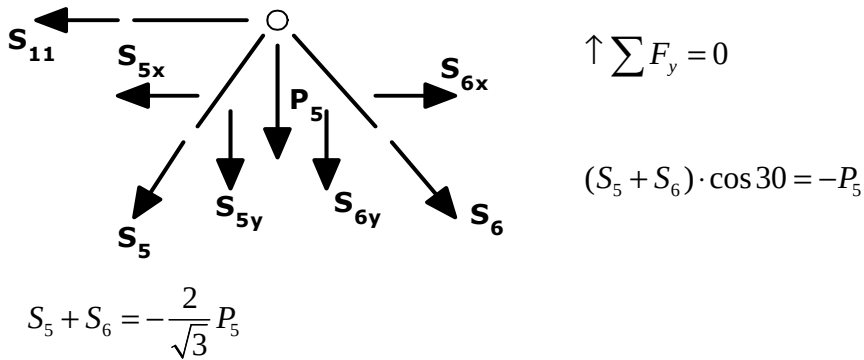
$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

$$S_{11} = -\frac{1}{2}S_6 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$S_5 = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)\right)$$

$$S_5 = -\left(\frac{6}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{5}{3\sqrt{3}} P_5 - \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4)\right)$$

$$S_5 = -\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 = 0$$

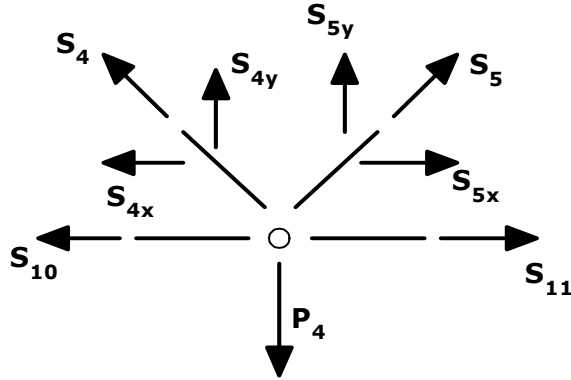
$$S_8 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5) - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5) \right)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} (2P_1 + 4P_2 + 6P_3 + 8P_4 + 4P_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$(S_4 + S_5) \cdot \cos 30 = P_4$$

$$S_4 + S_5 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4$$

$$S_4 = \frac{2}{\sqrt{3}} P_4 - S_5 \Rightarrow S_4 = \frac{6}{3\sqrt{3}} P_4 - \frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - 6P_4 - P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} (P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(-P_1 - 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 - 2P_4 - P_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 - P_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

$$S_7 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(2P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

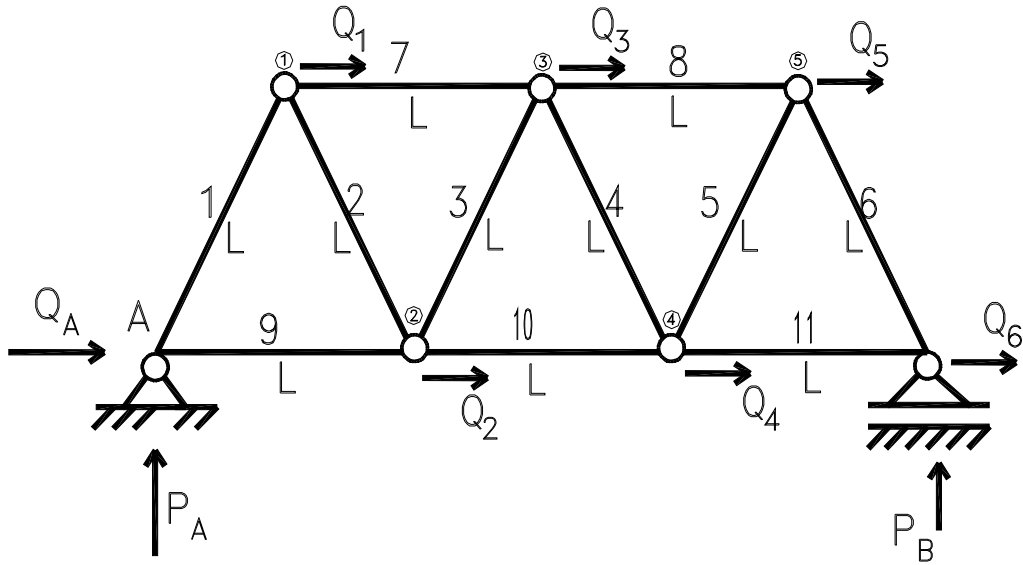
$$S_8 = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 2P_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6\sqrt{3}}(5P_1 + 4P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 2P_4 + P_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6\sqrt{3}}(P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5)$$

Yatay Yüklemenin Çözümü



$$A_x = -(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6)$$

$$\sum \overline{M_A} = 0$$

$$3B_y \cdot L = \frac{\sqrt{3}}{2} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \cdot L$$

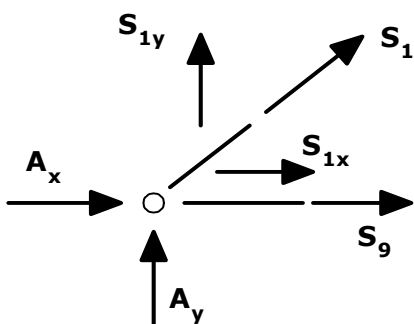
$$B_y = \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0 \Rightarrow A_y = -B_y$$

$$A_y = -\frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 60 = S_{1x}; S_1 \cdot \cos 30 = S_{1y}$$

$$A_y + S_1 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}} A_y$$

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \Rightarrow S_1 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + S_1 \cdot \cos 60 + S_9 = 0$$

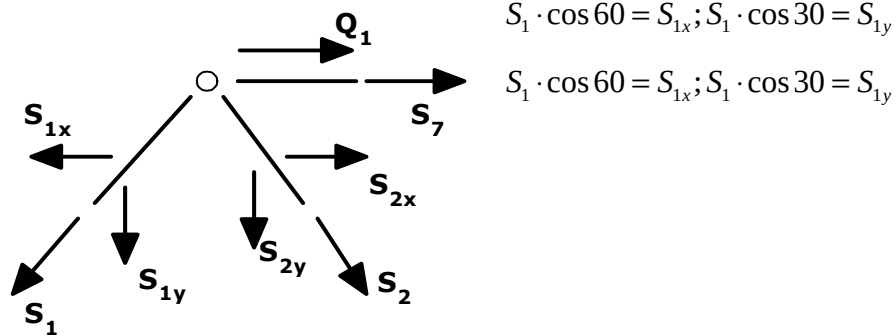
$$S_9 = -A_x - S_1 \cdot \cos 60 \Rightarrow S_9 = -A_x - \frac{1}{2} S_1$$

$$S_9 = (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 + Q_6) - \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_9 = \left(\frac{5}{6} Q_1 + Q_2 + \frac{5}{6} Q_3 + Q_4 + \frac{5}{6} Q_5 + Q_6 \right)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

1 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 30 - S_2 \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_1 = -S_2$$

$$S_2 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_1 \cdot \cos 60 + S_2 \cdot \cos 30 + S_7 + Q_1 = 0$$

$$S_7 = \frac{1}{2} (S_1 - S_2) - Q_1$$

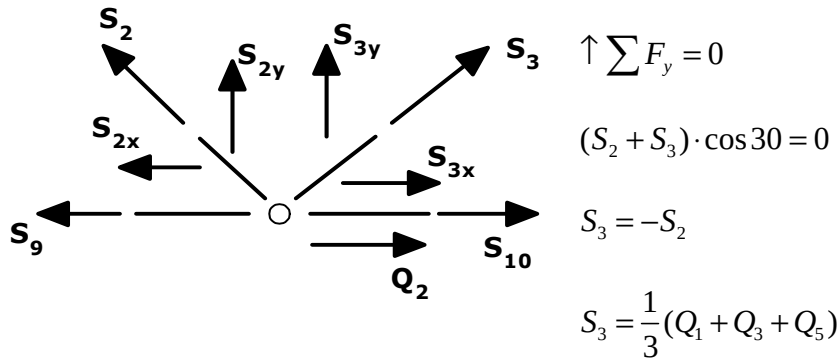
$$S_7 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) + \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_1$$

$$S_7 = \frac{1}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5 - Q_1 \Rightarrow S_7 = -\frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_3 + \frac{1}{3}Q_5$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_9 + S_{10} - S_2 \cdot \cos 60 + S_3 \cdot \cos 60 + Q_2 = 0$$

$$S_{10} = S_9 + \frac{1}{2}(S_2 - S_3) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) \right) - Q_2$$

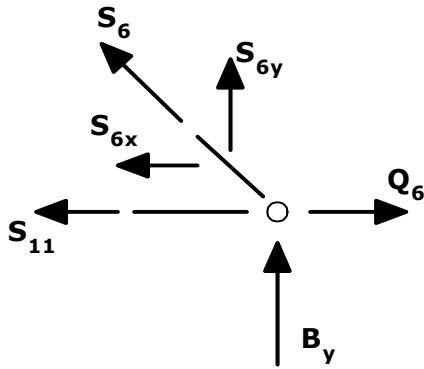
$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6) - \frac{1}{6}(2Q_1 + 2Q_3 + 2Q_5) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{6} \cdot (3Q_1 + 6Q_2 + 3Q_3 + 6Q_4 + 3Q_5 + 6Q_6) - Q_2$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

B Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 30 + B_y = 0$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} B_y$$

$$S_6 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{11} - S_6 \cdot \cos 60 + Q_6 = 0$$

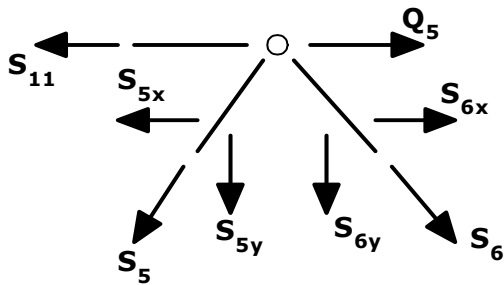
$$S_{11} = Q_6 - \frac{1}{2} S_6$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = Q_6 + \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6} (Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-(S_5 + S_6) \cdot \cos 30 = 0$$

$$S_5 = -S_6$$

$$S_5 = \frac{1}{3} (Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_8 - S_5 \cdot \cos 60 + S_6 \cdot \cos 60 + Q_5 = 0$$

