

T.C
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
FİNANS BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

KOPULA-GARCH MODELİ İLE HİSSE
GETİRİLERİNİN TAHMİNİ VE BİST30 ÜZERİNE BİR
UYGULAMA

Cemile ÖZGÜR

2502170082

TEZ DANIŞMANI

Prof. Dr. Vedat SARIKOVANLIK

İSTANBUL - 2022

ÖZ

KOPULA-GARCH MODELİ İLE HİSSE GETİRİLERİNİN TAHMİNİ VE BİST30 ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Cemile ÖZGÜR

Bu tez çalışmasında, finansal varlık getirilerinin zamanla değişen ve kümelenen oynaklık gibi özelliklerini dikkate alan Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (GARCH) süreçleri ile birlikte getiriler arasındaki çok değişkenli doğrusal olmayan birlikte hareketi de modelleyebilen kopula fonksiyonlarının kombinasyonu ile oluşturulan kopula-GARCH modeli, BİST30 Endeksi'nde işlem gören hisse getirilerinin modellenmesi ve getiriler arası çok değişkenli bağımlılık yapılarının da göz önünde bulundurularak getiri tahminlerinin elde edilmesi amacıyla kullanılmıştır. Eliptik ve Karışım kopulalara dayalı kopula-GARCH modellerinden elde edilen getiriler öncelikle Global Minimum Varyans, Teget Portföyü ve Global Minimum CVaR optimizasyonlarında kullanılarak oluşturulan portföylerin performansı eşit ağırlıklı portföy ve tarihsel verilerin kullanılmasıyla oluşturulan portföyler gibi daha klasik yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Kopula-GARCH modelinden elde edilen getirilerin portföy dağılım problemlerinde kullanılmasına yönelik araştırmayı takiben, Eliptik ve Düzenli Asma kopula-GARCH modellerinin, Riske Maruz Değer ve Beklenen Kayıp gibi portföy kuyruk riskini tahmin performansı çeşitli Geriye Dönük Test prosedürlerinin uygulanması ile araştırılmıştır. İlki optimal portföy dağılımının belirlenmesi ikincisi ise portföy riskinin tahmini olmak üzere iki farklı alandaki araştırma bulgularına göre, sadece tek değişkenli serilere ait özellikleri değil seriler arası çeşitli bağımlılık türlerini de dikkate alan kopula-GARCH modellerinin bu alanlardaki uygulamaları olumlu sonuçlanmıştır. Diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında her iki alanda da en iyi ilk iki performansı gösteren modeller, alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip kopulalara dayalı Düzenli Asma kopula-GARCH, Student t kopula-GARCH veya Karışım kopula-GARCH modellerinden biri olmuştur.

Anahtar Kelimeler: Kopula Teorisi, GARCH, Riske Maruz Değer, Beklenen Kayıp, Portföy Optimizasyonu

ABSTRACT

FORECASTING STOCK RETURNS WITH COPULA-GARCH MODEL AND AN APPLICATION ON BIST30

Cemile ÖZGÜR

In this thesis, copula-GARCH model, which is a combination of univariate Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH) processes that take into account changing volatility / volatility clustering properties of financial asset returns and copula functions that are able to model multivariate nonlinear co-movement of returns, is employed to model stock returns listed in BIST30 Index and to obtain return forecasts by also taking into account multivariate dependence structure between the returns. Obtained returns from Elliptical and Mixed copula-based GARCH models are first employed in Global Minimum Variance, Tangency Portfolio and Global Minimum CVaR portfolio optimizations and performance of the constructed optimal portfolios are compared with the more traditional methods such as the equally weighted portfolio and an optimal portfolio constructed from historical data. Following the research on the application of returns obtained from copula-GARCH model in portfolio allocation problems, portfolio tail risk such as Value at Risk and Expected Shortfall forecasting performance of Elliptical and Regular Vine copula-GARCH models are evaluated by employing various backtesting procedures. According to the research results obtained first in optimal portfolio allocation and second in portfolio tail risk forecasting tasks, copula-GARCH models that take into account not only series specific properties but also various dependence types between the series performed well in both tasks. Especially, the ones employing copula functions that are able to model lower and upper tail dependencies are ranked at the top two best models which are either R-vine copula-GARCH and Student t copula-GARCH or mixed copula-GARCH and Student t copula-GARCH models.

Keywords: Copula Theory, GARCH, Value at Risk, Expected Shortfall, Portfolio Optimization

ÖNSÖZ

Günümüz piyasa koşullarında, finansal varlık getirilerinin birçok modelin temelinde bulunan çoklu normal dağılım ve sabit momentlere sahip olma gibi varsayımlara uygun davrandığını söylemek mümkün olmamaktadır. Özellikle, artan finansal piyasalar arası etkileşim ve öngörülemeyen risklerin varlığında, getiri serilerini modellemeye ilişkin zorlukların yanında birden çok finansal varlığı içeren portföylerin taşıdığı yukarı yönlü potansiyel ile aşağı yönlü kayıp riskinin doğru belirlenebilmesi ayrı bir önem arz etmektedir. Nitekim, son çeyrek yüzyıl içerisinde yaşanan finansal krizler ile birlikte gözlemlenen finansal varlık getirilerinin artan birlikte hareket etme eğilimleri nedeniyle ortaya çıkan portföy kayıplarının büyüklüğü bunun en iyi göstergelerinden biridir.

Bu nedenle, gerçek piyasa koşulları altında gözlemlenen tek değişkenli finansal getiri serilerine ait biçimlendirilmiş gerçeklerle birlikte seriler arası çok değişkenli birlikte hareketi de göz önünde bulunduran kopula-GARCH modelinin, BİST30 Endeksi'nde işlem gören belirli hisselerin getiri tahminlerinin elde edilmesi amacıyla kullanılarak modelin bu hisselerle oluşturulan portföylerin risk tahmin performansı ile minimum riskli ve risk başına elde edilen getiriyi maksimize eden optimal portföylerin performansına katkısının değerlendirilmesi amaçlanmıştır. Böylece, tek değişkenli getiri serileri ile birlikte çok değişkenli portföy dağılımının yukarı yönlü (sağ uç gözlemleri ile) potansiyeli ile birlikte aşağı yönlü potansiyelinin (sol uç gözlemler) de çalışma kapsamında değerlendirilmesi amaçlanmıştır.

Öncelikle, bu tezin hazırlanması esnasında desteğini benden esirgemeyen ve sabırla her soruma cevap veren tez danışmanım Prof. Dr. Vedat SARIKOVANLIK'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca, değerli zamanlarını bu tezi izleme ve değerlendirme süreçlerinde yer alarak kullanan tez izleme jürisindeki Prof. Dr. Kamil Ahmet KÖSE ve Doç. Dr. Murat AKKAYA hocalarıma emeklerinden dolayı teşekkür ederim. Bununla birlikte, tez teslimi öncesinde yapılan tez sunumlarında ve doktora derslerimiz süresince de emeği geçen Finans Anabilim Dalı'ndaki tüm hocalarıma ayrıca teşekkür ederim.

Bu tez çalışması kapsamında kullanılan BİST30 Endeksi'nde işlem gören hisselerin günlük fiyat verilerine ulaşmamı sağlayan BORSA İstanbul A.Ş.'ye verilerden dolayı teşekkür etmek isterim.

Sadece bu tez çalışmasında değil hayatımın her noktasında emeği olan aileme ve daha da önemlisi hiçbir koşulda desteğini esirgemeyerek benimle her yolculuğa çıkmaya hazır olan anneme ayrıca çok teşekkür ederim.

Cemile ÖZGÜR

İstanbul, 2022

İÇİNDEKİLER

ÖZ.....	ii
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	vi
TABLolar LİSTESİ.....	xiii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiv
SEMBOLLER LİSTESİ.....	xvii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xviii
GİRİŞ	1

BİRİNCİ BÖLÜM

FİNANS ALANINDA ZAMAN SERİLERİNİN MODELLENMESİ

1.1 Stokastik Süreçler	6
1.1.1 Tanım	7
1.1.2 Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması.....	7
1.2 Zaman Serileri.....	11
1.2.1 Doğrusal Süreçler.....	13
1.2.2 Durağanlık.....	14
1.2.3 Beyaz Gürültü Süreci	15
1.2.4 Güçlü ve Zayıf Bağımlılık	18
1.3 Tek Değişkenli Doğrusal Zaman Serisi Modelleri	18
1.3.1 Hareketli Ortalama Süreçleri.....	19

1.3.2 Otoregresif (Özbağımlı) Süreçler	20
1.3.3 Otoregresif Hareketli Ortalama Süreçleri	21
1.3.4 Otoregresif Entegre Hareketli Ortalama Süreçleri	21
1.4 Tek Değişkenli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri	23
1.4.1 Otoregresif Koşullu Değişen Varyans	24
1.4.2 Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans	24
1.4.3 Tek Değişkenli Asimetrik GARCH Modelleri	25
1.4.3.1 GJR-GARCH Modeli	26
1.4.3.2 TGARCH Modeli	26
1.4.3.3 APARCH Modeli	27
1.4.3.4 EGARCH Modeli	27
1.5 Çok Değişkenli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri	28
1.5.1 VEC-GARCH Modeli	28
1.5.2 BEKK-GARCH Modeli	30
1.5.3 CCC-GARCH Modeli	30
1.5.4 DCC-GARCH Modeli	31

İKİNCİ BÖLÜM

KOPULA FONKSİYONLARI, ÖZELLİKLERİ VE TAHMİN

2.1 Bağımlılığın Modellenmesi ve Kopulalar	34
2.2 Temel Matematiksel Tanımlar	35
2.3 Kopula Fonksiyonları	37
2.3.1 İki Boyutlu Kopulalar	38

2.3.2 Çok Boyutlu Kopulalar	39
2.3.3 Bağımsızlık Kopulası ile Fréchet-Hoeffding Sınırları	41
2.3.4 Yaşam Kopulaları.....	42
2.4 Kopula Aileleri	43
2.4.1 Eliptik Kopula Ailesi	43
2.4.2 Arşimedyen Kopula Ailesi.....	47
2.4.2.1 Tanım ve Özellikler.....	48
2.4.2.2 Çok Boyutlu Arşimedyen Kopula	52
2.5 Karışım Kopulalar	53
2.6 Kopula Tahmin Yöntemleri	54
2.6.1 Parametrik Tahmin Yöntemleri.....	55
2.6.1.1 En Çok Olabilirlik (MLE).....	55
2.6.1.2 Marjinallere İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları Yöntemi (IFM).....	56
2.6.2 Yarı-Parametrik Tahmin Yöntemleri	57
2.6.2.1 Momentler Yöntemi	57
2.6.2.2 Psödo En Çok Olabilirlik Yöntemi (PMLE).....	58
2.6.3 Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri	60
2.6.3.1 Ampirik Kopula	60
2.6.3.2 Kernel Kopula Tahmincisi	61

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ASMA (VINE) KOPULALAR

3.1 İkili Kopula Yapıları (PCC).....	64
3.2 Düzenli Asma (Regular Vine)	66
3.2.1 Düzenli Asma Türleri.....	69
3.2.2 Düzenli Asma Kopula	71
3.3 R-vine Yapısının Belirlenmesi ve Tahmin	75
3.3.1 R-vine Ağaç Yapısının Seçimi.....	75
3.3.1.1 Yukarıdan Aşağıya Ardışık Seçim Stratejisi	76
3.3.1.2 Aşağıdan Yukarı Ardışık Seçim Stratejisi	77
3.3.2 Kopula Ailelerinin Seçimi	78
3.3.3 Parametre Tahmini	79

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BAĞIMLILIK YAPILARI VE BAĞIMLILIK ÖLÇÜLERİ

4.1 Bağımlılık Yapıları.....	81
4.1.1 Uyumluluk	82
4.1.2 Bölge (Quadrant) Bağımlılığı	83
4.1.3 Kuyruk Bağımlılığı	85
4.2 Bağımlılık Ölçüleri.....	86
4.2.1 Doğrusal (Pearson) Korelasyon Katsayısı	87
4.2.2 Sıra Korelasyonu.....	90
4.2.2.1. Kendall Tau.....	91

4.2.2.2. Sperman Sıra Korelasyonu.....	91
--	----

BEŞİNCİ BÖLÜM

MARKOWITZ ORTALAMA-VARYANS MODELİ, PORTFÖY RMD VE BEKLENEN KAYIP İLE PORTFÖY PERFORMANS ÖLÇÜTLERİ

5.1 Ortalama-Varyans Modeli	94
5.1.1 Ortalama-Varyans Optimizasyonu.....	95
5.1.2 Optimal Portföyün Belirlenmesi	100
5.1.3 Risksiz Bir Varlığı İçeren Risk-Etkin Portföyler	101
5.1.4 Ortalama-Varyans Modeline Yöneltilen Eleştiriler	103
5.2 Yarı-Varyans, Riske Maruz Değer ve Beklenen Kayıp	104
5.2.1 Yarı-Varyans	104
5.2.2 Riske Maruz Değer	105
5.2.2.1 RMD Hesaplama Yöntemleri.....	107
5.2.2.1.1 Varyans-Kovaryans (Delta-Normal) Yöntemi.....	107
5.2.2.1.2 Delta-Gamma Yöntemi	109
5.2.2.1.3 Tarihsel Simülasyon.....	110
5.2.2.1.4 Monte Carlo Simülasyonu	111
5.2.2.2 RMD Geriye Dönük Testler.....	112
5.2.3 Beklenen Kayıp.....	115
5.2.3.1 Optimizasyon Problemi.....	117
5.2.3.2 BK Geriye Dönük Testler	118

5.4 Portföy Performans Ölçütleri	120
5.4.1 Sharpe Oranı.....	120
5.4.2 Treynor Ölçütü	121
5.4.3 Sortino Oranı.....	121
5.4.4 Omega Oranı	122
5.4.5 Sharpe – Omega Oranı	123
5.4.6 D Oranı.....	123

ALTINCI BÖLÜM

KOPULA-GARCH MODELİ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

6.1 Kopula-GARCH Modeli.....	124
6.2 Literatür Araştırması	126

YEDİNCİ BÖLÜM

BİST30 ÜZERİNE BİR UYGULAMA

7.1 Birinci Uygulama	139
7.1.1 Veri Seti	139
7.1.2 Sabit Oynaklık ve Oynaklık Kümelenmesi.....	142
7.1.3 Tek Değişkenli Serilerin Koşullu Varyans Denklemleri	143
7.1.4 Psödo-Uniform Değişkenler.....	144
7.1.5 Çok Boyutlu Bağımlılık Yapısının Modellenmesi.....	145
7.1.6 Portföy Dağılımlarının Belirlenmesi.....	146
7.1.7 Ampirik Bulgular	148

7.2 İkinci Uygulama	152
7.2.1 Veri Seti	153
7.2.2 Tek Değişkenli GARCH Marjinalleri	155
7.2.3 Düzenli Asma Kopula Yapısı	157
7.2.4 Portföy Getirileri ile RMD ve Beklenen Kaybın Hesaplanması.....	160
7.2.5 Bulgular.....	162
SONUÇ.....	164
KAYNAKÇA	168
ÖZGEÇMİŞ.....	181

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1.1 : Stokastik Süreç Türleri.....	10
Tablo 2.1 : Yaygın Kullanıma Sahip İki Boyutlu Arşimedyen Kopulalar ile Üretici Fonksiyonları.....	50
Tablo 2.2 : Yaygın Kullanıma Sahip Çok Boyutlu Arşimedyen Kopulalar.....	53
Tablo 4.1 : Eliptik ve Bazı Arşimedyen Kopulaların Uyumluluk Ölçüleri ile Kuyruk Bağımlılık Katsayıları.....	92
Tablo 7.1 : Getiri Serilerine ait Betimsel İstatistikler.....	141
Tablo 7.2 : Serilere Özgü Koşullu Varyans Denklem Parametreleri / 19 Haziran 2013 – 30 Aralık 2016.....	143
Tablo 7.3 : Portföy Performans Ölçütleri.....	149
Tablo 7.4 : Hisse Kodu, Firma ve Sektör Bilgileri.....	153
Tablo 7.5 : Betimsel İstatistikler / Haziran 2010 – Ocak 2012.....	155
Tablo 7.6 : Tek Değişkenli GARCH Marjinaleri / Haziran 2010–Ocak 2012.....	156
Tablo 7.7 : RMD Geriye Dönük Test Sonuçları.....	162
Tablo 7.8 : BK Geriye Dönük Test Sonuçları.....	163

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1 : Gaussian ve t4 Beyaz Gürültü (WN) Süreçlerinin Simülasyonları.....	16
Şekil 1.2 : Gaussian ve t4 Beyaz Gürültü Süreç Simülasyonlarının ACF ve PACF Korelogramları.....	17
Şekil 1.3 : AR(1) ile MA(1) Süreçlerinin $\phi = \{-0.3, 0.3\}$ ve $\theta = \{-0.3, 0.3\}$ Parametre Simülasyonları.....	22
Şekil 1.4 : ARMA(1,1) ile ARIMA(1,1,1) Süreçlerinin $\phi = \{-0.3, 0.3\}$, $d = 1$ ve $\theta = \{-0.3, 0.3\}$ Parametre Simülasyonları.....	23
Şekil 2.1 : Aynı Gamma(3,1) Marjinal Dağılımı ile Korelasyona ($\rho=0.7$) Ancak Farklı Bağımlılık Yapılarına Sahip İki Dağılımın 1000 Adet Rastlantısal Gözlem Değerinin Serpilme Diyagramları.....	35
Şekil 2.2 : Normal Kopula; a) Kendall tau = 0.3 ve b) Kendall tau = 0.7 için Serpilme ve Kopula Yoğunluk Kontur Diyagramları.....	46
Şekil 2.3 : t-Kopula; a) Kendall tau = 0.3, $\nu = 4$ ve b) Kendall tau = 0.7, $\nu = 4$ için Serpilme ve Kontur Diyagramları.....	47
Şekil 2.4 : Arşimedyen Kopula Türleri (Kendall $\tau = 0.7$).....	52
Şekil 2.5 : (a) Student t kopula ile (b) Clayton - Gumbel Karışım Kopula.....	54
Şekil 3.1 : X,Y ve Z Değişkenlerinin Ağaç (a) ve Asma (b) Modelleriyle Gösterimi.....	66
Şekil 3.2 : Dört Değişkenin Düzenli Asma (a) ve Asma (b) Modelleriyle Gösterimi.....	67
Şekil 3.3 : Beş Değişkenli Bir Düzenli Asma Modelinin Birleşik (a) ve Ayrı (b) Ağaç Yapıları ile Gösterimi.....	69
Şekil 3.4 : Beş Değişkenli Bir C-vine Modelinin Birleşik (a) ve Ayrı (b) Ağaç Yapıları ile Gösterimi.....	70
Şekil 3.5 : C-vine veya D-vine Olmayan Beş Değişkenli Bir R-vine.....	71

Şekil 4.1 : Log-Normal Marjinal Dağılımlara Sahip İki Rassal Değişken İçin $\rho_{\ominus}$ ve $\rho_{\oplus}$ Grafiği.....	90
Şekil 5.1 : Yatırım Fırsatları Kümesi ile Etkin Sınır.....	97
Şekil 5.2 : Farklı Etkin Portföyler Arasından Riskten Kaçınan Bir Yatırımcıya Özgü Optimal Portföyün Belirlenmesi.....	100
Şekil 5.3 : Risksiz Bir Varlığı İçeren Risk-Etkin Portföyler.....	101
Şekil 5.4 : Normal Dağılım.....	105
Şekil 5.5 : RMD Değerinin (a) Getiri Dağılımı (b) Kayıp Dağılımıyla Hesaplanması.....	106
Şekil 5.6 : Portföy Değerinin (a) Pozitif Gamma (b) Negatif Gamma İçin Olasılık Dağılımı.....	110
Şekil 5.7 : Bir Portföyün Getiri Olasılık Dağılımı.....	116
Şekil 5.8 : Beklenen Kayıp (a) Getiri Dağılımı (b) Kayıp Dağılımı.....	116
Şekil 6.1 : Farklı Yöntemler ile Hesaplanan Portföy RMD Değerleri ($\alpha=0.01$)....	129
Şekil 6.2 : Eşit Ağırlıklı Portföyün Bir Gün Sonrası İçin Örneklem Dışı RMD Tahmin Değerleri.....	133
Şekil 7.1 : Hisselerin Fiyat, Getiri ve Mutlak Getiri Değerlerinin Zamanla Değişimi.....	140
Şekil 7.2 : Psödo-Uniform Değişkenlerin Serpilme Diyagramları.....	144
Şekil 7.3 : GMCVaR Toplam Portföy Değerlerinin Zamanla Değişimi.....	150
Şekil 7.4 : GMV Toplam Portföy Değerlerinin Zamanla Değişimi.....	150
Şekil 7.5 : TP Toplam Portföy Değerlerinin Zamanla Değişimi.....	151
Şekil 7.6 : Hisse Getirilerinin Zamanla Değişimi.....	154
Şekil 7.7 : Normal, Student-t ve R-vine Kopulaların Dönemsel Bazlı AIC Değerleri.....	159

