

**T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FK UZAYLARI ÜZERİNE

Mahmut KARAKUŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MALATYA
2009**

Tezin Başlığı : FK Uzayları Üzerine

Tezi Hazırlayan : Mahmut KARAKUŞ

Sınav Tarihi : 07.07.2009

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hüsamettin COŐKUN (İnönü Üniv.)

Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ (İnönü Üniv.)

Doç. Dr. Bilal ALTAY (İnönü Üniv.)

Doç. Dr. Bilal ALTAY
Tez Danıőmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İsmail ÖZDEMİR
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "FK Uzayları Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mahmut KARAKUŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FK Uzayları Üzerine

Mahmut KARAKUŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

46+vii sayfa

2009

Danışman: Doç. Dr. Bilal ALTAY

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, K- ve FK-uzayları ile ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak temel tanımlar ve teoremler verildi. Lokal konveks uzay ve dizi uzayları gibi kavramlardan bahsedildi.

Üçüncü bölümde, K- ve FK- uzayları tanıtılarak bu uzayların sahip olduğu bazı özellikler incelendi.

Dördüncü bölümde ise kesim operatörleri yardımıyla K- ve FK- uzaylarının bazı alt-uzayları incelendi. Bu altuzayların sahip olduğu özellikler kullanılarak dualler arasındaki ilişkiler verildi. Daha sonra Cesàro dönüşümü yardımıyla elde edilen bazı altuzaylar incelendi.

ANAHTAR KELİMELEER: Dizi uzayı, K-uzay, FK-uzay, AK, AB, SAK, FAK ve AD özellikleri.

ABSTRACT

Graduate Thesis

On the FK Spaces

Mahmut KARAKUŞ

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

46+vii pages

2009

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bilal ALTAY

The present thesis consists of four chapters. In the first chapter, brief history of K- and FK-spaces and general knowledge were given.

In the second chapter, for understand other chapters some basic definitions and theorems and basic concepts such as locally convex space and sequence spaces were mentioned.

In the third chapter, K- and FK-space were defined and some properties of these spaces were examined.

In the fourth chapter, some subspaces of K- and FK-spaces were examined by section operators. Using the properties of these subspaces, relation among the dual spaces were given. Then, some subspaces generated by Cesàro means were investigated.

KEYWORDS: Sequence space, K-space, FK-space, AK, AB, SAK, FAK and AD property.

TEŞEKKÜR

Beni bu alanda çalışmaya teşvik eden ve tezin hazırlanmasında yakın alakalarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Bilal ALTAY' a, yalnızca ilim alanında değil aynı zamanda irfan sahasında da önemli fikirlerinden etkilendiğim, üzerimde önemli ölçüde emeği olan, Fatih Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi sayın hocam Prof. Dr. Feyzi BAŞAR' a minnetlerimi ve şükranlarımı borç biliyorum.

Çalışmalarına karşı her zaman hassasiyetlerini korudukları, üzerimden şefkat, sevgi ve merhametlerini eksik etmedikleri ve beni hayatımın her anında gerçekten önemsedikleri için sevgili anne ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Mahmut KARAKUŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER	v
1 GİRİŞ	1
1.1 Çalışmanın Kapsamı	2
2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	3
2.1 Temel Kavramlar	3
2.2 Dizi Uzayları	8
3 K- ve FK-UZAYLAR	14
3.1 K-uzayları	14
3.2 FK uzayı	16
3.3 Lineer Dönüşümler ve Matrisler	16
4 BİR K- ve FK- UZAYININ BAZI ALTUZAYLARI	21
4.1 Kesim Operatörleri	21
4.2 K Uzayının Bazı Altuzayları	23
4.3 Cesàro FK Altuzaylar	32
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ	46

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi,

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi,

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi,

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$

$\|x\|_\lambda$: λ uzayındaki x elemanının normu,

δ^k : k . terimi 1, diğer terimleri 0 olan dizi,

δ : Bütün terimleri 1 olan dizi,

$x^{[n]}$: (x_k) dizisinin, $\sum_{k=1}^n x_k \delta^k$ ile elde edilen n -li kısmı,

w : Tüm dizilerin lineer uzayı,

λ : w dizi uzayının herhangi bir altuzayı,

ϕ : Sonlu adette sıfır olmayan terimlerden oluşan dizilerin uzayı,

$\overline{\phi}$: ϕ uzayının kapanışı,

$Hom(\lambda, \mu)$: λ uzayından μ uzayına lineer dönüşümlerin uzayı,

$B(\lambda, \mu)$: λ uzayından μ uzayına lineer ve sürekli dönüşümlerin uzayı,

λ^* : λ uzayının cebirsel duali,

λ' : λ uzayının sürekli duali,

λ_A : A matrisinin λ - etki alanı,

c_A : A matrisinin yakınsaklık alanı,

λ^α : λ dizi uzayının α -duali,

λ^β : λ dizi uzayının β -duali,

λ^γ : λ dizi uzayının γ -duali,

λ^f : λ dizi uzayının f -duali,

ℓ_∞ : Sınırlı dizilerin uzayı,

c : Yakınsak dizilerin uzayı,

c_0 : Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı,

bs : Kısmi toplamı sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayı,

cs : Kısmi toplamı yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,

ℓ : Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,
 ℓ_p : p —mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,
 bv : Sınırlı-salınımlı dizilerin uzayı,
 bv_0 : $bv \cap c_0$

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz çalışmaları, özellikle 20.yy. başlarında biraz da modern düşünce etkisiyle ciddi şekilde metod değişikliğine uğramıştır. Özellikle S. Banach'ın lineer operatörler teorisine yaptığı katkılar metodolojik açıdan bir dönüm noktası oluşturmıştır. İlk zamanlar, yalnızca bazı geometri problemleri için kullanılmış olan topoloji ise, zamanla diğer matematik dalları ile olan yakın ilişkisi ile her alanda bir metod değişikliğine yol açmış ve kullanıldığı alanlara güçlü temeller kazandırmıştır.

Fonksiyonel analitik düşünce ile beslenen ve temellerini de topolojiden alan bir program olarak FK-uzaylar teorisi, 20. yüzyılın ilk yarısında Mazur, Orlicz gibi matematikçiler tarafından temelleri atılan, ikinci yarısında ise, Zeller'in, 1951 yılında [34] ve [35] çalışmalarıyla başlattığı bir teori olarak bilinir. Bu teori, toplanabilmedeki, özellikle matris alanları ile ilgili problemlerin büyük çoğunluğuna çözüm bulabilmesinin yanı sıra, topolojik dizi uzayları gibi bazı alanların gelişiminde de büyük bir rol üstlenmiştir.

Vektör uzayı işlemlerini sürekli kılan topolojiye sahip lineer uzay, topolojik vektör uzayı olarak bilinir. Bu vektör uzayı bir tam metrik uzay yapısına sahip ise Fréchet uzay ve üstelik koordinat fonksiyonellerinin sürekli olduğu bir topoloji ile donatılmışsa Fréchet-Koordinat uzay (FK-uzay) adını alır.

FK-uzayları teorisi, Zeller'in [35] çalışmasıyla biraz daha önem kazanmış ve böylece sonraki yazarların da bu konuda çalışmaya başlamalarıyla farklı uygulama alanları edinmiştir.

Bugün özellikle, dizi uzayları ve matris dönüşümleri çalışmalarında K- ve FK-uzayları önemli bir yer tutar. FK-uzaylardan edindiğimiz tecrübe ile daha önceden bilinen dizi uzayları tarafından ihtiva edilen veya bunları kapsayan yeni dizi uzayları inşa edebiliyor, bu uzaylar arasındaki matris karakterizasyonlarını verip, uzayların α -, β -, γ - ve f - duallerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi, varsa kapsama veya eşitlik bağıntılarını inceleyebiliyoruz. Toplanabilme teorisinde, topolojik dizi uzayları kadar uzayların çeşitli dualleri de önemli rol oynar. K- ve FK-uzaylarının belirli bazı özellikleri taşıyan elemanlarının cümlesi, uzayın özelliklerini incelemeye kullanılır. FK-uzaylarının bazı alt-

uzayları yardımıyla uzayın dualleri arasındaki ilişkileri belirlemek mümkündür. Mesela, SAK(zayıf kısmi yakınsak) özelliğine sahip bir FK-uzayının topolojik duali β -duali ile tanımlanır ve AK özelliğine sahip FK-uzayının α -, β - ve γ - dualleri çakışıktır.

Tarihsel gelişimine baktığımız zaman bu projenin gerçek mimarları arasında, teoriyi ilk defa ortaya atan Zeller [34, 35], halen konuyla ilgili zengin çalışmalar veren Boos [5, 6], özellikle toplanabilme ve matris teorisi boyunca bu uzaylardan faydalanmamızı sağlayacak çalışmalar veren Wilansky [31–33], dizi uzayları ve matrislerde konül ve ko-regüler olma ile ilgili önemli çalışmalar yapan Snyder [29, 30], Bennet [2–4], yine Cesàro metodu ile yeni türden FK-uzaylar inşa eden ve özelliklerini inceleyen Buntinas [7–11] ve Goes [17, 18], daha çok topolojik metod kullanan Mcgivnes, Ruckle [22, 26–28], Garling [16], D. J.Fleming [14, 15] ve D. Noll [23, 24]; son zamanlarda Altay-Başar [1], Dağadur [12], İnce [20] ve K.G. Grosse-Erdmann [19] isimleri sayılabilir.

1.1 Çalışmanın Kapsamı

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada önce fonksiyonel analizin bazı temel tanım ve teoremleri, dizi uzayları ve özellikleri verilecektir. K- ve FK-uzayları tanımlanarak bazı altuzayları belirlenecektir.

Son olarak, Cesàro matrisi yardımıyla inşa edilen FK-uzaylarının yeni bazı altuzayları incelenecektir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay, normlu uzay, alt uzay, Banach uzayı gibi bazı temel kavramların bilindiği kabul edilmektedir.

2.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda, bazı genel topoloji bilgileri ve fonksiyonel analizde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Vektör uzaylarının skalar $\mathbb{K}$ cismi, $\mathbb{C}$ kompleks veya $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, uzayın birim(sıfır) elemanı θ , doğal sayılar cümlesi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olarak alınmıştır. Diziler ve serilerin indisleri belirtilmemişse sınırlar daima 0 dan ∞ 'a kadar alınacaktır.

Tanım 2.1.1. [5] λ bir lineer uzay ve τ_λ topolojisi bu uzay üzerindeki adi toplama ve skalarla çarpma işlemlerini sürekli kılan topoloji olsun. Bu takdirde, (λ, τ_λ) ikilisi, *lineer topolojik uzay* veya *topolojik vektör uzayı* (TVU), τ_λ topolojisi de λ üzerindeki *lineer topoloji* olarak adlandırılır.

λ topolojik vektör uzayındaki sıfırın her komşuluğu, sıfırın konveks bir komşuluğunu ihtiva ediyorsa λ uzayına *lokal konveks uzay* (LKU) denir.

λ , $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzay ve $P = \{p_i : i \in I\}$, λ uzayı üzerinde yarınormlar ailesi olsun. $U_\varepsilon^P = \{x \in \lambda : p(x) \leq \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n U_{\varepsilon_i}^{p_i} : n \in \mathbb{N}, \varepsilon_i > 0, p_i \in P, i = 1, 2, 3, \dots, n \right\}$$

cümlesi, λ üzerinde lokal konveks bir topoloji için sıfırın komşuluklar tabanını oluşturur. λ üzerinde $\mathcal{B}$ komşuluklar tabanı yardımıyla üretilen topolojiye, $P = \{p_i : i \in I\}$ yarınormlar ailesinin λ uzayı üzerinde ürettiği lokal konveks topoloji denir. Tersine, (λ, τ) lokal konveks uzay ve $\mathcal{B}$ ailesi de λ uzayının kapalı mutlak konveks alt cümlelerinden oluşan sıfırın bir komşuluklar tabanı olsun. Bu durumda, $U \in \mathcal{B}$ olmak üzere, U cümlesinin Minkowski fonksiyoneli adı verilen ve

$$P_U(x) = \inf\{r > 0 : x \in rU\} \quad (x \in \lambda)$$

ile tanımlı yarınormların $P = \{p_U : U \in \mathcal{B}\}$ ailesi lokal konveks τ topolojisini üretir.

Normlu uzaylar lokal konveks uzaylardır.

