T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABA KÜMELER VE UYGULAMALARI

Ahmet TOPAL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Matematik Mühendisliği Programı

Danışman

Doç. Dr. Yasemen UÇAN

Eş Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Nilgün GÜLER BAYAZIT

Nisan, 2022

T.C.

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABA KÜMELER VE UYGULAMALARI

Ahmet TOPAL tarafından hazırlanan tez çalışması 15.04.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, Matematik Mühendisliği Programı **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Yasemen UÇAN Yıldız Teknik Üniversitesi Danışman	Dr. Öğr. Üyesi Nilgün GÜLER BAYAZIT Yıldız Teknik Üniversitesi Eş-Danışman

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Yasemen UÇAN, Danışman
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Prof. Dr. Nazmiye YAHNİOĞLU, Üye
Yıldız Teknik Üniversitesi _____

Doç. Dr. Mustafa TELCİ, Üye
Trakya Üniversitesi _____

Danışmanım Doç. Dr. Yasemen UÇAN sorumluluğunda tarafımca hazırlanan Kaba Kümeler ve Uygulamaları başlıklı çalışmada veri toplama ve veri kullanımında gerekli yasal izinleri aldığımı, diğer kaynaklardan aldığım bilgileri ana metin ve referanslarda eksiksiz gösterdiğimi, araştırma verilerine ve sonuçlarına ilişkin çarpıtma ve/veya sahtecilik yapmadığımı, çalışmam süresince bilimsel araştırma ve etik ilkelerine uygun davrandığımı beyan ederim. Beyanımın aksinin ispatı halinde her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ahmet TOPAL

İmza

Bu çalışma, Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Proje Koordinatörlüğü'nün FYL-2020-4001 numaralı projesi ile desteklenmiştir.

Aileme...

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım süresince yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, tecrübeleri ve değerli fikirleri ile bu süreçte beni en iyi şekilde yönlendirmeye çalışan ve araştırmalarımın her aşamasında yol gösterici olan değerli danışman hocalarım Doç. Dr. Yasemen Uçan'a ve Dr. Öğr. Üyesi Nilgün Güler Bayazıt'a teşekkürü bir borç bilirim.

Değerli jüri üyeleri hocalarım Prof. Dr. Nazmiye Yahnioğlu ve Doç. Dr. Mustafa Telci'ye kıymetli vakitlerini ayırarak tez çalışmama göstermiş oldukları ilgiye binaen öneri ve düzeltmeleri için teşekkür ederim.

Hayatımın her noktasında koşullar ne olursa olsun arkamda daima desteklerini hissettiğim, bugünlere gelmemde büyük bir fedakarlık ve özveri gösteren aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Parçası olmaktan büyük bir mutluluk duyduğum İstanbul Teknik Üniversitesi'ne desteklerinden ve çalışmalarım esnasında sundukları her türlü imkandan ötürü teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca tez çalışmalarımı FYL-2020-4001 proje numarası ile "Yıldız Teknik Üniversitesi Yüksek Lisans Araştırma Projesi" kapsamında desteklediği için Yıldız Teknik Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinatörlüğüne teşekkür ederim.

Ahmet TOPAL

İÇİNDEKİLER

SİMGE LİSTESİ vii
KISALTMA LİSTESİ ix
ŞEKİL LİSTESİ x
TABLO LİSTESİ xi
ÖZET xii
ABSTRACT xiv
1 GİRİŞ 1
1.1 Literatür Özeti 1
1.2 Tezin Amacı 5
1.3 Hipotez 5
2 YÖNTEM 6
2.1 Karar Tablosu 6
2.2 Klasik Kaba Küme Yaklaşımı 6
2.2.1 İndirgemeler ve Çekirdek Küme 13
2.2.2 Ayırt Edilebilirlik Matrisleri ve Fonksiyonları 17
2.2.3 Karar Kuralları 20
2.3 Baskın Kaba Küme Yaklaşımı 23
2.3.1 İndirgemeler ve Çekirdek Küme 30
2.3.2 Karar Kuralları 32
2.3.3 Nitelikler için Tercih Sıraları 40
2.3.4 Sınıflandırma Yöntemi 45
2.4 Eksik Nitelik Değerleri 54
3 DENEYSEL ÇALIŞMA VE SONUÇ 62
3.1.1 Deneysel Tasarım 62
3.1.2 Deneysel Sonuçlar 69
4 SONUÇ VE ÖNERİLER 70
KAYNAKÇA 71
TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR 75

SİMGE LİSTESİ

$F(M)$	Ayırt edilebilirlik fonksiyonu
$M(Y)$	Ayırt edilebilirlik matrisi
β	Ayırt edilemezlik bağıntısı
f	Bilgi fonksiyonu
$\emptyset$	Boş küme
$\underline{Q}(\cdot)$	Baskın kaba küme için Q nitelikler kümesine göre alt yaklaşımlar
$\overline{Q}(\cdot)$	Baskın kaba küme için Q nitelikler kümesine göre üst yaklaşımlar
$BN_Q(\cdot)$	Baskın kaba küme için sınır bölgesi
$BKKY_{mv_j}$	Baskın kaba küme yaklaşımının eksik verilere uyarlanmasındaki j. yaklaşım
D_Q, $\mathfrak{Q}_Q$	Baskınlık bağıntıları
D_{Q_j}, $\mathfrak{Q}_{Q_j}$	$BKKY_{mv_j}$ yaklaşımındaki baskınlık bağıntıları
$D_{Q_j}^-$, $\mathfrak{Q}_{Q_j}^-$	$BKKY_{mv_j}$ yaklaşımındaki Q-ezen kümeler
$D_{Q_j}^+$, $\mathfrak{Q}_{Q_j}^+$	$BKKY_{mv_j}$ yaklaşımındaki Q-ezilen kümeler
$ÇEK_{Cl}$	Cl parçalanması için çekirdek küme
IND_{Cl}	Cl parçalanması için indirgenmiş nitelikler kümesi
$ÇEK_D(C)$	C nitelik kümesinin D-çekirdeği
$IND_D(C)$	C nitelik kümesinin D-indirgenmiş nitelikler kümesi
$[\cdot]$	Denklik sınıfları
$*$	Eksik nitelik değeri
σ_e	e elemanı tarafından kapsanan kuralların kümesi
Neg_{σ_e}	e elemanı tarafından kapsanan negatif kurallar kümesi
Pos_{σ_e}	e elemanı tarafından kapsanan pozitif kurallar kümesi
ψ	Elementer koşul
$F_D(C)$	Görece ayırt edilebilirlik fonksiyonu
$M_D(C)$	Görece ayırt edilebilirlik matrisi
I	İndeks kümesi
KT	Karar tablosu
E	Karar tablosundaki elemanlar veya nesneler kümesi
X	Karar tablosundaki nitelikler veya değişkenler kümesi
X_c	Koşul nitelikleri kümesi
X_d	Karar nitelikleri kümesi
SYU	Klasik kaba küme için sınır bölgesi
μ_U	Kaba üyelik fonksiyonu
K	Karar kuralı
$\widetilde{K}$	Karar kuralları kümesi
x_d^n	Karar niteliğinin n değerinden dönüştürülen karar tablosu için karar değişkeni
$r_{\geq 0}^n$	Karar niteliğinin n değerinden dönüştürülen karar tablosundan çıkarılan ve sınıfın değiline atanan kural
$r_{\geq 1}^n$	Karar niteliğinin n değerinden dönüştürülen karar tablosundan çıkarılan ve sınıfın kendisine atanan kural
Cl_n	Karar sınıfları

$Cl_n^{\geq}$	Karar sınıflarının artan birleşimi
$Cl_n^{\leq}$	Karar sınıflarının azalan birleşimi
Cl	Karar sınıflarının kümesi
↑	Kazanç niteliği
β_j	$KKKY_{mv_j}$ yaklaşımındaki ayırt edilemezlik bağıntısı
φ_K	K kuralını kapsayan elemanların kümesi
$KKKY_{mv_j}$	Klasik kaba küme yaklaşımının eksik verilere uyarlanmasındaki j. yaklaşım
Ψ	Kuralın koşul kısmı olarak kabul gören elementer koşulların kümesi
$\lvert\cdot\rvert$	Kümenin eleman sayısı
↓	Maliyet niteliği
$\wedge$	Mantıksal ve operatörü
$\vee$	Mantıksal veya operatörü
V	Niteliklerin veya değişkenlerin aldığı değerler kümesi
EC	Olası tüm elementer koşullar kümesi
D_Q^-	Q-ezen küme
D_Q^+	Q-ezilen küme
γ_Q	Q kriterler kümesine göre yaklaşımın kalitesi
$ekü s(V_q)$	q niteliğine ait değerler kümesinde en tercih edilen değer
$ebas(V_q)$	q niteliğine ait değerler kümesinde en tercih edilmeyen değer
$GÜÇ_r$	r kuralının görece gücü
$GÜV_r$	r kuralının güvenilirliği
ρ	Skor fonksiyonu,
ρ^-	Skor fonksiyonunun negatif parçası
ρ^+	Skor fonksiyonunun pozitif parçası
$NEG(U)$	U kümesinin negatif bölgesi
$POZ(U)$	U kümesinin pozitif bölgesi
S_x	x niteliğine göre üstünlük bağıntısı
α_Y	Y nitelik kümesine göre yaklaşımın doğruluğu
$ÇEK(Y)$	Y nitelik kümesinin çekirdek kümesi
$IND(Y)$	Y nitelik kümesinin indirgenmiş nitelikler kümesi
$\underline{YU}$	Y nitelikler kümesine göre U kümesi için alt yaklaşım
$\overline{YU}$	Y nitelikler kümesine göre U kümesi için üst yaklaşım

KISALTMA LİSTESİ

BBD	Beton Basınç Dayanımı
BKKY	Baskın Kaba Küme Yaklaşımı
ÇKKA	Çok Kriterli Karar Analizi
DT	Decision Tree (Karar ağacı)
DT-BKKY	Değişken Tutarlılık Seviyesinde Baskın Kaba Küme Yaklaşımı
LERS	Learning from Examples Based on Rough Set Theory
MAE	Mean Absolute Error (Ortalama Karesel Hata)
MLP	Multilayer Perceptron (Çok Katmanlı Algılayıcı)
OLM	Ordinal Learning Model
OSDL	Ordinal Stochastic Dominance Learner
PSO	Parçacık Sürü Optimizasyonu
ROSE	Rough Set Data Explorer
SMOTE	Synthetic Minority Oversampling Technique
SVM	Support Vector Machine (Destek Vektör Makinesi)
MPa	Megapascal
w/c	Su-çimento oranı

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1 Kaba küme teorisine ait temel tanımların grafiksel gösterilimi..... 8
Şekil 2.2 Kaba üyelik fonksiyonunun tasviri 11
Şekil 2.3 DomLEM algoritmasına ait sözde kod..... 38
Şekil 2.4 DomLEM için yardımcı algoritmalar..... 38
Şekil 2.5 Tablo 2.5'den çıkarılan minimal kesin karar kuralları..... 48
Şekil 2.6 Tablo 2.12'den çıkarılan minimal kesin karar kuralları..... 51
Şekil 2.7 Tablo 2.13'den üretilen minimal kesin karar kuralları..... 52
Şekil 2.8 Tablo 2.14'den üretilen minimal kesin karar kuralları..... 52
Şekil 3.1 SMOTE algoritması 65
Şekil 3.2 Karar tabloları için sınıfın kendisi ile değiline atanan kural örnekleri..... 66

TABLO LİSTESİ

Tablo 2.1 Örnek bir karar tablosu 6
Tablo 2.2 Müzik okuluna öğrenci seçimine yönelik bir karar tablosu 7
Tablo 2.3 Hastaların grip durumuna ilişkin karar tablosu 14
Tablo 2.4 Arabaların birtakım teknik özelliklerine göre müşteri görüşleri 23
Tablo 2.5 Banka müşterilerinin kredi kart başvurularının onaylanma durumu . 41
Tablo 2.6 Düşük sınıf için karar nitelik değerlerinin dönüşümü 42
Tablo 2.7 Orta sınıf için karar nitelik değerlerinin dönüşümü 42
Tablo 2.8 Yüksek sınıf için karar nitelik değerlerinin dönüşümü 42
Tablo 2.9 Düşük sınıf için nümerik koşul niteliklerinin dönüşümü 43
Tablo 2.10 Orta sınıf için nümerik koşul niteliklerinin dönüşümü 43
Tablo 2.11 Yüksek sınıf için nümerik koşul niteliklerinin dönüşümü 43
Tablo 2.12 Düşük sınıf için kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü 44
Tablo 2.13 Orta sınıf için kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü 44
Tablo 2.14 Yüksek sınıf için kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü 45
Tablo 2.15 Eksik nitelik değerine sahip karar tablosu 56
Tablo 3.1 Beton basınç dayanımı veri kümesindeki niteliklere ait bilgiler 62
Tablo 3.2 Betonun basınç dayanımına göre sınıflandırılması 63
Tablo 3.3 Beş adet beton örneğinin karar tablosu formunda gösterimi 64
Tablo 3.4 Orta karar sınıfı için Tablo 3.3'ün dönüşümü 64
Tablo 3.5 Her bir karar tablosundan çıkarılan kural sayıları 67
Tablo 3.6 Karmaşıklık matrisi 67
Tablo 3.7 Yüksek dayanımlı beton eldesinde nitelikler için miktar aralıkları 68

ÖZET

Kaba Kümeler ve Uygulamaları

Ahmet TOPAL

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Yasemen UÇAN

Eş-Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nilgün GÜLER BAYAZIT

Çağımızda veri, yapay zekâ uygulamalarının merkezinde yer alan önemli bir bileşen haline gelmiştir. Veriye bu derece ilginin arttığı bir ortamda hem uygulama hem de teorik seviyedeki çalışmalarda önemli artışlar yaşanmaktadır. Pawlak (1982) tarafından ortaya atılan kaba küme teorisi, ayırt edilemezlik bağıntısı temelinde veriden faydalı ve anlamlı bilgilerin elde edilmesine yönelik matematiksel bir araçtır. Gerçek dünya verilerinin deterministik bir bağlamdan uzak olup belirsizlikler içermesi bu teorinin temel motivasyon kaynağını oluşturmaktadır. Özellikle veriden karar kurallarına dayalı gizli bilgilerin çıkarılabilmesi, nitelik ve örnek seçimi, eksik veriler ile çalışabilme kabiliyetinden ötürü tercih edilmektedir. Kaba kümeler, ekonomi ve finansta, tıpta, robotik ve mühendislikte, sinyal ve görüntü işleme gibi alanlarda yaygın bir kullanıma sahiptir. Lakin klasik kaba küme teorisi öznitelik alanlarının tercih sıraları dikkate alındığında baskınlık ilkesinden kaynaklanan tutarsızlıkla başa çıkmakta yetersiz kalmaktadır. Bu sebeple çok kriterli karar verme analizi için klasik kaba küme teorisinin bir genişlemesi olarak baskın kaba küme yaklaşımı ortaya atılmıştır. Bu tez çalışması kapsamında, ilk bölümde klasik kaba kümeler ile baskın kaba kümeler üzerine literatür incelemesi yapılmıştır. Tezin amacı ve hipotez de bu bölümde sunulmuştur. İkinci bölümde klasik kaba küme yaklaşımı ile baskın kaba küme yaklaşımı hakkında bilgi verilmiştir. Üçüncü bölümde deneysel tasarım ve deneysel sonuçlara yer verilmiştir.

Deneysel çalışmada “Eğer … ise …” şeklinde karar kurallarının çıkarılması ve karar verme sürecinde çıkarılan bu kuralları kullanan bir karar destek modelini tasarlamak amaçlanmıştır. Bu doğrultuda veri kümesi test ve eğitim olmak üzere iki parçaya ayrılmıştır. Eğitim kümesi üzerinden DomLem algoritması kullanılarak karar kuralları çıkarılmıştır. Bu kurallar kullanılarak test kümesindeki örneklerin her bir karar sınıfına ait olma skorları hesaplanmış ve her bir örnek en yüksek skora sahip olduğu karar sınıfına atanmıştır. Örneklerin gerçek ve tahmin edilen sınıflarını kullanarak karmaşıklık matrisi oluşturulmuştur. Bu matris yardımıyla çıkarılan karar kurallarının test kümesi üzerindeki performansı değerlendirilmiştir. Son olarak, bir örneğin karar sınıfını tayin etmek için kullanılan skor hesabının matematiksel formülasyonundan faydalanılarak veri kümesindeki bir karar sınıfı için niteliklerin optimum düzeyleri elde edilerek tablo halinde sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kaba kümeler, baskın kaba kümeler, karar kuralları, karar tablosu

ABSTRACT

Rough Sets and Its Applications

Ahmet TOPAL

Department of Mathematical Engineering

Master of Science Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Yasemen UÇAN

Co-advisor: Assist. Prof. Dr. Nilgün GÜLER BAYAZIT

In today's world, data has become an important element at the heart of the artificial intelligence applications. In an environment where the interest in data has been increased so much, both applied and theoretical studies have experienced tremendous growth. Rough set theory, introduced by Pawlak (1982), is a mathematical tool to extract useful and meaningful information from data based on the indiscernibility relation. The main motivation for this theory is that real-world data are far from deterministic in content and contains ambiguity. It is particularly preferred for its ability to extract hidden information based on decision rules from data, attributes, and sample selection, and to process missing values. Rough sets are used in a variety of fields, including business and finance, medicine, robotics and engineering, and signal and image processing. However, classical rough set theory is insufficient to deal with the inconsistency arising from the dominance principle when the preference order of attributes is considered. Therefore, dominance based rough set approach was proposed as an extension of the classical rough set theory for multicriteria decision analysis. In this thesis, a literature review on the classical rough sets and dominance based rough sets was provided in the first chapter of this thesis. The objective of the thesis and the hypothesis were also presented in this

part. In the second part, information about the classical rough set approach and the dominance based rough set approach was given. In the third part, the experimental design and experimental results were presented. The goal of the experimental design was to extract decision rules in the form of "IF … THEN …" and to build a decision-support model that incorporates these rules into the decision-making process. Accordingly, the dataset was divided into two parts: the training set and the test set. Decision rules were extracted from the training set using the DomLem algorithm. Based on these rules, the scores for belonging to each decision class of the samples in the test set were calculated and assigned to the decision class with the highest score. The confusion matrix was created by considering the actual and predicted classes of test samples. The performance of the extracted decision rules was evaluated using this matrix on the test set. Finally, the optimal amounts of the attributes for a decision class in the dataset were determined and presented in tabular form, using the mathematical formulation of the score calculation used to determine the decision class of a sample.

Keywords: Rough sets, dominance based rough sets, decision rules, decision table

1
GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Belirsiz veya kesin olmayan kavramlar ile başa çıkmak amacıyla kaba küme teorisi 1982 yılında Pawlak [1] tarafından ortaya atılmıştır. Bu teorinin özünü yaklaşım uzayında ayırt edilemezlik bağıntısına göre tanımlanan alt ve üst yaklaşım operatörleri oluşturmaktadır. Ayırt edilemezlik bağıntısı, bir denklik bağıntısı olup iki veya daha fazla nesnenin aldığı değerler bağlamında birbirinden ayırt edilemediği durumu ifade etmektedir. Kaba küme fikri veri tabanlarını kullanarak bilgi keşfini gerçekleştirmek için matematiksel bir araç olarak önem arz etmektedir. Bu kümeleri diğer matematiksel araçlardan ayıran en önemli nokta, belirsiz durumlarla başa çıkmak için problemin ötesinde herhangi bir ön bilgiye ihtiyaç duymamasıdır [2].

Kritik durumlarda karar alma ve karar verme süreçlerinin etkin bir biçimde yapılabilmesi büyük önem taşımaktadır. Bunun için eldeki verilerin doğru bir şekilde işlenmesi ve analiz edilmesi kayda değer bir durum olarak görülmektedir. Öte yandan günümüz dünyasında kişi veya kurumların bir veri silsilesi içerisinden kendilerine faydalı olabilecek yeni bilgileri keşfetmek istemeleri hem kişisel hem de kurumsal stratejik faaliyetlerin maksimize edilmesi açısından ön plana çıkmaktadır. Ancak bu süreçler bağlamında toplanan verilerin eksik olması, belirsiz olması veya kesinlik içermemesi bu süreçlerin yönetimini giderek zorlaştırmaktadır.

Kaba küme yöntemleri makine öğrenmesi ve veri madenciliği gibi alanlarda hibrit çözümlerin bir parçası olarak da uygulanmaktadır. Bilhassa veri kümesini en iyi şekilde yansıtabilecek örneklerin ve/veya özniteliklerin seçimi, karar kurallarına dayalı olarak veriden yeni bilgilerin keşfedilmesi ve eksik değer içeren veri kümeleri üzerindeki başarısından dolayı tercih edilmektedir. Diğer yandan kaba kümelerin örüntü tanıma, uzman sistemler ve karar destek sistemleri gibi alanlarda da yaygın bir kullanıma sahip olduğu söylenilebilir. Literatür incelendiğinde teorik alanda kaba kümeleri konu alan çalışmaların fazlalığı göze çarpmasına karşın

mühendislikten sosyal bilimlere kadar uzanan geniş bir yelpazede hatırı sayılır derecede uygulamaya yönelik çalışmalar yapılmıştır. Uygulamalarda kullanışlı ve oldukça geniş bir kapsama sahip LERS (Learning From Examples Based on Rough Set Theory) adı verilen bir sistem Grzymala-Busse [3] tarafından tasarlanmıştır. Sistemde klasik kaba küme yaklaşımına göre alt ve üst yaklaşımları hesaplama, kesin ve olası kuralları çıkarma, tutarsız verileri yönetebilme gibi alt modüller yer almıştır. Slowinski ve Zopounidis [4] şirketlerin iflas etme risklerini kaba küme teorisi tabanında değerlendiren yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. Çalışmada otuz dokuz adet şirket, on iki koşul niteliği ve bir karar niteliği bağlamında ele alınmıştır. Karar sınıfları bir uzman tarafından kabul edilebilir risk, belirsiz ve kabul edilemez risk olmak üzere üçe ayrılmıştır. Kaba küme teorisinin uygulanmasına imkân verecek şekilde sürekli değer içeren ilk altı nitelik kesikli hale getirilmiş ve her bir karar sınıfına yönelik sonuçlar, on beş kural ve on bir kural algoritmaları ile çıkarılan karar kuralları çerçevesinde yorumlanmıştır. Lee ve Vachtsevanos [5] kaba küme teorisini, özellik çıkarımı ve kural indirgeme kapsamında otomotiv camı denetim sistemine uygulamışlardır. Ön işleme aşaması geleneksel görüntü işleme teknikleri ile gerçekleştirilmiştir. Ardından özellik çıkarımı sonucunda öznitelikler kümesinin içerisinden bir özellik vektörü seçilmiştir. Sistemdeki yanlış alarm oranını azaltıp doğruluğu arttırmak amacıyla çıkarılan minimum karar kuralları sisteme entegre edilmiştir. Wang vd. [6] çalışmalarında nitelik seçimi için kaba kümeler ile uyku problemi etmenlerinin belirlenmesinde korelasyon tabanlı mahalanobis uzaklığını birleştiren bir yaklaşım sunmuşlardır. Deneysel sonuçlar önerilen yaklaşımın, lojistik regresyon, yapay sinir ağları, destek vektör makineleri ve C4.5 karar ağaçları gibi makine öğrenmesi yöntemlerinden duyarlılık, özgüllük ve g-skor açısından daha iyi olduğunu ortaya koymuştur. Cui ve Cui [7] geniş ölçekli bir anketten toplanan verileri kaba küme yaklaşımı ile analiz ederek tüketicilerin yerli ve yabancı marka tercihlerine yönelik davranışlarını incelemişlerdir. Pena vd. [8] havacılık sektöründe uçak parça arızalarını öngörmek için kaba küme tabanlı bir model kullanmışlardır. Model nitelik indirgeme, kural çıkarımı ve kural indirgeme olmak üzere üç aşamayı kapsayacak şekilde kurulmuştur. Ayrıca modelin daha doğru tahminler yapabilmesi ve kural kalitesini arttırmak için arızanın meydana gelme zamanına bağlı olarak bir ağırlık fonksiyonu kullanılmıştır. Rajesh vd. [9] görsel veriler üzerinde beyin tümörlerinin teşhis edilmesi ve sınıflandırılmasına yönelik

bir sistemi özellik çıkarma ve tümör sınıflandırma bölümlerinden oluşacak şekilde tasarlamışlardır. Özellik çıkarma işlemi, kaba küme tabanlı yapılırken sınıflandırma da parçacık sürüsü optimizasyonu (PSO) tabanlı yapay sinir ağlarını kullanmışlardır. Yao vd. [10] finansal zaman serisi verilerini kaba küme yaklaşımına dayalı analiz etmişlerdir. Çalışmada, kişilerin piyasaya yönelik karar ve davranışlarında etkin olabilmeleri için kaba küme yaklaşımıyla çıkarılan karar kurallarını, kuralın gücü ve kararlılığına bağlı olarak özgün bir şekilde en çoktan en az etkiliye doğru sıralamışlardır. Goh ve Law [11] turizm sektörüne olan talebin artış ve azalışını kaba küme yaklaşımı ile çıkardıkları karar kurallarına göre değerlendirmişlerdir. Talepteki artış ve azalışı öngörebilmek adına en belirleyici altı faktör göz önüne alınmıştır. Verilerin analiz edilmesinde ROSE [12] yazılımını kullanmışlardır. Bunların yanı sıra su kalite analizinde [13], tüketici şikayetlerinin değerlendirilmesinde [14], tıbbi vakaların incelenmesinde [15-16], tarım sektöründe [17] klasik kaba küme yaklaşımını kullanan çalışmalar mevcuttur.

Uzun bir süre boyunca klasik kaba küme yaklaşımı niteliklerin tercih sırasının dikkate alınmadığı sınıflandırma problemleriyle sınırlı kalmış ve baskınlık prensibinden kaynaklanan tutarsızlıkların üstesinden gelememiştir [18]. Bu sebeple Greco vd. [18] tarafından klasik kaba kümelerdeki ayırt edilemezlik bağıntısının yerine baskınlık bağıntısını benimseyen baskın kaba küme yaklaşımı (BKKY) geliştirilmiştir. Bu yaklaşım çok kriterli karar verme analizi (ÇKKA) için klasik kaba küme teorisinin bir genişlemesidir.

Literatürde klasik kaba kümelerin yetersiz kaldığı noktaları iyileştirmek için tanıtılan BKKY kullanılarak birçok uygulama yapılmıştır. Liou [19] bir havayolu şirketinde rekabete karşı müşteri kaybını en aza indirgemek amacıyla değişken tutarlılık seviyesinde baskın kaba küme yaklaşımından (DT-BKKY) faydalanarak müşterilerin davranışlarını araştırmıştır. Bu çalışmada müşteriler satın alma alışkanlıklarına göre üç farklı sınıfa ayrılmış ve müşterilerin kararını etkileyen yüksek bağımlılık gösteren nitelikler faktör analizi kullanılarak birleştirilmiştir. Karar kurallarını %90 tutarlılık seviyesinde yani %10 tutarsızlığa izin verecek şekilde çıkararak tahmin modelini inşa etmiştir. [19] çalışmasına benzer olarak Liou ve Tzeng [20] anket çalışmasından elde edilen verileri havayolu müşterilerinin davranış ve bağlılıklarını gözlemlemek için BKKY ile incelemişlerdir. Ayrıca

çalışmada aynı veriler üzerinde diskriminant analizi de uygulanmış olup deneysel sonuçlar BKKY'nin daha iyi bir performansa sahip olduğunu göstermiştir. Greco vd. [21] şirketlerin iflas etme risklerinin klasik kaba küme yaklaşımı ile incelendiği [4] çalışmasındaki verilere baskınlık prensibine dayalı kaba küme yaklaşımını uygulamışlardır. Baskınlık bağıntısına dayalı kaba kümeleri, ayırt edilemezlik bağıntısına dayalı kaba kümeler ile kıyaslayarak üstünlüklerini açıklamışlardır. Couto [22] bir şirketin performansını daha iyi kavrayabilmek için beş yüz şirket arasından en büyük yirmi şirketin net kazancını finansal ve finansal olmayan göstergeler üzerinden ele almıştır. Çalışma iki aşamadan oluşacak şekilde jMAF [23] yazılımı kullanılarak gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada tüm nitelikler göz önüne alınarak kurallar çıkarılırken, ikinci aşamada baskınlık temelinde nitelik seçim işlemi yapılarak indirgenmiş nitelik kümesi üzerinden kurallar çıkarılmıştır. Younsi vd. [24] mevsimsel grip risk değerlendirme ve takibi için var olan sistemin üç parçasından biri olan analiz kısmını çok kriterli karar analizi kabiliyetine sahip olacak şekilde güncellemiştir. Sawicki ve Zak [25] yirmi dört kriter bağlamında bir anket hazırlayarak ulaşım sisteminin değerlendirilmesine ilişkin müşteri görüşlerini toplamışlardır. Anketten elde edilen verilere üç ana aşamadan meydana gelen baskın kaba küme tabanlı yöntem uygulanmıştır: İlk aşamada veri kümesini en iyi ifade eden on iki nitelik seçilmiştir. İkinci aşama da karar kuralları çıkarılmış, son kısımda test verisi olarak örnek bir ulaşım sistemi ele alınarak güvenilirlik indeksine göre sınıflandırılmıştır. Dehouche [26] sperm kalitesini BKKY'den faydalanarak tahmin etmiştir. Elde ettiği sonuçları aynı veri kümesini kullanan [27] çalışmasındaki SVM, DT ve MLP gibi yapay zeka yöntemleri ile kıyaslamıştır. Błaszczyński vd. [28] baskınlık bağıntısı temelinde eksik değer içeren veri kümeleri ile başa çıkabilmenin alternatif yollarını göz önüne almışlardır. On dört veri kümesi ile yapılan çalışmada eksik değer miktarı her bir veri kümesinde eşit olacak şekilde %5 ile %50 aralığında değiştirilmiştir. Değişen eksik değer yüzdesine göre VC-DomLEM-mv2, VC-DomLEM-smv, Naive Bayes, SVM, Ripper, C4.5, OLM, OSDL sınıflandırıcıları MAE (Mean Absolute Error) metriği yönünden karşılaştırılmıştır. Deneysel çalışma VC-DomLEM-mv2, SVM ve Naive Bayes'in eksik verilerle uğraşmakta en iyi performansa sahip sınıflandırıcılar olduğunu ortaya koymuştur. Küçük miktarda eksik değer içeren veri kümelerinde VC-DomLEM-mv2; yüksek miktarda eksik değer içeren veri kümelerinde ise SVM daha başarılı olmuştur.

Özetleyecek olursak, çok geniş çevrelerce hem klasik hem de baskın kaba küme yaklaşımı ile sayısız çalışma yapılmıştır. Ancak baskın kaba küme yaklaşımı, sürekli koşul niteliklerini ayrıklaştırmaya ihtiyaç duymaması, niteliklerin tercih sırasını dikkate alması, tutarsız elemanları yönetmedeki kabiliyeti ve bu yaklaşım ile çıkarılan karar kurallarının yeni nesnelere uygulandığında daha iyi sonuçlar üretmesi sebebiyle klasik kaba küme yaklaşımına üstünlük sağlamaktadır.