Şekil 7.8 : Haziran 2010 – Ocak 2012 Dönemi R-vine Kopula Yapısının Birinci Ağaç Seviyesi (T1).....	159
--	-----



SEMBOLLER LİSTESİ

$C, C(u)$	: Kopula fonksiyonu
$c, c(u)$	: Kopula yoğunluk fonksiyonu
C_{mix}	: Karışım kopula
$\bar{C}(u)$	: Yaşam kopulası
f	: F Dağılım fonksiyonunun yoğunluk fonksiyonu
$\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$	: Marjinal yaşam fonksiyonları
$\bar{H}$	: Ortak yaşam fonksiyonu
I	: Birim aralık
I^n	: $[0, 1]^n$ Birim n küb
λ_L	: Alt kuyruk bağımlılık katsayısı
λ_u	: Üst kuyruk bağımlılık katsayısı
$M(u)$	: Fréchet-Hoeffding Üst Sınırı
$\Pi(u)$	: Bağımsızlık kopulası
ρ	: Pearson Korelasyon Katsayısı
ρ_{θ}	: Korelasyon üst sınırı
ρ_{θ}	: Korelasyon alt sınırı
ρ_s	: Sperman sıra korelasyonu
τ	: Kendall tau
φ	: Arşimedyen kopula üreticisi
$\mathcal{V}$	: R-vine ağaç yapısı
$W(u)$	: Fréchet-Hoeffding Alt Sınırı
$\mathbf{1}$	: Gösterge fonksiyonu
$ \cdot $	: Determinant

KISALTMALAR LİSTESİ

ADF	: Augmented Dickey-Fuller
AR	: Autoregressive / Otoregresif
ARCH	: Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity / Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
ARIMA	: Autoregressive Integrated Moving Average / Otoregresif Entegre Hareketli Ortalama
ARMA	: Autoregressive Moving Average / Otoregresif Hareketli Ortalama
BK	: Beklenen Kayıp
bkz.	: Bakınız
CCC	: Constant Conditional Correlations / Sabit Koşullu Korelasyonlar
CVaR	: Conditional Value at Risk / Koşullu Riske Maruz Değer
C-vine	: Canonical Vine
DCC	: Dynamic Conditional Correlations / Dinamik Koşullu Korelasyonlar
D-vine	: Drawable Vine
GARCH	: Generalized Auto-Regressive Conditional Heteroskedasticity / Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans
GMV	: Global Minimum Varyans
GMCVaR	: Global Minimum CVaR
iid	: Independent and identically distributed / Bağımsız ve özdeşçe dağılan
IFM	: Inference Functions for Margins / Marjinallere İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları
MA	: Moving Average / Hareketli Ortalama
MLE	: Maximum Likelihood Estimation / En Çok Olabilirlik Yöntemi

MPT	: Modern Portföy Teorisi
MST	: Maksimum Spanning Tree
OV	: Ortalama-Varyans
PCC	: Pair-Copula Constructions / İkili Kopula Yapıları
PMLE	: Pseudo Maximum Likelihood Estimation / Psödo En Çok Olabilirlik Yöntemi
RMD	: Riske Maruz Değer
R-vine	: Regular Vine / Düzenli Asma
SPD	: Sermaye Piyasaları Doğrusu
TP	: Tangency Portfolio / Teğet Portföyü
WN	: White Noise / Beyaz Gürültü

GİRİŞ

Son çeyrek yüzyıl içerisinde artan finansal piyasalar arası etkileşim ve yaşanan finansal krizler, akademik araştırmacılar ile birlikte piyasa katılımcılarının, Markowitz (1952)'in portföy seçimi yaklaşımına, özellikle de minimum varyans portföyüne yönelik ilgisini arttırmıştır. Bu ilginin temelinde, finansal çalkantı dönemlerinde finansal varlıkların öngörülenin çok üzerinde gerçekleşen birlikte hareket etme eğilimleri ve volatilité değerleri nedeni ile portföylerin maruz kaldığı risklerin büyüklüğü yer almaktadır.

Çok sayıdaki güncel çalışma, finansal varlık fiyat ve getirilerinin klasik finans teorisinin temelinde yer alan Gauss yaklaşımına uygun davranmadıklarını ve bu yaklaşımı aşabilen istatistiksel modellerin gerekliliğini ortaya koymuştur. Bununla beraber, aşırı (uç ya da ekstrem) risklerin varlığı, Markowitz (1952)'in Ortalama-Varyans yaklaşımında yer alan standart risklerin çeşitlendirme yolu ile azaltılmasına benzer bir şekilde bu risklerin de çeşitlendirme ile azaltılıp azaltılamayacağı sorusunu gündeme getirmiştir. Aşırı risklerin varlığı ve portföy çeşitlendirmesi ile ortadan kaldırılamamaları durumunda, bu risklere maruziyeti en aza indirebilecek portföylerin oluşturulması gerekmektedir. Bu nedenle portföy yönetimi, finansal varlık getirilerine ait dağılımların iyi bir şekilde incelenmesini, varlıkların bireysel riskleri ile toplu ya da birlikte portföyde yer almaları durumunda ortaya çıkan riskin düzeyi ve varlıklar arası bağımlılığın doğru bir şekilde tanımlanmasını gerekli kılmaktadır.

Finansal piyasalarda işlem gören herhangi bir finansal varlığa yönelik fiyat, getiri ve/veya risk tahmininde bulunabilme, iyi bir tahmin yönteminin yani, gerçek piyasa koşulları altında ilgi konusu finansal varlığın davranışını ve bu varlığı etkileyen diğer finansal varlıklar ile etmenlerin birbirleriyle olan ilişkilerini en iyi açıklayabilen yöntemin seçimine bağlıdır.

Campbell ve MacKinlay (1997) ile McNeil vd. (2005) çalışmalarında, “biçimlendirilmiş gerçekler” (“stylized facts”) şeklinde adlandırılan finansal piyasa verilerinin tipik özelliklerini inceleyerek özetlemişlerdir. Gözlemlenen finansal piyasa

verilerinden tek değişkenli serilere ait biçimlendirilmiş gerçekler aşağıdaki gibi özetlenmiştir (Pfaff, 2016: 29):

- Getirilere ait zaman serileri, özellikle günlük getiri serileri, genellikle bağımsız ve özdeşçe dağılma (iid) zelliğine sahip değillerdir.
- Getirilerin, zamana bağlı volatilitate süreçleri sabit değildir.
- Mutlak değeri veya karesi alınmış getiriler arasındaki otokorelasyon oldukça yüksektir.
- Normal dağılım ile karşılaştırıldığında, finansal piyasa getirilerine ait dağılımlar beklenenden basık ve uç olay gözlemlenme olasılığı daha yüksektir.
- Uç olaylar zaman içerisinde birbirine yakın gözlemlenir (volatilitate kümelenmesi).
- Getiri dağılımları sola yatık, yani pozitif getirilere oranla negatif getirilerin gözlemlenme olasılığı daha yüksektir.

Birden fazla finansal varlık ile oluşturulan ya da oluşturulabilecek bir portföyün mevcut olması durumunda ise çok değişkenli getiri serilerine ait özelliklerin tanınması önemlidir. Çok değişkenli serilere ait biçimlendirilmiş gerçekler ise:

- Getiri serilerine ait çapraz korelasyonların mutlak değerleri daha az belirgin iken, en glleri genellikle eşzamanlı korelasyonlardır.
- Bunun tersine, mutlak değeri veya karesi alınmış getirilerin yüksek çapraz korelasyon değerlerine sahip oldukları gözlemlenmiştir.
- Eşzamanlı korelasyonların zaman içerisinde sabit olmadıkları gözlemlenmiştir.
- Bir getiri serisindeki uç gözlemleri, genellikle diğer getiri serisindeki uç gözlemler eşlik etmektedir.

Markowitz (1952)'in ortaya koyduğu Ortalama-Varyans (OV) Modeli'nin temelinde yer alan hisse getirilerinin çoklu normal dağılım göstermesi ve geçmiş getiri verilerine dayalı zamanla değişmeyen volatilitate varsayımı görüldüğü üzere gerçek bulgularla örtüşmemektedir. Birçok ulusal ve uluslararası araştırma, hisse getirilerine ait volatilitenin zamanla değişme ve kümelenme özelliği gösterdiğini tespit etmiştir.

Bununla beraber, birçok modelin temelinde yer alan varlık getirilerinin bağımsız ve özdeşçe dağılıma (iid) özelliğine yönelik varsayımlar da gerçek piyasa bulguları ile uyuşmamaktadır. Özellikle finansal sıkıntı dönemlerinde finansal varlık getirilerinin birlikte hareket etme eğilimlerinin arttığı gözlemlenmiştir. Bununla beraber normal dağılım, getirilerin büyük çoğunluğunun ortalamaya yakın bir şekilde dağılım gösterdiği ve ortalamadan uzakta yer alan kuyruk kısmındaki değerlerin nadir gözlemlendiği varsayımlarına sahiptir. Bu nedenle, özellikle finansal sıkıntı dönemlerinde gözlemlenen uç (aşırı) değerler bu varsayım altında göz ardı edilerek gerçekte alınan risklerin büyüklüğü doğru bir şekilde ortaya konamamaktadır.

Daha da önemlisi, portföy riskinin en aza indirgenmesi amacı ile varlık seçiminin temelinde yer alan ve farklı finansal piyasa koşulları altında birlikte hareket etme eğilimleri zıt ya da mevcut olmayan varlıkların portföye alınması yolu ile sağlanan çeşitlendirme etkisi ancak ve ancak varlık getirileri arasındaki bağımlılığın doğru modellenmesi ve ölçülmesi ile mümkün olacaktır. OV Modelinde varlıklar arası bağımlılığın ölçülmesi amacıyla doğrusal korelasyon istatistiği kullanılmakta olup ölçüt, getirilerin çok değişkenli normal dağılıma sahip olma varsayımını bünyesinde barındıran doğrusal bir bağımlılık ölçüsüdür. Yukarıda da ifade edildiği üzere, finansal varlık getirileri çoğu zaman çoklu normal dağılıma sahip olmamakla birlikte varlıklar arası bağımlılık yapısının doğrusal olmaması durumunda da doğrusal korelasyon katsayısı varlıklar arası bağımlılığın uygun bir ölçüsü olmayacaktır.

Dolayısı ile bu tez çalışması kapsamında, bir portföyü oluşturan tek değişkenli finansal varlık getiri dağılımlarına ait tipik özellikler ile birlikte varlık getirileri arasındaki bağımlılık yapılarının doğrusal olmama ve zamanla değişme özelliklerini de göz önünde bulunduran bir yöntemin, varlık getirilerinin tahmini amacıyla kullanılarak yöntemden elde edilen getirilerin portföy risk tahminleri ile optimal portföy dağılımlarının belirlenmesi alanlarındaki performansının tarihsel verilere dayalı klasik yöntemlerle karşılaştırılması amaçlanmıştır.

Bu nedenle, BİST 30 Endeksi'ne üye hisse senetlerinden bir portföy oluşturulması ve oluşturulan bu portföyde yer alan hisselerin günlük getiri serileri arasındaki bağımlılık yapılarının doğrusal korelasyon katsayısının daha iyi bir alternatifi olarak

geliştirilen “kopula” (Sklar, 1959) fonksiyonlarının kullanılması yolu ile özellikle getirilerin uç değerler aldığı dönemlerde (getiri dağılımlarının sağ ya da sol kuyruk bölgelerinde yer alan değerleri ifade eden getirilerde büyük oranlı yükseliş ya da düşüşler gözlemlendiğinde) hisselerin artan birlikte hareket etme eğilimlerinin de modellenebilmesi amaçlanmıştır.

Mikosch (2006)’un da belirttiği gibi normal olmayan bir dünyada normal dağılımın yerini alabilecek basit bir alternatif yoktur. Özellikle, portföy seçimi için kullanılabilecek farklı marjinal dağılımlara (farklı kuyruk davranışlarını da kapsayan) ve sadece kovaryanslara dayanmayan bağımlılık yapılarına sahip çok değişkenli modellere ihtiyaç vardır. İyi bilinen çok değişkenli dağılımların çoğu, farklı kısımlardaki farklı kuyruk davranışına izin verebilecek derecede esnek değildir. Kopula fonksiyonlarının, esnek marjinallere sahip her türlü dağılımı üretebilmesi nedeni ile bahsedilen zorlukların üstesinden gelme amacı ile kullanılabilecek doğru araçlar olduğu söylenebilir. Aslında kopulalar, rassal değişkenlere ait bireysel marjinal dağılımların, değişkenler arası bağımlılık yapılarının modellenmesinde kullanılmaması ya da ayrıştırılması yolu ile değişkenlerin bağımlılık yapılarının daha açık bir şekilde modellenmesini sağlayan bağımlılık fonksiyonlarıdır.

Hisse senedi getirilerinin bağımlılık yapılarının yanında, getirilerin zaman içinde değişen ve kümelenen volatilité gösterme özelliklerini de göz önünde bulunduran GARCH modeli ile birlikte oluşturulan Kopula-GARCH modeli getirilerin bir sonraki dönem değerlerinin tahmini amacıyla kullanılacaktır. Kopula-GARCH modeli ile elde edilen getiri serileri, önceki paragraflarda açıklanan ve seriler arası çok değişkenli bağımlılığın mevcut doğrusal yöntemlerle modellenememesi ile ilişkili maruz kalınan portföy risklerinin tahmini ve minimum riskli portföyler ile Teğet portföyünün belirlenmesi gibi farklı alanlarda kullanılarak modelin performansı tarihsel verilere dayalı klasik yöntemlerle karşılaştırılacaktır.

Bu çalışmanın izleyen ilk beş bölümünde, finans alanında zaman serilerinin modellenmesi, kopula fonksiyonlarının tanımı, özellikleri, türleri ve tahmin yöntemleri gibi araştırma konusunun temel alt yapısını oluşturan teorik bölümlere yer verilmiştir. Altıncı bölümde ise kopula-GARCH modelinin tanımı ile modelin finans

alanındaki uygulamalarına yönelik literatür araştırması yer almaktadır. Yedinci bölümde, kopula-GARCH modelinden hisse getirilerinin elde edilmesini takiben modelin, ilki optimal portföy dağılımı ikincisi ise risk yönetimi olmak üzere BİST30 üzerine iki temel alandaki uygulamasına yer verilmiştir. Tezin sonuncu bölümünde, araştırma bulguları özetlenerek tez konusu ile ilgili genel bir değerlendirmeye yer verilmiştir.



BİRİNCİ BÖLÜM

FİNANS ALANINDA ZAMAN SERİLERİNİN MODELLENMESİ

1.1 Stokastik Süreçler

“Stokastik” kelimesinin kökeni, hedeflemek, tahmin etmek anlamına gelen Yunanca *stokhazesthai* sözcüğüne dayanmaktadır (Dobrow, 2016: 1). Sonuçların veya durumların tam olarak öngörülebildiği deterministik süreçlerin aksine stokastik süreçler öngörülemez ya da rassal bir yapıya sahiptirler. Ampirik gözlemlerdeki rassallık bilinmeyen ya da eksik bilgi ile yakından ilişkili olup böyle durumlarda olasılık teorisinden yararlanılmaktadır. Bu nedenle, stokastik süreçleri içeren istatistiksel tahmin modelleri kesin sonuçlar yerine olası farklı sonuçların görülme olasılıklarını ortaya koyarlar. Bir diğer ifade ile stokastik süreçlere ait dinamikler rassal değişkenler ve olasılık dağılımları ile tanımlanırlar. Stokastik süreçlere ait rassallığın modellenmesi amacıyla Poisson, binom ve normal dağılımların kullanımı geleneksel yöntemler arasında yer almaktadır (Lindsey, 2004: 6).

Bir X rassal değişkeni, $\mathbf{T}: X = X(t), t \in \mathbf{T}$ setinde değerler aldığı varsayılan bir t değişkenine bağlı olmak üzere, $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ rassal değişkenler ailesi “parametre uzayı” $\mathbf{T}$ ve “durum uzayı” $\mathbf{Z}$ olan bir stokastik süreç olarak adlandırılmaktadır. Stokastik sürecin bağlı olduğu t değişkeni zaman ise, $X(t)$: t zamanındaki rassal bir X değişkenini, $\mathbf{T}$: tüm gözlemlere ait zaman aralığını ve $\mathbf{Z}: X(t)$ rassal değişkeninin $t \in \mathbf{T}$ için alabileceği tüm değerlerin setini ifade etmektedirler.

$\mathbf{T}$ 'nin sonlu veya sayılabilir sonsuz bir set olması durumunda $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ süreci, “kesikli zamanda bir stokastik süreç” veya “kesik-zamanlı stokastik süreç” olarak adlandırılmakla birlikte sürecin gösterimi $\{X_1, X_2, \dots\}$ rassal değişkenlerin bir dizisi şeklinde yapılabilir. $\mathbf{T}$ 'nin bir aralık olması durumunda ise $X(t)$, “sürekli zamanda bir stokastik süreç” veya bir “sürekli-zamanlı stokastik süreçtir”.

Bununla birlikte, bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik sürecine ait durum uzayı $\mathbf{Z}$ 'nin sonlu veya sayılabilir sonsuz bir setten oluşması durumunda sürecin kesikli olduğu

söylenmektedir. $\mathbf{Z}$ 'nin bir aralık olması durumunda ise sürecin sürekli olduğu söylenmektedir. Bir diğer ifade ile, zaman içinde sıralanan rassal X değişkenlerinden oluşan bir süreç değişkenin kesikli olması durumunda X_t şeklinde gösterimi yapılan kesikli bir stokastik süreçtir. X değişkeni sürekli ise süreç $X(t)$ şeklinde gösterimi yapılan sürekli bir süreçtir. Dolayısı ile bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ süreci, kesikli zamanda kesikli bir stokastik süreç olabileceği gibi sürekli zamanda kesikli bir stokastik süreç de olabilir (Beichelt, 2016: 224).

1.1.1 Tanım

$F_t(x)$, şu ana dek bahsedilen $X(t)$ sürecinin dağılım fonksiyonu olsun:

$$F_t(x) = P(X(t) \leq x), t \in \mathbf{T}. \quad (1.1)$$

$\{F_t(x), t \in \mathbf{T}\}$ tek boyutlu dağılım fonksiyonu aileleri, aynı zamanda $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ 'nin tek boyutlu olasılık dağılımlarıdır. Ancak, istatistiksel bağımlılık açısından tek boyutlu dağılım fonksiyonu aileleri stokastik bir süreci tam olarak tanımlayamazlar.

$\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik sürecinin tam olarak tanımlanabilmesi için; her bir $n = 1, 2, \dots$, pozitif tam değeri için tüm n 'li $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $t_i \in \mathbf{T}$ setinin ve tüm $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $x_i \in \mathbf{Z}$ vektörleri için $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ rassal vektörüne ait ortak dağılım fonksiyonunun bilinmesi gereklidir (Beichelt, 2016: 225):

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n) \quad (1.2)$$

Eşitlik 1.2 ile stokastik sürecin olasılık dağılımı, ortak dağılım fonksiyonlarının seti ile bütünüyle tanımlanmıştır.

1.1.2 Stokastik Süreçlerin Sınıflandırılması

Stokastik süreçler, sürecin zaman içindeki bağımlılığı, ayrık zaman aralıklarındaki gelişimlerinin istatistiksel bağımlılık özellikleri ve bir sürecin geçmiş veya anlık durumunun sürecin gelecek gelişimine etkisi dikkate alınarak sınıflandırılırlar. Bir diğer ifade ile stokastik süreçler ve olasılık yapıları, olasılık varsayımlarında yer alan

a) bağımlılık, b) dağılım ve c) homojenlik temel kategorileri ile ilişkilendirilerek karşılaştırılır ve/veya sınıflandırılırlar.

Güçlü Durağan Stokastik Süreçler: Bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik sürecinin $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ rassal dağılım vektörüne ait ortak dağılım fonksiyonunun; tüm $n = 1, 2, \dots$, pozitif değerleri ve herhangi bir τ değeri için $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}, t_i \in \mathbf{T}$ ile $t_i + \tau \in \mathbf{T}; i = 1, 2, \dots, n$ setleri ve tüm $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ vektörleri için Eşitlik 1.3'te yer alan özelliği sağlaması durumunda sürecin “güçlü (kesin) durağan” olduğu söylenir.

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.3)$$

Eşitlik 1.3'te güçlü durağan bir stokastik sürece ait olasılık dağılımının, mutlak zaman atlamaları karşısında değişmez olduğu ve t değerinden (zamandan) bağımsız olduğu ifade edilmektedir, yani $F_t(x) = F(x), \forall t \in \mathbf{T}$ ve $x \in \mathbf{Z}$ 'dir. Bir diğer anlatımla, herhangi bir t ve τ değeri için sürece ait ortak dağılım fonksiyonu da aynı kalmaktadır.

İkinci-Derece Stokastik Süreçler: Bir $X(t)$ stokastik süreci, $\forall t \in \mathbf{T}$ için $E(X^2(t)) < \infty$ şartını sağlaması durumunda bir “ikinci-derece süreç” olduğu söylenir. Bir diğer ifade ile $X(t)$ sürecinin ikinci momentleri olan kovaryans ve varyans fonksiyonları mevcut olmalıdır.

