



**T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DE-SİTTER 3-UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Tuba YILMAZ
(20189237009)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT

**SİVAS
ŞUBAT 2022**

Tuba YILMAZ'ın hazırladığı ve “**DE-SİTTER 3-UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Dr.Öğretim Üyesi Tuğba MERT**
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN**
Aksaray Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Dr.Öğretim Üyesi Emel KARACA**
Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.





Bütün hakları saklıdır.
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

© Tuba YILMAZ, 2022

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

24.02.2021

Tuba YILMAZ

ÖZET
DE-SİTTER 3-UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER

Tuba YILMAZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Tuğba MERT

2022, 62+xi sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezin diğer bölümleri için ön hazırlık olarak, Öklid, Lorentz ve de-Sitter uzayındaki temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, eğriler üzerinde inşaa edilen sabit açılı yüzeyler, E^3 Öklid uzayı ve E_1^3 Minkowski uzayında verilmiştir.

Üçüncü bölümde, De-Sitter 3-uzayında eğriler üzerinde inşaa edilen bazı özel yüzeyler verilmiştir. Bu yüzeyler de-Sitter uzayındaki çeşitlilikten faydalanılarak bir çok alt parçaya ayrılarak incelenmiştir. Ayrıca de-Sitter 3—uzaydaki Regle yüzeylere örnekler verilerek bunlardan bazılarının açıları koruyan steografik izdüşümler altındaki görüntüleri bulunmuş ve mathematica programında çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: de-Sitter Uzayı, Eğri, Yüzey

ABSTRACT
SOME SPECIAL SURFACES IN DE-SITTER 3-SPACE

Tuba YILMAZ

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Tuğba MERT

2022, 60+xi pages

This thesis consists of three parts.

In the first chapter, basic definitions and theorems in Euclidean, Lorentz and de-Sitter spaces are given as a preliminary for the other parts of the thesis.

In the second part, constant angle surfaces constructed on curves are given in E^3 Euclidean space and E_1^3 Minkowski space.

In the third chapter, some special surfaces constructed on curves in De-Sitter 3-space are discussed. These surfaces have been examined by dividing into many sub-parts by making use of the diversity in the de-Sitter space. In addition, examples of the in de-Sitter 3-space of Regle surfaces are found, and some of them are shown in mathematica program with images under stereographic projections that protect the angles of some of them.

Keywords: de-Sitter space, curve, surface

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT'e, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan tüm aileme minnet, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
TEŞEKKÜR	viii
ŞEKİLLER LİSTESİ	x
SİMGELER DİZİNİ	xi
GİRİŞ	1
1. TEMEL KAVRAMLAR	4
2. EĞRİLER ÜZERİNDE İNŞAA EDİLEN BAZI SABİT AÇILI YÜZEYLER	11
2.1 Öklid Uzayında Eğriler Üzerinde İnşa Edilen Sabit Açılı Yüzeyler	11
2.2 Minkowski Uzayında Eğriler Üzerinde İnşa Edilen Sabit Açılı Yüzeyler...	20
3. DE-SİTTER 3-UZAYDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER	33
3.1 Spacelike Normal Regle Yüzeyler.....	36
3.2 Timelike Binormal Regle Yüzeyler.....	46
3.3 Timelike Darboux Regle Yüzeyler.....	53
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 3.1 de-Sitter Uzayında Spacelike Normal Regle Yüzey.....	45
Şekil 3.2 de-Sitter Uzayında Spacelike Binormal Regle Yüzey.....	53
Şekil 3.3 de-Sitter Uzayında Spacelike Darboux Regle Yüzey.....	58



SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^{n+1}$	$(n + 1)$ –boyutlu vektör uzayı
$\mathbf{d}_E$	Öklidyen uzaklık fonksiyonu
$\mathbf{E}^n$	n –boyutlu Öklidyen uzay
$\mathbf{S}_1^3$	de-Sitter uzay
$\langle, \rangle_{\mathbf{L}}$	Lorentzien iç çarpım



GİRİŞ

$U, \mathbb{R}^2$ uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi ve $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzgün ve regüler bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise, $\varphi(U)$ kümesine, $\mathbb{R}^3$ uzayında bir **basit yüzey** denir. $M, \mathbb{R}^3$ uzayının bir alt kümesi olmak üzere, M nin her bir p noktası için

$$p \in \varphi(U) \text{ ve } \varphi(U) \subset M$$

olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, $\mathbb{R}^3$ te bir **yüzey** denir.

Geometrik olarak basit bir şekilde yukarıdaki gibi tanımlanan yüzey kavramı ve yüzeyler teorisinin kuruluşu, uzun yıllar süren ve çok özverili çalışmaların sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Yüzeyler teorisi diye adlandırabileceğimiz matematik alanını kuran kişi Leonhard Euler olmuştur. Euler 1760 yılında yüzeylerin eğriliğinin nasıl tanımlanacağı problemini ele almıştır. Yüzeylerin kesitlerini oluşturan eğrilerin eğriliği birbirinden farklı olduğundan yüzey üzerinde bir noktada eğrilik kavramını vermek zorunda kalmıştır. Euler, yüzeyin hangi noktasında eğriliğini tanımlamayı istiyorsak, o noktada yüzeye dik olan düzlemleri incelemiş, bu düzlemler ile yüzeyin kesitleri olan eğrilerin eğriliklerini bulmuş ve bunlardan en büyük ve en küçük eğriliği veren düzlemlerin aralarındaki açının daima doksan derece olduğunu ispat etmiştir. Yüzeylerin $z = f(x, y)$ şeklinde değil de $F(x, y, z) = 0$ şeklindeki denklemlerle yazılarak üç koordinatın birbirine denk görülmesinin, yüzey noktalarının iki nicelik ile gösterilmesinin, iki yüzeyin birbirine sarılabilmesi için yay elemanlarının çakışması şartının bulunmasının, jeodezik yolların diferensiyel denklemlerinde bunların bir eğri ailesiyle yaptığı açılarının kullanılmasıyla tohumları Euler tarafından atılmıştır. Bu tohumların meyvası ise Gauus ile birlikte olgunlaştırılmıştır.

Gauus'dan önceki dönemlerde yüzeyler hakkındaki çalışmaların çoğu, yüzeylerin kesitleri, özel yüzeyler veya özel yüzey aileleri hakkında idi ve o dönemde yüzeylerin genel teorisi için yapılan araştırmaların en önemlilerini Legendre, Euler, Monge ve Meussnier vermiştir. Hayalindeki üç boyutlu şekillerle başkala

rının kağıt üzerindeki iki boyutlu şekillerle çalışabileceğinden daha rahatlıkla çalışabilen Gaspard Monge tasarı geometrisinin kurucusu olmuştur. Monge, eğrilik hakkında özgün düşüncelerle yüzeyler üzerinde eğrilik hattı adında yeni bir kavram tanımlamıştır. Monge'un öğrencisi olan Jean Baptiste Marie Charles Meusnier ise 1776 yılında, yüzeyin, yüzeye dik olmayan düzlemler ile arakesiti olan eğrilerin eğrilik yarı çapı için bir formül bulmuştur.

Gauus' a kadar yüzeyler hakkındaki belli başlı çalışmalar bunlardan ibarettir. Yüzeyler teorisinin doğuşunu, yeryüzü ölçümlerine, jeodeziye borçluyuz. Ticari, mali, idari, askeri nedenlerden ötürü, 18.yüzyılda önemli ölçümler yapılmış, jeodezi gelişmiş, teorik bir yapı üzerine inşa edilebilecek olgunluğa erişmiştir. Gauus'un bu süreçte bu gelişime sunduğu katkılar ve çalışmalar ise çok önemli boyuttadır.

Gauus'un bu alana devrim niteliğindeki bir diğer katkısı ise Ökliddışı geometrinin kurucuları arasında olmasıdır. 1792 yılından itibaren Öklid geometrisinin temelleri hakkında düşünceler üretmiş, başlangıçta Öklid'in paralellik postülatını ispat etmenin belki mümkün olduğuna inanmış, 1817 civarında bunun mümkün olmadığına kanaat getirmiş, sonra bu postülatın geçerli olmadığını belirtmiştir. Bunların bir sonucu olarak ökliddışı geometri adını verdiği bir geometriyi kurmuştur. Gauss, matematikte ve bilimde büyük bir devrim olan ökliddışı geometrinin önemini çok iyi biliyordu, fakat polemiklere girmekten çekindiği için ökliddışı geometri çalışmalarını hayatta iken yayımlamama kararı almıştır. Düzlemin ökliddışı geometrisi, eğrilik ölçüsü sabit olan yüzeyler teorisi ile yakından bağlantılıdır. Eğrilik pozitif bir sabit ise yüzeyde küre geometrisi ile küre trigonometrisi, negatif bir sabit ise ökliddışı geometri ve öklid dışı trigonometri geçerli olmaktadır.

Gauss iki değişkenli kuadratik diferensiyel formları incelemiştir. Daha genel olarak n -değişkenli kuadratik diferensiyel formların incelenmesi, n -boyutlu manifold kavramını geliştiren Bernhard Riemann tarafından 1854 yılında başlatılmıştır. Bu çalışmalar ve uygulamaları Albert Einstein'ın 1917 yılındaki genel izafiyet

teorisine kadar uzanmış ve günümüze kadar aktif çalışma sahası olmaya devam etmiştir.

Yukarıda kısaca özetlediğimiz yüzeyler teorisinin kuruluşu ve gelişimi sürecini incelediğimizde bu alandaki çalışmaların önemi de açıkça ortaya çıkmaktadır.

Normal vektör alanı, sabit bir vektör ile sabit bir açı yapan yüzeye **sabit açılı yüzey** adı verilir. Son yıllarda bu tarz yüzeylerin geometrisini anlamak için çok fazla çalışma yapılmıştır. Bu yüzeyler helis yüzeyler veya sabit açılı yüzeyler olarak adlandırılır ve bu yüzeyler üç boyutlu geometrilerin tamamında çalışılmıştır [1]-[10].

Verilen bir doğrunun, verilen bir eğri boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen yüzeye **regle yüzey** adı verilir. [11] de, sabit açılı yüzeylerin genel karakterizasyon teoremleri altında, $\mathbb{R}^3$ te bazı özel regle yüzeyler sınıflandırılmıştır. Benzer şekilde, [12] de aynı yüzeyler Minkowski 3-uzayında elde edilmiş ve önemli karakterizasyonları verilmiştir.

Bizim burada amacımız, de-Sitter 3-uzayında bir eğri üzerinde inşa edilen regle yüzey çeşitlerinin parametrizasyonları ve önemli özelliklerini incelemektir.

1.BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde ihtiyacımız olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

n -boyutlu Öklid uzayı için $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı ile eşleşen afin uzay standart analitik model olarak düşünülebilir.

Tanım 1.1. V bir reel vektör uzayı ve $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. g dönüşümü simetrik ve bilinear dönüşüm ise bu dönüşüme V üzerinde bir **bilinear form** denir.

Tanım 1.2. V bir reel vektör uzayı, $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrik bilinear form ve $v \in V$ olsun. Eğer her $u \in V$ için $g(u, v) = 0$ iken $v = 0$ oluyorsa g dönüşümüne **non-dejenere form** denir.

Tanım 1. 3. $\langle, \rangle, V$ vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik, bilinear ve pozitif tanımlı bir iç çarpım olmak üzere

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

şeklinde tanımlı reel sayıya $v \in V$ vektörünün bu iç çarpıma göre **normu** denir.

Tanım 1.4. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlı reel sayıya bu iki vektör arasındaki **Öklid uzaklık** denir. $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan d metriğine de **Öklid metriği** denir.

Teorem 1.5. $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümünün bir ortogonal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

olmasıdır.

Tanım 1.6. $a < b$ olmak üzere $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve X bir metrik uzay olsun. Eğer $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ fonksiyonu sürekli ise bu fonksiyona X metrik uzayında bir **eğri** denir.

Tanım 1.7. $a < b$ olmak üzere $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık olsun. $\alpha : [a, b] \rightarrow X$ dönüşümü uzunluk koruyan sürekli bir fonksiyon ise α ya X metrik uzayında bir **jeodezik eğri yayı** denir. Bu durumda jeodezik yayın başlangıç ve bitim noktaları sırasıyla, $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ dir.

Tanım 1.8. $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ dönüşümüne **jeodezik doğru** denir.

Tanım 1.9. V bir reel vektör uzayı olmak üzere $g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü bilineer, simetrik ve non-dejenere ise g dönüşümüne V üzerinde bir **skaler çarpım**, V uzayına da bir **skaler çarpım uzayı** denir.

Tanım 1.10. V bir skaler çarpım uzayı olmak üzere V nin, üzerindeki skaler çarpım negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu altuzayının boyutuna skaler çarpımın **indeksi** denir. Skaler çarpımın indeksi v ise

$$0 \leq v \leq \text{boy}V$$

dir. Ayrıca skaler çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı olan skaler çarpımın indeksi olarak tanımlanır.

Tanım 1.11. İndeksi 1 ve boyutu 2 den büyük veya 2 ye eşit olan skaler çarpım uzayına **Lorentz uzayı** denir.

Tanım 1.12. $x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\langle x, y \rangle_L = -x_1y_1 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

skaler çarpımı ile verilen $R_1^n = (\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_L)$ ikilisine **n -boyutlu Minkowski uzayı** denir.

Tanım 1.13. R_1^n Minkowski uzayında bir $x \in R_1^n$ vektörü verilsin.

i. $\langle x, x \rangle_L > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne bir **spacelike (uzay benzeri) vektör** denir.

ii. $\langle x, x \rangle_L = 0$ ve $x \neq 0$ ise x vektörüne bir **lightlike (ışık benzeri, null) vektör** denir.

iii. $\langle x, x \rangle_L < 0$ ise x vektörüne bir **timelike (zaman benzeri) vektör** denir.

Tanım 1.14. V bir Lorentz uzayı ve $v \in V$ olmak üzere

$$\|v\| = |\langle v, v \rangle_L|^{1/2}$$

reel sayısına v vektörünün **Lorentz normu** denir.

Tanım 1.15. V bir Lorentz uzayı, W, V nin bir altuzayı ve $g_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ skaler çarpım olsun.

- i. g_W pozitif tanımlı ise W ya **spacelike altuzay** denir.
- ii. g_W non-dejenere ve indeksi 1 ise W ya **timelike altuzay** denir.
- iii. g_W dejenere ise W ya **lightlike altuzay** denir.

Tanım 1.16. $x, y \in R_1^n$ vektörleri için

$$\langle x, y \rangle_L = 0$$

ise bu vektörlere **Lorentz ortogonal vektörler** denir.

Tanım 1.17. R_1^n de linner bağımsız vektörlerinin kümesi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ve $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = \varepsilon_n = 1$ olmak üzere

$$\langle e_i, e_j \rangle_L = \delta_{ij} \varepsilon_j$$

ise $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kümesine, R_1^n nin **Lorentz ortonormal bazı** denir, burada δ_{ij} — kronecker-delta fonksiyonunu göstermektedir.