1.2 Tezin Amacı

Kaba küme analizi, karar aşamasında belirsiz ve kesin olmayan veriler ile başa çıkabilme performansından ötürü ön plana çıkmaktadır. Bu analiz sürecindeki temel hedef, küme yaklaşımlarını kullanarak karar kurallarının elde edilmesi ve bu kurallara bağlı olarak herhangi bir örnek için sistemdeki davranışın belirlenmesidir. Ayrıca bu kurallara dayanarak geliştirilen karar modelleri, somut ve açıklanabilir sonuçlar ile teknik açıdan yorumlama kolaylığı sağladığından önemlidir. Öte yandan veri kümesindeki eksik verileri doldurmadan analiz yapılmasına olanak veren bir yöntem olduğundan literatürdeki diğer yöntemlerden farklıdır. Bu tez çalışması kapsamında yapılan deneysel uygulamada baskın kaba küme yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu uygulamadan çıkarılan kurallar ile karar modellerinin oluşturulması ve karar kurallarının analizi ile birtakım bilgi çıkarımlarının yapılması amaçlanmaktadır.

1.3 Hipotez

Bu çalışmayla baskın kaba küme temelinde elde edilen kurallar ile oluşturulan modellerin karar verme aşamasında anlamlı bir etkiye sahip olduğuna ilişkin varsayımımız üzerine bir araştırma gerçekleştireceğiz. Buna istinaden deneysel çalışma bölümünde veri kümeleri eğitim ve test olmak üzere iki parçaya ayrılacaktır. Eğitim kümesi karakteristiğine göre birtakım ön işleme aşamalarından geçtikten sonra karar kuralları çıkarılacaktır. Her bir test örneği için kapsadığı kurallar üzerinden skor hesaplamaları ile karar sınıfları öngörülerek modelin performansı değerlendirilecektir. Ek olarak test örneklerinin sınıflandırılmasında kullanılan skor hesabı teorisinden yararlanarak veri içerisindeki önemli bilgilerin keşfedilebileceği kanaatindeyiz.

2
YÖNTEM

Bu bölümde, öncelikle kaba küme teorisinde verileri temsil etmek için kullanılan karar tablosu anlatılacaktır. Daha sonra klasik ve baskın kaba küme yaklaşımına ilişkin matematiksel kavramlar üzerinde durulacaktır [2,15,17-18, 29-37].

2.1 Karar Tablosu

Kaba küme teorisi kesin olmayan verilerle uğraşmak ve bilgiyi temsil etmek için bilgi sistemlerini kullanır [13]. Karar tablosu ise satırlarda nesnelerin veya elemanların, sütunlarda ise niteliklerin (değişkenler) bulunduğu bilgi sisteminin özel bir halidir. Bu tabloda, bir nesnenin herhangi bir nitelik üzerinde aldığı değer, nesneye karşılık gelen satır ile niteliğe karşılık gelen sütunun kesişimindeki hücrede bulunur. Matematiksel olarak bir karar tablosu, $E \neq \emptyset$ sonlu bir küme olmak üzere $KT = (E, X = X_c \cup X_d, V, f)$ şeklinde dört bileşen ile temsil edilir. Burada E evrensel kümesi nesneler veya elemanlar topluluğunu, X koşul ve karar özniteliklerinin veya değişkenlerinin birleşim kümesini ve $f: E \times X \rightarrow V$ olmak üzere bilgi fonksiyonunu göstermektedir. V_x, $x \in X$ niteliğinin aldığı değerler kümesini göstermek üzere $V = \cup_{x \in X} V_x$ şeklindedir. Örnek olarak, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $X_c = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\}$ ve $X_d = \{x_d\}$ olduğu durum için karar tablosu Tablo 2.1'de verilmiştir.

Tablo 2.1 Örnek bir karar tablosu

	Koşul ve Karar Nitelikleri ($\boldsymbol{X_c \cup X_d}$)			
Örnekler ($\boldsymbol{E}$)	x_{c1}	x_{c2}	x_{c3}	x_d
e_1	$f(e_1, x_{c1})$	$f(e_1, x_{c2})$	$f(e_1, x_{c3})$	$f(e_1, x_d)$
e_2	$f(e_2, x_{c1})$	$f(e_2, x_{c2})$	$f(e_2, x_{c3})$	$f(e_2, x_d)$
e_3	$f(e_3, x_{c1})$	$f(e_3, x_{c2})$	$f(e_3, x_{c3})$	$f(e_3, x_d)$
e_4	$f(e_4, x_{c1})$	$f(e_4, x_{c2})$	$f(e_4, x_{c3})$	$f(e_4, x_d)$

2.2 Klasik Kaba Küme Yaklaşımı

Bu bölümde klasik kaba küme yaklaşımları ile ilgili matematiksel bilgiler verilecektir [2,29-31].

Tanım 2.1. $Y \subseteq X_c$ için β ayırt edilemezlik bağıntısı $e_i, e_j \in E$ ve $\forall\, x \in Y$ için $f(e_i, x) = f(e_j, x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2. Herhangi bir $e_i \in E$ için β ayırt edilemezlik bağıntısına göre bu e_i elemanının denklik sınıfı $[e_i] = \{e_j \in E \mid e_j \beta e_i\}$ şeklindedir.

Ayrıca $[e_i]$ denklik sınıflarına β bağıntısı tarafından üretilen "granüller" denir.

Örnek 2.1. Aşağıda çeşitli enstrümanlara göre öğrencilerin yeteneklerine ait puanlara dayanarak müzik okuluna seçilip seçilemediklerini gösteren bir karar tablosu verilmiştir [38].

Tablo 2.2 Müzik okuluna öğrenci seçimine yönelik bir karar tablosu

	Koşul ve Karar Nitelikleri $(\boldsymbol{X_c \cup X_d})$				
Adaylar $(\boldsymbol{E})$	*Piyano yeteneği* (x_{c1})	*Keman Yeteneği* (x_{c2})	*Trompet yeteneği* (x_{c3})	*Gitar yeteneği* (x_{c4})	*Sonuç* (x_d)
e_1	4	4	3	4	Geçti
e_2	5	5	2	4	Geçti
e_3	4	4	2	4	Geçti
e_4	4	4	2	4	Kaldı
e_5	5	5	2	4	Geçti
e_6	4	4	2	3	Geçti
e_7	4	3	2	3	Kaldı

Bu karar tablosunda nesneler ve nitelikler kümesi sırasıyla $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ ve $X = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}, x_d\}$ olarak ifade edilmektedir. $Y = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}\} \subseteq X_c$ için her bir e_i elemanının denklik sınıfını belirleyelim.

Açık bir şekilde $[e_1] = \{e_j \in E \mid f(e_1, x) = f(e_j, x), \forall x \in Y\} = \{e_1\}$ elde edilir. Çünkü e_1 elemanı en az bir nitelik üzerinde aldığı değer yönünden diğerlerinden farklılaşmaktadır. Buna benzer olarak diğer elemanlar için denklik sınıfları şöyledir:

$$[e_2] = \{e_2, e_5\}, \qquad [e_5] = \{e_2, e_5\},$$

$$[e_3] = \{e_3, e_4\}, \qquad [e_6] = \{e_6\},$$

$$[e_4] = \{e_3, e_4\}, \qquad [e_7] = \{e_7\}.$$

Tanım 2.3. $U \subseteq E$ için U kümesinin bir $Y \subseteq X_c$ nitelikler alt kümesinde alt ve üst yaklaşımları sırasıyla $\underline{YU}$ ve $\overline{YU}$ olarak gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{YU} = \{e_i \in E \mid [e_i] \subseteq U\}, \tag{2.1}$$

$$\overline{YU} = \{e_i \in E \mid [e_i] \cap U \neq \emptyset\}. \quad (2.2)$$

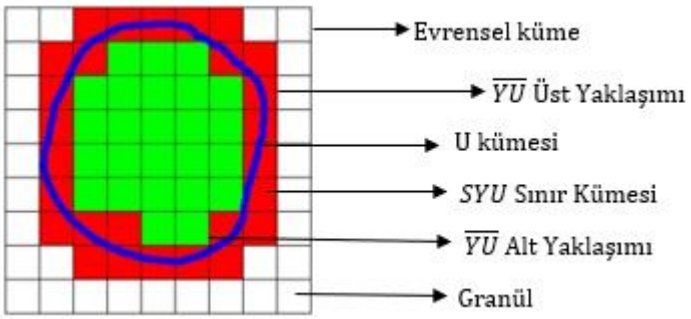
Diğer bir deyişle, bir U kümesinin alt yaklaşımı β bağıntısına göre kesin olarak U'ya ait olan elemanların kümesi iken U kümesinin üst yaklaşımı ise β bağıntısına göre muhtemel olarak U'ya ait olabilecek elemanların kümesidir.

Tanım 2.4. $U \subseteq E$ için U kümesinin sınırı SYU olarak gösterilir, alt ve üst yaklaşımlar kullanılarak $SYU = \overline{YU} - \underline{YU}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5. Eğer bir kümenin sınır bölgesi boş kümeden farklı ise kümeye kaba küme denir. Aksi halde kesin küme denir.

Tanım 2.6. $e_i, e_j \in E$ ve $\forall y \in Y \subseteq X_c$ için $f(e_i, y) = f(e_j, y)$ olmasına rağmen $\exists x_d \in X_d$ için $f(e_i, x_d) \neq f(e_j, x_d)$ oluyorsa e_i ve e_j nesneleri ayırt edilemezlik bağıntısına göre Y-tutarsızdır denir. SYU sınır kümesi Y-tutarsız elemanlardan oluşur.

Bu tanımlar Şekil 2.1'de açık bir şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.1 Kaba küme teorisine ait temel tanımların grafiksel gösterilimi

Örnek 2.2. Örnek 2.1'de verilen karar tablosunu dikkate alarak ve elde edilmiş olan denklik sınıflarını kullanarak $U = \{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\}$ kümesinin $Y = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}\}$ nitelik kümesine göre alt ve üst yaklaşımlarını hesaplayalım.

$[e_1] \subseteq U$, $[e_2] = [e_5] \subseteq U$ ve $[e_6] \subseteq U$ olduğundan $\underline{YU} = \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ olarak elde edilir. Öte yandan sadece e_7 elemanı $[e_7] \cap U = \emptyset$ olmak üzere üst yaklaşım tanımını sağlamadığından dolayı bunun dışındaki tüm elemanlar üst yaklaşımda yer alacaktır. Dolayısıyla $\overline{YU} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ olarak elde edilir. Sınır kümesi ise üst yaklaşımda olup alt yaklaşımda olmayan elemanların oluşturduğu $SYU = \{e_3, e_4\}$ kümesidir ve Y-tutarsız elemanlardan oluşur. Açıktır ki e_3 ve e_4 adayları koşul niteliklerine göre aynı değerlere sahip olmalarına karşın başarı durumları yönünden farklılık göstermektedir.

Önerme 2.1. $U, V \subseteq E$ ve $\sim U = E - U$ olmak üzere kaba yaklaşımlara ait aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\underline{YU} \subseteq U \subseteq \overline{YU}$,
2. $\underline{Y\emptyset} = \overline{Y\emptyset} = \emptyset$ *ve* $\underline{YE} = \overline{YE} = E$,
3. $\underline{Y(U \cap V)} = \underline{YU} \cap \underline{YV}$
4. $\overline{Y(U \cup V)} = \overline{YU} \cup \overline{YV}$,
5. $U \subseteq V \Rightarrow \underline{YU} \subseteq \underline{YV}$ *ve* $\underline{YU} \subseteq \overline{YV}$,
6. $\underline{Y(U \cup V)} \supseteq \underline{YU} \cup \underline{YV}$,
7. $\overline{Y(U \cup V)} \subseteq \overline{YU} \cap \overline{YV}$,
8. $\underline{Y(\sim U)} = \sim \overline{YU}$,
9. $\overline{Y(\sim U)} = \sim \underline{YU}$,
10. $\underline{Y\left(\underline{YU}\right)} = \overline{Y\left(\underline{YU}\right)} = \underline{YU}$,
11. $\overline{Y\left(\overline{YU}\right)} = \underline{Y\left(\overline{YU}\right)} = \overline{YU}$.

Bunlardan birkaçının ispatını yapalım.

Kanıt (Madde 1): $e_i \in E$ ve $e_i \in \underline{YU}$ olsun. e_i elemanın denklik kümesi e_i elemanını içerdiğinden ve alt yaklaşım tanımı gereği $[e_i] \subseteq U$ bilindiğinden $e_i \in U$ olduğu açıktır. O halde $\underline{YU} \subseteq U$ elde edilir. Benzer şekilde $e_i \in U$ olsun. Bu elemanın denklik sınıfı en azından kendini içerdiğinden dolayı $[e_i] \cap U \neq \emptyset$ sağlanır ve $e_i \in \overline{YU}$ olur. Buradan $U \subseteq \overline{YU}$ elde edilir. Böylece

$$\underline{YU} \subseteq U \subseteq \overline{YU}$$

gösterilmiş olur. İkinci madde de benzer şekilde gösterilebilir.

Kanıt (Madde 3): $e_i \in \underline{Y(U \cap V)}$ olsun. Alt yaklaşım tanımından faydalanarak $[e_i] \subseteq U \cap V$ olarak yazılabilir. Buradan küme teorisi gereği $[e_i] \subseteq U$ ve $[e_i] \subseteq V$ olduğu açıktır. O halde yine alt yaklaşım tanımı kullanılarak $e_i \in \underline{YU}$ ve $e_i \in \underline{YV}$ elde

edilir. Bu da $e_i \in \underline{YU} \cap \underline{YV}$ olarak ifade edilir. Böylece $\underline{Y(U \cap V)} \subseteq \underline{YU} \cap \underline{YV}$ gösterilir.

Tersine; $e_i \in \underline{YU} \cap \underline{YV}$ olduğunu varsayalım. Küme teorisi gereği $e_i \in \underline{YU}$ ve $e_i \in \underline{YV}$ olur. Alt yaklaşım tanımından $[e_i] \subseteq U$ ve $[e_i] \subseteq V$ olduğundan $[e_i] \subseteq U \cap V$ elde edilir. Yine alt yaklaşım tanımı gereği $e_i \in \underline{Y(U \cap V)}$ olur. Buradan $\underline{YU} \cap \underline{YV} \subseteq \underline{Y(U \cap V)}$ gösterilir. $\underline{Y(U \cap V)} \subseteq \underline{YU} \cap \underline{YV}$ ve $\underline{Y(U \cap V)} \supseteq \underline{YU} \cap \underline{YV}$ ifadelerinden $\underline{Y(U \cap V)} = \underline{YU} \cap \underline{YV}$ eşitliği kanıtlanır.

4., 5., 6., 7., 8., ve 9. maddeler de benzer şekilde gösterilebilir.

Kanıt (Madde 10): Birinci ve beşinci maddeler gereği $\underline{YU} \subseteq U \Rightarrow \underline{Y(\underline{YU})} \subseteq \underline{YU}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $e_i \in \underline{YU}$ olsun. O halde alt yaklaşım tanımından $[e_i] \subseteq U$ yazılabilir. Eğer $e_j \in [e_i]$ ise bu durumda $[e_j] = [e_i]$ elde edilir. O halde $[e_j] \subseteq U$ ve alt yaklaşım tanımı gereği $e_j \in \underline{YU}$ olur. Buradan da $[e_i] \subseteq \underline{YU}$ olduğu görülür. Benzer şekilde alt yaklaşım tanımını kullanırsak $e_i \in \underline{Y(\underline{YU})}$ elde edilir. Bunun sonucu olarak $\underline{YU} \subseteq \underline{Y(\underline{YU})}$ görülür. $\underline{Y(\underline{YU})} \subseteq \underline{YU}$ ve $\underline{Y(\underline{YU})} \supseteq \underline{YU}$ ifadelerinden $\underline{Y(\underline{YU})} = \underline{YU}$ elde dilerek kanıt tanımlanır. Benzer şekilde $\overline{Y(\underline{YU})} = \underline{YU}$ gösterilebilir.

11. madde de buna benzer şekilde gösterilebilir.

Kaba kümeler, alt ve üst yaklaşımların yerine kaba üyelik fonksiyonları kullanılarak da tanımlanabilir [17,29,31].

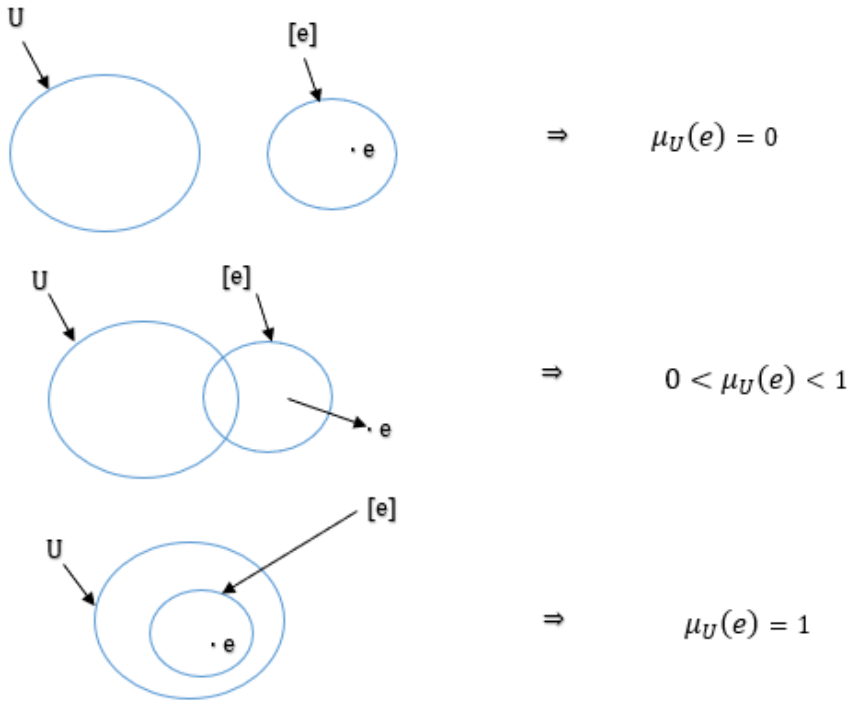
Tanım 2.7. $U \subseteq E$ ve $e \in E$ olmak üzere kaba üyelik fonksiyonu $\mu_U : E \to [0,1]$, β bağıntısı altında bir e elemanının U'ya ait olma koşullu olasılığını ifade eder ve

$$\mu_U(e) = \frac{|U \cap [e]|}{|[e]|}. \qquad (2.3)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada $|\cdot|$, kümenin eleman sayısını göstermektedir. Kaba üyelik fonksiyonu Şekil 2.2'de olduğu gibi tasvir edilebilir.

Tanım 2.8. μ_U, E üzerinde kaba üyelik fonksiyonu olsun. $\forall U \subseteq E$ için U kümesinin $Y \subseteq X_c$ nitelikler alt kümesine göre alt ve üst yaklaşımları ile sınır kümesi kaba üyelik fonksiyonu ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{YU} = \{e \in E \mid \mu_U(e) = 1\},$$
$$\overline{YU} = \{e \in E \mid \mu_U(e) > 0\},$$
$$SYU = \{e \in E \mid 0 < \mu_U(e) < 1\}. \quad (2.4)$$



Şekil 2.2 Kaba üyelik fonksiyonunun tasviri

Tanım 2.9. Kaba kümelerin iki farklı tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

- Eğer $\underline{YU} \neq \overline{YU}$ ise U kümesi β bağıntısına göre kaba kümedir denir.
- Eğer bazı $e \in E$ için $0 < \mu_U(e) < 1$ sağlanıyorsa U kümesi β bağıntısına göre kaba kümedir denir.

Önerme 2.2. Kaba üyelik fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $\mu_U(e) = 1$ ancak ve ancak $e \in \underline{YU}$.
2. $\mu_U(e) = 0$ ancak ve ancak $e \in E - \overline{YU}$.
3. $0 < \mu_U(e) < 1$ ancak ve ancak $e \in SYU$.
4. Herhangi bir $e \in E$ için $\mu_{E-U}(e) = 1 - \mu_U(e)$.
5. Herhangi bir $e \in E$ için $\mu_{U_1 \cup U_2}(e) \geq \max\left(\mu_{U_1}(e), \mu_{U_2}(e)\right)$.
6. Herhangi bir $e \in E$ için $\mu_{U_1 \cap U_2}(e) \leq \min\left(\mu_{U_1}(e), \mu_{U_2}(e)\right)$.

Tanım 2.10. Eğer $U \subseteq E$ kümesinin alt ve üst yaklaşımları özdeş ise U kümesi E'de tanımlanabilir, aksi halde U kümesi E'de tanımlanamaz denir.

Kaba kümelerin aşağıda verilen dört temel sınıfı mevcuttur:

- U kümesi Y'de kabaca tanımlanabilirdir ancak ve ancak $\underline{YU} \neq \emptyset$ ve $\overline{YU} \neq E$.
- U kümesi Y'de içsel olarak tanımlanamazdır ancak ve ancak $\underline{YU} = \emptyset$ ve $\overline{YU} \neq E$.
- U kümesi Y'de dışsal olarak tanımlanamazdır ancak ve ancak $\underline{YU} \neq \emptyset$ ve $\overline{YU} = E$.
- U kümesi Y'de tam olarak tanımlanamazdır ancak ve ancak $\underline{YU} = \emptyset$ ve $\overline{YU} = E$.

Tanım 2.11. Bir $U \subseteq E$ alt kümesinin pozitif ve negatif bölgesi sırasıyla $POZ(U)$ ve $NEG(U)$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$POZ(U) = \underline{YU}, \tag{2.5}$$

$$NEG(U) = E - \overline{YU}. \tag{2.6}$$

Pozitif bölge, U kümesinde kesinlikle yer alan tüm elemanlardan meydana gelmektedir. Oysa negatif bölge, U kümesinde kesinlikle bulunmayan tüm elemanları içermektedir.

Tanım 2.12. $Y \subseteq X_c$ ve $U \subseteq E$ olmak üzere Y nitelik kümesine göre U kümesinin yaklaşımının doğruluğu, alt yaklaşım kümesinin eleman sayısının üst yaklaşım kümesinin eleman sayısına oranıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\alpha_Y(U) = \frac{|\underline{YU}|}{|\overline{YU}|}. \tag{2.7}$$

Burada $|\cdot|$, kümenin eleman sayısını göstermektedir.

Tanım 2.13. Eğer $\alpha_Y(U) = 1$ ise U kümesine β bağıntısına göre kesin küme, eğer $\alpha_Y(U) < 1$ ise U kümesine β bağıntısına göre kaba küme denir.

Örnek 2.3. Örnek 2.2'de elde ettiğimiz alt ve üst yaklaşımları kaba üyelik fonksiyonu kullanarak belirleyelim ve ayrıca pozitif, negatif bölge ile yaklaşımın doğruluğunu hesaplayalım.

Öncelikle $\forall e \in E$ için kaba üyelik derecelerini hesaplayalım.

$$\mu_U(e_1) = \frac{|U \cap [e_1]|}{|[e_1]|} = \frac{|\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\} \cap \{e_1\}|}{|\{e_1\}|} = 1$$

$$\mu_U(e_2) = \mu_U(e_5) = \frac{|U \cap [e_2]|}{|[e_2]|} = \frac{|\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\} \cap \{e_2, e_5\}|}{|\{e_2, e_5\}|} = 1$$

$$\mu_U(e_3) = \mu_U(e_4) = \frac{|U \cap [e_3]|}{|[e_3]|} = \frac{|\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\} \cap \{e_3, e_4\}|}{|\{e_3, e_4\}|} = \frac{1}{2}$$

$$\mu_U(e_6) = \frac{|U \cap [e_6]|}{|[e_6]|} = \frac{|\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\} \cap \{e_6\}|}{|\{e_6\}|} = 1$$

$$\mu_U(e_7) = \frac{|U \cap [e_7]|}{|[e_7]|} = \frac{|\{e_1, e_2, e_3, e_5, e_6\} \cap \{e_7\}|}{|\{e_7\}|} = 0$$

Tanım 2.8'den hareketle alt yaklaşım kaba üyelik derecesi 1 olan elemanların oluşturduğu $\underline{YU} = \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ kümesidir. Kaba üyelik derecesi 0'dan büyük olan elemanlar $\overline{YU} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ üst yaklaşım kümesini oluşturur. Sınır kümesi ise kaba üyelik derecesi $(0,1)$ aralığında değer alan elemanların oluşturduğu $SYU = \{e_3, e_4\}$ kümesidir. Bunlar örnek 2.2'de elde edilen sonuçlar ile örtüşmektedir. Aynı zamanda $\underline{YU} = \{e_1, e_2, e_5, e_6\} \neq \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \overline{YU}$ sebebiyle U kümesinin β bağıntısına göre kaba küme olduğu söylenebilir.

Bunun yanı sıra pozitif, negatif bölge ile yaklaşımın doğruluğu ise şu şekildedir:

$POZ(U) = \underline{YU} = \{e_1, e_2, e_5, e_6\}$,

$NEG(U) = E - \overline{YU} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\} - \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{e_7\}$,

$$\alpha_Y(U) = \frac{|\underline{YU}|}{|\overline{YU}|} = \frac{|\{e_1, e_2, e_5, e_6\}|}{|\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}|} = {}^{2}/_{3}.$$

2.2.1 İndirgemeler ve Çekirdek Küme

Tanım 2.14. $Y \subseteq X_c$ ve $y \in Y$ olmak üzere $\beta(Y - \{y\}) = \beta(Y)$ sağlanıyorsa y niteliği Y kümesinde vazgeçilebilirdir denir, aksi halde y niteliği Y kümesinde vazgeçilemezdir. Eğer Y kümesindeki tüm nitelikler vazgeçilemez ise Y kümesi bağımsızdır.

Tanım 2.15. $Z \subseteq Y \subseteq X_c$ olsun. Eğer $\beta(Z) = \beta(Y)$ ve Z kümesi bağımsız ise Z kümesine Y kümesinin indirgenmişi denir.

Buna göre, bir indirgeme, denklik bölüklerini koruyan niteliklerin bir kümesidir. Bu da tüm nitelikler kümesine göre evrenin elemanlarının aynı olacak şekilde sınıflandırılmasına olanak sağlayan niteliklerin minimal kümesi anlamına gelmektedir.

Tanım 2.16. Y kümesinin çekirdeği Y kümesinde vazgeçilemez niteliklerin tamamı tarafından oluşturulan kümedir ve $ÇEK(Y)$ ile gösterilir.

Böylece $ÇEK(Y)$, Y kümesinin tüm indirgenmiş nitelik kümelerinin ara kesitidir. $Y \subseteq X_c$ olmak üzere

$$ÇEK(Y) = \bigcap IND(Y) \tag{2.8}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.4. Aşağıdaki karar tablosunda 6 hastaya ait baş ağrısı, kas ağrısı, vücut sıcaklığı ve grip durumuna ilişkin veriler sunulmuştur [31]. Bu karar tablosunu dikkate alarak $Y = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\}$ için vazgeçilemez nitelikleri, indirgenmiş nitelik kümesini ve çekirdeği belirleyelim.

Tablo 2.3 Hastaların grip durumuna ilişkin karar tablosu

	Koşul ve Karar Nitelikleri $(\boldsymbol{X_c \cup X_d})$			
Hastalar $(\boldsymbol{E})$	*Baş ağrısı* (x_{c1})	*Kas ağrısı* (x_{c2})	*Vücut sıcaklığı* (x_{c3})	*Grip* (x_d)
h_1	yok	var	yüksek	evet
h_2	var	yok	yüksek	evet
h_3	var	var	çok yüksek	evet
h_4	yok	var	normal	hayır
h_5	var	yok	yüksek	hayır
h_6	yok	var	çok yüksek	evet

İlk önce $Y = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\}$ kümesi için her bir elemanın denklik sınıflarını hesaplayalım.

$[h_1] = \{h_1\},\ [h_2] = [h_5] = \{h_2, h_5\},\ [h_3] = \{h_3\},\ [h_4] = \{h_4\},\ [h_6] = \{h_6\}.$

$$E/Y = \{\{h_1\}, \{h_2, h_5\}, \{h_3\}, \{h_4\}, \{h_6\}\}.$$

olarak elde edilir. Şimdi Y nitelikler kümesinden her bir niteliği sırasıyla çıkaralım. Eğer kalan nitelikler ile aynı denklik sınıflarını elde edebilirsek bu durumda çıkarılan nitelik vazgeçilebilirdir.

- $Y_1 = \{x_{c2}, x_{c3}\}$ için her bir elemanın denklik sınıfı:

$[h_1] = \{h_1\};\ [h_2] = [h_5] = \{h_2, h_5\};\ [h_3] = [h_6] = \{h_3, h_6\};\ [h_4] = \{h_4\}.$

$$E/Y_1 = \{\{h_1\}, \{h_2, h_5\}, \{h_3, h_6\}, \{h_4\}\} \neq E/Y.$$

- $Y_2 = \{x_{c1}, x_{c3}\}$ için her bir elemanın denklik sınıfı:

$[h_1] = \{h_1\};\ [h_2] = [h_5] = \{h_2, h_5\};\ [h_3] = \{h_3\};\ [h_4] = \{h_4\};\ [h_6] = \{h_6\}.$

$$E/Y_2 = \{\{h_1\}, \{h_2, h_5\}, \{h_3\}, \{h_4\}, \{h_6\}\} = E/Y.$$

- $Y_3 = \{x_{c1}, x_{c2}\}$ için her bir elemanın denklik sınıfı:

$[h_1] = [h_4] = [h_6] = \{h_1, h_4, h_6\};\ [h_2] = [h_5] = \{h_2, h_5\};\ [h_3] = \{h_3\}.$

$$E/Y_3 = \{\{h_1, h_4, h_6\}, \{h_2, h_5\}, \{h_3\}\} \neq E/Y.$$

O halde baş ağrısı (x_{c1}) ve vücut sıcaklığı (x_{c3}) nitelikleri Y kümesinde vazgeçilemez niteliklerdir. Kas ağrısı (x_{c2}) niteliği Y kümesinde vazgeçilebilirdir. Bu durumda $ÇEK(Y) = \{x_{c1}, x_{c3}\}$ olarak elde edilir.

Y kümesi için indirgenmiş nitelikler kümesini hesaplayalım. Bunun için Y kümesinin boş kümeden farklı tüm öz alt kümelerini göz önüne almalıyız. İki elemanlı alt kümelerinde sadece $E/Y_2 = E/Y$ sağlandığından Y kümesinin indirgenmiş kümesi olmaya adaydır. Y_2 kümesinin bağımsız olup olmadığını inceleyelim.