Zayıf Durağan Stokastik Süreçler: Bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik sürecinin aşağıda verilen özellikleri taşıması ve ikinci-derece bir süreç olması durumunda ise sürecin “zayıf durağan” olduğu söylenmektedir.

1. $E(X(t)) = \mu, \quad \forall t \in \mathbf{T}$
2. $Var(X(t)) = \sigma^2, \quad \forall t \in \mathbf{T}$
3. $Cov(X(t), X(s)) = Cov(\tau), \quad \tau = t - s, \quad \forall s \in \mathbf{T}$

İkinci-derece stokastik süreç olmayan güçlü durağan süreçlerin mevcut olması nedeni ile güçlü durağan bir stokastik sürecin aynı zamanda zayıf durağan bir süreç olma gerekliliği yoktur. Ancak, ikinci-derece bir süreç güçlü durağan ise bu süreç aynı

zamanda bir zayıf durağan stokastik süreçtir. Zayıf durağan süreçler, “geniş anlamda durağan”, “kovaryans durağan” veya “ikinci-derece durağan” süreçler olarak da adlandırılmaktadırlar (Beichelt, 2016: 230-232).

Homojen Artan Stokastik Süreçler: Bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik sürecinin, rassal ve sabit $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ için $X(t_2 + \tau) - X(t_1 + \tau)$ farkının $t_1 + \tau \in \mathbf{T}$ ve $t_2 + \tau \in \mathbf{T}$ olmak üzere tüm τ değerleri için aynı olasılık dağılımına sahip olması durumunda “homojen” veya “durağan artan” ya da “durağan farklı” bir süreç olduğu söylenmektedir.

Bir diğer ifade ile, herhangi bir sabit $\tau: t, t + \tau \in \mathbf{T}$ değeri için $X(t_2 + \tau) - X(t_1 + \tau)$ farkına ait olasılık dağılımının t değerine bağlı olmaması durumunda, $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik süreci homojen artışlara sahiptir. Dolayısıyla, uzunlukları aynı herhangi bir aralıkta homojen farklara sahip bir stokastik sürecin zamanla gelişimi aynı olasılık dağılımı ile yönetilir. Ancak, homojen veya durağan artanlı stokastik bir sürecin aynı zamanda durağan bir süreç olma zorunluluğu yoktur.

Bağımsız Artan Stokastik Süreçler: Bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik sürecinin, her bir $n=2,3,\dots$ değeri ve $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in \mathbf{T}$ ile tüm $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ n setleri için $X(t_2) - X(t_1)$, $X(t_3) - X(t_2)$, $\dots$, $X(t_n) - X(t_{n-1})$ farklarının bağımsız rassal değişkenler olması durumunda sürecin “bağımsız artan” olduğu söylenir (Beichelt, 2016: 233).

Bir stokastik sürecin bağımsız artan bir süreç olması durumunda, herhangi bir I aralığındaki süreç gelişiminin I aralığı ile kesişmeyen (ayrık) diğer aralıklardaki sürecin gelişimleri üzerinde bir etkisinin olmayacağı anlamına gelir. Bunun anlamı, bağımsız artan bir sürece sahip olan bir hisse fiyatının n yılında keskin bir artış göstermiş olması hisse fiyatının $n+1$ yılında alacağı değerin öngörülebilmesinde değersiz bir bilgi olduğudur.

Gauss Stokastik Süreçler: Bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik süreci, her bir $t_1 < t_2 < \dots < t_n$; $n = 1,2,\dots$ ve tüm $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $t_i \in \mathbf{T}$ olan n setleri için $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$ rassal vektörlerinin ortak normal (Gauss) dağılıma sahip olmaları durumunda süreç bir “Gauss stokastik süreçtir”.

Markov Stokastik Süreçler: Bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik süreci, $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ ile tüm $\{t_1, t_2, \dots, t_{n+1}\}$, $t_i \in \mathbf{T}$ sağlayan $n+1$ setleri ve herhangi bir $A_i \subseteq \mathbf{Z}$; $i = 1, 2, \dots, n+1$ için Eşitlik 1.4’ü sağlaması durumunda “Markov özelliğine” sahiptir (Beichelt, 2016).

$$\begin{aligned} P(X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_n) \in A_n, X(t_{n-1}) \in A_{n-1}, \dots, X(t_1) \in A_1) \\ = P(X(t_{n+1}) \in A_{n+1} | X(t_n) \in A_n) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Eşitlik 1.4’te Markov özelliğine sahip bir sürece ait durumun ya da gelişimin, sürecin sadece hemen bir önceki durumuna bağlı olduğu ifade edilmektedir. Bir diğer anlatımla, sürecin gelecek gelişimi (t_{n+1} : gelecekteki bir zaman noktası ise), sürecin geçmişteki gelişimine bağlı olmayıp ($t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$: geçmişteki zaman noktaları ise) sadece şu andaki durumuna bağlıdır.

Markov özelliğine sahip stokastik süreçler “Markov süreçleri” olarak adlandırılmaktadırlar. Markov süreçlerinin dağılımları ile parametre uzaylarının her ikisi de kesikli veya sürekli olabilme özelliklerine sahiptirler. Eşitlik 1.4’te sırası bir olan bir Markov süreci verilmiştir. Daha genelinde ise, sürece ait bağımlılığın zamanda kısa ve sabit bir M uzaklığına yayılması durumunda süreç “ M sıralı Markov süreci” olarak adlandırılmakta olup $X(t)$ ve $X(t - k)$ rassal değişkenleri $k > M$ için koşullu bağımsız olma özelliğine sahiptirler (Lindsey, 2004: 11). Bununla birlikte, parametre uzayı $\mathbf{T} = [0, \infty)$ olan ve bağımsız artan $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik süreçleri her zaman Markov özelliğine sahiptirler (Beichelt, 2016). Ayrıca, herhangi bir $\{X(t), t \in \mathbf{T}\}$ stokastik süreci, parametre uzayı ($\mathbf{T}$) ve durum uzayının ($\mathbf{Z}$) kesikli olup olmamasına göre Tablo 1.1’de verildiği şekilde sınıflandırılabilmektedir.

Tablo 1.1: Stokastik Süreç Türleri

$\mathbf{T}$	$\mathbf{Z}$	Stokastik Süreç
Kesikli	Kesikli	Basit Rassal Yürüyüş
Kesikli	Sürekli	Normal Süreç
Sürekli	Kesikli	Poisson Süreci
Sürekli	Sürekli	Brownian Motion Süreci

Kaynak: Spanos (2003: 408).

1.2 Zaman Serileri

Zaman serileri, zaman içinde sıralanan tesadüfi (rassal) değişkenlerin birikimi şeklinde tanımlanan birer stokastik süreci ifade ederler. Zaman serileri, sürekli veya kesikli zamanda ve düzenli veya düzensiz gözlemlenen rassal değişkenlerden oluşabilirler. Bir diğer anlatımla bir zaman serisi, zamana bağlı bir stokastik sürece ait bir gerçekleşmeyi (gidim izini, örneklem yolunu) ortaya koyar. Bununla birlikte, bir stokastik süreç, bir zaman serisinin geleneksel istatistikteki ana kütlesi ve bir zaman serisi (gerçekleşme) ise bir stokastik sürecin örnekleme olarak görülebilirler (Beichelt, 2016: 237; Ruppert ve Matteson, 2015: 307).

Zaman serileri, tam olarak öngörülebilen deterministik özellikler (sabit katsayı, trend ve mevsimsellik gibi) ile belirli bir olasılık dağılımına bağlı olarak öngörülebilen stokastik özelliklere sahiptirler. Zaman serileri analizinin temel amacı trend, mevsimsellik ve rassal etkiler gibi serilere ait özelliklerin belirlenmesi ve geleceğe yönelik gelişimlerinin öngörülebilmesidir.

Zaman serilerine ait özelliklerin belirlenmesi amacıyla uygulanan geleneksel yöntemlerden birisi “zaman serisi ayrışım yöntemidir”. Bu yöntem ile bir zaman serisinin, trend (T), konjonktürel hareketler (C), mevsimsel hareketler (S) ve düzensiz hareketler (I) olmak üzere dört bileşenin (faktörün) etkilerini taşıdığı düşünülür ve zaman serisi toplamsal ya da çarpımsal modeller kullanılarak bu etkilerin birer fonksiyonu şeklinde yazılır (Sevüktekin ve Çınar, 2017: 49).

$$X_t = f(T_t, C_t, S_t, I_t) \quad (1.5)$$

Eşitlik 1.5'te yer alan düzensiz veya rassal hareketlerin (I) yerine stokastik değişken ϵ tanımlanır ve bir X_t serisinin yukarıda bahsedilen dört faktöre ait etkileri taşıması durumunda çarpımsal ve toplamsal modeller sırası ile Eşitlik 1.6 ve 1.7'de verildiği şekilde yazılabilirler.

$$X_t = T_t C_t S_t \epsilon_t \quad (1.6)$$

$$X_t = T_t + C_t + S_t + \epsilon_t \quad (1.7)$$

Bir zaman serisindeki trend (T) bileşeni, seri değişkenlerinin gözlemlendiği zaman aralığı içinde serinin zamana bağlı ortalama gelişimi ya da eğilimini ortaya koyar. Zaman serilerindeki uzun dönemli (2 ile 10 yıl arası ya da daha uzun) belirli bir düzende tekrarlayan değişimler ya da dalgalanmalar ise serilerin konjonktürel hareketler (C) bileşenini tanımlar. Mevsimsel hareketler (S) bileşeni, konjonktürel hareketlere benzemekle birlikte serilerdeki tekrarlayan değişimler bir yıl içerisinde tamamlanır ve yıl bazında tekrarlanır. Dördüncü bileşen düzensiz hareketler (ϵ), serilerde tanımlanabilir bir seyri olmayan, yani daha önce bahsedilen ilk üç bileşenden hiçbirisi (T, C ve S) tarafından tanımlanamayan rassal hareketleri ifade eder.

Şu ana dek açıklanan geleneksel zaman serileri analizi, trend, konjonktürel hareketler ve mevsimsel hareketler sistematik bileşenlerinin stokastik hareketlerden etkilenmediğini varsaymakta ve bu nedenle de bu üç sistematik değişkenin zamana bağlı birer deterministik fonksiyon şeklinde yazılabileceğini ileri sürmektedir. Stokastik ya da rassal etkilerin temsili sadece kalıntılar ya da hata terimi (ϵ) ile sınırlandırılmış ve terimin herhangi bir sistematik hareket içermediği varsayılmıştır. 1970 yılı ve sonrasında ise geleneksel zaman serileri analizinin tamamen tanımsal olan yaklaşımı terkedilmiş, bunun yerine olasılık teorisi ve matematiksel istatistiğin yöntem ve sonuçları kullanılmaya başlanmıştır. Geleneksel yaklaşımın aksine modern zaman serileri analizi, bir zaman serisinin farklı bileşenlerden oluşma fikri yerine serilerin tüm süreci için genel bir stokastik modelin mevcut olduğunu yani seri bileşenlerinin tamamında stokastik etkilerin olduğunu varsaymaktadır. Evgenij Evgenievich Slutsky ve George Udny Yule zaman serilerinin modellenmesinde hareketli ortalama ve otoregresif süreç modellerini geliştirmişler ancak bunların pratikteki yaygın kullanımı Box ve Jenkins (1970)'in bu modellerin ampirik uygulamaları için çeşitli stokastik zaman serisi modelleme yöntemleri geliştirmeleri ile ortaya çıkmıştır (Kirchgässner vd., 2013: 3-4).

Son zamanlarda, özellikle de mevsimsel değişimlerin modellenebilmesi amacıyla zaman serilerinin bileşenlerine ayrılma fikrinin devamı görülse dahi bu yaklaşımda, geleneksel yaklaşıma nazaran, zaman serilerine ait bileşenlerin tümünün basit stokastik süreçler ile modellenebileceği varsayılmaktadır.

Zaman serilerinin iyi bir şekilde tanınabilmesi ve uygun tahmin modellerinin belirlenebilmesi için serilere özgü belirli özelliklerin incelenmesi gereklidir. Zaman serilerinin yapısı ve dolayısı ile modellenmesi, serilerin doğrusallık (doğrusal veya doğrusal olmayan süreçler), durağanlık ve bağımlılık (güçlü veya zayıf hafızalı süreçler) gibi özelliklerine göre farklılıklar göstermekte olup izleyen bölümlerde bu ve benzeri bazı temel kavramların açıklamalarına yer verilmiştir.

1.2.1 Doğrusal Süreçler

Bir X_t zaman serisinin, aşağıda gösterimi verildiği şekilde geçmiş bilgilerin doğrusal birer kombinasyonu olarak yazılabilmesi durumunda doğrusal bir zaman serisi olduğu söylenmektedir (Tsay, 2013: 50).

$$X_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \epsilon_{t-i} \quad (1.8)$$

Eşitlik 1.8'in sağında yer alan μ serinin ortalamasını ifade etmekle birlikte $\psi_0 = 1$ ve $\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty$ 'dur. X_t serisinin dinamik yapısını yöneten ψ_i katsayıları, doğrusal zaman serileri literatüründe X_t 'nin " ψ -ağırlıkları" olarak adlandırılmaktadırlar. Eşitlik 1.8'de yer alan $\{\epsilon_t\}$ dizisi, bağımsız ve özdeşçe dağılan (iid) sıfır ortalamalı rassal değişkenlerden oluşan bir beyaz gürültü sürecidir. ϵ_t terimi, zaman serisine ait t anındaki yeni bilgiyi göstermekle birlikte, çoğunlukla t anındaki yenilik (inovasyon) ya da şok olarak adlandırılmaktadır.

X_t serisinin zayıf durağan olması durumunda, $\{\epsilon_t\}$ dizisinin özellikleri göz önünde bulundurularak seri ortalama ve varyansı izleyen şekilde elde edilebilir:

$$E(X_t) = \mu, \quad Var(X_t) = \sigma_{\epsilon}^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 \quad (1.9)$$

Eşitlik 1.9'da yer alan σ_{ϵ}^2 terimi, beyaz gürültü sürecinin (ϵ_t) varyansını ifade etmekte olup, $Var(X_t) < \infty$ kısıtına sahiptir. Dolayısıyla, i sonsuza yaklaştıkça ($i \rightarrow \infty$), $\{\psi_i^2\}$ dizisi de sıfıra yakınsayan bir dizi ($\psi_i^2 \rightarrow 0$) olma özelliğini taşımaktadır. Bu özellik, durağan zaman serilerindeki güncel bilgilere nazaran, artan i değeri ile azalan bilgi/şok etkisini (ϵ_{t-i}) ifade eder (Tsay, 2013: 50).

1.2.2 Durağanlık

Bir stokastik sürece ait gerçekleşme ya da örneklem olarak tanımlanan zaman serilerinin durağan olma tür (güçlü veya zayıf durağan) ve koşulları, stokastik süreçlerin sınıflandırılması esnasında tanımlanmıştır.

Bununla birlikte, zaman serileri güçlü ve/veya zayıf durağan stokastik süreçler olarak sınıflandırılacakları gibi, serilerindeki durağanlık türleri de farklı şekillerde görülebilmektedir. Seri gözlem değerlerine ait ortalamanın zaman içinde değişmemesi durumunda “ortalama durağan” serilerden bahsedilirken, gözlem değerlerine ait varyansın zaman içinde değişmemesi durumunda ise “varyans durağan” serilerden bahsedilir.

Deterministik bir trende sahip olmayan ya da deterministik bir trendden arındırılmış seriler ise “trend durağan” olarak adlandırılır. Bunun yanında, deterministik bir trende sahip olmayan durağan-dışı bir seri stokastik trend sahibi olabileceği gibi, bu serinin fark alma işlemi ile stokastik trend yapısından arındırılması ile elde edilen seri “fark durağan” olarak adlandırılmaktadır (Sevüktekin ve Çınar, 2017: 242).

Otokorelasyon (ACF) ve Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonları (PACF)

Tek değişkenli bir zaman serisindeki gözlem değerleri ile bu gözlemlerin bir veya birden fazla gecikmeli değerleri arasındaki birlikte değişimin ya da birlikte hareketin ölçüsü otokorelasyon şeklinde adlandırılır.

Seri dönemsel gözlem değerleri arasında hesaplanan otokorelasyon katsayılarının; herhangi bir güven aralığı için (genellikle %95) belirlenen istatistiksel anlamlılık sınırlarının dışına taşmaları durumunda otokorelasyon katsayılarının sıfıra eşit olduğu H_0 hipotezi reddedilir ($H_0 : \rho_k = 0$, $k =$ seçilen gecikme sayısı) (Sevüktekin ve Çınar, 2017: 270). Hesaplanan otokorelasyon katsayılarının sıfıra yakınsaması serinin temiz dizi veya durağan olduğunu ifade eder.

Ardışık olmayan dönemlerdeki seri gözlem değerleri (örneğin: X_t ile X_{t-k} , $t = 1, 2, \dots, k - 1$) arasındaki otokorelasyonun hesaplanmasında ara değerlerin (örneğin:

X_{t-1}) etkisinin sabit kabul edilmesi ya da dışlanması yolu ile kısmi otokorelasyon katsayıları elde edilir. Gözlem değerlerinin ardışık olması durumunda otokorelasyon katsayısı ile kısmi otokorelasyon katsayısı birbirine eşit olur.

Zaman serilerine ait tüm ilave gecikmeler k için otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon katsayılarının hesaplanması durumunda, serilerin otokorelasyon fonksiyonları (ACF(k)) ile kısmi otokorelasyon fonksiyonları (PACF(k)) elde edilir (Sevüktekin ve Çınar, 2017: 273).

1.2.3 Beyaz Gürültü Süreci

Beyaz gürültü süreci, stokastik süreçlerin sınıflandırılması bölümünde tanımlanan ikinci-derece durağan stokastik süreçlerin basit bir örneği olup çok daha karmaşık süreçlerin oluşturulabilmesi açısından son derece önemlidir.

Bir X_t zaman serisi, sabit ortalama ve varyansa sahip bağımsız ve özdeşçe dağılan (iid) rassal $\{X_t\}$ değişken dizisinden oluşuyor ise bu seri “beyaz gürültü” ya da “temiz dizi” (WN) olarak adlandırılmaktadır. Bu X_t serisinin, sıfır ortalama ile σ^2 gibi sabit bir varyansa sahip ve normal dağılan bir süreç olması durumunda ise seri “Gaussian beyaz gürültü süreci” şeklinde adlandırılmaktadır (Tsay, 2013: 50).

Zayıf Beyaz Gürültü: Bir X_t süreci, pozitif ve sabit bir σ^2 değeri için aşağıda verilen özellikleri sağlaması durumunda “zayıf beyaz gürültü” olarak adlandırılmaktadır (Francq ve Zakoian, 2010: 2).

1. $E(X_t) = 0$,
2. $Var(X_t) = \sigma^2$,
3. $Cov(X_t, X_{t+h}) = 0, h \neq 0$ için.

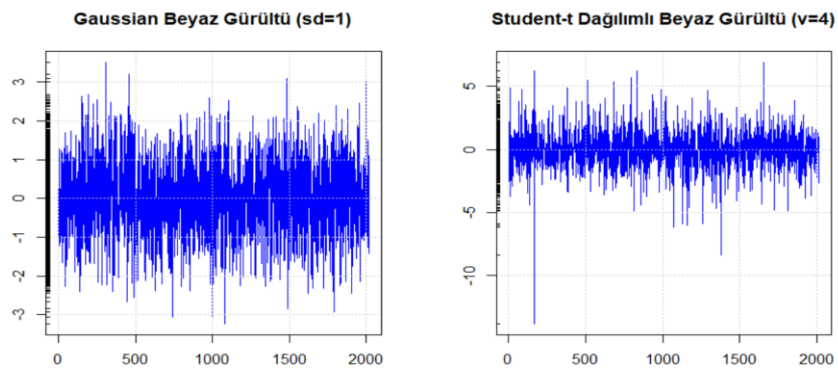
Güçlü Beyaz Gürültü: Zayıf beyaz gürültünün tanımında seri değişkenlerinin bağımsız dağılımına yönelik bir varsayım bulunmamaktadır. Yukarı yer alan ve seri değişkenlerinin farklı tarihlerdeki değerleri arasında korelasyon olmamasını gerektiren üçüncü maddenin aşağıda verildiği şekilde değiştirilmesi durumunda X_t süreci “güçlü beyaz gürültü” olarak adlandırılmaktadır.