Tanım 1.18. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, R_1^4$ uzayının Lorentz ortonormal bazı ve $x, y, z \in R_1^4$ olmak üzere

$$x \wedge y \wedge z = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlı vektörel çarpıma **Lorentz vektörel çarpımı** denir. Buradaki x, y, z vektörlerine de **pseudo-ortogonal vektörler** denir ve herhangi $w \in R_1^4$

için

$$\langle w, x \wedge y \wedge z \rangle_L = \det(w, x, y, z)$$

şeklindedir.

Tanım 1.19. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow R_1^4$ bir regüler eğri ve T, γ -eğrisinin teğet vektör alanı olmak üzere

- i. $g(T, T) > 0$ ise γ eğrisine **spacelike eğri** denir.
- ii. $g(T, T) = 0$ ve $T \neq 0$ ise γ eğrisine **lightlike (null) eğri** denir.
- iii. $g(T, T) < 0$ ise γ eğrisine **timelike eğri** denir.

Bu tanıma denk olarak bir eğrinin spacelike, timelike veya lightlike eğri olmasını aşağıdaki şekilde de verebiliriz.

$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow R_1^4$ regüler eğrisinin her $s \in I$ için $\gamma'(s)$ hız vektörü spacelike, timelike ve lightlike ise γ eğrisine sırasıyla **spacelike**, **timelike** ve **lightlike eğri** denir. Eğrinin bir özel hali olarak doğruları gözöntüne alırsak, eğer doğrunun doğrultman vektörü spacelike ise doğru **spacelike doğru**, doğrultman vektörü timelike ise doğru **timelike doğru** ve doğrultman vektörü lightlike ise doğru **lightlike doğru** olarak adlandırılır.

Teorem 1.20. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow R_1^4$ regüler eğrisi spacelike veya timelike bir eğri olsun. T, N_1, N_2, N_3 sırasıyla γ eğrisinin teğet, birinci normal, ikinci normal ve üçüncü normal vektörlerini göstermek üzere $i = 1, 2, 3, 4$ için

$$\varepsilon_i = \pm 1, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 = -1$$

olacak şekilde

$$\begin{aligned} \langle T, T \rangle_L &= \varepsilon_1 \\ \langle N_i, N_j \rangle_L &= \varepsilon_{i+1} \delta_{ij} \\ \langle T, N_i \rangle_L &= 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlansın. Buna göre R_1^4 de spacelike veya timelike bir γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T, N_1, N_2, N_3\}$ ve eğrilikleri $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ olacak şekilde Frenet den-

klemeleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N'_1 \\ N'_2 \\ N'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_2 \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa_1 & 0 & \varepsilon_3 \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \kappa_2 & 0 & -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_3 \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}$$

olarak verilir.

Tanım 1.21. R_1^{n+1} uzayında n -boyutlu birim pseudo-küre olarak adlandırılan

$$S_1^n = \{x \in R_1^{n+1} \mid \langle x, x \rangle_L = 1\}$$

şeklinde tanımlı kümeye **de-Sitter n -uzayı** denir.

Eğer $n = 3$ ise

$$S_1^3 = \{x \in R_1^4 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

şeklinde 3-boyutlu birim pseudo-küre olan **de-Sitter 3-uzayı** elde edilir.

Eğer $n = 2$ ise

$$S_1^2 = \{x \in R_1^3 \mid -x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

şeklinde 2-boyutlu birim pseudo-küre ($\mathbb{R}^3$ de tek kanatlı hiperboloid) olan **de-Sitter 2-uzayı** elde edilir.

Eğer $n = 1$ ise

$$S_1^1 = \{x \in R_1^2 \mid -x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

şeklinde 1-boyutlu birim pseudo-çember ($\mathbb{R}^2$ de hiperbol) olan **de-Sitter 1-uzayı** elde edilir.

Tanım 1.22. $v \in R_1^4$ bir vektör ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. R_1^4 de v -pseudo normalli hiperdüzlem

$$HP(v, c) = \{x \in R_1^4 \mid \langle x, v \rangle_L = c\}$$

olmak üzere

i. v timelike ise $HP(v, c)$, R_1^4 de bir spacelike hiperdüzlemdir.

ii. v spacelike ise $HP(v, c), R_1^4$ de bir timelike hiperdüzlemdir.

iii. v lightlike ise $HP(v, c), R_1^4$ de bir lightlike hiperdüzlemdir.

$HP(v, c)$ hiperdüzlemleri ile S_1^3 ün boş kümeden farklı arakesitleri de-Sitter 3- uzayında bir yüzey belirtmektedir. Bunu aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz.

Tanım 1.23. S_1^3 de-Sitter 3-uzayı ve $HP(v, c)$ hiperdüzlemi verilmiş olsun.

i. $HP(v, c)$ bir spacelike hiperdüzlem ise $HP(v, c) \cap S_1^3$ arakesiti bir **eliptik de-Sitter kuadrik** yüzeydir.

ii. $HP(v, c)$ bir timelike hiperdüzlem ise $HP(v, c) \cap S_1^3$ arakesiti bir **hiperbolik de-Sitter kuadrik** yüzeydir.

iii. $HP(v, c)$ bir lightlike hiperdüzlem ise $HP(v, c) \cap S_1^3$ arakesiti bir **parabolik de-Sitter kuadrik** yüzeydir.

Tanım 1.24. $U, \mathbb{R}^2$ nin açık altkütmesi olmak üzere, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ immersiyonu ile belirlenen yüzey $M = \varphi(U)$ olsun. Eğer M yüzeyinin $p \in M$ noktasındaki teğet uzayı R_1^4 ün

i. Spacelike bir altuzayı ise yani yüzeyin birim normal vektör alanı timelike ise, M yüzeyine **spacelike yüzey** denir.

ii. Timelike bir alt uzayı ise yani yüzeyin birim normal vektör alanı spacelike ise, M yüzeyine **timelike yüzey** denir.

iii. Lightlike bir alt uzayı ise yani yüzeyin birim normal vektör alanı lightlike ise, M yüzeyine **lightlike yüzey** denir.

Ayrıca lightlike olmayan bir yüzeye **non-dejenere yüzey** denir.

Tanım 1.25. $U, \mathbb{R}^2$ nin açık altkütmesi olmak üzere, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ immersiyonu ile belirlenen non-dejenere regüler yüzey $M = \varphi(U)$ olsun. R_1^4, S_1^3 ve M nin yarı-Riemann konneksiyonları sırasıya, $D, \bar{D}, \tilde{D}$ olmak üzere $X, Y \in \chi(M) \subset \chi(S_1^3)$ diferensiyellenebilir vektör alanları için M nin **Gauss eşitlikleri**,

$$D_X Y = \bar{D}_X Y - \langle X, Y \rangle_L \varphi$$

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \varepsilon \langle S(X), Y \rangle N$$

ve **Weingarten eşitliği**

$$S(X) = -\bar{D}_X Y$$

olarak verilir. Burada $\varepsilon = \pm \langle N, N \rangle_L$ ve N, M yüzeyinin birim normal vektör alanıdır.

Uyarı 1.26. S_1^3 de bir M non-dejenere regüler yüzeyinin birim normal vektör alanı N ve bu yüzey üzerinde yatan bir $\alpha = \alpha(s)$ birim hızlı eğrisinin teğet vektör alanı T olsun. Eğer $D_T T = 0$ ise α -eğrisine **geodezik eğri** denir. Bu durumda α -eğrisinin M yüzeyi üzerinde bir geodezik eğri olması için gerekli ve yeterli koşul S_1^3 te α -eğrisi boyunca $D_T T = \lambda N, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ olmasıdır.



2. BÖLÜM

EĞRİLER ÜZERİNDE İNŞAA EDİLEN BAZI SABİT AÇILI YÜZEYLER

2.1. E^3 de Eğriler Üzerinde İnşaa Edilen Sabit Açılı Yüzeyler

Bu bölümde "Ana-Irina Nistor, (2011), Certain Constant Angle Surfaces Constructed on Curves, International Electronic Journal of Geometry, Vol 4, 79-87." çalışmasından bahsedilecektir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş birim hızlı regüler eğrisi verilsin.

$$t(s) = \alpha'(s)$$

vektörüne eğrinin birim **teğet vektörü** denir.

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\kappa(s) = |t'(s)|$$

fonksiyonuna α -eğrisinin **eğrilik fonksiyonu**, $\kappa(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **eğriliği** denir. Eğrilik fonksiyonu yardımıyla

$$n(s) = \frac{t'(s)}{\kappa(s)}$$

eşitliği ile belirlenen vektöre α -eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **asli normal vektörü** denir. Ayrıca

$$b(s) = t(s) \times n(s)$$

eşitliği ile tanımlı vektöre de α -eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **binormal vektörü** denir. Vektörel çarpımın özelliklerinden dolayı $b(s)$ vektörü $t(s)$ ve $n(s)$ vektörüne dik olan birim vektördür. Bu şekilde oluşturulan $\{t(s), n(s), b(s)\}$ kümesi $T_{\alpha(s)}\mathbb{R}^3$ uzayının bir ortonormal tabanıdır. Bu tabanı oluşturan vektörlere $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin **Frenet vektörleri** denir.

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\tau(s) = -\langle b'(s), n(s) \rangle$$

fonksiyonuna α -eğrisinin **burulma fonksiyonu**, $\tau(s)$ sayısına da eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **burulması** denir.

$t'(s), n'(s), b'(s)$ vektör alanları $t(s), n(s), b(s)$ vektör alanlarının lineer bileşeni olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Teorem 2.1.1 $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $t(s), n(s), b(s)$ ise

$$\begin{cases} t'(s) &= \kappa(s) n(s) \\ n'(s) &= -\kappa(s) t(s) + \tau(s) b(s) \\ b'(s) &= -\tau(s) n(s) \end{cases} \quad (2.1.1)$$

şeklinde yazılır.

Bu teoremde elde edilen (2.1.1) eşitliklerine, birim hızlı $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin **Frenet-Serret formülleri** denir.

Eğrilerden, eğriler üzerinde inşa edilen yüzeyler teorisine doğal bir genişleme aşağıdaki şekilde yapılabilir. $\alpha, \mathbb{R}^3$ de yay uzunluğu ile parametre edilmiş bir eğri olmak üzere α -eğrisini ve eğrinin teğet, normal ve binormal doğrularını içeren regle yüzeyleri düşündüğümüzde, bu çeşit yüzeylerin iyi bilinen üç tipi vardır.

- **Teğet açılabilir yüzeyler** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vt(s)$
- **Normal yüzeyler** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vn(s)$
- **Binormal yüzeyler** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vb(s)$

Yukarda tanımlanan yüzeylerin parametrizasyonundaki α -eğrisine **üreteç eğrisi**, eğriye teğet, normal ve binormal olan doğrularada **doğrultu eğrisi** denir.

En genel hali ile, teğet düzlemleri sabit bir vektör alanı ile sabit açı yapan yüzeylere **sabit açılı yüzey** denir. [1] de $\mathbb{R}^3$ deki sabit açılı yüzeylerin karakterizasyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.1.2. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyinin sabit açılı yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul M yüzeyinin aşağıdaki yüzeylerden birisine lokal izometrik olmasıdır:

i. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık, μ, I üzerinde bir düzgün fonksiyon olmak üzere $r : M \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$(u_1, u_2) \rightarrow (u_1 \cos \theta (\cos u_2, \sin u_2) + \gamma(u_2), u_1 \sin \theta),$$

burada

$$\gamma(u_2) = \cos \theta \left(- \int_0^{u_2} \mu(\tau) \sin \tau d\tau, \int_0^{u_2} \mu(\tau) \cos \tau d\tau \right)$$

şeklindedir.

ii. $x \sin \theta - z \cos \theta = 0$ düzleminin bir açık parçasıdır.

iii. $\beta, \mathbb{R}^2$ de düzgün bir eğri olmak üzere $\beta \times \mathbb{R}$ silindirin bir açık parçasıdır.

Yukarıdaki teoremden θ ile sabit açı gösterilmiştir ve genelliği bozmaksızın sabit doğrultu, üçüncü reel eksen olarak alınmıştır.

Şimdi yavaş yavaş eğriler üzerinde inşa edilen yüzeylere doğru geçiş yapalım. Yukarıda bahsedilen genel karakterizasyon teoreminden, eğriler üzerinde inşa edilen yüzeylerin nasıl elde edileceğini görelim.

•Teğet Açılabilir Yüzeyler

İlk önce sabit açı özelliğini sağlayan teğet açılabilir yüzey tiplerini ilgilendiren aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1.3. Teğet açılabilir sabit açılı yüzeyler silindirik helisler tarafından üretilir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir uzay eğrisi ve $t(s), \alpha(s)$ —eğrisinin birim teğeti olmak üzere

$$r(s, v) = \alpha(s) + vt(s) \quad (2.1.2)$$

ile verilen $\mathbb{R}^3$ de gömülü, yönlendirilmiş M teğet açılabilir yüzeyini düşünelim. M yüzeyi α —eğrisinin noktaları dışında her yerde düzgündür. Şimdi yüzeyin parametrizasyonunu belirleyelim. Bunu yapmak için $r = r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplırsak

$$\begin{cases} r_s(s, v) = \alpha'(s) + v\alpha''(s) \\ r_v(s, v) = \alpha'(s) \end{cases}$$

elde edilir. Burada (2.1.1) Frenet formüllerinden yararlanırsak M yüzeyinin normali

$$N = \pm \frac{r_s \times r_v}{|r_s \times r_v|} = \pm b(s)$$

olarak elde edilir. Yüzeyin bir yönlendirmesi yardımıyla $\alpha(s)$ üreteç eğrisinin binormali, yüzeyin normaline eşit olarak seçilebilir. Yüzeyin sabit açılı yüzey olma durumunda $\alpha(s)$ eğrisinin $b(s)$ binormali ile k sabit doğrultusu

$$(b, k) = (N, k) = \theta, \theta \in [0, \pi) \quad (2.1.3)$$

şeklinde sabit bir θ açısı yapar. Böylece $\alpha(s)$ —eğrisi bir silindirik helistir.

$\alpha(s)$ —silindirik helisinin parametrizasyonunu yazmak için aşağıdaki yolu izleyelim. Genel olarak $|\alpha'(s)| = 1$ ve (2.1.3) denklemini sağlayan bir α —eğrisi için

$$\alpha(s) = \left(\psi(s), \frac{b}{c}s \right) \quad (2.1.4)$$

yazabiliriz. Burada $\psi : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$a^2 + b^2 = c^2, a, b, c \in (0, \infty)$$

ve

$$|\psi'(s)| = \frac{a}{c}$$

olacak şekilde bir eğridir. λ —keyfi bir fonksiyon olmak üzere ψ fonksiyonunun türevi

$$\psi'(s) = \left(\frac{a}{c} \sin \lambda(s), \frac{a}{c} \cos \lambda(s) \right)$$

yazılabilir. Bu ifade integralenir ve (2.1.4) te yerine yazılırsa, $\lambda : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon olmak üzere

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \int \sin \lambda(s) ds, \frac{a}{c} \int \cos \lambda(s) ds, \frac{b}{c}s \right) \quad (2.1.5)$$

parametrizasyonu elde edilir. (2.1.5) şeklinde bir parametrizasyon ile verilen α —eğrisine **silindirik helis** denir.