- $Y_2^1 = Y_2 - \{x_{c1}\} = \{x_{c3}\}$ kümesi için denklik sınıfları:

$[h_1] = [h_2] = [h_5] = \{h_1, h_2, h_5\};\ [h_3] = [h_6] = \{h_3, h_6\};\ [h_4] = \{h_4\}.$

$$E/Y_2^1 = \{\{h_1, h_2, h_5\}, \{h_3, h_6\}, \{h_4\}\} \neq E/Y.$$

- $Y_2^2 = Y_2 - \{x_{c3}\} = \{x_{c1}\}$ kümesi için denklik sınıfları:

$[h_1] = [h_4] = [h_6] = \{h_1, h_4, h_6\};\ [h_2] = [h_3] = [h_5] = \{h_2, h_3, h_5\}.$

$$E/Y_2^2 = \{\{h_1, h_4, h_6\}, \{h_2, h_3, h_5\}\} \neq E/Y.$$

Tüm nitelikler Y_2 kümesinde vazgeçilemezdir. Dolayısıyla Y_2 bağımsızdır. $\{x_{c1}, x_{c3}\}$, Y için indirgenmiş bir nitelik kümesidir.

Öte yandan tek elemanlı alt kümeleri için $E/\{x_{c1}\} \neq E/Y$, $E/\{x_{c2}\} \neq E/Y$ ve $E/\{x_{c3}\} \neq E/Y$ olup hiçbiri Y kümesinin indirgenmiş nitelik kümesi olmaya aday değildir. Böylece $IND(Y) = \{x_{c1}, x_{c3}\}$ elde edilir.

Tanım 2.17. $C \subseteq X_c$, $D \subseteq X_d$ ve $POZ_C(D) = \cup_{U \in E/D} \underline{CU}$ olsun.

- Eğer bir $c \in C$ niteliği için $POZ_C(D) = POZ_{C-\{c\}}(D)$ oluyorsa bu c niteliğine C kümesinde D-vazgeçilebilirdir denir. Aksi halde c niteliği C kümesinde D-vazgeçilemezdir.
- C kümesindeki tüm nitelikler C kümesinde D-vazgeçilemez ise C kümesine D-bağımsızdır denir.
- $C' \subseteq C$ olmak üzere eğer C' kümesi D-bağımsız ve $POZ_C(D) = POZ_{C'}(D)$ ise C' kümesine C kümesinin bir D-indirgenmişi denir.

Tanım 2.18. C kümesindeki tüm D-vazgeçilemez niteliklerin kümesi, C kümesinin D-çekirdeği olarak adlandırılır ve $ÇEK_D(C)$ ile gösterilir.

Böylece $ÇEK_D(C)$, C kümesinin tüm D-indirgenmiş kümelerinin ara kesitidir. $C \subseteq X_c$ *ve* $D \subseteq X_d$ olmak üzere

$$ÇEK_D(C) = \bigcap IND_D(C) \tag{2.9}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.5. Tablo 2.3'te $C = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\} \subseteq X_c$ ve $D = \{x_d\} \subseteq X_d$ olmak üzere C kümesinde D-vazgeçilemez nitelikleri, C kümesinin D-indirgenmiş kümelerini ve D-çekirdeğini hesaplayalım.

Öncelikle C kümesinin D-pozitif bölgesini hesaplayalım. $D = \{x_d\}$ kümesine göre E evreninin ayrışımı $E/D = \{\{h_1, h_2, h_3, h_6\}, \{h_4, h_5\}\}$ şeklindedir. Burada $U_1 = \{h_1, h_2, h_3, h_6\}$ ve $U_2 = \{h_4, h_5\}$ olsun.

$$POZ_C(D) = \underline{CU_1} \cup \underline{CU_2} = \{h_1, h_3, h_6\} \cup \{h_4\} = \{h_1, h_3, h_4, h_6\}.$$

Şimdi C nitelikler kümesinden her bir niteliği sırasıyla çıkaralım.

- $C_1 = \{x_{c2}, x_{c3}\}$ için C_1 kümesinin D-pozitif bölgesi:

$$POZ_{C_1}(D) = \underline{C_1U_1} \cup \underline{C_1U_2} = \{h_1, h_3, h_6\} \cup \{h_4\} = \{h_1, h_3, h_4, h_6\} = POZ_C(D).$$

- $C_2 = \{x_{c1}, x_{c3}\}$ için C_2 kümesinin D-pozitif bölgesi:

$$POZ_{C_2}(D) = \underline{C_2U_1} \cup \underline{C_2U_2} = \{h_1, h_3, h_6\} \cup \{h_4\} = \{h_1, h_3, h_4, h_6\} = POZ_C(D).$$

- $C_3 = \{x_{c1}, x_{c2}\}$ için C_3 kümesinin D-pozitif bölgesi:

$$POZ_{C_3}(D) = \underline{C_3U_1} \cup \underline{C_3U_2} = \{h_3\} \cup \emptyset = \{h_3\} \neq POZ_C(D).$$

O halde sadece vücut sıcaklığı (x_{c3}) niteliği C kümesinde D-vazgeçilemez niteliktir. Baş ağrısı (x_{c1}) ve kas ağrısı (x_{c2}) nitelikleri C kümesinde D-vazgeçilebilir niteliklerdir. Dolayısıyla $ÇEK_D(C) = \{x_{c3}\}$ olarak elde edilir.

C kümesinin D-indirgenmiş küme veya kümelerini belirleyelim. C kümesinin boş kümeden farklı tüm öz alt kümelerini düşünmeliyiz. İki elemanlı alt kümeleri $C_1, C_2 \subseteq C$ için $POZ_{C_1}(D) = POZ_C(D)$ ve $POZ_{C_2}(D) = POZ_C(D)$ sağlanmaktadır. Dolayısıyla C_1 ve C_2 kümelerinin D-bağımsız olup olmadığını inceleyelim.

- C_1 kümesinden sırasıyla x_{c2} ve x_{c3} niteliklerini çıkaralım. $C_1^1 = C_1 - \{x_{c2}\}$ ve $C_1^2 = C_1 - \{x_{c3}\}$ olsun. C_1^1 ve C_1^2 kümelerinin D-pozitif bölgesini hesaplayalım.

$$POZ_{C_1^1} = \underline{C_1^1 U_1} \cup \underline{C_1^1 U_2} = \{h_3, h_6\} \cup \{h_4\} = \{h_3, h_4, h_6\} \neq POZ_C(D),$$

$$POZ_{C_1^2} = \underline{C_1^2 U_1} \cup \underline{C_1^2 U_2} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \neq POZ_C(D).$$

C_1 kümesindeki tüm nitelikler D-vazgeçilemezdir. Bu durumda C_1, C nitelikler kümesinin bir D-indirgenmişidir.

- Benzer şekilde C_2 kümesinden sırasıyla x_{c1} ve x_{c3} niteliklerini çıkaralım. $C_2^1 = C_1 - \{x_{c1}\}$ ve $C_2^2 = C_1 - \{x_{c3}\}$ olsun. C_2^1 ve C_2^2 kümelerinin D-pozitif bölgesini hesaplayalım.

$$POZ_{C_2^1} = POZ_{C_1^1} = \{h_3, h_4, h_6\} \neq POZ_C(D),$$

$$POZ_{C_2^2} = \underline{C_2^2 U_1} \cup \underline{C_2^2 U_2} = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset \neq POZ_C(D).$$

C_2 kümesindeki tüm nitelikler de D-vazgeçilemezdir. Bu durumda C_2 kümesi de C nitelikler kümesinin bir D-indirgenmişidir.

Diğer yandan tek elemanlı alt kümeleri için $POZ_{\{x_{c1}\}} \neq POZ_C(D)$, $POZ_{\{x_{c2}\}} \neq POZ_C(D)$ ve $POZ_{\{x_{c3}\}} \neq POZ_C(D)$ olduğundan dolayı C kümesinin $\{x_{c2}, x_{c3}\}$ ve $\{x_{c1}, x_{c3}\}$ olmak üzere iki adet D-indirgenmiş nitelik kümesi elde edilir. Böylece $IND_D(C) = \{\{x_{c2}, x_{c3}\}, \{x_{c1}, x_{c3}\}\}$ olur.

2.2.2 Ayırt Edilebilirlik Matrisleri ve Fonksiyonları

İndirgenmiş nitelik kümesini ve çekirdeği daha kolay bir şekilde hesaplamak için Skowron, Rauszer [39] tarafından önerilen ayırt edilebilirlik matrisini kullanacağız.

Tanım 2.19. Eğer iki nesnenin en az bir nitelik üzerinde aldığı değer farklılık gösteriyorsa bu iki nesneye ayırt edilebilir nesneler denir.

Tanım 2.20. Bir karar tablosunun $Y \subseteq X_c$ nitelikler kümesine göre ayırt edilebilirlik matrisi $M(Y)$, $|E| \times |E|$ boyutunda simetrik matris olup matris elemanları şu şekilde tanımlanır:

$$m_{i,j} = \{x \in Y \mid f(e_i, x) \neq f(e_j, x)\} \quad i, j = 1, 2, \cdots, |E| \tag{2.10}$$

Anlaşılacağı üzere matrisin satır ve sütunlarında E evrenindeki elemanlar yer alacaktır. Hücreler ise satır tarafından temsil edilen elemanı sütun tarafından temsil edilen elemandan ayırt eden nitelik kümelerini içerecektir. Açıktır ki ana köşegen üzerindeki hücreler $\emptyset$'dir.

Tanım 2.21. Bir ayırt edilebilirlik matrisinin ayırt edilebilirlik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$F(M) = \wedge\{\vee(m_{i,j}) \mid \forall e_i, e_j \in E, m_{i,j} \neq \emptyset\} \tag{2.11}$$

Burada $\vee(m_{i,j})$ ifadesi, e_i ve e_j $(i, j \in \{1, \cdots, |E|\})$ elemanlarının ayırt edilmesini sağlayan niteliklere karşı gelen mantıksal değişkenlerin mantıksal toplamını, $\wedge\{\vee(m_{i,j})\}$ ise birleştirici normal form olup tüm $\vee(m_{i,j})$ ifadelerinin mantıksal çarpımını göstermektedir.

Örnek 2.6. Örnek 2.4'te verilen karar tablosunu kullanarak ayırt edilebilirlik matrisini ve ayırt edilebilirlik fonksiyonunu yazalım. Ayırt edilebilirlik fonksiyonundan yararlanarak indirgenmiş nitelikler kümesi ile çekirdeği belirleyelim.

Baş ağrısı, kas ağrısı ve vücut sıcaklığı nitelikleri sırasıyla *b, k* ve *v* mantıksal değişkenleri ile temsil edilsin. (2.10)'dan faydalanarak bu karar tablosuna ait ayırt edilebilirlik matrisi şöyledir.

$$\begin{pmatrix} \emptyset & & & & & \\ b,k & \emptyset & & & & \\ b,v & k,v & \emptyset & & & \\ v & b,k,v & b,v & \emptyset & & \\ b,k & \emptyset & k,v & b,k,v & \emptyset & \\ v & b,k,v & b & v & b,k,v & \emptyset \end{pmatrix}$$

Bu matrisin ayırt edilebilirlik fonksiyonu (2.11) aracılığıyla

$$F(M) = (b + k) \cdot (b + v) \cdot v \cdot (k + v) \cdot (b + k + v) \cdot b \qquad (2.12)$$

olarak elde edilir. Burada " $+$ " mantıksal toplamı, " $\cdot$ " mantıksal çarpımı göstermektedir. Mantıksal işlemlerin değişme özelliğinden (2.12) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$F(M) = (b + k) \cdot (b + k + v) \cdot b \cdot (b + v) \cdot v \cdot (k + v) \qquad (2.13)$$

Boole cebri işlemleri kullanılarak (2.13) ifadesini sadeleştirelim. (2.13) ifadesine yutma kuralı uygulandığında (2.14) elde edilir.

$$F(M) = (b + k) \cdot b \cdot v \qquad (2.14)$$

(2.14) ifadesinde yutma kuralından $(b + k) \cdot b = b$ olacağından ayırt edilebilirlik fonksiyonun en sade hali şöyledir:

$$F(M) = b \cdot v \qquad (2.15)$$

O halde karar tablosunda $\{x_{c1}, x_{c3}\}$ olacak biçimde tek bir indirgenmiş nitelik kümesi mevcuttur. Aynı zamanda bu indirgenmiş nitelik kümesi çekirdektir. Bu sonuçlar Örnek 2.4'te elde edilen sonuçlar ile örtüşmektedir.

Tanım 2.22. $D \subseteq X_d$ olmak üzere bir karar tablosunun $C \subseteq X_c$ nitelikler kümesine göre D-ayırt edilebilirlik matrisi (veya görece ayırt edilebilirlik matris) $M_D(C)$, $|E| \times |E|$ boyutunda simetrik matris olup matris elemanları şu şekilde tanımlanır:

$$m_{i,j}^D = \{x \in C \mid f(e_i, x) \neq f(e_j, x) \ \wedge f(e_i, d) \neq f(e_j, d), \forall d \in D\} \qquad (2.16)$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, |E|$$

Görece ayırt edilebilirlik matrisinin, ayırt edilebilirlik matrisinden tek farkı karar niteliği veya niteliklerine göre ayırt edilebilen nesneler ile ilgilenmesidir. Dolayısıyla ana köşegen üzerindeki hücrelerin $\emptyset$ olmasına ek olarak matris üzerinde karar yönünden birbirleriyle ayırt edilemeyen nesnelerin kesişim hücreleri de $\emptyset$ olacaktır.

Tanım 2.23. Görece ayırt edilebilirlik matrisinin görece ayırt edilebilirlik fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$F_D(C) = \wedge\{\vee(m_{i,j}^D) \mid \forall e_i, e_j \in E, m_{i,j}^D \neq \emptyset\} \qquad (2.17)$$

Burada $\vee(m_{i,j}^D)$ ifadesi, karar yönünden farklılık gösteren e_i ve e_j $(i, j \in \{1, \cdots, |E|\})$ elemanlarının ayırt edilmesini sağlayan niteliklere karşı gelen mantıksal

değişkenlerin mantıksal toplamını, $\wedge\{\vee(m_{i,j}^{D})\}$ ise birleştirici normal form olup tüm $\vee(m_{i,j}^{D})$ ifadelerinin mantıksal çarpımını göstermektedir.

Örnek 2.7. $C = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\} \subseteq X_c$ ve $D = \{x_d\} \subseteq X_d$ olmak üzere Örnek 2.4'te verilen karar tablosunu kullanarak görece ayırt edilebilirlik matrisini ve görece ayırt edilebilirlik fonksiyonunu yazalım. Görece ayırt edilebilirlik fonksiyonundan yararlanarak C kümesinin D-indirgenmiş nitelik kümesi ile D-çekirdeğini belirleyelim.

Örnek 2.6'ya benzer olarak baş ağrısı, kas ağrısı ve vücut sıcaklığı nitelikleri sırasıyla *b, k* ve *v* mantıksal değişkenleri ile temsil edilsin. (2.16)'dan faydalanarak bu karar tablosuna ait görece ayırt edilebilirlik matrisi şöyledir.

$$\begin{pmatrix} \emptyset & & & & & \\ \emptyset & \emptyset & & & & \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & & & \\ v & b,k,v & b,v & \emptyset & & \\ b,k & \emptyset & k,v & \emptyset & \emptyset & \\ \emptyset & \emptyset & \emptyset & v & b,k,v & \emptyset \end{pmatrix}$$

Bu matrisin görece ayırt edilebilirlik fonksiyonu

$$F_D(C) = v \cdot (b + k) \cdot (b + k + v) \cdot (b + v) \cdot (k + v) \qquad (2.18)$$

olarak elde edilir. Burada "$+$" mantıksal toplamı, "$\cdot$" mantıksal çarpımı göstermektedir. Mantıksal işlemlerin değişme özelliğinden (2.18) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_D(C) = (b + k) \cdot (b + k + v) \cdot v \cdot (b + v) \cdot (k + v). \qquad (2.19)$$

Yutma kuralı gereği $(b + k) \cdot (b + k + v) = (b + k)$ ve $v \cdot (b + v) = v$ olduğundan;

$$F_D(C) = (b + k) \cdot v \cdot (k + v) \qquad (2.20)$$

elde edilir. $v \cdot (k + v) = v \Rightarrow F_D(C) = (b + k) \cdot v = b \cdot v + k \cdot v$ olur. O halde $\{x_{c1}, x_{c3}\}$ ve $\{x_{c2}, x_{c3}\}$, C kümesinin D-indirgenmiş nitelik kümeleridir. Öte yandan C kümesinin D-çekirdeği $ÇEK_D(C) = \{x_{c1}, x_{c3}\} \cap \{x_{c2}, x_{c3}\} = \{x_{c3}\}$ şeklindedir. Bu sonuçlar da Örnek 2.5'in sonuçlarıyla örtüşmektedir.

2.2.3 Karar Kuralları

(2.1) ve (2.2)'de verilen kaba yaklaşımları kullanarak karar tablosunda yer alan verilerin karar kuralları bağlamında genelleştirilmiş bir hali sunulabilir. Bundan

dolayı bir karar tablosu "Eğer *{koşul(lar)}* ise *{sonuç}*" halindeki karar kurallarının bir kümesi olarak düşünülebilir. Burada koşul kısmı bir veya daha çok koşul niteliği tarafından alınan değerleri ifade eder. Kuralın koşul kısmındaki her bir atomik parça elementer koşul olarak adlandırılır. Sonuç veya karar kısmı ise bir veya daha fazla karar sınıfına yapılan atamayı gösterir.

Bu kısımda klasik kaba küme yaklaşımında çıkarılan karar kuralları ilgili bazı önemli kavramlara yer verilmiştir [15,18,37,40].

Tanım 2.24. $X_d = \{x_d\}$ ve $T = \{1,2,\cdots,n\}$ karar niteliği tarafından alınan değerlerin kümesi olsun. E evreni x_d karar niteliğine göre

$$Cl = \{Cl_t, t \in T\}\,;\; Cl_t = \{e \in E :\; f(e, x_d) = t\}$$

olmak üzere n adet sınıfa parçalanır.

Tanım 2.25. Klasik kaba küme yaklaşımında karar kurallarının söz dizimi aşağıdaki şekilde verilebilir:

"Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl'_1 veya $Cl'_2 \cdots$ veya Cl'_k sınıfına atanır", burada $e \in E$, $\{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\} \subseteq X_c$, $(r_1, r_2, \cdots, r_p) \in V_{c1} \times V_{c2} \times \ldots \times V_{cp}$ ve $\{Cl'_1, Cl'_2, \cdots, Cl'_k\} \subseteq \{Cl_1, Cl_2, \cdots, Cl_n\}$.

Bir karar kuralında sonuç bölümü tek bir sınıfa atamayı içeriyorsa (yani $k = 1$ ise) bu kural kesin; birden fazla sınıfa atamayı içeriyorsa yaklaşık veya belirsiz karar kuralı olarak adlandırılır. Kesin karar kuralları alt yaklaşıma ait nesneler kullanılarak çıkarılan kurallardır. Diğer yandan, yaklaşık karar kuralları ise sınır kümesine ait nesneler kullanılarak çıkarılan kurallardır.

Tanım 2.26. Karar kuralları kümesindeki tüm kurallar bağlamında herhangi bir kesin ve yaklaşık karar kuralının minimallik tanımı sırasıyla şu şekilde verilir:

- "Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl_t sınıfına atanır" formundaki kesin karar kuralı minimaldir ancak ve ancak "Eğer $f(e, x'_{c1}) = r'_1$ ve $f(e, x'_{c2}) = r'_2 \cdots$ ve $f(e, x'_{cs}) = r'_s$ ise e elemanı Cl_t sınıfına atanır" diye başka bir karar kuralı yoktur, öyle ki $\{x'_{c1}, x'_{c2}, \cdots, x'_{cs}\} \subseteq \{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\}$ ve herhangi bir $m \in \{1,2,\cdots,s\}$ için $r_m = r'_m$.

- $\{Cl'_1, Cl'_2, \cdots, Cl'_k\} \subseteq \{Cl_1, Cl_2, \cdots, Cl_n\}$ olmak üzere "Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2$ $\cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl'_1 veya $Cl'_2 \cdots$ veya Cl'_k sınıfına atanır" formundaki yaklaşık karar kuralı minimaldir ancak ve ancak "Eğer $f(e, x'_{c1}) = r'_1$ ve $f(e, x'_{c2}) = r'_2 \cdots$ ve $f(e, x'_{cs}) = r'_s$ ise e elemanı Cl'_1 veya $Cl'_2 \cdots$ veya Cl'_k sınıfına atanır" şeklinde başka bir karar kuralı yoktur, öyle ki $\{x'_{c1}, x'_{c2}, \cdots, x'_{cs}\} \subseteq \{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\}$ ve herhangi bir $m \in \{1,2, \cdots, s\}$ için $r_m = r'_m$.

Tanım 2.27. $\tilde{e} \in E$ olmak üzere eğer $f(\tilde{e}, x_{c1}) = r_1$, $f(\tilde{e}, x_{c2}) = r_2, \cdots, f(\tilde{e}, x_{cp}) = r_p$ ve $\tilde{e} \in Cl_t$ oluyorsa, bu $\tilde{e}$ elemanının "Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl_t sınıfına atanır" formundaki kesin karar kuralını destekler.

Tanım 2.28. $\tilde{e} \in E$ ve $\{Cl'_1, Cl'_2, \cdots, Cl'_k\} \subseteq \{Cl_1, Cl_2, \cdots, Cl_n\}$ olmak üzere eğer $f(\tilde{e}, x_{c1}) = r_1$, $f(\tilde{e}, x_{c2}) = r_2, \cdots$, $f(\tilde{e}, x_{cp}) = r_p$ ve $\tilde{e} \in SX_c(\{Cl'_1, Cl'_2, \cdots, Cl'_k\})$ oluyorsa bu $\tilde{e}$ elemanının "Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl'_1 veya $Cl'_2 \cdots$ veya Cl'_k sınıfına atanır" formundaki yaklaşık karar kuralını destekler.

Üstelik $\tilde{e} \in E$ elemanı bir karar kuralının en az koşul kısmını sağlıyorsa bu eleman kuralı kapsar denir. Açıkça anlaşılacağı üzere kuralı destekleyen bir eleman aynı zamanda kuralı kapsar.

Tanım 2.29. Aşağıdaki durumlar sağlanıyorsa karar kuralları kümesi tam olarak adlandırılır:

- $\forall Cl_t \in Cl$ için her bir $\tilde{e} \in \underline{X_c Cl_t}$ elemanı "Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2$ $\cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl_t sınıfına atanır" formundaki en az bir kesin karar kuralını destekler.
- $\forall \{Cl'_1, Cl'_2, \cdots, Cl'_k\} \subseteq \{Cl_1, Cl_2, \cdots, Cl_n\}$ için her bir $\tilde{e} \in SX_c(\{Cl'_1, Cl'_2, \cdots, Cl'_k\})$ elemanı "Eğer $f(e, x_{c1}) = r_1$ ve $f(e, x_{c2}) = r_2$ $\cdots$ ve $f(e, x_{cp}) = r_p$ ise e elemanı Cl'_1 veya $Cl'_2 \cdots$ veya Cl'_k sınıfına atanır" formundaki en az bir yaklaşık karar kuralını destekler.

Tanım 2.30. $\widetilde{K}$, karar kurallarının kümesi olsun. Bir $K \in \widetilde{K}$ kuralı için eğer $\left(\widetilde{K} - \{K\}\right)$ karar kuralları kümesi tam değilse bu durumda K, gereksiz olmayan kural olarak adlandırılır.

Tanım 2.31. Gereksiz kural içermeyen ve tam olan karar kuralları kümesine minimal küme denir.

2.3 Baskın Kaba Küme Yaklaşımı

Klasik kaba küme yaklaşımı, aldıkları değerler bakımından herhangi bir tercih sırasına sahip olmayan sıradan nitelikleri dikkate alırken doğası gereği tercih sıralı nitelikleri yani kriterleri göz ardı etmiştir. Bu durumla birlikte birden fazla kriter tarafından tanımlanan nesnelerin değerlendirilmesine olanak sağlayan çok kriterli karar analizi problemlerinde yetersiz kalmıştır. Bu tip problemlerin etkin bir şekilde üstesinden gelebilmek ve klasik kaba küme yaklaşımının sınırlı kaldığı noktaları iyileştirmek amacıyla Greco vd. [18] tarafından baskın kaba küme yaklaşımı tanıtılmıştır. Bu yaklaşımın diğerinden temel farkı, ayırt edilemezlik bağıntısının yerine, kriter ve tercih sırasına sahip karar sınıflarının dikkate alınmasından kaynaklanacak tutarsızlıkların üstesinden gelebilecek bir baskınlık bağıntısının tanımlanmasıdır.

Bu bölümde baskın kaba küme yaklaşımı kapsamında ele alınacak örnekler için aşağıda sunulan müşterilerin araba seçimine yönelik karar tablosu kullanılacaktır.

Tablo 2.4 Arabaların birtakım teknik özelliklerine göre müşteri görüşleri

	Koşul ve Karar Nitelikleri($\boldsymbol{X_c} \cup \boldsymbol{X_d}$)				
Arabalar ($\boldsymbol{E}$)	*Fiyat* ($x_{c1}, \downarrow$) 1-Düşük 2-Yüksek	*Km performansı* ($x_{c2}, \uparrow$) 1-Kötü 2-İyi	*Boyut* ($x_{c3}, \uparrow$) 1-Küçük 2-Büyük	*Maksimum hız* ($x_{c4}, \uparrow$) 1-Düşük 2-Yüksek	*Görüş* ($x_d, \uparrow$) 1-Olumsuz 2-Olumlu
a_1	2	1	2	1	2
a_2	1	1	2	1	1
a_3	1	2	1	1	2
a_4	2	2	2	2	2
a_5	2	1	2	1	2
a_6	1	1	1	1	1

Bu karar tablosunda $\boldsymbol{E} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $\boldsymbol{X_c} = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}\}$ ve $\boldsymbol{X_d} = \{x_d\}$ şeklindedir. Ayrıca " $\uparrow, \downarrow$ " sembolleri ile niteliklerin tercih sıraları belirtilmiştir." $\uparrow$ " sembolü ile niteliğin kazanç niteliği olduğu; " $\downarrow$ " sembolü ile de niteliğin maliyet

niteliği olduğu gösterilmektedir. Bir niteliğin aldığı değerler kümesi düşünüldüğünde söz konusu nitelik için daha yüksek değerler daha iyi oluyorsa niteliğe kazanç niteliği denir. Aksi halde kümedeki daha düşük değerler daha iyi oluyorsa nitelik maliyet niteliği olarak adlandırılır.

Bu bölümün devamında baskın kaba küme yaklaşımının matematiksel altyapısı [18, 32-37] ile ilgili gerekli bilgilere yer verilecek olup basitlik açısından $X_d = \{x_d\}$ olduğu varsayılacaktır.

Tanım 2.32. E evrensel kümesi, x_d karar niteliği ile karar sınıflarına ayrılır ve bu sınıflar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\delta = \{1,2,\cdots,k\}$ karar niteliği tarafından alınan değerlerin kümesi olmak üzere

$$Cl = \{Cl_n, n \in \delta\}\,;\; Cl_n = \{e \in E :\; f(e, x_d) = n\}.$$

Bu tanıma göre, $e \in E$ elemanı yalnız ve ancak tek bir karar sınıfına aittir.

Tanım 2.33. $e_1, e_2 \in E$, $x \in X$ ve S_x, x niteliğine göre E üzerinde bir üstünlük bağıntısı olsun. $e_1 S_x e_2$, e_1 elemanının x niteliğine göre en az e_2 elemanı kadar iyi olduğunu belirtir.

Tanım 2.34. S_{x_d}, x_d karar niteliğine göre E üzerinde bir üstünlük bağıntısı olsun. $e_i \in Cl_u$ ve $e_j \in Cl_v$ olmak üzere eğer $\forall\, u > v$ için $e_i S_{x_d} e_j$ ise karar sınıfları tercih sıralıdır denir.

Tanım 2.35. $Cl_n \in Cl$ karar sınıflarının artan ve azalan birleşimleri sırasıyla $Cl_n^{\geq}$ ve $Cl_n^{\leq}$ şeklinde gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$Cl_n^{\geq} = \bigcup_{s \geq n} Cl_s \;\; (n = 2, \cdots, k), \tag{2.21}$$

$$Cl_n^{\leq} = \bigcup_{s \leq n} Cl_s \;\; (n = 1, \cdots, k-1).$$

Örnek 2.8. Tablo 2.4.'ü kullanarak evrenin ayrışımı olan karar sınıfları ile bu sınıfların artan ve azalan birleşimlerini belirleyelim. Ayrıca karar tablosundaki a_3 ve a_4 elemanlarını fiyat ve boyut niteliklerine göre karşılaştırıp yorumlayalım.

x_d karar niteliğinin değer kümesi $\delta = \{1,2\}$ olmak üzere iki farklı değere sahip olduğundan E evrenini $Cl = \{Cl_1, Cl_2\}$ olmak üzere iki sınıfa parçalayacaktır.

$$Cl_1 = \{e \in E :\; f(e, x_d) = 1\} = \{a_2, a_6\}.$$

$$Cl_2 = \{e \in E :\; f(e, x_d) = 2\} = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}.$$

olarak elde edilir. Cl_2 sınıfının her elemanı karar yönünden Cl_1 sınıfının her elemanına tercih edildiğinden karar sınıfları tercih sıralıdır. Cl_1 sınıfı için artan birleşim ile Cl_2 sınıfı için azalan birleşimler şöyledir:

$$Cl_1^{\leq} = \bigcup_{s \leq 1} Cl_s = Cl_1 = \{a_2, a_6\},$$

$$Cl_2^{\geq} = \bigcup_{s \geq 2} Cl_s = Cl_2 = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}.$$

a_3 ve a_4 elemanlarını *Fiyat* ve *Boyut* niteliklerine göre kıyaslayalım. S_f ve S_b sırasıyla *Fiyat* ve *Boyut* nitelikleri üzerinde bir üstünlük bağıntısı olsun. *Fiyat* niteliğinde düşük değerler daha iyi olduğundan a_3 niteliği fiyat yönünden a_4 niteliğine tercih edilir. Bu durum S_f bağıntısı yardımıyla $a_3 S_f a_4$ olarak gösterilir. *Boyut* niteliğinde yüksek değerler daha iyi olduğundan a_4 niteliği boyut yönünden a_3 niteliğine tercih edilir. Bu durum S_b bağıntısı yardımıyla $a_4 S_b a_3$ olarak ifade edilir.

Tanım 2.36. $e_1, e_2 \in E$ ve $\forall q \in Q$ için $e_1 S_q e_2$ ise e_1 elemanı e_2 elemanına baskındır denir ve $e_1 D_Q e_2$ ile gösterilir.

Önerme 2.3. D_Q bağıntısı bir kısmi ön sıralama (partial preorder) bağıntısıdır.

Kanıt: D_Q bağıntısının kısmi ön sıralama bağıntısı olduğunu söyleyebilmek için yansıyan ve geçişkenlik özelliğine sahip olduğunu göstermeliyiz.

- Herhangi bir $e \in E$ elemanı herhangi bir niteliğe göre kendisine baskındır. O halde $\forall e \in E$ ve $\forall q \in Q$ için $e S_q e$ olduğundan D_Q yansıyan bir bağıntıdır.
- $\forall e_1, e_2, e_3 \in E$ ve $\forall q \in Q$ için $e_1 S_q e_2$ ve $e_2 S_q e_3$ ise $e_1 S_q e_3$ gerçeklendiğinden dolayı D_Q bağıntısı geçişlidir.