$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}(S_6 - S_5)$$

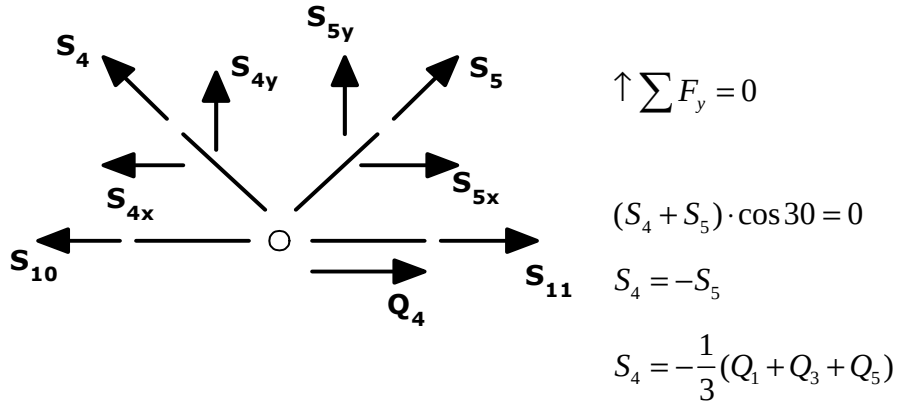
$$S_8 = Q_5 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5) - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)\right)$$

$$S_8 = Q_5 - \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5 - 3Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

4 Nolu Düğüm Noktası



Bu durumda S denklemlerini yazarsak;

$$S_1 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_2 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_3 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_4 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_5 = \frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_6 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_7 = \frac{1}{3}(-2Q_1 + Q_3 + Q_5)$$

$$S_8 = -\frac{1}{3}(Q_1 + Q_3 - 2Q_5)$$

$$S_9 = \frac{1}{6} \cdot (5Q_1 + 6Q_2 + 5Q_3 + 6Q_4 + 5Q_5 + 6Q_6)$$

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot (Q_1 + Q_3 + 2Q_4 + Q_5 + 2Q_6)$$

$$S_{11} = \frac{1}{6}(Q_1 + Q_3 + Q_5 + 6Q_6)$$

Düşey ve yatay yüklemekten bulunan S değerlerinin türevleri alınarak, M matrisine yerleştirilirse; Bu durumda Q ve P yüklemesinden elde edilen M matrisi aşağıdaki gibi olur.

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemdeki çubuk elemanlarını aynı kesit özelliklerine sahip olduğunu varsayılmıştır. B matrisi de aşağıdaki gibi olur;

$$[B] = \frac{L}{E \cdot A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ idi. M matrisinin transpozmesini alırsak

$$[M]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{5\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & -\frac{4}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{3\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{5}{3\sqrt{3}} & -\frac{1}{3\sqrt{3}} & -\frac{2}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{6\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{5}{6\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Olarak bulunur. Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesindeki değerleri yerine

koyarsak; $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ ifadesi aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix}$$

İfadeleri genel deplasman denkleminde yerine koyarsak:

$$[D] = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot [F]$$

Olur. Buradan;

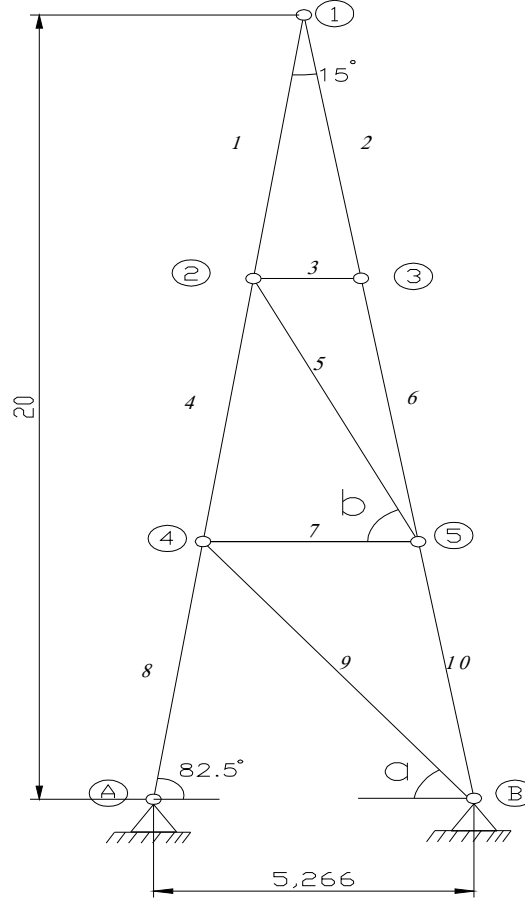
$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \\ X_5 \\ Y_5 \\ B \end{bmatrix} = \frac{L}{E \cdot A} \cdot \begin{bmatrix} 2,19 & 0,88 & 0,83 & 1,80 & 1,52 & 1,30 & 1,33 & 1,03 & 1,19 & 0,56 & 1,50 \\ 0,88 & 1,62 & 0,48 & 1,93 & 0,50 & 1,42 & 0,77 & 1,04 & 0,30 & 0,55 & 0,87 \\ 0,83 & 0,48 & 1,00 & 0,39 & 0,83 & 0,29 & 1,00 & 0,19 & 0,83 & 0,10 & 1,00 \\ 1,80 & 1,93 & 0,39 & 3,04 & 1,03 & 1,78 & 0,96 & 1,37 & 0,64 & 0,74 & 1,15 \\ 1,52 & 0,50 & 0,83 & 1,03 & 1,86 & 0,72 & 1,33 & 0,64 & 1,52 & 0,37 & 1,50 \\ 1,30 & 1,42 & 0,29 & 1,78 & 0,72 & 3,58 & 1,15 & 2,67 & 0,14 & 1,42 & 1,44 \\ 1,33 & 0,77 & 1,00 & 0,96 & 1,33 & 1,15 & 2,00 & 0,77 & 1,33 & 0,38 & 2,00 \\ 1,03 & 1,04 & 0,19 & 1,37 & 0,64 & 2,67 & 0,77 & 3,04 & -0,13 & 1,63 & 1,15 \\ 1,19 & 0,30 & 0,83 & 0,64 & 1,53 & 0,14 & 1,33 & -0,13 & 2,19 & -0,02 & 1,50 \\ 0,56 & 0,55 & 0,10 & 0,74 & 0,37 & 1,42 & 0,38 & 1,63 & -0,02 & 1,62 & 0,87 \\ 1,50 & 0,87 & 1,00 & 1,15 & 1,50 & 1,44 & 2,00 & 1,15 & 1,50 & 0,87 & 3,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Q_1 \\ P_1 \\ Q_2 \\ P_2 \\ Q_3 \\ P_3 \\ Q_4 \\ P_4 \\ Q_5 \\ P_5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistemin yaptığı deplasmanlar Q ve P kuvvetlerine göre aşağıdaki gibi olur;

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (2,19Q_1 + 0,88P_1 + 0,83Q_2 + 1,80P_2 + 1,52Q_3 + 1,30P_3 + 1,33Q_4 + 1,03P_4 + 1,19Q_5 + 0,56P_5) \\
 Y_1 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,88Q_1 + 1,62P_1 + 0,48Q_2 + 1,93P_2 + 0,50Q_3 + 1,42P_3 + 0,77Q_4 + 1,04P_4 + 0,30Q_5 + 0,55P_5) \\
 X_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,83Q_1 + 0,48P_1 + 1,00Q_2 + 0,39P_2 + 0,83Q_3 + 0,29P_3 + 1,00Q_4 + 0,19P_4 + 0,83Q_5 + 0,10P_5) \\
 Y_2 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,80Q_1 + 1,93P_1 + 0,39Q_2 + 3,04P_2 + 1,03Q_3 + 1,78P_3 + 0,96Q_4 + 1,37P_4 + 0,64Q_5 + 0,74P_5) \\
 X_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,52Q_1 + 0,50P_1 + 0,83Q_2 + 1,03P_2 + 1,86Q_3 + 0,72P_3 + 1,33Q_4 + 0,64P_4 + 1,52Q_5 + 0,37P_5) \\
 Y_3 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,30Q_1 + 1,42P_1 + 0,29Q_2 + 1,78P_2 + 0,72Q_3 + 3,58P_3 + 1,15Q_4 + 2,67P_4 + 0,14Q_5 + 1,42P_5) \\
 X_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,33Q_1 + 0,77P_1 + 1,00Q_2 + 0,96P_2 + 1,33Q_3 + 1,15P_3 + 2,00Q_4 + 0,77P_4 + 1,33Q_5 + 0,38P_5) \\
 Y_4 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,03Q_1 + 1,04P_1 + 0,19Q_2 + 1,37P_2 + 0,64Q_3 + 2,67P_3 + 0,77Q_4 + 3,04P_4 - 0,13Q_5 + 1,63P_5) \\
 X_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (1,19Q_1 + 0,30P_1 + 0,83Q_2 + 0,64P_2 + 1,53Q_3 + 0,14P_3 + 1,33Q_4 - 0,13P_4 + 2,19Q_5 - 0,02P_5) \\
 Y_5 &= \frac{L}{E \cdot A} (0,56Q_1 + 0,55P_1 + 0,10Q_2 + 0,74P_2 + 0,37Q_3 + 1,42P_3 + 0,38Q_4 + 1,63P_4 - 0,02Q_5 + 1,62P_5)
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki çözümde elde edilen tüm deplasman denklemleri bu sistemin genel deplasman denklemleri olup sisteme girilen kuvvet değerlerine göre sistemdeki düğüm noktalarının yapacağı deplasmanları verir. Bu deplasmanlar çeşitli yük kombinasyonları için bulunabilir.