Tanım 2.1.2. [5] (λ, p) ve (μ, q) aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde yarınormlu uzaylar ve $T : \lambda \rightarrow \mu$ bu iki uzay arasındaki bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in \lambda$ ve $\alpha \in \mathbb{K}$ için,

$$T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \quad (2.1.1)$$

eşitliğini sağlayan T dönüşümüne λ dan μ ye bir *lineer dönüşüm* denir. μ uzayı özel olarak $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi olarak alınırsa, T lineer dönüşümü *lineer fonksiyonel* olarak adlandırılır.

λ dan μ ye lineer dönüşümlerin cümlesini $\text{Hom}(\lambda, \mu)$, sürekli lineer dönüşümlerin cümlesini $B(\lambda, \mu)$ ile gösterilir. $\text{Hom}(\lambda, \mathbb{K})$ cümlesine λ uzayının cebirsel duali denir ve λ^* ile gösterilir. $B(\lambda, \mathbb{K})$ cümlesine λ uzayının sürekli duali (veya kısaca duali) denir ve λ' ile gösterilir.

Teorem 2.1.1. [5] (λ, P) ve (μ, Q) birer LKU ve $T : \lambda \rightarrow \mu$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) T süreklidir.
- (ii) T sıfır noktasında süreklidir.
- (iii) Her $q \in Q$ için $q \circ T$ bileşkesi süreklidir.
- (iv) Her $q \in Q$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $p_1, p_2, \dots, p_n \in P$, $\forall x \in \lambda$ için

$$q(Tx) \leq M \sum_{j=1}^n p_j(x)$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ sayısı vardır.

(λ, p) bir yarınormlu uzay ve $\psi \in \lambda^*$ dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart her $x \in \lambda$ için $|\psi(x)| \leq Mp(x)$ olacak şekilde $M > 0$ sayısının mevcut bulunmasıdır.

Tanım 2.1.3. (λ, p) ve (μ, q) yarınormlu uzaylar ve T bu uzaylar arasında bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için,

$$q(Tx) \leq Kp(x) \quad (2.1.2)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir K pozitif sayısı varsa T operatörüne ”sınırlı lineer operatör” denir. Sınırlı bir lineer operatörün normu,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{q(Tx)}{p(x)} \quad (2.1.3)$$

olarak tanımlanır.

Yarınormlu uzaylar arasında tanımlı lineer dönüşümlerin sınırlılığı ile sürekliliği kavramları denktir. Bu denklik aşağıdaki teoremden ifade edilmektedir.

Teorem 2.1.2. (λ, p) ve (μ, q) yarınormlu uzaylar ve $T : \lambda \rightarrow \mu$ bir lineer operatör olsun. Bu takdirde:

- (a) $T, a \in \lambda$ noktasında süreklidir.
- (b) T süreklidir.
- (c) $\|T\| < \infty$.
- (d) Her $x \in \lambda$ için $q(Tx) \leq Mp(x)$ olacak şekilde M pozitif sayısı vardır.

önergeleri denktir.

Fonksiyonel analizde önemli bir yere sahip olan Hahn-Banach Teoremini ve bazı sonuçlarını verelim.

Teorem 2.1.3 (Hahn-Banach Teoremi). [5] (λ, p) bir yarınormlu uzay, μ uzayı λ uzayının bir altuzayı ve $f : \mu \rightarrow \mathbb{R}$,

$$|f(x)| \leq Mp(x), \forall x \in \mu, M > 0$$

şartını sağlayan bir lineer fonksiyonel olsun. Bu takdirde; f fonksiyonelinin,

$$|\tilde{f}(x)| \leq Mp(x), \forall x \in \lambda$$

olacak şekilde μ' den λ' ya bir $\tilde{f}$ genişlemesi vardır.

Sonuç 2.1.1. (λ, p) , bir yarınormlu uzay ve μ uzayı λ uzayının bir altuzayı olsun. Bu durumda $f \in \mu'$ fonksiyonelinin

$$f(x) = \tilde{f}(x) \quad (x \in \mu) \text{ ve } \|f\| = \|\tilde{f}\|$$

eşitliklerini sağlayan bir $\tilde{f} \in \lambda'$ genişlemesi vardır.

Sonuç 2.1.2. (λ, p) , bir yarınormlu uzay ve μ, λ uzayının kapalı bir altuzayı olsun. Bu durumda, her $x_0 \in \lambda \setminus \mu$ için

$$g(x_0) = 1 \text{ ve } g|_{\mu} = 0$$

şartlarını sağlayan bir $g \in \lambda'$ fonksiyoneli vardır.

Bu sonucun, bir cümleinin yoğunluğu ve kapanışı tartışmalarında kullanılan iki sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.1.3. [32] (λ, p) bir yarınormlu uzay ve μ uzayı λ uzayının bir altuzayı olsun. Her $f \in \lambda'$ için $f(\mu) = \{0\}$ olması f 'nin sıfır fonksiyoneli olmasını gerektiriyorsa μ altuzayı λ uzayında yoğundur, yani $\bar{\mu} = \lambda$ eşitliği mevcuttur.

Sonuç 2.1.4. [33] (λ, p) bir yarınormlu uzay ve μ uzayı λ uzayının bir altuzayı olsun. $f(\mu) = \{0\}$ olan her $f \in \lambda'$ için $f(x) = 0$ oluyorsa $x \in \bar{\mu}$ önermesi geçerlidir.

Teorem 2.1.4 (Banach-Steinhaus Teoremi). [5], (λ, p) yarı normlu tam uzay, (μ, q) yarı normlu uzay ve $(T_n) \subset B(\lambda, \mu)$ olsun. Eğer (T_n) dizisi

$$\begin{aligned} T : \lambda &\rightarrow \mu \\ x &\rightarrow T(x) = \lim_n T_n(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı T dönüşümüne noktasal yakınsak ise, $T \in B(\lambda, \mu)$ ve

$$\|T\| \leq \liminf_n \|T_n\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 2.1.5 (Düzgün Sınırlılık Prensibi). [5] (λ, p) ve (μ, q) yarınormlu uzaylar, (λ, p) tam ve $\emptyset \neq \Phi \subset B(\lambda, \mu)$ olsun. Φ noktasal sınırlı ise, düzgün sınırlıdır.

Teorem 2.1.6. [33] (λ, P) , topolojisi, P yarınormlarından elde edilmiş bir uzay, $\psi \in \lambda'$ ve p_i , $(i = 1, 2, \dots, m)$ yarınormları da P yarınormlar ailesinden seçilen bir koleksiyon olsun. Bu takdirde, $\forall x \in \lambda$ için,

$$|\psi(x)| \leq M \sum_k p_k(x) \quad (2.1.4)$$

olacak şekilde M pozitif sayısı vardır.

Tanım 2.1.4. $T : \lambda \rightarrow \mu$ fonksiyonunun grafiği ,

$$\mathbf{G}(T) = \{(x, y) \in \lambda \times \mu : y = Tx\}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbf{G}(T) \subset \lambda \times \mu$ kapalı ise T dönüşümüne *kapalı dönüşüm* denir.

Teorem 2.1.7. (λ, P) ve (μ, Q) yarmetriklenabilir iki uzay olmak üzere, $T : \lambda \rightarrow \mu$ dönüşümünün kapalı olması için her bir $(x_n) \subset \lambda, x \in \lambda, y \in \mu$ için

$$\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x(\lambda, P) \\ Tx_n \rightarrow y(\mu, Q) \end{array} \right\} \Rightarrow y = Tx$$

önermesinin geçerli bulunması gerek ve yeterdir.

Tanım 2.1.5 (Fréchet Uzay). Tam lineer metrik uzaya *Fréchet Uzay* adı verilir. Kısaca F ile gösterilir.

Bir F- uzayın, alt uzay topolojisiyle elde edilmiş topolojiye sahip, kapalı her alt uzayı yine bir F- uzaydır. λ, τ ve τ^* topolojilerine sahip bir F- uzay olsun. Bu takdirde, $\tau \subset \tau^*$ ise $\tau = \tau^*$ olur.

Teorem 2.1.8 (Kapalı Grafik Teoremi). $T : \lambda \rightarrow \mu$, *Fréchet uzayları arasındaki kapalı bir lineer dönüşüm sürekli*dir.

Tanım 2.1.6. (λ, τ_λ) ve (μ, τ_μ) iki topolojik uzay ve $T : \lambda \rightarrow \mu$ bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü, λ uzayındaki her açık cümleyi, $(T(\lambda), \tau_\mu|_{T(\lambda)})$ uzayındaki açık bir cümleye dönüştürüyorsa, T dönüşümüne *açık dönüşüm* denir.

Mesela,

$$\pi_j : (w, \tau_w) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$$

ile verilen *koordinat fonksiyonelleri* kullanışlı bir açık dönüşüm örneğidir.

Teorem 2.1.9. λ ve μ iki *Fréchet uzay* olsun. $T : \lambda \rightarrow \mu$ lineer, sürekli ve örten bir dönüşüm ise, T açıktır.

T dönüşümü aynı zamanda birebir ise T^{-1} dönüşümü de sürekli

Tanım 2.1.7. [5] λ, μ aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve $\langle, \rangle: \lambda \times \mu \rightarrow \mathbb{K}$ bilineer dönüşümü,

(D1) Sıfırdan farklı her bir $x \in \lambda$ için $\langle x, y \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $y \in \mu$ vardır.

(D2) Sıfırdan farklı her bir $y \in \mu$ için $\langle x, y \rangle \neq 0$ olacak şekilde bir $x \in \lambda$ vardır.

önergelerini sağlıyorsa, (λ, μ) ikilisi $\langle, \rangle$ bilineer dönüşümü ile dual çifttir denir.

(λ, P) lokal konveks Hausdorff uzay olmak üzere

$$\langle, \rangle: \lambda \times \lambda' \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(x, f) \rightarrow \langle x, f \rangle = f(x)$$

bilineer dönüşümü ile (λ, λ') bir dual çifttir.

(λ, μ) bir dual çift olsun. Her bir $y \in \mu$ için

$$p_y: \lambda \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \rightarrow p_y(x) = \langle x, y \rangle$$

şeklinde tanımlı dönüşümler λ üzerinde birer yarınormdur. $P = \{p_y: y \in \mu\}$ yarınormlar ailesinin λ üzerinde ürettiği topoloji, lokal konveks olup, bu topolojiye λ üzerindeki zayıf topoloji $((\lambda, \mu)$ dual çiftine göre) denir ve $\sigma(\lambda, \mu)$ ile gösterilir.

2.2 Dizi Uzayları

Çalışmamız boyunca terimleri kompleks sayılar olan tüm dizilerin lineer uzayını w ile gösterip, bu uzayın $\lambda \subset w$ olacak şekildeki bir alt uzayına λ dizi uzayı diyeceğiz.

Sonlu adette terimi dışındaki terimleri sıfır olan dizilerin ϕ uzayı,

$$\phi = \{x = (x_k): \text{sonlu adette terim hariç, } \forall k \in \mathbb{N} \text{ için, } x_k = 0\}$$

ile verilir. Bu uzayın, $\{\delta^k\}$ cümlesinin gerdiği uzay olduğu açıktır. Burada, δ^k , k .terimi 1 diğer terimleri 0 olan dizi, δ ise $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ ile verilen tüm terimleri bir olan dizidir.

Dizi uzayları teorisinde sıklıkla kullanılan dizi uzayları, *standard dizi uzayları* olarak adlandırılan sınırlı dizilerin ℓ_∞ , yakınsak dizilerin c , sıfıra yakınsak dizilerin c_0 ve p -

mutlak toplanabilen dizilerin ℓ_p ($1 \leq p < \infty$) uzaylarıdır. ℓ_∞ , c ve c_0 uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile ve ℓ_p uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile Banach uzaylardır. Bu uzaylardan elde edilebilen bazı dizi uzayları, kısmi toplamlar dizisi sınırlı bs , kısmi toplamlar dizisi yakınsak cs , sınırlı-salınımlı seri teşkil eden dizilerin bv ve $bv_0 = bv \cap c_0$ uzaylarıdır. bs ve cs uzayları

$$\|x\|_{bs} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

normu ile, bv ve bv_0 uzayları da

$$\|x\|_{bv} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|$$

normu ile Banach uzaylardır.

Tanım 2.2.1. $(\lambda, \|\cdot\|_\lambda)$ normlu uzayındaki $\{b_n\} \subset \lambda$ dizisini alalım. $\forall x \in \lambda$ için,

$$\lim_n \left\| x - \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \right\|_\lambda = 0$$

olacak şekilde bir tek $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ dizisi mevcut ise $\{b_n\}$ cümlesine λ uzayının bir *Schauder bazı*ı denir. $\{\delta^k\}$ cümlesi, c_0 ve ℓ_p uzayları için, $\{\delta, \delta^k\}$ cümlesi de c uzayı için bir Schauder bazıdır.