Şimdi ise sabit açılı özelliğini sağlayan teğet açılabilir yüzeyler ile Teorem 2.1.2 arasındaki direk bağıntıyı görelim.

Teorem 2.1.4. Sabit açılı teğet açılabilir yüzeyler, Teorem 2.1.2 de

$$\mu(\tau) = -\lambda^{-1}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$$

için elde edilir.

İspat. Bir dairesel helisin klasik durumu için ispata başlayalım, yani $\lambda(s) = -s$ için elde edilen

$$\alpha(s) = \left(\frac{a}{c} \cos s, \frac{a}{c} \sin s, \frac{b}{c} s\right) \quad (2.1.6)$$

parametrizasyonunu ele alalım.

$$\alpha'(s) = \left(-\frac{a}{c} \sin s, \frac{a}{c} \cos s, \frac{b}{c}\right)$$

ve (2.1.6) ifadesini

$$r(s, v) = \alpha(s) + vt(s)$$

eşitliğinde yerine yazarsak

$$r(s, v) = \left(\frac{a}{c} (\cos s - v \sin s), \frac{a}{c} (\sin s + v \cos s), \frac{b}{c} (s + v)\right) \quad (2.1.7)$$

parametrizasyonuna sahip teğet açılabilir yüzeyi elde ederiz. Bu parametrizasyonun Teorem 2.1.2 nin (i) şıkkının bir özel durumu olduğunu gösterelim. (2.1.7) parametrizasyonu ile başlayarak genel μ fonksiyonunu belirleyelim ve

$$r(u_1, u_2) = (u_1 \cos \theta (\cos u_2, \sin u_2) + \gamma(u_2), u_1 \sin \theta) \quad (2.1.8)$$

ifadesinde tekrar yerine yazalım. İlk önce (2.1.7) ve (2.1.8) parametrizasyonlarının üçüncü bileşenlerine bakalım. k sabit doğrultusu normal ve teğet kısımlarına ayrıştırılır ve [1] deki gibi aynı teknik kullanılırsa

$$k = (\sin \theta) \alpha' + (\cos \theta) N$$

elde edilir.

$$\langle r_s, k \rangle = \langle \alpha', (\sin \theta) \alpha' \rangle = \sin \theta$$

ve benzer şekilde

$$\langle r_s, k \rangle = \frac{b}{c}$$

olmak üzere

$$\frac{b}{c} = \sin \theta, \frac{a}{c} = \cos \theta$$

elde edilir. (2.1.7) de

$$u_1 = s + v$$

parametre değişimi yapılırsa

$$\begin{aligned} r(s, v) &= (\cos \theta (\cos s - u_1 \sin s + s \sin s), \\ &\cos \theta (\sin s + u_1 \cos s - s \cos s), \\ &u_1 \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

elde edilir. İkinci parametrizasyonda $u_2 = s + \frac{\pi}{2}$ denilirse

$$r(u_1, u_2) = (u_1 \cos \theta (\cos u_2, \sin u_2) + \gamma(u_2), u_1 \sin \theta) \quad (2.1.10)$$

elde edilir, burada

$$\gamma(u_2) = \cos \theta \left(\sin u_2 - \left(u_2 - \frac{\pi}{2} \right) \cos u_2, -\cos u_2 - \left(u_2 - \frac{\pi}{2} \right) \sin u_2 \right) \quad (2.1.11)$$

şeklinde dir. Şimdi Teorem 2.1.2 ile kıyaslırsak, (2.1.10) ifadesi özdeş olarak teoremin (i) ifadesine eşittir. Benzer şekilde (2.1.11) ifadesinin $\gamma(u_2)$ ifadesi ile özdeş olduğunu söylemek için μ düzgün fonksiyonunu belirlemeliyiz.

Kabul edelim ki

$$\mu(\tau) = \frac{\pi}{2} - \tau$$

olsun. İddamızı kanıtlamak için

$$-\int_0^{u_2} \mu(\tau) \sin \tau d\tau = \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \cos u_2 + \sin u_2 - \frac{\pi}{2}$$

ve

$$-\int_0^{u_2} \mu(\tau) \cos \tau d\tau = \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \sin u_2 - \cos u_2 + 1$$

ifadelerini hesaplayalım. (2.1.11) ifadesinin $\mu(\tau) = \frac{\pi}{2} - \tau$ için Teorem 2.1.2 ile eşdeğer olduğu sonucuna vararak ve integrasyon limitlerini, yani xOy -düzleminde bir ötelemeyi hesaba katarak bu durumda ispatı tamamlarız.

Bir silindirik helisin genel durumuna dönelim. $\frac{a}{c} = \cos \theta$, $\frac{b}{c} = \sin \theta$ olduğunu bilerek ve α 'nın s 'ye göre türevini alarak önceki durumda olduğu gibi aynı düşünceyi takip edersek, (2.1.5) ile verilen genelleştirilmiş helise karşılık gelen teğet açılabilir yüzey için

$$r(s, v) = (\cos \theta \left(\int \sin \lambda(s) ds + v \sin \lambda(s) \right), \cos \theta \left(\int \cos \lambda(s) ds + v \cos \lambda(s) \right), (s + v) \sin \theta) \quad (2.1.12)$$

parametrizasyonu elde edilir. (2.1.12) de $u_1 = s + v$ ve $u_2 = \frac{\pi}{2} - \lambda(s)$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$r(u_1, u_2) = (u_1 \cos \theta (\cos u_2, \sin u_2) + \gamma(u_2), u_1 \sin \theta) \quad (2.1.13)$$

denk parametrizasyonu elde edilir, burada

$$\gamma(u_2) = \cos \theta \left(\int \left(\lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \right)' \cos u_2 du_2 - \lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right), \right. \quad (2.1.14)$$

$$\left. \int \left(\lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \right) \sin u_2 du_2 - \lambda^{-1} \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} - u_2 \right) \right)$$

şeklindedir. Şimdi dikkatimizi belirlenmesi gereken μ fonksiyonuna verelim.

Gerekli hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
-\int_0^{u_2} \mu(\tau) \sin \tau d\tau &= \int_0^{u_2} \mu(\tau) (\sin(\frac{\pi}{2} - \tau))' d\tau \\
&= \mu(u_2) \sin(\frac{\pi}{2} - u_2) - \mu(0)
\end{aligned} \tag{2.1.15}$$

$$-\int_0^{u_2} \mu'(\tau) \cos \tau d\tau$$

ve

$$\begin{aligned}
-\int_0^{u_2} \mu(\tau) \cos \tau d\tau &= -\int_0^{u_2} \mu(\tau) (\cos(\frac{\pi}{2} - \tau))' d\tau \\
&= -\mu(u_2) \cos(\frac{\pi}{2} - u_2) \\
&\quad + \int_0^{u_2} \mu'(\tau) \sin \tau d\tau
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

elde edilir. İntegrasyon sınırlarını hesaba katarsak, $\mu(\tau) = -\lambda^{-1}(\frac{\pi}{2} - \tau)$ için (2.1.14) ve teorem 2.1.2 ifadelerinin eşdeğer olduğu görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

• Normal ve Binormal Yüzeyler

Bu bölümde, bir α uzay eğrisi üzerinde oluşturulan diğer iki tip yüzeyle, yani normal ve binormal yüzeylerle ilgileneceğiz. Ön hazırlıklarda gördüğümüz gibi, bu yüzeyler, (2.1.2) deki teğet doğrusu t yi, sırasıyla n normal doğrusu ve b binormal doğrusu ile değiştirerek, teğet açılabilir olanlarla aynı teknik kullanılarak oluşturulur. Bu bölümde, Teorem 2.1.2'deki sabit açılı yüzeyler özelliği altında normal ve binormal yüzeylerin hangi koşullar altında elde edilebileceği incelenmiştir.

Teorem 2.1.5 Sabit açılı normal ve binormal yüzeyler, sırasıyla düzlemlerin ve silindirik yüzeylerin bir parçasıdır.

İspat. Bir normal yüzeyin

$$r(s, v) = \alpha(s) + vn(s) \quad (2.1.17)$$

parametrizasyonunu ele alalım. Bu şekilde parametre edilen yüzeyin normalini bulursak

$$N = \frac{(1 - \kappa v)b - \tau vt}{\sqrt{\Delta}}, \Delta = (1 - \kappa v)^2 + \tau^2 v^2 \quad (2.1.18)$$

elde edilir. N normali ile sabit bir θ açısı yapan sabit k doğrultulu normal yüzeyleri ele alalım, yani

$$\langle N, k \rangle = \cos \theta$$

olacak şekildeki normal yüzeyleri inceleyeceğiz. Bu son ifade (2.1.18) de yerine yazılırsa, tüm katsayıları özdeş olarak sıfıra eşit olan v ye göre ikinci mertebeden polinom elde edilir. Böylece aşağıdaki bağıntıları yazabiliriz.

$$\langle b, k \rangle^2 - \cos^2 \theta = 0 \quad (2.1.19)$$

$$\kappa \langle b, k \rangle^2 + \tau \langle b, k \rangle \langle t, k \rangle - \kappa \cos^2 \theta = 0 \quad (2.1.20)$$

$$(\kappa \langle b, k \rangle + \tau \langle t, k \rangle)^2 - (\kappa^2 + \tau^2) \cos^2 \theta = 0 \quad (2.1.21)$$

(2.1.19) dan

$$\langle b, k \rangle = \pm \cos \theta \quad (2.1.22)$$

yazılır. (2.1.19), (2.1.20) de yerine yazılırsa

$$\tau \langle b, k \rangle \langle t, k \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki durumları elde ederiz.

i) Eğer $\tau = 0$ ise

hem (2.1.20) hemde (2.1.21) ifadeleri (2.1.19) denklemini sağlar. Bu şekilde α bir düzlem eğrisi olacağından, eğrinin binormali düzlemin normali ile çakışacaktır. Şimdi normal yüzeyi, doğrultu eğrileri α -düzlem eğrisinin normal

doğruları olan bir regle yüzey olarak düşünürsek, sabit açılı normal yüzeyler düzlemin bir parçası olur.

ii) Eğer $\tau \neq 0$ iken $\langle b, k \rangle = 0$ ise (2.1.19) dan $\cos \theta = 0$ ve (2.1.21) den $\langle t, k \rangle = 0$ olur. Ayrıca s ye göre türev alınırsa $\langle n, k \rangle = 0$ olur. Böylece k sabit doğrultusu t, n, b ortonormal tabanına dik olur ki bu bir çelişkidir.

iii) Eğer $\tau \neq 0$ iken $\langle t, k \rangle = 0$ ise yine yukardaki benzer çelişki elde edilir.

Böylece her üç durumda da $\tau = 0$ olacağından sabit açılı normal yüzey bir düzlem parçasıdır.

Aynı düşünce ile

$$r(s, v) = \alpha(s) + vb(s) \quad (2.1.23)$$

şeklinde parametrize edilmiş binormal yüzeyi ele alalım. Bu yüzeyin normali

$$N = \frac{-n - \tau vt}{\sqrt{\Delta}}, \Delta = 1 + \tau^2 v^2$$

dir. Daha önce olduğu gibi aynı teknikle, meydana gelebilecek tek durumun, $\tau = 0$ için olduğu anlaşılır. α düzlemsel eğrisinin binormal eğrisi sabit doğrultuya paraleldir ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir. Böylece sabit açılı binormal yüzeyler α -düzlemsel eğrisi ile üretilen silindirik yüzeylerdir.

2.2 E_1^3 de Eğriler Üzerinde İnşaa Edilen Sabit Açılı Yüzeyler

Bu bölümde "S. Özkaldı Karakuş, (2018), Certain Constant Angle Surfaces Constructed on Curves in Minkowski 3-Space, International Electronic Journal of Geometry, Vol 11, 37-47." çalışmasından bahsedilecektir.

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ null olmayan bir eğri ve $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet vektör alanları olmak üzere Frenet formülleri

$$\begin{bmatrix} t' \\ n' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \varepsilon_b \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \varepsilon_t \tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ n \\ b \end{bmatrix} \quad (2.2.1)$$

şeklinde dir. Burada $\langle x, x \rangle_L = \varepsilon_x$ ve κ ile τ sırasıyla eğrilik ve burulma fonksiyonudur. Spacelike ve timelike eğriler için Darboux vektörleri sırasıyla

$$w = -\tau t + \kappa b$$

$$w = \tau t + \kappa b$$

olarak verilir.

Eğrilerden, eğriler üzerinde inşa edilen yüzeylerin teorisine doğal bir genişleme aşağıdaki gibi yapılabilir. Yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir eğri verilsin. Eğriye teğet, normal, binormal veya darboux olan doğruları dahil ederek regle yüzeyleri inşa edebiliriz. Sonuç olarak bu çeşit yüzey tipleri sırasıyla

- **Teğet açılabilir yüzey** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vt(s)$
- **Normal yüzey** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vn(s)$
- **Binormal yüzey** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vb(s)$
- **Rektifyan açılabilir yüzey** $\implies r(s, v) = \alpha(s) + vw(s)$
- **Darboux açılabilir yüzey** $\implies r(s, v) = b(s) + vt(s)$
- **Teğet Darboux açılabilir yüzey** $\implies r(s, v) = w(s) + vn(s)$

şeklinde verilebilir.

Bağlantılı bir M yüzeyi ve $x : M \rightarrow E_1^3$ düzgün immersiyonunu düşünelim. Eğer x aracılığı ile M üzerindeki indirgenmiş metrik Riemann metriği ise x 'e **spacelike immersiyon** denir. Bu ise M yüzeyinin x birim normal vektör alanının her bir noktada timelike olmasına denktir. Özellikle $x : M \rightarrow E_1^3$ bir spacelike immersiyon ise o halde M yüzeyi yönlendirilmiştir.

Tanım 2.2.1 $x : M \rightarrow E_1^3$ spacelike immersiyon ve N, M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı olsun. Eğer N vektörü ile sabit bir hiperbolik açı yapan

$$\langle N, k \rangle_L = -\cosh \theta$$

olacak şekilde sabit bir k timelike vektörü varsa M yüzeyine **sabit açılı spacelike yüzey** denir.

Bu tanım sabit bir k spacelike doğrultusu ve sabit açılı spacelike yüzey için genişletilmiştir.

Tanım 2.2.2 $x : M \rightarrow E_1^3$ bir spacelike immersiyon ve N, M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı olsun. Eğer N normal vektörü ile sabit bir hiperbolik açı yapan

$$\langle N, k \rangle_L = \sinh \theta$$

olacak şekilde sabit bir k spacelike vektörü varsa M ye **sabit açılı spacelike yüzey** denir.

Bu tanım ise normalli sabit bir k doğrultusu ile sabit bir açı yapan sabit açılı timelike yüzeye aşağıdaki gibi genelleştirilmiştir.

Tanım 2.2.3 M bir timelike yüzey ve $N = (n_1, n_2, n_3)$, M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı olsun. Eğer N ile sabit açı yapacak şekilde sabit bir spacelike k vektörü varsa M yüzeyine **sabit açılı timelike yüzey** denir. Burada θ açısı için iki durum vardır.