3. X_t ve X_{t+h} değişkenleri bağımsız ve özdeşçe dağılırlar.

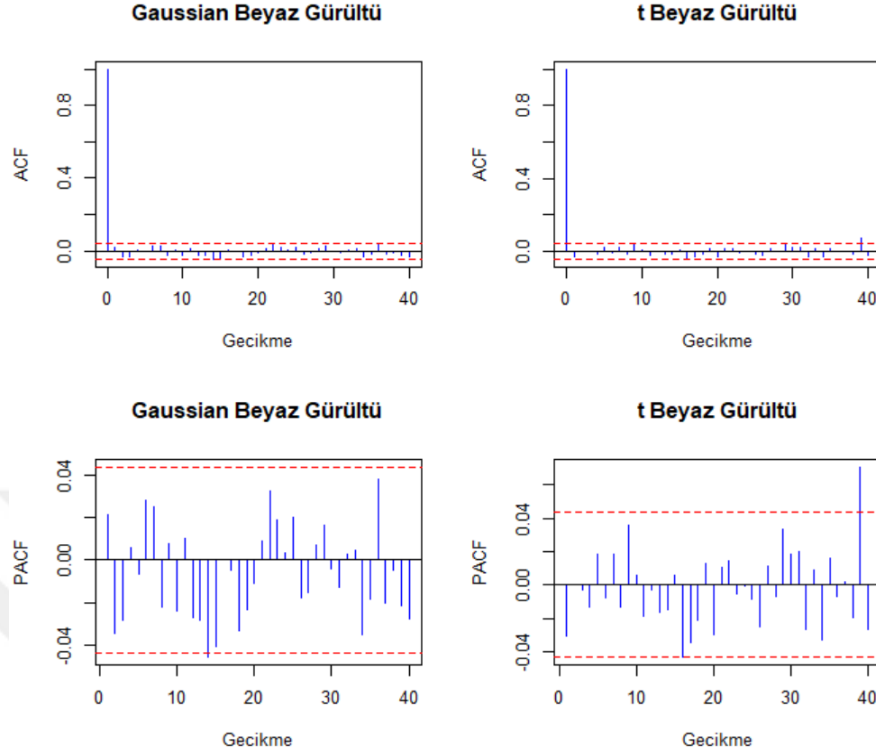
Bir beyaz gürültü sürecine ait ortalama ($E(X_t)$ ya da μ) sabit bir değer olma koşulu ile sıfırdan farklı değerler alabileceği gibi ortalamanın sıfıra eşit olması ($\mu=0$) durumunda seri sıfır ortalamalı beyaz gürültü süreci olarak da adlandırılmaktadır (Brooks, 2008: 209).

Bir beyaz gürültü serisinde yer alan gözlemler arası korelasyonlar sıfıra eşit olduğundan tüm seri otokorelasyon fonksiyonunun değerleri de (ACF) sıfıra eşit olacaktır (sıfırcı gecikme haricinde). Dolayısı ile serinin ortalama ve otokovaryans fonksiyonu zamana bağlı olmayıp seri, bir belleğe sahip olmayan “kovaryans-durağan” bir süreç olarak tanımlanır (Sevüktekin ve Çınar, 2017: 67).

Bir beyaz gürültü serisinin ortalamasından bahsedilmemesi ya da ortalamaya tekabül eden sabit bir değer verilmemesi durumunda ise ortalamanın sıfıra eşit olduğu farz edilir. Aynı zamanda X_t serisi özel bir marjinal dağılıma sahip bir süreç ise bu da ayrıca belirtilebilir. Örneğin; X_t serisi bağımsız ve özdeşçe (iid) ν serbestlik dereceli Student-t dağılımıyla dağılan $X_1, X_2, \dots, X_t$ rassal değişkenlerinden oluşan bir süreç ise “ t_ν beyaz gürültü süreci” şeklinde adlandırılmaktadır (Ruppert ve Matteson, 2015: 311). Şekil 1.1’de Gaussian beyaz gürültü ($n = 2015, \mu = 0$ ve $sd = 1$) ile t_4 beyaz gürültü ($n = 2015, \nu = 4$) süreçlerinin simülasyonları gösterilmiştir. Şekil 1.2’de ise beyaz gürültü simülasyonlarının sırası ile otokorelasyon (ACF) ve kısmi otokorelasyon (PACF) fonksiyonlarına yer verilmiştir.



Şekil 1.1: Gaussian ve t_4 Beyaz Gürültü (WN) Süreçlerinin Simülasyonları



Şekil 1.2: Gaussian ve t_4 Beyaz Gürültü Süreç Simülasyonlarının ACF ve PACF Korelogramları

Zaman serileri analizindeki temel aşamalardan biri beyaz gürültü testidir. Bu test ile bir serinin beyaz gürültü süreci veya daha karmaşık bir ortalama ve/veya bağımlılık yapısına sahip bir süreç olup olmadığı araştırılır. Ljung ve Box (1978) testi bu amaçla yaygın bir şekilde kullanılan testlerden biri olup seri gözlem değerleri ile gecikmeli değerleri arasındaki korelasyon varlığını araştırır.

Beyaz gürültü testinde, serilerin normal dağıldığı varsayılmadıkça, genellikle seri gözlem değerlerinin bağımsızlığı incelenmez. Bu kapsamda beyaz gürültü serisi, seri gözlem değerleri ile gecikmeli değerleri arasında korelasyonun var olmaması ile tanımlanır. Bu tanım gereği ise, bir finansal zaman serisinin gözlemleri arasında korelasyon bulunmaz ancak volatilité değerleri veya gözlem kareleri arasında korelasyon mevcut olsa dahi bu seri beyaz gürültü serisi olarak tanımlanır ancak bu güçlü bir beyaz gürültü serisi değildir (Palma, 2016: 32).

1.2.4 Güçlü ve Zayıf Bağımlılık

$X_1, X_2, \dots, X_n$ örneklem yoluna sahip durağan bir $\{X_t\}$ stokastik sürecinin, örneklem ortalaması $\hat{\mu}_n = \bar{X}_n$ ve varyansı Eşitlik 1.10’da verildiği gibidir (Palma, 2016: 50).

$$\begin{aligned} Var(\hat{\mu}_n) &= Var\left(\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n Cov(X_t, X_s) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \gamma(t-s) = \frac{1}{n^2} \sum_{h=1-n}^{n-1} (n-|h|) \gamma(h) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Eşitlik 1.10’dan varyans üst limitinin $Var(\hat{\mu}_n) \leq \frac{2}{n} \sum_{h=0}^{n-1} |\gamma(h)|$ olduğu ve dolayısı ile örneklem büyüklüğü arttıkça $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma(n) = 0$ sağlanması durumunda $Var(\hat{\mu}_n)$ sıfıra yakınsayacağı görülmektedir, yani $n \rightarrow \infty$:

$$Var(\hat{\mu}_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{h=0}^{n-1} |\gamma(h)| = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma(n)| \quad (1.11)$$

Eşitlik 1.11’de yer alan $\gamma(n)$ ’nin sıfıra yakınsama hızı stokastik sürecin bağımlılık türünü belirleyecektir. Bir diğer ifadeyle $\gamma(n)$ ’nin, $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$ eşitsizliğini sağlayacak düzeyde bir hızla sıfıra yakınsaması durumunda X_t süreci “kısa-hafızalı” veya “zayıf-bağımlı” bir süreç olarak adlandırılacaktır. Bunun aksine, $\gamma(n) \rightarrow 0$ hızının $\sum_{h=0}^{\infty} |\gamma(h)| = \infty$ eşitliğini sağlayacak kadar yavaş olması durumunda, X_t süreci “uzun-hafızalı” veya “güçlü-bağımlı” bir süreç olarak adlandırılacaktır.

1.3 Tek Değişkenli Doğrusal Zaman Serisi Modelleri

Bu tez araştırması kapsamında, tek değişkenli getiri serilerinin koşullu ortalamalarının modellenmesi amacıyla tek değişkenli zaman serisi modelleri uygulanmıştır. Bunlardan, kısa-hafızalı doğrusal durağan süreçler kapsamındaki Hareketli Ortalama ve/veya Otoregresif süreçler serilere özgü koşullu ortalamanın modellenmesi amacıyla kullanılmışlardır. Dolayısıyla, izleyen paragraflarda araştırma kapsamının dışında ancak tek değişkenli doğrusal zaman serileri alt başlığı altında yer alan uzun hafızalı süreçlere (ARFIMA gibi) yer verilmemiştir.

1.3.1 Hareketli Ortalama Süreçleri

Doğrusal zaman serisi modellerinden, Hareketli Ortalama Süreci (Moving Average Process, MA) doğrusal durağan zaman serileri literatüründeki en temel modellerden biridir. Süreç birden fazla yöntemle açıklanabilmektedir. Bunlardan ilki MA sürecini, beyaz gürültü serilerinin basit birer açılımı şeklinde tanımlamaktadır. Bir diğer yaklaşım ise MA sürecini, belirli kısıtlara sahip sonsuz-sıralı otoregresif (AR) bir model olarak değerlendirmektedir.

$\{\epsilon_t\}$ dizisi sıfır ortalamalı ($E(\epsilon_t) = 0$) ve σ^2 varyansa sahip bir beyaz gürültü süreci ise ($\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$), ilk tanıma göre q-dereceden bir hareketli ortalama sürecinin (MA(q)) denklemi Eşitlik 1.12'deki gibi yazılabilmektedir (Brooks, 2008: 211).

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t \quad (1.12)$$

X_t sürecinin ortalaması $E(X_t) = \mu$ ve varyansı $Var(X_t) = \sigma_\epsilon^2(1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2)$ 'dir. Dolayısı ile X_t süreci, beyaz gürültü terimlerinin ağırlıklı ortalamalarından oluşan doğrusal bir süreç olup sabit bir ortalama, varyans ve q'uncu gecikmeye dek sıfırdan farklı olabilen ancak sonrasında sıfıra eşit otokorelasyonlara sahiptir. Bir MA(q) süreci, $L\epsilon_t = \epsilon_{t-1}$ şeklinde tanımlanan bir L gecikme işlemcisi kullanılarak izleyen şekilde de tanımlanabilmektedir:

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^q \theta_i \epsilon_{t-i} + \epsilon_t = \mu + \theta(L)\epsilon_t \quad (1.13)$$

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q \quad (1.14)$$

MA süreçlerinin θ parametrelerine dayanan bir durağanlık koşulu mevcut olmamasına rağmen, bu süreçler “tersine çevrilebilirlik” koşulunu sağlamak durumundadır. Tersine çevrilebilirlik koşulu, en basit MA(1) süreci için $|\theta_1| < 1$ olmakla birlikte MA(2) süreci için $\theta_1 + \theta_2 < 1 \wedge \theta_2 - \theta_1 < 1 \wedge |\theta_2| < 1$ 'dir (Sevüktekin ve Çınar, 2017). Bir MA(q) sürecinin tersine çevrilebilirlik koşulu ise AR(p) sürecinin durağanlık koşuluna benzer bir şekilde gecikme polinomunun yeniden yazılması ile elde edilmektedir, yani:

$$\theta(L) = 1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q = (1 - \eta_1 L) \dots (1 - \eta_q L) \quad (1.15)$$

Böylece, $\eta_1^{-1}, \dots, \eta_q^{-1}$ terimleri $\theta(L)$ polinomunun köklerini ifade etmektedirler. Bir MA(q) süreci, $|\eta_i^{-1}| > 1$ koşulunu sağlanması durumunda tersine çevrilebilir bir süreç olmaktadır (Paolella, 2019: 300).

1.3.2 Otoregresif (Özbağlanımlı) Süreçler

Doğrusal zaman serisi modellerinden bir diğeri, “Otoregresif” (AR) veya bir diğeri deyişle “Özbağlanımlı” süreçlerdir. Otoregresif süreçlerin ekonometri literatüründeki kullanımları yeni olmayıp, Cochrane ve Orcutt (1949)’un regresyon kalıntılarını 1-dereceli AR ile modellediği görülmektedir (Kirchgässner vd., 2013: 27). MA süreçleri gibi, Otoregresif süreçler de doğrusal durağan süreçler başlığı altında sınıflandırılmaktadırlar. Bir AR sürecinin alacağı değerler, kendi gecikmeli değerleri ve bir beyaz gürültü terimi ile tanımlanmaktadır. Örneğin; p -dereceli bir Otoregresif sürecin (AR(p)) gösterimi Eşitlik 1.16’da verildiği şekilde yapılabilir.

$$X_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \epsilon_t \quad (1.16)$$

Eşitlik 1.16’da yer alan $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü terimini, δ model sabit terimini ve ϕ süreç gecikmeli değerlerinin katsayılarını ifade etmektedirler. AR(p) sürecinin sabit terimi (δ) süreç ortalamasına eşit olmayıp, $\delta = (1 - \sum_{i=1}^p \phi_i) \mu$ değerine eşittir. Ayrıca, AR(p) sürecinin gecikme işlemcisi kullanarak gösterimi yaygın kullanımlardan biridir. Sıfır ortalamalı AR(p) sürecinin denklemi, $LX_t = X_{t-1}$ ile tanımlanan bir L gecikme işlemcisi kullanılarak izleyen şekilde yazılabilir:

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) X_t = \epsilon_t$$

$$\phi(L) X_t = \epsilon_t \quad (1.17)$$

$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$ gecikme işlemcisinin p -dereceden bir polinomudur. MA sürecinin tersine, bir AR sürecinin otokorelasyonları belirli bir gecikmede kesilmek yerine sıfıra doğru azalan bir yapı göstermekle birlikte, AR sürecinin p derecesi kısmi otokorelasyonlarının kesildiği gecikme uzunluğundan

belirlenebilmektedir. AR(1) ve AR(2) süreçlerinin durağanlık koşulları ise sırası ile $|\phi| < 1$ ve $\phi_1 + \phi_2 < 1 \wedge \phi_2 - \phi_1 < 1 \wedge |\phi_2| < 1$ 'dir (Sevüktekin ve Çınar, 2017: 158). Daha genelinde, AR(p) sürecinin durağanlığı ise $\phi(L)$ polinomuna ait tüm kök (muhtemelen karmaşık sayılardan oluşan p adet kök) modüllerinin mutlak değerlerinin birden büyük olmasını gerektirmektedir (Paolella, 2019: 282).

1.3.3 Otoregresif Hareketli Ortalama Süreçleri

Otoregresif hareketli ortalama (ARMA) süreçleri, bir önceki bölümlerde tanımlanan MA ve AR süreçlerinin her ikisinin de özelliklerini taşıyabilen doğrusal durağan zaman serilerinin modellenmesi amacıyla kullanılmaktadırlar. Bununla birlikte, sadece MA ya da AR süreçleri ile çok sayıda parametre gerektirebilen zaman serilerinin modellenmesinde ARMA süreçlerinin kullanımı ile daha az parametrelili ve etkin modeller oluşturulabilmektedir. Karışım süreçler veya Box-Jenkins metodu olarak da adlandırılan ARMA(p,q) (Box ve Jenkins, 1970) süreçlerinin denklemi Eşitlik 1.18'de verilmiştir.

$$X_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \quad (1.18)$$

MA ve AR süreçlerinin tanımında belirtildiği üzere, Eşitlik 1.18'de yer alan δ sürecin sabit terimini, $\epsilon_t \sim WN(0, \sigma^2)$ beyaz gürültü terimini, ϕ ve θ parametreleri ise sırası ile süreç ve beyaz gürültü gecikmeli değerlerinin katsayılarını ifade etmektedirler. Bir ARMA(p,q) sürecinin durağanlığı, AR(p) sürecinin durağanlık koşullarını sağlamasına bağlıdır. Aynı zamanda ARMA(p,q), MA(q) sürecinin tersine çevrilebilirlik koşullarını sağlaması durumunda da tersine çevrilebilir bir süreçtir (Kirchgässner vd., 2013: 75).

1.3.4 Otoregresif Entegre Hareketli Ortalama Süreçleri

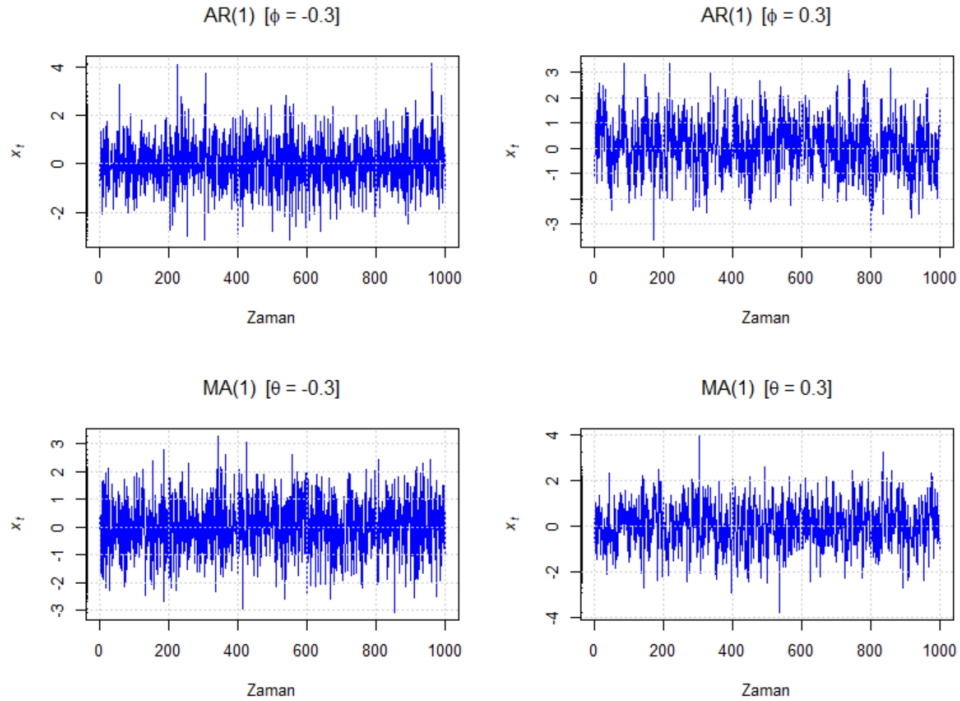
Zaman serileri çoğu zaman durağan olmayıp serilerin doğrudan AR, MA ya da ARMA süreçleri ile modellenmesi mümkün olmamaktadır. Öncelikle serilerin farkları alınarak durağan hale getirilmeleri gerekmektedir. Fark alma işlemi, serilerin durağanlığı sağlanana dek 1, 2 ya da daha fazla sayıda yapılabilmektedir. Farkı alınan serilere “entegre süreç” denmekle birlikte entegre sürecin derecesini fark alma sayısı

belirlemektedir. Eğer bir serinin ARMA(p,q) süreci ile modellenmeden önce d defa farkı alındıysa, bu serinin (p,d,q)'uncu dereceden Otoregresif Entegre Hareketli Ortalama (ARIMA(p,d,q)) süreci ile modellendiği söylenmektedir.

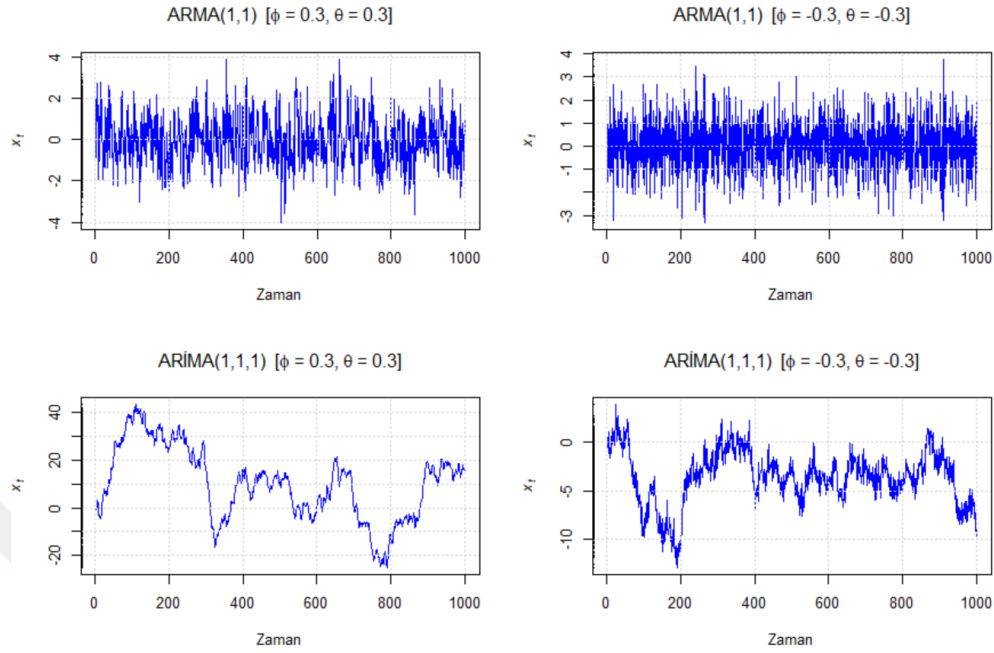
$$\Delta^d X_t = \delta + \sum_{i=1}^p \phi_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \epsilon_{t-j} + \epsilon_t \quad (1.19)$$

Eşitlik 1.19'da yer alan Δ^d , d-dereceden fark alma operatörünü göstermekte olup, $\Delta^d X_t$ ise d-dereceden entegre X_t sürecini ifade etmektedir. Görüldüğü üzere ARIMA(p,d,q) süreci, bir d-dereceden entegre seriye ARMA(p,q) sürecinin uygulanmasıdır.

Şekil 1.3 ve 1.4'te şu ana dek açıklanan tek değişkenli doğrusal zaman serisi modellerinin gözlem ve karşılaştırma amacıyla belirli parametreler için simülasyonlarına yer verilmiştir.