Tanım 2.37. $Q \subseteq X_c$ nitelik alt kümesi için bir $e_i \in E$ elemanının Q-ezilen (Q-dominating) ve Q-ezen (Q-dominated) kümeleri sırasıyla $D_Q^+(e_i)$ ve $D_Q^-(e_i)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_Q^+(e_i) = \{e_j \in E \mid e_j D_Q e_i\}, \tag{2.22}$$

$$D_Q^-(e_i) = \{e_j \in E \mid e_i D_Q e_j\}.$$

Tanımdan anlaşılacağı üzere bir e_i elemanının Q-ezilen kümesi Q'da yer alan her niteliğe göre en az e_i kadar iyi olan elemanları içerecektir. Öte yandan, e_i elemanının

Q-ezen kümesi ise Q'da yer alan her niteliğe göre en fazla e_i kadar iyi olan elemanları içerecektir.

Örnek 2.9. $Q = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}\} \subseteq X_c$ olmak üzere Tablo 2.4'te verilen karar tablosundaki her bir eleman için Q-ezen ve Q-ezilen kümeleri belirleyelim.

a_1 elemanını göz önüne alalım. Bu eleman Q kümesindeki her niteliğe göre en az kendisi ve a_5 elemanı kadar iyidir. Dolayısıyla $D_Q^-(a_1) = \{a_1, a_5\}$ olarak elde edilir. Diğer yandan, a_1 elemanı Q kümesindeki her bir niteliğe göre kendisi de dahil olmak üzere en çok a_2, a_4 ve a_5 elemanları kadar iyidir. O halde $D_Q^+(a_1) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ olur. Benzer şekilde diğer elemanlar için Q-ezen ve Q-ezilen kümeler şöyledir:

- $D_Q^-(a_2) = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}$; $D_Q^+(a_2) = \{a_2\}$.
- $D_Q^-(a_3) = \{a_3, a_6\}$; $D_Q^+(a_3) = \{a_3\}$.
- $D_Q^-(a_4) = \{a_1, a_4, a_5\}$; $D_Q^+(a_4) = \{a_4\}$.
- $D_Q^-(a_5) = \{a_1, a_5\}$; $D_Q^+(a_5) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$.
- $D_Q^-(a_6) = \{a_6\}$; $D_Q^+(a_6) = \{a_2, a_3, a_6\}$.

Tanım 2.38. Cl_n karar sınıflarının artan birleşimleri ($Cl_n^{\geq},\ n = 2, \cdots, k$) için Q-alt (Q-lower) ve Q-üst (Q-upper) yaklaşımları sırasıyla Q-ezilen ve Q-ezen kümeleri ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) = \{e_i \in E: D_Q^+(e_i) \subseteq Cl_n^{\geq}\}, \tag{2.23}$$

$$\overline{Q}(Cl_n^{\geq}) = \{e_i \in E: D_Q^-(e_i) \cap Cl_n^{\geq} \neq \emptyset\}.$$

Tanım 2.39. Cl_n karar sınıflarının azalan birleşimleri ($Cl_n^{\leq},\ n = 1, \cdots, k-1$) için Q-alt ve Q-üst yaklaşımları sırasıyla Q-ezen ve Q-ezilen kümeleri ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\underline{Q}(Cl_n^{\leq}) = \{e_i \in E: D_Q^-(e_i) \subseteq Cl_n^{\leq}\}, \tag{2.24}$$

$$\overline{Q}(Cl_n^{\leq}) = \{e_i \in E: D_Q^+(e_i) \cap Cl_n^{\leq} \neq \emptyset\}.$$

Tanım 2.40. Cl_n karar sınıflarının $Cl_n^{\geq}$ artan birleşimi ile $Cl_n^{\leq}$ azalan birleşiminin Q-sınır bölgeleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$BN_Q(Cl_n^{\geq}) = \overline{Q}(Cl_n^{\geq}) - \underline{Q}(Cl_n^{\geq}) \quad (n = 2, \cdots, k), \tag{2.25}$$

$$BN_Q(Cl_n^{\leqslant}) = \overline{Q}(Cl_n^{\leqslant}) - \underline{Q}(Cl_n^{\leqslant}) \quad (n = 1, \cdots, k-1).$$

Tanım 2.41. $\forall Q \subseteq X_c$ nitelik kümesine göre $Cl_n^{\leqslant}$ ve $Cl_n^{\geqslant}$ azalan ve artan birleşimlerinin yaklaşımlarının doğruluğu sırasıyla $\alpha_Q(Cl_n^{\leqslant})$ ve $\alpha_Q(Cl_n^{\geqslant})$ olarak gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\alpha_Q(Cl_n^{\leqslant}) = \frac{\left|\underline{Q}(Cl_n^{\leqslant})\right|}{\left|\overline{Q}(Cl_n^{\leqslant})\right|}, \ \alpha_Q(Cl_n^{\geqslant}) = \frac{\left|\underline{Q}(Cl_n^{\geqslant})\right|}{\left|\overline{Q}(Cl_n^{\geqslant})\right|}. \tag{2.26}$$

Örnek 2.10. Örnek 2.8 ile Örnek 2.9'da elde edilenleri kullanarak karar sınıflarının artan ve azalan birleşimleri için alt ve üst yaklaşımları belirleyelim. Karar sınıflarının her birleşimi için yaklaşımın doğruluğu ile sınır bölgesini hesaplayalım.

Öncelikle (2.23)'ü kullanarak karar sınıflarının artan birleşimleri için alt ve üst yaklaşımları hesaplayalım.

a_3 ve a_4 elemanının Q-ezilen kümesi Cl_2 sınıfının artan birleşimi tarafından kapsandığından alt yaklaşım sadece bu elemanları içerecektir.

$$\underline{Q}(Cl_2^{\geqslant}) = \{e_i \in E: D_Q^+(e_i) \subseteq Cl_2^{\geqslant}\} = \{a_3, \mathrm{a}_4\}.$$

a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 elemanlarının Q-ezen kümesi ile Cl_2 sınıfının artan birleşiminin ara kesit kümesi boş kümeden farklı olacaktır. O halde üst yaklaşım bu elemanları içerecektir.

$$\overline{Q}(Cl_2^{\geqslant}) = \{e_i \in E: D_Q^-(e_i) \cap Cl_2^{\geqslant} \neq \emptyset\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}.$$

Buradan $Cl_2^{\geqslant}$ için yaklaşımın doğruluğu $\alpha_Q(Cl_2^{\geqslant}) = \frac{\left|\underline{Q}(Cl_2^{\geqslant})\right|}{\left|\overline{Q}(Cl_2^{\geqslant})\right|} = 0.4$'dür. Ayrıca Q-sınır bölgesi (2.25) aracılığıyla $BN_Q(Cl_2^{\geqslant}) = \overline{Q}(Cl_2^{\geqslant}) - \underline{Q}(Cl_2^{\geqslant}) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} - \{a_3, \mathrm{a}_4\} = \{\mathrm{a}_1, a_2, a_5\}$ olarak elde edilir.

Benzer olarak (2.24) yardımıyla azalan birleşimler için alt ve üst yaklaşımları hesaplayalım.

Sadece a_6 elemanının Q-ezen kümesi Cl_1 sınıfının azalan birleşimi tarafından kapsandığından alt yaklaşım sadece bu elemanı içerecektir.

$$\underline{Q}(Cl_1^{\leqslant}) = \{e_i \in E: D_Q^-(e_i) \subseteq Cl_1^{\leqslant}\} = \{a_6\}.$$

a_1, a_2, a_5 ve a_6 elemanlarının Q-ezilen kümesi ile Cl_1 sınıfının azalan birleşiminin ara kesit kümesi boş kümeden farklıdır. O halde üst yaklaşım bu elemanlardan oluşur.

$$\overline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{e_i \in E: D_Q^+(e_i) \cap Cl_1^{\leq} \neq \emptyset\} = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}.$$

$Cl_1^{\leq}$ için yaklaşımın doğruluğu $\alpha_Q(Cl_1^{\leq}) = \frac{|\underline{Q}(Cl_1^{\leq})|}{|\overline{Q}(Cl_1^{\leq})|} = 0.25$'dir. Ayrıca Q-sınır bölgesi (2.25) aracılığıyla $BN_Q(Cl_1^{\leq}) = \overline{Q}(Cl_1^{\leq}) - \underline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_1, a_2, a_5, a_6\} - \{a_6\} = \{a_1, a_2, a_5\}$ olarak elde edilir.

Tanım 2.42. $e_1, e_2 \in E$ ve $\forall q \in Q \subseteq X_c$ için $e_1 S_q e_2$ iken e_2 elemanı karar niteliğine göre e_1 elemanına tercih ediliyorsa bu elemanlar baskınlık bağıntısına göre Q-tutarsızdır denir.

(2.25)'de karar sınıflarının artan ve azalan birleşimleri için tanımlanan Q-sınır kümeleri, Q-tutarsız elemanlardan oluşur. Bunun yanı sıra bir karar tablosundaki Q-tutarsız elemanların elde edilmesi amacıyla hesaplama karmaşıklığı yönünden daha efektif olan bir yöntem Uçan vd. [41] tarafından aşağıdaki önerme ile verilmiştir.

Önerme 2.4. $Q \subseteq X_c$ olmak üzere

$$\cup_{i,j \in I} \left(D_Q^+(e_j) \cap D_Q^-(e_i) \right)$$

kümesi Q-tutarsız elemanlardan oluşur, burada $e_i \in Cl_u$, $e_j \in Cl_v$ ve $u < v$'dir.

Örnek 2.11. Karar tablosundaki tutarsız elemanları Önerme 2.4. yardımıyla hesaplayalım. Bu elemanları, Örnek 2.10.'da elde ettiğimiz sınır kümesindeki elemanlar ile karşılaştıralım.

$a_i \in Cl_1$ ve $a_j \in Cl_2$ olmak üzere her bir a_i elemanının Q-ezen kümesi ile her bir a_j elemanının Q-ezilen kümesinin ara kesit kümelerini inceleyelim.

$D_Q^+(a_1) \cap D_Q^-(a_2) = \{a_1, a_2, a_5\}$, $D_Q^+(a_1) \cap D_Q^-(a_6) = \emptyset$,

$D_Q^+(a_3) \cap D_Q^-(a_2) = \emptyset$, $D_Q^+(a_3) \cap D_Q^-(a_6) = \emptyset$,

$D_Q^+(a_4) \cap D_Q^-(a_2) = \emptyset$, $D_Q^+(a_4) \cap D_Q^-(a_6) = \emptyset$,

$D_Q^+(a_5) \cap D_Q^-(a_2) = \{a_1, a_2, a_5\}$, $D_Q^+(a_5) \cap D_Q^-(a_6) = \emptyset$.

Yukarıdaki kümelerin birleşimleri alındığında Q-tutarsız küme $\{a_1, a_2, a_5\}$ olarak elde edilir. Bu elemanlar, Örnek 2.10.'da hesaplanan sınır kümesindeki elemanlar ile örtüşmektedir.

Önerme 2.5. $Q \subseteq X_c$ olmak üzere $Cl_n^{\leq}$ ve $Cl_n^{\geq}$ azalan ve artan birleşimlerin Q-alt ve Q-üst yaklaşımları için aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir:

1. $\underline{Q}(Cl_n^{\leq}) \subseteq Cl_n^{\leq} \subseteq \overline{Q}(Cl_n^{\leq})$,
2. $\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) \subseteq Cl_n^{\geq} \subseteq \overline{Q}(Cl_n^{\geq})$,
3. $\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) = E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ $(n = 2, \cdots, k)$,
4. $\underline{Q}(Cl_n^{\leq}) = E - \overline{Q}(Cl_{n+1}^{\geq})$ $(n = 1, \cdots, k-1)$,
5. $\overline{Q}(Cl_n^{\geq}) = E - \underline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ $(n = 2, \cdots, k)$,
6. $\overline{Q}(Cl_n^{\leq}) = E - \underline{Q}(Cl_{n+1}^{\geq})$ $(n = 1, \cdots, k-1)$,
7. $BN_Q(Cl_n^{\geq}) = BN_Q(Cl_{n-1}^{\leq})$ $(n = 2, \cdots, k)$,
8. $BN_Q(Cl_n^{\leq}) = BN_Q(Cl_{n+1}^{\geq})$ $(n = 1, \cdots, k-1)$.

Kanıt (Madde 1): $e \in \underline{Q}(Cl_n^{\leq})$ olsun. D_Q yansıyan bir bağıntı olduğundan $e \in D_Q^-(e)$ elde edilir. (2.24)'teki alt yaklaşım tanımından $D_Q^-(e) \subseteq (Cl_n^{\leq})$ ise $e \in Cl_n^{\leq}$ olur. Böylece $\underline{Q}(Cl_n^{\leq}) \subseteq Cl_n^{\leq}$ gerçeklenir.

Tersine; $e \in Cl_n^{\leq}$ olsun. D_Q yansıyan bir bağıntı olduğundan $e \in D_Q^+(e)$ elde edilir. $D_Q^+(e) \cap Cl_n^{\leq} \neq \emptyset$ olacağından (2.24)'teki üst yaklaşım tanımı gereği $e \in \overline{Q}(Cl_n^{\leq})$ olur. Böylece $Cl_n^{\leq} \subseteq \overline{Q}(Cl_n^{\leq})$ gerçeklenir.

İkinci madde de buna benzer olarak ispatlanabilir.

Kanıt (Madde 3): $(n = 2, \cdots, k)$ olmak üzere $e \in \underline{Q}(Cl_n^{\geq})$ olsun. Bu durumda (2.23)'deki alt yaklaşım tanımı gereği $D_Q^+(e) \subseteq Cl_n^{\geq}$ elde edilir. Buradan $D_Q^+(e) \cap (E - Cl_n^{\geq}) = \emptyset$ yazılabilir. $Cl_n^{\geq}$ kümesinin tümleyeni $Cl_{n-1}^{\leq}$ olduğuna göre $D_Q^+(e) \cap (E - Cl_n^{\geq}) = \emptyset$ ifadesi $D_Q^+(e) \cap Cl_{n-1}^{\leq} = \emptyset$ olarak düzenlenir. Buradan (2.24)'teki üst yaklaşım tanımı gereği $e \notin \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ ve $e \in E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ olur. Böylece

$$\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) \subseteq E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq}) \tag{2.27}$$

sağlanır. Tersine; $e \in E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ olsun. Bu durumda $e \notin \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ olur. (2.24)'deki üst yaklaşım tanımı gereği $D_Q^+(e) \cap Cl_{n-1}^{\leq} = \emptyset$ olur. $D_Q^+(e) \cap Cl_{n-1}^{\leq} = \emptyset$ ise $D_Q^+(e) \cap (E - Cl_{n-1}^{\leq}) = D_Q^+(e)$ elde edilir. $D_Q^+(e) \cap (E - Cl_{n-1}^{\leq}) = D_Q^+(e)$ ise $D_Q^+(e) \subseteq E - Cl_{n-1}^{\leq}$ olur. $Cl_{n-1}^{\leq}$ kümesinin tümleyeni $E - Cl_{n-1}^{\leq} = Cl_n^{\geq}$ olduğundan $D_Q^+(e) \subseteq E - Cl_{n-1}^{\leq}$ ifadesi $D_Q^+(e) \subseteq Cl_n^{\geq}$ olarak düzenlenir. Buradan (2.24)'teki alt yaklaşım tanımı gereği $e \in \underline{Q}(Cl_n^{\geq})$. Böylece

$$\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) \supseteq E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq}) \tag{2.28}$$

elde edilir. (2.27) ve (2.28)'den hareketle $\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) = E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})$ olduğu gösterilir.

Dördüncü, beşinci ve altıncı maddeler de buna benzer olarak kanıtlanabilir.

Kanıt (Madde 7): 3. ve 5. özellikleri kullanarak

$$BN_Q(Cl_n^{\geq}) = \overline{Q}(Cl_n^{\geq}) - \underline{Q}(Cl_n^{\geq}) = \left(E - \underline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})\right) - \left(E - \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq})\right)$$

$$= \overline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq}) - \underline{Q}(Cl_{n-1}^{\leq}) = BN_Q(Cl_{n-1}^{\leq}).$$

Sekizinci madde de buna benzer olarak ispatlanabilir.

2.3.1 İndirgemeler ve Çekirdek Küme

Bu bölüm baskın kaba küme yaklaşımı temelinde nitelik indirgeme ve çekirdek küme ile vazgeçilemez, değiştirebilir ve gereksiz nitelik türlerini içermektedir [32].

$\forall Q \subseteq X_c$ için karar sınıflarının tüm azalan ve artan birleşimleri ile baskınlık bağıntısı anlamında tutarlı olan nesneler, Q-doğru sınıflandırılmış nesneler olarak adlandırılır. Cl parçalanmasının Q kriterler kümesine göre yaklaşımının kalitesi, Q-doğru sınıflandırılmış nesnelerin sayısının, karar tablosundaki tüm nesnelerin sayısına oranı olarak tanımlanır. Q-doğru sınıflandırılmış nesneler, $Cl_n^{\geq}$ $(n = 2, \cdots, k)$ ve $Cl_n^{\leq}$ $(n = 1, \cdots, k-1)$ birleşimlerinin Q-sınır kümesine ait olmadığından dolayı Q kriterler kümesine göre Cl parçalanmasının yaklaşımının kalitesi

$$\gamma_Q(Cl) = \frac{\left|E - \left(\left(\cup_{n\in\{2,\cdots,k\}} BN_Q(Cl_n^{\geq})\right) \cup \left(\cup_{n\in\{1,\cdots,k-1\}} BN_Q(Cl_n^{\leq})\right)\right)\right|}{|E|} \tag{2.29}$$

olarak yazılabilir. Burada $|\cdot|$, kümenin eleman sayısını göstermektedir.

$\gamma_{X_c}(Cl) = \gamma_Q(Cl)$ olacak şekilde her minimal alt küme $Q \subseteq X_c$, Cl parçalanmasına göre X_c nitelikler kümesinin bir indirgenmişidir ve IND_{Cl} ile gösterilir. Bir karar

tablosunda koşul nitelikler kümesi X_c için birden fazla indirgenmiş küme olabilir. Tüm bu indirgenmiş kümelerin ara kesit kümesi çekirdek olarak adlandırılır ve ÇEK_{Cl} ile gösterilir. Bu bağlamda aşağıda belirtildiği gibi üç farklı nitelik türünden bahsedilebilir:

- Çekirdek kümesi içerisinde yer alan **vazgeçilemez** nitelikler
- Bazı indirgenmiş nitelikler kümesinde bulunup çekirdekte bulunmayan **değiştirilebilir** nitelikler
- Hem indirgenmiş nitelikler kümesinde hem de çekirdekte yer almayan **gereksiz** nitelikler

Örnek 2.12. Tablo 2.4 için indirgenmiş nitelik kümelerini, çekirdek kümesini ve her bir niteliğin türünü belirleyelim.

$X_c = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}, x_{c4}\}$ koşul niteliklerinin indirgenmiş kümelerini hesaplamak için boş küme ve kendisinden farklı $2^4 - 2 = 14$ alt kümesi göz önüne alınmalıdır. Bunlardan $Q_1 = \{x_{c2}, x_{c3}\}$ ve $Q_2 = \{x_{c1}, x_{c2}\}$ alt kümeleri için $\gamma_{X_c}(Cl) = \gamma_{Q_j}(Cl)$ $(j = 1,2)$ sağlanmaktadır. Dolayısıyla $IND_{Cl} = \{Q_1, Q_2\}$ olarak elde edilir.

Örnek olması açısından Q_1 kümesinin X_c nitelikler kümesinin bir indirgenmişi olduğunu gösterelim. Öncelikle her bir eleman için Q_1-ezen ve Q_1-ezilen kümeleri belirleyelim.

- $D^-_{Q_1}(a_1) = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}$, $D^+_{Q_1}(a_1) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$.
- $D^-_{Q_1}(a_2) = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}$, $D^+_{Q_1}(a_2) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$.
- $D^-_{Q_1}(a_3) = \{a_3, a_6\}$, $D^+_{Q_1}(a_3) = \{a_3, a_4\}$.
- $D^-_{Q_1}(a_4) = E$, $D^+_{Q_1}(a_4) = \{a_4\}$.
- $D^-_{Q_1}(a_5) = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}$, $D^+_{Q_1}(a_5) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$.
- $D^-_{Q_1}(a_6) = \{a_6\}$, $D^+_{Q_1}(a_6) = E$.

(2.23) aracılığıyla karar sınıflarının artan birleşimleri için alt ve üst yaklaşımlar şu şekildedir:

$$\underline{Q}(Cl^{\geq}_2) = \{a_3, a_4\},$$

$$\overline{Q}(Cl^{\geq}_2) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}.$$

(2.24) aracılığıyla karar sınıflarının azalan birleşimleri için alt ve üst yaklaşımlar şu şekildedir:

$$\underline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_6\},$$

$$\overline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_1, a_2, a_5, a_6\}.$$

(2.25) aracılığıyla karar sınıflarının artan ve azalan birleşimleri için sınır kümeleri şöyledir:

$$BN_{Q_1}(Cl_2^{\geq}) = \{a_1, a_2, a_5\}, \qquad BN_{Q_1}(Cl_1^{\leq}) = \{a_1, a_2, a_5\}.$$

(2.29)'dan $\gamma_{Q_1}(Cl) = \frac{|(E-\{a_1,a_2,a_5\})|}{|E|} = \frac{1}{2}$ olarak hesaplanır. Aynı zamanda $\gamma_{X_c}(Cl) = \frac{|(E-\{a_1,a_2,a_5\})|}{|E|} = \frac{1}{2}$ ve $\gamma_{X_c}(Cl) = \gamma_{Q_1}(Cl)$ olduğundan Q_1 kümesi X_c nitelikler kümesinin bir indirgenmişidir.

$$ÇEK_{Cl} = \cap IND_{Cl} = Q_1 \cap Q_2 = \{x_{c2}, x_{c3}\} \cap \{x_{c1}, x_{c2}\} = \{x_{c2}\}$$

Çekirdek küme ve indirgenmiş kümelerden faydalanarak her bir niteliğin türünü belirleyebiliriz. x_{c2} niteliği çekirdek kümesinde yer aldığından vazgeçilemez niteliktir. x_{c1} ve x_{c3} nitelikleri en az bir indirgenmiş küme içerisinde yer alıp çekirdekte bulunmamaktadır. Dolayısıyla bu nitelikler değiştirilebilirdir. x_{c4} niteliği hem çekirdek küme hem de herhangi bir indirgenmiş nitelik kümesinde yer almadığından gereksizdir.

2.3.2 Karar Kuralları

Baskınlık bağıntısı aracılığıyla elde edilen (2.23) ve (2.24)'teki yaklaşımları kullanarak karar tablosunda tercih sırasına sahip nitelikler bağlamında ifade edilen elemanlardan *eğer {koşul(lar)} ise {sonuç}* formunda karar kuralları elde edilebilir. Burada koşul kısmı, belirli koşul niteliklerinin aldığı değerler ile oluşturulan elementer koşulların birleşimini, karar kısmı ise koşul kısmını sağlayan nesnenin hangi karar sınıfına ait olacağını göstermektedir. Örneğin aşağıdaki gibi bir karar kuralının verildiğini düşünelim:

Eğer

- Hastanın ateşi en az 38.5 °C ve
- Tat alma duyusunun kaybı en fazla %60,

ise hastanın SARS-CoV-2 virüsünü taşıma belirtisi en az orta seviyededir.

Burada hastanın ateş durumu ile tat alma duyusu karar tablosunda yer alan koşul niteliklerinden iki tanesi olacaktır. Virüsü taşıma seviyesi ise karar niteliğidir. Kuralda hastanın ateşinin en az 38.5 $°C$ olması ile tat alma duyusunun en fazla %60 oranında kaybedilmesi kuralı oluşturan elementer koşullardır. Bu elementer koşulları sağlayan hastaların ise virüsü taşıma anlamında orta veya daha üst seviye bir karar sınıfına ait olacağı belirtilmektedir.

Bu bölümün devamında baskın kaba küme yaklaşımı ile çıkarılan karar kurallarına ait bazı önemli tanımlar [18,21,35-37, 40] verilmiştir.

Baskın kaba küme yaklaşımında karar kuralları alt yaklaşımlardan elde edilen kesin kurallar, üst yaklaşımlardan elde edilen olası kurallar ile sınır bölgesinden elde edilen yaklaşık kurallar olmak üzere üç grupta değerlendirilir.

Tanım 2.43. Baskın kaba küme yaklaşımında kesin, olası ve yaklaşık karar kurallarının söz dizimi aşağıdaki şekilde verilir:

- Kesin $Dec_{\geq,\leq}$-kurallar, karar sınıflarının artan ve azalan birleşimlerinin alt yaklaşımındaki elemanlar kullanılarak elde edilen kuralladır. Bunlara ait söz dizimi şöyledir:

    i. Kesin $Dec_{\geq}$-kural (Tip-1): "Eğer $f(e, x_{c1}) \geq r_1$ ve $f(e, x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) \geq r_p$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_n^{\geq}$ aittir.", burada $\{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\} \subseteq X_c$, $(r_1, r_2, \cdots, r_p) \in V_{c1} \times V_{c2} \times \cdots \times V_{cp}$ ve $n = 2, \cdots, k$.

    ii. Kesin $Dec_{\leq}$-kural (Tip-3): "Eğer $f(e, x_{c1}) \leq r_1$ ve $f(e, x_{c2}) \leq r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) \leq r_p$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_n^{\leq}$ aittir.", burada $\{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\} \subseteq X_c$, $(r_1, r_2, \cdots, r_p) \in V_{c1} \times V_{c2} \times \cdots \times V_{cp}$ ve $n = 1, \cdots, k-1$.

- Olası $Dec_{\geq,\leq}$-kurallar, karar sınıflarının artan ve azalan birleşimlerinin üst yaklaşımındaki elemanlar kullanılarak elde edilen kuralladır. Bunlara ait söz dizimi şöyledir:

    i. Olası $Dec_{\geq}$-kural (Tip-2): "Eğer $f(e, x_{c1}) \geq r_1$ ve $f(e, x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) \geq r_p$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_n^{\geq}$ aittir.", burada

$\{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\} \subseteq X_c$, $(r_1, r_2, \cdots, r_p) \in V_{c1} \times V_{c2} \times \cdots \times V_{cp}$ ve $n = 2, \cdots, k$.

ii. Olası $Dec_{\leq}$-kural (Tip-4): "Eğer $f(e, x_{c1}) \leq r_1$ ve $f(e, x_{c2}) \leq r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) \leq r_p$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_n^{\leq}$ aittir.", burada $\{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\} \subseteq X_c$, $(r_1, r_2, \cdots, r_p) \in V_{c1} \times V_{c2} \times \cdots \times V_{cp}$ ve $n = 1, \cdots, k-1$.

- Yaklaşık $Dec_{\geq,\leq}$-kural (Tip-5), karar sınıflarının artan ve azalan birleşimlerinin sınır bölgesine ait elemanlar kullanılarak elde edilen kurallardır. Bu kuralın söz dizimi şöyledir:

  i. "Eğer $f(e, x_{c1}) \geq r_1$ ve $f(e, x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $f(e, x_{ck}) \geq r_k$ ve $f(e, x_{c(k+1)}) \leq r_{k+1} \cdots$ ve $f(e, x_{cp}) \leq r_p$ ise $e \in Cl_u \cup Cl_{u+1} \cup \cdots \cup Cl_v$", burada $\{x_{c1}, x_{c2}, \cdots, x_{cp}\} \subseteq X_c$, $(r_1, r_2, \cdots, r_p) \in V_{c1} \times V_{c2} \cdots \times V_{cp}$, $u, v \in \delta$ ve $u < v$.

Tanım 2.44. $\tilde{e} \in E$ ve K herhangi bir karar kuralı olmak üzere eğer $\tilde{e}$ elemanı K karar kuralının hem koşul hem de karar kısmını sağlıyorsa $\tilde{e}$ elemanı K karar kuralını destekler denir. Öte yandan, eğer $\tilde{e}$ elemanı K karar kuralının en az koşul kısmını sağlıyorsa $\tilde{e}$ elemanı K karar kuralını kapsar denir.

Örnek 2.13. Aşağıda verilen kuralın Tablo 2.4.'ten elde edildiğini varsayalım. Bu kuralı destekleyen ve kapsayan elemanları belirleyelim.

Olası K : "Eğer *Km performansı* ≥ 1 ve *Boyut* ≥ 2 ise *Görüş* ≥ 2"

Öncelikle verilen kuralın koşul kısmını sağlayan nesneleri inceleyelim. *Km performansı* ≥ 1 elementer koşulu karar tablosundaki tüm elemanlar tarafından sağlanmaktadır. Öte yandan *Boyut* ≥ 2 ise sadece a_1, a_2, a_4 ve a_5 elemanları tarafından sağlanmaktadır. O halde bu iki elementer koşul birlikte a_1, a_2, a_4 ve a_5 elemanları tarafından sağlanır. Dolayısıyla bu elemanlar K kuralını kapsar. Bu elemanlardan yalnız a_2 kuralın karar kısmını sağlamamaktadır. Dolayısıyla bu eleman dışında kalan a_1, a_4 ve a_5 elemanları K kuralını destekler.

Tanım 2.45. φ_K, K karar kuralını kapsayan elemanların kümesini göstermek üzere kesin, olası ve yaklaşık kurallar için gereksiz elementer koşul tanımı aşağıda sırasıyla verilmiştir:

- K: "Eğer $\psi_1: f(e, x_{c1}) \geq r_1$ ve $\psi_2: f(e, x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $\psi_p: f(e, x_{cp}) \geq r_p$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_n^{\geq}$ aittir." kuralından ψ_i $i \in \{1, \cdots, p\}$ elementer koşulunun kaldırılması sonucunda yine $\varphi_K \subseteq \underline{Q}(Cl_n^{\geq})$ sağlanıyorsa ψ_i gereksizdir.
- K: "Eğer $\psi_1: f(e, x_{c1}) \leq r_1$ ve $\psi_2: f(e, x_{c2}) \leq r_2 \cdots$ ve $\psi_p: f(e, x_{cp}) \leq r_p$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_n^{\leq}$ aittir." kuralından ψ_i $i \in \{1, \cdots, p\}$ elementer koşulunun kaldırılması sonucunda yine $\varphi_K \subseteq \underline{Q}(Cl_n^{\leq})$ sağlanıyorsa ψ_i gereksizdir.
- K: "Eğer $\psi_1: f(e, x_{c1}) \geq r_1$ ve $\psi_2: f(e, x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $\psi_p: f(e, x_{cp}) \geq r_p$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_n^{\geq}$ aittir." kuralından ψ_i $i \in \{1, \cdots, p\}$ elementer koşulunun kaldırılması sonucunda yine $\varphi_K \subseteq \overline{Q}(Cl_n^{\geq})$ sağlanıyorsa ψ_i gereksizdir.
- K: "Eğer $\psi_1: f(e, x_{c1}) \leq r_1$ ve $\psi_2: f(e, x_{c2}) \leq r_2 \cdots$ ve $\psi_p: f(e, x_{cp}) \leq r_p$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_n^{\leq}$ aittir." kuralından ψ_i $i \in \{1, \cdots, p\}$ elementer koşulunun kaldırılması sonucunda yine $\varphi_K \subseteq \overline{Q}(Cl_n^{\leq})$ sağlanıyorsa ψ_i gereksizdir.
- K: "Eğer $\psi_1: f(e, x_{c1}) \geq r_1$ ve $\psi_2: f(e, x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $\psi_k: f(e, x_{ck}) \geq r_k$ ve $\psi_{k+1}: f(e, x_{c(k+1)}) \leq r_{k+1} \cdots$ ve $\psi_p: f(e, x_{cp}) \leq r_{cp}$ ise $e \in Cl_u \cup Cl_{u+1} \cup \cdots \cup Cl_v$" kuralından ψ_i $i \in \{1, \cdots, p\}$ elementer koşulunun kaldırılması sonucunda yine $\varphi_K \subseteq \overline{Q}(Cl_u^{\leq}) \cap \overline{Q}(Cl_v^{\geq})$ sağlanıyorsa ψ_i gereksizdir.