- a) Eğer $|n_1| > 1$ ise $\langle N, k \rangle_L = \cosh \theta$
- b) Eğer $|n_1| \leq 1$ ise $\langle N, k \rangle_L = \cos \theta$

Tanım 2.2.4 M bir timelike yüzey ve N , M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı olsun. Eğer N normal vektörü ile sabit bir hiperbolik açı yapan

$$\langle N, k \rangle_L = \sinh \theta$$

olacak şekilde sabit bir k timelike vektörü varsa M yüzeyine **sabit açılı timelike yüzey** denir.

Burada eğer yüzey timelike ve $N = (n_1, n_2, n_3)$, M yüzeyi üzerinde birim normal vektör alanı ise $|n_1| \leq 1$ olarak kabul edilmiştir.

Tanım 2.2.5 R_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında, verilen bir l doğrusunun, verilen bir α -eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle bir yüzey elde edilebiliyorsa, bu yüzeye 3-boyutlu Minkowski uzayında bir **regle yüzey** denir. Bu durumda verilen l doğrusuna, regle yüzeyin bir **ana doğrusu** ve verilen α -eğrisine, regle yüzeyin **dayanak eğrisi** denir.

Tanım 2.2.6 R_1^3 , 3-boyutlu Minkowski uzayında, bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye **açılabilir regle yüzey** denir.

Bu bölümde bir uzay eğrisi ile ilişkili açılabilir yüzeyler düşünülmüştür.

Yukarıda verilen tanımlardan da açıktır ki E_1^3 te bir M regle yüzeyi

$$r : I \times \mathbb{R} \rightarrow R_1^3, r(s, v) = \alpha(s) + v\beta(s)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\alpha : I \rightarrow E_1^3, \beta : I \rightarrow E_1^3 \setminus \{0\}$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve I bir açık aralıktır. α -dayanak eğrisi spacelike veya timelike olarak düşünülürse, β -doğrultu eğrisi α -ya dik olacak şekilde seçilebilir. α dayanak eğrisi ve β doğrultu eğrisinin durumuna göre beş farklı çeşit regle yüzeye sahip oluruz.

Eğer α -dayanak eğrisi spacelike ise M regle yüzeyine M_+ **tip regle yüzey** denir. Ayrıca M_+ tip regle yüzeyler de kendi arasında üç tipe ayrılır. β -eğrisi spacelike bir eğri olmak üzere β' -eğrisi sırasıyla null olmayan bir eğri veya null eğri ise M_+ tip regle yüzeyine M_+^1 **veya** M_+^2 **tip regle yüzey** denir. β -eğrisi timelike bir eğri olduğunda β' -eğrisi spacelike bir eğri olduğundan bu tip regle yüzeylere de M_+^3 **tip regle yüzey** adı verilir.

Eğer α -dayanak eğrisi timelike ise M regle yüzeyine M_- **tip regle yüzey** denir. Bu tip regle yüzeyler için β -doğrultu eğrisi daima spacelike olduğundan β' -eğrisi null olmayan bir eğri ise M_- tip regle yüzeyine M_-^1 **tip regle yüzey** ve benzer şekilde β' -eğrisi null bir eğri ise M_- tip regle yüzeyine M_-^2 **tip regle yüzey** adı verilir.

Yukarıda yapılan gruptandırmaya göre M_+^1 tip ve M_+^2 tip regle yüzeyler spacelike, M_+^3, M_-^1 ve M_-^2 tip regle yüzeyler timelike yüzeylerdir.

Şimdi Minkowski uzayında helis kavramını hatırlayalım.

Tanım 2.2.7 $\alpha = \alpha(s)$ spacelike (timelike) bir eğri olmak üzere

$$\langle \alpha'(s), v \rangle_L$$

fonksiyonu sabit olacak şekilde bir $v \in E_1^3$ vektörü mevcut ise yay uzunluğu ile parametrize edilmiş $\alpha = \alpha(s)$ eğrisine bir **helis** denir.

Bu ise $\frac{\tau}{\kappa}$ fonksiyonunun sabit olmasına denktir.

E_1^3 te teğet açılabilir spacelike sabit açılı yüzeylerin karakterizasyonu [8] de

verilmiştir. $\alpha : I \rightarrow E_1^3$ regüler eğrisi ile üretilen M teğet yüzeyi

$$r(s, v) = \alpha(s) + v\alpha'(s), (s, v) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde parametrize edilir. Bu şekilde parametrize edilmiş bir teğet açılabilir yüzeyin sabit açılı bir yüzey olması için gerekli ve yeterli koşul üreteç eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır, ayrıca M yüzeyi ile sabit θ açısı yapan k doğrultusu

$$k = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}} [\tau(s)t(s) + \kappa(s)b(s)]$$

ve θ açısı

$$\cosh \theta = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \tau^2}}$$

bağıntısı ile belirlenir [8].

Şimdi E_1^3 de bir uzay eğrisi üzerinde inşa edilen spacelike ve timelike yüzeylerden normal, binormal, rektifyan açılabilir ve Darboux açılabilir yüzeyleri öğrenelim.

Teorem 2.2.8 Sabit açılı spacelike normal yüzeyler Lorentz düzlem parçalarıdır.

İspat. E_1^3 te gömülü, yönlendirilmiş

$$r(s, v) = \alpha(s) + vn(s)$$

parametrizasyonu ile verilen M spacelike normal yüzeyini alalım. Burada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş spacelike bir uzay eğrisi ve n, α -eğrisinin birim normalidir. Şimdi yüzeyin normalini belirleyelim. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar ve (2.2.1) de verilen Frenet formüllerini kullanırsak

$$\begin{cases} r_s(s, v) = (1 + \varepsilon_b \kappa v)t + \tau vb \\ r_v(s, v) = n \end{cases}$$

elde edilir. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan $r_s(s, v)$ ve $r_v(s, v)$ vektörleri spacelike olmak zorundadır. Böylece Frenet üçlülerinden t, n spacelike vektörler ve b bir timelike vektör olup $\varepsilon_b = -1$ dir. O halde

$$t(s) \times_L n(s) = -b(s)$$

ve

$$n(s) \times_L b(s) = t(s)$$

yazabiliriz. Spacelike yüzeyin normali

$$\begin{aligned} N &= \pm \frac{\tau vt + (1 - \kappa v) b}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= -(\tau v)^2 + (1 - \kappa v)^2 \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

ile verilir. Diğer taraftan $\{t, n, b\}$, M spacelike regle yüzeyi için α -eğrisi boyunca ortanormal çatı alanı olduğundan (2.2.2) denkleminin t ile iç çarpımını alırsak

$$\tau = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla α -bir düzlem eğrisi olacağından, onun binormali spacelike düzlemin normali ile çakışır. Bu düşünce ile normal spacelike yüzey, üreteçleri α -spacelike düzlem eğrisinin normal doğruları olan bir regle yüzey olur. Böylece sabit açılı spacelike normal yüzeyler bir spacelike düzlem parçası olur.

Teorem 2.2.9 Sabit açılı timelike normal yüzeyler Lorentz düzlem parçalarıdır.

İspat. E_1^3 te gömülü yönlendirilmiş

$$r(s, v) = \alpha(s) + vn(s)$$

parametrizasyonu ile verilen M timelike normal yüzeyini alalım. Burada $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş timelike bir uzay eğrisi ve n, α -eğrisinin birim normalidir. Şimdi yüzeyin normalini belirleyelim. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar ve (2.2.1) de verilen Frenet formüllerini kullanırsak

$$\begin{aligned} r_s(s, v) &= (1 + \kappa v) t + \tau v b \\ r_v(s, v) &= n \end{aligned}$$

elde edilir ve yüzeyin normali

$$\begin{aligned} N &= \mp \frac{\tau vt + (1 + \kappa v) b}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= -(\tau v)^2 + (1 + \kappa v)^2 \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

ile verilir. Diğer taraftan $\{t, n, b\}$, M spacelike regle yüzeyi için α -eğrisi boyunca ortanormal çatı alanı olduğundan (2.2.3) denkleminin t ile iç çarpımını alırsak

$$\tau = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla α -bir düzlem eğrisi olacağından, onun binormali timelike düzlemin normali ile çakışır. Bu düşünce ile timelike normal yüzey, üreticileri α -timelike düzlem eğrisinin normal doğruları olan bir regle yüzey olur. Böylece sabit açılı timelike normal yüzeyler bir timelike düzlem parçası olur.

Uyarı 2.2.10 Teorem 2.2.9 da $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ bir spacelike uzay eğrisi olursa

$$\begin{aligned} N &= \mp \frac{\tau vt + (-1 - \varepsilon_b \kappa v) b}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= (\tau v)^2 + (1 + \varepsilon_b \kappa v)^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu durumda da $\tau = 0$ olacağından M yüzeyi afin düzlem olacaktır.

Teorem 2.2.11 Sabit açılı spacelike binormal yüzeyler spacelike düzlem eğrileri tarafından üretilir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş spacelike bir uzay eğrisi, b , α -eğrisinin binormal vektörü olmak üzere binormal yüzey

$$r(s, v) = \alpha(s) + vb(s)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Şimdi yüzeyin normalini belirleyelim. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar ve (2.2.1) de verilen Frenet formüllerini kullanırsak

$$\begin{cases} r_s(s, v) = t + \tau vn \\ r_v(s, v) = b \end{cases}$$

elde edilir. M yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan $r_s(s, v)$ ve $r_v(s, v)$ vektörleri spacelike olmak zorundadır. Böylece t ve b frenet üçlüsü spacelike, n

bir timelike vektör olur. O halde

$$\begin{aligned} t(s) \times_L n(s) &= -b(s) \\ n(s) \times_L b(s) &= -t(s) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Böylece bu spacelike yüzeyin normali

$$\begin{aligned} N &= \pm \frac{\tau vt + n}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= -(\tau v)^2 + 1 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

ile verilir. Sabit bir k timelike doğrultusu ile

$$\langle N, k \rangle_L = -\cosh \theta$$

olacak şekilde sabit bir hiperbolik açı yapan N normalli binormal yüzeylerle ilgileniyoruz. Bu ifade (2.2.4) te yerine yazılırsa

$$\tau^2 (\langle t, k \rangle_L^2 + \cosh^2 \theta) = 0 \tag{2.2.5}$$

$$\tau \langle t, k \rangle_L \langle n, k \rangle_L = 0 \tag{2.2.6}$$

$$\langle n, k \rangle_L^2 - \cosh^2 \theta = 0$$

bağıntıları sağlanır. (2.2.5) ve (2.2.6) dan açıktır ki

$$\tau = 0$$

dır. Böylece α — bir spacelike düzlem eğrisidir.

Teorem 2.2.12 Sabit açılı timelike binormal yüzeyler düzlem eğrileri tarafından üretilir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş timelike bir uzay eğrisi, b , α —eğrisinin binormal vektörü olmak üzere binormal yüzey

$$r(s, v) = \alpha(s) + vb(s)$$

parametrizasyonu ile verilsin. Şimdi yüzeyin normalini belirleyelim. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar ve

(2.2.1) de verilen Frenet formüllerini kullanırsak

$$\begin{cases} r_s(s, v) = t - \tau v n \\ r_v(s, v) = b \end{cases}$$

elde edilir. O halde yukarıdaki yüzeyin normali

$$\begin{aligned} N &= \pm \frac{\tau v t - n}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= -(\tau v)^2 + 1 \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

ile verilir. Sabit bir k timelike doğrultusu ile

$$\langle N, k \rangle_L = \theta$$

olacak şekilde sabit bir hiperbolik açı yapan N normalli binormal yüzeylerle ilgileniyoruz. Bu ifade (2.2.7) de yerine yazılırsa

$$\tau^2 (\langle t, k \rangle_L^2 + \cos^2 \theta) = 0 \quad (2.2.8)$$

$$\tau \langle t, k \rangle_L \langle n, k \rangle_L = 0 \quad (2.2.9)$$

$$\langle n, k \rangle_L^2 - \cos^2 \theta = 0$$

bağıntıları sağlanır. (2.2.8) ve (2.2.9) dan açıktır ki

$$\tau = 0$$

dır. Böylece α — bir düzlem eğrisidir.

Uyarı 2.2.13 Teorem 2.2.12 de $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ eğrisinin bir spacelike uzay eğrisi olması durumunda

i) Eğer $\alpha(s)$ spacelike eğrisi için $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet çatısını düşünürsek, bu durumda $t(s), n(s)$ spacelike vektörler ve $b(s)$ bir timelike vektör olup

$$\begin{aligned} N &= \mp \frac{\tau v t - n}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= (\tau v)^2 + 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

ii) Eğer $\alpha(s)$ spacelike eğrisi için $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet çatısını düşünersek, bu durumda $t(s), b(s)$ spacelike vektörler ve $n(s)$ bir timelike vektör olup

$$\begin{aligned} N &= \pm \frac{\tau vt + n}{\sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= (\tau v)^2 - 1 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

İki durumda da $\tau = 0$ ve α -eğrisinin spacelike bir uzay eğrisi olduğunu göstermek farklı değildir. Fakat, $\tau = 0$ olduğundan spacelike uzay eğrisinin normali, timelike yüzeyin normali ile çakışır. Böylece $\alpha(s)$ spacelike uzay eğrisi için $\{t(s), n(s), b(s)\}$ Frenet çatısında $t(s), n(s)$ spacelike vektörler ve $b(s)$ timelike vektör olmak zorundadır.

Teorem 2.2.14 Rektifyan açılabilir sabit açılı spacelike yüzeyler spacelike slant helisler tarafından üretilir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş spacelike bir uzay eğrisi ve

$$w = -\tau t + \kappa b$$

α -eğrisinin Darboux vektörü olmak üzere, E_1^3 te gömülü, yönlendirilmiş M spacelike rektifyan açılabilir yüzeyi

$$r(s, v) = \alpha(s) + vw(s) \quad (2.2.10)$$

parametrizasyonu ile verilsin. M yüzeyi eğrinin noktaları dışında her yerde düzgündür. Şimdi yüzeyin normalini hesaplayalım. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplayıp, (2.2.1) de verilen Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{cases} r_s(s, v) &= (1 - v\tau')t + \kappa'vb \\ r_v(s, v) &= -\tau t + \kappa b \end{cases}$$

elde edilir. Yüzeyin normali

$$N = \pm n \quad (2.2.11)$$

ile verilir. Spacelike yüzeyin bir yönlendirmesini alırsak, α -eğrisinin normalini, yüzeyin normali olarak alırız. Sabit açılı yüzey durumunda, eğrinin n -normali sabit bir k timelike doğrultusu ile

$$\langle n, k \rangle_L = \langle N, k \rangle_L = -\cosh \theta \quad (2.2.12)$$

olacak şekilde sabit bir açı yapar. Dolayısıyla α -bir spacelike slant helis olur.