3.3 Örnek 3



Yukarıdaki şekilde her bir düğüm noktasına yatay (Q) ve düşey (P) kuvveti birim yük olarak yüklenerek castigliano yöntemiyle çözülecektir. Bu sistemde ki çubuk boyları ve bu çubukların yapmış oldukları açılar aşağıda verilmiştir. Bu örnekte de çubukların alanları ve elastisite modülü sabit alınarak ve $E=1$ ve $F=1$ olarak kabul edilmiştir. Kafes sistemin çözümünde önce yatay yükler 1 birim kabul edilerek ve her bir düğüm noktasına ayrı ayrı yüklenerek çözülür. Aynı çözüm düşey yükler içinde tekrarlanır. Her iki çözümde elde edilen değerler M matrisinde yerine konarak sistemin yapmış olduğu deplasmanlar hesaplanacaktır.

$$a=56,65; b=68,48$$

$$l_1 = l_2 = l_4 = l_6 = l_8 = l_{10} = 6,724; l_3 = 1,755; l_5 = 7,166; l_7 = 3,511; l_9 = 7,981$$

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük yüklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü; Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

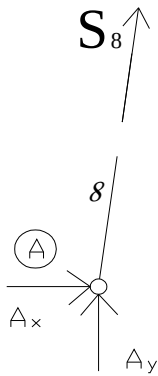
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$20 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 3,798$$

$$A_y = -3,798$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

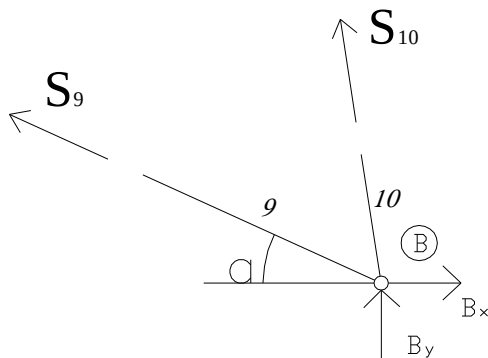
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

$$A_x = -0,500$$

$$B_x = -0,500$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 3,831$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,500$$

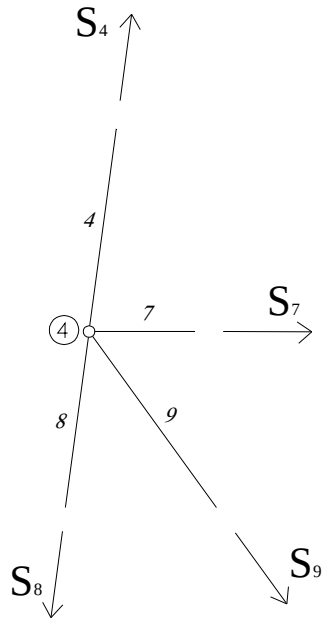
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -3,798 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 3,831$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -3,831$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -3,831 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

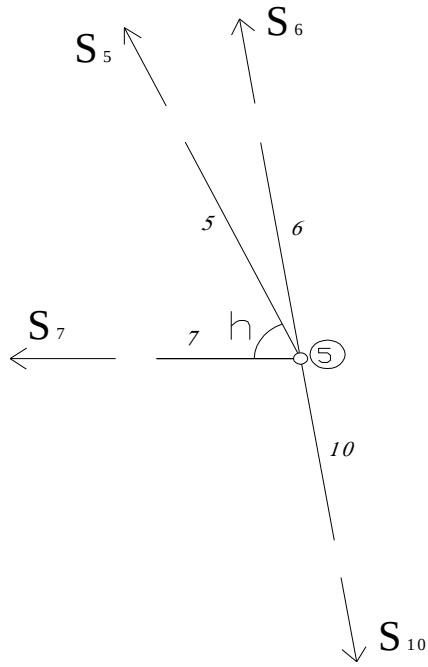
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = 3,831$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \cos 82,5$$

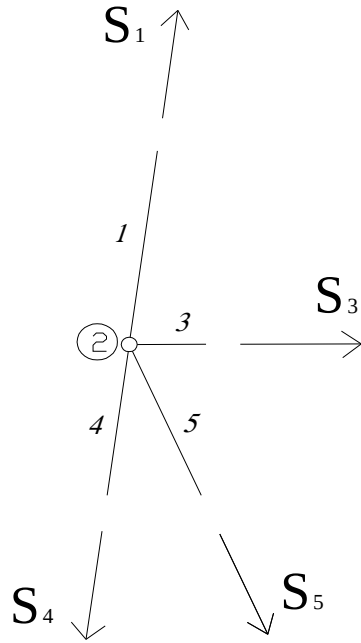
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = S_{10} \cdot \sin 82,5$$

$$-S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \frac{\cos 68,48}{\cos 82,5} = -S_{10}$$

$$S_6 + S_5 \cdot \frac{\sin 68,48}{\sin 82,5} = S_{10}$$

$$S_5 = 0$$

$$S_6 = S_{10} = -3,831$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

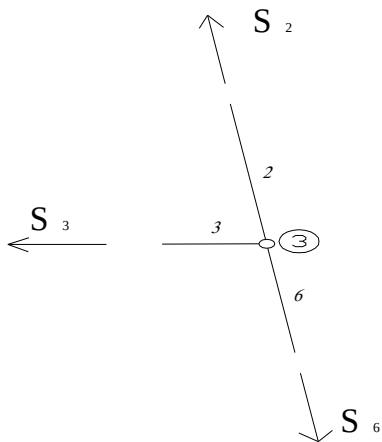
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = 3,831$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -3,831$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

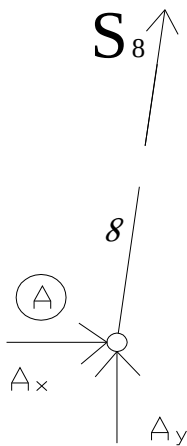
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

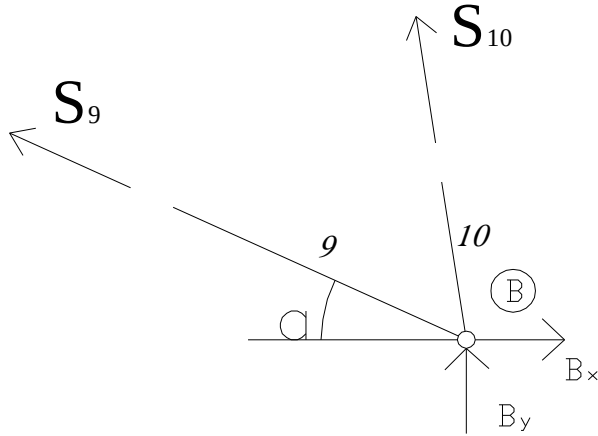
$$S_{8x} = 0,333$$

$$S_8 = 2,554$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

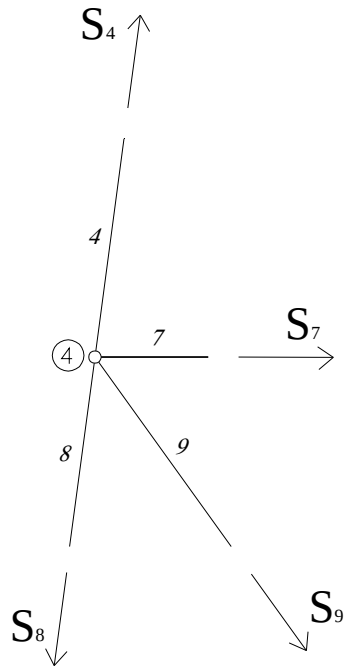
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

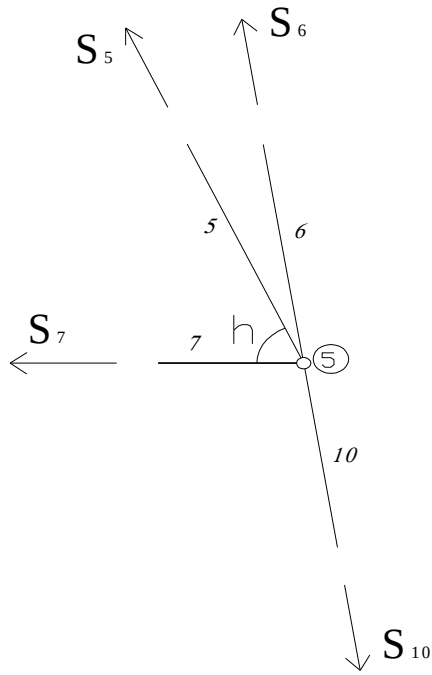
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

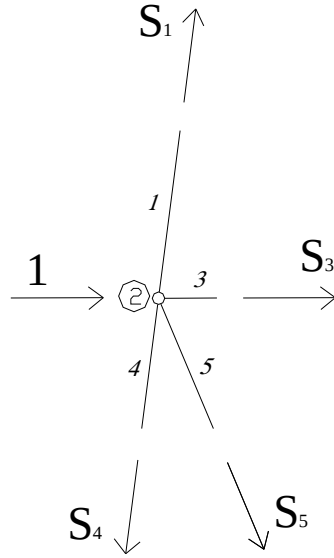
$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

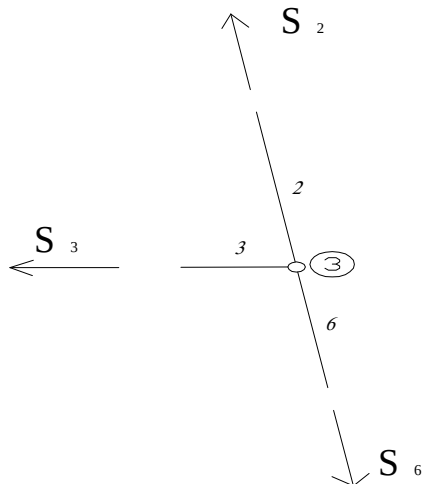
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

$$A_y + B_y = 0$$

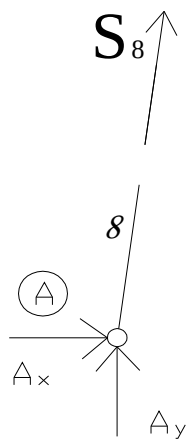
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$13,333 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 2,532$$

$$A_y = -2,532$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

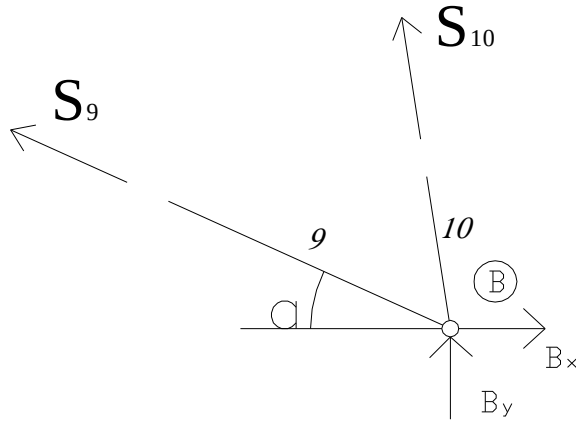
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,333$$

$$A_x = -0,333$$

$$B_x = -0,667$$

B Düğüm Noktası



$$\sum F_x = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,667$$

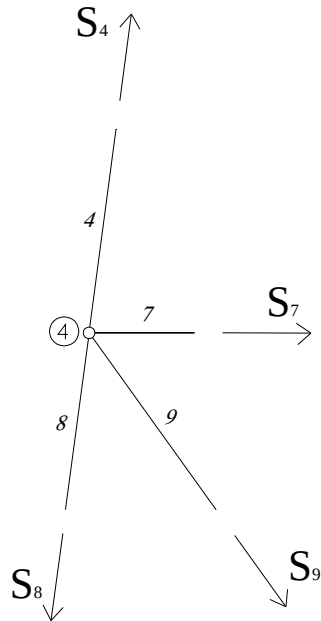
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -2,532 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 5,13$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -2,55$$

$$-3,37S_9 = 2,58 \Rightarrow S_9 = -0,76 \text{ ve } S_{10} = -1,91 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