Tanım 2.46. Gereksiz elementer koşul içermeyen kural optimal (minimal) olarak adlandırılır.

Örnek 2.14. Örnek 2.13.'te verilen kuralın elementer koşullarını inceleyerek optimal olup olmadığını belirleyelim.

Kilometre performansı ≥ 1 elementer koşulu kuraldan kaldırılırsa kural yine a_1, a_2, a_4 ve a_5 elemanları tarafından kapsanır. $\{a_1, a_2, a_4, a_5\} \subseteq \overline{Q}(Cl_2^{\geq})$ olduğundan bu elementer koşul gereksizdir. Diğer yandan *Boyut* ≥ 2 elementer koşulu kuraldan kaldırılırsa kural tüm elemanlar tarafından kapsanacaktır. $a_6 \notin \overline{Q}(Cl_2^{\geq})$ olduğundan bu elementer koşul gereksiz değildir. Kural en az bir tane gereksiz elementer koşul içerdiği sebebiyle optimal değildir.

Tanım 2.47. Karar kuralları kümesine göre kesin, olası ve yaklaşık kuralların minimallik tanımları sırasıyla aşağıda verilmiştir:

- "Eğer $f(e,x_{c1}) \geq r_1$ ve $f(e,x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $f\left(e,x_{cp}\right) \geq r_p$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_n^{\geq}$ aittir." formundaki kural minimaldir eğer "Eğer $f(e,x'_{c1}) \geq h_1$ ve $f(e,x'_{c2}) \geq h_2 \cdots$ ve $f(e,x'_{cs}) \geq h_s$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_m^{\geq}$ aittir." formunda başka bir kural yoktur, öyle ki $\{x'_{c1},\cdots,x'_{cs}\} \subseteq \left\{x_{c1},\cdots,x_{cp}\right\}$, $h_j \leq r_j$ $\forall j \in \{1,\cdots,s\}$ ve $m \geq n$.

- "Eğer $f(e,x_{c1}) \leq r_1$ ve $f(e,x_{c2}) \leq r_2 \cdots$ ve $f\left(e,x_{cp}\right) \leq r_p$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_n^{\leq}$ aittir." formundaki kural minimaldir eğer "Eğer $f(e,x'_{c1}) \leq h_1$ ve $f(e,x'_{c2}) \leq h_2 \cdots$ ve $f(e,x'_{cs}) \leq h_s$ ise e elemanı kesin olarak $Cl_m^{\leq}$ aittir." formunda başka bir kural yoktur, öyle ki $\{x'_{c1},\cdots,x'_{cs}\} \subseteq \left\{x_{c1},\cdots,x_{cp}\right\}$, $h_j \geq r_j$ $\forall j \in \{1,\cdots,s\}$ ve $m \leq n$.

- "Eğer $f(e,x_{c1}) \geq r_1$ ve $f(e,x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $f\left(e,x_{cp}\right) \geq r_p$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_n^{\geq}$ aittir." formundaki kural minimaldir eğer "Eğer $f(e,x'_{c1}) \geq h_1$ ve $f(e,x'_{c2}) \geq h_2 \cdots$ ve $f(e,x'_{cs}) \geq h_s$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_m^{\geq}$ aittir." formunda başka bir kural yoktur, öyle ki $\{x'_{c1},\cdots,x'_{cs}\} \subseteq \left\{x_{c1},\cdots,x_{cp}\right\}$, $h_j \leq r_j$ $\forall j \in \{1,\cdots,s\}$ ve $m \geq n$.

- "Eğer $f(e,x_{c1}) \leq r_1$ ve $f(e,x_{c2}) \leq r_2 \cdots$ ve $f\left(e,x_{cp}\right) \leq r_p$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_n^{\leq}$ aittir." formundaki kural minimaldir eğer "Eğer $f(e,x'_{c1}) \leq h_1$ ve $f(e,x'_{c2}) \leq h_2 \cdots$ ve $f(e,x'_{cs}) \leq h_s$ ise e elemanı muhtemel olarak $Cl_m^{\leq}$ aittir." formunda başka bir kural yoktur, öyle ki $\{x'_{c1},\cdots,x'_{cs}\} \subseteq \left\{x_{c1},\cdots,x_{cp}\right\}$, $h_j \geq r_j$ $\forall j \in \{1,\cdots,s\}$ ve $m \leq n$.

- "Eğer $f(e,x_{c1}) \geq r_1$ ve $f(e,x_{c2}) \geq r_2 \cdots$ ve $f(e,x_{ck}) \geq r_k$ ve $f\left(e,x_{c(k+1)}\right) \leq r_{k+1} \cdots$ ve $f\left(e,x_{cp}\right) \leq r_{cp}$ ise $e \in Cl_u \cup Cl_{u+1} \cup \cdots \cup Cl_v$" formundaki kural minimaldir eğer "Eğer $f(e,x'_{c1}) \geq h_1$ ve $f(e,x'_{c2}) \geq h_2 \cdots$ ve $f(e,x'_{cl}) \geq h_l$ ve $f\left(e,x'_{c(l+1)}\right) \leq h_{l+1} \cdots$ ve $f(e,x'_{cs}) \leq h_{cs}$ ise $e \in Cl_a \cup Cl_{a+1} \cup \cdots \cup Cl_b$" formunda başka bir kural yoktur, öyle ki $\{x'_{c1},\cdots,x'_{cl}\} \subseteq \{x_{c1},\cdots,x_{ck}\}$, $\left\{x'_{c(l+1)},\cdots,x'_{cs}\right\} \subseteq \left\{x_{c(k+1)},\cdots,x_{cp}\right\}$, $h_j \leq r_j$ $\forall j \in \{1,\cdots,l\}$, $h_j \geq r_j$ $\forall j \in \{l+1,\cdots,s\}$ ve $u \leq a < b \leq v$.

Örnek 2.15. Aşağıda verilen iki kesin karar kuralının birbirine göre minimal olup olmadığını değerlendirelim.

K_1: Eğer $f(e, x_{c1}) \geq 5$ ve $f(e, x_{c2}) \geq 3$ ve $f(e, x_{c3}) \geq 7$ ise e kesin olarak $Cl_2^{\geq}$ aittir.

K_2: Eğer $f(e, x_{c1}) \geq 4$ ve $f(e, x_{c3}) \geq 5$ ise e kesin olarak $Cl_3^{\geq}$ aittir.

K_2 kuralının koşul kısmı K_1 kuralına göre daha genel olup karar kısmı daha özeldir. O halde K_1 kuralı K_2 kuralına göre minimal değildir.

Tanım 2.48. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa karar kuralları kümesi tamdır:

- $\forall \tilde{e} \in \underline{Q}(Cl_n^{\geq})$, "$e$ elemanı kesin olarak $Cl_r^{\geq}$ aittir" karar kısmına sahip en az bir kesin $Dec_{\geq}$ karar kuralını destekler. Burada $r, n \in \{2, \cdots, k\}$ ve $r \geq n$.
- $\forall \tilde{e} \in \underline{Q}(Cl_n^{\leq})$, "$e$ elemanı kesin olarak $Cl_r^{\leq}$ aittir" karar kısmına sahip en az bir kesin $Dec_{\leq}$ karar kuralını destekler. Burada $r, n \in \{1, \cdots, k-1\}$ ve $r \leq n$.
- $\forall \tilde{e} \in \overline{Q}(Cl_n^{\geq})$, "$e$ elemanı muhtemel olarak $Cl_r^{\geq}$ aittir" karar kısmına sahip en az bir olası $Dec_{\geq}$ karar kuralını destekler. Burada $r, n \in \{2, \cdots, k\}$ ve $r \geq n$.
- $\forall \tilde{e} \in \overline{Q}(Cl_n^{\leq})$, "$e$ elemanı muhtemel olarak $Cl_r^{\leq}$ aittir" karar kısmına sahip en az bir olası $Dec_{\leq}$ karar kuralını destekler. Burada $r, n \in \{1, \cdots, k-1\}$ ve $r \leq n$.
- $\forall \tilde{e} \in \overline{Q}(Cl_m^{\leq}) \cap \overline{Q}(Cl_n^{\geq})$, "$e \in Cl_u \cup Cl_{u+1} \cup \cdots \cup Cl_v$" karar kısmına sahip en az bir yaklaşık $Dec_{\geq,\leq}$ karar kuralını destekler. Burada $m, n, u, v \in \delta$ ve $u \leq m < n \leq v$.

Tanım 2.49. Eğer bir karar kuralı, karar kuralları kümesinden kaldırıldığında tamlık bozuluyorsa bu kurala gereksiz olmayan kural denir. Aksi halde kural gereksizdir.

Tanım 2.50. Gereksiz kural içermeyen ve tam olan karar kuralları kümesi minimaldir denir.

Baskın kaba küme yaklaşımına dayalı karar kurallarının çıkarılmasında kullanılan DomLEM [36] algoritmasına ait sözde kod Şekil 2.3'te yardımcı algoritmalar ise Şekil 2.4'te verilmiştir. DomLEM algoritması, yaklaşımlardaki elemanları kullanmak suretiyle minimal kuralları elde etmeyi hedeflemektedir.

Algorithm 1: DOMLEM

Input: L_u-karar sınıflarının artan birleşimlerinin alt yaklaşımlarını içeren küme, L_d-karar sınıflarının azalan birleşimlerinin alt yaklaşımlarını içeren küme
Output: $Dec_{\geq}$ ve $Dec_{\leq}$ -kesin karar kurallarını içeren $\widetilde{K}$ kümesi

$\widetilde{K} := \emptyset$;
for *each* $B \in L_u$ **do**
  $\overline{\Psi} :=$ Find_Rules$(B, type\text{-}1)$;
  $\widetilde{K} := \widetilde{K} \cup \overline{\Psi}$;
  for *each rule* $K \in \widetilde{K}$ **do**
    if *K is not minimal rule* **then**
      $\widetilde{K} := \widetilde{K} - \{K\}$;
    end
  end
end
for *each* $B \in L_d$ **do**
  $\overline{\Psi} :=$ Find_Rules$(B, type\text{-}3)$;
  $\widetilde{K} := \widetilde{K} \cup \overline{\Psi}$;
  for *each rule* $K \in \widetilde{K}$ **do**
    if *K is not minimal rule* **then**
      $\widetilde{K} := \widetilde{K} - \{K\}$;
    end
  end
end

Şekil 2.3 DomLEM algoritmasına ait sözde kod

Algorithm 2: Find_Rules

Input: A-yaklaşım kümesi, type-kural tipi
Output: A yaklaşım kümesini kapsayan $\overline{\Psi}$-karar kuralları kümesi

$G := A$;
$\overline{\Psi} := \emptyset$;
while $G \neq \emptyset$ **do**
  $\Psi := \emptyset$;
  $S := G$;
  while $\Psi = \emptyset$ *or not* $[\Psi] \subseteq A$ **do**
    $best := \emptyset$;
    $Cond :=$ Find_Elementary_Conditions(type,S);
    for *each* $elem \in Cond$ **do**
      if *evaluate*$(\{elem\} \cup \Psi)$ *is better than evaluate*$(\{best\} \cup \Psi)$ **then**
        $best := elem$;
      end
    end
    $\Psi := \Psi \cup \{best\}$;
    $S := S \cap [\Psi]$;
  end
  for *each elementary condition* $\psi \in \Psi$ **do**
    if $[\Psi - \{\psi\}] \subset A$ **then**
      $\Psi := \Psi - \{\psi\}$;
    end
  end
  $\overline{\Psi} = \overline{\Psi} \cup \{\Psi\}$;
  $G := A - \cup_{e \in \overline{\Psi}}[\Psi]$;
end

Algorithm 3: Find_Elementary_Conditions

Input: type-kural tipi, S-kümesi
Output: EC-elementer koşullar kümesi

EC $:= \emptyset$;
for *each criterion* $x_c \in Q$ **do**
  if *type is 1 and* x_c *is gain-type* **then**
    $Cond := \{(f(e, x_c) \geq r_e) : \exists e \in S \quad (f(e, x_e) = r_e)\}$;
  else
    if *type is 1 and* x_c *is cost-type* **then**
      $Cond := \{(f(e, x_c) \leq r_e) : \exists e \in S \quad (f(e, x_e) = r_e)\}$;
    else
      if *type is 3 and* x_c *is gain-type* **then**
        $Cond := \{(f(e, x_c) \leq r_e) : \exists e \in S \quad (f(e, x_e) = r_e)\}$;
      else
        if *type is 3 and* x_c *is gain-type* **then**
          $Cond := \{(f(e, x_c) \geq r_e) : \exists e \in S \quad (f(e, x_e) = r_e)\}$;
        end
      end
    end
  end
  EC $:=$ **EC** $\cup Cond$;
end

Şekil 2.4 DomLEM için yardımcı algoritmalar

Yukarıdaki sözde kodlar incelendiğinde DomLEM algoritması iteratif bir şekilde önce karar sınıflarının artan birleşimlerinin alt yaklaşımlarındaki elemanları kullanarak daha sonra azalan birleşimlerinin alt yaklaşımlarındaki elemanları kullanarak minimal karar kurallarını çıkarmaktadır. Find_Rules algoritması, yaklaşım kümesindeki elemanları dikkate alarak karar kurallarını türetme işini gerçekleştirmektedir. Bu algoritmada Ψ kuralın koşul kısmı için aday olan elementer koşulların oluşturduğu küme, [Ψ] ise Ψ'deki elementer koşulların tamamı ile eşleşen elemanların oluşturduğu kümedir. Ψ'nin kuralın koşul kısmı

olarak kabul görmesi için $\emptyset \neq [\Psi] = \bigcap_{\psi \in \Psi}[\psi] \subseteq A$ sağlanması gerekmektedir. Burada A, karar kurallarının çıkarılması için dikkate alınan yaklaşım kümesidir. Ψ'deki elementer koşulların kabul görmesinin hemen ardından gereksiz elementer koşul olup olmadığı kontrol edilmektedir. Gereksiz olanlar Ψ kümesinden çıkarılarak kalanlar ile yeni bir kural oluşturulmakta ve karar kuralları kümesine eklenmektedir. Karar kuralları kümesi, A yaklaşım kümesindeki örneklerin tamamını kapsadığında kural çıkarma işlemi tamamlanmaktadır. Aksi taktirde kalan elemanlar ile kural çıkarma işlemine devam edilmektedir. Ayrıca bu algoritma da en iyi elementer koşul seçimi *evaluate*(Ψ) fonksiyonu ile gerçekleştirilmektedir. Bu fonksiyon, $\frac{|[\Psi] \cap G|}{|[\Psi]|}$ oranını maksimum yapan elementer koşulu seçmektedir. Birden fazla elementer koşulun bu orana göre eşit olması durumunda $|[\Psi] \cap G|$ değerini maksimum yapan elementer koşul seçilmektedir. Find_Elementary_Conditions algoritması ise olası tüm elementer koşulların kümesini üretmektedir.

Örnek 2.16. DomLEM algoritmasını kullanarak Tablo 2.4.'ten kesin karar kurallarını çıkaralım.

Kesin karar kuralları için sınıfların artan ve azalan birleşimlerinin alt yaklaşımları olan $\underline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_6\}$ ve $\underline{Q}(Cl_2^{\geq}) = \{a_3, a_4\}$ kümelerini dikkate alacağız.

$A = \underline{Q}(Cl_2^{\geq}) = \{a_3, a_4\}$ yaklaşımını göz önüne alalım. a_3 ve a_4 elemanının değerleri üzerinden elementer koşullar kümesi $EC = \{\psi_1^1 : f(e, x_{c1}) \leq 1, \psi_2^1 : f(e, x_{c1}) \leq 2, \psi_3^1 : f(e, x_{c2}) \geq 2, \psi_4^1 : f(e, x_{c3}) \geq 1, \psi_5^1 : f(e, x_{c3}) \geq 2, \psi_6^1 : f(e, x_{c4}) \geq 2\}$ oluşturulur. $\Psi = \emptyset$ ve $G = A$ olmak üzere bu kümeden en iyi elementer koşulu seçmeliyiz.

$\frac{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}]|} = \frac{1}{3}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}]|} = \frac{2}{6}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}]|} = 1$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_4^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_4^1\}]|} = \frac{1}{4}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_5^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_5^1\}]|} = 1$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_6^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_6^1\}]|} = \frac{2}{5}$ olmak üzere ψ_3^1 ve ψ_5^1 en yüksek değere sahip elementer koşullardır. Ayrıca $|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}] \cap G|$ ile $|[\Psi \cup \{\psi_5^1\}] \cap G|$ değerleri de birbirine eşit olduğundan bu elementer koşullardan herhangi biri seçilebilir. ψ_3^1 seçilsin. $\Psi = \{\psi_3^1\}$ olarak güncellenir. $[\Psi] \subseteq A$ olduğundan Ψ kuralın koşul kısmı olarak kabul görür. Tek elementer koşul içerdiğinden ötürü elementer koşulun gereksizliğinden bahsedilemez. Çıkarılan bu kural, karar kuralları kümesine eklenir.

K_1: Eğer $f(e, x_{c2}) \geq 2$ ise e kesin olarak $Cl_2^{\geq}$ sınıfına aittir.

K_1 kuralı A yaklaşım kümesindeki tüm elemanları kapsaması sebebiyle artan birleşimin alt yaklaşımından kural çıkarma işlemi tamamlanır.

Benzer şekilde şimdi ise $A = \underline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_6\}$ yaklaşımını göz önüne alalım. a_6 elemanının değerleri üzerinden elementer koşullar kümesi $EC = \{\psi_1^1: f(e, x_{c1}) \geq 1\ \psi_2^1: f(e, x_{c2}) \leq 1, \psi_3^1: f(e, x_{c3}) \leq 1, \psi_4^1: f(e, x_{c4}) \leq 1\}$ oluşturulur. $\Psi = \emptyset$ ve $G = A$ olmak üzere bu kümeden en iyi elementer koşulu seçmeliyiz.

$\frac{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}]|} = \frac{1}{6}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}]|} = \frac{1}{4}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}]|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_4^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_4^1\}]|} = \frac{1}{4}$ olmak üzere en yüksek değere sahip ψ_3^1 ilk elementer koşul olarak seçilir ve $\Psi = \{\psi_3^1\}$ olarak güncellenir. $[\Psi] \not\subseteq A$ olduğundan Ψ kümesine elementer koşul eklenmeye devam edilecektir. Yeni elementer koşullar $\{a_6\} \cap [\Psi] = \{a_6\}$ olmak üzere a_6 elemanından türetilecektir. Bunlar $EC = \{\psi_1^2: f(e, x_{c1}) \geq 1\ \psi_2^2: f(e, x_{c2}) \leq 1, \psi_3^2: f(e, x_{c4}) \leq 1\}$ şeklindedir.

$\frac{|[\Psi \cup \{\psi_1^2\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_1^2\}]|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_2^2\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_2^2\}]|} = 1$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_3^2\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_3^2\}]|} = \frac{1}{2}$ olmak üzere ψ_2^2 en yüksek değere sahip elementer koşuldur. O halde $\Psi = \{\psi_3^1, \psi_2^2\}$ olarak güncellenir. $[\Psi] \subseteq A$ olduğundan dolayı Ψ kuralın koşul kısmı olarak kabul görür. Ψ kümesinden herhangi bir elementer koşulun çıkarılması sonucunda $[\Psi] \not\subseteq A$ olduğundan gereksiz elementer koşul yoktur. O halde çıkarılan bu kural, karar kuralları kümesine eklenir.

K_2: Eğer $f(e, x_{c3}) \leq 1$ ve $f(e, x_{c2}) \leq 1$ ise e kesin olarak $Cl_1^{\leq}$ sınıfına aittir.

K_2 kuralı A yaklaşım kümesindeki tüm elemanları kapsadığından ötürü azalan birleşimin alt yaklaşımından kural çıkarma işlemi tamamlanır. Sonuç olarak K_1 ve K_2'den oluşan minimal kesin karar kuralları kümesi elde edilir.

2.3.3 Nitelikler için Tercih Sıraları

Daha önceden belirtildiği üzere baskın kaba küme yaklaşımının getirdiği önemli yeniliklerden biri klasik kaba küme yaklaşımının üstesinden gelemediği tercih sıralı nitelikler (kriterler) ile analize olanak sağlayabilmesidir. Bir niteliğin tercih sırasına sahip olması o niteliğin aldığı değerlerin arasında karar yönünden monoton bir ilişkinin olduğu anlamını taşımaktadır. Ürün kalitesi, borç oranı, pazar payı vb. nitelikler bunlara örnek olarak verilebilir [18]. Eğer bir niteliğin aldığı değerler arttıkça daha tercih edilebilir oluyorsa kazanç, azaldıkça daha tercih edilebilir

oluyorsa maliyet niteliği olarak isimlendirilir. Örneğin bir şirketin borç oranı yönünden iflas etme riski değerlendirilmek istenilsin. Bu durumda, karar sınıfları tercih sırasına sahip olup düşük risk sınıfı, yüksek risk sınıfına göre tercih önceliklidir. Borç oranı arttıkça şirketin iflas etme riski yükselirken bu oran düştükçe iflas etme riski azalır. O halde borç oranı için düşük değerler, yüksek değerlere tercih edildiğinden ötürü bu nitelik maliyet niteliğine örnek olarak gösterilebilir.

Niteliklerin tercih sırasına karar verme işlemi alan uzmanı eşliğinde yapılabildiği gibi alan uzmanı eksikliğinde [34]'de önerilen yöntem ile gerçekleştirilir. Alan uzmanı eşliğinde tercih sıralı nitelikler orijinal karar tablosu üzerinde maliyet veya kazanç niteliği olarak etiketlendikten sonra karar kuralları çıkarılabilir. Alan uzmanı eksikliğinde orijinal karar tablosunun birtakım dönüşümlerden geçmesi gerekmektedir. Bu dönüşümler aşağıda verilen karar tablosu üzerinde adım adım açıklanmıştır [34]:

Tablo 2.5 Banka müşterilerinin kredi kart başvurularının onaylanma durumu

	Koşul ve Karar Nitelikleri$(\boldsymbol{X_c \cup X_d})$			
Müşteriler $(\boldsymbol{E})$	*Gelir* (x_{c1})	*Kredi Notu* (x_{c2})	*Mevcut Kredi Kartı Sayısı* (x_{c3})	*Kart Onay Durumu* (x_d)
e_1	9500	Yüksek	1	Yüksek
e_2	7300	Normal	2	Yüksek
e_3	4580	Normal	2	Düşük
e_4	7630	Düşük	0	Yüksek
e_5	5680	Düşük	1	Düşük
e_6	8000	Normal	2	Düşük
e_7	6800	Normal	1	Orta
e_8	4790	Düşük	2	Orta

Burada $\boldsymbol{X_c} = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\}$ ve $\boldsymbol{X_d} = \{x_d\}$ şeklindedir. Öncelikle x_d karar niteliğinin aldığı farklı değer sayısı kadar orijinal karar tablosu çoğaltılacaktır. x_d karar niteliği düşük, orta ve yüksek olmak üzere üç farklı değer aldığından bu üç değer için birer karar tablosu çoğaltılır. Bu karar tablolarında x_d karar niteliğinin değerleri karar tablosunun hangi karar sınıfından çoğaltıldığı baz alınarak 0 veya 1 değerleri ile değiştirilir. Diğer bir deyişle değer, karar tablosunun üretildiği sınıfa ait ise 1 ile aksi taktirde 0 ile temsil edilir. Tablo 2.6, Tablo 2.7 ve Tablo 2.8 sırasıyla düşük, orta yüksek sınıflarından üretilen karar tablolarını göstermektedir.

Tablo 2.6 Düşük sınıf için karar nitelik değerlerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c} \cup \boldsymbol{X'_d})$			
$(\boldsymbol{E})$	(x_{c1})	(x_{c2})	(x_{c3})	$(x_d^D, \uparrow)$
e_1	9500	Yüksek	1	0
e_2	7300	Normal	2	0
e_3	4580	Normal	2	1
e_4	7630	Düşük	0	0
e_5	5680	Düşük	1	1
e_6	8000	Normal	2	1
e_7	6800	Normal	1	0
e_8	4790	Düşük	2	0

Tablo 2.7 Orta sınıf için karar nitelik değerlerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c} \cup \boldsymbol{X''_d})$			
$(\boldsymbol{E})$	(x_{c1})	(x_{c2})	(x_{c3})	$(x_d^O, \uparrow)$
e_1	9500	Yüksek	1	0
e_2	7300	Normal	2	0
e_3	4580	Normal	2	0
e_4	7630	Düşük	0	0
e_5	5680	Düşük	1	0
e_6	8000	Normal	2	0
e_7	6800	Normal	1	1
e_8	4790	Düşük	2	1

Tablo 2.8 Yüksek sınıf için karar nitelik değerlerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c} \cup \boldsymbol{X'''_d})$			
$(\boldsymbol{E})$	(x_{c1})	(x_{c2})	(x_{c3})	$(x_d^Y, \uparrow)$
e_1	9500	Yüksek	1	1
e_2	7300	Normal	2	1
e_3	4580	Normal	2	0
e_4	7630	Düşük	0	1
e_5	5680	Düşük	1	0
e_6	8000	Normal	2	0
e_7	6800	Normal	1	0
e_8	4790	Düşük	2	0

Bu tablolarda $\boldsymbol{X_c} = \{x_{c1}, x_{c2}, x_{c3}\}$, $\boldsymbol{X'_d} = \{x_d^D\}$, $\boldsymbol{X''_d} = \{x_d^O\}$ ve $\boldsymbol{X'''_d} = \{x_d^Y\}$ şeklindedir. "↑" sembolü kazanç niteliğini göstermektedir.

Karar niteliğine ilişkin dönüştürme süreci tamamlandıktan sonra koşul niteliklerini dönüştürme işlemi kategorik ve nümerik nitelikler için ayrı ayrı gerçekleştirilir. Tablo 2.5'te *Gelir* ile *Kredi Kartı Sayısı* nümerik koşul nitelikleri iken *Kredi Notu*

kategorik koşul niteliğine örnektir. Herhangi bir nümerik nitelik karar tablosunda iki tane olacak şekilde çoğaltılır. Bunlardan biri maliyet, diğeri kazanç niteliği olarak etiketlenir. Örneğin x_{c1} nümerik niteliğinden sırasıyla maliyet ve kazanç olmak üzere x_{c1}^1 ve x_{c1}^2 nitelikleri çoğaltılır. Tablo 2.9, Tablo 2.10 ve Tablo 2.11 sırasıyla Tablo 2.6, Tablo 2.7 ve Tablo 2.8'de yer alan nümerik niteliklere ait karar tablolarının dönüşümlerini göstermektedir.

Tablo 2.9 Düşük sınıf için nümerik koşul niteliklerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c' \cup X_d'})$					
$(\boldsymbol{E})$	$(x_{c1}^1, \downarrow)$	$(x_{c1}^2, \uparrow)$	(x_{c2})	$(x_{c3}^1, \downarrow)$	$(x_{c3}^2, \uparrow)$	$(x_d^D, \uparrow)$
e_1	9500	9500	Yüksek	1	1	0
e_2	7300	7300	Normal	2	2	0
e_3	4580	4580	Normal	2	2	1
e_4	7630	7630	Düşük	0	0	0
e_5	5680	5680	Düşük	1	1	1
e_6	8000	8000	Normal	2	2	1
e_7	6800	6800	Normal	1	1	0
e_8	4790	4790	Düşük	2	2	0

Tablo 2.10 Orta sınıf için nümerik koşul niteliklerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c' \cup X_d''})$					
$(\boldsymbol{E})$	$(x_{c1}^1, \downarrow)$	$(x_{c1}^2, \uparrow)$	(x_{c2})	$(x_{c3}^1, \downarrow)$	$(x_{c3}^2, \uparrow)$	$(x_d^O, \uparrow)$
e_1	9500	9500	Yüksek	1	1	0
e_2	7300	7300	Normal	2	2	0
e_3	4580	4580	Normal	2	2	0
e_4	7630	7630	Düşük	0	0	0
e_5	5680	5680	Düşük	1	1	0
e_6	8000	8000	Normal	2	2	0
e_7	6800	6800	Normal	1	1	1
e_8	4790	4790	Düşük	2	2	1

Tablo 2.11 Yüksek sınıf için nümerik koşul niteliklerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c' \cup X_d'''})$					
$(\boldsymbol{E})$	$(x_{c1}^1, \downarrow)$	$(x_{c1}^2, \uparrow)$	(x_{c2})	$(x_{c3}^1, \downarrow)$	$(x_{c3}^2, \uparrow)$	$(x_d^Y, \uparrow)$
e_1	9500	9500	Yüksek	1	1	1
e_2	7300	7300	Normal	2	2	1
e_3	4580	4580	Normal	2	2	0
e_4	7630	7630	Düşük	0	0	1
e_5	5680	5680	Düşük	1	1	0
e_6	8000	8000	Normal	2	2	0
e_7	6800	6800	Normal	1	1	0
e_8	4790	4790	Düşük	2	2	0

Bu tablolarda $\boldsymbol{X_c'} = \{x_{c1}^1, x_{c1}^2, x_{c2}, x_{c3}^1, x_{c3}^2\}$, $\boldsymbol{X_d'} = \{x_d^D\}$, $\boldsymbol{X_d''} = \{x_d^O\}$ ve $\boldsymbol{X_d'''} = \{x_d^Y\}$ şeklindedir. "↓" sembolü maliyet niteliğini, "↑" sembolü ise kazanç niteliğini göstermektedir.

Kategorik değere sahip koşul nitelikleri çoğaltma ve tercih sırası etiketleme yönünden sürekli koşul niteliğinin dönüşüm sürecine, kategorik değerlerin transformasyonu yönünden karar niteliğinin dönüşüm sürecine benzerlik göstermektedir. Kategorik koşul niteliğinden, aldığı her bir farklı değer için biri maliyet diğeri kazanç olacak şekilde iki tane koşul niteliği çoğaltılır. Niteliğin hangi değerden çoğaltıldığına bağlı olarak orijinal kategorik nitelik değerleri 0 veya 1 olarak değiştirilir. Örneğin x_{c2} kategorik niteliğinden sırasıyla yüksek değer için x_{c2}^{Y1}(maliyet) ve x_{c2}^{Y2}(kazanç), normal değer için x_{c2}^{N1}(maliyet) ve x_{c2}^{N2}(kazanç), düşük değer için x_{c2}^{D1}(maliyet) ve x_{c2}^{D2}(kazanç) nitelikleri çoğaltılır. x_{c2}^{Y1} niteliği için x_{c2} kolonundaki yüksek değerler 1 ile diğerleri 0 olarak temsil edilir. Tablo 2.12, Tablo 2.13 ve Tablo 2.14, her bir karar sınıfı için çoğaltılmış tablolarda yer alan kategorik niteliklerin dönüşümlerini göstermektedir.