Teorem 2.2.15 Rektifyan açılabilir sabit açılı timelike yüzeyler slant helisler tarafından üretilir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir timelike uzay eğrisi ve

$$w = \tau t + \kappa b$$

α -eğrisinin Darboux vektörü olmak üzere, E_1^3 te gömülü, yönlendirilmiş M spacelike rektifyan açılabilir yüzeyi

$$r(s, v) = \alpha(s) + vw(s)$$

parametrizasyonu ile verilsin. M yüzeyi eğrinin noktaları dışında her yerde düzgündür. Şimdi yüzeyin normalini hesaplayalım. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplayıp, (2.2.1) de verilen Frenet formülleri kullanılırsa

$$\begin{cases} r_s(s, v) &= (1 + v\tau')t + \kappa'vb \\ r_v(s, v) &= \tau t + \kappa b \end{cases}$$

elde edilir. Yüzeyin normali

$$N = \pm n \quad (2.2.13)$$

ile verilir. Timelike yüzeyin bir yönlendirmesini alırsak, α -timelike eğrisinin normali, yüzeyin normali olarak alınır. Sabit açılı yüzey durumunda, eğrinin n -normali sabit bir k spacelike doğrultusu ile

$$\langle n, k \rangle_L = \langle N, k \rangle_L = \cos \theta \quad (2.2.14)$$

olacak şekilde sabit bir açı yapar. Dolayısıyla α -bir timelike slant helis olur.

Teorem 2.2.16 Darboux açılabilir sabit açılı spacelike yüzeyler, spacelike helislerin binormal eğrileri ile üretilir.

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş spacelike bir uzay eğrisi, t ve b sırasıyla α -eğrisinin teğet ve binormali olmak üzere E_1^3 te gömülü, yönlendirilebilir Darboux açılabilir M yüzeyi

$$r(s, v) = b(s) + vt(s)$$

parametrizasyonu ile verilsin. M yüzeyi, eğrinin noktaları dışında her yerde düzgündür. Şimdi yüzeyin normalini bulalım. Bunu yapmak için $r(s, v)$ yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar ve (2.2.1) de verilen Frenet denklemlerini kullanırsak

$$\begin{cases} r_s(s, v) &= (\tau + \kappa v) n \\ r_v(s, v) &= t \end{cases}$$

elde edilir. Yüzeyin normali

$$N = \mp b$$

ile verilir. Yüzeyin bir yönlendirmesini seçersek, α -eğrisinin binormalini, yüzeyin normali olarak alırız. Sabit açılı yüzey durumunda, spacelike eğrinin b binormali, sabit bir k timelike doğrultusu ile

$$\langle b, k \rangle_L = \langle N, k \rangle_L = -\cosh \theta$$

olacak şekilde sabit açı yapar. Böylece α , bir spacelike helistir.

Teorem 2.2.17 Sabit açılı Darboux açılabilir timelike yüzeler, helislerin binormal eğrileri ile üretilir.

İspat $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilmiş spacelike veya timelike bir uzay eğrisi, t ve b sırasıyla α -eğrisinin teğet ve binormali olmak üzere E_1^3 te gömülü, yönlendirilebilir Darboux açılabilir M yüzeyi

$$r(s, v) = b(s) + vt(s)$$

parametrizasyonu ile verilsin. M yüzeyi, eğrinin noktaları dışında her yerde düzgündür. Şimdi yüzeyin normalini bulalım. Bunu yapmak için $r(s, v)$

yüzeyinin s ve v ye göre kısmi türevlerini hesaplar ve (2.2.1) de verilen Frenet denklemlerini kullanırsak

$$\begin{cases} r_s(s, v) &= (\varepsilon_t \tau + \kappa v) n \\ r_v(s, v) &= t \end{cases}$$

elde edilir. Yüzeyin normali

i) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ bir spacelike uzay eğrisi ise

$$N = \mp b$$

ile verilir.

ii) $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E_1^3$ bir timelike uzay eğrisi ise

$$N = \mp b$$

ile verilir.

Yüzeyin bir yönlendirmesini seçersek, α -eğrisinin binormalini, timelike yüzeyin normali olarak alırız. Sabit açılı yüzey durumunda, eğrinin b binormali, sabit bir k spacelike doğrultusu ile

$$\langle b, k \rangle_L = \langle N, k \rangle_L = \cos \theta$$

olacak şekilde sabit açı yapar. Böylece α , bir helistir.

3. BÖLÜM

DE-SİTTER 3-UZAYINDA BAZI ÖZEL YÜZEYLER

Bu bölümde "T.Mert, M. Atçeken, (2020), Some Constant Angle Spacelike Surfaces Construct on a Curve in De-Sitter 3-Space, ICMASE 2020 - International Conference on Mathematics and its Applications in Science and Engineering, 233-240." ve "T.Mert, M. Atçeken, (2020), On The Special Timelike Surfaces in De-Sitter 3-Space, MAS 11th International European Conference on Mathematics-Engineering-Natural & Medical Sciences, 167-187."

çalışmalarından bahsedilecektir.

Bir eğri üzerinde inşa edilen yüzeyler yukarıda bahsettiğimiz gibi E^3 Öklid uzayı ve E_1^3 Minkowski uzayında tanımlanmış ve çeşitli özellikleri verilmiştir. Bu bölümde, E^3 ve E_1^3 te bir eğri üzerinde inşa edilen yüzeyler, R_1^4 Minkowski uzayının bir altmanifoldu olan S_1^3 de-Sitter 3—uzayında tanımlanacak ve bu tarz yüzeylerin özellikleri incelenecektir. Minkowski uzayında bir vektör, bir eğri ve bir yüzeyin causal karakterindeki çeşitlilikten dolayı, de-Sitter 3—uzayında ele alınacak bu özel yüzeylerin bir çok çeşidi oluşacaktır. Burada bu özel yüzeyler oluşturulurken ilk önce yüzeyin spacelike ve timelike yüzey olmasına dikkat edilecek, daha sonra ise o yüzeyi oluştururken kullanacağımız eğrinin spacelike veya timelike olması durumları ele alınacaktır.

İlk önce de-Sitter 3-uzayında bir eğrinin bazı temel özelliklerini causal karakterine göre özetleyelim.

$\alpha : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı, regüler, spacelike bir eğri olsun.

$$t(s) = \alpha'(s), \|t(s)\| = 1$$

şeklinde tanımlı $t(s)$ vektörüne α —eğrisinin **birim teğet vektörü** adı verilir. $\langle t'(s), t'(s) \rangle_L \neq 1$ olmak üzere

$$n(s) = \frac{t'(s) + \alpha(s)}{\|t'(s) + \alpha(s)\|}$$

şeklinde tanımlı vektöre α -eğrisinin **birim normal vektörü** adı verilir.

$$b(s) = \alpha(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$$

şeklinde tanımlı vektöre α -eğrisinin **birim binormal vektörü** adı verilir.

Bu şekilde elde edilen $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ kümesine α -spacelike eğrisi boyunca R_1^4 ün pseudo ortogonal çatısı denir.

α -spacelike bir eğri olmak üzere

$$\kappa_d(s) = \|t'(s) + \alpha(s)\|$$

ifadesine spacelike eğrinin **de-Sitter eğriliği** ve

$$\tau_d(s) = -\frac{\det(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')}{[\kappa_d(s)]^2}$$

ifadesine de spacelike eğrinin **de-Sitter burulması** adı verilir.

Benzer şekilde $\alpha : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı, regüler, timelike bir eğri olsun.

$$t(s) = \alpha'(s), \langle t(s), t(s) \rangle_L = -1$$

şeklinde tanımlı $t(s)$ vektörüne α -eğrisinin **birim teğet vektörü** adı verilir.

$\langle t'(s), t'(s) \rangle_L \neq 1$ olmak üzere

$$n(s) = \frac{t'(s) - \alpha(s)}{\|t'(s) - \alpha(s)\|}$$

şeklinde tanımlı vektöre α -eğrisinin **birim normal vektörü** adı verilir.

$$b(s) = \alpha(s) \wedge t(s) \wedge n(s)$$

şeklinde tanımlı vektöre α -eğrisinin **birim binormal vektörü** adı verilir.

Bu şekilde elde edilen $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ kümesine α -timelike eğrisi boyunca R_1^4 ün pseudo ortogonal çatısı denir.

α -timelike bir eğri olmak üzere

$$\kappa_d(s) = \|t'(s) - \alpha(s)\|$$

ifadesine timelike eğrinin **de-Sitter eğriliği** ve

$$\tau_d(s) = -\frac{\det(\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha''')}{[\kappa_d(s)]^2}$$

ifadesine de timelike eğrinin **de-Sitter burulması** adı verilir.

Teorem 3.1 Eğer $\alpha : I \rightarrow S_1^3$ birim hızlı lightlike olmayan bir eğri ise, Frenet-Serret formülleri sırasıyla

$$\begin{cases} \alpha'(s) = t(s) \\ t'(s) = -\delta_0\delta_1\alpha(s) + \kappa_d(s)n(s) \\ n'(s) = -\delta_1\delta_2\kappa_d(s)t(s) - \delta_0\delta_1\tau_d(s)b(s) \\ b'(s) = \delta_1\delta_2n(s) \end{cases} \quad (3.1)$$

şeklindedir, burada

$$\delta_0 = \operatorname{sgn}(\alpha(s)), \delta_1 = \operatorname{sgn}(t(s)), \delta_2 = \operatorname{sgn}(n(s)), \delta_3 = \operatorname{sgn}(b(s))$$

dir.

R_1^4 Minkowski uzayında bir vektör alanının causal karakterinin çeşitliliğinden dolayı, herhangi iki vektör arasında birden fazla açı kavramı vardır.

Tanım 3.2 x ve y , R_1^4 te spacelike iki vektör olsun.

i) Eğer x ve y , bir timelike altvektör uzayını geren iki vektörse, o halde

$$|\langle x, y \rangle_L| > \|x\| \|y\|$$

dir ve

$$|\langle x, y \rangle_L| = \|x\| \|y\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına x ve y spacelike vektörleri arasındaki **Lorentz timelike açı** denir.

ii) Eğer x ve y , bir spacelike altvektör uzayını geren iki vektörse, o halde

$$|\langle x, y \rangle_L| \leq \|x\| \|y\|$$

dir ve

$$|\langle x, y \rangle_L| = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

olacak şekilde bir tek $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına x ve y spacelike vektörleri arasındaki **Lorentz spacelike aç**ı denir.

Tanım 3.3 x ve y , R_1^4 te timelike iki vektör ise

$$\langle x, y \rangle_L = -\|x\| \|y\| \cosh \theta$$

olacak şekilde bir tek θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına x ve y timelike vektörleri arasındaki **Lorentz timelike aç**ı denir.

Tanım 3.4 R_1^4 te x bir spacelike vektör ve y bir timelike vektör olsun. O halde

$$|\langle x, y \rangle_L| = \|x\| \|y\| \sinh \theta$$

olacak şekilde bir tek negatif olmayan θ reel sayısı vardır. Bu θ reel sayısına x ve y vektörleri arasındaki **Lorentz timelike aç**ı denir.

Bu tezde de-Sitter 3-uzayında bir eğri üzerinde inşa edilen yüzeylerin özel bir sınıfı olan normal, binormal ve Darboux yüzeylerin spacelike veya timelike olanları ele alınmıştır. Bu yüzeyler, sabit açılı yüzey olma koşulu altında incelenmiştir. Burada ele alınan spacelike yüzey çeşitleri spacelike bir eğri üzerinde ve timelike bir eğri üzerinde inşa edilme şekline göre alt gruplara ayrılmıştır.

3.1.Spacelike Normal Regle Yüzeyler

Tanım 3.1.1 $\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ yay uzunluğu parametresi ile verilen birim hızlı, regüler, spacelike bir eğri, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ olmak üzere $M = x(U)$ bir gömme dönüşümü olsun.

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) n(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R} \quad (3.1.1)$$

olacak şekilde α -spacelike eğrisi ile üretilen M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında spacelike bir eğri ile üretilen **spacelike normal regle yüzey** denir. Burada $n(s), \alpha(s)$ regüler eğrisinin birim normal vektör alanıdır.

Uyarı 3.1.2 (3.1.1) parametrizasyonu ile verilen normal yüzey inşa edilirken, α -eğrisinin R_1^4 boyunca pseudo ortogonal $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ çatısının

vektörleri kullanılmıştır. Burada $\alpha(s), t(s), n(s)$ spacelike vektörler, $b(s)$ timelike vektördür. Eğer $\alpha(s), t(s), b(s)$ spacelike ve $n(s)$ timelike olarak seçilirse $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ kümesi yine R_1^4 ün pseudo ortogonal çatısı olacaktır. Fakat, böyle bir çatı kullandığında, de-Sitter 3-uzayında spacelike bir normal yüzey elde edilemez. Çünkü böyle bir çatı ile normal yüzeyi parametrize ettiğimizde

$$x(s, t) = (\cosh t) \alpha(s) + (\sinh t) n(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\begin{cases} E = \langle x_s, x_s \rangle_L = (\cosh t + \kappa_d(s) \sinh t)^2 + (\tau_d(s) \sinh t)^2 \\ F = \langle x_s, x_t \rangle_L = 0 \\ G = \langle x_t, x_t \rangle_L = -1 \end{cases}$$

ve

$$\langle \xi, \xi \rangle = F^2 - EG = E$$

dir. Elde etmek istediğimiz yüzey spacelike olacağı için, yüzeyin birim normal vektörü bir timelike vektör olmak zorundadır. Yukarıdaki hesaplamalardan açıktır ki $E < 0$ olamayacağından, ξ vektörü timelike olamaz ve bu yüzden böyle bir çatı ile spacelike bir yüzey elde edilemez.

Uyarı 3.1.3 Bundan sonra, α -spacelike eğrisi ile üretilen spacelike normal yüzey için, α -spacelike eğrisi boyunca kullanılacak Frenet-Serret çatısı, $\alpha(s), t(s), n(s)$ vektörleri spacelike, $b(s)$ vektörü timelike olacak şekilde seçilerek kullanılacaktır.

(3.1.1) parametrizasyonu ile verilen $x(s, t)$ yüzeyinin sırasıyla s ve t ye göre kısmi türevleri alınır ve α -spacelike eğrisi için Frenet-Serret formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{cases} x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) n(s) \\ x_s(s, t) = (\cos t - \kappa_d(s) \sin t) t(s) + (\tau_d(s) \sin t) b(s) \\ x_t(s, t) = (-\sin t) \alpha(s) + (\cos t) n(s) \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{cases} E = \langle x_s, x_s \rangle_L &= (\cos t - \kappa_d(s) \sin t)^2 - (\tau_d(s) \sin t)^2 \\ F = \langle x_s, x_t \rangle_L &= 0 \\ G = \langle x_t, x_t \rangle_L &= 1 \end{cases}$$

ve ξ, M yüzeyinin timelike birim normal vektörü olmak üzere

$$\langle \xi, \xi \rangle_L = F^2 - EG = -E$$

olur. M spacelike bir yüzey olduğundan

$$\langle \xi, \xi \rangle_L < 0$$

yani

$$(\cos t - \kappa_d(s) \sin t)^2 - (\tau_d(s) \sin t)^2 > 0$$

olmalıdır. O halde aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 3.1.4 De-Sitter 3-uzayında spacelike bir α -eğrisi ile üretilen M normal regle yüzeyinin tanım kümesi

$$\{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (\cos t - \kappa_d(s) \sin t)^2 - (\tau_d(s) \sin t)^2 > 0\}$$

şeklindedir.