Tanım 2.2.2. $\lambda \subset w$ dizi uzayı, her $x = (x_k) \in \lambda$ için,

$$\pi_k(x) = x_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ile tanımlı π_k koordinat fonksiyonellerinin sürekli olduğu topolojiye sahip ise K - uzay adını alır.

Örnek 2.2.1. [5] w dizi uzayı,

$$d(x, y) = \sum_k 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|} \quad (2.2.1)$$

metriğinden elde edilen τ_w topolojisiyle bir K- uzay teşkil eder. (w, τ_w) topolojik dizi uzayının bir $x \in w$ noktasına yakınsayan $x^{(n)} = (x_k^{(n)})$ dizini gözönüne alalım. Bu takdirde;

$$x^{(n)} \rightarrow x = (x_k) \in (w, \tau_w) \Leftrightarrow (x_i^{(n)}) \rightarrow x_i \in w, \text{ (koordinatsal)}$$

önermesi geçerlidir. Yani, $(x^{(n)})$ dizisinin $x = (x_k)$ dizisine yakınsaması için gerek ve yeter şart $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_n x_k^{(n)} = x_k$$

olarak yakınsamasıdır. Bu yakınsama koordinatsal yakınsaklık olarak bilinir. τ_w topolojisi de w üzerindeki koordinatsal yakınsaklık topolojisi adını alır. Bu topoloji, w üzerindeki π_k koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan en zayıf topolojidir.

(λ, τ_λ) bir K- uzay ve $\mu \subset \lambda$ olsun. Bu takdirde (μ, τ_μ) de bir K- uzaydır. λ uzayı, τ topolojisiyle bir K- uzay oluyorsa, bu topolojiden daha ince topolojilerle de bir K- uzay teşkil eder.

Tanım 2.2.3. $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen *dönüşüm dizisi* denir.

λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve A bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayına ait ise A matrisi, λ uzayından μ uzayına bir *matris dönüşümü* tanımlar denir. λ uzayından μ dizi uzayına tanımlı bütün matris dönüşümlerinin cümlesi, $(\lambda; \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1. Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisinin (c, ℓ_∞) sınıfında olması için gerek ve yeter şart,

$$||A|| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$$

bulunmasıdır.

Tanım 2.2.4. [33] Bir λ dizi uzayındaki A sonsuz matrisinin λ_A *matris alanı*,

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in \lambda\}.$$

olarak tanımlanır. Bu durumda bir matrisin *yakınsaklık alanı*,

$$c_A = \{x = (x_k) \in w : Ax \in c\}.$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5. $x, y \in w$ dizileri için

$$xy = (x_k y_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

şeklindeki çarpımı, koordinatsal çarpım olarak adlandırılır. $x \in w$ ve $\lambda \subset w$ için,

$$x \cdot \lambda = \{xy : y \in \lambda\}$$

ve $\lambda, \mu \subset w$ için

$$\lambda \cdot \mu = \{xy : x \in \lambda, y \in \mu\} \quad (2.2.2)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.6. $\lambda \subset w, \mu \subset w$ ve $x \in \lambda, y \in \mu$ dizileri verilmiş olsun. Bu dizilerin

$$x + y = (x_k + y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

şeklindeki toplamı, koordinatsal toplam olarak adlandırılır. $\lambda, \mu \subset w$ uzayları için toplama,

$$\lambda + \mu = \{x + y \mid x \in \lambda, y \in \mu\}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.2 (Du Bois-Reymond Testi[5]). $x = (x_k) \in bv$ ve $y = (y_k) \in cs$ ise $xy = (x_k y_k) \in cs$.

Teorem 2.2.3 (Dedekind Testi [5]). $x = (x_k) \in bv_0$ ve $y = (y_k) \in bs$ ise $xy = (x_k y_k) \in cs$.

Teorem 2.2.4 (Abel Kısmı Toplamlar Formülü [5]). $a = (a_k), b = (b_k) \in w$, $x_n = \sum_{v=0}^n a_v$ ve $x_{-1} = 0$ olsun. Bu durumda, her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{v=n}^{n+k} a_v b_v = \sum_{v=n}^{n+k} x_v (b_v - b_{v+1}) - x_{n-1} b_n + x_{n+1} b_{n+k+1}$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2.7. [28] $\lambda, \mu \subset w$ alalım. Çarpım uzayları olarak da bilinen λ^μ dual uzayı,

$$M(\lambda, \mu) = \lambda^\mu = \left\{ y \in w \mid xy \in \mu, \forall x \in \lambda \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Kolaylık olması bakımından

$$\lambda^\lambda = M(\lambda)$$

ve

$$(\lambda^\mu)^\mu = \lambda^{\mu\mu}$$

yazılışları kullanılır. $M(\lambda)$, λ uzayının çarpım cebiri olarak bilinir.

Tanım 2.2.8. Herhangi bir $\lambda \subset w$ dizi uzayının α -, β -, γ - dualleri, sırasıyla

$$\begin{aligned} M(\lambda, \ell) &= \left\{ y \in w : \sum_k |x_k y_k| < \infty, \forall x \in \lambda \right\}, \\ M(\lambda, cs) &= \left\{ y \in w : \sum_k x_k y_k < \infty, \forall x \in \lambda \right\}, \\ M(\lambda, bs) &= \left\{ y \in w : \sup_n \left| \sum_{k=0}^n x_k y_k \right| < \infty, \forall x \in \lambda \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve λ^α , λ^β ve λ^γ ile gösterilir.

Bu uzayların herbirisi yine bir dizi uzayı olup bunlar arasında,

$$\emptyset \subset \lambda^\alpha \subset \lambda^\beta \subset \lambda^\gamma \subset w \quad (2.2.3)$$

kapsaması geçerlidir. $\lambda \subset \mu$ ve $\zeta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ olmak üzere,

$$\mu^\zeta \subset \lambda^\zeta$$

kapsaması geçerlidir.[16]

ϕ uzayını kapsayan bir λ K-uzayının f -duali,

$$\lambda^f = \left\{ \{f(\delta^k)\} \mid f \in \lambda' \right\}$$

olarak tanımlanır.

Birbirlerini kapsayan dizi uzaylarının f dualleri arasındaki ilişkiyi veren bir teoreme yer verelim.

Teorem 2.2.5. [33] λ ve μ uzayları için $\lambda \subset \mu$ ise $\mu^f \subset \lambda^f$ kapsaması geçerlidir. λ uzayı μ uzayı içinde kapalı ise $\mu^f = \lambda^f$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.2.9. $\zeta \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ alalım. $\lambda^{\zeta\zeta} = \lambda$ eşitliğini sağlayan λ dizi uzayına, ζ – uzay ; $\zeta = \alpha$ özel halinde ise *Köthe uzay(mükemmel dizi uzayı)* denir.

λ dizi uzayı için

$$\{(y_k) \in w \mid \exists (x_k) \in \lambda, \forall k \in \mathbb{N} : |y_k| \leq |x_k|\} \subset \lambda$$

kapsaması geçerli ise, λ uzayına *solid uzay* denir.

3. K- ve FK-UZAYLAR

Bu bölümde K- ve FK-uzaylarının tanımı ile bu uzayların bazı temel özelliklerini vereceğiz.

3.1 K-uzayları

Bölüm 2.2 de, w uzayını, koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan τ_w topolojisi ile vermiştik. Herbir $j \in \mathbb{N}$ için

$$q_j : w \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_k) \rightarrow |x_j|$$

fonksiyonları birer yarınorm ve $(q_j : j \in \mathbb{N})$ ailesiyle tanımlı τ_w lokal konveks topolojisini göstermek üzere, τ_w topolojisi:

1. Herbir $j \in \mathbb{N}$ için

$$\pi_j : w \rightarrow \mathbb{K}, x = (x_k) \rightarrow x_j$$

fonksiyonları süreklidir.

2. (w, τ_w) uzayındaki bir dizinin yakınsaklığı koordinatsal yakınsaklığa denktir.
3. τ_w topolojisi, $\pi_j (j \in \mathbb{N})$ fonksiyonlarını sürekli kılan en zayıf topolojidir.
4. (w, ϕ) dual çifti bakımından $\tau_w = \sigma(w, \phi)$ eşitliği geçerlidir.

özelliklerine sahiptir.

Tanım 3.1.1 (K-uzay). Lokal konveks τ_λ topolojisi, τ_w topolojisinden daha kuvvetli olan w uzayının λ altuzayına bir K-uzay ve τ_λ topolojisine de λ üzerinde bir K-topoloji denir.

Bu tanımdan,

1. (w, τ_w) uzayı bir K-uzaydır.
2. (λ, τ_λ) bir K-uzay ve μ, λ uzayının bir altuzayı ise $(\mu, \tau_\lambda|_\mu)$ bir K-uzaydır.

3. (λ, τ_λ) bir K-uzay ise τ_λ topolojisinden daha kuvvetli olan lokal konveks topolojilerle λ uzayı yine bir K-uzay teşkil eder.
4. Herbir (λ, τ_λ) lokal konveks dizi uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir.
 - (a) (λ, τ_λ) bir K-uzaydır.
 - (b) $i_\lambda : (\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (w, \tau_w)$ içerme fonksiyonu süreklidir.
 - (c) Herbir $j \in \mathbb{N}$ için $\pi_j|_\lambda : (\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (\mathbb{K}, | \cdot |)$ fonksiyonları süreklidir.
 - (d) Herbir $j \in \mathbb{N}$ için q_j yarınormları (λ, τ_λ) üzerinde süreklidir.
5. Her K-uzay Hausdorff uzayıdır.

sonuçları çıkarılır.

$q_j(x) = |x_j| \leq 2\|x\|$ eşitsizliği geçerli olduğundan, ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları $\|\cdot\|_\infty$ normu ile, bv ve bv_0 uzayları $\|\cdot\|_{bv}$ normu ile birer K-uzay teşkil ederler. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ uzayı da bir K-uzayıdır.

Tanım 3.1.2 (Normal Topoloji). λ ve μ iki dizi uzayı ve $\phi \subset \mu \subset \lambda^\alpha$ kapsaması geçerli olsun. Bu durumda her bir $y = (y_k) \in \mu$ için

$$q_y(x) = \sum_k |x_k y_k| \quad (x = x_k) \in \lambda$$

ile tanımlı fonksiyon λ üzerinde bir yarınormdur. Bu $Q_\mu = \{q_y : y \in \mu\}$ ailesinin λ üzerinde ürettiği $\eta(\lambda, \mu)$ topolojisine (μ uzayına göre) normal topoloji denir.

$\phi \subset \mu$, $\lambda^\alpha \subset \lambda^\beta$ ve $p_y(x) \leq q_y(x)$ olduğundan, $\tau_w|_\lambda \subset \tau_{P_\mu} \subset \eta(\lambda, \mu)$ kapsaması geçerlidir. Bu nedenle $(\lambda, \eta(\lambda, \mu))$ bir K-uzaydır. Her $x \in \lambda$ için $x = \sum_k x_k e^k$ ($\eta(\lambda, \mu)$ topolojisine göre) eşitliği geçerli olduğundan ϕ uzayı λ uzayında yoğundur. Her $f \in \lambda'$ fonksiyoneli

$$f(x) = \sum_k x_k f(e^k)$$

gösterimine sahiptir.

$$\begin{aligned} T : \mu &\rightarrow \lambda' \\ y = (y_k) &\rightarrow Ty = f_y, \quad f_y(x) = \sum_k x_k y_k \end{aligned}$$

ile tanımlı T dönüşümü için $T(\mu) \subset (\eta(\lambda, \mu))'$ kapsamı geçerlidir. T dönüşümünün izomorfizm olması için gerek ve yeter şart μ uzayının solid bulunmasıdır.

$\eta(\lambda, \mu)$ topolojisinin (λ, μ) dual çiftinin bir topolojisi olması için μ uzayının solid bulunması gerek ve yeterdir.

3.2 FK uzayı

Tanım 3.2.1. Tam lineer metrik uzaya, F - uzay, topolojisi, H , Hausdorff uzayının topolojisinden daha ince ve $\lambda \subset H$ olan λ lineer uzayına FH - uzay denir. Sürekli koordinat fonksiyonellerine sahip tam lineer metrik uzay ise FK - uzay olarak adlandırılır. Topolojisi normdan elde edilebilen FK - uzaya BK - uzay denir. F , FH , FK , BK kısaltmaları *Fréchet*, *Fréchet-Hausdorff*, *Fréchet-Koordinate*, *Banach-Koordinate* kelimelerinden elde edilmiştir.