Şekil 1.3: AR(1) ile MA(1) Süreçlerinin $\phi = \{-0.3, 0.3\}$ ve $\theta = \{-0.3, 0.3\}$ Parametre Simülasyonları



Şekil 1.4: ARMA(1,1) ile ARIMA(1,1,1) Süreçlerinin $\phi = \{-0.3, 0.3\}$, $d = 1$ ve $\theta = \{-0.3, 0.3\}$ Parametre Simülasyonları

1.4 Tek Değişkenli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri

Şu ana dek bahsedilen ARMA süreçleri, zaman serilerinde seri gözlem değerleri ile gecikmeli değerleri arasında korelasyon bulunması durumunda seri koşullu ortalamalarının modellenmesi amacıyla kullanılmaktadırlar. Bununla birlikte, birçok finansal zaman serisinde, seri gözlem değerleri arasındaki korelasyonun dışında seri volatilité (oynaklık) değerleri veya seri gözlem kareleri arasında da korelasyon bulunmakta ve seri koşullu varyansı zamanla değişkenlik göstermektedir. Zaman serilerinde sıklıkla gözlemlenen bu yapının modellenebilmesi amacıyla Engle (1982) “Otoregresif Koşullu Değişen Varyans” (ARCH) sürecini önermiştir. Sonrasında ise Bollerslev (1986) varyansın kendi geçmiş değerlerine de bağlı olmasını sağlayarak “Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans” (GARCH) süreçlerini ortaya koymuştur. 1982 yılından bu yana Engle (1982) ve Bollerslev (1986)’i takip eden birçok araştırmacının katkıları ile geliştirilen GARCH modellerinin türlerinde artan bir eğilim gözlemlenmektedir. Bu nedenle, ilerleyen bölümlerde bu modellerin en yaygın

kullanım alanı bulanlarına yer verilmiş olup daha detaylı bir model listesi için Bollerslev vd. (2010: 137)'nin çalışmasına başvurulabilir.

1.4.1 Otoregresif Koşullu Değişen Varyans

1982 yılında Engle (1982), Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (ARCH) modelini ilk kez bir makroekonomik veride (Birleşik Krallık enflasyon oranı varyansının hesaplanmasında) uygulamıştır. Bununla birlikte model, finans alanında geniş bir uygulama alanı ve dolayısı ile hızla yaygınlaşan bir popülerlik kazanmıştır.

Engle (1982), kalıntı karelerinin gecikmeli değerlerini koşullu varyansın modellenmesinde kullanarak ARCH süreçlerini Eşitlik 1.21'de verildiği şekilde tanımlamıştır.

$$\epsilon_t = z_t \sigma_t, \quad \epsilon_t | \Omega_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2) \quad (1.20)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (1.21)$$

Eşitlik 1.20'de yer alan ϵ_t zaman serisinin t anındaki kalıntı (hata) terimini, z_t sıfır ortalama ($E(z_t) = 0$) ile 1 varyansa sahip ($Var(z_t) = 1$) bağımsız ve özdeşçe dağılan (iid) beyaz gürültü sürecini, Ω_t gecikmeli kalıntıların ürettiği bilgi setini ve $\mathcal{N}$ sıfır ortalama ile σ_t^2 varyansa sahip normal dağılımı ifade etmektedirler. Eşitlik 1.21'de σ_t^2 koşullu varyansı, q ARCH(q) şeklinde gösterimi yapılan bir ARCH sürecinin mertebesini ve $i=1, \dots, q$ için α_i gecikmeli kalıntı karelerinin katsayılarını ifade etmektedirler. Bununla birlikte, süreç parametrelerinin pozitif olma koşulu mevcuttur yani $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$ olmalıdır. Yukarıda verilen eşitlikler ile Engle (1982), koşullu ve koşulsuz varyansın tanımlarını birbirinden ayırarak koşullu varyansın zamana bağlı değişiminin modellenenebilmesini mümkün kılmıştır.

1.4.2 Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans

ARCH süreçlerinin gerçek serilere uygulanması esnasında model mertebelerinin (q) yüksek belirlenme durumu ve varyansın pozitif olma gerekliliği gibi sorunlar nedeni ile Bollerslev (1986) koşullu varyansın kendi gecikmeli değerlerini de ARCH denkleminde eklemiş ve süreci genelleştirerek hafızasını uzatmayı ve daha esnek bir

yapıya kavuşturmayı amaçlamıştır. Bollerslev (1986), Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (GARCH) süreci ile koşullu varyans denklemini izleyen şekilde tanımlamıştır.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (1.22)$$

Eşitlik 1.21'e ek olarak, Eşitlik 1.22'de yer alan p ve q bir GARCH(p,q) sürecinin mertebesini, $j = 1, \dots, p$ için σ_{t-j}^2 koşullu varyansın gecikmeli değerlerini ve β_j gecikmeli varyans değerlerinin katsayılarını ifade etmektedirler. Ayrıca, GARCH(p,q) süreci $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$ parametre kısıtlarına sahiptir böylece koşullu varyansın pozitif olma şartı sağlanabilmektedir. Bir GARCH(1,1) süreci ($p=q=1$) için durağanlık koşulu $\alpha_1 + \beta_1 < 1$ olmakla birlikte genel anlamda bir GARCH(p,q) sürecinin durağanlık koşulu ise $\sum_{j=1}^p \beta_j + \sum_{i=1}^q \alpha_i < 1$ 'dir (Francq ve Zakoian, 2010: 35). Bununla birlikte, GARCH(p,q) sürecinin koşulsuz varyansı ($\hat{\sigma}^2$) Eşitlik 1.23'te verildiği gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\omega}{1 - (\sum_{j=1}^p \beta_j + \sum_{i=1}^q \alpha_i)} \quad (1.23)$$

1.4.3 Tek Değişkenli Asimetrik GARCH Modelleri

Finansal zaman serilerinde gözlemlenen, zamanla değişen koşullu varyans ve mutlak değerce büyük (küçük) seri gözlemlerinin yine mutlak değeri büyük (küçük) gözlemler tarafından izlenmesi ile belli dönemlerde ortaya çıkan oynaklık birikmesi (volatilite kümelenmesi) özelliklerine ek olarak, serilerde ilk defa Black (1976) tarafından not edilen “kaldıraç etkisi” mevcuttur. Kaldıraç etkisi, gecikmeli seri gözlemleri ile güncel volatilite değerleri arasındaki negatif korelasyonu tanımlamaktadır. Bir diğer anlatımla kaldıraç etkisi, finansal getiri serilerinin pozitif olduğu durumlarda volatilitenin azalması, negatif olduğu durumlarda da volatilitenin artmasına yol açan etkidir. Bununla birlikte, finansal getiri serilerinin pozitif değerler ile aynı büyüklükte ancak negatif değerler aldığı durumlarda volatilitenin (oynaklığın) daha büyük olduğu ve dolayısı ile yeni bilgilere verilen tepkinin asimetrik olduğu belirlenmiştir (Chang ve McAleer, 2017). Finansal zaman serilerinde gözlemlenen

kaldıraç ve işaret etkisi bulguları ile birlikte GARCH süreçlerinin parametre kısıtları asimetrik GARCH modellerinin gelişimine yol açmıştır.

1.4.3.1 GJR-GARCH Modeli

Glosten vd. (1993) tarafından önerilen “Glosten-Jagannathan-Runkle GARCH” (GJR-GARCH) modeli, pozitif ve negatif bilgiye verilen asimetrik tepkiyi GARCH sürecine eklenen bir gösterge fonksiyonu (I) ile modellemektedir.

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \gamma_i I_{t-i, \epsilon_{t-i} < 0} \epsilon_{t-i}^2) \quad (1.24)$$

Eşitlik 1.24’te yer alan I_{t-i} , gecikmeli kalıntıların (ϵ_{t-i}) negatif değerler aldığı durumlarda bire eşit ($I_{t-i} = 1$), diğer durumlarda da sıfıra eşittir. Böylece, negatif bilginin (şok, inovasyon) koşullu varyans üzerindeki etkisi ($\alpha_i + \gamma_i$) iken, pozitif bilginin (kalıntının) etkisi α_i olarak modellenmiştir. Bir GJR-GARCH(1,1) sürecinin parametre kısıtları $\omega > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_1 + \gamma_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ olmak üzere, durağanlık koşulu ise $\alpha_1 + \beta_1 + (\gamma_1/2) < 1$ ’dir. Bununla birlikte, genel anlamda bir GJR-GARCH(p,q) sürecinin, $\sum_{j=1}^p \beta_j + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \frac{1}{2} \gamma_i) < 1$ koşulunu sağlaması durumunda kovaryans durağan bir süreç olduğu söylenebilmektedir.

1.4.3.2 TGARCH Modeli

“Eşik Değerli (Threshold) GARCH” (TGARCH) modelini öneren Zakoian (1994), pozitif ve negatif bilgilere gösterilen asimetrik tepkiyi koşullu varyans yerine, koşullu standart sapmanın eşitliğine eklediği pozitif ve negatif gecikmeli kalıntılara özgü katsayılar ile modellemiştir.

$$\sigma_t = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} + \sum_{i=1}^q (\alpha_i^+ \epsilon_{t-i}^+ - \alpha_i^- \epsilon_{t-i}^-) \quad (1.25)$$

Eşitlik 1.25’te denklemini verilen TGARCH(p,q) sürecinin parametreleri $\omega, \alpha_i^+, \alpha_i^-, \beta_j \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\epsilon_t = \epsilon_t^+ + \epsilon_t^-$ ile pozitif (ϵ_t^+) ve negatif kalıntılar (ϵ_t^-) sırası ile $\epsilon_t^+ = \max(\epsilon_t, 0)$ ve $\epsilon_t^- = \min(\epsilon_t, 0)$ aralığında değer alırlar (Francq ve Zakoian, 2010: 90). Modelde yer alan α_i^+ ve α_i^- parametreleri ile asimetrik işaret ve kaldıraç etkileri modellenmektedir. Bununla birlikte, $\omega > 0$, $\alpha_i^+ \geq 0, \alpha_i^- \geq$

0 ve $\beta_j \geq 0$ parametre kısıtları koşullu standart sapmanın pozitif olma koşuludur. Ancak, TGARCH(p,q) sürecinde volatilitenin ϵ_t 'nin koşullu standart sapması ($|\sigma_t|$) ile modellenmesinden dolayı $\omega, \alpha_i^+, \alpha_i^-, \beta_j$ parametrelerinin pozitif olma şartı ve dolayısı ile koşullu standart sapmanın pozitif olma zorunluluğu yoktur (Francq ve Zakoian, 2010: 91).

1.4.3.3 APARCH Modeli

Ding vd. (1993) “Asimetrik Üssel ARCH” (APARCH) sürecini, pozitif ve negatif bilgilerin (şokların ya da bir diğer deyişle inovasyonların) koşullu volatilité üzerindeki asimetrik etkilerinin modellenmesi amacıyla geliştirmişlerdir.

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\epsilon_{t-i}| - \gamma_i \epsilon_{t-i})^\delta \quad (1.26)$$

Eşitlik 1.26’da yer alan $\delta \in \mathbb{R}^+$ üssel terimi, koşullu varyansın bir Box-Cox dönüşümüdür. Sürecin parametre kısıtları $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\delta > 0$ ve $|\gamma_i| < 1$ ’dir. APARCH sürecinde asimetrik etkiler γ_i parametresi ile modellenmekte olup parametre pozitif (negatif) değerler aldığında negatif (pozitif) gecikmeli bilgilerin güncel koşullu varyansa etkileri daha büyük olmaktadır.

1.4.3.4 EGARCH Modeli

GARCH sürecine yöneltilen en önemli eleştirilerden biri koşullu varyansın pozitif olma gerekliliği nedeni ile model parametrelerine uygulanan kısıtlardır. Nelson (1991) koşullu varyansı logaritmik formda tanımlayan “Üssel (Exponential) GARCH” (EGARCH) modelini önererek model parametrelerinin pozitif olma zorunluluğunu ortadan kaldırmıştır. Ayrıca, EGARCH(p,q) modeline eklenen bir $g_i(z_{t-i})$ fonksiyonu ile yeni bilgilere verilen asimetrik tepki izleyen eşitlikteki gibi modellenmiştir.

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2) + \sum_{i=1}^q g_i(z_{t-i}) \quad (1.27)$$

Eşitlik 1.27’de yer alan z_{t-i} gecikmeli standardize kalıntı (hata) terimleri olup sıfır ortalama ($E(z_t) = 0$) ve bir varyansa sahip ($Var(z_t) = 1$) bağımsız ve özdeşçe

dağılılan (iid) süreçlerdir. Bununla birlikte, $\omega, \beta_j, \theta, \gamma \in \mathbb{R}$ ve $i=1,2,\dots,q$ değerleri için $g_i(z_{t-i}) = \theta z_{t-i} + \gamma(|z_{t-i}| - E|z_{t-i}|)$ şeklinde tanımlanmış olup, yeni bilgilere verilen asimetrik tepki θ ve γ parametreleri ile modellenmiştir. Bir EGARCH(p,q) sürecinin durağanlık koşulunun sağlanması için ise beta parametre toplamlarının birden küçük olması ($\sum_{j=1}^p \beta_j < 1$) yeterlidir .

1.5 Çok Değişkenli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans Modelleri

Önceki bölümlerde açıklanan GARCH modelleri tek değişkenli serilerin kendi gözlemleri arasındaki koşullu varyansın modellenmesi amacıyla kullanılmakta olup, finansal getiri serilerinin birlikte hareket etme eğilimi ile farklı seri gözlemleri arasındaki kovaryansın zamanla değişme özelliği ise Çok Değişkenli Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (Multivariate GARCH) süreçleri ile modellenmektedir. İlk olarak Bollerslev vd. (1988) çok değişkenli seriler arası koşullu kovaryans matrisinin modellenebilmesi amacıyla “VEC parametrizasyonu” adı verilen bir yöntemi kullanarak GARCH süreçlerinin açılımını sağlamış ve “Vektör GARCH” (VEC-GARCH) olarak adlandırılan modelin çok değişkenli serilerde kullanımını mümkün kılmıştır. Bollerslev vd. (1988) sonrasında birçok çok değişkenli ARCH/GARCH modeli geliştirilmiş/geliştirilmekte olup bu tez kapsamında en yaygın kullanılan ya da bilinen modellere yer verilmiştir.

1.5.1 VEC-GARCH Modeli

Bollerslev vd. (1988) tarafından önerilen ve koşullu varyansların yanında çok değişkenli serilerde koşullu kovaryansların da modellenebilmesini mümkün kılan Vektör GARCH(p,q) (VEC-GARCH(p,q)) modeli, m-boyutlu bir $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ zaman serisi için $X_t = (X_{1t}, \dots, X_{mt})'$ izleyen şekilde tanımlanmıştır:

$$X_t = \mu_t + \epsilon_t \quad \wedge \quad \epsilon_t = H_t^{1/2} z_t, \quad \epsilon_t \sim N_m(0, H_t) \quad (1.28)$$

$$vech(H_t) = C + \sum_{i=1}^q A_i vech(\epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p B_j vech(H_{t-j}) \quad (1.29)$$

Eşitlik 1.28’de yer alan μ_t , $m \times 1$ boyutlu koşullu ortalama vektörünü, $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{mt})'$ olmak üzere $m \times 1$ boyutlu kalıntılar vektörünü, H_t terimi $m \times m$ boyutlu pozitif tanımlı koşullu varyans-kovaryans matrisini ve $z_t \sim N_m(0, I)$ ise sıfır ortalama ($E(z_t) = 0$) ve birim kovaryans matrisi ($Cov(z_t) = I_m$) ile bağımsız ve özdeşçe dağılan rassal dizileri ifade etmektedirler. Eşitlik 1.29’da ise H_t simetrik koşullu varyans-kovaryans matrisinin $vech(\cdot)$ operatörü aracılığı ile vektörel parametrizasyonu verilmiştir. $vech(\cdot)$ operatörü, $m \times m$ boyutlu bir matrisin sol alt üçgeninde yer alan elemanları alt alta dizerek $m(m+1)/2 \times 1$ boyutlu bir vektör oluşturur. Örneğin; $A = (a_{ij})$ ise $vech(A) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}, a_{22}, \dots, a_{m2}, \dots, a_{mm})'$ vektörü elde edilir. Bununla birlikte, Eşitlik 1.29’da yer alan C terimi $m(m+1)/2 \times 1$ boyutlu model sabitler vektörünü, A_i ve B_j terimleri ise $m(m+1)/2 \times m(m+1)/2$ boyutlu parametre matrisleridir. H_t koşullu varyans-kovaryans matrisinin pozitif-tanımlı olması için C , A_i , $i=1, \dots, q$ ve B_j , $j=1, \dots, p$ matrislerinin simetrik pozitif-tanımlı olmaları gerekmektedir (Francq ve Zakoian, 2010: 277).

Bollerslev vd. (1988) VEC-GARCH modelinde hesaplanması gereken parametre adedinin çokluğu nedeniyle aynı çalışmada VEC-GARCH modelini basitleştirerek hesaplanması gereken parametre adedini azaltan “Köşegen (Diagonal) VEC-GARCH” (DVEC-GARCH) modelini ortaya koymuşlardır. Bir DVEC-GARCH(p,q) sürecinin gösterimi aşağıdaki gibi yapılabilir:

$$H_t = C + \sum_{i=1}^q A_i \odot (\epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p B_j \odot H_{t-j} \quad (1.30)$$

Eşitlik 1.30’da yer alan $\odot$ simgesi Hadamard çarpımını ifade etmekte olup DVEC-GARCH modelinde A_i ve B_j matrislerinin köşegen (diagonal) oldukları farz edilmiş ve böylece koşullu varyans-kovaryans matrisinde (H_t) yer alan her bir $h_{\ell\ell,t}$ ($\ell, \ell = 1, \dots, m$ için) elementinin sadece kendi gecikmeli değerleri ile gecikmeli kalıntılara bağlı olduğu varsayılmıştır (Francq ve Zakoian, 2010: 276).

$$h_{\ell\ell,t} = \omega_{\ell\ell} + \sum_{i=1}^q a_{\ell\ell,t}^{(i)} \epsilon_{\ell,t-i} \epsilon_{\ell,t-i} + \sum_{j=1}^p b_{\ell\ell,t}^{(j)} h_{\ell\ell,t-j} \quad (1.31)$$

Koşullu varyans-kovaryans matrisinin (H_t) pozitif ve tanımlı olma şartını her zaman sağlayamaması, hesaplanması gereken parametre adedinin fazlalığı ve yukarıda

bahsedilen H_t matrisinde yer alan her bir elementin sadece kendi gecikmeli değerlerine bağlı olması nedeni ile sürecin elementler arası koşullu modellemeyi sağlayamaması gibi sorunlar araştırmacıların farklı bir model geliştirme çabalarına katkıda bulunmuştur.

1.5.2 BEKK-GARCH Modeli

BEKK-GARCH modeli, VEC-GARCH ve DVEC-GARCH modellerinde varyans-kovaryans matrisinin (H_t) her zaman pozitif-tanımlı olmasının sağlanamaması nedeni ile Baba, Engle, Kraft ve Kroner (Engle, Robert ve Kroner, 1995) tarafından geliştirilmiştir. BEKK-GARCH(p,q) modelinde H_t 'nin pozitif-tanımlı olması, VEC-GARCH modelinin izleyen eşitlikteki gibi yeniden düzenlenmesi ile sağlanmıştır.

$$H_t = C'C + \sum_{i=1}^q \sum_{k=1}^K A'_{ik} (\epsilon_{t-i} \epsilon'_{t-i}) A_{ik} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K B'_{jk} H_{t-j} B_{jk} \quad (1.32)$$

Eşitlik 1.32'de yer alan C , A_{ik} ve B_{jk} terimleri $m \times m$ boyutlu parametre matrislerini, K terimi ise sürecin genellenebileceği üst limiti ifade etmekte olup varyans-kovaryans matrisinin pozitif-tanımlı olması eşitliğin sağ tarafında yer alan terimlerin kuadratik (ikinci dereceden) formlarının kullanılmasıyla sağlanmıştır (Bauwens vd., 2006: 83; Brooks, 2008: 435).