(3.1.1) parametrizasyonu ile verilen $x(s, t)$ spacelike normal regle yüzeyinin timelike birim normal vektörü

$$\xi = \frac{x \wedge x_s \wedge x_t}{\|x \wedge x_s \wedge x_t\|}$$

hesaplanılırsa

$$\xi = \frac{\tau_d(s) \sin t}{\sqrt{\Delta}} t(s) + \frac{\cos t - \kappa_d(s) \sin t}{\sqrt{\Delta}} b(s) \quad (3.1.2)$$

elde edilir, burada

$$\Delta = |(\tau_d(s) \sin t)^2 - (\cos t - \kappa_d(s) \sin t)^2|$$

dir.

Şimdi (3.1.1) denklemi ile verilen spacelike normal regle yüzeyin sabit açılı bir yüzey olması durumunu inceleyelim. $x(s, t)$ yüzeyinin sabit açılı bir yüzey olması için, yüzeyin ξ normali ile S_1^3 de-Sitter uzayının sabit doğrultusunun sabit açı yapması gerekir. De-Sitter uzayındaki bu doğrultuyu timelike veya spacelike olacak şekilde seçebiliriz. Ayrıca yüzeyin ξ normali ve de-Sitter uzayının sabit doğrultusu arasında oluşacak açının da causal karakterini göz önünde bulundurursak spacelike bir eğri ile üretilen spacelike normal regle yüzeyler aşağıdaki gibi iki parçaya ayrılır.

• **Timelike Doğrultulu Timelike Açılı Normal Yüzeyler**

Tanım 3.1.5 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) n(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilen spacelike normal regle yüzey ve ξ, M yüzeyinin timelike birim normal vektör alanı olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $\theta(\xi, \xi_{d_1})$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir ξ_{d_1} timelike doğrultusu varsa M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında **sabit timelike açılı, sabit timelike doğrultulu, spacelike bir eğri ile üretilen, spacelike normal regle yüzey** denir.

Şimdi S_1^3 de-Sitter uzayında M spacelike normal regle yüzeyinin ξ_{d_1} sabit timelike doğrultusunu bulalım.

Teorem 3.1.6 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve $M = x(U)$, S_1^3 de-Sitter uzayında sabit timelike doğrultulu, sabit timelike açılı, spacelike bir eğri ile üretilen spacelike bir normal regle yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyinin sabit timelike doğrultusu

$$\begin{aligned} \xi_{d_1} = & \frac{(\cos t - \kappa_d(s) \sin t) \sqrt{\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi}}{\sqrt{\Delta}} t(s) \\ & + \frac{(\tau_d(s) \sin t) \sqrt{\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi}}{\sqrt{\Delta}} b(s) \\ & + (\cosh \theta) \xi \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

şeklindedir, burada

$$\Delta = (\cos t - \kappa_d(s) \sin t)^2 - (\tau_d(s) \sin t)^2$$

ve $\varphi; \xi_{d_1}$ sabit timelike doğrultusu ile x spacelike vektörü arasındaki açı, $\theta; \xi_{d_1}$ sabit doğrultusu ile ξ timelike normal vektörü arasındaki açıdır.

İspat. Kabul edelim ki M spacelike yüzeyinin R_1^4 deki sabit timelike doğrultusu ξ_d olsun. M yüzeyinin ξ timelike birim normal vektör alanı ile ξ_d sabit timelike doğrultusu arasındaki timelike açığı θ ile gösterelim. Yani

$$\langle \xi, \xi_d \rangle_L = -\cosh \theta$$

yazılabilir. $\xi_d \in R_1^4$ olmak üzere

$$\xi_d = \xi_d^T + \xi_d^N$$

şeklinde yazılır. O halde

$$\xi_d = \xi_d^T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

doğrultusunun her iki tarafının ξ ve x ile iç çarpımını alırsak

$$\lambda_1 = \cosh \theta$$

ve

$$\lambda_2 = \langle \xi_d, x \rangle_L$$

olur. Öteyandan x bir spacelike vektör ve ξ_d bir timelike vektör olduğundan, bu vektörler arasındaki timelike açığı φ ile gösterirsek

$$\lambda_2 = \sinh \varphi$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\xi_d = \xi_d^T + (\cosh \theta) \xi + (\sinh \varphi) x$$

olarak yazılmış olur. Bu ifadenin her iki tarafının ξ_d ile iç çarpımı alınır

$$\|\xi_d^T\|^2 = \cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi$$

elde edilir. $\xi_d = \xi_d^T + \xi_d^N$ ve $e_1 = \frac{\xi_d^T}{\|\xi_d^T\|}$ dersek, R_1^4 te ξ_d sabit timelike doğrultusu

$$\xi_d = \left(\sqrt{\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi} \right) e_1 + (\cosh \theta) \xi + (\sinh \varphi) x$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada $e_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|}$ alırsak ve ξ_d doğrultusunun, S_1^3 de-Sitter uzayında kalan sabit parçasını seçersek

$$\begin{aligned} \xi_{d_1} = & \frac{(\cos t - \kappa_d(s) \sin t) \sqrt{\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi}}{\sqrt{\Delta}} t(s) \\ & + \frac{(\tau_d(s) \sin t) \sqrt{\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi}}{\sqrt{\Delta}} b(s) \\ & + (\cosh \theta) \xi \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.7 S_1^3 de-Sitter uzayında spacelike bir eğri ile üretilen, sabit timelike açılı, sabit timelike doğrultulu, spacelike normal regle yüzeyler Lorentz düzlem parçalarıdır.

İspat. $x : M \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve M yüzeyi (3.1.1) parametrizasyonu ile verilen sabit timelike açılı, spacelike normal yüzey olsun. Bu durumda, sabit açılı yüzey olma tanımına göre, M yüzeyinin ξ normal vektörü ile ξ_{d_1} sabit doğrultusu, sabit timelike açı yapacaktır. Yani

$$\langle \xi, \xi_{d_1} \rangle_L = -\cosh \theta$$

olacaktır. (3.1.2) ifadesinin her iki tarafının ξ_{d_1} ile iç çarpımını alırsak

$$\langle \xi, \xi_{d_1} \rangle_L = \frac{(\tau_d(s) \sin t)}{\sqrt{\Delta}} \langle t(s), \xi_{d_1} \rangle - \frac{(\cos t - \kappa_d(s) \sin t)}{\sqrt{\Delta}} \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınır ve gerekli düzenlemeler

yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left[(\kappa_d^2(s) - \tau_d^2(s)) \cosh^2 \theta - (\tau_d(s) \langle t(s), \xi_{d_1} \rangle - \kappa_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle)^2 \right] w^2 \\
& + \left[-2\kappa_d(s) \cosh^2 \theta + 2\kappa_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle^2 + 2\tau_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle \langle t(s), \xi_{d_1} \rangle \right] w \\
& + \left[\cosh^2 \theta - \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle^2 \right] = 0
\end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$w = \tanh \theta$$

dir. Açıkta ki bu ifade w ya göre ikinci dereceden polinomdur ve bu polinomun tüm katsayıları özdeş olarak sifıra eşit olmak zorundadır. Buna göre

$$\begin{cases}
(\kappa_d^2(s) - \tau_d^2(s)) \cosh^2 \theta - (\tau_d(s) \langle t(s), \xi_{d_1} \rangle - \kappa_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle)^2 = 0 \\
-2\kappa_d(s) \cosh^2 \theta + 2\kappa_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle^2 + 2\tau_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle \langle t(s), \xi_{d_1} \rangle = 0 \\
\cosh^2 \theta - \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle^2 = 0
\end{cases} \quad (3.1.4)$$

sistemi elde edilir. (3.1.4) sisteminin üçüncü denkleminde

$$\langle b(s), \xi_{d_1} \rangle_L = \pm \cosh \theta \quad (3.1.5)$$

olur. (3.1.5) ifadesini (3.1.4) denklem sisteminin ikinci denkleminde yerine yazarsak

$$\tau_d(s) \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle_L \langle t(s), \xi_{d_1} \rangle_L = 0 \quad (3.1.6)$$

ifadesini elde ederiz. Burada aşağıdaki üç durumu incelememiz gerekmektedir.

I. Durum Eğer $\tau_d(s) = 0$ ise (3.1.4) denklem sisteminin hem birinci hemde ikinci denklemini sağlanır. Ayrıca α -eğrisinin de-Sitter burulması sıfır olduğundan, α -bir düzlemsel eğri ve bu eğri ile üretilen M yüzeyi bir Lorentz düzlem parçası olur.

II. Durum Eğer $\tau_d(s) \neq 0$ iken $\langle b(s), \xi_{d_1} \rangle = 0$ ise, bu durumda

$$\cosh \theta = 0$$

olur. Sabit açılı yüzey olma koşulu gereği $\cosh \theta = 0$ olamaz.

III. Durum Eğer $\tau_d(s) \neq 0, \langle b(s), \xi_{d_1} \rangle \neq 0$ iken $\langle t(s), \xi_{d_1} \rangle = 0$ ise bu durumda

$$-\tau_d^2(s) \cosh \theta = 0$$

olur ki buda yine bir çelişkidir.

Dolayısıyla yukarıdaki üç durum incelendiğinde

$$\tau_d(s) = 0$$

elde edilir. Böylece α -bir düzlemsel eğri ve bu eğri ile üretilen M yüzeyi bir Lorentz düzlem parçası olur.

• Spacelike Doğrultulu Timelike Açılı Normal Yüzeyler

Tanım 3.1.8 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) n(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilen spacelike normal regle yüzey ve ξ, M yüzeyinin timelike birim normal vektör alanı olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $\theta(\xi, \xi_{d_2})$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir ξ_{d_2} spacelike doğrultusu varsa M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında **sabit timelike açılı, sabit spacelike doğrultulu, spacelike bir eğri ile üretilen, spacelike normal regle yüzey** denir.

Teorem 3.1.9 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve $M = x(U)$, S_1^3 de-Sitter uzayında sabit spacelike doğrultulu, sabit timelike açılı, spacelike bir eğri ile üretilen spacelike bir normal regle yüzey olsun. φ, ξ_{d_2} sabit spacelike doğrultusu ile x spacelike vektörü arasındaki açı, θ, ξ_{d_2} sabit doğrultusu ile ξ timelike normal vektörü arasındaki açı olmak üzere, M yüzeyinin sabit spacelike doğrultusu aşağıdaki gibidir.

i) Eğer φ spacelike açı ise

$$\begin{aligned}\xi_{d_2} = & \frac{(\cos t - \kappa_d(s) \sin t) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}}{\sqrt{\Delta}} t(s) \\ & + \frac{(\tau_d(s) \sin t) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}}{\sqrt{\Delta}} b(s) \\ & - (\sinh \theta) \xi.\end{aligned}\tag{3.1.7}$$

ii) Eğer φ timelike açı ise

$$\begin{aligned}\xi_{d_2} = & \frac{(\cos t - \kappa_d(s) \sin t) \sqrt{|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta}} t(s) \\ & + \frac{(\tau_d(s) \sin t) \sqrt{|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta}} b(s) \\ & - (\sinh \theta) \xi.\end{aligned}\tag{3.1.8}$$

Uyarı 3.1.10 α -spacelike eğrisi ile üretilen spacelike normal yüzeyler yukarıda verilmiştir. Benzer hesaplamalar ile, α -timelike eğrisi ile üretilen spacelike normal yüzeyler içinde yukarıdakine benzer sonuçlar elde edilir.

Örnek 3.1.11 $\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$\alpha(s) = \left(1, \sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

şeklinde yay uzunluğu parametrizasyonu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun. Bu eğrinin teğet vektörü, normal vektörü, binormal vektörü, de-Sitter eğriliği ve de-Sitter burulması

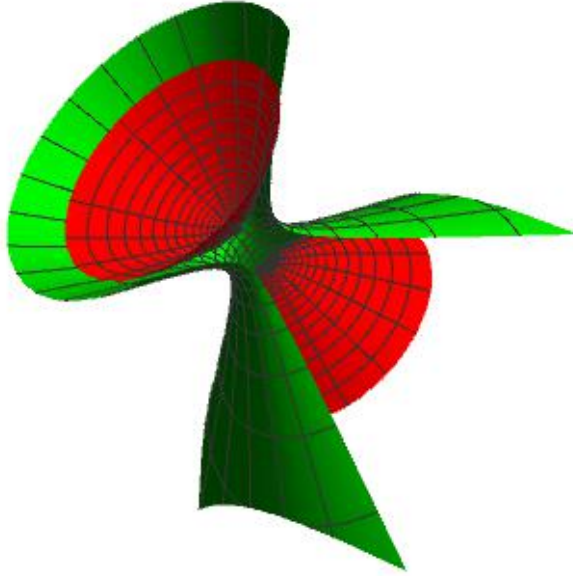
$$\begin{aligned}t(s) &= \left(0, -\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ n(s) &= \left(\sqrt{2}, \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(s) &= (0, 0, 0, 1) \\
\kappa_d &= \|t'(s) + \alpha(s)\| = \frac{1}{2} \\
\tau_d(s) &= -\frac{\det(\alpha(s), \alpha'(s), \alpha''(s), \alpha'''(s))}{[\kappa_d(s)]^2} = 0
\end{aligned}$$

şeklindedir. α -eğrisi ile üretilen M normal regle yüzeyi

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) n(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde parametrizasyona sahip idi. Açıkta ki, α -eğrisi de-Sitter düzlemsel bir eğri ve α -eğrisi ile üretilen M normal regle yüzeyi bir Lorentz düzlem parçasıdır. Stereografik izdüşüm yardımıyla aşağıdaki gibi normal regle yüzeye sahip oluruz.



Şekil – 1

3.2 Timelike Binormal Yüzeyler

Tanım 3.2.1 $\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ yay uzunluğu parametresi ile verilen birim hızlı, regüler, spacelike bir eğri, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ olmak üzere $M = x(U)$ bir gömme dönüşümü olsun.

$$x(s, t) = (\cosh t) \alpha(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R} \quad (3.2.1)$$

olacak şekilde α -spacelike eğrisi ile üretilen M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında spacelike bir eğri ile üretilen **timelike binormal regle yüzey** denir. Burada $b(s), \alpha(s)$ regüler eğrisinin birim binormal vektör alanıdır.

Uyarı 3.2.2 (3.2.1) parametrizasyonu ile verilen binormal yüzey inşa edilirken, α -eğrisinin R_1^4 boyunca pseudo ortogonal $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ çatısının vektörleri kullanılmıştır. Burada $\alpha(s), t(s), n(s)$ spacelike vektörler, $b(s)$ timelike vektördür. Benzer şekilde, eğer $\alpha(s), t(s), b(s)$ spacelike ve $n(s)$ timelike olarak seçilirse $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ kümesi yine R_1^4 ün pseudo ortogonal çatısı olacaktır. Fakat, böyle bir çatı kullandığında, de-Sitter 3-uzayında timelike bir binormal regle yüzey

$$\{(s, t) | \cos^2 t - (\tau_d(s) \sin t)^2 < 0\}$$

kümesi üzerinde tanımlı

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde bir parametrizasyona sahip olacaktır.