Mesela w uzayı,

$$d(x, y) = \sum_k 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

metriği ile bir tam lineer metrik uzayı yapısına sahip olup üstelik bir koordinat uzay yapısı da sergiler. İşte bu yüzden FH - uzayların $H = w$ kabul edilmiş şekli FK - uzay gözüyle görülür. Bu uzay, topolojisi normlanamadığı için bir BK - uzay değildir.

Daha önce standart dizi uzayları olarak ele aldığımız uzaylar, üzerinde tanımlanan normlar ile birer BK - uzaydır [33].

3.3 Lineer Dönüşümler ve Matrisler

Teorem 3.3.1. (λ, τ_λ) ve (μ, τ_μ) sırasıyla F - ve FK - uzaylar, $T : \lambda \rightarrow \mu$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler denktir.

(a) T sürekli.

(b) $i_\mu : (\mu, \tau_\mu) \rightarrow (w, \tau_w)$ içermeye dönüşümü olmak üzere $i_\mu \circ T$ sürekli.

(c) $T_j = \pi_j \circ i_\mu \circ T : (\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|)$, $x \rightarrow T[(x)]_j$, $\forall j \in \mathbb{N}$ için sürekli.

Burada, $T[(x)]_j$ ile $T(x)$ dönüşümünün j . koordinatı, π_j ile de j . koordinat fonksiyoneli kastedilmektedir.

İspat. (μ, τ_μ) bir K- uzay ve i_μ sürekli olduğundan $(a) \Rightarrow (b)$ açıktır. Yine, koordinat fonksiyonellerinin sürekliliğinden $(b) \Rightarrow (c)$ olduğu da kolayca görülebilir. $(c) \Rightarrow (a)$ olduğunu gösterelim.

$$x^{(n)} \rightarrow x, x \in (\lambda, \tau_\lambda)$$

ve

$$Tx^{(n)} \rightarrow y, y \in (\mu, \tau_\mu)$$

olsun. Bu yakınsaklıklar koordinatsal olduklarından, T_j sürekliliğinden

$$\begin{aligned} y_j &= \left[\lim_n Tx^{(n)} \right]_j \\ &= \lim_n \left[Tx^{(n)} \right]_j \\ &= \lim_n T_j x^{(n)} \\ &= T_j \left(\lim_n x^{(n)} \right) \\ &= T_j x \\ &= [Tx]_j \end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise $y = Tx$ olduğunu gösterir. Teorem 2.1.7 ve Kapalı Grafik Teoreminden istenen elde edilir. $\square$

Sonuç 3.3.1. (λ, τ_λ) ve (μ, τ_μ) iki FK- uzay ve $\lambda \subset \mu$ olsun. Bu takdirde $\tau_\mu|_\lambda, \tau_\lambda$ topolojilerinden daha zayıftır. Yine, λ bir dizi uzayı ve τ ve τ^* bu dizi uzayı için lokal konveks topolojiler olmak üzere eğer (λ, τ) ve (λ, τ^*) ikisi birden FK- uzay oluyorsa bu takdirde $\tau = \tau^*$ olur.

Teorem 3.3.2. FK-uzaylar arasındaki matris dönüşümleri süreklidir.

İspat. (λ, τ_λ) ve (μ, τ_μ) iki FK-uzay ve $A : \lambda \rightarrow \mu$ bir matris dönüşümü olsun. A dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek için Teorem 3.3.1'den her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n = \pi_n \circ i_\mu \circ A : \lambda \rightarrow \mathbb{K}$$

dönüşümlerinin sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} A_{nv} : \lambda &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\rightarrow A_{nv}(x) = \sum_{k=0}^v a_{nk} x_k \end{aligned}$$

dönüşümlerini gözönüne alalım. Herbir $v \in \mathbb{N}$ için $A_{nv} \in \lambda'$ olup, Banach-Steinhaus Teoreminden,

$$(Ax)_n = \lim_v A_{nv}(x)$$

ile tanımlı A_n dönüşümü süreklidir. □

Teorem 3.3.3. *Herhangi bir FK- uzayının kapalı her altuzayı yine bir FK- uzaydır.*

İspat. F-uzayların kapalı her altuzayının yine bir F-uzay ve K- uzay her altuzayının da bir K- uzay olduğunu biliyoruz. Şu halde bir FK- uzayının kapalı her altuzayı yine bir FK- uzaydır. □

Şimdi, her biri yarınormlar tarafından üretilen sayılabilir çokluktaki FK- uzayların herhangi kesişimlerinin ve sonlu toplamalarının yine bir FK- uzay olduğunu söyleyen iki teoreme, ispatlarına değinmeden yer vereceğiz. Bu teoremlerde yarınormlar yerine normlar alınırsa aynı özelliklerin BK- uzaylar için geçerli olabileceğini söyleyebiliriz.

Teorem 3.3.4. *Sayılabilir çokluktaki FK- uzayların kesişimi yine bir FK- uzaydır. Yani; her $n \in \mathbb{N}$ ve $P = \bigcup_n P_n$ de $\{P_1, P_2, \dots\}$ yarınormlar ailesinin birleşimi olmak üzere, (λ_n, P_n) her biri FK- olan uzayların $\lambda = \bigcap_n \lambda_n$ kesişimi de bir FK- uzaydır.*

Teorem 3.3.5. *Her birinin topolojisi sayılabilir P_k yarınormlar ailelerinden üretilmiş (λ_i, P_i) FK- uzayların*

$$\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k$$

toplama,

$$q_{p^{(1)}, p^{(2)}, \dots, p^{(n)}}(x) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n p^{(k)}(x^{(k)}) \mid x = \sum_{k=1}^n x^{(k)}, x^{(k)} \in \lambda_k, p^{(k)} \in P_k \right\}$$

ile verilen q yarınormlar ailesinin ürettiği FK topolojisiyle yine bir FK- uzaydır.

Yukarıda vermiş olduğumuz teoremin iki lineer topolojik uzay bakımından ifadesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.3.6. λ, μ , topolojileri sırasıyla p, q paranormlarından elde edilen FK-uzaylar olsunlar. Bu durumda, $\lambda + \mu = \{x + y : x \in \lambda, y \in \mu\}$ uzayı da

$$r(z) = \inf \{p(x) + q(y) \mid x \in \lambda, y \in \mu, z = x + y\}$$

paranormuyla bir FK- uzay olur.

Teorem 3.3.7. Herbir $n \in \mathbb{N}$ için λ_n FK- uzayları arasında $\lambda_n \subset \lambda_{n+1}$ olsun. Bu uzayların $\lambda = \bigcup_n \lambda_n$ şeklindeki birleşimlerinin de bir FK- uzay olması için gerek ve yeter şart $\lambda = \lambda_n$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ sayısının olmasıdır.

Bir FK- uzayının sürekli bir lineer dönüşümünün tersi altında görüntüsünün yine bir FK- uzay olduğunu biliyoruz. Bu özellik, bir bakıma FK- uzay elde etme işleminde kullanılan bir metot olarak ele alındığında, topolojik dizi uzaylarında olduğu gibi toplanabilme teorisinde de önemli bir rol oynar. Şimdi bu özellik ile ilgili teoremimize yer vereceğiz.

Teorem 3.3.8. (λ, P) ve (μ, Q) iki FK- uzay, $T : \lambda \longrightarrow \mu$ sürekli lineer bir dönüşüm,

$$\mu_T = T^{-1}(\mu) = \{x \in \lambda \mid T(x) \in \mu\}$$

ve

$$\widehat{T} : \mu_T \longrightarrow \mu$$

$$x \longrightarrow T(x)$$

olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler geçerlidir.

(i) μ_T uzayı,

$$P^* = P \cup \{q \circ \widehat{T} \mid q \in Q\}$$

şeklinde tanımlı yarınormlar ailesiyle üretilen topoloji ile bir FK- uzaydır.

(ii) $\widehat{T} : \mu_T \longrightarrow \mu$ dönüşümü lineer ve süreklidir.

(iii) $\widehat{T}$ dönüşümü birebir ve örten ise, μ_T uzayının FK- topolojisi,

$$Q^* = \left(q \circ \widehat{T} \mid q \in Q \right)$$

ailesi tarafından üretilir.

4. BİR K- ve FK- UZAYININ BAZI ALTUZAYLARI

Bu bölümde, K- ve FK-uzayı yapısına sahip herhangi bir $\lambda \supset \phi$ uzayının bazı özellikler taşıyan altuzaylarına yer vereceğiz. [33]'de bu altuzayların çeşitli özellikleri incelenmiş ve çeşitli uygulamalarına yer verilmiştir. Bazı dizi uzaylarının ve matrislerin etki alanlarının altuzayları çeşitli yazarlar tarafından incelendi [1, 5, 7, 9, 13, 17, 21, 25, 33]. Bu özellikleri verirken uzayın, ϕ uzayını kapsayan bir BK-uzayı olduğunu kabul edeceğiz.

4.1 Kesim Operatörleri

Bu kısımda, bir $x = (x_n)$ dizisinden, sonlu terimi sıfır olmayan ve dizinin *n-li kesimi* dediğimiz yeni diziler elde etmek için kullanılan bazı kesim operatörlerine değineceğiz.

Tanım 4.1.1 (Dizilerde n-li Kesim). $\lambda \subset w$ bir dizi uzayı olsun. Bu uzaydaki $x = (x_k)$ dizisinin n-li kesimi,

$$P^n = \sum_{k=1}^n \delta^k$$

kesim operatörü olmak üzere,

$$P^n \cdot x = x^{[n]} = \sum_{k=1}^n x_k \delta^k \quad (4.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\{P^n \cdot x\} = \{x^{[n]}\}$ cümlesini de x dizisinin *n-li kesimler cümlesi* olarak adlandırır ve $P \cdot x$ ile gösteririz.

Bu durumda açıkça görüleceği üzere, bir $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots)$ dizisi böyle bir operatör altında yalnızca ilk n terimini muhafaza edebilecektir. Yani;

$$x^{[n]} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

olur.

Tanım 4.1.2 (Cesàro n-li Kesim). Bir $x = (x_k)$ dizisi için *Cesàro dönüşümü*;

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

ile verilir. $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine, x dizisinin *Cesàro metodu* altındaki görüntüsü olarak bakılır. Bu metoda karşılık gelen matris ise,

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad (k \leq n) \\ 0 & , \quad (k > n) \end{cases}$$

şeklindeki terimlerden oluşur. x dizisini *Cesàro metodu* ile düşündüğümüzde, bu dizinin *Cesàro n -li kesimi*,

$$\sigma^n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k \quad (4.1.2)$$

Cesàro kesim operatörü olmak üzere,

$$\sigma^n \cdot x = x^{[n]\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n P^k x_k$$

şeklinde tanımlanır. Bu ise,

$$x^{[n]\sigma} = \sum_{k=1}^n x_k \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \delta^k \quad (4.1.3)$$

eşitliğini verir. Benzer şekilde, $\{\sigma^n \cdot x\} = \{x^{[n]\sigma}\}$ cümlesi x dizisi için *Cesàro n -li kesimler cümlesi* olarak adlandırılır ve $\sigma \cdot x$ ile gösterilir [7].

Tanım 4.1.3 (Şartsız Kesim). $\mathbb{N}^n$ pozitif sayıların sonlu bir cümlesi ve

$$h^{\mathbb{N}^n} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \delta^k$$

şartsız kesim operatörü olmak üzere, *şartsız kesim*

$$h^{\mathbb{N}^n} \cdot x = x^{\mathbb{N}^n} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} x_k \delta^k \quad (4.1.4)$$

ile verilir. $\{h^{\mathbb{N}^n} \cdot x\} = \{x^{\mathbb{N}^n}\}$ cümlesi, *şartsız kesimler cümlesi* şeklinde adlandırılır. Ve $h \cdot x$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.4 (Toeplitz Kesimi). $T = (t_{nk})$ satır sonlu, regüler bir sonsuz matris olsun.

$$x^{[n]T} = T_n x = \sum_k t_{nk} \sum_j^k x_j \delta^j$$

ile bir x dizisinin n -li T -kesimi elde ederiz.