Tablo 2.12 Düşük sınıf için kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c''} \cup \boldsymbol{X_d'})$										
$(\boldsymbol{E})$	$(x_{c1}^1, \downarrow)$	$(x_{c1}^2, \uparrow)$	$(x_{c2}^{Y1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{Y2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{N1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{N2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{D1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{D2}, \uparrow)$	$(x_{c3}^1, \downarrow)$	$(x_{c3}^2, \uparrow)$	$(x_d^D, \uparrow)$
e_1	9500	9500	1	1	0	0	0	0	1	1	0
e_2	7300	7300	0	0	1	1	0	0	2	2	0
e_3	4580	4580	0	0	1	1	0	0	2	2	1
e_4	7630	7630	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e_5	5680	5680	0	0	0	0	1	1	1	1	1
e_6	8000	8000	0	0	1	1	0	0	2	2	1
e_7	6800	6800	0	0	1	1	0	0	1	1	0
e_8	4790	4790	0	0	0	0	1	1	2	2	0

Tablo 2.13 Orta sınıf için kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c''} \cup \boldsymbol{X_d''})$										
$(\boldsymbol{E})$	$(x_{c1}^1, \downarrow)$	$(x_{c1}^2, \uparrow)$	$(x_{c2}^{Y1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{Y2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{N1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{N2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{D1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{D2}, \uparrow)$	$(x_{c3}^1, \downarrow)$	$(x_{c3}^2, \uparrow)$	$(x_d^O, \uparrow)$
e_1	9500	9500	1	1	0	0	0	0	1	1	0
e_2	7300	7300	0	0	1	1	0	0	2	2	0
e_3	4580	4580	0	0	1	1	0	0	2	2	0
e_4	7630	7630	0	0	0	0	1	1	0	0	0
e_5	5680	5680	0	0	0	0	1	1	1	1	0
e_6	8000	8000	0	0	1	1	0	0	2	2	0
e_7	6800	6800	0	0	1	1	0	0	1	1	1
e_8	4790	4790	0	0	0	0	1	1	2	2	1

Tablo 2.14 Yüksek sınıf için kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü

	$(\boldsymbol{X_c''} \cup \boldsymbol{X_d'''})$										
$(\boldsymbol{E})$	$(x_{c1}^{1}, \downarrow)$	$(x_{c1}^{2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{Y1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{Y2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{N1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{N2}, \uparrow)$	$(x_{c2}^{D1}, \downarrow)$	$(x_{c2}^{D2}, \uparrow)$	$(x_{c3}^{1}, \downarrow)$	$(x_{c3}^{2}, \uparrow)$	$(x_{d}^{Y}, \uparrow)$
e_1	9500	9500	1	1	0	0	0	0	1	1	1
e_2	7300	7300	0	0	1	1	0	0	2	2	1
e_3	4580	4580	0	0	1	1	0	0	2	2	0
e_4	7630	7630	0	0	0	0	1	1	0	0	1
e_5	5680	5680	0	0	0	0	1	1	1	1	0
e_6	8000	8000	0	0	1	1	0	0	2	2	0
e_7	6800	6800	0	0	1	1	0	0	1	1	0
e_8	4790	4790	0	0	0	0	1	1	2	2	0

Bu tablolarda $\boldsymbol{X_c''} = \{x_{c1}^{1}, x_{c1}^{2}, x_{c2}^{Y1}, x_{c2}^{Y2}, x_{c2}^{N1}, x_{c2}^{N2}, x_{c2}^{D1}, x_{c2}^{D2}, x_{c3}^{1}, x_{c3}^{2}\}$, $\boldsymbol{X_d'} = \{x_d^D\}$, $\boldsymbol{X_d''} = \{x_d^O\}$ ve $\boldsymbol{X_d'''} = \{x_d^Y\}$ şeklindedir. "↓" sembolü maliyet niteliğini, "↑" sembolü ise kazanç niteliğini göstermektedir.

Alan uzmanı eksikliğinde bir karar tablosundaki niteliklerin tercih sırasının belirlenmesi işlemi karar niteliklerinin, sürekli koşul niteliklerinin ve kategorik koşul niteliklerinin dönüşümü ile gerçekleştirilmiştir. Bu süreç sonucunda elde edilen dönüştürülmüş her bir karar tablosu, karar kurallarının çıkarılma aşamasında kullanılacaktır.

2.3.4 Sınıflandırma Yöntemi

Bu bölümde baskın kaba küme temelinde çıkarılan karar kuralları kullanılarak bir elemanın hangi karar sınıfına atanacağını belirlemek için kullanılan iki yöntem tanıtılacaktır [33-34]. Bunların ilki alan uzmanı eşliğinde tercih sırası belirlenen nitelikler varlığında çıkarılan karar kuralları ile sınıflandırmaya yönelik bir yöntemdir. Oysa diğeri alan uzmanı eksikliğinde tercih sırası belirlenen nitelikler varlığında çıkarılan karar kuralları ile sınıflandırmaya yönelik bir yöntemdir.

Yaklaşımlar temelinde çıkarılan kurallar ile oluşturulan bir karar modelinin performansını belirlemek hem modelin yeterliliği hem de kuralların kalitesi açısından son derece önemlidir. Herhangi bir karar modelinin performansı ise karar kurallarının yeni elemanların sınıflarını öngörmedeki başarısı olarak yorumlanabilir. Bir elemanın karar sınıfını belirleyebilmek için öncelikle bu elemanın hangi kuralları kapsadığını belirlemek gerekir. σ_e, karar sınıfı öngörülmesi istenen *e* elemanı tarafından kapsanan kuralların kümesi olmak üzere aşağıda belirtildiği gibi üç farklı durum söz konusudur:

- Durum-1*:* e elemanı hiçbir karar kuralını kapsamamaktadır, $|\sigma_e| = 0$.
- Durum-2*:* e elemanı yalnız bir tane karar kuralını kapsamaktadır, $|\sigma_e| = 1$.
- Durum-3*:* e elemanı birden fazla karar kuralını kapsamaktadır, $|\sigma_e| > 1$.

2.3.4.1 Orijinal Karar Tablosu için Sınıflandırma Yöntemi

Durum-1:

$\rho(e, Cl_n)$, e elemanının Cl_n sınıfına ait olma skoru olmak üzere bu durum, e elemanının her bir karar sınıfına atanma olasılığının eşit olduğunu ifade eder ve $\rho(e, Cl_n) = \frac{1}{k}$ olarak gösterilir. Burada k, karar niteliğinin aldığı farklı değerlerin sayısıdır.

Durum-2:

$\sigma_e = \{r\}$ olmak üzere her bir Cl_n sınıfı için $\rho_r(e, Cl_n)$ skor değeri (2.30)'dan yararlanılarak hesaplanır. Bu skor e elemanının Cl_n karar sınıfına atanmasının kesinlik derecesi olarak ifade edilebilir.

$$\rho_r(e, Cl_n) = \frac{|\varphi_r \cap Cl_n|^2}{|\varphi_r||Cl_n|} \tag{2.30}$$

burada φ_r , r kuralını kapsayan elemanların kümesini, $|\cdot|$ kümenin eleman sayısını göstermektedir.

Cl_n karar sınıfına göre r kuralının güvenilirliği ile görece gücü sırasıyla (2.31) ve (2.32)'de olduğu gibi tanımlanmaktadır.

$$G\ddot{U}V_r = \frac{|\varphi_r \cap Cl_n|}{|\varphi_r|} \tag{2.31}$$

$$G\ddot{U}\text{Ç}_r = \frac{|\varphi_r \cap Cl_n|}{|Cl_n|} \tag{2.32}$$

Dolayısıyla $\rho_r(e, Cl_n)$ skoru, r kuralının güvenilirliği ile görece gücünün çarpımı olarak ifade edilebilir. Son aşamada e elemanı $\rho_r(e, Cl_n)$ değerini en yüksek yapan Cl_n sınıfına atanır.

Durum-3:

$\sigma_e = R$ ve $|R| > 1$ olmak üzere her bir Cl_n karar sınıfına ait $\rho_R(e, Cl_n)$ skor değeri

$$\rho_R(e, Cl_n) = \rho_R^+(e, Cl_n) - \rho_R^-(e, Cl_n) \tag{2.33}$$

bağıntısı ile hesaplanır. Burada $\rho_R^+(e, Cl_n)$ ve $\rho_R^-(e, Cl_n)$ sırasıyla $\rho_R(e, Cl_n)$ skorunun pozitif ve negatif kısımlarını belirtmektedir. Hesaplanan bu skor "e elemanı Cl_n sınıfına aittir" kararının lehine ve aleyhine olan kuralların net dengesi olarak ifade edilebilir.

$\rho_R^+(e, Cl_n)$, e elemanının Cl_n sınıfına atanması ile uyumlu olan kuralları dikkate almaktadır. Bunlar e elemanının, sırasıyla $Cl_n \subseteq Cl_q^{\leq}$ ve $Cl_n \subseteq Cl_s^{\geq}$ olacak şekilde $Cl_q^{\leq}$ ve $Cl_s^{\geq}$ birleşimlerine atanmasını belirten $r_i \in Pos_{\sigma_e}$ $(i = 1, \dots, l)$ karar kurallarıdır.

$$\rho_R^+(e, Cl_n) = \frac{\left|(\varphi_{r_1} \cap Cl_n) \cup \cdots \cup \left(\varphi_{r_l} \cap Cl_n\right)\right|^2}{\left|\varphi_{r_1} \cup \cdots \cup \varphi_{r_l}\right| |Cl_n|}, \tag{2.34}$$

$$r_i \in Pos_{\sigma_e}\ (i = 1, \dots, l) \subseteq R.$$

Burada $\varphi_{r_1}, \cdots, \varphi_{r_l}$, e elemanının Cl_n sınıfına atanması ile uyumlu olan kuralları kapsayan elemanların kümesidir. $\rho_R^+(e, Cl_n)$, e elemanı tarafından kapsanan ve bu örneğin Cl_n sınıfına atanması ile uyumlu karar kurallarının tamamının güvenilirliği ile görece gücünün çarpımını ifade etmektedir.

Öte yandan $\rho_R^-(e, Cl_n)$, e elemanının Cl_n sınıfına atanması ile uyumlu olmayan kuralları dikkate almaktadır. Bunlar e elemanının, sırasıyla $Cl_n \cap Cl_q^{\leq} = \emptyset$ ve $Cl_n \cap Cl_s^{\geq} = \emptyset$ olacak şekilde $Cl_q^{\leq}$ ve $Cl_s^{\geq}$ birleşimlerine atanmasını belirten $r_i \in Neg_{\sigma_e}$ $(i = l+1, \dots, m)$ karar kurallarıdır.

$$\rho_R^-(e, Cl_n) = \frac{\left|\left(\varphi_{r_{l+1}} \cap Cl_{r_{l+1}}^{\geq}\right) \cup \cdots \cup \left(\varphi_{r_h} \cap Cl_{r_h}^{\geq}\right) \cup \left(\varphi_{r_{h+1}} \cap Cl_{r_{h+1}}^{\leq}\right) \cup \cdots \cup \left(\varphi_{r_m} \cap Cl_{r_m}^{\leq}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{r_{l+1}} \cup \cdots \cup \varphi_{r_h} \cup \varphi_{r_{h+1}} \cup \cdots \cup \varphi_m\right| \left|Cl_{r_{l+1}}^{\geq} \cup \cdots \cup Cl_{r_h}^{\geq} \cup Cl_{r_{h+1}}^{\leq} \cup \cdots \cup Cl_{r_m}^{\leq}\right|}, \tag{2.35}$$

$$r_i \in Neg_{\sigma_e}\ (i = l+1, \dots, m) \subseteq R.$$

Burada $\varphi_{r_{l+1}}, \cdots, \varphi_{r_m}$, e elemanının Cl_n sınıfına atanması ile uyumlu olmayan kuralları kapsayan elemanların kümesidir. $Cl_{r_{l+1}}^{\geq}, \cdots, Cl_{r_h}^{\geq}$, e elemanının karar sınıflarının artan birleşimlerine atanmasını belirten $r_i \in Neg_{\sigma_e}$ $(i = l+1, \dots, h)$ karar kurallarını, $Cl_{r_{h+1}}^{\leq}, \cdots, Cl_{r_m}^{\leq}$ ise e elemanının karar sınıflarının azalan birleşimlerine atanmasını belirten $r_i \in Neg_{\sigma_e}$ $(i = h+1, \dots, m)$ karar kurallarını göstermektedir. $\rho_R^-(e, Cl_n)$, e elemanı tarafından kapsanan ve bu örneğin Cl_n'den farklı bir karar sınıfına atanmasını belirten karar kurallarının tamamının güvenilirliği ile görece gücünün çarpımını ifade etmektedir. Son aşamada e elemanı Durum-2'ye benzer olarak $\rho_R(e, Cl_n)$ değerini en yüksek yapan Cl_n sınıfına atanır.

Örnek 2.17. Tablo 2.5'te verilen karar sistemi için koşul ve karar niteliklerin tercih sıralarının alan uzmanı eşliğinde $(x_{c1},\uparrow)$, $(x_{c2},\uparrow)$, $(x_{c3},\downarrow)$ ve $(x_{c1},\uparrow)$ olarak etiketlendiğini varsayalım. Bunun sonucunda orijinal karar tablosundan çıkarılan Şekil 2.5'teki minimal karar kurallarını kullanarak $\tilde{e} = (4300, \text{Düşük}, 0)$ elemanının karar sınıfını belirleyelim.

Kural-1: Eğer $x_{c1} \leq 4580$ ise $x_d \leq$ Düşük

Kural-2: Eğer $x_{c1} \leq 6800$ ise $x_d \leq$ Orta

Kural-3: Eğer $x_{c3} \leq 0$ ise $x_d \geq$ Yüksek

Kural-4: Eğer $x_{c2} \geq$ Yüksek ise $x_d \geq$ Yüksek

Kural-5: Eğer $x_{c3} \leq 1$ ve $x_{c2} \geq$ Normal ise $x_d \geq$ Orta

Şekil 2.5 Tablo 2.5'den çıkarılan minimal kesin karar kuralları

$\tilde{e}$ elemanı Şekil 2.5'te verilen minimal kesin karar kurallarından Kural-1, Kural-2 ve Kural-3'ü kapsamaktadır. $|\sigma_{\tilde{e}}| = 3 > 1$ olduğundan dolayı Durum-3 dikkate alınmalıdır.

İlk önce Düşük sınıfı için skor hesabını yapalım. $\tilde{e}$ elemanının Düşük sınıfına atanması ile Kural-1 ve Kural-2 uyumlu iken Kural-3 uyumsuzdur. O halde $\rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}})$ ve $\rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}})$ skorları şu şekilde hesaplanır:

$$\rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) = \frac{\left|(\varphi_{\text{Kural}-1} \cap Cl_{\text{Düşük}}) \cup (\varphi_{\text{Kural}-2} \cap Cl_{\text{Düşük}})\right|^2}{|\varphi_{\text{Kural}-1} \cup \varphi_{\text{Kural}-2}||Cl_{\text{Düşük}}|}$$

$$= \frac{|(\{e_3\} \cap \{e_3, e_5, e_6\}) \cup (\{e_3, e_5, e_7, e_8\} \cap \{e_3, e_5, e_6\})|^2}{|\{e_3\} \cup \{e_3, e_5, e_7, e_8\}||\{e_3, e_5, e_6\}|} = \frac{2^2}{4 \times 3} = \frac{1}{3},$$

$$\rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) = \frac{|(\varphi_{\text{Kural}-3} \cap Cl^{\geq}_{\text{Yüksek}})|^2}{|\varphi_{\text{Kural}-3}||Cl^{\geq}_{\text{Yüksek}}|} = \frac{|(\{e_4\} \cap \{e_1, e_2, e_4\})|^2}{|\{e_4\}||\{e_1, e_2, e_4\}|} = \frac{1^2}{1 \times 3} = \frac{1}{3},$$

$$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) = \rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) - \rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) = 0.$$

Orta sınıfı için skor hesabını yapalım. $\tilde{e}$ elemanının Orta sınıfına atanması ile Kural-2 uyumlu iken Kural-1 ve Kural-3 uyumsuzdur. O halde $\rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}})$ ve $\rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}})$ skorları şu şekilde hesaplanır:

$$\rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) = \frac{|(\varphi_{\text{Kural}-2} \cap Cl_{\text{Orta}})|^2}{|\varphi_{\text{Kural}-2}||Cl_{\text{Orta}}|} = \frac{|(\{e_3, e_5, e_7, e_8\} \cap \{e_7, e_8\})|^2}{|\{e_3, e_5, e_7, e_8\}||\{e_7, e_8\}|} = \frac{2^2}{4 \times 2} = \frac{1}{2},$$

$$\rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) = \frac{\left|\left(\varphi_{\text{Kural}-1} \cap Cl_{\text{Düşük}}^{\leq}\right) \cup \left(\varphi_{\text{Kural}-3} \cap Cl_{Yüksek}^{\geq}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{\text{Kural}-1} \cup \varphi_{\text{Kural}-3}\right|\left|Cl_{\text{Düşük}}^{\leq} \cup Cl_{Yüksek}^{\geq}\right|}$$

$$= \frac{|(\{e_3\} \cap \{e_3, e_5, e_6\}) \cup (\{e_4\} \cap \{e_1, e_2, e_4\})|^2}{|\{e_3\} \cup \{e_4\}||\{e_3, e_5, e_6\} \cup \{e_1, e_2, e_4\}|} = \frac{2^2}{2 \times 6} = \frac{1}{3}$$

$$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) = \rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) - \rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) = \frac{1}{6}.$$

Şimdi de Yüksek sınıfı için skor hesabını yapalım. $\tilde{e}$ elemanının Yüksek sınıfına atanması ile Kural-3 uyumlu iken Kural-1 ve Kural-2 uyumsuzdur. O halde $\rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}})$ ve $\rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}})$ skorları şu şekilde hesaplanır:

$$\rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}}) = \frac{|(\varphi_{\text{Kural}-3} \cap Cl_{\text{Yüksek}})|^2}{|\varphi_{\text{Kural}-3}||Cl_{\text{Yüksek}}|} = \frac{|(\{e_4\} \cap \{e_1, e_2, e_4\})|^2}{|\{e_4\}||\{e_1, e_2, e_4\}|} = \frac{1^2}{1 \times 3} = \frac{1}{3},$$

$$\rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}}) = \frac{\left|\left(\varphi_{\text{Kural}-1} \cap Cl_{\text{Düşük}}^{\leq}\right) \cup \left(\varphi_{\text{Kural}-2} \cap Cl_{Orta}^{\leq}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{\text{Kural}-1} \cup \varphi_{\text{Kural}-2}\right|\left|Cl_{\text{Düşük}}^{\leq} \cup Cl_{Orta}^{\leq}\right|}$$

$$= \frac{|(\{e_3\} \cap \{e_3, e_5, e_6\}) \cup (\{e_3, e_5, e_7, e_8\} \cap \{e_3, e_5, e_6, e_7, e_8\})|^2}{|\{e_3\} \cup \{e_3, e_5, e_7, e_8\}||\{e_3, e_5, e_6\} \cup \{e_3, e_5, e_6, e_7, e_8\}|} = \frac{4^2}{4 \times 5}$$

$$= \frac{4}{5},$$

$$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}}) = \rho_R^+(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}}) - \rho_R^-(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}}) = -\frac{7}{15}.$$

$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) > \rho\left(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}\right) > \rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}})$ olduğundan dolayı $\tilde{e}$ elemanı Orta karar sınıfına atanır.

2.3.4.2 Dönüştürülmüş Karar Tablosu için Sınıflandırma Yöntemi

Bu bölümde dönüştürülmüş karar tablolarından çıkarılan karar kurallarına göre yeni bir elemanın sınıflandırılmasına ilişkin yöntem tanıtılmıştır. Dönüştürülmüş karar tablolarından çıkarılan kuralların karar kısımlarında Cl_n sınıfının kendisine yapılan atamayı $x_d^n \geq 1$ ifadesi temsil ederken Cl_n sınıfının değiline ($\neg Cl_n$) yapılan atamayı $x_d^n \leq 0$ ifadesi temsil edecektir. Ayrıca $r_{\geq 1}^n$, karar niteliğinin n değeri için üretilmiş karar tablosundan çıkarılan ve karar bölümü Cl_n sınıfına yapılan atamayı temsil eden kuralı gösterirken $r_{\geq 0}^n$ ise karar niteliğinin n değeri için üretilmiş karar tablosundan çıkarılan ve karar bölümü Cl_n sınıfının değiline yapılan atamayı temsil eden kuralı gösterecektir.

Durum-1:

e elemanı herhangi bir karar kuralını kapsamadığından dolayı sınıfı belirsizdir. Yani *e* elemanı karar probleminde dikkate alınan tüm sınıflara atanır.

Durum-2:

Eleman tarafından kapsanan kuralın karar kısmı dikkate alınarak skor hesaplaması gerçekleştirilir.

i. Eğer *e* elemanı "$x_d^n \geq 1$" karar kısmına sahip bir $r_{\geq 1}^n$ kuralını kapsıyor ise skor şu şekilde hesaplanır:

$$\rho_{r_{\geq 1}^n}(e, Cl_n) = \frac{\left|\varphi_{r_{\geq 1}^n} \cap Cl_n\right|^2}{\left|\varphi_{r_{\geq 1}^n}\right||Cl_n|}. \tag{2.36}$$

ii. Eğer *e* elemanı "$x_d^n \leq 0$" karar kısmına sahip bir $r_{\leq 0}^n$ kuralını kapsıyor ise skor şu şekilde hesaplanır:

$$\rho_{r_{\leq 0}^n}(e, \neg Cl_n) = \frac{\left|\varphi_{r_{\leq 0}^n} \cap \neg Cl_n\right|^2}{\left|\varphi_{r_{\leq 0}^n}\right||\neg Cl_n|}. \tag{2.37}$$

Burada $\neg Cl_n = U - Cl_n$, $\varphi_{r_{\geq 1}^n}$ ve $\varphi_{r_{\leq 0}^n}$, sırasıyla $r_{\geq 1}^n$ ve $r_{\leq 0}^n$ kuralları tarafından kapsanan elemanların kümesini, $|\cdot|$ ise kümenin eleman sayısını göstermektedir.

Kuralın karar kısmına bağlı olarak final skoru ya $\rho(e, Cl_n) = \rho_{r_{\geq 1}^n}(e, Cl_n)$ veya $\rho(e, Cl_n) = -\rho_{r_{\leq 0}^n}(e, \neg Cl_n)$ olmaktadır.

Durum-3:

İkinci durumun birden fazla kural için genişletilmesidir. Öncelikle *e* elemanının kapsadığı kurallar karar bölümlerine göre *e* elemanını Cl_n karar sınıfına atayanlar ve *e* elemanını Cl_n karar sınıfının değiline atayanlar olmak üzere iki kısma ayrılır.

(2.36) ve (2.37)'ye benzer olarak, $\rho_{r_{\geq 1}^n}(e, Cl_n)$ ve $\rho_{r_{\leq 0}^n}(e, \neg Cl_n)$ skorları aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\rho_{r_{\geq 1}^n}(e, Cl_n) = \frac{\left|\left(\varphi_{(r_{\geq 1}^n)^1} \cap Cl_n\right) \cup \cdots \cup \left(\varphi_{(r_{\geq 1}^n)^m} \cap Cl_n\right)\right|^2}{\left|\varphi_{(r_{\geq 1}^n)^1} \cup \cdots \cup \varphi_{(r_{\geq 1}^n)^m}\right||Cl_n|}, \tag{2.38}$$

$$\rho_{r_{\leq 0}^n}(e, \neg Cl_n) = \frac{\left|\left(\varphi_{(r_{\leq 0}^n)^1} \cap \neg Cl_n\right) \cup \cdots \cup \left(\varphi_{(r_{\leq 0}^n)^l} \cap \neg Cl_n\right)\right|^2}{\left|\varphi_{(r_{\leq 0}^n)^1} \cup \cdots \cup \varphi_{(r_{\leq 0}^n)^l}\right|^{|\neg Cl_n|}}. \quad (2.39)$$

Burada *m ve l* sırasıyla n karar değeri için çoğaltılmış tablodan çıkarılan "$x_d^n \geq 1$" ile "$x_d^n \leq 0$" karar kısımlarına sahip kuralların sayısını, $\varphi_{(r_{\geq 1}^n)^i}$, "$x_d^n \geq 1$" karar kısmına sahip i. kural tarafından kapsanan elemanların kümesini, $\varphi_{(r_{\leq 0}^n)^j}$, "$x_d^n \leq 0$" karar kısmına sahip j. kural tarafından kapsanan elemanların kümesini göstermektedir.

Cl_n karar sınıfı için final skoru (2.40)'da belirtildiği gibi hesaplanır:

$$\rho(e, Cl_n) = \rho_{r_{\geq 1}^n}(e, Cl_n) - \rho_{r_{\leq 0}^n}(e, \neg Cl_n) \quad (2.40)$$

e elemanının karar sınıfını belirlemek için her bir $Cl_n, (n = 1, \cdots, k)$ için final skoru hesaplaması yukarıda anlatılan durumlara göre gerçekleştirilir. Eğer karar sınıflarının en az biri için sınıflandırma durumu Durum-1'den farklı ve final skorların en az bir tanesi pozitif ise e elemanı $\rho(e, Cl_n)$ değerini maksimum yapan Cl_n sınıfına atanır. Aksi halde e elemanının hangi karar sınıfına atanacağı belirsizdir.

Örnek 2.18. Şekil 2.6'da Düşük karar sınıfı için dönüştürülmüş Tablo 2.12 kullanılarak elde edilen minimal kesin karar kuralları, Şekil 2.7'de Orta karar sınıfı için dönüştürülmüş Tablo 2.13 kullanılarak elde edilen minimal kesin karar kuralları ve Şekil 2.8'de Yüksek karar sınıfı için dönüştürülmüş Tablo 2.14 kullanılarak elde edilen minimal kesin karar kuralları verilmiştir. Bu kuralları dikkate alarak Örnek 2.17'de verilen $\tilde{e} = (4300, \text{Düşük}, 0)$ elemanının karar sınıfını belirleyelim.

Kural-1: Eğer $x_{c2}^{Y1} \geq 1$ ise $x_d^D \leq 0$

Kural-2: Eğer $x_{c1}^2 \leq 7630$ ve $x_{c1}^1 \geq 6800$ ise $x_d^D \leq 0$

Kural-3: Eğer $x_{c1}^2 \leq 4790$ ve $x_{c2}^{D1} \geq 1$ ise $x_d^D \leq 0$

Kural-4: Eğer $x_{c1}^1 \leq 4580$ ise $x_d^D \geq 1$

Kural-5: Eğer $x_{c1}^2 \geq 8000$ ve $x_{c3}^2 \geq 2$ ise $x_d^D \geq 1$

Kural-6: Eğer $x_{c2}^{D2} \geq 1$ ve $x_{c3}^2 \geq 1$ ve $x_{c3}^1 \leq 1$ ise $x_d^D \geq 1$

Şekil 2.6 Tablo 2.12'den çıkarılan minimal kesin karar kuralları

Kural-1: Eğer $x_{c1}^{1} \geq 7300$ ise $x_d^O \leq 0$

Kural-2: Eğer $x_{c1}^{2} \leq 4580$ ise $x_d^O \leq 0$

Kural-3: Eğer $x_{c2}^{D1} \geq 1$ ve $x_{c3}^{2} \leq 1$ ise $x_d^O \leq 0$

Kural-4: Eğer $x_{c1}^{1} \leq 6800$ ve $x_{c1}^{2} \geq 6800$ ise $x_d^O \geq 1$

Kural-5: Eğer $x_{c1}^{1} \leq 4790$ ve $x_{c2}^{D2} \geq 1$ ise $x_d^O \geq 1$

Şekil 2.7 Tablo 2.13'den üretilen minimal kesin karar kuralları

Kural-1: Eğer $x_{c1}^{2} \leq 6800$ ise $x_d^Y \leq 0$

Kural-2: Eğer $x_{c1}^{1} \geq 8000$ ve $x_{c3}^{1} \geq 2$ ise $x_d^Y \leq 0$

Kural-3: Eğer $x_{c2}^{Y2} \geq 1$ ise $x_d^Y \geq 1$

Kural-4: Eğer $x_{c1}^{2} \geq 7300$ ve $x_{c1}^{1} \leq 7630$ ise $x_d^Y \geq 1$

Şekil 2.8 Tablo 2.14'den üretilen minimal kesin karar kuralları

$\tilde{e}$ elemanı dönüştürülmüş karar tablosuna göre $\tilde{e} =$ (4300, 4300, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0) olacak şekilde düzenlenir.

Düşük sınıfı için $\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}})$ skor hesabını yapalım. Şekil 2.6'da verilen karar kuralları dikkate alındığında $\tilde{e}$ elemanı Kural-3 ile Kural-4'ü kapsamaktadır. Bunlardan Kural-4, $\tilde{e}$ elemanını $Cl_{\text{Düşük}}$ sınıfına atayan kural iken Kural-3, $\tilde{e}$ elemanını $Cl_{\text{Düşük}}$ sınıfının değiline atayan kuraldır. $\left(r_{\geq 1}^{\text{Düşük}}\right)^1$= Kural-4 ve $\left(r_{\leq 0}^{\text{Düşük}}\right)^1$= Kural-3 olmak üzere Durum-3'te verilen skor hesaplarından yararlanarak

$$\rho_{r_{\geq 1}^{\text{Düşük}}}(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) = \frac{\left|\left(\varphi_{\left(r_{\geq 1}^{\text{Düşük}}\right)^1} \cap Cl_{\text{Düşük}}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{\left(r_{\geq 1}^{\text{Düşük}}\right)^1}\right| \left|Cl_{\text{Düşük}}\right|} = \frac{|(\{e_3\} \cap \{e_3, e_5, e_6\})|^2}{|\{e_3\}||\{e_3, e_5, e_6\}|} = \frac{1}{3},$$

$$\rho_{r_{\leq 0}^{\text{Düşük}}}(\tilde{e}, \neg Cl_{\text{Düşük}}) = \frac{\left|\left(\varphi_{\left(r_{\leq 0}^{\text{Düşük}}\right)^1} \cap \neg Cl_{\text{Düşük}}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{\left(r_{\leq 0}^{\text{Düşük}}\right)^1}\right| \left|\neg Cl_{\text{Düşük}}\right|} = \frac{|(\{e_8\} \cap \{e_1, e_2, e_4, e_7, e_8\})|^2}{|\{e_8\}||\{e_1, e_2, e_4, e_7, e_8\}|}$$

$$= \frac{1}{5},$$

$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) = \rho_{r_{\geq 1}^{\text{Düşük}}}(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}) - \rho_{r_{\leq 0}^{\text{Düşük}}}(\tilde{e}, \neg Cl_{\text{Düşük}}) = \frac{2}{15}$ olarak elde edilir.