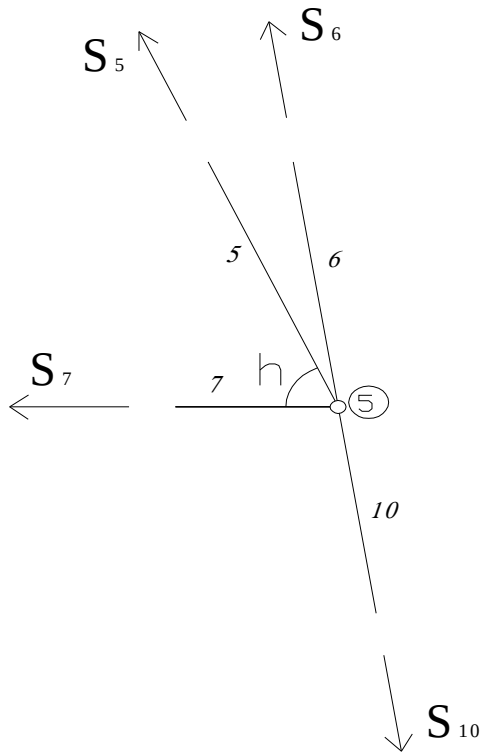
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 1,91$$

$$S_7 = 0,50$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,76$$

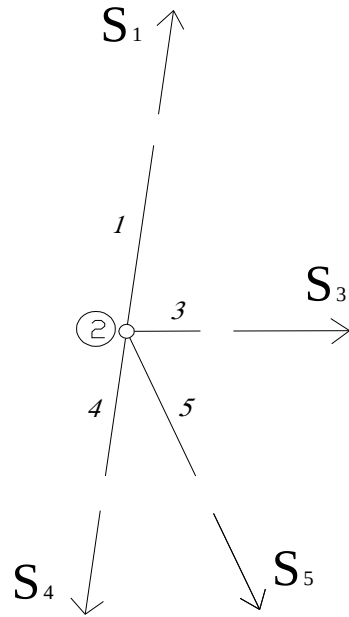
$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -1,88$$

$$-S_6 - 3,58S_5 = 5,82$$

$$S_6 + 0,89S_5 = -1,90$$

$$-2,69S_5 = 3,92 \Rightarrow S_5 = -2,05$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası:

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

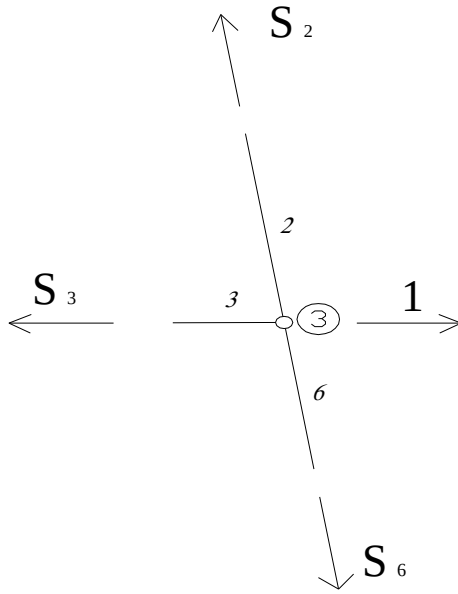
$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 1,00$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

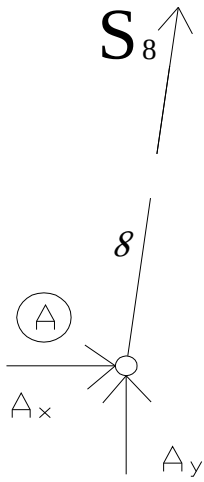
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

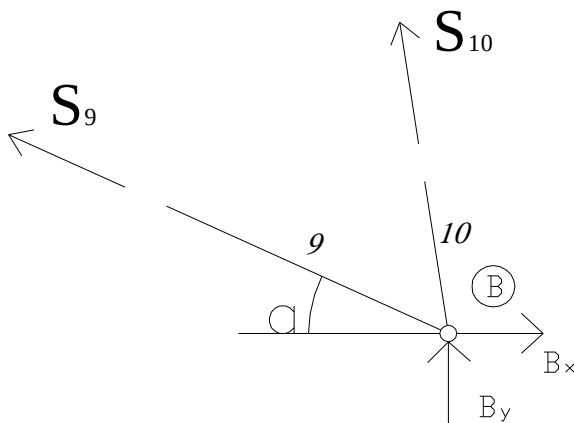
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

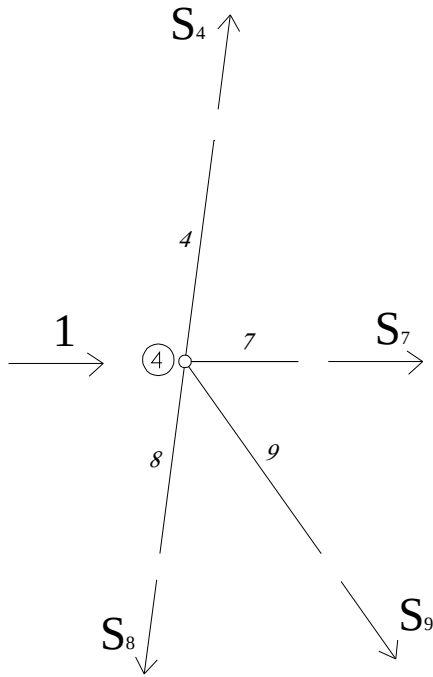
$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266$ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

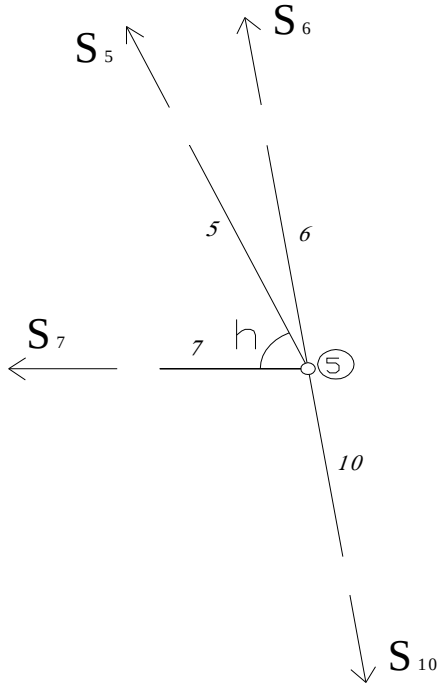
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik yatay yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x + 1 = 0$$

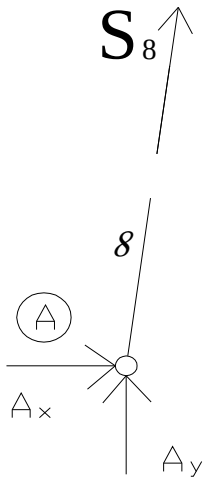
$$A_y + B_y = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$6,667 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 1,266$$

$$A_y = -1,266$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = 0,500$$

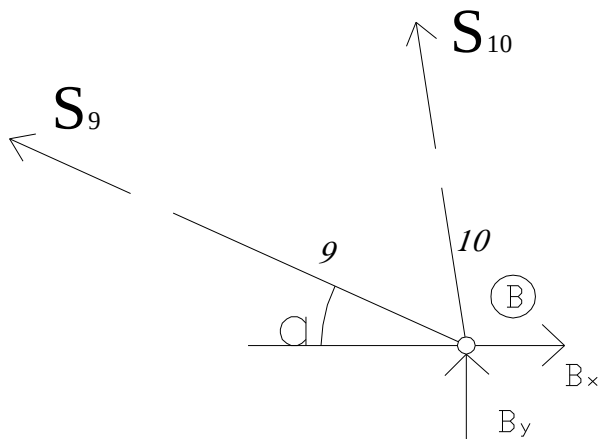
$$A_x = -0,167$$

$$B_x = -0,833$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = 1,277$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,833$$

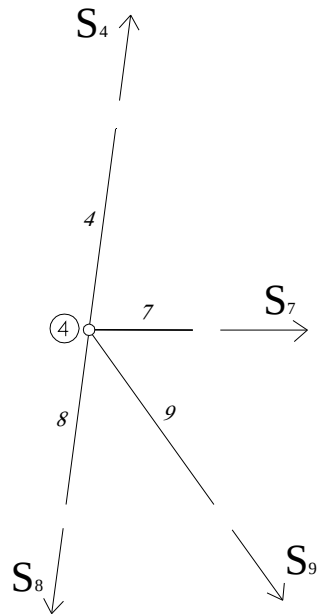
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -1,266 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 6,382$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -1,277$$

$$-3,37S_9 = 5,105 \Rightarrow S_9 = 1,515 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