Tanım 4.1.5 (Şartsız Toeplitz Kesimi). $T = (t_{nk})$ satır sonlu bir sonsuz matris ve $t^{[n]}$ bu matrisin n . sütunu olmak üzere, bir x dizisinin *şartsız n -li T -kesimi*

$$H(x) = x^{\mathbb{N}_T^n} = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} (t^{[i]} - t^{[i-1]})x$$

ile verilir. Burada, $t^0 = 0$ olarak değerlendirilecektir. [15]

Yukarıda, muhtelif operatörler altında bir x dizisi için *n -li kesimlere* yer verdik. Bu kesimlerin ortak amacı, dizinin ilk n terimiyle ilgilenerek, bu dizinin ait olduğu uzaylar, uzayların dualleri, uzaylar arasındaki matris karakterizasyonları gibi bazı özellikleri incelemektir. Standart dizi uzayları için çeşitli incelemeler yapılmış ve yapılmaya da devam edilmektedir.

4.2 K Uzayının Bazı Altuzayları

Bu kısımda, bir K-uzayın n -li kesimlerle oluşturulan altuzaylarına ve bu uzayların bazı topolojik özelliklerine yer vereceğiz.

Tanım 4.2.1 (AB, AK, SAK, FAK Özellikleri). λ, ϕ uzayını kapsayan, τ_λ topolojisiyle bir K- uzay olsun. Bir $x \in \lambda$ için

$$\{x^{[n]} | n \in \mathbb{N}\}$$

cümlesi (λ, τ_λ) uzayında sınırlı oluyorsa, x dizisi AB özelliğine sahiptir denir. λ uzayının her elemanı AB özelliğine sahip ise, uzaya AB-uzay denir.

λ uzayının AB özelliğine sahip dizilerin cümlesini B_λ ile göstereceğiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} B_\lambda &= \{x \in \lambda : x, \text{ AB özelliğine sahiptir} \} \\ &= \left\{ x \in \lambda : \{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\} \subset (\lambda, \tau_\lambda) \text{ sınırlı} \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bir $x \in \lambda$ için

$$x^{[n]} \rightarrow x(\lambda, \tau_\lambda) \tag{4.2.1}$$

oluyorsa, x dizisi AK özelliğine sahiptir denir. λ uzayının her elemanı AK özelliğine sahip ise, uzaya AK-uzay denir.

λ uzayının AK özelliğine sahip dizilerin cümlesini S_λ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} S_\lambda &= \{x \in \lambda : x, \text{ AK özelliğine sahiptir} \} \\ &= \left\{ x \in \lambda : x^{[n]} \rightarrow x(\lambda, \tau_\lambda) \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, (4.2.1) yakınsaması $\sigma(\lambda, \lambda')$ zayıf topolojiye göre ise x dizisi SAK özelliğine sahiptir denir. λ uzayının her elemanı SAK özelliğine sahip ise, uzaya SAK-uzay denir. SAK özelliğine sahip λ uzayındaki dizilerin cümlesi W_λ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} W_\lambda &= \{x \in \lambda : x, \text{ SAK özelliğine sahiptir} \} \\ &= \left\{ x \in \lambda : x^{[n]} \rightarrow x(\lambda, \sigma(\lambda, \lambda')) \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Her $f \in \lambda'$ için,

$$\sum_k x_k f(\delta^k)$$

serisi τ_λ topolojisine göre yakınsaksa, x dizisi FAK özelliklerine sahiptir denir, λ uzayının her elemanı FAK özelliğine sahip ise, uzaya FAK-uzay adı verilir. FAK özelliğine sahip λ uzayındaki dizilerin cümlesi F_λ ile gösterilir ve

$$\begin{aligned} F_\lambda &= \{x \in \lambda : x, \text{ FAK özelliğine sahiptir.} \} \\ &= \left\{ x \in \lambda : \sum_k x_k f(\delta^k) \text{ yakınsak, } \forall f \in (\lambda, \tau_\lambda)' \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Burada AB, AK, SAK ve FAK kısaltmaları, Alman dilindeki; *AbschnittsBeschränktheit*, *AbschnittsKonvergenz*, *Schwache AbschnittsKonvergenz*, *Funktionale AbschnittsKonvergenz* kelimelerinden elde edilmiştir.

(λ, τ_λ) K-uzayının altuzayları arasında aşağıdaki kapsamalar geçerlidir.

$$\phi \subset S_\lambda \subset W_\lambda \subset F_\lambda \subset B_\lambda \text{ ve } W_\lambda \subset \bar{\phi} \quad (4.2.2)$$

Burada $\phi \subset W_\lambda$, $W_\lambda \subset \bar{\phi}$ ve diğer kapsama bağıntıları sonlu terimi sıfır olmayan dizilerin ϕ uzayının ve altuzayların tanımı dikkate alınarak kolayca ispat edilebilir.

Tanım 4.2.2 (AD Uzay). (λ, τ_λ) uzayı $\phi \subset \lambda$ olacak şekilde bir K- uzay olsun. Eğer, $\lambda = \bar{\phi}$ eşitliği sağlanıyorsa (λ, τ_λ) uzayına AD-uzay denir.

Burada AD kısaltması, yine Alman dilinde, kesimsel yoğunluk anlamına gelen *AbschnittsDichte* kelimesinden elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1. (λ, τ) sürekli duali λ' olan bir SAK-uzay olsun. Bu durumda $\lambda' = \lambda^f$ eşitliği sağlanmakla birlikte $\lambda^f \subset \lambda^\beta$ kapsamı geçerlidir ve her $f \in \lambda'$, her $x = (x_k) \in \lambda$ için

$$f(x) = \sum_k x_k f(\delta^k) \quad (4.2.3)$$

temsili geçerlidir. $\lambda^f \subset \lambda^\beta$ kapsamı λ uzayı FAK- uzay iken de geçerlidir.

İspat. (λ, τ) uzayı SAK uzay ise üstelik bir FAK- uzay ve bu yüzden $\lambda^f \subset \lambda^\beta$ olur. (4.2.3) eşitliği, SAK-uzay tanımından elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.2. λ, ϕ uzayını kapsayan bir FK-uzay ise $\lambda^f = (\bar{\phi})^f$ eşitliği geçerlidir.

İspat. Bunun için $\lambda^f \subset (\bar{\phi})^f$ ve $\lambda^f \supset (\bar{\phi})^f$ kapsamalarının geçerli olduğunu gösterelim.

$f \in \lambda'$ ve $y_k = f(\delta^k)$ olmak üzere $y = (y_k) \in \lambda^f$ olsun. f fonksiyonelinin $\bar{\phi}$ uzayına kısıtlanması $f|_{\bar{\phi}} = g$ alalım. Bu durumda $y_k = g(\delta^k)$ olup, $g \in (\bar{\phi})'$ olduğundan $y \in (\bar{\phi})^f$ elde edilir.

Tersine, $g \in (\bar{\phi})'$ ve $y_k = g(\delta^k)$ olmak üzere, $y = (y_k) \in (\bar{\phi})^f$ olsun. Hahn-Banach Teoreminden g fonksiyonelinin λ uzayına $f|_{\bar{\phi}} = g$ olacak şekilde bir f genişlemesi mevcuttur. $f \in \lambda'$ olup, $y_k = f(\delta^k)$ eşitliği geçerlidir. Bu ise $y = (y_k) \in \lambda^f$ olduğunu gösterir. $\square$

AK- uzay olan her λ dizi uzayı AD- uzaydır. Yani,

$$S_\lambda = \lambda \Rightarrow \lambda = \bar{\phi}$$

dir. $\Rightarrow$ yerine $\Leftrightarrow$ gelmesi için $\lambda = \bar{\phi}$ uzayının üstelik AB- uzay olması gerekir.

Şimdi bazı dizi uzayları için yukarıda tanımladığımız altuzaylarını belirleyelim.

K- uzay olan bir $\lambda \supset \phi$ uzayının bir $\eta \in \{S, W, F, B\}$ özelliğine sahip olduğunu göstermek için

$$\eta_\lambda = \lambda \Leftrightarrow (\eta_\lambda \subset \lambda \wedge \eta_\lambda \supset \lambda)$$

önermesi dikkate alındığında, her seferinde, $\eta_\lambda \subset \lambda$ kapsaması açık olduğundan biz yalnızca $\eta_\lambda \supset \lambda$ kapsamasının geçerli olduğunu göstermeye çalışacağız.

1. (w, τ_w) uzayı bir AK-uzaydır. w uzayı için

$$w = S_w = W_w = F_w = B_w \text{ ve } w^f = \phi \quad (4.2.4)$$

eşitlikleri geçerlidir.

2. $(1 \leq p < \infty)$ için $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ uzayı bir AK- uzaydır. ℓ_p uzayı için

$$S_{\ell_p} = W_{\ell_p} = F_{\ell_p} = B_{\ell_p} = \ell_p$$

eşitlikleri geçerlidir.

$S_{\ell_p} = \ell_p$ olduğunu gösterelim.

$x = (x_k) \in \ell_p$ alalım. x dizisinin P^n n-li kesim dönüşümü altında görüntüsü,

$$P^n \cdot x = x^{[n]} = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$$

olup

$$x^{[n]} - x = (0, 0, \dots, 0, -x_{n+1}, -x_{n+2}, -x_{n+3}, \dots)$$

olur. $\|x^{[n]} - x\|_p$ normunun n üzerinden limiti alınır

$$\begin{aligned} \lim_n \|x^{[n]} - x\|_p &= \lim_n \left(\sum_{k \geq n+1} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $x \in S_{\ell_p}$, yani x dizisinin AK özelliğine sahip olduğunu gösterir. Her $x = (x_k) \in \ell_p$ için bu tartışma geçerli olacağından $\ell_p \subset S_{\ell_p}$ kapsaması geçerlidir. Şu halde, $S_{\ell_p} = \ell_p$ eşitliği geçerli olup ℓ_p bir AK-uzaydır.

3. Benzer şekilde,

$$S_{\ell_\infty} = S_c = S_{c_0} = c_0$$

eşitlikleri geçerlidir. $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı bir AK- uzay olup, c ve ℓ_∞ uzaylarının AK- özelliğine sahip dizilerinin uzayı ise c_0 uzayıdır.

$x \in \ell_\infty$ için

$$\begin{aligned} \lim_n \|x^{[n]} - x\|_\infty &= \lim_n \left(\sup_{k \geq n+1} |x_k| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olması için $x = (x_k) \in c_0, (k \in \mathbb{N})$ olması gerektiğini anlarız. Bu da $S_{\ell_\infty} = c_0$ olacağını gösterir.

Bununla birlikte,

$$S_{\ell_\infty} = W_{\ell_\infty} = c_0 \text{ ve } F_{\ell_\infty} = B_{\ell_\infty} = \ell_\infty$$

eşitlikleri geçerli olup, $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ uzayı bir FAK- uzaydır. Buradan, $c_0 \subset \lambda \subset \ell_\infty$ olacak şekilde her $(\lambda, \|\cdot\|_\infty)$ dizi uzayı için,

$$S_\lambda = W_\lambda = c_0 \text{ ve } F_\lambda = B_\lambda = \lambda$$

olduğunu söyleyebiliriz.

4. b_{v_0} ve b_v uzayları $\|\cdot\|_{b_v}$ normu ile sırasıyla AK- uzay ve AB- uzaydır.

b_{v_0} uzayının AK-uzay olduğunu gösterelim.

$x \in b_{v_0}$ olsun. Bu durumda, $x \in b_v \cap c_0$ olup

$$\sum_k |x_k - x_{k-1}| < \infty$$

önermesi geçerlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} \|x - x^{[n]}\|_{b_v} &= \lim_n \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $x \in S_{b_{v_0}}$ olduğunu gösterir. Şu halde $S_{b_{v_0}} = b_{v_0}$ eşitliği geçerlidir, yani b_{v_0} uzayı bir AK- uzaydır.

5. $(b_s, \|\cdot\|_{bs})$ uzayının $S_{bs} = cs$ olacak şekilde bir AB- uzay ve $(cs, \|\cdot\|_{bs})$ uzayı ise bir AK- uzaydır.

Şimdi, bir FK- uzayının AK- veya AD- uzay olduğu takdirde dualleri arasındaki ilişkiyi veren teoremine yer verelim.

Teorem 4.2.3. [33] $\lambda \supset \phi$ bir FK- uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki önermeler doğrudur.

(i) λ uzayının β , γ ve f dualleri arasında,

$$\lambda^\beta \subset \lambda^\gamma \subset \lambda^f$$

kapsaması geçerlidir.