Orta sınıfı için $\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}})$ skor hesabını yapalım. Şekil 2.7'de verilen karar kuralları dikkate alındığında $\tilde{e}$ elemanı Kural-2, Kural-3 ve Kural-5'i kapsamaktadır. Bunlardan Kural-5, $\tilde{e}$ elemanını Cl_{Orta} sınıfına atayan kural iken Kural-2 ve Kural-3, $\tilde{e}$ elemanını Cl_{Orta} sınıfının değiline atayan kuraldır. $\left(r_{\geq 1}^{\text{Orta}}\right)^1$= Kural-5, $\left(r_{\leq 0}^{\text{Orta}}\right)^1$= Kural-2 ve $\left(r_{\leq 0}^{\text{Orta}}\right)^2$= Kural-3 olmak üzere Durum-3'te verilen skor hesaplarından yararlanarak

$$\rho_{r_{\geq 1}^{\text{Orta}}}(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) = \frac{\left|\left(\varphi_{\left(r_{\geq 1}^{\text{Orta}}\right)^1} \cap Cl_{\text{Orta}}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{\left(r_{\geq 1}^{\text{Orta}}\right)^1}\right| |Cl_{\text{Orta}}|} = \frac{|(\{e_8\} \cap \{e_7, e_8\})|^2}{|\{e_8\}||\{e_7, e_8\}|} = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}\rho_{r_{\leq 0}^{\text{Orta}}}(\tilde{e}, \neg Cl_{\text{Orta}}) &= \frac{\left|\left(\varphi_{\left(r_{\leq 0}^{\text{Orta}}\right)^1} \cap \neg Cl_{\text{Orta}}\right) \cup \left(\varphi_{\left(r_{\leq 0}^{\text{Orta}}\right)^2} \cap \neg Cl_{\text{Orta}}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{\left(r_{\leq 0}^{\text{Orta}}\right)^1} \cup \varphi_{\left(r_{\leq 0}^{\text{Orta}}\right)^2}\right| |\neg Cl_{\text{Orta}}|} \\ &= \frac{|(\{e_3\} \cap \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}) \cup (\{e_4, e_5\} \cap \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\})|^2}{|\{e_3\} \cup \{e_4, e_5\}||\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}|} \\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) = \rho_{r_{\geq 1}^{Orta}}(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) - \rho_{r_{\leq 0}^{\text{Orta}}}(\tilde{e}, \neg Cl_{\text{Orta}}) = 0$ olarak elde edilir.

Yüksek sınıfı için $\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}})$ skor hesabını yapalım. Şekil 2.8'de verilen karar kuralları dikkate alındığında $\tilde{e}$ elemanı sadece Kural-1'i kapsamaktadır. Kural-1 ise $\tilde{e}$ elemanını $Cl_{\text{Yüksek}}$ sınıfının değiline atayan kuraldır. $r_{\leq 0}^{\text{Yüksek}}$ = Kural-1 olmak üzere (2.37)'de verilen skor hesabından yararlanarak

$$\begin{aligned}\rho_{r_{\leq 0}^{\text{Yüksek}}}(\tilde{e}, \neg Cl_{\text{Yüksek}}) &= \frac{\left|\left(\varphi_{r_{\leq 0}^{\text{Yüksek}}} \cap \neg Cl_{\text{Yüksek}}\right)\right|^2}{\left|\varphi_{r_{\leq 0}^{\text{Yüksek}}}\right| |\neg Cl_{\text{Yüksek}}|} \\ &= \frac{|(\{e_3, e_5, e_7, e_8\} \cap \{e_3, e_5, e_6, e_7, e_8\})|^2}{|\{e_3, e_5, e_7, e_8\}||\{e_3, e_5, e_6, e_7, e_8\}|} = \frac{4}{5},\end{aligned}$$

$\rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}}) = -\rho_{r_{\leq 0}^{\text{Yüksek}}}(\tilde{e}, \neg Cl_{\text{Yüksek}}) = -\frac{4}{5}$ elde edilir. $\rho\left(\tilde{e}, Cl_{\text{Düşük}}\right) > \rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Orta}}) > \rho(\tilde{e}, Cl_{\text{Yüksek}})$ olduğundan alan uzmanı eksikliğinde dönüştürülen karar tablolarından çıkarılan kurallara göre $\tilde{e}$ elemanı Düşük karar sınıfına atanır.

2.4 Eksik Nitelik Değerleri

Veri kümelerinde nesneleri veya örnekleri çeşitli yönleriyle tasvir eden nitelikler, eksik değere sahip olabilmektedir. Bu yüzden eksik değerler ile analiz yapabilmek için literatürde çeşitli yöntemler önerilmiştir [42]. Bunlara niteliğin ortalama veya medyan değeri kullanılarak doldurma, niteliğin en sık aldığı değer ile doldurma, k en yakın komşu algoritması ile doldurma gibi yaklaşımlar örnek olarak verilebilir. Ancak eksik değerlerin fazla olduğu verilerde, bu gibi doldurma işlemlerinde veri taraflı (bias) hale gelmekte ve bozulmaktadır. Bu tarz veri kümelerinin analizindeki en kritik nokta verideki eksik değerleri doldurmadan karar verme sürecini yönetebilmektir. Kaba küme teorisi, eksik değerler ile veri kümesini taraflı hale getirmeden başa çıkabilmektedir. Yani veri kümesindeki eksik nitelik değerlerini doldurmadan analize olanak sağlamaktadır. Bu da bilgi granüllerini oluşturan bağıntıların uygun bir biçimde tanımlanmasıyla mümkündür [43].

Bu bölümde, klasik kaba küme ile baskın kaba küme yaklaşımlarının eksik nitelik değeri içeren karar tablolarına uyarlanmasına değinilecektir [40,43]. Karar tablosunda herhangi bir eksik nitelik değeri "$*$" ile sembolize edilecektir. $\forall e \in E$ elemanının en az bir nitelik değerinin bilindiğini varsayacağız. Yani $\forall e \in E$ için $f(e,x) \neq *$ olacak şekilde $\exists x \in X_c$ mevcuttur. Ayrıca her iki yaklaşım için karar sınıfları Cl_n olarak ifade edilecektir. Burada n karar niteliğinin aldığı değerlerden ibarettir.

Kaba küme yaklaşımında eksik nitelik değerleri ile başa çıkabilmek β ayırt edilemezlik bağıntısının uygun bir şekilde uyarlanmasını gerektirir. Burada, ayırt edilemezlik bağıntısının farklı tanımlamaları ile oluşturulan yaklaşımlar $KKKY_{mv_j}$ ile bunlara karşılık gelen ayırt edilemezlik bağıntısı β_j ile gösterilecektir.

Eksik nitelik değerlerinin varlığında dikkate alınan β_j ayırt edilemezlik bağıntısı simetri veya geçişme gibi özelliklerden yoksun olabilir. Bu durumda

$$\beta_j^{-1}(e) = \left\{\tilde{e} \in E \,\middle|\, e\beta_j\tilde{e}\right\} \tag{2.41}$$

olmak üzere genelleştirilmiş kaba küme yaklaşımları aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$Y \subseteq X_c$ ve $KKKY_{mv_j}$ için $Cl_n \subseteq E$ karar sınıflarının genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşımları

$$\underline{YCl_n} = \left\{e \in E \middle| \beta_j^{-1}(e) \subseteq Cl_n\right\} \tag{2.42}$$

ve

$$\overline{YCl_n} = \cup_{e \in Cl_n} \beta_j(e) \tag{2.43}$$

ile verilir. Eğer β_j simetrik ise $\beta_j^{-1}(e) = \beta_j(e)$ olacaktır. O halde (2.42) ve (2.1) tanımları denktir. Aşağıda klasik kaba küme yaklaşımının eksik nitelik değerleri ile çalışabilmesine imkân veren uyarlamalar verilmiştir:

1. $KKKY_{mv_1}$'de kullanılan β_1 bağıntısı bir özne elemanı, herhangi bir eksik nitelik değeri içermeyen bir referans eleman ile karşılaştırır. Yani $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanıyla ancak ve ancak $\forall x \in Y$ olmak üzere
   - $f(e,x) \neq *$
   - $f(e,x) = f(\tilde{e},x)$ veya $f(\tilde{e},x) = *$

   olduğunda ayırt edilemezdir.
2. $KKKY_{mv_{1.5}}$, $KKKY_{mv_1}$üzerinde yapılan bir iyileştirme olarak görülebilir. Burada $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanıyla ancak ve ancak $f(\tilde{e},x) \neq *$ olacak şekilde $\forall x \in Y$ için $f(e,x) = f(\tilde{e},x)$ gerçekleniyorsa ayırt edilemezdir.
3. $KKKY_{mv_2}$ yaklaşımında yansıma ve simetrik özelliklerini sağlayan β_2 bağıntısı tanımlanır. Bu yaklaşımda $\tilde{e}$ özne elemanı e referans elemanıyla ancak ve ancak $\forall x \in Y$ için $f(e,x) = f(\tilde{e},x)$ veya $f(\tilde{e},x) = *$ veya $f(e,x) = *$ oluyorsa ayırt edilemezdir.
4. $KKKY_{mv_3}$ yaklaşımında ise $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanıyla ancak ve ancak $f(e,x) \neq *$ olacak şekilde $\forall x \in Y$ için $f(e,x) = f(\tilde{e},x)$ oluyorsa ayırt edilemezdir.

Örnek 2.19. Niteliklerin herhangi bir tercih sırasına sahip olmadığı aşağıda verilen müşterilerin arabaların teknik özellikleri bağlamında görüşünü yansıtan ve eksik nitelik değeri içeren karar tablosunu [40] dikkate alalım. $KKKY_{mv_2}$ yaklaşımını kullanarak alt ve üst yaklaşımları oluşturalım.

Tablo 2.15 Eksik nitelik değerine sahip karar tablosu

	Koşul ve Karar Nitelikleri($\boldsymbol{X_c \cup X_d}$)				
Arabalar ($\boldsymbol{E}$)	*Fiyat* (x_{c1}) 1-Düşük 2-Yüksek	*Km performansı* (x_{c2}) 1-Kötü 2-İyi	*Boyut* (x_{c3}) 1-Küçük 2-Büyük	*Maksimum hız* (x_{c4}) 1-Düşük 2-Yüksek	*Görüş* (x_d) 1-Olumsuz 2-Olumlu
a_1	2	1	2	1	2
a_2	1	*	2	1	1
a_3	*	*	1	1	1
a_4	2	*	2	2	2
a_5	*	*	2	1	2
a_6	1	1	1	*	1

Öncelikle her bir elemanın β_2 bağıntısına göre ayırt edilemediği elemanları bulalım. Örneğin a_1 elemanı β_2 bağıntısına göre kendisi ve a_5 elemanı ile ayırt edilemez. O halde $\beta_2(a_1) = \{a_1, a_5\}$ elde edilir. Diğer elemanların bu bağıntıya göre ayırt edilemediği elemanlar şöyledir: $\beta_2(a_2) = \{a_2, a_5\}$, $\beta_2(a_3) = \{a_3, a_6\}$, $\beta_2(a_4) = \{a_4\}$, $\beta_2(a_5) = \{a_1, a_2, a_5\}$ ve $\beta_2(a_6) = \{a_3, a_6\}$. O halde $Y = X_c$ olmak üzere (2.42) ve (2.43)'den alt ve üst yaklaşımlar aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\underline{YCl_1} = \{a_3, a_6\} \text{ ve } \overline{YCl_1} = \{a_2, a_3, a_5, a_6\},$$

$$\underline{YCl_2} = \{a_1, a_4\} \text{ ve } \overline{YCl_2} = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}.$$

Baskın kaba küme yaklaşımının eksik nitelik değerlerine uyarlanmasından önce D_Q ve $\mathfrak{D}_Q$ ($Q \subseteq X_c$) baskınlık bağıntılarını tanımlayalım. Eksik nitelik değeri içermeyen $e_1, e_2 \in E$ elemanları verildiğinde $\forall q \in Q$ için $e_2 S_q e_1$ oluyorsa e_2 elemanı e_1 elemanını ezer ve $e_2 D_q e_1$ ile gösterilir. Diğer yandan $\forall q \in Q$ için $e_1 S_q e_2$ oluyorsa e_2 elemanı e_1 elemanı tarafından ezilir ve $e_2 \mathfrak{D}_Q e_1$ ile gösterilir. Dolayısıyla $e_2 D_q e_1 \Leftrightarrow e_1 \mathfrak{D}_Q e_2$ olduğu açıktır.

Baskın kaba küme yaklaşımında eksik nitelik değerleri ile başa çıkabilmek için baskınlık bağıntılarının yeniden tanımlanması gerekmektedir. Bu yeniden uyarlanan bağıntılar ile karar sınıflarının artan ve azalan birleşimlerinin alt ve üst yaklaşımları elde edilip karar kuralları çıkarılabilir. Baskınlık bağıntısının farklı tanımlamaları ile oluşturulan yaklaşımlar $BKKY_{mv_j}$ ile bunlara karşılık gelen baskınlık bağıntıları D_{Q_j} ve $\mathfrak{D}_{Q_j}$ ile gösterilecektir.

Kayıp niteliklerin varlığında D_{Q_j} baskınlık bağıntısı birtakım özelliklerden yoksun olabilir. Bundan dolayı klasik kaba küme yaklaşımında olduğu gibi aşağıda verilen kaba yaklaşımların genelleştirilmiş tanımları kullanılacaktır.

Herhangi bir $e \in E$ elemanı için $D_{Q_j}^{+}$ ve $D_{Q_j}^{-}$ dışında $\mathfrak{Q}_{Q_j}^{+}$ ve $\mathfrak{Q}_{Q_j}^{-}$ olmak üzere Q-ezilen ve Q-ezen kümeler dikkate alınmalıdır. Bunlara ait tanımlar aşağıda verilmiştir:

$$\mathfrak{Q}_{Q_j}^{+}(e) = \left\{\tilde{e} \in E \middle| e \mathfrak{Q}_{Q_j} \tilde{e}\right\}, \tag{2.44}$$

$$\mathfrak{Q}_{Q_j}^{-}(e) = \left\{\tilde{e} \in E \middle| \tilde{e} \mathfrak{Q}_{Q_j} e\right\}.$$

Nesneleri veya elemanları tasvir eden nitelik değerlerinde herhangi bir eksik değer olmadığında $D_{Q_j}^{+}(e) = \mathfrak{Q}_{Q_j}^{+}(e)$ ve $D_{Q_j}^{-}(e) = \mathfrak{Q}_{Q_j}^{-}(e)$ elde edilmektedir. Bu durumda $BKKY_{mv_j}$ için Cl_n karar sınıflarının artan birleşimlerinin genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşımı;

$$\underline{Q}(Cl_n^{\geq}) = \left\{e \in E \middle| \mathfrak{Q}_{Q_j}^{+}(e) \subseteq Cl_n^{\geq}\right\}, \tag{2.45}$$

$$\overline{Q}(Cl_n^{\geq}) = \left\{e \in E \middle| D_{Q_j}^{-}(e) \cap Cl_n^{\geq} \neq \emptyset\right\},$$

ve Cl_n karar sınıflarının azalan birleşimlerinin genelleştirilmiş alt ve üst yaklaşımı;

$$\underline{Q}(Cl_n^{\leqslant}) = \left\{e \in E \middle| D_{Q_j}^{-}(e) \subseteq Cl_n^{\leqslant}\right\}, \tag{2.46}$$

$$\overline{Q}(Cl_n^{\leqslant}) = \left\{e \in E \middle| \mathfrak{Q}_{Q_j}^{+}(e) \cap Cl_n^{\leqslant} \neq \emptyset\right\}$$

ile tanımlanır. Burada $D_{Q_j}^{-}(e)$, e elemanının baskın olduğu veya e elemanının ezdiği elemanların kümesi olarak ifade edilir. $\mathfrak{Q}_{Q_j}^{+}(e)$, e elemanına baskın olan veya e elemanını ezen elemanların kümesi olarak ifade edilir.

Aşağıda baskın kaba küme yaklaşımının eksik nitelik değerleri ile çalışabilmesine imkân veren uyarlamalar verilmiştir:

1. $BKKY_{mv_1}$ yaklaşımı $\tilde{e}$ özne elemanını, herhangi bir eksik nitelik değerine sahip olmayan e referans elemanı ile karşılaştırır.

    - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanını ezer ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $f(e,q) \neq *$ ve $\tilde{e} S_q e$ veya $f(\tilde{e},q) = *$ olmalıdır. $\tilde{e} D_{Q_1} e$ olarak gösterilir.

- $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanı tarafından ezilir ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $f(e,q) \neq *$ ve $eS_q\tilde{e}$ veya $f(\tilde{e},q) = *$ olmalıdır. $\tilde{e}\mathfrak{A}_{Q_1}e$ olarak gösterilir.

2. $BKKY_{mv_{1.5}}$, $BKKY_{mv_1}$ yaklaşımının bir iyileştirmesi olarak düşünülebilir. Bu yaklaşımda baskınlık bağıntıları aşağıdaki tanımlamalara sahiptir:

   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanını ezer ancak ve ancak $f(\tilde{e},q) \neq *$ olacak şekilde $\forall q \in Q$ için $\tilde{e}S_qe$ olmalıdır. $\tilde{e}D_{Q_{1.5}}e$ olarak gösterilir.

   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanı tarafından ezilir ancak ve ancak $f(\tilde{e},q) \neq *$ olacak şekilde $\forall q \in Q$ için $eS_q\tilde{e}$ olmalıdır. $\tilde{e}\mathfrak{A}_{Q_{1.5}}e$ olarak gösterilir.

3. $BKKY_{mv_2}$ için kullanılan baskınlık bağıntıları aşağıdaki tanımlamalara sahiptir:

   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanını ezer ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $\tilde{e}S_qe$ veya $f(\tilde{e},q) = *$ veya $f(e,q) = *$ olmalıdır. $\tilde{e}D_{Q_2}e$ olarak gösterilir.

   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanı tarafından ezilir ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $eS_q\tilde{e}$ veya $f(\tilde{e},q) = *$ veya $f(e,q) = *$ olmalıdır. $\tilde{e}\mathfrak{A}_{Q_2}e$ olarak gösterilir.

4. $BKKY_{mv_3}$ için kullanılan baskınlık bağıntıları aşağıdaki tanımlamalara sahiptir:

   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanını ezer ancak ve ancak $f(e,q) \neq *$ olacak şekilde $\forall q \in Q$ için $\tilde{e}S_qe$ olmalıdır. $\tilde{e}D_{Q_3}e$ olarak gösterilir.

   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanı tarafından ezilir ancak ve ancak $f(e,q) \neq *$ olacak şekilde $\forall q \in Q$ için $eS_q\tilde{e}$ olmalıdır. $\tilde{e}\mathfrak{A}_{Q_3}e$ olarak gösterilir.

5. $BKKY_{mv_4}$ için kullanılan baskınlık bağıntıları aşağıdaki tanımlamalara sahiptir:

- $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanını ezer ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $\tilde{e} S_q e$ veya $f(e,q) = *$ veya $f(e,q) = ebas(V_q)$ olmalıdır. $\tilde{e} D_{Q_4} e$ olarak gösterilir.
- $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanı tarafından ezilir ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $e S_q \tilde{e}$ veya $f(\tilde{e},q) = *$ veya $f(\tilde{e},q) = ebas(V_q)$ olmalıdır. $\tilde{e} \mathfrak{G}_{Q_4} e$ olarak gösterilir.

burada $ebas(V_q)$, V_q kümesindeki en tercih edilmeyen değeri göstermektedir. Eğer böyle bir değer mevcut değilse $ebas(V_q) = -\infty$ olur.

6. $BKKY_{mv_5}$ için kullanılan baskınlık bağıntıları aşağıdaki tanımlamalara sahiptir:
   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanını ezer ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $\tilde{e} S_q e$ veya $f(\tilde{e},q) = *$ veya $f(\tilde{e},q) = ek\ddot{u}s(V_q)$ olmalıdır. $\tilde{e} D_{Q_5} e$ olarak gösterilir.
   - $\tilde{e}$ özne elemanı, e referans elemanı tarafından ezilir ancak ve ancak $\forall q \in Q$ için $e S_q \tilde{e}$ veya $f(e,q) = *$ veya $f(e,q) = ek\ddot{u}s(V_q)$ olmalıdır. $\tilde{e} \mathfrak{G}_{Q_5} e$ olarak gösterilir.

   burada $ek\ddot{u}s(V_q)$, V_q kümesindeki en tercih edilen değeri göstermektedir. Eğer böyle bir değer mevcut değilse $ek\ddot{u}s(V_q) = \infty$ olur.

Örnek 2.20. Tablo 2.15'te verilen *Fiyat* niteliği *maliyet* niteliği, diğer koşul nitelikleri ile karar niteliği ise *kazanç* niteliği olsun. $Q = X_c$ olmak üzere $BKKY_{mv_2}$ yaklaşımına göre karar sınıflarının artan ve azalan birleşimleri için alt ve üst yaklaşımları belirleyip DomLEM algoritması ile kesin karar kurallarını çıkaralım.

Alt ve üst yaklaşım tanımlarını uygulamada $\forall e \in E$ için $D_{Q_2}^-(e)$ ve $\mathfrak{G}_{Q_2}^+(e)$ hesaplanmalıdır. Örneğin a_1 özne elemanı kendisini, a_3 ve a_5 elemanını ezer. Yani $a_1 D_{Q_2} a_1$, $a_1 D_{Q_2} a_3$ ve $a_1 D_{Q_2} a_5$ olmaktadır. O halde $D_{Q_2}^-(a_1) = \{a_1, a_3, a_5\}$ olur. Öte yandan a_1 özne elemanı kendisi, a_2, a_4 ve a_5 elemanı tarafından ezilir. Yani $a_1 \mathfrak{G}_{Q_2} a_1$, $a_1 \mathfrak{G}_{Q_2} a_2$, $a_1 \mathfrak{G}_{Q_2} a_4$, $a_1 \mathfrak{G}_{Q_2} a_5$ olmaktadır. Dolayısıyla $\mathfrak{G}_{Q_2}^+(a_1) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ elde edilir.

$D_{Q}^{-}{}_{2}(a_2) = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$, $\mathfrak{Q}_{Q}^{+}{}_{2}(a_2) = \{a_2, a_5\}$,

$D_{Q}^{-}{}_{2}(a_3) = \{a_3, a_6\}$, $\mathfrak{Q}_{Q}^{+}{}_{2}(a_3) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$,

$D_{Q}^{-}{}_{2}(a_4) = \{a_1, a_3, a_4, a_5\}$, $\mathfrak{Q}_{Q}^{+}{}_{2}(a_4) = \{a_4\}$,

$D_{Q}^{-}{}_{2}(a_5) = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}$, $\mathfrak{Q}_{Q}^{+}{}_{2}(a_5) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$,

$D_{Q}^{-}{}_{2}(a_6) = \{a_3, a_6\}$, $\mathfrak{Q}_{Q}^{+}{}_{2}(a_6) = \{a_2, a_3, a_5, a_6\}$.

(2.45) aracılığı ile $Cl_2^{\geq}$ birleşiminin alt ve üst yaklaşımları şöyledir:

$$\underline{Q}(Cl_2^{\geq}) = \{a_4\},$$

$$\overline{Q}(Cl_2^{\geq}) = \{a_1, a_2, a_4, a_5\}.$$

(2.46) aracılığı ile $Cl_1^{\leq}$ birleşiminin alt ve üst yaklaşımları şöyledir:

$$\underline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_3, a_6\},$$

$$\overline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_1, a_2, a_3, a_5, a_6\}.$$

Karar kurallarının çıkarılmasında DomLEM algoritmasının eksik verilere uyarlanması gerekmektedir. Burada şu hususları göz önüne alacağız: Bir kuralın koşul kısmını oluşturmaya aday olabilecek olası tüm elementer koşulların kümesi eksik olmayan değerlerden türetilecektir. Ayrıca eğer bir $e \in E$ elemanı için $f(e, q) = *$ oluyorsa q niteliği üzerindeki herhangi bir elementer koşul, bu e elemanı tarafından kapsanır.

Şimdi $\underline{Q}(Cl_2^{\geq}) = \{a_4\}$ alt yaklaşımından kesin karar kurallarını türetelim. a_4 elemanının eksik değere sahip olmayan nitelikleri için elementer koşullar kümesi $EC = \{\psi_1^1 : f(e, x_{c1}) \leq 2, \psi_2^1 : f(e, x_{c3}) \geq 2, \psi_3^1 : f(e, x_{c4}) \geq 2\}$ olarak yazılır. $\Psi = \emptyset$ ve $G = \underline{Q}(Cl_2^{\geq})$ olmak üzere en iyi elementer koşul şu şekilde seçilir:

$\frac{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}]|} = \frac{1}{6}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}]|} = \frac{1}{4}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}]|} = \frac{1}{2}$ olmak üzere en yüksek değere sahip ψ_3^1 ilk elementer koşul olarak seçilir ve $\Psi = \{\psi_3^1\}$ olarak güncellenir. $[\Psi] \not\subseteq \{a_4\}$ olduğundan Ψ kümesine elementer koşul eklenmeye devam edilecektir. Yeni elementer koşullar $\{a_4\} \cap [\Psi] = \{a_4\}$ olmak üzere a_4 elemanından türetilecektir. Bunlar $EC = \{\psi_1^2 : f(e, x_{c1}) \leq 2, \psi_2^2 : f(e, x_{c3}) \geq 2\}$ şeklindedir.

$\frac{|[\Psi \cup \{\psi_1^2\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_1^2\}]|} = \frac{1}{2}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_2^2\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_2^2\}]|} = 1$ olmak üzere ψ_2^2 seçilir ve $\Psi = \{\psi_3^1, \psi_2^2\}$ olarak güncellenir. $[\Psi] \subseteq \{a_4\}$ olduğundan dolayı Ψ kuralın koşul kısmı olarak kabul görür. Bu kümede gereksiz herhangi bir elementer koşul yoktur.

K_1: Eğer $f(e, x_{c4}) \geq 2$ ve $f(e, x_{c3}) \geq 2$ ise e kesin olarak $Cl_2^{\geq}$ aittir.

Diğer yandan $\underline{Q}(Cl_1^{\leq}) = \{a_3, a_6\}$ alt yaklaşımından kesin karar kurallarını türetelim. a_3 ve a_6 elemanlarının eksik değere sahip olmayan nitelikleri için elementer koşullar kümesi $EC = \{\psi_1^1 : f(e, x_{c1}) \geq 1, \psi_2^1 : f(e, x_{c2}) \leq 1, \psi_3^1 : f(e, x_{c3}) \leq 1, \psi_3^1 : f(e, x_{c4}) \leq 1\}$ olarak yazılır. $\Psi = \emptyset$ ve $G = \underline{Q}(Cl_1^{\leq})$ olmak üzere en iyi elementer koşul şu şekilde seçilir:

$\frac{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_1^1\}]|} = \frac{2}{6}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_2^1\}]|} = \frac{2}{6}$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_3^1\}]|} = 1$, $\frac{|[\Psi \cup \{\psi_4^1\}] \cap G|}{|[\Psi \cup \{\psi_4^1\}]|} = \frac{2}{5}$ olmak üzere ψ_3^1 seçilir ve $\Psi = \{\psi_3^1\}$ olarak güncellenir. $[\Psi] \subseteq \{a_3, a_6\}$ olduğundan dolayı Ψ kuralın koşul kısmı olarak kabul görür.

K_2: Eğer $f(e, x_{c3}) \leq 1$ ise e kesin olarak $Cl_1^{\leq}$ aittir.

3
DENEYSEL ÇALIŞMA VE SONUÇ

Beton yapı endüstrisinde betonun basınca karşı dayanımının belirlenmesi önemli bir süreç olarak görülmektedir. Bunun en önemli sebebi ise betonun doğasını ve karışımın içerdiği bileşenlerin nasıl ve ne yönde optimize edileceğini daha iyi kavramaktır. Betonun basınç dayanımının öngörülmesine ilişkin ilk çalışma 1918 yılında Abrams [44] tarafından yapılmıştır. Abrams bu çalışmasında betonun dayanımını su-çimento (w/c) oranını kullanarak belirlemiştir. Bu çalışma, w/c oranı arttıkça betonun basınç dayanımının düştüğünü; bu oran azaldıkça basınç dayanımının arttığını ortaya koymuştur. Ancak daha sonraki çalışmaların [45] aynı w/c oranına sahip beton örneklerinin farklı dayanıklılığa sahip olduğunu göstermesiyle birlikte bu oranın tam anlamıyla doğru olmadığı anlaşılmıştır. Bu durum, su ve çimento dışında karışımda bulunan diğer bileşenlerin de dayanım üzerinde etkisinin olduğunu ortaya koymuştur. Bundan dolayı betonun basınç dayanımına karar verilmesi sürecinde farklıca bileşenlerinde dikkate alınması önemli bir husustur.

3.1.1 Deneysel Tasarım

Kaba küme temelinde betonun basınç dayanımının öngörülmesi amacıyla Chung-Hua Üniversitesi İnşaat Mühendisliği bölümü öğretim üyesi Prof. I-Cheng Yeh tarafından laboratuvar ortamında elde edilmiş olan veriler [46] kullanılmıştır. Bu veri kümesi 1030 adet beton örneğinden ve her bir beton örneğinin çeşitli özelliklerini yansıtan sürekli değere sahip 9 nitelikten meydana gelmektedir. Bu niteliklere ilişkin bilgiler Tablo 3.1'de verilmiştir. Bu tablodaki ilk sekiz adet nitelik koşul niteliğini belirtirken son nitelik olan *Beton Basınç Dayanımı (BBD)* ise karar niteliğidir.

Karar niteliğinin aldığı sürekli değerlerin baskın kaba küme yaklaşımının uygulanmasına imkân sağlayabilmesi için ayrıklaştırılmasına ihtiyaç vardır. Bu sebeple veri kümesi içerisinde *BBD* niteliğine karşılık gelen sütunda yer alan sürekli değerler Tablo 3.2'e [47] göre ayrıklaştırılmıştır.