1.5.3 CCC-GARCH Modeli

Bollerslev (1990), yukarıda bahsedilen çok değişkenli GARCH modellerine nazaran daha az parametre ile koşullu kovaryans matrisinin modellenebileceği “Sabit Koşullu Korelasyonlar” (Constant Conditional Correlations, CCC) – GARCH modelini ortaya koymuştur. CCC-GARCH modelinde koşullu korelasyonların sabit olduğu yani zamanla değişmediği farz edilmekle birlikte koşullu kovaryans matrisinin (H_t) modellenmesinde matrisin koşullu standart sapma ve sabit korelasyonlar bileşenlerine ayrılabilmesinden yararlanılmaktadır. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, m -boyutlu çok değişkenli normal dağılıma sahip bir zaman serisi ise CCC-GARCH modeli ile H_t koşullu kovaryans matrisi izleyen şekilde modellenabilmektedir.

$$X_t = E(X_t | \Omega_{t-1}) + \epsilon_t, \quad X_t \sim \mathcal{N}(0, H_t) \quad (1.33)$$

$$H_t = D_t R D_t, \quad D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{ii,t}}\} \quad (1.34)$$

$$h_{ii,t} = \omega_{ii} + \alpha_{ii}\epsilon_{i,t-1}^2 + \beta_{ii}h_{ii,t-1}, \quad i=1,...,m \quad (1.35)$$

$$h_{ij,t} = \rho_{ij} / \sqrt{h_{ii,t}h_{jj,t}}, \quad i \neq j \quad (1.36)$$

Eşitlik 1.33'teki Ω_{t-1} terimi, X_t değişkeninin dağılımına yön veren $t-1$ zamanındaki bilgi setidir. Eşitlik 1.34'te yer alan D_t , köşegeninde (diag) koşullu standart sapmaları ($\sqrt{h_{ii,t}}$) içeren $m \times m$ boyutlu bir matris ve R terimi ise korelasyon katsayılarını (ρ_{ij}) içeren $m \times m$ boyutlu simetrik bir matrisi ifade etmektedirler. Bollerslev (1990)'in Eşitlik 1.35'te denklemi verilen koşullu varyansları ($h_{ii,t}$) GARCH(1,1) süreci ile modellediği görülebilmektedir. Bir sonraki eşitlikte yer alan $h_{ij,t}$ terimi, H_t matrisinin ij . elemanını göstermektedir. Yukarıda tanımlanan CCC-GARCH modeli $m(m+5)/2$ parametreye sahiptir. Modelde H_t koşullu kovaryans matrisinin pozitif-tanımlı olması tüm koşullu varyansların ve R matrisinin pozitif olma şartına bağlıdır.

1.5.4 DCC-GARCH Modeli

CCC-GARCH modelinin sabit koşullu korelasyonlar varsayımının gerçekçi bulunmaması nedeni ile zamana bağlı değişen koşullu korelasyonların da modellenebilmesini mümkün kılan “Dinamik Koşullu Korelasyonlar - GARCH” (Dynamic Conditional Correlations, DCC-GARCH) modeli önerilmiştir. Koşullu korelasyonlar matrisinin modellenme şekline bağlı olarak Christodoulakis ve Satchell (2002), Tse ve Tsui (2002) ve Engle (2002) tarafından temelde üç tür DCC-GARCH modeli ortaya konmuştur. Christodoulakis ve Satchell (2002), koşullu varyansları herhangi bir türde GARCH süreci ile modellenebilen iki değişkenli bir GARCH kovaryans yapısı önermiştir. Bollerslev (1990)'in CCC-GARCH sürecinin bir açılımı olarak ifade edilen ve “CorrARCH” olarak adlandırılan model, koşullu korelasyonların tanımlanması amacıyla Fisher-z dönüşümünden yararlanmıştır. Ancak, modelin sadece iki değişkenli seriler için tanımlanmış olması önündeki en büyük engeli oluşturmuştur.

Diğer yandan, Tse ve Tsui (2002) önerdiği model ile koşullu varyansların tek değişkenli GARCH süreçlerinden elde edilebileceğini, koşullu korelasyon matrisinin ise bir ARMA süreci ile modellenebileceğini varsayarak CCC-GARCH modelindeki sabit korelasyonlar matrisini zamanla değişen bir yapıya kavuşturmuştur. Bir önceki bölümde tanımlandığı gibi $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, m -boyutlu çok değişkenli normal dağılıma sahip bir zaman serisi ve H_t koşullu kovaryans matrisi olmak üzere:

$$H_t = D_t R_t D_t \quad D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{ii,t}}\} \quad (1.37)$$

$$R_t = (1 - \theta_1 - \theta_2)R + \theta_1 R_{t-1} + \theta_2 \Psi_{t-1} \quad (1.38)$$

Eşitlik 1.37'deki $h_{ii,t}$, herhangi bir GARCH sürecinden elde edilebilecek koşullu varyans terimlerini, D_t ise köşegeninde (diag) koşullu standart sapmaları $(\sqrt{h_{ii,t}})$ içeren $m \times m$ boyutlu bir matrisi ifade etmektedirler. İzleyen eşitlikte R_t koşullu korelasyon matrisini, θ_1 ve θ_2 ise pozitif ve toplamı birden küçük model parametrelerini ifade etmektedirler ($0 < \theta_1, \theta_2 < 1 \wedge \theta_1 + \theta_2 \leq 1$). Denklemden yer alan R ($R = \{\rho_{ij}\}$), köşegen elemanları bire eşit ($\forall i$ için $\rho_{ii} = 1$) $m \times m$ boyutlu simetrik pozitif-tanımlı bir matristir. Ψ_{t-1} terimi ise elemanları gecikmeli seri gözlemlerinin (X_t) birer fonksiyonu olan $m \times m$ boyutlu bir matrisi ifade etmektedir.

Engle (2002) DCC-GARCH modelini, dinamik koşullu korelasyonlar ile birlikte büyük boyutlu koşullu kovaryans matrislerinin hesaplanabilmesi amacıyla geliştirilen iki aşamalı bir model olarak tanımlamıştır. Çok değişkenli DCC-GARCH modelinin ilk aşamasında tek değişkenli GARCH süreçleri ile serilere özgü koşullu varyanslar elde edilmekte, ikinci aşamasında ise koşullu kovaryans matrisi dinamik koşullu korelasyonlar ve koşullu varyans matrislerinin çarpımıyla hesaplanmaktadır. Tse ve Tsui (2002) tarafından önerilen modelden farklı olarak Engle (2002) DCC-GARCH modeli ile R_t koşullu korelasyonlar matrisini izleyen şekilde tanımlamıştır:

$$H_t = D_t R_t D_t, \quad D_t = \text{diag}\{\sqrt{h_{ii,t}}\} \quad (1.39)$$

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta)\bar{Q} + \alpha \epsilon_{t-1} \epsilon'_{t-1} + \beta Q_{t-1} \quad (1.40)$$

$$R_t = Q_t^{*-1} Q_t Q_t^{*-1} \quad (1.41)$$

Eşitlik 1.39'daki D_t terimi, yukarıda açıklandığı üzere köşegeninde koşullu standart sapmaları $(\sqrt{h_{ii,t}})$ içeren $m \times m$ boyutlu bir matrisi ifade etmektedir. Eşitlik 1.40'ta yer alan $\bar{Q}$ terimi, tek değişkenli GARCH süreçleri ile koşullu varyans modellemesi sonrasında elde edilen standardize kalıntılara ait koşulsuz kovaryans matrisini ifade etmektedir. Bununla birlikte, Q_t koşullu kovaryans matrisinin pozitif-tanımlı olma şartının sağlanabilmesi için α ve β parametre toplamalarının birden küçük olma kısıtı mevcuttur ($0 < \alpha + \beta < 1$). Eşitlik 1.41 ile verilen R_t koşullu korelasyonlar denkleminde yer alan Q_t^* , Q_t matrisinin köşegen elemanlarının kareköklerini içeren köşegen bir matristir (Engle ve Sheppard, 2001: 5):

$$Q_t^* = \begin{bmatrix} \sqrt{q_{11}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{q_{mm}} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

İKİNCİ BÖLÜM

KOPULA FONKSİYONLARI, ÖZELLİKLERİ VE TAHMİN

2.1 Bağımlılığın Modellenmesi ve Kopulalar

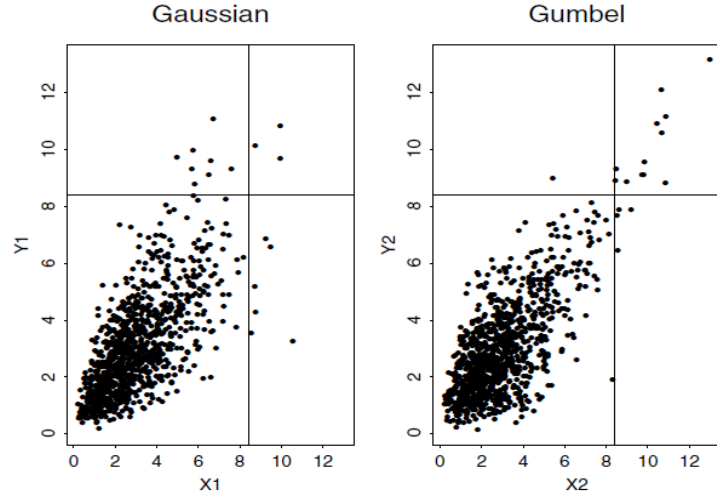
Modern Portföy Teorisi ile Markowitz (1952), portföy riskinin ilk defa sayısal yöntemler kullanılarak hesaplanması ve varlık getirileri arasındaki birlikte hareket etme eğilimlerinin de dikkate alınması gerekliliğini ortaya koyarak varlık seçimi alanında finans literatüründeki yeni bir dönemin başlangıcını temsil etmektedir.

Portföy seçimi probleminde Markowitz'in belirlediği bu iki temel bileşenden, varlık getirileri arasındaki birlikte hareket etme eğiliminin ölçüsü olarak kullanılan doğrusal korelasyon katsayısı çok sayıdaki stokastik bağımlılık ölçülerinden sadece biridir. Katsayı, getirilerin çok değişkenli normal dağılıma, daha da genelinde küresel (spherical) ve eliptik dağılım varsayımlarına sahip kanonik bir ölçüdür (Embrechts vd., 2002: 177). Normal dağılım varsayımı, getirilerin çoğunluğunun ortalamaya yakın bir şekilde dağılım gösterdiği ve ortalamadan uzakta yer alan kuyruk kısmındaki değerlerin nadir gözlemlendiği varsayımlarına sahiptir. Bununla birlikte, getiriler arasındaki varyans sonsuza yaklaştıkça, yani uç değer görülme sıklığı arttıkça, varlıklar arasındaki doğrusal korelasyon tanımsız olacaktır.

Şekil 2.1'de verilen iki değişkenli iki dağılım aynı korelasyon katsayısına ancak farklı türdeki bağımlılık yapılarına sahiptir. İkinci modelde, uç değerlerin birlikte gözlemlenme olasılığı daha yüksektir ve doğrusal korelasyon katsayısı ile bu iki modelin bağımlılık yapılarının ayırt edilebilmesi mümkün değildir. Bununla birlikte, normal zamanlarda değişkenler arasındaki korelasyon ya da birlikte hareket etme eğiliminin düşük olmasına rağmen, uç değerlerin ortaya çıktığı dönemlerde değişkenlerin artan birlikte hareket etme eğilimi yani uç değerlerin aynı anda gözlemlenme olasılığı da artabilmektedir.

Değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı hakkında net bir bilgi vermeyen korelasyon katsayısı, doğrusal bir bağımlılık ölçüsü olup, doğrusal olmayan kesin

artan dönüşümler altında sabit değildir, yani fiyatlar arasında korelasyon mevcut iken getiriler arasında korelasyon bulunamayabilir (ya da tersi).



Şekil 2.1: Aynı Gamma(3,1) Marjinal Dağılımı ile Korelasyona ($\rho=0.7$) Ancak Farklı Bağımlılık Yapılarına Sahip İki Dağılımın 1000 Adet Rastlantısal Gözlem Değerinin Serpilme Diyagramları

Kaynak: Embrechts vd. (2002: 178)

Özetle, doğrusal korelasyon değişkenler arası bağımlılığın ölçülmesinde tatmin edici bulunmamıştır. Bu nedenle, çok değişkenli dağılımlarda değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı ve gücünün daha iyi modellenmesi amacı ile kopulalar geliştirilmiştir. Kopulaların tanınmasına geçmeden önce bazı temel matematiksel ve istatistiksel kavram ve gösterimlerin açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir.

2.2 Temel Matematiksel Tanımlar

Aşağıda yer alan istatistiksel ve matematiksel tanımlar, iki boyutlu dağılımlar için Nelsen (2006)'da açıklandığı şekilde verilmiştir.

X ve Y rastlantısal değişkenlerinin dağılım fonksiyonları sırasıyla, $F(x) = P[X \leq x]$ ile $G(y) = P[Y \leq y]$ ve bu değişken çiftine ait ortak dağılım fonksiyonu ise $H(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ şeklinde verilmiş olsun. Her reel (x,y) sayı çifti için $F(x)$, $G(y)$ ve $H(x,y)$ olmak üzere üç adet sayı ilişkilendirilebilir. Şu ana dek bahsedilen her bir sayının $[0,1]$ aralığında yer aldığı ve her bir (x,y) reel sayı çiftinin yani $(F(x), G(y))$ çiftinin $[0,1] \times$

$[0,1]$ olan birim karesinde bir noktayı işaret ettiği ve bu sıralı çiftlerin her birinin $[0,1]$ aralığındaki bir $H(x,y)$ sayısına karşılık geldikleri belirtilmelidir. Bu karşılık aslında, ortak dağılım fonksiyonunun değerini farklı dağılım fonksiyonlarının değerlerinden oluşan sıralı çiftlere atayan bir kopula fonksiyonudur (Nelsen, 2006: 7).

$\mathbb{R}, (-\infty, +\infty)$ aralığındaki reel sayılar kümesini ve $\overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel sayılar kümesini ifade etmekle birlikte, $\overline{\mathbb{R}}^2 = \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ ile genişletilmiş reel sayılar düzlemidir. $\overline{\mathbb{R}}^2$ 'de yer alan bir dikdörtgen (B) iki kapalı aralığın kartezyen çarpımıdır: $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Bu dikdörtgenin köşegen noktaları $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1)$ ve (x_2, y_2) 'dir. $I = [0,1]$ kapalı aralığında tanımlı olmakla birlikte, $I \times I$ kartezyen çarpımı birim kareyi (I^2) verir. H tanım kümesi $\text{Dom}H$, $\overline{\mathbb{R}}^2$ 'nin bir altkümesi ($\text{Dom}H \subset \overline{\mathbb{R}}^2$) ve değer kümesi (range) $\text{Ran}H$ ise $\mathbb{R}$ 'nin altkümesi olan ($\text{Ran}H \subset \mathbb{R}$) iki boyutlu reel bir fonksiyondur.

Tanım 2.1.1 S_1 ve S_2 , $\overline{\mathbb{R}}$ 'nin boş olmayan altkümelerini, (X,Y) S_1 ve S_2 'de tanımlı rastgele değişkenleri ve H tanım kümesi $\text{Dom}H = S_1 \times S_2$ olan bir fonksiyon ise, $H(x,y)$ fonksiyonuna, (X,Y) 'nin iki boyutlu dağılım fonksiyonu denir (Shabazov, 2005).

$$H(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Tanım 2.1.2 H , tanım kümesi $\text{Dom}H = S_1 \times S_2$ olan iki boyutlu reel bir fonksiyondur. $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ dikdörtgeninin tüm köşeleri $\text{Dom}H$ 'de olsun, bu durumda B dikdörtgeninin H -hacminin tanımı aşağıda verildiği gibidir.

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1) \quad (2.2)$$

B dikdörtgeni üzerindeki H 'nin birinci farkları:

$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x,y) = H(x_2, y) - H(x_1, y)$ ve $\Delta_{y_1}^{y_2} H(x,y) = H(x, y_2) - H(x, y_1)$ şeklinde tanımlanırsa, B dikdörtgeninin H -hacmi, B üzerine H 'nin ikinci dereceden farkı olur.

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x,y) \quad (2.3)$$

Tanım 2.1.3 Köşeleri $\text{Dom}H$ 'de yer alan her bir B dikdörtgeni için $V_H(B) > 0$ ise, iki boyutlu bir reel H fonksiyonu iki-artandır denir. Dikdörtgenler üzerinde sıfırdan büyük değerli bir hacim oluşturur.

2.3 Kopula Fonksiyonları

İstatistik alanında ortaya çıkan güncel gelişmelerden biri, çok değişkenli dağılımlar ve bu dağılımları oluşturan değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarının araştırılması ve modellenmesi amacı ile kopulaların kullanımına yönelik olmuştur.

“Kopula” kelimesi, Latin kökenli “bağ, ilişki, link” anlamına gelen *copulare* kelimesinden türetilmiştir. Bu kavram ilk defa 1959 yılında Abe Sklar tarafından, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarının oluşturulmasında tek boyutlu dağılım fonksiyonlarını “bir araya getiren, ilişkilendiren” fonksiyon anlamında kullanılmıştır (Nelsen, 2006: 2).

Rassal değişkenler arasındaki bağımlılık fonksiyonları olarak tanımlanan kopulalar, düzgün dağılımlı $[0,1]$ aralığındaki tek değişkenli marjinal dağılımları, çok değişkenli dağılımlara bağlayan ve dolayısı ile kendileri de birer çok değişkenli dağılım olan fonksiyonlardır (Alhan, 2008). Diğer bir ifade ile kopulalar, değişkenlere ait marjinal dağılımların bağımlılık yapısından ayrıştırılması yolu ile değişkenler arası bağımlılığın daha açık bir şekilde modellenebilmesini sağlayan fonksiyonlardır.

Birçok durumda değişken marjinalleri normal dağılıma (Gauss dağılımına) sahip değildir. Böyle bir durumda, değişkenlere ait ortak bir dağılım tanımlanması mümkün değildir. Ayrıca, çok değişkenli açılımı (multivariate extension) mevcut olmayan, çok sayıda marjinal dağılım mevcut olması durumu da benzerdir. Kopula fonksiyonları, doğrudan iki seri yerine serilere ait iki marjinal dağılımı ilişkilendirme özelliğine sahiptirler. Serilere ait marjinaler hesaplandıktan sonra, serilerin gerçek fonksiyonel formları değerlendirilmez. Bu yüzden de kopula fonksiyonları, serilerin gerçek dağılımlarından bağımsız bir şekilde herhangi bir türdeki marjinali ilişkilendirebilmektedirler (Jondeau vd., 2007: 240).

Finansal varlıkların fiyat ve/veya getiri dağılımlarının özellikleri ve varlıklar arası bağımlılığın daha iyi modellenenebilmesine yönelik gereklilikler göz önünde bulundurulduğunda, kredi derecelendirmesi, hisse getirilerinin tahmini, risk yönetimi vb. birçok alanda son derece etkin bir şekilde kullanılabilecek bu kavram finans literatürüne ancak 1990 yılı sonrasında girebilmiştir.

2.3.1 İki Boyutlu Kopulalar

Kopula fonksiyonlarının açıklanmasına yönelik şu ana kadar yapılan tanımlardan hiçbirisi kavramın Sklar (1959) tarafından ortaya konan resmi tanımını içermemektedir. Bu nedenle bu bölümde iki boyutlu kopulaların tanımlanması amacı ile kullanılan gösterim ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.3.1.1 $C: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tanım kümesine sahip $C(u,v)$ fonksiyonu aşağıda belirtilen özellikleri sağlaması durumunda “iki boyutlu kopula” olarak adlandırılır.

1. $C(u,v)$, u ve v 'de artandır.
2. $\forall u,v \in [0,1]$ için;

$$C(u,0) = C(0,v) = 0, \quad C(u,1) = u, \quad C(1,v) = v \quad (2.4)$$

3. $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ için, $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ iken

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (2.5)$$

İlk özellik, marjinal dağılımlardan biri sabit olduğunda, diğer marjinal dağılımın artması durumunda ortak olasılığın (joint probability) artacağını ifade etmektedir. İkinci özellik ise, marjinallerden birinin görülme olasılığı sıfır olması durumunda ortak görülme olasılığının da sıfır olma gerekliliğini vurgulamaktadır. Bununla birlikte, marjinallerden birinin görülme olasılığı kesin ise ($= 1$), ortak görülme olasılığı (joint occurrence) diğer marjinalin görülme olasılığı tarafından belirlenmektedir. Üçüncü özellik, u ve v 'nin her ikisinin de artması durumunda ortak olasılığın da artacağını

ifade etmektedir. Bu yüzden bu özellik, artan birikimli dağılım fonksiyonu (cdf) koşulunun çok değişkenli bir açılımıdır (Jondeau vd., 2007: 242).

Ayrıca, $u = F(x)$ ve $v = G(y)$ olarak belirlenirse, $C(F(x), G(y))$ fonksiyonu X ve Y 'nin ortak dağılım fonksiyonunu vermektedir.

Teorem 2.3.1.2 (Sklar Teoremi) X ve Y 'nin marjinal dağılımları sırası ile F ve G , (X,Y) 'nin ortak dağılım fonksiyonu ise H ile verilmiş olsun. O zaman $\forall x,y \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki tanıma uyan bir C kopulası vardır (Nelsen, 2006: 18).

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) \quad (2.6)$$

F ve G sürekli marjinal dağılımlar ise tek bir C kopulası mevcuttur. Tersisi durumda, yani eğer C bir kopula ise ve F ile G birer marjinal dağılım fonksiyonu ise H fonksiyonu, marjinalleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır.

Marjinalleri F ve G olan ortak dağılım fonksiyonu H ve C ise $\text{Dom}C = \text{Ran}F \times \text{Ran}G$ kümesinde tanımlı ve Eşitlik 2.6'yı sağlayan bir kopula fonksiyonu olsun. F ve G 'nin yarı tersleri F^{-1} ve G^{-1} ise $\forall u,v \in \text{Dom}C$ için Eşitlik 2.7 sağlanır.

$$C(u,v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) \quad (2.7)$$

2.3.2 Çok Boyutlu Kopulalar

Şu ana dek iki-boyutlu kopulaların tanım ve özellikleri verilmiş olup, çok boyutlu kopulaların tanımını kapsayan n boyutlu Sklar Teoremi'ne izleyen paragraflarda değinilmiştir.