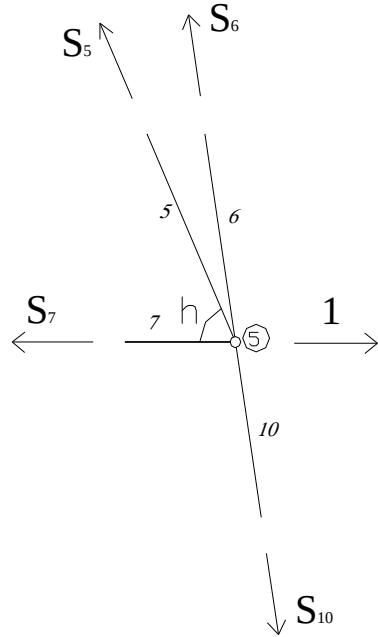
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 1,00$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 + 1 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

1 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

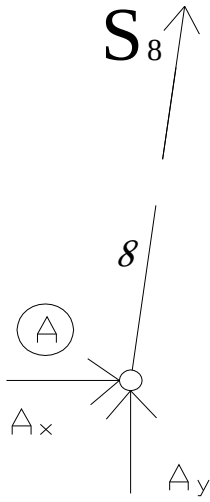
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$2,633 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,500$$

$$A_y = 0,500$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,066$$

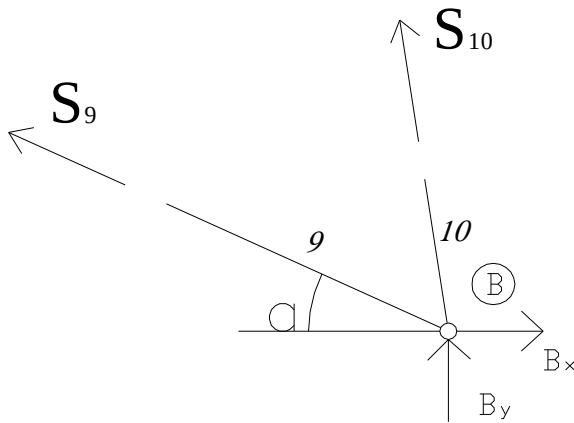
$$A_x = 0,066$$

$$B_x = -0,066$$

$$\overrightarrow{\sum F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,504$$

B Düğüm Noktası

$$\overrightarrow{\sum F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,066$$

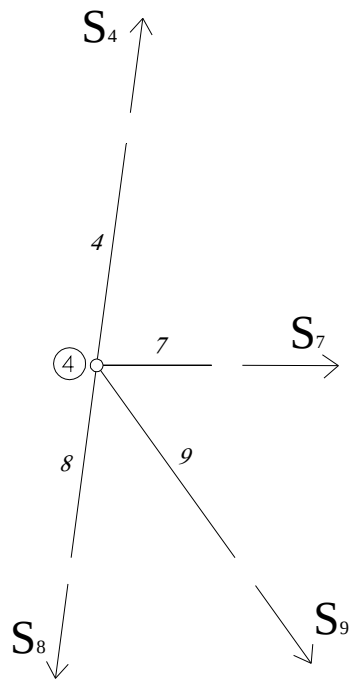
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,500 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,504$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = 0,504$$

$$-3,37S_9 = 0 \Rightarrow S_9 = 0 \text{ ve } S_{10} = -0,504 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

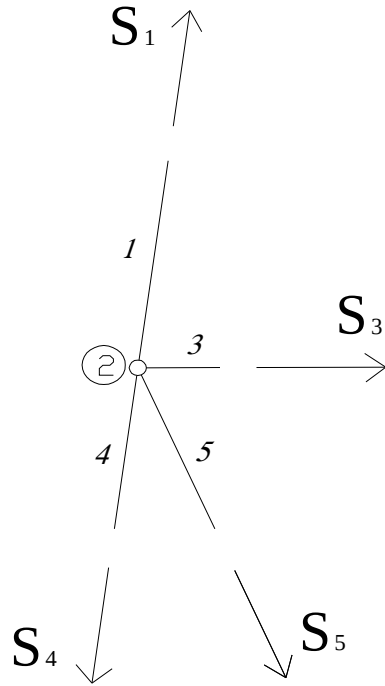
$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = S_8 = -0,504$$

$$S_7 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

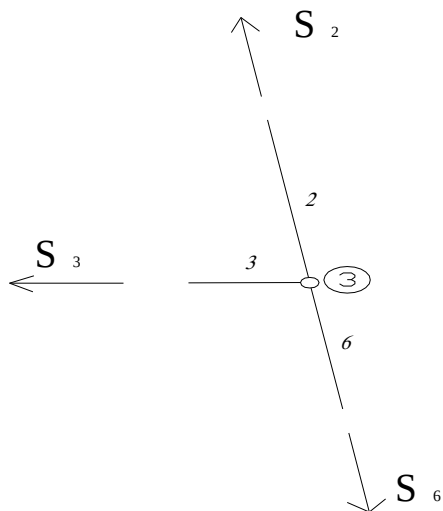
$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = S_4 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = S_6 = -0,504$$

$$S_3 = 0$$

2 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemleri yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

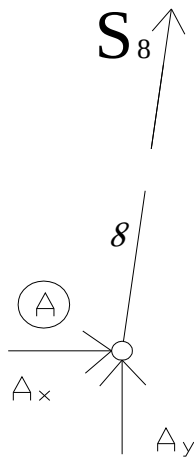
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$1,755 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,333$$

$$A_y = 0,667$$

ADüğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

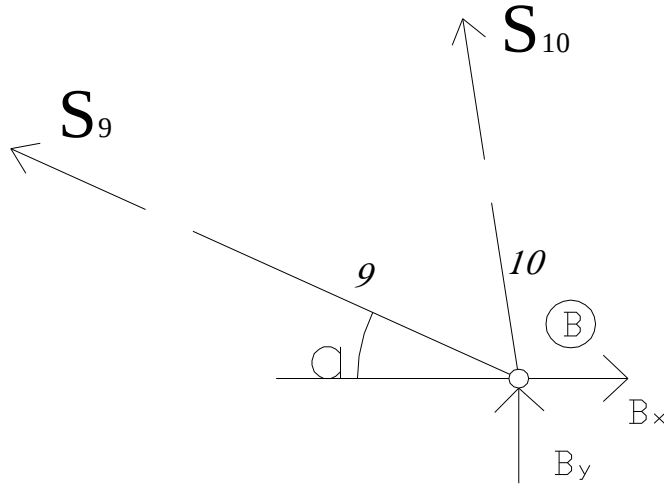
$$S_{8x} = -0,088$$

$$S_8 = -0,673$$

$$A_x = 0,088$$

$$B_x = -0,088$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,088$$

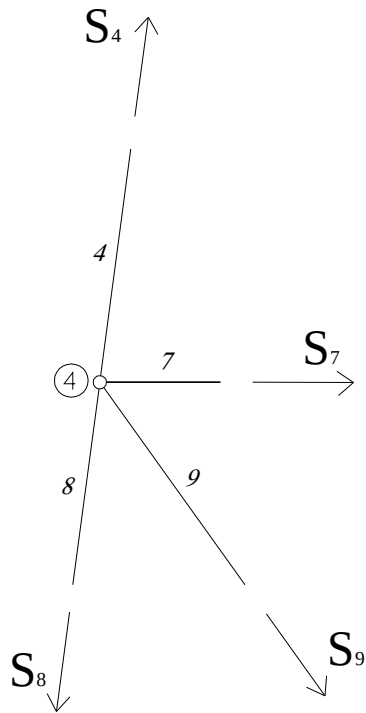
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,333 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = -0,673$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,336$$

$$3,37S_9 = -0,337 \Rightarrow S_9 = -0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,252 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

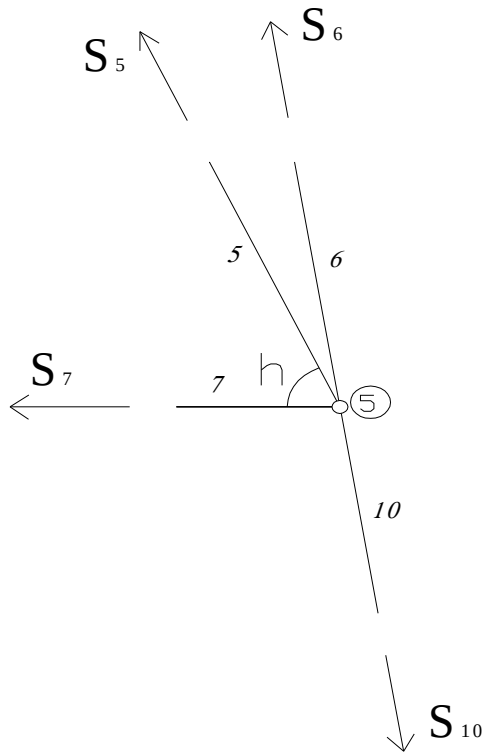
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,757$$

$$S_7 = 0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \vec{F}_x = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0,099$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,250$$