(ii) λ uzayı AK özelliğine sahip ise bu takdirde $\lambda^\beta = \lambda^f$ olur.

(iii) λ uzayı AD özelliğine sahip ise bu takdirde $\lambda^\beta = \lambda^\gamma$ olur.

İspat. (i) Herhangi bir λ dizi uzayı için $\lambda^\beta \subset \lambda^\gamma$ kapsamasının geçerli olduğunu biliyoruz.

Bu yüzden yalnızca $\lambda^\beta \subset \lambda^f$ ve $\lambda^\gamma \subset \lambda^f$ olduklarını göstereceğiz.

$y \in \lambda^\beta$ olsun. Bu durumda her $x \in \lambda$ için

$$\sum_k x_k y_k$$

serileri yakınsaktır. Bu seri yardımıyla

$$f : \lambda \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x = (x_k) \rightarrow f(x) = \sum_k x_k y_k$$

fonksiyoneli tanımlayalım. f fonksiyoneli λ üzerinde noktasal sınırlı olup Banach-Steinhaus Teoreminden $f \in \lambda'$ elde edilir. Özel olarak $x = \delta^n \in \lambda$ aldığımızda, $f(\delta^n) = y_n$ olup buradan $y \in \lambda^f$ olduğu sonucuna varırız. Böylece $\lambda^\beta \subset \lambda^f$ kapsaması sağlanmış olur.

$\lambda^\gamma \subset \lambda^f$ kapsaması benzer şekilde gösterilebilir.

(ii) λ uzayı AK özelliğine sahip bir FK- uzay olsun. $\lambda^\beta \subset \lambda^f$ kapsaması (i) den dolayı geçerlidir. Şimdi ise $\lambda^f \subset \lambda^\beta$ kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim.

Bunun için $y \in \lambda^f$ alalım. Bu takdirde $y_n = f(\delta^n)$ olacak şekilde bir $f \in \lambda'$ vardır. λ uzayı bir AK- uzay olduğundan her $x \in \lambda$ için $x = \sum_k x_k \delta^k$ olur. Böylece her $f \in \lambda'$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k x_k f(\delta^k) \\ &= \sum_k x_k y_k \end{aligned}$$

elde edilir. $f \in \lambda'$ olduğundan son seri yakınsaktır. Bu ise $y \in \lambda^\beta$ olduğunu gösterir. O halde $\lambda^\beta = \lambda^f$ eşitliği sağlanır.

(iii) $\lambda^\beta \subset \lambda^\gamma$ olduğunu biliyoruz. Şimdi λ uzayı AD özelliğine sahip bir FK- uzay iken $\lambda^\gamma \subset \lambda^\beta$ olacağını gösterelim.

Bunun için $y \in \lambda^\gamma$ ve her $x \in \lambda$ için $f_n(x) = \sum_{k=1}^n y_k x_k$ alalım. O halde $\{f_n\}$ noktasal sınırlıdır, dolayısıyla eşsürekli. Her $x \in \phi$ için, $\lim_n f_n(x)$ mevcut olduğundan, bu limit her $x \in \lambda$ için mevcut olmalıdır. Şimdi,

$$E = \{x \in \lambda : \lim_n f_n(x) \text{ mevcut} \}$$

şeklindeki cümleyi alalım. Bu cümle λ uzayının kapalı bir alt cümlesidir.

$\phi \subset E \subset \lambda$ olup, uzayın bir AD-uzay olduğu dikkate alınırsa

$$\bar{\phi} \subset \bar{E} = E \subset \lambda = \bar{\phi}$$

elde edilir. Buna göre, $E = \lambda = \bar{\phi}$ sonucu elde edilir. O halde, her $x \in \lambda$ için $\lim_n f_n(x)$ mevcuttur. Her $x \in \lambda$ için $\sum_k y_k x_k$ serisi yakınsak olacağından $y \in \lambda^\beta$ olur. Bu ise istenendir. $\square$

Aşağıda AD- uzay olan bir λ , FK- uzayı ile herhangi bir μ , FK- uzay için; bu uzayların f dualleri arasındaki ilişkiyi veren teoreme ispatsız yer vereceğiz.

Teorem 4.2.4. [33]. λ bir AD- uzay olsun. Bu takdirde, herhangi bir μ FK- uzayı için $\lambda \subset \mu$ olması için gerek ve yeter şart $\lambda^f \supset \mu^f$ olmasıdır.

Teorem 4.2.5. *Aşağıda bazı dizi uzaylarının dualleri ile ilgili verilen önermeler doğrudur.*

$$(a) \quad bv_0^\beta = bv_0^\gamma = bv_0^f = bs$$

$$(b) \quad bv^\beta = cs$$

$$(c) \quad bv^\gamma = bv^f = bs$$

$$(d) \quad cs^\beta = cs^\gamma = cs^f = bv$$

İspat. (a) $bv_0^\beta = bv_0^\gamma = bv_0^f = bs$.

bv_0 uzayı bir AK- uzay olduğundan bir AD- uzaydır. Teorem 4.2.3 gereği

$$bv_0^\beta = bv_0^\gamma = bv_0^f$$

eşitlikleri geçerlidir.

$y \in bs$ ve $x \in bv_0$ olsun. Teorem 2.2.3'den $xy = (x_k y_k) \in cs$ dir. Bu ise $bs \subset bv_0^\beta$ olduğunu gösterir.

Diğer taraftan $u \in bv_0^f$ alalım. Bu takdirde, $u_k = f(\delta_k)$ olacak şekilde bir $f \in bv_0'$ vardır. $\delta^{[n]} = \sum_{k=1}^n \delta^k$ olmak üzere,

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n f(\delta^k) \right|$$

olduğuna göre $\|\delta^{[n]}\|_{bv} = 1$ olur. f lineer ve sürekli olduğundan,

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k \right| = \left| f\left(\sum_{k=1}^n \delta^k\right) \right| = |f(\delta^{[n]})| \leq \|f\| \cdot \|\delta^{[n]}\| = \|f\|$$

elde edilir. O halde $\sup_n \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| < \infty$ olur. Yani $u \in bs$ elde edilmiş olur.

$bs \subset bv_0^\beta = bv_0^\gamma = bv_0^f \subset bs$ olduğundan istenen eşitlik, yani $bv_0^\beta = bv_0^\gamma = bv_0^f = bs$ elde edilir.

(b) $bv^\beta = cs$.

$\delta \in bv$ olduğundan $\{\delta\} \subset bv$ kapsaması geçerlidir. $\{\delta\}^\beta \supset bv^\beta$ olur. Ve $\{\delta\}^\beta = cs$ olduğundan, $bv^\beta \subset cs$ kapsaması geçerli olur.

$cs \subset bv^\beta$ kapsaması Teorem 2.2.2 den görülür.

Buna göre $bv^\beta = cs$ eşitliği geçerlidir.

(c) $bv^\gamma = bv^f = bs$.

$bv = bv_0 \oplus \delta$ olduğundan,

$$bv^\gamma = bv_0^\gamma \cap \{\delta\}^\gamma$$

eşitliği geçerlidir. $bv_0^\gamma = bs$ olduğunu (a) dan biliyoruz.

$$\begin{aligned} \{\delta\}^\gamma &= \left\{ x \in w : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| < \infty, \forall y \in \{\delta\} \right\} \\ &= \left\{ x \in w : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n x_k \right| < \infty \right\} \\ &= bs \end{aligned}$$

eşitliğinden, $bv^\gamma = bs$ elde edilir. $bv_0 \subset bv$ ve bv_0 uzayı bv uzayının kapalı alt uzayı olduğundan Teorem 2.2.5 gereği $bv_0^f = bv^f$ eşitliği elde edilir. (a) dan $bv_0^f = bs$ olmasıyla ispat tamamlanmış olur.

(d) $cs^\beta = cs^\gamma = cs^f = bv$.

cs uzayı bir AK- uzay olduğundan Teorem 4.2.3(ii) den $cs^\beta = cs^\gamma = cs^f$ eşitlikleri geçerlidir. (b)'den $bv^\beta = cs$ olduğundan, $bv^{\beta\beta} = cs^\beta$ eşitliğine sahip oluruz. $bv \subset bv^{\beta\beta}$ kapsamasından

$$bv \subset cs^\beta$$

elde edilir.

$u \in cs^\gamma$ ve $x \in cs$ alalım. $y_n = \sum_{k=0}^n x_k$ olmak üzere, $y \in c$ olup, Abel kısmi toplamından

$$\sum_{k=0}^n u_k x_k = \sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) y_k + u_n y_n$$

eşitliği geçerlidir. $A = (a_{nk})$ matrisini,

$$a_{nk} = \begin{cases} u_k - u_{k+1} & , \quad k < n \\ u_n & , \quad k = n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$\sum_{k=0}^n u_k x_k = (Ay)_n$$

olup, $(u_k x_k) \in bs$ olduğundan, $\{(Ay)_n\}$ dizisi ℓ_∞ uzayına aittir. Her $y \in c$ için $Ay \in \ell_\infty$ olacağından $A \in (c, \ell_\infty)$ olup,

$$\|A\| = \sup_n \left\{ \sum_k^{n-1} |u_k - u_{k+1}| + |u_n| \right\} < \infty$$

şartından,

$$\sum_k |u_k - u_{k+1}| < \infty$$

bulunur. Buna göre $u \in bv$ olup, $cs^\gamma \subset bv$ kapsaması geçerlidir.

Böylece ispat tamamlanmış olur. □

4.3 Cesàro FK Altuzaylar

Bu kısımda, bazı yeni dizi uzaylarını ve bunların dual uzaylarını tanımlayıp, Cesàro kesim operatörü yardımıyla [7] ve [12] çalışmalarında elde edilen FK-altuzaylarını ve bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Cesàro dönüşümü altında, sıfıra yakınsayan

$$\sigma_0 = \left\{ x \in w : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = 0 \right\}$$

kısmi toplamaları sınırlı dizi teşkil eden

$$\sigma b = \left\{ x \in w : \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j \right| < \infty \right\}$$

ve kısmi toplamaları yakınsak dizi teşkil eden

$$\sigma_s = \left\{ x \in w : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j \text{ mevcut} \right\}$$

cümleleri tanımlayalım. σ_0 uzayı

$$\|x\|_{\sigma_0} = \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right|$$

ile ve σ_b ve σ_s uzayları da

$$\|x\|_{\sigma_s} = \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j \right|$$

normlarıyla birer BK-uzaydır. Bir λ dizi uzayının σ ve σ_b dualleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \lambda^\sigma &= \left\{ x \in w \mid \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j y_j \text{ mevcut}, \forall y \in \lambda \right\} \\ &= \{x \in w \mid xy \in \sigma_s, \forall y \in \lambda\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda^{\sigma_b} &= \left\{ x \in w \mid \sup_n \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j y_j \right| < \infty, \forall y \in \lambda \right\} \\ &= \{x \in w \mid xy \in \sigma_b, \forall y \in \lambda\}. \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Bir $x \in \lambda$ dizisi için, (4.1.3) ile verilen, n-li Cesàro kesimi

$$\begin{aligned} x^{[n]\sigma} &= \sum_{k=1}^n x_k \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \delta^k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[k]} \end{aligned}$$

şeklinde idi. Bu kesim yardımıyla aşağıdaki altuzayları tanımlayalım.