Uyarı 3.2.3 Bundan sonra, α -eğrisi ile üretilen binormal yüzey için, α -eğrisi boyunca kullanılacak Frenet-Serret çatısı, $\alpha(s), t(s), n(s)$ vektörleri spacelike, $b(s)$ vektörü timelike olacak şekilde seçilerek kullanılacaktır.

(3.2.1) parametrizasyonu ile verilen $x(s, t)$ yüzeyinin sırasıyla s ve t ye göre kısmi türevleri alınır ve α -spacelike eğrisi için Frenet-Serret formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{cases} x(s, t) &= (\cosh t) \alpha(s) + (\sinh t) b(s) \\ x_s(s, t) &= (\cosh t) t(s) + (-\tau_d(s) \sinh t) n(s) \\ x_t(s, t) &= (\sinh t) \alpha(s) + (\cosh t) b(s) \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{cases} E = \langle x_s, x_s \rangle_L &= (\cosh t)^2 + (\tau_d(s) \sinh t)^2 \\ F = \langle x_s, x_t \rangle_L &= 0 \\ G = \langle x_t, x_t \rangle_L &= -1 \end{cases}$$

ve ξ , M yüzeyinin spacelike birim normal vektörü olmak üzere

$$\langle \xi, \xi \rangle_L = F^2 - EG = E$$

olur. Açıktır ki, M timelike bir yüzey olduğundan

$$\langle \xi, \xi \rangle_L > 0$$

dır.

(3.2.1) parametrizasyonu ile verilen $x(s, t)$ timelike normal regle yüzeyinin spacelike birim normal vektörü

$$\xi = \frac{x \wedge x_s \wedge x_t}{\|x \wedge x_s \wedge x_t\|}$$

hesaplanılırsa

$$\xi = \frac{\tau_d(s) \sinh t}{\sqrt{\Delta_1}} t(s) + \frac{\cosh t}{\sqrt{\Delta_1}} n(s) \quad (3.2.2)$$

elde edilir, burada

$$\Delta_1 = (\tau_d(s) \sinh t)^2 + (\cosh t)^2$$

dir.

Şimdi (3.2.1) denklemini ile verilen timelike binormal regle yüzeyin sabit açılı bir yüzey olması durumunu inceleyelim. $x(s, t)$ yüzeyinin sabit açılı bir yüzey olması için, yüzeyin ξ normali ile S_1^3 de-Sitter uzayının sabit doğrultusunun sabit açı yapması gerekir. De-Sitter uzayındaki bu doğrultuyu timelike veya spacelike olacak şekilde seçebiliriz. Ayrıca yüzeyin ξ normali ve de-Sitter uzayının sabit doğrultusu arasında oluşacak açının da causal karakterini göz önünde bulundurursak spacelike bir eğri ile üretilen timelike binormal regle yüzeyler aşağıdaki gibi iki parçaya ayrılır.

• Timelike Doğrultulu Timelike Açılı Binormal Yüzeyler

Tanım 3.2.4 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$x(s, t) = (\cosh t) \alpha(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilen timelike binormal regle yüzey ve ξ , M yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $\theta(\xi, \xi_{d_3})$

timelike açısı sabit olacak şekilde bir ξ_{d_3} timelike doğrultusu varsa M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında **sabit timelike açılı, sabit timelike doğrultulu, spacelike bir eğri ile üretilen, timelike binormal regle yüzey** denir.

Şimdi S_1^3 de-Sitter uzayında M timelike binormal regle yüzeyinin ξ_{d_3} sabit timelike doğrultusunu bulalım.

Teorem 3.2.5 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve $M = x(U)$, S_1^3 de-Sitter uzayında sabit timelike doğrultulu, sabit timelike açılı, spacelike bir eğri ile üretilen timelike binormal regle yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyinin sabit timelike doğrultusu

$$\begin{aligned} \xi_{d_3} = & \frac{(\cosh t) \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_1}} t(s) \\ & - \frac{(\tau_d(s) \sinh t) \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_1}} n(s) \\ & + (\cosh \theta) \xi \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

şeklindedir, burada φ, ξ_{d_3} sabit timelike doğrultusu ile x spacelike vektörleri arasındaki açı, θ, ξ_{d_3} sabit doğrultusu ile ξ spacelike normal vektörü arasındaki açıdır.

İspat. Kabul edelim ki M timelike yüzeyinin R_1^4 deki sabit timelike doğrultusu ξ_d olsun. M yüzeyinin ξ spacelike birim normal vektör alanı ile ξ_d sabit timelike doğrultusu arasındaki timelike açığı θ ile gösterelim. Yani

$$\langle \xi, \xi_d \rangle_L = \sinh \theta$$

yazılabilir. $\xi_d \in R_1^4$ olmak üzere

$$\xi_d = \xi_d^T + \xi_d^N$$

şeklinde yazılır. O halde

$$\xi_d = \xi_d^T + \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

doğrultusunun her iki tarafının ξ ve x ile iç çarpımını alırsak

$$\lambda_1 = \sinh \theta$$

ve

$$\lambda_2 = \langle \xi_d, x \rangle_L$$

olur. Öteyandan x bir spacelike vektör ve ξ_d bir timelike vektör olduğundan, bu vektörler arasındaki timelike açığı φ ile gösterirsek

$$\lambda_2 = \sinh \varphi$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla

$$\xi_d = \xi_d^T + (\sinh \theta) \xi + (\sinh \varphi) x$$

olarak yazılmış olur. Bu ifadenin her iki tarafının ξ_d ile iç çarpımı alınır

$$\|\xi_d^T\|^2 = |\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|$$

elde edilir. $\xi_d = \xi_d^T + \xi_d^N$ ve $e_1 = \frac{\xi_d^T}{\|\xi_d^T\|}$ dersek, R_1^4 te ξ_d sabit timelike doğrultusu

$$\xi_d = \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|} e_1 + (\sinh \theta) \xi + (\sinh \varphi) x$$

şeklinde elde edilmiş olur. Burada $e_1 = \frac{x_s}{\|x_s\|}$ alırsak ve ξ_d doğrultusunun, S_1^3 de-Sitter uzayında kalan sabit parçasını seçersek

$$\begin{aligned} \xi_{d_3} = & \frac{(\cosh t) \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_1}} t(s) \\ & + \frac{(\tau_d(s) \sinh t) \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_1}} n(s) \\ & + (\sinh \theta) \xi \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.6 S_1^3 de-Sitter uzayında spacelike bir eğri ile üretilen, sabit timelike açılı, sabit timelike doğrultulu, timelike binormal regle yüzeyler Lorentz düzlem parçalarıdır.

İspat. $x : M \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve M yüzeyi (3.2.1) parametrizasyonu ile verilen sabit timelike açılı, timelike binormal yüzey olsun. Bu durumda, sabit açılı yüzey olma tanımına göre, M yüzeyinin ξ normal vektörü ile ξ_{d_3} sabit doğrultusu, sabit timelike açı yapacaktır. Yani

$$\langle \xi, \xi_{d_3} \rangle_L = \sinh \theta$$

olacaktır. (3.2.2) ifadesinin her iki tarafının ξ_{d_3} ile iç çarpımını alırsak

$$\langle \xi, \xi_{d_3} \rangle_L = \frac{(\tau_d(s) \sinh t)}{\sqrt{\Delta_1}} \langle t(s), \xi_{d_3} \rangle + -\frac{(\cosh t)}{\sqrt{\Delta_1}} \langle b(s), \xi_{d_3} \rangle$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının karesi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left[\tau_d^2(s) \left(\sinh^2 \theta - \langle t(s), \xi_{d_3} \rangle^2 \right) \right] w^2 \\ & - \left[2\tau_d(s) \langle t(s), \xi_{d_3} \rangle \langle n(s), \xi_{d_3} \rangle \right] w \\ & + \left[\sinh^2 \theta - \langle n(s), \xi_{d_3} \rangle^2 \right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir, burada

$$w = \tanh t$$

dir. Açıktır ki bu ifade w ya göre ikinci dereceden polinomdur ve bu polinomun tüm katsayıları özdeş olarak sıfıra eşit olmak zorundadır. Buna göre

$$\begin{cases} \tau_d^2(s) \left[\sinh^2 \theta - \langle t(s), \xi_{d_3} \rangle^2 \right] \\ -2\tau_d(s) \langle t(s), \xi_{d_3} \rangle_L \langle n(s), \xi_{d_3} \rangle_L = 0 \\ \sinh^2 \theta - \langle n(s), \xi_{d_3} \rangle_L^2 = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

sistemi elde edilir. (3.2.4) sisteminin üçüncü denkleminde

$$\langle n(s), \xi_{d_3} \rangle_L = \pm \sinh \theta \quad (3.2.5)$$

olur. (3.2.5) ifadesini (3.2.4) denklem sisteminin ikinci denkleminde yerine yazarsak

$$\tau_d(s) \langle t(s), \xi_{d_3} \rangle_L \langle n(s), \xi_{d_3} \rangle_L = 0 \quad (3.2.6)$$

ifadesini elde ederiz. Burada aşağıdaki üç durumu incelememiz gerekmektedir.

I. Durum Eğer $\tau_d(s) = 0$ ise (3.2.4) denklem sisteminin hem birinci hemde ikinci denklemini sağlanır. Ayrıca α -eğrisinin de-Sitter burulması sıfır olduğundan, α -bir düzlemsel eğri ve bu eğri ile üretilen M yüzeyi bir Lorentz düzlem parçası olur.

II. Durum Eğer $\tau_d(s) \neq 0$ iken $\langle t(s), \xi_{d_3} \rangle_L = 0$ ise, bu durumda

$$\sinh \theta = 0$$

olur. Sabit açılı yüzey olma koşulu gereği $\sinh \theta = 0$ olamaz.

III. Durum Eğer $\tau_d(s) \neq 0$, $\langle t(s), \xi_{d_3} \rangle_L \neq 0$ iken $\langle n(s), \xi_{d_3} \rangle_L = 0$ ise bu durumda

$$\sinh \theta = 0$$

olur ki buda yine bir çelişkidir.

Dolayısıyla yukarıdaki üç durum incelendiğinde

$$\tau_d(s) = 0$$

elde edilir. Böylece α -bir düzlemsel eğri ve bu eğri ile üretilen M yüzeyi bir Lorentz düzlem parçası olur.

• Spacelike Doğrultulu Timelike Açılı Binormal Yüzeyler

Tanım 3.2.7 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$x(s, t) = (\cosh t) \alpha(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilen timelike normal regle yüzey ve ξ , M yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $\theta(\xi, \xi_{d_4})$

timelike açısı sabit olacak şekilde bir ξ_{d_4} spacelike doğrultusu varsa M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında **sabit timelike açılı, sabit spacelike doğrultulu, spacelike bir eğri ile üretilen, timelike binormal regle yüzey** denir.

Teorem 3.2.8 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve $M = x(U)$, S_1^3 de-Sitter uzayında sabit spacelike doğrultulu, sabit timelike açılı, spacelike bir eğri ile üretilen timelike bir binormal regle yüzey olsun. φ, ξ_{d_4} sabit spacelike doğrultusu ile x spacelike vektörü arasındaki açı, θ, ξ_{d_4} sabit spacelike doğrultusu ile ξ spacelike normal vektörü arasındaki açı olmak üzere, M yüzeyinin sabit spacelike doğrultusu aşağıdaki gibidir.

i) Eğer φ spacelike açı ise

$$\begin{aligned} \xi_{d_4} = & \frac{(\cosh t) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}}{\sqrt{\Delta_1}} t(s) \\ & - \frac{(\tau_d(s) \sinh t) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}}{\sqrt{\Delta_1}} n(s) \\ & - (\sinh \theta) \xi. \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

ii) Eğer φ timelike açı ise

$$\begin{aligned} \xi_{d_2} = & \frac{(\cosh t) \sqrt{|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta}} t(s) \\ & - \frac{(\tau_d(s) \sinh t) \sqrt{|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_1}} n(s) \\ & - (\sinh \theta) \xi. \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Uyarı 3.2.9 α -spacelike eğrisi ile üretilen timelike binormal yüzeyler yukarıda verilmiştir. Benzer hesaplamalar ile, α -spacelike eğrisi ile üretilen spacelike binormal yüzeyler

$$\{(s, t) | \cos^2 t - (\tau_d(s) \sin t)^2 > 0\}$$

kümesi üzerinde

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) b(s)$$

parametrizasyonu ile verilir ve bu yüzeyler içinde yukarıdakine benzer sonuçlar elde edilir.

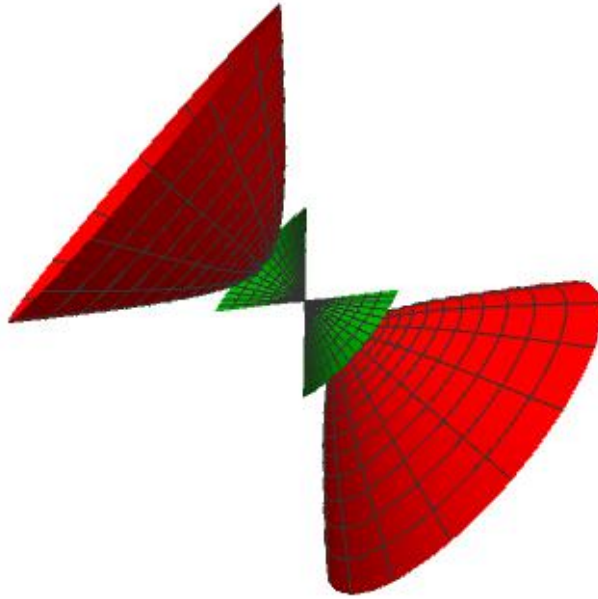
Örnek 3.2.10 $\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$\alpha(s) = \left(1, \sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

şeklinde yay uzunluğu parametrizasyonu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun. α -eğrisi ile üretilen M binormal regle yüzeyi

$$x(s, t) = (\cosh t) \alpha(s) + (\sinh t) n(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde parametrizasyona sahip idi. Açıktır ki, α -eğrisi de-Sitter düzlemsel bir eğri ve α -eğrisi ile üretilen M binormal regle yüzeyi bir Lorentz düzlem parçasıdır. Stereografik izdüşüm yardımıyla aşağıdaki gibi binormal regle yüzeye sahip oluruz.



Şekil – 2

Uyarı 3.2.11 Binormal regle yüzey bir α -timelike eğrisi üzerinde inşa edilecek olursa

$$\{(s, t) | (\tau_d \sin t)^2 - \cos^2 t > 0\}$$

kümesi üzerinde

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) b(s)$$

parametrizasyonu ile spacelike binormal yüzeyler, ve benzer şekilde

$$\{(s, t) | (\tau_d \sin t)^2 - \cos^2 t < 0\}$$

kümesi üzerinde

$$x(s, t) = (\cos t) \alpha(s) + (\sin t) b(s)$$

parametrizasyonu ile timelike binormal yüzeyler elde edilir. Bu şekildeki yüzeyler içinde benzer hesaplamalar ile yukarıdaki sonuçlara ulaşılabilir.