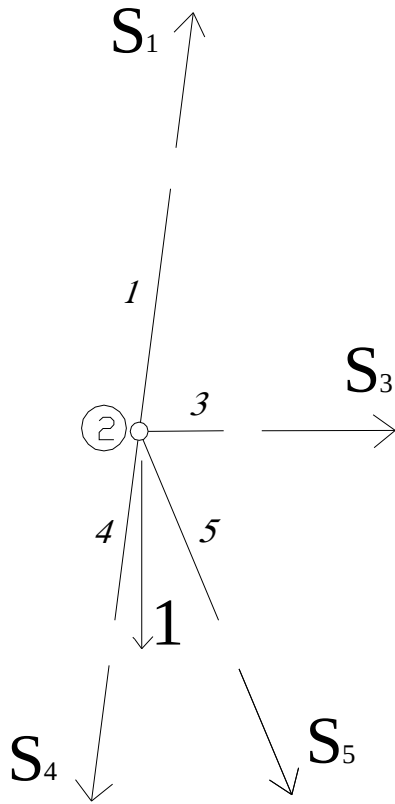
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,758$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,252$$

$$-1,87S_5 = 0,506 \Rightarrow S_5 = -0,271$$

$$S_6 = 0$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

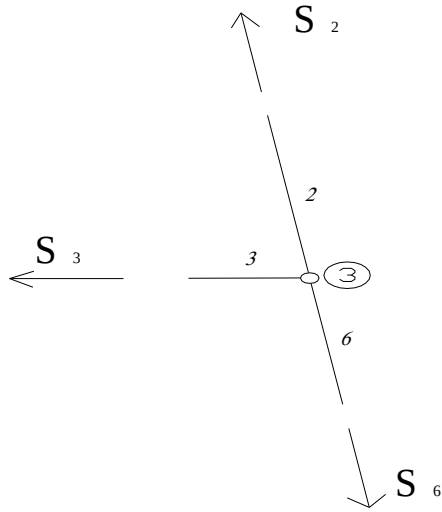
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = 0$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 = 0$$

$$S_2 = 0$$

3 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

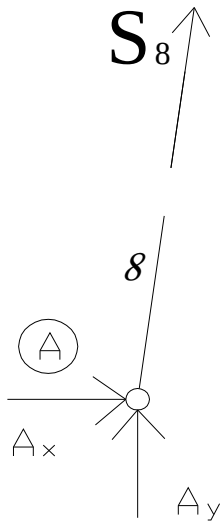
$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$3,511 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,667$$

$$A_y = 0,333$$

A Düğüm Noktası

$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,044$$

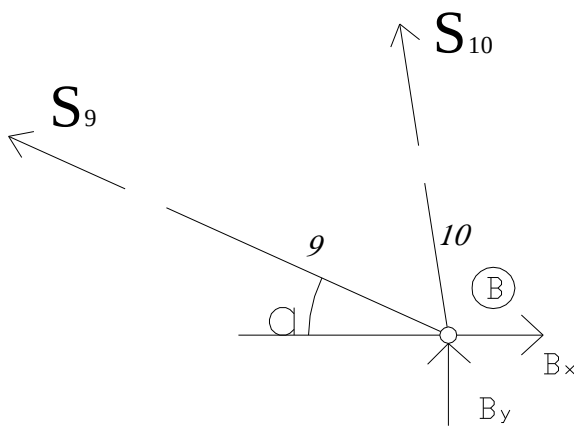
$$A_x = 0,044$$

$$B_x = -0,044$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,336$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,044$$

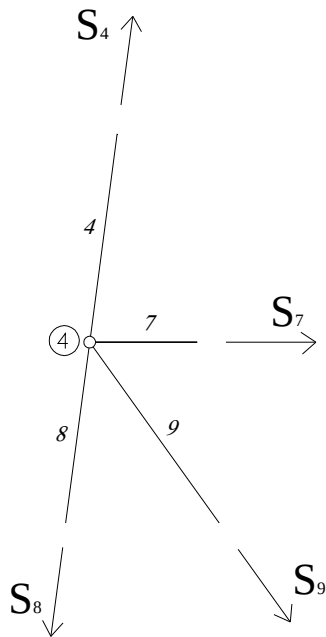
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,667 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,337$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,673$$

$$-3,37S_9 = -0,336 \Rightarrow S_9 = 0,100 \text{ ve } S_{10} = -0,757 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

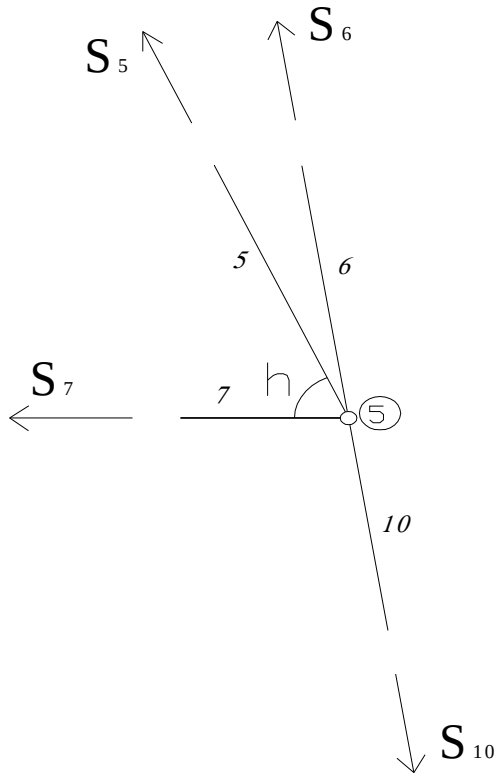
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = -0,252$$

$$S_7 = -0,066$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,033$$

$$S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = -0,751$$

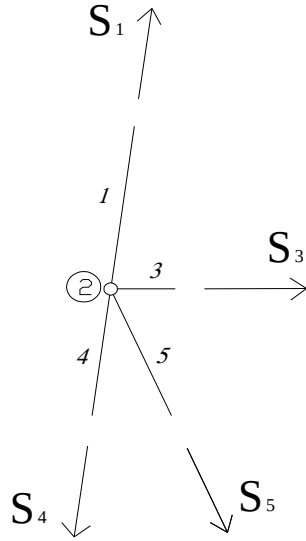
$$-S_6 - 2,81S_5 = 0,252$$

$$S_6 + 0,94S_5 = -0,757$$

$$-1,87S_5 = -0,505 \Rightarrow S_5 = 0,270$$

$$S_6 = -1,011$$

2 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_1 \cdot \cos 82,5 - S_4 \cdot \cos 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 + S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

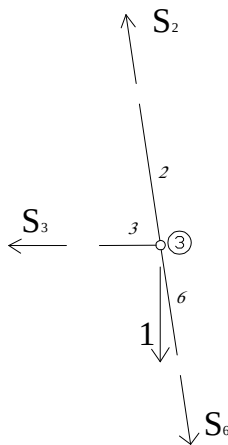
$$S_1 \cdot \sin 82,5 - S_4 \cdot \sin 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_1 = \frac{S_4 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \sin 68,48}{\sin 82,5}$$

$$S_1 = 0$$

$$S_3 = -0,132$$

3 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_6 \cdot \cos 82,5 - S_2 \cdot \cos 82,5 - S_3 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_6 \cdot \sin 82,5 + S_2 \cdot \sin 82,5 - 1 = 0$$

$$S_2 = 0$$

4 Nolu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;

Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

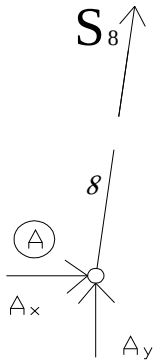
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$0,878 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,167$$

$$A_y = 0,833$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,110$$

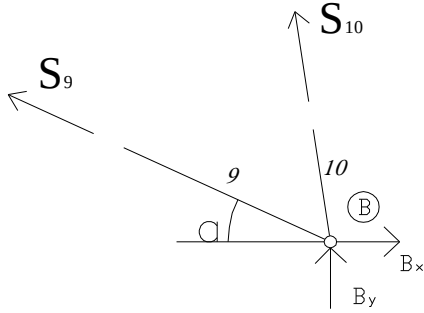
$$A_x = 0,110$$

$$B_x = -0,110$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,841$$

B Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

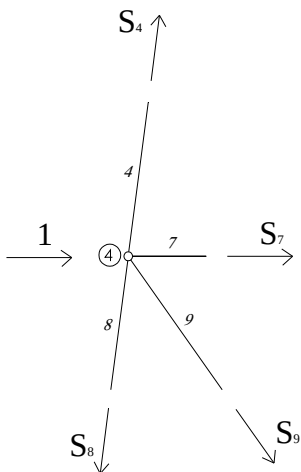
$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,110$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,167 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,843$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,168$$

$$-3,37S_9 = 0,675 \Rightarrow S_9 = -0,200 \text{ ve } S_{10} = 0,00 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

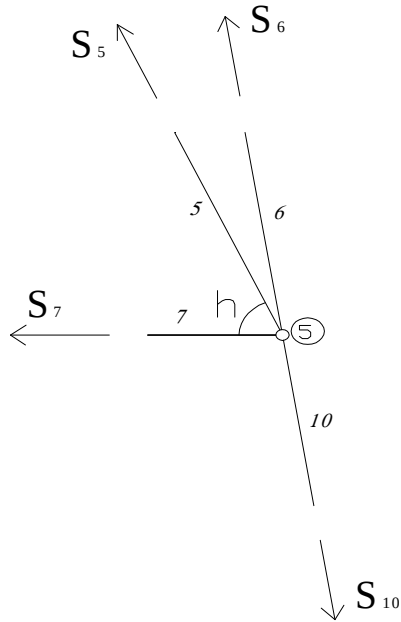
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 - 1 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + 1}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = 0$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

5 No'lu düğüm noktasına 1 birimlik düşey yük eklenmesi durumunda A ve B mesnetlerinde oluşacak reaksiyon ve çubuk iç kuvvetlerinin bulunması ve çözümü;
Sistemin Genel denge denklemlerini yazarsak;

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$A_x + B_x = 0$$

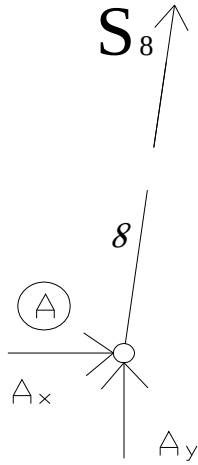
$$\sum \overrightarrow{M_A} = 0$$

$$4,388 \cdot 1 - 5,266 \cdot B_y = 0$$

$$B_y = 0,833$$

$$A_y = 0,167$$

A Düğüm Noktası



$$\uparrow \sum F_x = 0$$

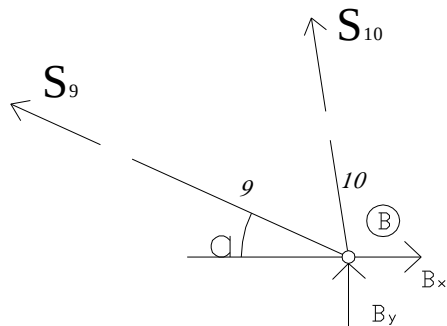
$$S_8 \cdot \cos 82,5 + A_x = 0$$

$$S_{8x} = -0,022$$

$$A_x = 0,022$$

$$B_x = -0,022$$

B Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$A_y + B_y - 1 = 0$$

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0$$

$$S_8 \cdot \sin 82,5 + A_y = 0$$

$$S_8 = -0,168$$

$$-S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 + B_x = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 + B_y = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 = -0,022$$