Tanım 2.3.2.1 $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ tanım kümesine sahip n boyutlu bir C birikimli dağılım fonksiyonu aşağıda belirtilen özellikleri sağlaması durumunda “ n boyutlu kopula” olarak adlandırılır (Mai ve Scherer, 2014: 7; Nelsen, 2006: 45):

1. $\forall u \in I^n$ ve u 'nun en az bir koordinatı $u_i = 0, i \in 1, \dots, n$ için $C(u_1, \dots, u_n) = 0$;
2. $\forall u_i \in [0,1]$ ve $\forall i \leq n$ için $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$;

3. C n -artandır: Her bir n boyutlu $B_{i=1}^n[a_i, b_i] \subset [0,1]^n$ dikdörtgeni için:

$$0 \leq \sum_{(c_1, \dots, c_n) \in B_{i=1}^n[a_i, b_i]} (-1)^{|\{i: c_i=a_i\}|} C(c_1, \dots, c_n) \leq 1.$$

n boyutlu kopula fonksiyonlarının analitik tanımını oluşturan bu üç maddeden ilki kopulaların $0 \leq P(U_1 \leq u_1, \dots, U_i \leq 0, \dots, U_n \leq u_n) \leq P(U_i \leq 0) = 0$ özelliğini, ikinci madde ise uniform marjinaller özelliğini ifade etmektedirler. Üçüncü madde de ilgili dikdörtgene tekabül eden $(U_1, \dots, U_n) \sim C$ olasılığının negatif olmama zorunluluğu belirtilmektedir.

Teorem 2.3.2.2 (Sklar Teoremi – n boyutlu kopula) H , marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ olan n boyutlu bir ortak dağılım fonksiyonu ise, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için Eşitlik 2.8’de verildiği şekilde tanımlı n boyutlu bir C kopulası mevcuttur (Nelsen, 2006).

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (2.8)$$

Yukarıdaki tanımın tersi de geçerlidir. Bir diğer ifadeyle, C n boyutlu bir kopula ve $F_1, F_2, \dots, F_n$ dağılım fonksiyonlarının ifadesi ise Eşitlik 2.8’de tanımlandığı gibi bir H ortak dağılım fonksiyonu mevcuttur.

Bununla beraber, H, C ve $F_1, F_2, \dots, F_n$ yukarıda açıklanan teoremin belirttiği şekilde ve $F_1^{-1}, F_2^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ sırasıyla $F_1, F_2, \dots, F_n$ ’nin yarı-ters fonksiyonları ise $\forall u \in I^n$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2), \dots, F_n^{-1}(u_n)) \quad (2.9)$$

Eşitlik 2.8’de n boyutlu H ortak dağılım fonksiyonu, kopula ve n adet tek değişkenli dağılım fonksiyonları kullanılarak gösterilmiş, Eşitlik 2.9’da ise n boyutlu bir kopulanın gösterimi, bileşik dağılım fonksiyonu ve tersleri alınmış n adet marjinal kullanılarak yapılmıştır. Ancak, marjinallerin tersinin alınabiliyor olması için sürekli ve tam artan birer fonksiyon olmaları gerekmektedir. Bir fonksiyonun yarı-tersinin tanımı aşağıda verildiği gibidir.

Tek boyutlu $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ dağılım fonksiyonunun yarı-tersi $F^{-1}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ olup, Eşitlik 2.10 ya da 2.11’de verilen koşullara bağlı olarak tanımlanır (Nelsen, 2006).

- a) t 'nin değer kümesi $\text{Ran}F$ ise $F^{-1}(t)$, $F(x) = t$ olacak biçimde herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ değerini alır.

$$F(F^{-1}(t)) = t \quad (2.10)$$

- b) t 'nin değer kümesi $\text{Ran}F$ değil ise;

$$F^{-1}(t) := \inf\{x|F(x) \geq t\} = \sup\{x|F(x) \leq t\} \quad (2.11)$$

$\inf$ (infimum, ebas); küme elemanlarını alttan sınırlayan sınırların en büyüğü olup, $\sup$ (supremum, eküs) ise küme elemanlarını üstten sınırlayan sınırların en küçüğüdür.

2.3.3 Bağımsızlık Kopulası ile Fréchet-Hoeffding Sınırları

Şu ana dek tanımlanan $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastlantısal değişkenlerinin birbirinden bağımsız olması durumunda ise Eşitlik 2.8'e göre bir C kopula fonksiyonu:

$$\Pi(u) \equiv C(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \quad (2.12)$$

Şeklinde tanımlanan n -boyutlu bir “bağımsızlık kopulasını” $(\Pi(u))$ ifade etmektedir.

Diğer yandan, $X_1, X_2, \dots, X_n$ rastlantısal değişkenleri arasındaki bağımlılığın alt ve üst sınırları Hoeffding (1940) ve Fréchet (1951)'in çalışmalarına dayanılarak izleyen şekilde tanımlanmıştır (Nelsen, 2006):

$$M(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\} \quad (2.13)$$

$$W(u_1, \dots, u_n) = \max\{u_1 + \dots + u_n - (n - 1), 0\} \quad (2.14)$$

$$W(u_1, \dots, u_n) \leq C(u_1, u_2, \dots, u_n) \leq M(u_1, \dots, u_n) \quad (2.15)$$

Eşitlik 2.13 ve 2.14'te yer alan W , “Fréchet-Hoeffding Alt Sınırını”, M terimi ise “Fréchet-Hoeffding Üst Sınırını” ifade etmektedir. Aynı zamanda kendileri de birer kopula fonksiyonu olan W (sadece $n=2$ için tanımlıdır) ve M , sırası ile “ters-monoton kopula” ve “eş-monoton kopula” olarak da adlandırılmaktadırlar (Hofert vd., 2018: 19).

2.3.4 Yaşam Kopulaları

Tek değişkenli bir $F(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$ dağılım fonksiyonunun “yaşam fonksiyonu $\bar{F}$ ”, $\bar{F}(x) = P(X > x)$, $x \in \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanır ve bu nedenle de $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ eşitliği sağlanmış olur. Benzer şekilde n boyutlu bir $H(x) = P(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ortak dağılım fonksiyonunun $\bar{H}$ yaşam fonksiyonu $\bar{H}(x) = P(X > x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ şeklinde tanımlanır. Ancak tek değişkenli F fonksiyonundan farklı olarak $n > 1$ için $\bar{H}(x) \neq 1 - H(x)$ 'tir. Bu nedenle, n boyutlu $X \sim H$ rassal vektörünün i . elemanının yaşam fonksiyonu $\bar{F}_i$ yukarıda bahsedildiği gibi tek değişkenli F_i fonksiyonundan ya da $\bar{H}$ çok değişkenli yaşam fonksiyonundan $\bar{F}_i(x_i) = \bar{H}(-\infty, \dots, -\infty, x_i, -\infty, \dots, -\infty)$, $x_i \in \mathbb{R}$ eşitliği yardımı ile elde edilebilir (Hofert vd., 2018: 40). Bununla birlikte, önceki bölümlerde açıklanan tek ve çok değişkenli dağılım fonksiyonlarına benzer bir şekilde, tek ve çok değişkenli yaşam fonksiyonları arasında herhangi bir bağlantı veya ilişkinin varlığı sorusu yine Sklar (1959) teoreminin yardımıyla “yaşam kopulalarının” izleyen şekilde tanımlanmasını sağlamıştır.

Teorem 2.3.4.1 (Sklar Teoremi – n boyutlu yaşam kopulası) Marjinalleri, $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ olan herhangi bir n boyutlu $\bar{H}$ yaşam fonksiyonu için n boyutlu bir $\bar{C}$ kopulası mevcuttur.

$$\bar{H}(x) = \bar{C}(\bar{F}_1(x_1), \dots, \bar{F}_n(x_n)), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.16)$$

Böylece, $\prod_{i=1}^n \text{ran} \bar{F}_i$ kümesinde tanımlı eşsiz (tek bir) $\bar{C}: I^n \rightarrow I$ yaşam kopulası:

$$\bar{C}(u) = \bar{H}(F_1^{\leftarrow}(1 - u_1), \dots, F_n^{\leftarrow}(1 - u_n)), \quad u \in \prod_{i=1}^n \text{ran} \bar{F}_i \quad (2.17)$$

Eşitlik 2.16 ile verilen tanımın tersi de geçerlidir. Bir diğer ifadeyle, $\bar{C}$ n boyutlu yaşam kopulası ve $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ tek değişkenli yaşam fonksiyonlarının birer ifadesi ise Eşitlik 2.16'da tanımlandığı gibi marjinalleri $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ olan bir $\bar{H}$ yaşam fonksiyonu mevcuttur.

2.4 Kopula Aileleri

Sklar (1959)'ın kopula teorisini ortaya koymasından bu yana kopulaların, özellikle son on beş yıl içerisindeki uygulama alanları ve türlerinin çeşitliliği geliştirilmiştir. Bu nedenle, bu çalışma kapsamında finans alanında en yaygın uygulama alanı bulan kopula aileleri ve özellikleri tanıtılacaktır.

2.4.1 Eliptik Kopula Ailesi

Eliptik kopulalar ailesi temelde, Normal kopula (Gaussian kopula) ve t -kopulalarını (t -student ya da Student t kopula) kapsayan çok değişkenli eliptik dağılımlardan türetilmişlerdir. Kopula modellemenin popüler olduğu ilk zamanlarda, çok değişkenli dağılımlardan en iyi bilineni çok değişkenli normal dağılım kuralı olduğu için ilk uygulanan kopula çeşidi Normal kopula olmuştur.

Normal kopulalar (Gaussian kopula), çok değişkenli normal dağılıma sahip rassal değişkenler arasındaki bağımlılığın modellenmesi amacı ile kullanılmaktadırlar. Φ fonksiyonu, standart birikimli normal dağılım fonksiyonunu, Φ^{-1} standart birikimli normal dağılım fonksiyonunun tersini ve Φ_ρ fonksiyonu, ρ korelasyon matrisine sahip n boyutlu standart normal dağılım fonksiyonudur.

Bu durumda, ρ korelasyona sahip n boyutlu normal kopula $C_\rho^{Gauss}(u), u \in [0,1]^n$ Eşitlik 2.18'de verildiği gibi tanımlanmıştır (Hofert vd., 2018: 87).

$$\begin{aligned} C_\rho^{Gauss}(u_1, \dots, u_n) &= \Phi_\rho(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' \rho^{-1} \mathbf{x}\right)}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\rho|}} dx_1 \dots dx_n \quad (2.18) \end{aligned}$$

$\mathbf{x} = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$ olmakla birlikte, n boyutlu C_ρ^{Gauss} kopulasının yoğunluk fonksiyonu c_ρ^{Gauss} ise;

$$c_\rho^{Gauss}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}' (\rho^{-1} - \mathbf{I}_n) \mathbf{x}\right), \quad u \in (0,1)^n \quad (2.19)$$

Eşitlik 2.19'da yer alan $\mathbf{I}$ birim matris ve $|\cdot|$: determinanttır.

Normal Kopulanın bir özelliği, kuyruk bağımlılık parametrelerinin sıfıra eşit olması yani olası kuyruk bağımlılığını göz önünde bulundurmamasıdır. Bu nedenle, risk modellemelerinde uygulama alanı sınırlıdır.

Eliptik kopulalar ailesinin bir diğer üyesi olan t -kopulası (Student t), normal kopulaya benzemekle birlikte ayırt edici özelliği, çok değişkenli Student- t dağılımından türetilmiş ve kuyruk bağımlılık parametrelerine sahip olmasıdır. Eşitlik 2.20’de, ρ korelasyon matrisine ve ν serbestlik derecesine sahip n boyutlu bir $T_{n,\rho,\nu}$ Student- t dağılımı verilmiştir.

$$T_{n,\rho,\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\pi\nu)^{n/2}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x' \rho^{-1} x}{\nu}\right)^{(\nu+n)/2}} \quad (2.20)$$

Bu durumda, t -kopula $C_{\rho,\nu}^t, u \in [0,1]^n$ Eşitlik 2.21’de verildiği şekilde tanımlanmıştır (Hofert vd., 2018: 88).

$$\begin{aligned} C_{\rho,\nu}^t(u_1, \dots, u_n) &= T_{n,\rho,\nu}(T_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, T_{\nu}^{-1}(u_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{T_{\nu}^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)(\pi\nu)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|\rho|}} \left(1 + \frac{x' \rho^{-1} x}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}} dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \quad (2.21)$$

$x = (T_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, T_{\nu}^{-1}(u_n))$ ve T_{ν} , ν serbestlik derecesine sahip tek değişkenli Student- t dağılımı olup, t -kopulanın yoğunluk fonksiyonu $c_{\rho,\nu}^t$ ise izleyen şekildedir.

$$c_{\rho,\nu}^t(u_1, \dots, u_n) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{|\rho|}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\right)^n \frac{\left(1 + \frac{x^{-1} \rho^{-1} x}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+n}{2}}}{\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{x_i^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}}, \quad u \in (0,1)^n \quad (2.22)$$

Bununla beraber, Student- t dağılımının ν serbestlik derecesi sonsuza yaklaştıkça normal dağılıma yakınsadığı için t -kopulası da normal kopulaya yakınsar (Malevergne ve Sornette, 2006: 110).

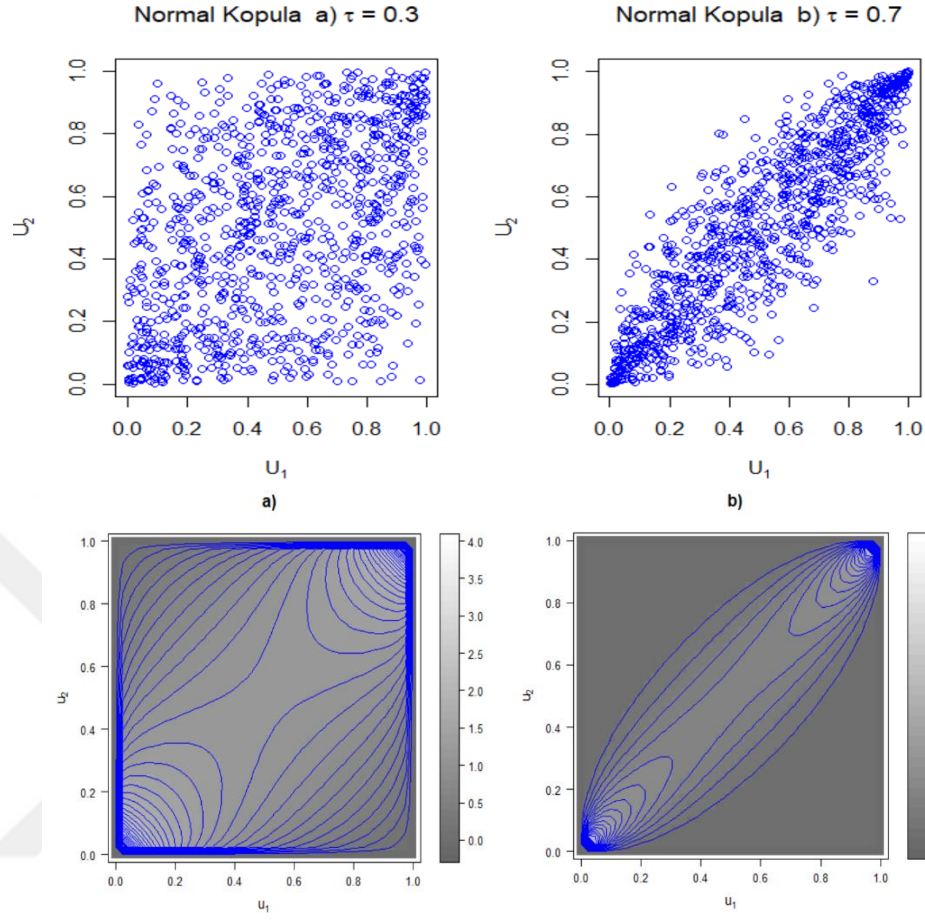
$$\nu \rightarrow +\infty \Rightarrow \sup_{u \in [0,1]^n} |C_{\rho,\nu}^t(u) - C_{\rho}^{Gauss}(u)| \rightarrow 0 \quad (2.23)$$

Normal kopula ile t -kopulanın bir diğer ortak özelliği simetrik dağılımlara (radyal simetri, merkezden çevreye her iki yönde simetrik) sahip olmalarıdır. Ancak, varlık getirileri arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesinde istenen özelliklerden birisinin radyal asimetri olmasından dolayı, radyal simetri özellikleri bu kopulaları bağımlılığın modellenmesinde yetersiz kılmaktadır. Ang ve Chen (2002) gibi bazı araştırmacıların ortaya koyduğu çalışmalar, hisse getirilerine ait ortak dağılımlarda negatif getirilerin birlikte gözlemlenme sıklığının pozitif getirilere oranla daha yüksek olduğunu yani radyal asimetrinin varlığını göstermiştir.

Normal kopulanın kuyruk bağımlılık parametreleri sıfıra eşit olmasına rağmen, t -kopula pozitif kuyruk bağımlılık parametrelerine sahiptir. Eşitlik 2.24 ile hesaplanma yöntemi verilen Üst Kuyruk Bağımlılığı (ÜKB, upper tail dependence) ve Alt Kuyruk Bağımlılığı (AKB, lower tail dependence) parametreleri, t -kopulanın radyal simetri özelliği nedeni ile birbirine eşittir (Mai ve Scherer, 2014: 57).

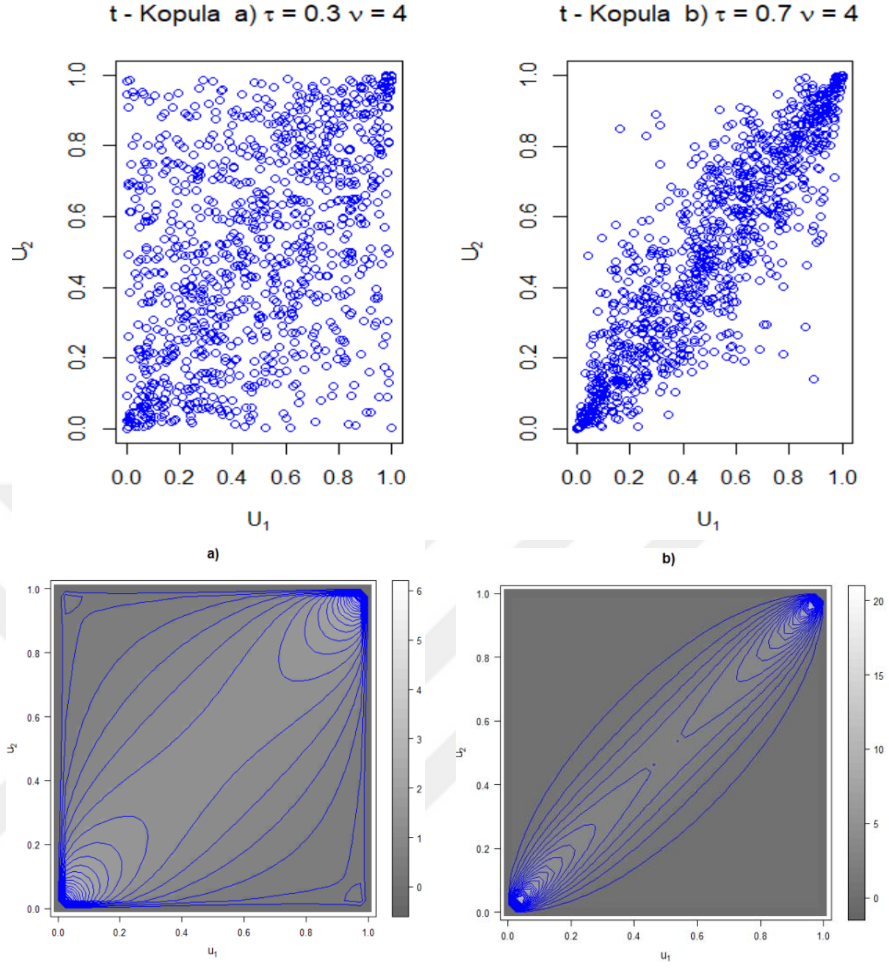
$$\text{ÜKB}_{\nu,\rho} = \text{AKB}_{\nu,\rho} = 2 \cdot t_{\nu+1} - \sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \quad (2.24)$$

Eliptik kopulaların simetri özellikleri ve karmaşık matematiksel gösterimleri nedeni ile araştırmacılar farklı türdeki kopulaların geliştirilmesi üzerinde çalışmış ve sonuçta, asimetrik özellikleri de dikkate alan ve daha kolay oluşturulabilen Arşimedyen kopulalar ortaya konmuştur. Şekil 2.2 ve 2.3'te belirli parametreler için iki boyutlu Normal ve t -kopula simülasyonlarından elde edilen 1000'er adet psödo-uniform değişkenin (u_1 ve u_2) serpilme diyagramları ile kopula yoğunluk kontur grafiklerine yer verilmiştir.