Tanım 4.3.1. λ, ϕ uzayını kapsayan, τ_λ topolojisiyle bir FK-uzay olsun. Bir $x \in \lambda$ için

$$\{x^{[n]\sigma} : n \in \mathbb{N}\}$$

cümlesi (λ, τ_λ) uzayında sınırlı oluyorsa, x dizisi σB özelliğine sahiptir denir. λ uzayının her elemanı σB özelliğine sahip ise, uzaya σB -uzay denir. λ uzayının σB özelliğine sahip dizilerin cümlesini $C_1 B_\lambda$ ile göstereceğiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} C_1 B_\lambda &= \{x \in \lambda : x, \sigma B \text{ özelliğine sahiptir} \} \\ &= \left\{ x \in \lambda : \{x^{[n]\sigma} : n \in \mathbb{N}\} \subset (\lambda, \tau_\lambda) \text{ sınırlı} \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bir $x \in \lambda$ için

$$x^{[n]\sigma} \rightarrow x(\lambda, \tau_\lambda)$$

önermesi geçerli ise, x dizisi σK özelliğine sahiptir denir. λ uzayının her elemanı σK özelliğine sahip ise, uzaya σK -uzay denir. λ uzayının σK özelliğine sahip dizilerin cümlesini $C_1 S_\lambda$ ile göstereceğiz. Buna göre,

$$\begin{aligned} C_1 S_\lambda &= \{x \in \lambda : x, \sigma K \text{ özelliğine sahiptir} \} \\ &= \left\{ x \in \lambda : x^{[n]\sigma} \rightarrow x(\lambda, \tau_\lambda) \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Benzer şekilde $F\sigma K$ ve $S\sigma K$ özellikleri de FAK ve SAK özelliklerine paralel olarak tanımlanabilir. $\lambda \supset \emptyset$ bir FK -uzayının $F\sigma K$ ve $S\sigma K$ altuzayları

$$\begin{aligned} C_1 F_\lambda &= \left\{ x \in \lambda : x, F\sigma K \text{ özelliğine sahiptir} \right\} \\ &= \left\{ x \in \lambda : x = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j f(\delta^j), \forall f \in \lambda' \right\}, \\ C_1 W_\lambda &= \left\{ x \in \lambda : x, S\sigma K \text{ özelliğine sahiptir} \right\} \\ &= \left\{ x \in \lambda : \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[k]} \rightarrow x \text{ (zayıf)} \right\} \\ &= \left\{ x \in \lambda : f(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j f(\delta^j), \forall f \in \lambda' \right\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Bir $x = (x_k) \in w$ için $\Delta x_k = x_k - x_{k+1}$ ve $\Delta^j x_k = \Delta^{j-1} x_k - \Delta^{j-1} x_{k+1}$ olmak üzere; her $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^2 x_k \geq 0$ ($\Delta^2 x_k \leq 0$) olan reel terimli $x = (x_k)$ dizisine konveks (konkav) dizi denir.

Lemma 4.3.1. [7] (v_k) , pozitif reel sayıların kesin artan bir dizisi ve (ϑ_k) , $\vartheta_1 = 1$ olacak şekilde pozitif sayıların kesin artan bir dizisi olmak üzere,

$$\vartheta_{k+1}(v_k - v_{k-1}) \geq \vartheta_k(v_{k+1} - v_{k-1}) - \vartheta_{k-1}(v_{k+1} - v_k)$$

eşitsizliği sağlansın. y dizisi de ϑ_k ve ϑ_{k+1} arasında lineer olacak şekilde $y_{\vartheta_k} = v_k$ şeklinde verilsin. Bu takdirde, y konkav ve $\alpha_n = y_n^{-1}$ ile verilen α dizisi $\alpha \in c_0$ olan bir konveks dizidir.

Lemma 4.3.2. Her $\alpha \in w$ için,

$$\begin{aligned} \alpha^{[n]} &= \sum_{k=1}^{n-1} k \Delta^2 \alpha_k \sigma^k + (n-1) \Delta \alpha_n \sigma^{n-1} + \alpha_n \sum_{k=1}^n \delta^k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \Delta^2 \alpha_k \sigma^k + n \alpha_n \sigma^n - (n-1) \alpha_{n+1} \sigma^{n-1}, \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.3.1. $\forall x \in w$ için, σb bir σB uzaydır. Yani,

$$\|x\|_{\sigma b} = \sup_n \|x^{[n]\sigma}\|_{\sigma b}.$$

İspat. Herbir $y \in \phi$ için,

$$s(y) = \left| \sum_k y_k \right|$$

alalım. $x \in w$ için

$$\begin{aligned} \|x\|_{\sigma b} &= \sup_n s(x^{[n]\sigma}) \\ &= \sup_n \lim_m s(\sigma^m x^{[n]\sigma}) \\ &\leq \sup_n \|x^{[n]\sigma}\|_{\sigma b} \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine, $\alpha = \sigma^n \sigma^m$ alalım.

$$\sigma^n x = x^{[n]\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[k]}$$

olmak üzere; Lemma 4.3.2 ile,

$$\begin{aligned} \sup_n \|x^{[n]\sigma}\|_{\sigma b} &= \sup_{m \leq n} s(\sigma^n \sigma^m x) \\ &= \sup_{m \leq n} s\left(\sum_{k=1}^{m-1} k \Delta^2 \alpha_k(\sigma^k x) + m \alpha_m(\sigma^m x)\right) \\ &\leq \sup_{m \leq n} \left(\frac{2}{mn} \sum_{k=1}^{m-1} k + \left(1 - \frac{m-1}{n}\right)\right) \sup_k s(\sigma^k x) \\ &= \sup_k s(\sigma^k x) \\ &= \|x\|_{\sigma b} \end{aligned}$$

olacağından $\sigma b = C_1 B_{\sigma b}$ olur. Böylece σb bir σB uzay olur. $\square$

Bu uzaylar standart dizi uzaylarına paralel bir şekilde inşa edilmiş olduklarından, üzerlerinde tanımlı normlar ile taşıdığı özellikler standart dizi uzaylarının özelliklerine benzerler. Aşağıdaki teorem bu açıklama doğrultusunda ispatsız bir şekilde yer alacaktır.

Teorem 4.3.2. σs uzayı, $\|\cdot\|_{\sigma b}$ normu ile bir σK uzaydır.

$C_1 S_{\sigma b} = C_1 S_{\sigma s} = \sigma s$ ve $C_1 B_{\sigma s} = \sigma b$ eşitlikleri geçerlidir.

Teorem 4.3.3. $[16]\lambda \supset \phi$ bir FK-uzay olsun. Bu takdirde,

- (i) $\lambda^b \subset \lambda^\sigma \subset \lambda^{\sigma b} \subset \lambda^f$,
- (ii) λ bir σK -uzay ise $\lambda^f = \lambda^\sigma$ eşitliği geçerlidir.
- (iii) λ bir AD-uzay ise $\lambda^\sigma = \lambda^{\sigma b}$ eşitliği geçerlidir.

İspat. Öncelikle (ii) ve (iii) ifadelerini ispat edelim. Böylelikle, bunlar yardımıyla (i) ifadesini ispat edebileceğiz.

- (ii) Bunun için, $\lambda^f \subset \lambda^\sigma$ ve $\lambda^\sigma \subset \lambda^f$ olduklarını göstermeliyiz. O halde, $y \in \lambda^\sigma$ olsun ve her $x \in \lambda$ için,

$$f(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j y_j$$

olarak tanımlayalım.

Banach-Steinhaus teoremi gereğince $f \in \lambda'$ olur.

Ayrıca,

$$f(\delta^m) = \lim_n \frac{1}{n} (n - (m - 1)) y_m = y_m, \quad (m < n)$$

olup, $y \in \lambda^f$ olur. Bu ise $\lambda^\sigma \subset \lambda^f$ olması demektir.

Şimdi de $\lambda^f \subset \lambda^\sigma$ olduğunu gösterelim. Bunun için, $y \in \lambda^f$ alalım. λ bir σK - uzay olduğundan, her $x \in \lambda$ için,

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j f(\delta^j) \\ &= \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j y_j \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu da $y \in \lambda^\sigma$ olması demektir. O halde, bu iki durum dikkate alındığında, $\lambda^f = \lambda^\sigma$ sonucu okunur.

(iii) Bunun için, $y \in \lambda^{\sigma b}$ alalım ve her $x \in \lambda$ için,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k x_j y_j$$

olsun. Bu takdirde, $\{f_n\}$ noktasal sınırlıdır ve dolayısıyla da eşsüreklidir. ([33], 7.0.2)

Şimdi, $(m < n)$ için $\lim_n f_n(\delta^m) = y_m$ olduğundan $\phi \subset \{x : \lim_n f_n(x) \text{ mevcut} \}$ içermesi geçerli olur. Böylece, yakınsaklık lemması kullanılarak, ([33], 1.0.5, 7.0.3) $\{x : \lim_n f_n(x) \text{ mevcut} \}$ cümlesi λ uzayının kapalı bir altuzayı olur. λ bir AD- uzay olduğundan,

$$\lambda = \{x : \lim_n f_n(x) \text{ mevcut} \} = \bar{\phi}$$

eşitliği sağlanır ve her $x \in \lambda$ için $\lim_n f_n(x)$ mevcut olacağından $y \in \lambda^\sigma$ bulunur.

Diğer içirme aşıkard olduğundan, $\lambda^\sigma = \lambda^{\sigma b}$ eşitliği geçerlidir.

(i) Hipotezden $\bar{\phi} \subset \lambda$ olur. $\bar{\phi}$ bir σK - uzay olduğundan, ([33], 7.2.4) ve az önce ispatını vermiş olduğumuz (ii) ve (iii) önermelerinin doğruluğu da kullanılarak

$$\lambda^{\sigma b} \subset (\bar{\phi})^{\sigma b} = (\bar{\phi})^\sigma = (\bar{\phi})^f \lambda^f$$

eşitliği sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 4.3.2. $C_1F_\lambda^+$ ve $C_1B_\lambda^+$ altuzayları,

$$\begin{aligned} C_1F_\lambda^+ &= \left\{ x \in w \mid \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[k]} \right) (\lambda\text{-zayıf cauchy}) \right\} \\ &= \{ x \in w \mid (x_n f(\delta^n)) \in \sigma s, \forall f \in \lambda' \}, \\ C_1B_\lambda^+ &= \left\{ x \in w \mid \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[k]} \right) (\lambda\text{-sınırlı}) \right\} \\ &= \{ x \in w \mid (x_n f(\delta^n)) \in \sigma b, \forall f \in \lambda' \}. \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, $C_1F_\lambda = C_1F_\lambda^+ \cap \lambda$ ve $C_1B_\lambda = C_1B_\lambda^+ \cap \lambda$ eşitlikleri geçerlidir. Kolaylık olsun diye, $C_1S, C_1W, C_1F^+, C_1B^+, C_1F, C_1B$ gösterimlerini kullanacağız.

Teorem 4.3.4. $\lambda \supset \phi$ bir FK uzay olsun. Bu takdirde,

$$\phi \subset C_1S \subset C_1W \subset C_1F \subset C_1B \subset \lambda$$

ve

$$\phi \subset C_1S \subset C_1W \subset \bar{\phi}$$

kapsamaları geçerlidir.

İspat. Açık olmayan tek içirme $C_1W \subset \bar{\phi}$ içermesidir. Bunun için ϕ uzayı üzerinde $f = 0$ olan $f \in \lambda'$ fonksiyoneli gözönüne alalım. C_1W uzayının tanımı gereğince $f = 0$ fonksiyonelidir. Sonuç 2.1.4'ten istenen elde edilir. $\square$

Teorem 4.3.5. $\Lambda = C_1S, C_1W, C_1F^+, C_1B^+, C_1F, C_1B$ alalım. Bu takdirde,

$$\lambda \subset \mu \Rightarrow \Lambda_\lambda \subset \Lambda_\mu$$

önermesi geçerlidir.

İspat. İçerme dönüşümünün sürekli olduğunu biliyoruz. Teoremin ifadesi dikkate alındığında eğer $x \in \lambda$ alındığında $x \in \mu$ olacağından $x \in C_1S_\lambda$ olduğu takdirde,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[n]} \rightarrow x$$

yakınsaması μ uzayı için de geçerli olur. Yani, $x \in C_1S_\mu$ olur. C_1W için içerme dönüşümünün zayıf sürekliliğini (zayıf topolojilere göre sürekliliği) dikkate aldığımızda

sonuç hemencecik okunur. Şimdi $x \in C_1F^+$, C_1B^+ alalım. Bu takdirde, her $f \in \lambda'$ için sırasıyla $(x_n f(\delta^n)) \in \sigma s$, σb olup bu kez her $g \in \mu'$ için g fonksiyonunun $g|_\lambda \in \lambda'$ şeklindeki kısıtlanması için de $(x_n g(\delta^n)) \in \sigma s$, σb elde edilir ([33], 4.2.4). Bu sonuç $x \in C_1F$, C_1B için benzer olarak elde edilebilir. $\square$

σ_0 uzayı AK-uzay olduğundan aşağıdaki teoremleri elde ederiz.

Teorem 4.3.6. $\lambda \supset \phi$ FK-uzay olsun. Bu durumda, $\sigma_0 \subset C_1S \subset C_1W$ kapsamaları geçerlidir.