3.3 Timelike Darboux Yüzeyler

Tanım 3.3.1 $\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ yay uzunluğu parametresi ile verilen birim hızlı, regüler, spacelike bir eğri, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ olmak üzere $M = x(U)$ bir gömme dönüşümü olsun.

$$x(s, t) = (\cosh t) t(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R} \quad (3.3.1)$$

olacak şekilde α -spacelike eğrisi ile üretilen M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında spacelike bir eğri ile üretilen **timelike Darboux regle yüzey** denir. Burada $t(s)$ ve $b(s)$, $\alpha(s)$ regüler eğrisinin birim teğet ve binormal vektör alanıdır.

Uyarı 3.3.2 (3.3.1) parametrizasyonu ile verilen Darboux yüzey inşa edilirken, α -eğrisinin R_1^4 boyunca pseudo ortogonal $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ çatısının vektörleri kullanılmıştır. Burada $\alpha(s), t(s), n(s)$ spacelike vektörler, $b(s)$ timelike vektördür. Benzer şekilde, eğer $\alpha(s), t(s), b(s)$ spacelike ve $n(s)$ timelike olarak seçilirse $\{\alpha(s), t(s), n(s), b(s)\}$ kümesi yine R_1^4 ün pseudo ortogonal çatısı olacaktır. Fakat, böyle bir çatı kullandığında, de-Sitter 3-uzayında

timelike bir Darboux regle yüzey

$$\{(s, t) | \cos^2 t - (\kappa_d \cos t - \tau_d(s) \sin t)^2 > 0\}$$

kümesi üzerinde tanımlı ve

$$x(s, t) = (\cos t) t(s) + (\sin t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde bir parametrizasyona sahip olacaktır.

Uyarı 3.3.3 Bundan sonra, α -eğrisi ile üretilen Darboux yüzey için, α -eğrisi boyunca kullanılacak Frenet-Serret çatısı, $\alpha(s), t(s), n(s)$ vektörleri spacelike, $b(s)$ vektörü timelike olacak şekilde seçilerek kullanılacaktır.

(3.3.1) parametrizasyonu ile verilen $x(s, t)$ yüzeyinin sırasıyla s ve t ye göre kısmi türevleri alınır ve α -spacelike eğrisi için Frenet-Serret formüllerinden yararlanılırsa

$$\begin{cases} x(s, t) &= (\cosh t) t(s) + (\sinh t) b(s) \\ x_s(s, t) &= (\kappa_d(s) \cosh t - \tau_d(s) \sinh t) n(s) - (\cosh t) \alpha(s) \\ x_t(s, t) &= (\sinh t) t(s) + (\cosh t) b(s) \end{cases}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{cases} E = \langle x_s, x_s \rangle &= (\kappa_d(s) \cosh t - \tau_d(s) \sinh t)^2 + (\cosh t)^2 \\ F = \langle x_s, x_t \rangle &= 0 \\ G = \langle x_t, x_t \rangle &= -1 \end{cases}$$

ve ξ, M yüzeyinin spacelike birim normal vektörü olmak üzere

$$\langle \xi, \xi \rangle = F^2 - EG = E$$

olur. Açıktır ki, M timelike bir yüzey olduğundan

$$\langle \xi, \xi \rangle > 0$$

dır.

(3.3.1) parametrizasyonu ile verilen $x(s, t)$ timelike Darboux regle yüzeyinin spacelike birim normal vektörü

$$\xi = \frac{x \wedge x_s \wedge x_t}{\|x \wedge x_s \wedge x_t\|}$$

hesaplanılırsa

$$\xi = \frac{\kappa_d(s) \cosh t - \tau_d(s) \sinh t}{\sqrt{\Delta_2}} \alpha(s) + \frac{\cosh t}{\sqrt{\Delta_2}} n(s) \quad (3.3.2)$$

elde edilir, burada

$$\Delta_2 = (\tau_d(s) \sinh t)^2 + (\cosh t)^2$$

dir.

Şimdi (3.2.1) denklemi ile verilen timelike Darboux regle yüzeyin sabit açılı bir yüzey olması durumunu inceleyelim. $x(s, t)$ yüzeyinin sabit açılı bir yüzey olması için, yüzeyin ξ normali ile S_1^3 de-Sitter uzayının sabit doğrultusunun sabit açı yapması gerekir. De-Sitter uzayındaki bu doğrultuyu timelike veya spacelike olacak şekilde seçebiliriz. Ayrıca yüzeyin ξ normali ve de-Sitter uzayının sabit doğrultusu arasında oluşacak açının da causal karakterini göz önünde bulundurursak spacelike bir eğri ile üretilen timelike Darboux regle yüzeyler aşağıdaki gibi iki parçaya ayrılır.

• **Timelike Doğrultulu Timelike Açılı Darboux Yüzeyler**

Tanım 3.3.4 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$x(s, t) = (\cosh t) t(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilen timelike Darboux regle yüzey ve ξ, M yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $\theta(\xi, \xi_{d_5})$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir ξ_{d_5} timelike doğrultusu varsa M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında **sabit timelike açılı, sabit timelike doğrultulu, spacelike bir eğri ile üretilen, timelike Darboux regle yüzey** denir.

Şimdi S_1^3 de-Sitter uzayında M timelike Darboux regle yüzeyinin ξ_{d_4} sabit timelike doğrultusunu bulalım.

Teorem 3.3.5 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve $M = x(U)$, S_1^3 de-Sitter uzayında sabit timelike doğrultulu, sabit timelike açılı, spacelike bir eğri ile üretilen timelike bir Darboux regle yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyinin sabit timelike doğrultusu

$$\begin{aligned} \xi_{d_5} = & \frac{(\kappa_d(s) \cosh t - \tau_d(s) \sinh t) \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_2}} n(s) \\ & + \frac{(\cosh t) \sqrt{|\sinh^2 \theta - \sinh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_2}} \alpha(s) \\ & + (\cosh \theta) \xi \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

şeklindedir, burada φ, ξ_{d_5} sabit doğrultusu ile x arasındaki açı, θ, ξ_{d_5} sabit doğrultusu ile ξ spacelike normal vektörü arasındaki açıdır.

Teorem 3.3.6 S_1^3 de-Sitter uzayında spacelike bir eğri ile üretilen, sabit timelike açılı, sabit timelike doğrultulu, timelike Darboux regle yüzeyler Lorentz düzlem parçalarıdır.

• **Spacelike Doğrultulu Timelike Açılı Darboux Yüzeyler**

Tanım 3.3.7 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$x(s, t) = (\cosh t) t(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

parametrizasyonu ile verilen timelike Darboux regle yüzey ve ξ, M yüzeyinin spacelike birim normal vektör alanı olsun. Eğer M yüzeyi üzerinde $\theta(\xi, \xi_{d_6})$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir ξ_{d_6} spacelike doğrultusu varsa M yüzeyine S_1^3 de-Sitter uzayında **sabit timelike açılı, sabit spacelike doğrultulu, spacelike bir eğri ile üretilen, timelike Darboux regle yüzey** denir.

Teorem 3.3.8 $U \subset \mathbb{R}^2$ açık bir küme, $x : U \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$ bir gömme dönüşümü ve $M = x(U)$, S_1^3 de-Sitter uzayında sabit spacelike doğrultulu, sabit timelike açılı, spacelike bir eğri ile üretilen timelike bir Darboux regle yüzey olsun. φ, ξ_{d_6} sabit spacelike doğrultusu ile x spacelike vektörü arasındaki

$\alpha_1, \theta, \xi_{d_6}$ sabit spacelike doğrultusu ile ξ spacelike normal vektörü arasındaki açı olmak üzere, M yüzeyinin sabit spacelike doğrultusu aşağıdaki gibidir.

i) Eğer φ spacelike açı ise

$$\begin{aligned}\xi_{d_6} = & \frac{(\kappa_d(s) \cosh t - \tau_d(s) \sinh t) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}}{\sqrt{\Delta_2}} n(s) \\ & - \frac{(\cosh t) \sqrt{\sin^2 \varphi + \sinh^2 \theta}}{\sqrt{\Delta_2}} \alpha(s) \\ & - (\sinh \theta) \xi.\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

ii) Eğer φ timelike açı ise

$$\begin{aligned}\xi_{d_6} = & \frac{(\kappa_d(s) \cosh t - \tau_d(s) \sinh t) \sqrt{|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_2}} n(s) \\ & - \frac{(\cosh t) \sqrt{|\cosh^2 \theta - \cosh^2 \varphi|}}{\sqrt{\Delta_2}} \alpha(s) \\ & - (\sinh \theta) \xi.\end{aligned}\tag{3.3.8}$$

Uyarı 3.3.9 α -spacelike eğrisi ile üretilen timelike Darboux yüzeyler yukarıda verilmiştir. Benzer hesaplamalar ile, α -spacelike eğrisi ile üretilen spacelike Darboux yüzeyler

$$\{(s, t) | \cos^2 t - (\kappa_d(s) \cos t - \tau_d(s) \sin t)^2 > 0\}$$

kümesi üzerinde

$$x(s, t) = (\cos t) t(s) + (\sin t) t(s)$$

parametrizasyonu ile verilir ve bu yüzeyler içinde yukarıdakine benzer sonuçlar elde edilir.

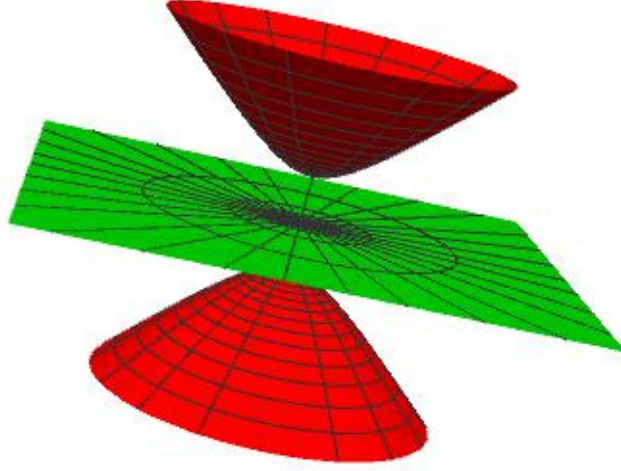
Örnek 3.3.10 $\alpha : I \rightarrow S_1^3 \subset R_1^4$

$$\alpha(s) = \left(1, \sqrt{2} \cos \frac{s}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \sin \frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

şeklinde yay uzunluğu parametrizasyonu ile verilen regüler spacelike bir eğri olsun. α -eğrisi ile üretilen M Darboux regle yüzeyi

$$x(s, t) = (\cosh t) t(s) + (\sinh t) b(s), (s, t) \in I \times \mathbb{R}$$

şeklinde parametrizasyona sahip idi. Açıktır ki, α -eğrisi de-Sitter düzlemsel bir eğri ve α -eğrisi ile üretilen M Darboux regle yüzeyi bir Lorentz düzlem parçasıdır. Stereografik izdüşüm yardımıyla aşağıdaki gibi Darboux regle yüzeye sahip oluruz.



Şekil – 3

Uyarı 3.3.11 Darboux regle yüzey bir α -timelike eğrisi üzerinde inşa edilecek olursa

$$x(s, t) = (\sinh t) t(s) + (\cosh t) b(s)$$

parametrizasyonuna sahip olur. Bu yüzey içinde benzer hesaplamalar ile yukarıdaki sonuçlara ulaşabiliriz.

Uyarı 3.3.12 α –timelike eğrisi ile inşa edilen Darboux regle yüzeyler daima timelikedır. Yani bir α –timelike eğrisi ile spacelike Darboux regle yüzey üretilemez.



KAYNAKLAR

- [1] **M.I.Munteanu, A.I. Nistor, (2009)**, A new approach on constant angle surfaces in E^3 , Turk. T. Math.,33, 169-178.
- [2] **A.J Di Scala, G. Ruiz-Hernandez, (2009)**, Helix submnifolds of Euclidean space, Monatsh. Math., 1-13.
- [3] **G. Ruiz-Hernandez, (2008)**, Helix shadow boundary and minimal submanifolds, Illinois J. Math., 52, 1385-1397.
- [4] **P. Germelli, A.J Di Scala, (2007)**, Constant angle surfaces in liquid crystals, Phylos.Magazine, 87,1871-1888.
- [5] **F. Dillen, J. Fastenakels, J. Van der Veken, L. Vrancken, (2007)**, Constant angle surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Monaths math., 152, 89-96.
- [6] **F. Dillen and M. I. Munteanu, (2009)**, Constant angle surfaces in $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, Bull. Braz. Math. Soc., 40, 85-97.
- [7] **J. Fastanekels, M.I. Munteanu, J. Van der Veken, (2011)**, Constant angle surfaces in the Heisenberg group, Acta Math. Snica, 27, 747-756.
- [8] **R. Lopez, M.I. Munteanu, (2011)**, Constant angle surfaces in Minkowski space, Bulletin of the Belgian Math., 18, 271-286.
- [9] **T. Mert, (2014)**, Constant angle surfaces in Hyperbolic and de-Sitter space, Gazi University Graduate School of Natural and Applied Sciences, Ph. D. Thesis.
- [10] **T. Mert, (2018)**, Spacelike ruled surfaces in hyperbolic 3-space, Cumhuriyet Sci. J., 39, 314-324.
- [11] **A. Nistor, (2011)**, Certain constant angle surfaces constructed on curves, International Electronic Journal of Geometry, 4, 79-87.
- [12] **S. Karakus, (2013)**, Certain constant angle surfaces constructed on curves in Minkowski 3-space, International Electronic Journal of Geometry, 11, 37-47.
- [13] **T. Mert, M. Atçeken, (2021)**, Some Special Ruled Surfaces in Hyperbolic 3-Space, Konuralp Journal of Mathematics, 9, 298-309.

- [14] **T. Mert, M. Atçeken, (2021)**, Special Ruled Surface in de-Sitter 3-Space, Fundamental Journal of Mathematics and Applications, 4, 195-209.
- [15] **T. Mert, M. Atçeken, (2020)**, Some Constant Angle Spacelike Surfaces Construct on a Curve in de-Sitter 3-Space, International Conference on Mathematics and Its Applications in Sciences and Engineering, Ankara, Türkiye, 233-241.
- [16] **T. Mert, M. Atçeken, (2020)**, On The Some Special Timelike Surfaces in de-Sitter 3-Space, MAS 11th International European Conference on Mathematics Engineering, Natural- Medical Sciences, Tokat, Türkiye, 167-187.
- [17] **H. Hacısalihoğlu, (1983)**, Diferensiyel Geometri, İnönü Üniversitesi yayımları.
- [18] **H. Hacısalihoğlu, (1980)**, Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayımları.
- [19] **J.G. Ratcliffe, (1948)**, Foundations of Hyperbolic Manifolds, New York, Berlin, Springer-Verlag.