Tablo 3.1 Beton basınç dayanımı veri kümesindeki niteliklere ait bilgiler

Nitelik Adı (birim) (Kısaltma)	Türü
Çimento Miktarı (kg/m^3) (x_{c1})	Koşul Niteliği
Yüksek Fırın Cürufu (kg/m^3) (x_{c2})	Koşul Niteliği
Uçucu Kül (kg/m^3) (x_{c3})	Koşul Niteliği
Su (kg/m^3) (x_{c4})	Koşul Niteliği
Süper Akışkanlaştırıcı (kg/m^3) (x_{c5})	Koşul Niteliği
İri Agrega (kg/m^3) (x_{c6})	Koşul Niteliği
İnce Agrega (kg/m^3) (x_{c7})	Koşul Niteliği
Yaş (Gün) (x_{c8})	Koşul Niteliği
Beton Basınç Dayanımı (BBD) (MPa) (x_d)	Karar Niteliği

Bu işlem sonucunda düşük, normal, orta ve yüksek basınç dayanımı olmak üzere dört adet karar sınıfı elde edilmiştir. Bu sınıflarda ise sırasıyla 181 (%17,57), 436 (%42,33), 374 (%36,31), 39 (%3,78) adet beton örneği yer aldığı görülmüştür. Baskın kaba küme yaklaşımına göre elde edilen kuralların performans analizini gerçekleştirebilmek amacıyla veri kümesi test ve eğitim olmak üzere iki parçaya ayrılmıştır. Eğitim veri kümesi ile karar kurallarının çıkarılması ve karar modelinin oluşturulması hedeflenirken test veri kümesi ile bu modelin başarısının değerlendirilmesi hedeflenmektedir. Test veri kümesi, her bir karar sınıfının içerdiği örnek sayısına paralel olacak biçimde 17 düşük, 42 normal, 36 orta ve 5 yüksek türden karar sınıfına ait olmak üzere 100 beton örneğinden meydana gelmiştir. Geriye kalan örnekler ile de karar modelinin inşa edilmesini amaçlayan eğitim kümesi oluşturulmuştur.

Tablo 3.2 Betonun basınç dayanımına göre sınıflandırılması

Beton Türü	Basınç Dayanımı (MPa)
Düşük Dayanımlı Beton	0-19
Normal Dayanımlı Beton	20-39
Orta Dayanımlı Beton	40-69
Yüksek Dayanımlı Beton	70-119
Ultra-Yüksek Dayanımlı Beton	120-1000

Karara ilişkin sürekli değerlerin ayrıklaştırılmasından sonra Tablo 3.1'de verilen nitelikler için tercih sırasının belirlenmesi gerekmektedir. 2. Bölümde anlatıldığı üzere bu işlem iki şekilde gerçekleştirilebilir. Burada alan uzmanı eksikliğinde tanıtılan yöntem dikkate alınmıştır. Öncelikle her bir karar sınıfı için orijinal karar tablosundan birer tane kopyalamak suretiyle dört karar tablosu elde edilmiştir. Bu tablolardaki karar niteliği sütununda yer alan değerler, karar tablosunun çoğaltıldığı sınıftan olup olmadığına göre değiştirilmiştir. Daha sonra koşul niteliklerinin dönüşüm işlemine geçilmiştir. Veri kümesindeki koşul niteliklerinin tamamı nümerik değer içermesi nedeniyle her bir nitelikten biri maliyet diğeri kazanç olacak şekilde ikişer adet çoğaltılarak süreç tamamlanmıştır. Tablo 3.3'te veri kümesinde yer alan herhangi 5 örnek karar tablosu formatında gösterilmiştir. Tablo 3.4'te ise karar ve koşul niteliklerinin örnek bir dönüşümü, orta sınıfından çoğaltılmış karar tablosu üzerinden verilmiştir. Tablo 3.4'te (↑) sembolü kazanç niteliğini, (↓) sembolü ise maliyet niteliğini göstermektedir.

Tablo 3.3 Beş adet beton örneğinin karar tablosu formunda gösterimi

	Koşul ve Karar Nitelikleri			
Betonlar	*Çimento Miktarı*	*Yüksek Fırın Cürufu*	⋯	*BBD*
1	540	0	⋯	Yüksek
2	332.5	142.5	⋯	Orta
3	266	114	⋯	Orta
4	380	95	⋯	Normal
5	139.6	209.4	⋯	Düşük

Tablo 3.4 Orta karar sınıfı için Tablo 3.3'ün dönüşümü

	Koşul ve Karar Nitelikleri					
Betonlar	*Çimento Miktarı-1* (↑)	*Çimento Miktarı-2* (↓)	*Yüksek Fırın Cürufu-1* (↑)	*Yüksek Fırın Cürufu-2* (↓)	⋯	*BBD*
1	540	540	0	0	⋯	0
2	332.5	332.5	142.5	142.5	⋯	1
3	266	266	114	114	⋯	1

Tablo 3.4 Orta karar sınıfı için Tablo 3.3'ün dönüşümü (devamı)

	Koşul ve Karar Nitelikleri					
Betonlar	*Çimento Miktarı-1* (↑)	*Çimento Miktarı-2* (↓)	*Yüksek Fırın Cürufu-1* (↑)	*Yüksek Fırın Cürufu-2* (↓)	⋯	*BBD*
4	380	380	95	95	⋯	0
5	139.6	139.6	209.4	209.4	⋯	0

Diğer yandan veri kümesindeki beton örneklerinin sayısal olarak karar sınıflarına eşit olarak dağılmadığı yani bir sınıfın diğer sınıflara oranla daha az veya daha fazla örneğe sahip olduğu görülmüştür. Bu durum sınıflar arasındaki dengesizliği ön plana çıkarmaktadır. Bir veri kümesinin dengesizlik ölçüsü, çoğunluktaki sınıfın örnek sayısının azınlık sınıftaki örnek sayısına bölünmesiyle elde edilmektedir. Bu oran, dengesizlik oranı olarak da adlandırılmaktadır [48]. Dengesizlik oranının dört ve üzerinde olduğu veri kümeleri aşırı dengesiz olarak nitelendirilmekte ve modelin azınlık sınıfında yer alan örneklere ilişkin öğrenme sürecini zorlaştırmaktadır [49]. Veri kümesi içerisinde en fazla örneğe sahip olan Normal dayanım sınıfı çoğunluk; en az örnek içeren yüksek dayanım sınıfı ise azınlık sınıfıdır. Dengesizlik oranı ise 436/39 = 11.17 olup veri kümesi aşırı dengesiz özelliktedir. Buradan hareketle sınıflar arasındaki dengesizlik probleminin üstesinden gelebilmek için Chawla vd. [50] tarafından tanıtılan SMOTE algoritması ile sentetik beton örneği üretimi gerçekleştirilmiştir. Bu işlem ile veri kümesi içerisinde yer alan her bir sınıfın sayısal olarak eşit sayıda örnek içermesi sağlanmıştır.

1. *Azınlık sınıfında yer alan her bir örneğin k en yakın komşusu belirlenir.*
2. *Üretilecek örnek sayısı, azınlık sınıfın örnek sayısına bölünerek azınlıkta yer alan her bir örnekten kaç adet sentetik örnek üretimi yapılacağı belirlenir. Üretilecek örnek sayısının azınlık sınıfın örnek sayısından az olması durumunda hangi örneklerden sentetik üretim yapılacağı rastgele seçilir.*
3. *Her bir örneğin k en yakın komşusu arasından üreteceği sentetik örnek sayısı kadar rastgele seçim yapılır.*
4. *Örnek ve seçilen her bir k-en yakın komşusu arasında bir doğru boyunca örnek üretimi gerçekleştirilir.*

Şekil 3.1 SMOTE algoritması

Sentetik örnek üretimi ile niteliklerin dönüştürülmesine ilişkin ön işleme adımlarının tamamlanmasıyla her bir karar sınıfı göz önüne alınarak

dönüştürülmüş karar tablolarından JAMM [51] yazılımı üzerindeki DomLEM algoritması kullanılarak kesin karar kuralları çıkarılmıştır. Çıkarılan bu kurallar ile oluşturulan karar modelinin test veri kümesi üzerindeki performansı ise python dilinde geliştirdiğimiz bir program sayesinde gerçekleştirilmiştir. Karar tablolarının her birinden çıkarılan ikişer adet örnek kural, Şekil 3.2'de verilmiştir. Tablo 3.5 ise her bir karar tablosu temelinde kuralın karar kısmında sınıfın kendisine ve değiline yapılan atamaya ilişkin kural sayılarını göstermektedir.

Kural tabanlı karar algoritmasının en önemli üstünlüklerinden biri teknik bilgiye ihtiyaç duymaksızın herkes tarafından anlaşılabilir ve rahatça yorumlanabilir olmasıdır. Bu durumu Tablo 3.5'te elde ettiğimiz kurallar sayesinde açıklayabiliriz. Örneğin 7 numaralı örnek kural, karışımdaki çimento miktarının 273 kg/m^3 ve altında olan betonların yüksek dayanıma sahip olmayacağını göstermektedir. Bu da matematiksel formda $\textit{Çimento} \leq 273\ kg/m^3 \Rightarrow BBD \in$ {Düşük, Orta, Normal} olarak ifade edilebilir. 2 numaralı kural ise karışımdaki uçucu kül bileşen miktarının 133.6 ile 134 kg/m^3 değerleri arasında olduğunda betonun düşük dayanım sınıfına ait olacağını söylemektedir. Bu kural da matematiksel formda $\textit{Uçucu Kül} \in [133.6, 134] \Rightarrow BBD \in$ {Düşük} olarak yazılabilir. Ayrıca bir tahmin sürecindeki ana etmenlerin neler olduğunu belirleyebilmek ve örnek bir durum girdisi için sürecin doğru olarak işleyip işlemediğinin kontrolünü yapabilmekte bu algoritmanın diğer üstünlüklerindendir.

Düşük Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

1. Eğer Yaş-2 ≥ 7 *ve* Su-1 ≤ 157.9 *ise BBD ≤ 0*

2. Eğer Uçucu Kül-1 ≥ 133.6 *ve* Uçucu Kül-2 ≤ 134 *ise BBD ≥ 1*

Normal Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

3. Eğer Yaş-2 ≥ 91 *ve* Yüksek Fırın Cürufu-2 ≥ 15 *ve* Yüksek Fırın Cürufu-1 ≤ 236 *ise BBD ≤ 0*

4. Eğer Su-1 ≥ 192.7 *ve* Su-2 ≤ 192.94 *ve* Yaş-2 ≤ 90 *ve* Yaş-1 ≥ 7 *ise BBD ≥ 1*

Orta Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

5. Eğer İnce Agrega-1 ≤ 594 *ve* Yüksek Fırın Cürufu-2 ≥142.8 *ise BBD ≤ 0*

6. Eğer İri Agrega-1 ≥ 446 *ve* İri Agrega-2 ≤ 450.1 ve Süper Akışkanlaştırıcı-2 ≤ 11.61 *ve* Yaş-1 ≥ 7 *ise BBD ≥ 1*

Yüksek Sınıfı için Oluşturulan Karar Tablosu:

7. Eğer Çimento Miktarı-1 ≤ 273 *ise BBD ≤ 0*

8. Eğer Su-2 ≤ 151 *ve* İri Agrega-1 ≥ 1120 *ise BBD ≥ 1*

Şekil 3.2 Karar tabloları için sınıfın kendisi ile değiline atanan kural örnekleri

Şekil 3.2'de yer alan kuralların sonuç kısımlarında $BBD \geq 1$ ifadesi ilgili karar tablosunun üretildiği sınıfa yapılan atamayı göstermektedir. $BBD \leq 0$ ifadesi ise karar tablosunun üretildiği sınıfın dışında kalan diğer sınıflara yapılan atamayı göstermektedir.

Tablo 3.5 Her bir karar tablosundan çıkarılan kural sayıları

Karar Tabloları	Sınıfın değiline atanan kural sayısı	Sınıfın kendisine atanan kural sayısı	Toplam Kural Sayısı
Düşük Dayanım	57	55	112
Normal Dayanım	120	117	237
Orta Dayanım	91	100	191
Yüksek Dayanım	31	24	55

Kesin karar kuralları ile oluşturulan karar modelinin test verileri üzerindeki performansını gözlemleyebilmek için karmaşıklık matrisi oluşturulmuştur. Karmaşıklık matrisi, test kümesinde bulunan örneklerin gerçek sınıfları ile model tarafından öngörülen sınıflarını karşılaştıran bir tablodur. Bu matris üzerinde satırlar bir test örneğinin gerçek sınıfını, sütunlar ise bu örneğin model tarafından öngörülen sınıfını temsil etmektedir. Herhangi bir test örneğinin karar modeli tarafından öngörülen sınıfı birden fazla olduğunda örneğin sınıfı belirsiz olacağından bu tür örnekler karmaşıklık matrisine dahil edilmemiştir. Örneğin karmaşıklık matrisine orta karar sınıfının bulunduğu satır boyunca baktığımızda modelin, 9 adet örneğin sınıfını hatalı bir şekilde normal sınıfına atadığı, 25 örneği ise doğru bir şekilde orta sınıfına atadığı görülmektedir. Test veri kümesi içerisinde orta karar sınıfına ait 36 örneğin bulunduğu dikkate alındığında 2 adet örneğin ise birden fazla sınıfa atandığı söylenilebilir.

Tablo 3.6 Karmaşıklık matrisi

		Tahmin Edilen Sınıf			
		Düşük	Normal	Orta	Yüksek
Gerçek Sınıf	Düşük	14	3	0	0
	Normal	3	35	4	0
	Orta	0	9	25	0
	Yüksek	0	0	0	5

Veri kümesinin aşırı dengesiz olmasından ötürü performans metriği olarak genel doğruluk yerine azınlık sınıfındaki değişimlere daha duyarlı olan macro-f1 skoru kullanılmıştır. Macro-f1 skoru %85 olarak hesaplanmıştır. Buna dayanarak baskın kaba küme temelli çıkarılan kesin karar kurallarının test örneklerinin dayanım sınıflarını öngörmede anlamlı bir etkiye sahip olduğu söylenilebilir. Öte yandan modelin düşük ve yüksek dayanıma sahip örnekleri hemen hemen doğru sınıfa atayabilmesine rağmen gerçekte orta dayanım sınıfına ait örneklerin büyük bir bölümünü normal dayanım sınıfına ataması incelemeye değer bir bulgu olarak karşımıza çıkmaktadır.

Her bir dayanım sınıfı için betonu oluşturan bir karışımdaki bileşenlerin optimum miktarları 2. Bölümde anlatılan skor hesapları aracılığıyla belirlenebilir. Endüstri açısından yüksek dayanımlı beton türünün önemi nedeniyle bu çalışmada yüksek dayanıma sahip betonun elde edilmesi için bileşenlere ait gerekli miktar aralıkları bulunmuş ve Tablo 3.7'de sunulmuştur. Bu noktada karışımdaki her bir bileşenin miktar aralığını belirlemek için en genel skor hesabı olan Durum-3 dikkate alınmıştır. Buradaki hesabın doğası gereği $\rho_{r_{\geq 1}^{\text{Yüksek}}}(e, Cl_{\text{Yüksek}})$ değeri mümkün olduğunca yüksek, $\rho_{r_{\leq 0}^{\text{Yüksek}}}(e, \neg Cl_{\text{Yüksek}})$ değeri de mümkün olduğunca düşük olduğunda betonun yüksek dayanım sınıfına ait olma olasılığı artmaktadır. Bunun sonucu olarak, yüksek dayanıma sahip olması istenen bir betonun yüksek sınıf için dönüştürülmüş karar tablosundan elde edilen kurallar arasında maksimum sayıda $BBD \geq 1$ karar bölümüne sahip kuralı, minimum sayıda $BBD \leq 0$ karar bölümüne sahip kuralı içermesi beklenmektedir.

Tablo 3.7 Yüksek dayanımlı beton eldesinde nitelikler için miktar aralıkları

Nitelik Adı (Birim) (Kısaltma)	Miktar Aralığı
Çimento (kg/m^3) (x_{c1})	$x_{c1} \geq 531.419$
Yüksek Fırın Cürufu (kg/m^3) (x_{c2})	$189.249 \leq x_{c2} \leq 189.772$
Uçucu Kül (kg/m^3) (x_{c3})	x_{c3} için alt veya üst sınır yoktur.
Su (kg/m^3) (x_{c4})	$149.348 \leq x_{c4} \leq 151.149$
Süper Akışkanlaştırıcı (kg/m^3) (x_{c5})	$11.3064 \leq x_{c5} < 11.61$
İri Agrega (kg/m^3) (x_{c6})	$908.923 < x_{c6} \leq 913.656$
İnce Agrega (kg/m^3) (x_{c7})	$744.917 < x_{c7} \leq 753.647$
Yaş (Gün) (x_{c8})	$x_{c8} > 29$

Açıkça görülmektedir ki yüksek dayanımlı beton karışımdaki *Uçucu Kül* miktarından etkilenmemektedir. Ayrıca, *Çimento* ve *Yaş* bileşenlerinde herhangi bir üst sınır bulunmamaktadır. Dolayısıyla belli bir değerden sonra *Çimento* ve *Yaş* niteliğindeki artışın, betonun yüksek dayanımını etkilemeyeceğini söyleyebiliriz.

3.1.2 Deneysel Sonuçlar

Kompozit bir malzeme olan beton içerdiği bileşenler yönünden karmaşık bir yapıya sahiptir. Betonun bu karmaşık yapısını anlamak onun basınç dayanımını modellemede büyük bir önem kazanmaktadır. Bu yüzden uygulamada çeşitli bileşenler varlığında betonun basınç dayanımını öngörmek için bir karar destek modeli tasarlanması hedeflenmiştir. Bu alanda yapılan çalışmaların büyük çoğunluğu regresyon tabanlı çalışmalar olmasına rağmen karar destek modeli, karışımdaki bileşenlerin basınç dayanımı üzerindeki etkisini daha açık bir şekilde yansıtabilmektedir. Örneğin *Uçucu Kül* niteliği için bir alt veya üst sınır bulunmamaktadır. Açıkçası bu durum, yüksek dayanımlı betonun *Uçucu Kül* niteliğinden bağımsız olduğunu göstermektedir. Dahası yüksek dayanımlı beton için çıkarılan bazı karar kurallarının koşul kısımları yalnız *Su* ve *Çimento* niteliklerini içeren tek elementer koşula sahip olabilmektedir. Buna dayanarak *Su* ve *Çimento* niteliklerinin basınç dayanımı üzerinde doğrudan bir etkiye sahip olduğu ifade edilebilir. Fakat bu iki nitelik dışında kalan diğer niteliklerin basınç dayanımı üzerindeki etkisi karışımdaki diğer bileşenler ile mümkün olmaktadır. Ayrıca *Çimento* ve *Yaş* bileşenlerinin artan yönde herhangi bir limite sahip olmaması elde edilen diğer bir bulgudur. Bunlar yüksek dayanımlı betonlar için dikkate değer sonuçlardır. Diğer yandan veri kümesinde az sayıda örnek bulunduğundan karar kurallarının genelleme kapasitesi azalmakta ve öğrenme eksikliğinden kaynaklanan belirsiz atamalara neden olmaktadır. Bu noktada sentetik örnek üretimi sayesinde bir örneğin birden fazla karar sınıfına atanmasıyla ilgili belirsiz durum ortadan kaldırılmıştır.

4
SONUÇ VE ÖNERİLER

1982 yılında Pawlak tarafından ortaya atılan kaba küme teorisi, belirsiz ve muğlak ortamlarda karar verme süreçlerini yürütebilme başarısından dolayı etkili bir matematiksel araç olarak ortaya çıkmıştır. Çok çeşitli alanlarda klasik kaba kümeleri merkezine alan uygulamalar yapılmıştır. Ancak klasik kaba küme yaklaşımının uygulamalarda sınırlı kaldığı noktaların ortaya çıkmasıyla daha sonraları baskınlık bağıntısına dayalı kaba küme yaklaşımı önerilmiştir.

Bu tez çalışmasında betonun basınç dayanımını belirlemek için baskın kaba küme yaklaşımı temelinde kural tabanlı bir model oluşturulmuştur. Macro-f1 skor değeri neticesinde modelin, test örneklerinin karar sınıflarını öngörmesinde anlamlı bir etkiye sahip olduğu görülmüştür. Modelin yanılma payının büyük bir kısmının normal ve orta dayanım sınıflarının birbirine karıştırılmasından kaynaklandığı düşünüldüğünde bu durum analiz edilebilecek hususlardan biri olarak ön plana çıkmaktadır. Önemli bir diğer nokta modelin öğrenmesine engel teşkil eden aşırı dengesiz veri kümesi üzerinde sentetik beton örneği üretimi yapılarak modelin performansı iyileştirilmiştir. Diğer yandan skor hesabının teoriğinden yararlanarak yüksek dayanımdaki betonlar için önemli birtakım sonuçlar elde edilmiştir. Bu tip betonların elde edilmesinde karışımı oluşturan bileşenlerden birinin herhangi bir etkiye sahip olmadığı görülmüştür. Karışımdaki bazı bileşenlerin sınırsız bir şekilde artırılmasının yüksek dayanım için herhangi bir olumsuz etki yaratmadığı gözlemlenmiştir. Ayrıca bazı bileşenler için elde edilen aralıkların yeterince dar olması bunların karışımdaki miktarları üzerinde fazla bir oynamanın yapılamayacağını ortaya koymaktadır.

İleriye dönük olarak kaba küme teorisinin eksik değer içeren veri kümelerine uygulanması hedeflenmektedir. Literatürde yer alan eksik veri doldurma yöntemlerinin çoğu, eksik değerlerin fazla olduğu verilerde veriyi taraflı (bias) hale getirmektedir. Eksik nitelik değerleri ile analize olanak sağlaması sebebiyle kaba kümelerin bu tip veri kümeleri üzerinde yapılan karar süreçlerinde etkin bir rol oynayacağı düşüncesindeyiz.

KAYNAKÇA

[1] Z. Pawlak, "Rough Sets", International journal of computer & information sciences, vol. 11, 1982, pp.341-356.

[2] X. Yang, and J. Yang, "Incomplete information system and rough set theory", Models and attribute reductions, Springer, 2012.

[3] J. W. Grzymala-Busse, "LERS-a system for learning from examples based on rough sets", in Intelligent decision support, Springer, 1992, pp. 3-18.

[4] R. Slowinski, and C. Zopounidis, "Application of the rough set approach to evaluation of bankruptcy risk", Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management, vol 4, 1995, pp. 27-41.

[5] S. Lee, and G. Vachtsevanos, "An application of rough set theory to defect detection of automotive glass", Mathematics and computers in simulation, vol. 60, 2002, pp. 225-231.

[6] P. C. Wang, C. T. Su, K. H. Chen, and N. H. Chen, "The application of rough set and Mahalanobis distance to enhance the quality of OSA diagnosis", Expert Systems with Applications, vol. 38, 2011, pp. 7828-7836.

[7] N. Cui, and Q. Cui, "A Rough-Set Based Approach to Predict Consumers' Brand Preference", in 2009 International Workshop on Intelligent Systems and Applications, IEEE, 2009, pp. 1-4.

[8] J. M. Peña, S. Létourneau, and F. Famili, "Application of rough sets algorithms to prediction of aircraft component failure", in International Symposium on Intelligent Data Analysis, Springer, 1999, pp. 473-484.

[9] T. Rajesh, R. Malar, and M. R. Geetha, "Brain tumor detection using optimisation classification based on rough set theory", Cluster Computing, vol. 22, 2019, pp. 13853-13859.

[10] J. Yao, and J. P. Herbert, "Financial time-series analysis with rough sets", Applied Soft Computing, vol. 9, 2009, pp. 1000-1007.

[11] C. Goh, and R. Law, (2003), "Incorporating the rough sets theory into travel demand analysis", Tourism Management, vol. 24, 2003, pp. 511-517.

[12] B. Predki, R. Słowiński, J. Stefanowski, R. Susmaga, and S. Wilk, "ROSE-software implementation of the rough set theory", in International Conference on Rough Sets and Current Trends in Computing, Springer, 1998, pp. 605-608.

[13] P. F. Pai, and F. C. Lee (2010), "A rough set-based model in water quality analysis", Water resources management, vol. 24, 2010, pp. 2405-2418.

[14] H. H. Yang, T. C. Liu, and Y. T. Lin, "Applying rough sets to prevent customer complaints for IC packaging foundry", Expert Systems with Applications, vol. 32, 2007, pp. 151-156.

[15] S. Wilk, R. Słowiński, W. Michałowski, and S. Greco, "Supporting triage of children with abdominal pain in the emergency room", European Journal of Operational Research, vol. 160, 2005, pp. 696-709.

[16] S. Tsumoto, “Knowledge discovery in clinical databases and evaluation of discovered knowledge in outpatient clinic”, Information sciences, vol. 124, 2000, pp. 125-137.

[17] H. Patel, and D. Patel, “Crop Prediction Framework Using Rough Set Theory”, International Journal of Engineering and Technology, vol. 9, 2017, pp. 2505-2513.

[18] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski, “Rough sets theory for multicriteria decision analysis”, European journal of operational research, vol. 129, 2001, pp. 1-47.

[19] J. J. Liou, “A novel decision rules approach for customer relationship management of the airline market”, Expert systems with Applications, vol. 36, 2009, pp. 4374-4381.

[20] J. J. Liou, and G. H. Tzeng, “A dominance-based rough set approach to customer behavior in the airline market”, Information Sciences, vol. 180, 2010, pp. 2230-2238.

[21] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski, “A new rough set approach to evaluation of bankruptcy risk”, in Operational tools in the management of financial risks, Springer, 1998, pp. 121-136.

[22] A. B. G. do Couto, “Using a Dominance-based Rough Set Approach for Analysing Business Indicators”, in ITQM, 2015, pp. 350-359.

[23] J. Błaszczyński, S. Greco, B. Matarazzo, R. Słowiński, and M. Szeląg, “jMAF-Dominance-based rough set data analysis framework”, in Rough Sets and Intelligent Systems-Professor Zdzisław Pawlak in Memoriam, Springer, 2013, pp. 185-209.

[24] F.Z. Younsi, S. Chakhar, A. Ishizaka, D. Hamdadou, and O. Boussaid, “A Dominance-Based Rough Set Approach for an Enhanced Assessment of Seasonal Influenza Risk”, Risk Analysis, vol. 40, 2020, pp. 1323-1341.

[25] P. Sawicki, and J. Żak, “The application of dominance-based rough sets theory for the evaluation of transportation systems”, Procedia-Social and Behavioral Sciences, vol. 111, 2014, pp. 1238-1248.

[26] N. Dehouche, “Predicting Seminal Quality with the Dominance-Based Rough Sets Approach, 2020, arXiv preprint arXiv:2012.13204.

[27] D. Gil, J. L. Girela, J. De Juan, M. J. Gomez-Torres, and M. Johnsson, “Predicting seminal quality with artificial intelligence methods”, Expert Systems with Applications, vol. 39, 2012, pp. 12564-12573.

[28] J. Błaszczyński, R. Słowiński, and M. Szeląg, “Induction of ordinal classification rules from incomplete data”, in International conference on rough sets and current trends in computing, Springer, 2012, pp. 56-65.

[29] X. Ge, P. Wang, and Z. Yun, “The rough membership functions on four types of covering-based rough sets and their applications”, Information Sciences, vol. 390, 2017, pp. 1-14.

[30] Y. Yao, and Y. Zhao, “Discernibility matrix simplification for constructing attribute reducts”, Information sciences, vol. 179, 2009, pp. 867-882.

[31] Z. Pawlak, “Some issues on rough sets”, in Transactions on Rough Sets I, Springer, 2004, pp. 1-58.

[32] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Slowinski, “Rough approximation by dominance relations”, International journal of intelligent systems, vol. 17, 2002, pp. 153-171.

[33] J. Błaszczyński, S. Greco, and R. Słowiński, “Multi-criteria classification–A new scheme for application of dominance-based decision rules”, European Journal of Operational Research, vol. 181, 2007, pp. 1030-1044.

[34] J. BŁaszczyński, S. Greco, and R. SŁowiński, “Inductive discovery of laws using monotonic rules”, Engineering Applications of Artificial Intelligence, vol. 25, 2012, pp. 284-294.

[35] J. Błaszczyński, R. Słowiński, and M. Szeląg, “Sequential covering rule induction algorithm for variable consistency rough set approaches”, Information Sciences, vol. 181, 2011, pp. 987-1002.

[36] S. Greco, B. Matarazzo, R. Slowinski, and J. Stefanowski, “An algorithm for induction of decision rules consistent with the dominance principle”, in International conference on rough sets and current trends in computing, Springer, 2000, pp. 304-313.

[37] R. Slowinski, S. Greco, and B. Matarazzo, “Rough set and rule-based multicriteria decision aiding”, Pesquisa Operacional, vol. 32, 2012 pp. 213-270.

[38] K. Zaras, “The Dominance-based Rough Set Approach (DRSA) applied to bankrupcy prediction modeling for small and medium businesses”, Multiple Criteria Decision Making, 2011, pp. 287-295.

[39] A. Skowron, and C. Rauszer, “The discernibility matrices and functions in information systems”, in Intelligent decision support, Springer, 1992, pp. 331-362.

[40] S. Greco, B. Matarazzo, and R. Słowinski, “Handling missing values in rough set analysis of multi-attribute and multi-criteria decision problems”, in International Workshop on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular-Soft Computing, Springer, 1999, pp. 146-157.

[41] Y. Uçan, A. Topal, and N. G. BAYAZIT, “A new method for obtaining the inconsistent elements in a decision table based on dominance principle”, Turkish Journal of Mathematics, vol. 44, 2020, pp. 561-568.

[42] T.D. Pigott, “A review of methods for missing data”, Educational research and evaluation, vol. 7, 2001, pp. 353-383.

[43] M. Szeląg, J. Błaszczyński, and R. Słowiński, “Rough set analysis of classification data with missing values”, in International Joint Conference on Rough Sets, Springer, 2017, pp. 552-565.

[44] D. A. Abrams, “Design of concrete mixtures”, Bulletin 1, 1918.

[45] S. Popovics, “Analysis of concrete strength versus water-cement ratio relationship”, Materials Journal, vol. 87, 1990, pp. 517-529.

[46] UCI Machine Learning Repository, available: http://archive.ics.uci.edu/ml/dataset/concrete + compressive+strength, 30 Mart 2021.

[47] A. O. Sojobi, O.J. Aladegboye, and T. F. Awolusi, “Green interlocking paving units”, Construction and Building Materials, vol. 173, 2018, pp. 600-614.

[48] S. Abdellatif, M. A. Ben Hassine, S. Ben Yahia, and A. Bouzeghoub, “ARCID: a new approach to deal with imbalanced datasets classification”, in International Conference on Current Trends in Theory and Practice of Informatics, Edizioni della Normale, 2018, pp. 569-580.

[49] B. Krawczyk, “Learning from imbalanced data: open challenges and future directions”, Progress in Artificial Intelligence, vol. 5, 2016, pp. 221-232.

[50] N. V. Chawla, K.W. Bowyer, L.O. Hall, and W. P. Kegelmeyer, “SMOTE: synthetic minority over-sampling technique”, Journal of artificial intelligence research, vol. 16, 2002, pp. 321-357.

[51] JAMM Software Tool, available: http://idss.cs.put.poznan.pl/site/75.html, 12 Nisan 2021.

TEZDEN ÜRETİLMİŞ YAYINLAR

Konferans Bildirileri

1. A. Topal, N. Güler Bayazıt, Y. Uçan, "Beton Basınç Dayanıklılığının Baskın Kaba Küme Yaklaşımı ile İncelenmesi", 22. Ulusal Mekanik Kongresi, 2021, ss. 415-423.

Makaleler

1. A. Topal, N. Güler Bayazıt, Y. Uçan, "Prediction of Compressive Strength Class of Concrete with Dominance Based Rough Set Approach", Sigma Journal of Engineering and Natural Science (Accepted, 12.03.2022)

Projeler

1. Kaba Kümeler ve Uygulamaları, Bilimsel Araştırma Projesi