Teorem 4.3.7. $\lambda \supset \phi$ FK-uzayı için

$$C_1B^+ = \lambda^{f\sigma b}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $z \in C_1B^+$ olması için gerek ve yeter şartın $(z_n f(\delta^n)) \in \sigma b$ olduğunu biliyoruz. Bu ise bizi her $f \in \lambda'$ için $f(\delta^n) \in \lambda^f$ olacağından ve σb dualin tanımından $z \in \lambda^{f\sigma b}$ sonucuyla buluşturur. $\square$

Teorem 4.3.8. $\lambda \supset \phi$ bir FK uzay ve $\bar{\phi}$, ϕ uzayının λ uzayındaki kapanışı olsun. Eğer, herhangi bir μ FK uzayı için

$$\bar{\phi} \subset \mu \subset \lambda$$

ile verilen kapsama geçerli ise bu takdirde

$$C_1B_\mu^+ = C_1B_\lambda^+$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.3.5 yardımıyla $C_1B^+(\bar{\phi}) \subset C_1B^+(\mu) \subset C_1B^+(\lambda)$ olacağını görürüz. Diğer taraftan, Teorem 4.3.7 ve ([33], 7.2.4) ile istenen eşitlik elde edilir. $\square$

Teorem 4.3.9. $\lambda \supset \phi$, $C_1B \supset \bar{\phi}$ kapsamasının sağlandığı bir FK uzay olsun. Bu takdirde, $\bar{\phi}$ σK özelliğine sahip olup

$$C_1S = C_1W = \bar{\phi}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. λ bir σB özelliğine sahip olsun ve $f_n : \lambda \rightarrow \lambda$ dönüşümünü de

$$f_n(x) = x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{[k]}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde, ([33], 7.0.2)'den $\{f_n\}$ noktasal sınırlı olduğundan eşsüreklı olur. ([33], 7.0.3)' den ϕ için $f_n \rightarrow 0$ olunca, $\bar{\phi}$ için de $f_n \rightarrow 0$ olacağından böylece

$$C_1 S = C_1 W = \bar{\phi}$$

eşitliği sağlanır. □

Aşağıdaki iki teoremi, sırasıyla Teorem 4.3.7 (σb yerine σs alınır) ve Teorem 4.3.8 ile benzerliklerinden dolayı ispatsız vereceğiz.

Teorem 4.3.10. $\lambda \supset \phi$ FK uzayı için

$$C_1 F^+ = \lambda^{f\sigma}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 4.3.11. $\lambda \supset \phi$ ve μ uzayları $\bar{\phi} \subset \mu \subset \lambda$ kapsamalarının geçerli olduğu FK uzaylar olsun. Bu takdirde,

$$C_1 F_\mu^+ = C_1 F_\lambda^+$$

eşitliği sağlanır.

Lemma 4.3.3. λ uzayı $\bar{\phi}$ uzayının σK özelliğine sahip olduğu bir FK uzay olsun. Bu takdirde,

$$C_1 F^+ = \bar{\phi}^{\sigma\sigma}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $C_1 F^+ = \lambda^{f\sigma}$ olduğunu Teorem 4.3.10 ile belirtmiştik. Yine ([33], 7.2.4)' den $\lambda^f = (\bar{\phi})^f$ eşitliği sağlanıp burada her iki tarafın σ dualini alınırsa $\lambda^{f\sigma} = (\bar{\phi})^{f\sigma}$ elde edilir. [18, Teorem 1.9] dan istenen sonuca ulaşılır. □

Teorem 4.3.12. $\lambda \supset \phi$ bir FK uzay olsun. λ uzayının $F\sigma K$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart, $\bar{\phi}$ uzayının σK özelliğine sahip olması ve $\lambda \subset \bar{\phi}^{\sigma\sigma}$ kapsamasının sağlanmasıdır.

İspat. λ uzayı $C_1F \subset C_1B$ olduğundan σB özelliğine sahip olup Teorem 4.3.9 gereğince de σK özelliğine sahiptir. Bu durum Lemma 4.3.3 ile birlikte düşünülünce gereklilik sağlanmış olur. Yeterlilik ise Lemma 4.3.3 ile verilmiştir. $\square$

Teorem 4.3.13. $\lambda \supset \phi$ bir FK uzay olsun. Bu takdirde, aşağıda verilenler denktir.

- (i) λ , $F\sigma K$ özelliğine sahiptir,
- (ii) $\lambda \subset C_1S^{\sigma\sigma}$,
- (iii) $\lambda \subset C_1W^{\sigma\sigma}$,
- (iv) $\lambda \subset C_1F^{\sigma\sigma}$,
- (v) $\lambda^\sigma = C_1S^\sigma$,
- (vi) $\lambda^\sigma = C_1F^\sigma$.

İspat. Açık olarak, (ii) $\Rightarrow$ (iii) ve (iii) $\Rightarrow$ (iv) olması $C_1S \subset C_1W \subset C_1F$ gerçeğinden ileri gelir. Şimdi (iv) doğru olsun. Bu takdirde,

$$\lambda^f \subset C_1F^\sigma = \lambda^{f\sigma\sigma} \subset \lambda^\sigma$$

olacağından [18, Theorem 1.9] dan (i) doğru olur. Eğer (i) sağlanırsa Teorem 4.3.12 gereğince $\bar{\phi} = C_1S$ ve böylece (ii) gerçekleşir. (v) ve (vi) önermelerinin denkliği ise açıktır. $\square$

Teorem 4.3.14. $\lambda \supset \phi$ bir FK uzay olsun. Bu takdirde, aşağıda verilenler denktir.

- (i) λ , $S\sigma K$ özellikli,
- (ii) λ , σK özellikli,
- (iii) $\lambda^\sigma = \lambda'$.

İspat. Açık olarak, (ii) $\Rightarrow$ (i) gerektirmesi geçerlidir. Karşıt olarak eğer λ uzayı $S\sigma K$ özelliğine sahip ise, Teorem 4.3.4 ile $C_1W \subset \bar{\phi}$ olup AD özelliğine sahip olmalıdır.

Ayrıca $C_1W \subset C_1B$ kapsaması ile λ uzayının üstelik σB özelliğine sahip olduğunu anlarız. Böylece de Teorem 4.3.9 ile λ uzayı σK özelliğine sahiptir. Bu ise (i) $\Leftrightarrow$ (ii) olduğunu gösterir. Şimdi (iii) önermesinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, $f \in \lambda'$ için öyle bir $u \in \lambda^\sigma$ vardır ki her $x \in \lambda$ için,

$$f(x) = \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k u_j x_j$$

eşitliği geçerlidir. $f(\delta^j) = u_j$ olduğundan her $x \in C_1W$ için (iii) $\Rightarrow$ (i) olduğu görülür. Son olarak, (ii) $\Rightarrow$ (iii) ise [17]'den görülür. $\square$

Teorem 4.3.15. $\lambda \supset \phi$ bir FK uzay olsun. Bu takdirde, aşağıda verilenler denktir.

- (i) C_1W , λ uzayında kapalıdır ,
- (ii) $\bar{\phi} \subset C_1B$,
- (iii) $\bar{\phi} \subset C_1F$,
- (iv) $\bar{\phi} = C_1W$,
- (v) $\bar{\phi} = C_1S$,
- (vi) C_1S , λ uzayında kapalıdır .

İspat. Teorem 4.3.9 gereğince $\bar{\phi}$ uzayının σK özelliğine sahip olması ile $\bar{\phi} \subset C_1S$ olacağından (ii) $\Rightarrow$ (v) sağlanır. Karşıt kapsama ise Teorem 4.3.4 ile görülür. Diğer taftan,

$$C_1S \subset C_1W \subset \bar{\phi}, C_1W \subset C_1F \subset C_1B;$$

olduğundan da (v) $\Rightarrow$ (iv), (iv) $\Rightarrow$ (iii) ve (iii) $\Rightarrow$ (ii) gerçekleşir. Yine,

$$\phi \subset C_1S \subset C_1W \subset \bar{\phi}$$

olduğundan (i) $\Rightarrow$ (iv) and (vi) $\Rightarrow$ (v) olur. Son olarak (iv) $\Rightarrow$ (i) ve (v) $\Rightarrow$ (vi) gerektirmelerinin sağlandığını da görmek zor değildir. $\square$

KAYNAKLAR

- [1] B. Altay and F. Başar, *Certain topological properties and duals of the matrix domain of a triangle matrix in a sequence space*, J. Math. Anal. Appl. **336**(1)(2007), 632–645.
- [2] G. Bennett, *The Gliding humps technique for FK-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 166 (1972), 285-292.
- [3] G. Bennett, *A New class of sequence spaces with applications in summability theory*, Journal für Mathematik, 266 (1974), 49-75.
- [4] G. Bennett, *Sequence spaces with small β -duals*, Math. Z., 194 (1987), 321-329.
- [5] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press. New York, Oxford, 2000.
- [6] J. Boos, D. J. Fleming, *Gliding hump properties and some applications*, Internat. J. Math. and Math. Sci., 18/1 (1995), 121-132.
- [7] M. Buntinas, *Convergent and bounded Cesàro sections in FK-spaces*, Math. Z., 121 (1971), 191-200.
- [8] M. Buntinas, *On sectionally dense summability fields*, Math. Z., 132 (1973), 141-149.
- [9] M. Buntinas, *On Toeplitz sections in sequence spaces*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 78 (1975), 451-460.
- [10] M. Buntinas, *Product of sequence spaces*, Analysis, 7 (1987), 293-304.
- [11] M. Buntinas and G. Goes *Products of sequence spaces and multipliers*, Radovi Matematički, 3 (1987), 287-300.

- [12] İ. Dağadur, *On Some subspaces of an FK space*, Mathematical Communications, 7 (2002), 15-20.
- [13] R. Devos, *Combinations of distinguished subsets and conullity*, Math. Z., 192 (1986), 447-451.
- [14] D. J. Fleming, *Unconditional Toeplitz sections in sequence spaces*, Math. Z., 194 (1987), 405-414.
- [15] D. J. Fleming, *FK-multiplier spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 125(1)(1997), 175-181.
- [16] D. J. H. Garling, *The β - and γ -duality of sequence spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc., 63 (Jan. 1967), 963-981.
- [17] G. Goes and S. Goes, *Sequences of bounded variation and sequences of Fourier coefficients. I*, Math. Z., 118 (1970), 93-102.
- [18] G. Goes, *Summan von FK-Rumen funktionale Abschnittskonvergenz und Umkehrsatz*, Tohoku. Math. Journ., 26(1974), 487-504.
- [19] K.-G. Grosse-Erdmann, *On ℓ_1 -invariant sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., 262 (2001), 112-132.
- [20] H. G. İnce, *Combinations of distinguished subsets and Cesàro conullity*, Comm. Math. Anal., 1(2) (2006), 91-96.
- [21] P. K. Kamthan and M. Gupta, *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1981.
- [22] R. Mcgivney, W. H. Ruckle, *Multiplier algebras of biorthogonal Systems*, Pacific J. Math., 29 (1969), 375-387.
- [23] D. Noll and W. Stadler, *Sliding hump technique and spaces with the Wilansky property*, Proc. Amer. Math. Soc., 105/4 (Apr. 1989), 903-910.

- [24] D. Noll, *Sequence spaces with separable γ -duals*, Arch. Math. (Basel), 54/1 (1990), 73-83.
- [25] M. Raphael, *On Three Types of Sections in Topological Sequence Spaces*, Master Thesis Of Science in the Department of Mathematics, Simon Fraser University, June 1977.
- [26] W. H. Ruckle, *Topologies on sequence spaces*, Pacific J. Math., 42 (1972), 235-249.
- [27] W. H. Ruckle, *A Universal topology for sequence spaces*, Math. Ann., 236 (1978), 43-48.
- [28] W. H. Ruckle, *Sequence Spaces*, Pitman, London, 1981.
- [29] A. K. Snyder, *Universal families for conull FK spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 284 (Jul.1984), 389-399.
- [30] A. K. Snyder, *Conull and coregular FK spaces*, Math. Z., 90 (1965), 376-381.
- [31] A. Wilansky, *Functional Analysis*, Blaisdell Press, 1964.
- [32] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw Hill, New York, 1978.
- [33] A. Wilansky, *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [34] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Z., 53 (1951), 463-487.
- [35] K. Zeller, *Abschnittskonvergenz in FK-Rume*, Math. Z., 55 (1951), 55-70.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılı Muş doğumludur. İlköğrenimini Adana’ da, orta öğrenimini ise Düziçi Anadolu Öğretmen Lisesi’ nde tamamladıktan sonra 2001 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Bölümü Matematik Öğretmenliği programını kazandı. 2006 yılında bu programdan mezun oldu. 2006-2008 yılları arasında matematik öğretmenliği görevini yürütürken, 2007 yılında, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Ailedeki üç matematikçiden ikincisi olan Mahmut KARAKUŞ halen Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.