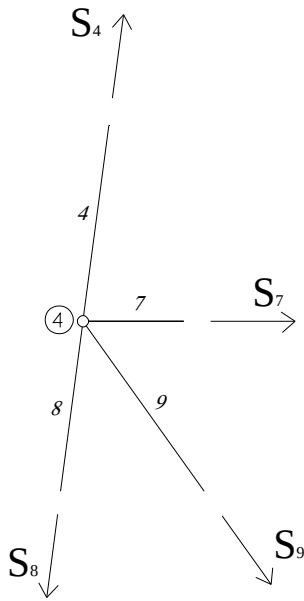
$$S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65 = -0,833 \text{ bu iki denklemin çözümünü yaparsak;}$$

$$-S_{10} - 4,21S_9 = 0,168$$

$$S_{10} + 0,84S_9 = -0,840$$

$$-3,37S_9 = -0,672 \Rightarrow S_9 = 0,200 \text{ ve } S_{10} = -1,008 \text{ olarak bulunur.}$$

4 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_4 \cdot \cos 82,5 - S_8 \cdot \cos 82,5 + S_9 \cdot \cos 56,65 + S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

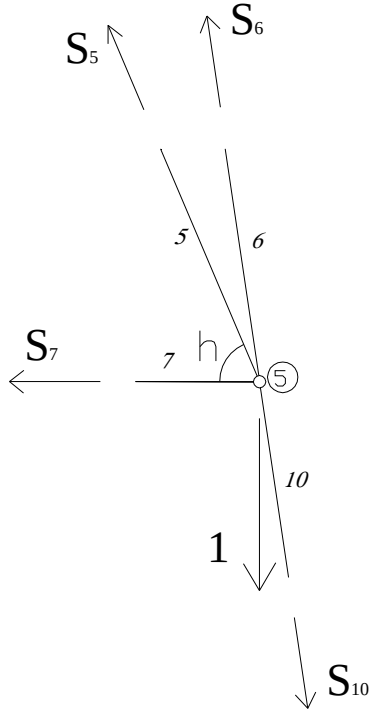
$$S_4 \cdot \sin 82,5 - S_8 \cdot \sin 82,5 - S_9 \cdot \cos 56,65 = 0$$

$$S_4 = \frac{S_8 \cdot \sin 82,5 + S_9 \cdot \sin 56,65}{\sin 82,5}$$

$$S_4 = 0$$

$$S_7 = -0,132$$

5 Nolu Düğüm Noktası



$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0$$

$$S_{10} \cdot \cos 82,5 - S_6 \cdot \cos 82,5 - S_5 \cdot \cos 68,48 - S_7 = 0$$

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_{10} \cdot \sin 82,5 + S_6 \cdot \sin 82,5 + S_5 \cdot \cos 68,48 - 1 = 0$$

$$S_5 = S_6 = 0$$

buradan sonraki çubuklar kuvvet almazlar.

Bu durumda sistemde her bir yüklemeden oluşan çubuk iç kuvvetlerini M matrisine yazarsak;

$$[M] = \begin{bmatrix} 3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,132 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,831 & -0,504 & 1,910 & -0,757 & 1,910 & -0,252 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2,050 & -0,271 & -2,050 & 0,270 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,831 & -0,504 & 0 & 0 & 0 & -1,011 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,500 & 0,066 & 0,500 & -0,066 & 0 & 0 & 1 & -0,132 \\ 3,831 & -0,504 & 2,554 & -0,673 & 2,554 & -0,366 & 1,277 & -0,841 & 1,277 & -0,168 \\ 0 & 0 & -0,760 & -0,100 & -0,760 & 0,100 & 1,515 & -0,200 & 1,515 & 0,200 \\ -3,831 & -0,504 & -1,910 & -0,252 & -1,910 & -0,757 & 0 & 0 & 0 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Sistemin bünye matrisini yazarsak;

$$[B] = \begin{bmatrix} 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,755 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7,166 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3,510 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,981 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6,724 \end{bmatrix}$$

M matrisinin transpozesi de;

$$[M]^T = \begin{bmatrix} 3,831 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 & 0 & 3,831 & 0 & -3,831 \\ -0,504 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 & 0 & -0,504 \\ 0 & 0 & 0 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & 0 & -0,757 & -0,271 & 0 & 0,066 & -0,673 & -0,100 & -0,252 \\ 0 & 0 & 1 & 1,910 & -2,050 & 0 & 0,500 & 2,554 & -0,760 & -1,910 \\ 0 & 0 & -0,132 & -0,252 & 0,270 & -1,011 & -0,066 & -0,336 & 0,100 & -0,757 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,841 & -0,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1,277 & 1,515 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,132 & -0,168 & 0,200 & -1,008 \end{bmatrix}$$

Deplasman denklemimiz;

$$[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F] \text{ idi.}$$

Yukarıdaki denklemde $[M]^T \cdot [B] \cdot [M]$ matrislerinin çarpımı;

$$\begin{bmatrix}
 592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
 0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
 164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
 -30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
 164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
 30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
 32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
 -21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
 32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
 21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
 \end{bmatrix} \text{ola}$$

rak bulunur. Bu durumda $[D] = [M]^T \cdot [B] \cdot [M] \cdot [F]$ ifadesini yazarsak;

$$[D] = \begin{bmatrix}
 592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
 0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
 164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
 -30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
 164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
 30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
 32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
 -21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
 32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
 21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
 \end{bmatrix} \times [F]$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\begin{bmatrix}
 X_1 \\
 Y_1 \\
 X_2 \\
 Y_2 \\
 X_3 \\
 Y_3 \\
 X_4 \\
 Y_4 \\
 X_5 \\
 Y_5
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
 592,12 & 0 & 164,19 & -30,35 & 164,19 & 30,40 & 32,90 & -21,66 & 32,90 & 21,64 \\
 0 & 10,25 & -8,66 & 5,70 & -8,66 & 7,98 & -4,33 & 2,85 & -4,33 & 3,99 \\
 164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 128,08 & -3,92 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
 -30,35 & 5,70 & -13,40 & 7,94 & -13,40 & 3,47 & -6,99 & 3,97 & -6,87 & 2,29 \\
 164,19 & -8,66 & 128,08 & -13,40 & 129,84 & -4,15 & 12,74 & -13,23 & 13,62 & 8,73 \\
 30,40 & 7,98 & -3,91 & 3,47 & -4,15 & 12,55 & -1,68 & 1,74 & -1,79 & 5,69 \\
 32,90 & -4,33 & 12,74 & -6,99 & 12,74 & -1,68 & 29,28 & -9,64 & 29,28 & 0,98 \\
 -21,66 & 2,85 & -13,23 & 3,97 & -13,23 & 1,74 & -9,64 & 5,08 & -9,64 & 0,63 \\
 32,90 & -4,33 & 13,62 & -6,87 & 13,62 & -1,79 & 29,28 & -9,64 & 31,04 & 0,74 \\
 21,64 & 3,99 & 8,73 & 2,29 & 8,73 & 5,69 & 0,98 & 0,63 & 0,74 & 7,37
 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}
 Q_1 \\
 P_1 \\
 Q_2 \\
 P_2 \\
 Q_3 \\
 P_3 \\
 Q_4 \\
 P_4 \\
 Q_5 \\
 P_5
 \end{bmatrix}$$

Buradan deplasmanları yazacak olursak;

$$[X_1] = 592,12Q_1 + 164,19Q_2 - 30,35P_2 + 164,19Q_3 + 30,40P_3 + 32,90Q_4 - 21,66P_4 + 32,90Q_5 + 21,64P_5$$

$$[Y_1] = 10,25P_1 - 8,66Q_2 + 5,70P_2 - 8,66Q_3 + 7,98P_3 - 4,33Q_4 + 2,85P_4 - 4,33Q_5 + 3,99P_5$$

$$[X_2] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 128,08Q_3 - 3,92P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_2] = -30,35Q_1 + 5,70P_1 - 13,40Q_2 + 7,94P_2 - 13,40Q_3 + 3,47P_3 - 6,99Q_4 + 3,97P_4 - 6,87Q_5 + 2,29P_5$$

$$[X_3] = 164,19Q_1 - 8,66P_1 + 128,08Q_2 - 13,40P_2 + 129,84Q_3 - 4,15P_3 + 12,74Q_4 - 13,23P_4 + 13,62Q_5 + 8,73P_5$$

$$[Y_3] = 30,40Q_1 + 7,98P_1 - 3,91Q_2 + 3,47P_2 - 4,15Q_3 + 12,55P_3 - 1,68Q_4 + 1,74P_4 - 1,79Q_5 + 5,69P_5$$

$$[X_3] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 12,74Q_2 - 6,99P_2 + 12,74Q_3 - 1,68P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 29,28Q_5 + 0,98P_5$$

$$[Y_4] = -21,66Q_1 + 2,85P_1 - 13,23Q_2 + 3,97P_2 - 13,23Q_3 + 1,74P_3 - 9,64Q_4 + 5,08P_4 - 9,64Q_5 + 0,63P_5$$

$$[X_5] = 32,90Q_1 - 4,33P_1 + 13,62Q_2 - 6,87P_2 + 13,62Q_3 - 1,79P_3 + 29,28Q_4 - 9,64P_4 + 31,04Q_5 + 0,74P_5$$

$$[Y_5] = 21,64Q_1 + 3,99P_1 + 8,73Q_2 + 2,29P_2 + 8,73Q_3 + 5,69P_3 + 0,98Q_4 + 0,63P_4 + 0,74Q_5 + 7,37P_5$$

olur.

4. BÖLÜM

SONUÇ

Her hangi bir yapı tasarlanırken kesitlerinin yeterli olmasının yanı sıra aynı zamanda o yapının taşıyıcı sistemlerinin deplasmanlarının da sınırlandırılması gerekir. Taşıyıcı sistemde ki kesitler o yapıdaki yükleri taşıyacak yeterlilikte olabilir ama o yapıya gelen yükler altında aşırı sehim de yapabilir. Bu durum o yapının kullanılabilirliğini ve içinde bulunan insanların kendilerini güvende hissetmelerini engeller. Bu durumda yapının deplasmanlarının sınırlandırılması ve deplasman hesaplarının yapılması gerekir.

Yapı taşıyıcı elemanlarının ön görülen yükler altında yapacağı sehimler bazı kaynaklarda da belirtilmiş olup sehim miktarının taşıyıcı elemanın açıklığına oranı olarak verilir. Eğer yapıya ek olarak bir yük eklenecekse bu durumda da yapının kullanım şartlarına bağlı olarak sehim miktarları özel olarak araştırılmalıdır. Bu durumda deplasman hesabı önem taşımaktadır.

Bu çalışmada düzlemsel kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının Castigliano metodu kullanılarak yapılabileceği gösterilmiştir. Castigliano metodu yardımıyla kafes sistemin esneklik matrisi elde edilmiş ve esneklik matrisinin tersinin ait olduğu kafes sistemin rijitlik matrisi olduğu belirtilmiştir.

Esneklik matrisi kullanılarak düğüm noktası yüklerinin farklı kombinasyonları için düğüm yükleri ve deplasman ilişkisi matris formda elde edilmiştir. Böylece herhangi bir yük durumu için seçilen bir kafes kirişin düğüm noktası deplasmanlarının hesabı yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Erşen, N., Çelik Yapılar ve Çözömlenmiş Örnekler, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2008.
2. Öztürk, Z. Çelik Yapılar Kısa Bilgi ve Çözölmüş Örnekler, Birsen Yayınevi. İstanbul, 2007.
3. Omurtag, H.M. Mukavemet Cilt 2, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2007.
4. Yalçın Mengi, Mukavemet Ders Notları, Çukurova Üniversitesi
5. Arthur Morley, Strength of Materials, Longmans London, 1942.
6. Emrem, T. Çelik Yapılar Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Faköltesi İnşaat Bölümü, 2002.
7. Eyyubov, C., Çelik Yapılar, I. Cilt, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2004.
8. Aydın, R. Yapı Statiğı Cilt I, Osmangazi Üniversitesi Yayınları, Yayın No 070, 2002.

EK-1**Fortran Programı**

```

character*12 dosya
integer np,indx(100)
real a(100,100),y(100,100)
real cstm(100,100),cstmtr(100,100)
real bunye(100,100),aracarp(100,100)
real P(100),Q(100)
c  a=cstmtr*bunye*cstr flexibility matris
c  y=(a nin ters matrisi) ve rijitlik matrisi
np=100
write(*,1)
1 format(/,18x,' Data dosyasi adi (Maksimum 12 karakter) : ')
read(*,3) dosya
3 format(a12)
open(10,file=dosya)
read(10,*) icubs,ideps
write(*,*) 'çubuk sayısı=',icubs
write(*,*) 'deplasman sayısı',ideps

c  icubs= kafes çubuk sayısı; ideps=kafes deplasman sayısı
c  bu program m matrisinin okunup,
c  m matrisinin transpozunu alır (mt),
c  daha sonra malzeme özelliklerini (e, f, l) okuyup,
c  bunye matrisini oluşturur
c  daha sonra mt*bunye*m matris carpımı o hesaplar
c  önce aracarpim=mt*bunye hesabı yapar, daha sonra da
c  flexibility=aracarpim*m =mt*bunye*m bulunur.
c  Bir ileri adım olarakta son elde edilen matrisin tersi alınır
c  bu matriste rijitlik matrisi olarak adlandırılır.
c  bu da sonlu eleman yönteminden elde edilen
c  matrisle eşittir.

c  P ve Q kuvvetleride okutularak deplasman değerleri hesaplanabilir.
c  P kafes kirişin bir düğümünde y yönündeki düşey kuvveti
c  Q kafes kirişin bir düğümünde x yönündeki yatay kuvveti gösterir

c  aşağıda castiglione türev matrisi
c  yada süperpoze birim yükleme matrisi dosyadan okunuyor
read(*,*)
write(*,*) 'castiglione türev matrisi yada birim yükleme matrisi'
c  cstm=castiglione turev matrisi
do 22 i=1,icubs

```

```

      read(10,*) (cstm(i,j),j=1,ideps)
      write(*,88) (cstm(i,j),j=1,ideps)
22 continue
c   bünye kare matrisi-diagonal hem okunuyor hem de hesaplanıyor
      do 27 i=1,icubs
        do 30 j=1,icubs
          bunye(i,j)=0.
30 continue
27 continue

c   her cubuga ait malzeme özellikleri ve uzunluğun okunması
c   e=elastisite modulu; f=kesit alanı; al=çubuk boyu
      read(*,*)
      do 55 i=1,icubs
        read(10,*) nn,e,f,al
        write(*,89) nn,e,f,al
        bunye(nn,nn)=al/e/f
55 continue
89 format('elem=',i5,' e=',f10.5,' f=',f10.5,' l=',f10.5)
      read(*,*)
c   yük bulunan düğüm sayısı nyd
      read(10,*) nyd
      do 70 i=1,ideps
        Q(i)=0.
        P(i)=0.
70 continue
        do 60 i=1,nyd
          read(10,*) Q(i)
60 continue

c   mt*b*m
      read(*,*)
c   cstmtr=castiglione turev matrisinin transpozu
      call transpoz(cstm,cstmtr,icubs,ideps)
      write(*,*) 'castiglione matrisinin transpozu'
      do 46 i=1,ideps
        write(*,88) (cstmtr(i,j),j=1,icubs)
46 continue
      read(*,*)
c   aracarp=cstmtr*bunye dir
      call matcarp(cstmtr,bunye,aracarp,ideps,icubs,icubs)
      write(*,*) 'transpoz ile bünye matrisinin carpım sonucu'
      do 48 i=1,ideps
        write(*,88) (aracarp(i,j),j=1,icubs)
48 continue
      read(*,*)
c   a = aracarp*cstm dir ve flexibility matrisi olarak adlandırılır
      call matcarp(aracarp,cstm,a,ideps,icubs,ideps)
      write(*,*) 'flexibilite matrisinin sonucu'

```

```

      do 44 i=1,ideps
        write(*,88) (a(i,j),j=1,ideps)
44 continue
c   flexibilité ile kuvvetin carpımı deplasmanı verecek
      do 101 i=1,ideps
        d1=0.
        do 105 j=1,nyd
          d1=d1+a(i,j)*Q(j)
105 continue
        write(*,*) 'dep=',d1
101 continue
      read(*,*)
      n=ideps
c   a matrisi flexibilité matrisidir
c   a matrisinin tersi ise y de depolanmaktadır; o da
c   flexibilitenin tersi olan rijitlik matrisidir
c   y = rijitlik matrisidir
      write(*,*) 'rijitlik matrisi sonucu'
      do 12 i=1,n
        do 11 j=1,n
          y(i,j)=0.
11 continue
        y(i,i)=1.
12 continue
      call MIGS(A,N,y)
      do 14 i=1,n
        write(*,88) (y(i,j),j=1,n)
14 continue
88 format(15f10.4)
      stop
      end

c   -----
      subroutine transpoz(a,b,m,n)
c   a matrisinin transpozu b matrisine aktarılır
      real a(100,100),b(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,n
          b(j,i)=a(i,j)
20 continue
10 continue
      return
      end

c   -----
      subroutine matcarp(a,b,c,m,n,k)
c   c=a*b
      real a(100,100),b(100,100),c(100,100)
      do 10 i=1,m
        do 20 j=1,k
          c(i,j)=0.

```

```

do 30 l=1,n
  c(i,j)=c(i,j)+a(i,l)*b(l,j)
30 continue
20 continue
10 continue
  return
end
c -----
SUBROUTINE MIGS(A,N,X)
c  bu subroutine n boyutlu A kare matrisinin tersini
c  X kare matrisine depolar
dimension INDX(100),a(100,100), x(100,100), b(100,100)
  DO I = 1, N
    DO J = 1, N
      B(I,J) = 0.0
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    B(I,I) = 1.0
  END DO
  CALL ELGS (A,N,INDX)
  DO I = 1, N-1
    DO J = I+1, N
      DO K = 1, N
        B(INDX(J),K) = B(INDX(J),K)-A(INDX(J),I)*B(INDX(I),K)
      END DO
    END DO
  END DO
  DO I = 1, N
    X(N,I) = B(INDX(N),I)/A(INDX(N),N)
    DO J = N-1, 1, -1
      X(J,I) = B(INDX(J),I)
      DO K = J+1, N
        X(J,I) = X(J,I)-A(INDX(J),K)*X(K,I)
      END DO
      X(J,I) = X(J,I)/A(INDX(J),J)
    END DO
  END DO
  return
END
c -----
SUBROUTINE ELGS (A,N,INDX)
DIMENSION INDX(100),a(100,100), c(100)
  DO I = 1, N
    INDX(I) = I
  END DO
  DO I = 1, N
    C1= 0.0
    DO J = 1, N

```

```

      C1 = AMAX1(C1,ABS(A(I,J)))
    END DO
    C(I) = C1
  END DO
  DO J = 1, N-1
    PI1 = 0.0
    DO I = J, N
      PI = ABS(A(INDX(I),J))/C(INDX(I))
      IF (PI.GT.PI1) THEN
        PI1 = PI
        K = I
      ENDIF
    END DO
    ITMP = INDX(J)
    INDX(J) = INDX(K)
    INDX(K) = ITMP
    DO I = J+1, N
      PJ = A(INDX(I),J)/A(INDX(J),J)
      A(INDX(I),J) = PJ
      DO K = J+1, N
        A(INDX(I),K) = A(INDX(I),K)-PJ*A(INDX(J),K)
      END DO
    END DO
  END DO

  END DO
return
end
c -----

```

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kayseri’ de doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Kayseri’ de tamamladı.1997 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi İnşaat Mühendisliği Bölümünde öğrenimine başladı. 2001 yılında lisans öğrenimini tamamladı. 2001 ve 2003 yılları arasında askerliğini tamamladı. 2003 yılında İnşaat Mühendisleri Odası Ankara Şubesi Kayseri Temsilciliğinde 2.5 yıl çalıştı. 2006 yılında kendisine ait serbest meslek bürosunu kurdu. Yine aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı.

Sürekli Adres: Serçeönü Mh.Mühendisler İşhanı Kat:4/403

Kayseri

Telefon : 0535 257 0185

e-posta : erkar_muhendislik@hotmail.com