Şekil 2.2: Normal Kopula; a) Kendall tau = 0.3 ve b) Kendall tau = 0.7 için Serpilme ve Kopula Yoğunluk Kontur Diyagramları

Şekil 2.2’de yer alan serpilme diyagramları ile kopula yoğunluk kontur grafikleri incelendiğinde, u_1 ve u_2 psödo-uniform değişkenleri arasındaki kendall tau (τ) sıra korelasyonunun 0.3’ten 0.7’ye yükseltilmesi değişkenlerin diyagramın her alanında gözlemlenen yayılımını azaltarak değişkenler arası birlikteliği neredeyse bir doğruyla tanımlanabilecek boyuta getirmiştir. Kopula yoğunluk kontur grafiklerinden de artan sıra korelasyon katsayısı ile daha sınırlı bir alanda artan değişken yoğunluğu gözlemlenebilmektedir.



Şekil 2.3: t-Kopula; a) Kendall tau = 0.3, $\nu = 4$ ve b) Kendall tau = 0.7, $\nu = 4$ için Serpilme ve Kontur Diyagramları

2.4.2 Arşimedyen Kopula Ailesi

İlk defa 1986 yılında Genest ve MacKay tarafından üzerinde çalışılan Arşimedyen kopulalar, kolay oluşturulabilmeleri, radyal asimetriyi göz önünde bulunduran çeşitli ve farklı türdeki bağımlılık yapılarına sahip olmaları nedeni ile kopulaların en önemli sınıfı olarak değerlendirilmektedirler. İzleyen Tanım ve Özellikler bölümünde öncelikle iki boyutlu ve tek parametrelili Arşimedyen kopulalar tanımlanmış olmakla birlikte çok değişkenli açılımlarına bir sonraki alt bölümde yer verilmiştir.

2.4.2.1 Tanım ve Özellikler

Genellikle n değişkenli bir fonksiyon ile tanımlanan n adet değişken arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesine yönelik güçlük (karmaşıklık), Arşimedyen kopulalarda bağımlılık yapısının üretici adı verilen tek bir değişken fonksiyonu altında birleştirilmesi yolu ile azaltılmış ve böylece çok boyutlu bir formulasyon çok daha basit tek boyutlu bir hale dönüştürülmüştür (Malevergne ve Sornette, 2006: 112). Arşimedyen kopulaların kapalı formda gösterimleri mevcut olup, şu ana dek bahsedilen kopulaların aksine, çok değişkenli dağılım fonksiyonlarından türetilmemişlerdir. İki boyutlu bir Arşimedyen kopulanın tanım fonksiyonu aşağıda verilmiş olup, $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$ kapalı aralığında yer almakla birlikte φ terimi Arşimedyen kopulanın üreticisi olarak adlandırılır.

$$C_\varphi(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) \quad (2.25)$$

Bununla beraber, Arşimedyen kopulanın belirlenmesini sağlayan bir üretici fonksiyonunun $\varphi: I \rightarrow [0, \infty)$ sürekli, kesin azalan ve konveks olacak şekilde aşağıda belirlenen özellikleri sağlaması gereklidir.

a) $\varphi(0) = \infty, \varphi(1) = 0,$

b) $\forall t \in (0,1)$ için $\varphi'(t) < 0$ olur, böylece φ azalan bir fonksiyondur.

c) $\forall t \in (0,1)$ için $\varphi''(t) > 0$ olur, böylece φ konveks bir fonksiyondur.

Üretici fonksiyonunun tersi $\varphi^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0,1]$ olup, $\varphi^{-1}(0) = 1$ ve $\varphi^{-1}(\infty) = 0$ haricinde φ ile aynı özelliklere sahip, sürekli, kesin azalan ve konveks bir fonksiyondur (Topçu ve Arslan, 2012: 124).

Aslında, üretici fonksiyonun (φ) kopula türetebilmesi için $\varphi(0)$ 'ın sonsuz olma zorunluluğu yoktur. $\varphi(0) \leq \infty$ ve $\varphi(1) = 0$ olması durumunda Arşimedyen kopula üretimi için φ fonksiyonunun sözde tersi (*pseudo-inverse*) olan $\varphi^{[-1]}(t)$ fonksiyonu kullanılır.

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (2.26)$$

$\varphi^{[-1]}(t)$ fonksiyonunun tanım kümesi sıfır ile sonsuz aralığında ($\text{Dom}\varphi^{[-1]} = [0, \infty)$) olup, değer kümesi ise sıfır ile bir kapalı aralıktadır ($\text{Ran}\varphi^{[-1]} = [0, 1]$). $\varphi^{[-1]}$ fonksiyonu sürekli, $[0, \infty)$ aralığında artmayan ve $[0, \varphi(0)]$ aralığında kesin azalan olmakla birlikte, $[0, 1]$ aralığında $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ 'dur.

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Eğer, $\varphi(0) = \infty$ ise, φ tam üretici (strict generator) olur, bu durumda üretici fonksiyonun tersi ile sözde tersi birbirine eşittir ($\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$) ve $C_\varphi(u_1, u_2)$ tam Arşimedyen kopuladır.

C , üreticisi φ olan bir Arşimedyen kopula ise aşağıda yer alan özelliklere sahiptir (Nelsen, 2006: 112-113).

- a) $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1), \quad \forall u_1, u_2 \in I$; C simetriktir.
- b) $C(C(u_1, u_2), w) = C(u_1, C(u_2, w)), \quad \forall u_1, u_2, w \in I$; C birleşim özelliğine sahiptir.
- c) c sıfırdan büyük bir sabit ise ($c > 0$), $c\varphi$ de C 'nin bir üreticisidir.

Arşimedyen kopula ailesi, üretici fonksiyonu ve kopulanın genel formuna bağlı olarak çeşitli Arşimedyen kopula türlerini kapsamaktadır. Tablo 2.1'de en yaygın kullanılan iki boyutlu ve bir parametrelili (φ) Arşimedyen kopula çeşitleri, genel formülleri ve üretici fonksiyon türleri özetlenmiştir.

Tablo 2.1: Yaygın Kullanıma Sahip İki Boyutlu Arşimedyen Kopulalar ile Üretici Fonksiyonları

Kopula	Kopulanın Genel Formu	Üretici F. / $\varphi_\theta(t)$	Parametre Aralığı
Clayton	$C_\theta^{Cl}(u_1, u_2) = \max[(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}, 0]$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$
Frank	$C_\theta^F(u_1, u_2) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$\theta \in (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$
Gumbel	$C_\theta^G(u_1, u_2) = \exp \left[-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta]^{1/\theta} \right]$	$(-\ln t)^\theta$	$\theta \in [1, \infty)$
Joe	$C_\theta^{Joe}(u_1, u_2) = 1 - [(1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)^\theta (1 - u_2)^\theta]^{1/\theta}$	$-\ln(1 - (1 - t)^\theta)$	$\theta \in [1, \infty)$

Kaynak: Nelsen (2006: 116); Trivedi ve Zimmer (2007: 46)

Tablo 2.1’de yer alan kopula çeşitlerinden Clayton kopulası, güçlü alt kuyruk bağımlılığı ve göreceli zayıf üst kuyruk bağımlılığı ortaya koyması nedeni ile daha çok korrele risklerin üzerinde çalışma amacı ile kullanılmıştır. Örneğin, yapılan araştırmalara göre finansal sıkıntı dönemlerinde batık krediler arasındaki korelasyon oldukça yüksektir. İki olay arasındaki birlikte hareket etme eğiliminin ortak dağılımın alt (sol) kuyruğunda en güçlü olması durumunda Clayton kopulası uygun bir modelleme tercihi olacaktır (Trivedi ve Zimmer, 2007: 18). Bununla birlikte, θ parametresinin eksi bire yakınsaması durumunda ($\theta \rightarrow -1$) Clayton kopula, ters-monoton (W) kopulaya, θ parametresinin artı sonsuza yakınsaması durumunda ($\theta \rightarrow +\infty$) ise eş-monoton (M) kopulaya dönüşmektedir.

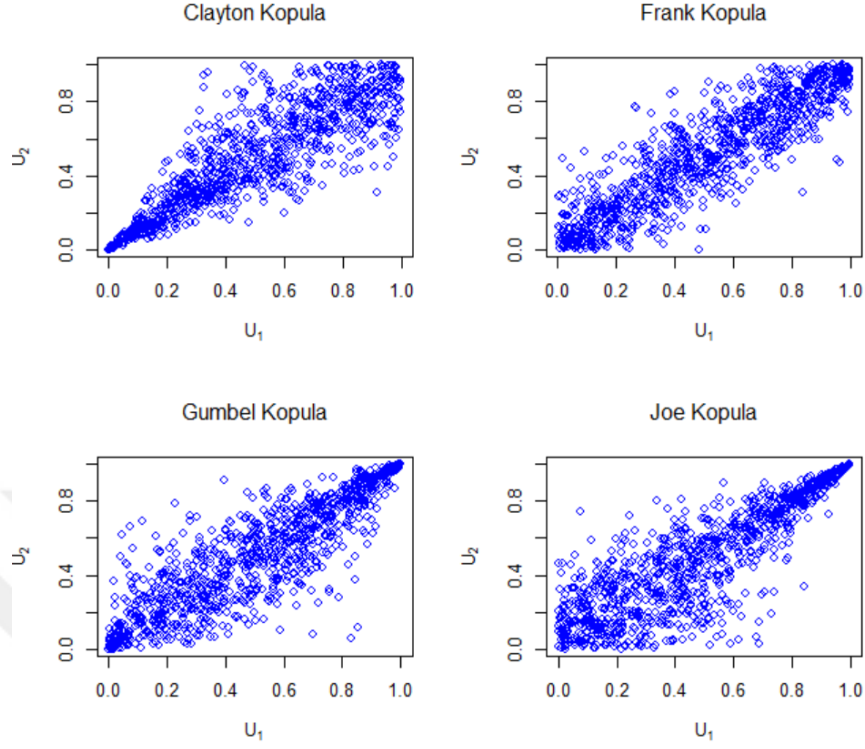
Frank kopula ise, diğer bazı kopulalardan farklı bir biçimde marjinaller arasındaki negatif bağımlılığa izin vermesi, kuyruk bağımlılığının simetrik olması (Normal ve t -kopulalar benzeri) ve her iki Fréchet sınırını da kapsaması nedeniyle popüler bir kopula çeşididir. Teorik açıdan, güçlü pozitif veya negatif bağımlılığa sahip sonuçların modellenmesinde kullanılabilecek olan Frank kopulanın, yapılan simülasyon çalışmaları ile kuyruk bağımlılığının göreceli olarak zayıf ve dağılımın ortasında en güçlü bağımlılığa sahip olduğu raporlanmıştır. Bu da Frank kopulanın kuyruk bağımlılığı zayıf veriler için daha uygun olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca, θ parametresinin sıfıra eşit olması durumunda Frank kopula, önceki bölümlerde

açıklanan bağımsızlık kopulasına ($\Pi(u)$) eşit olmaktadır. θ parametresinin eksi sonsuza yakınsaması durumunda ($\theta \rightarrow -\infty$) Frank kopula, ters-monoton (W) kopulaya, θ parametresinin artı sonsuza yakınsaması durumunda ($\theta \rightarrow +\infty$) ise eş-monoton (M) kopulaya dönüşmektedir.

Arşimedyen kopula ailesinin bir diğer üyesi olan Gumbel kopula, Clayton kopula benzeri negatif bağımlılığa izin vermezken, Clayton kopulanın tersine, güçlü üst (sağ) kuyruk bağımlılığı ile göreceli olarak zayıf alt (sol) kuyruk bağımlılığı gösterir. Veri dağılımlarının sağ ucundaki yüksek değerleri arasındaki korelasyon güçlü ancak sol ucundaki düşük değerleri arasındaki korelasyon zayıf ise bu tür bağımlılık yapısının modellenmesi amacıyla Gumbel kopula uygun bir tercih olacaktır (Trivedi ve Zimmer, 2007: 19). Ayrıca, üretici fonksiyonunun θ parametresi bire eşit olduğunda ($\theta = 1$) Gumbel kopula bağımsızlık kopulasına, artı sonsuza yakınsadığında ise ($\theta \rightarrow +\infty$) eş-monoton kopulaya dönüşmektedir. Gumbel kopula, Clayton ve Frank kopuladan farklı olarak, negatif bağımlılığa sahip olmaması nedeniyle parametre sınırında ters-monoton kopulaya dönüşme durumu da mevcut olmamaktadır.

Tablo 2.1’de genel formu ve üretici fonksiyonu verilen kopulalardan bir diğeri olan Joe kopula, negatif bağımlılığa izin vermeyerek Gumbel kopulaya benzemekle birlikte, Gumbel kopuladan çok daha güçlü üst kuyruk bağımlılığına sahiptir. Bu nedenle de Joe kopula, pozitif bağımlılığın varlığı durumunda Clayton kopulanın tersine daha çok benzemektedir. Bununla birlikte, üretici fonksiyonunun θ parametresi bire eşit olduğunda ($\theta = 1$) Joe kopula bağımsızlık kopulasına, artı sonsuza yakınsadığında ise ($\theta \rightarrow +\infty$) eş-monoton kopulaya dönüşmektedir.

Şekil 2.4’te şu ana dek bahsedilen dört farklı türdeki Arşimedyen kopulanın belirli parametre değerleri için serpilme diyagramlarına yer verilmiştir. Clayton kopulanın serpilme diyagramı incelendiğinde diyagramın sol alt köşesinde sıklaşan gözlem değerleri kopulanın sahip olduğu pozitif alt kuyruk bağımlılığının bir göstergesidir. Eşit Kendall sıra korelasyonu değerleri için ($\tau = 0.7$) dört tek parametrelili Arşimedyen kopulanın simülasyonlarından elde edilen 1000’er adet u_1 ve u_2 değişkenlerinin serpilme diyagramları incelendiğinde, Joe kopulanın yukarıda bahsedildiği gibi Clayton kopulanın tersine en çok benzeyen kopula olduğu görülebilmektedir.



Şekil 2.4: Arşimedyen Kopula Türleri (Kendall $\tau = 0.7$)

2.4.2.2 Çok Boyutlu Arşimedyen Kopula

İki boyutlu bir C_φ fonksiyonunun Arşimedyen kopula olarak tanımlanabilmesi için φ üretici fonksiyonunun taşıması gereken özellikler bir önceki bölümde açıklanmıştı. Çok boyutlu ($n \geq 3$ için) bir C_φ kopulasının tanımlanabilmesi için φ üretici fonksiyonunun taşıması gereken ek özellikler mevcuttur. İzleyen teorem, n boyutlu Arşimedyen kopula üreten bir tam φ üretici fonksiyonunun varlığı için gerekli ve yeterli koşulları tanımlamaktadır (Nelsen, 2006: 152).

Teorem 2.4.2.2.1 Kesin azalan bir $\varphi: I \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\varphi(0) = \infty$ ve $\varphi(1) = 0$ sağlamakla birlikte φ^{-1} , φ 'nin tersidir. Ancak ve ancak φ^{-1} 'in $[0, \infty)$ aralığında tam monoton olması durumunda $C^n: I^n \rightarrow I$ fonksiyonu tüm $n \geq 2$ için n boyutlu bir kopuladır.

Bu durumda, Arşimedyen kopulanın n boyutlu açılımı izleyen şekilde yapılabilir:

$$C_\varphi(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \quad (2.28)$$

Tablo 2.1’de iki boyut için genel formu verilen Arşimedyen kopulaların n boyutlu açılımları ise Tablo 2.2’de verilmiştir.

Tablo 2.2: Yaygın Kullanıma Sahip Çok Boyutlu Arşimedyen Kopulalar

Kopula Genel Formu	Parametre Aralığı
$C_\varphi^{Cl}(u) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} + 1 - n)^{-1/\theta}$	$\theta > 0$
$C_\varphi^F(u) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \dots (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right)$	$\theta > 0$
$C_\theta^G(u) = \exp \left[-[(-\ln u_1)^\theta + (-\ln u_2)^\theta + \dots + (-\ln u_n)^\theta]^{1/\theta} \right]$	$\theta \geq 1$
$C_\theta^{Joe}(u) = 1 - \left\{ 1 - \prod_{i=1}^n [1 - (1 - u_i)^\theta] \right\}^{1/\theta}$	$\theta \geq 1$

Kaynak: Joe (2015: 171); Nelsen (2006: 152-153)

2.5 Karışım Kopulalar

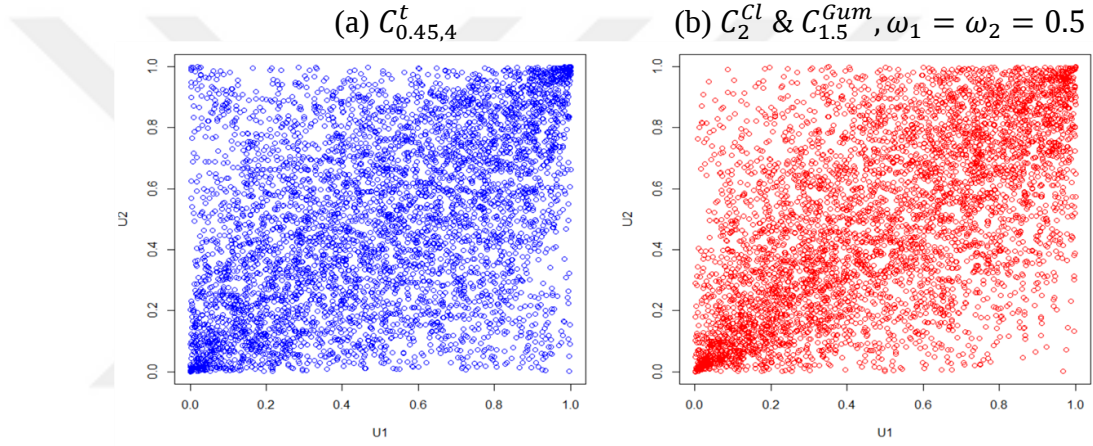
n boyutlu kopulaların konveks kombinasyonları da birer kopula fonksiyonu olduğu için şu ana dek bahsedilen kopulalara daha esnek bir yapı kazandırabilmek amacıyla n boyutlu kopulaların bir kombinasyonu olarak “Karışım kopulalar” önerilmiştir (Nelsen, 2006). Bir ω , $i \geq 2$ için $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_i)$ ağırlık vektörü ve $C_1, \dots, C_i$ n boyutlu i sayıdaki kopula fonksiyonlarının izleyen Eşitlik 2.29’daki gibi doğrusal karışımı ile bir n boyutlu Karışım kopula elde edilmektedir.

$$C_{mix}(C_1, \dots, C_i)(u; \theta) = \sum_{k=1}^i \omega_k C_k(u; \theta_k), \quad u \in [0,1]^n \quad (2.29)$$

Eşitlikte yer alan $\forall k \in \{1, \dots, i\}$ için $\sum_{k=1}^i \omega_k = 1$ ve $\omega_k \geq 0$ ’dır.

Karışım kopulalar, Eliptik ve/veya Arşimedyen kopulaların çeşitli kombinasyonlarından elde edilebilmektedirler. Bu nedenle de farklı türdeki

kopuların bağımlılık özelliklerinden aynı anda yararlanmak mümkündür. Örneğin; önceki bölümlerde bahsedildiği üzere, Clayton kopula sadece pozitif alt kuyruk bağımlılığına Gumbel kopula ise sadece pozitif üst kuyruk bağımlılığına sahipken Gumbel ve Clayton kopularının kombinasyonu ile elde edilen bir karışım kopula hem üst hem de alt pozitif kuyruk bağımlılığına sahip olabilmektedir. Şekil 2.5'te belirli parametreler için iki boyutlu Student t-kopula ($C_{\rho, \nu}^t$) ile iki boyutlu Clayton ve Gumbel kopuların eşit ağırlıklı kombinasyonundan elde edilen karışım kopulanın (C_{mix}) serpilme diyagramlarına yer verilmiştir.



Şekil 2.5: (a) Student t kopula ile (b) Clayton - Gumbel Karışım Kopula

2.6 Kopula Tahmin Yöntemleri

Kopula tahmin yöntemleri; parametrik, yarı-parametrik ve parametrik olmayan yöntemler olmak üzere üç temel başlık altında sınıflandırılmaktadırlar. Parametrik tahmin yöntemleri, çok değişkenli veri dağılımının bilindiğini ve dolayısı ile gerçek modelin belirli bir çok değişkenli dağılım ailesine ait olduğunu varsaymaktadır. Bir diğer ifadeyle, parametrik yöntemler her bir marjinal dağılım ile birlikte çok değişkenli bağımlılığı modelleyen kopula ailesinin de bilindiğini farz etmektedir. Tek değişkenli marjinal dağılımlarının bilinmediği durumlarda ise yarı-parametrik kopula tahmin yöntemleri tercih edilmektedir. Yarı-parametrik yöntemlerde, tek değişkenli marjinal dağılımlarla ilgili herhangi bir varsayımda bulunulmazken, sadece kopulanın parametrik gösteriminden yani belirli bir kopula ailesinin varlığı varsayımından yararlanılmaktadır. Parametrik olmayan tahmin yöntemlerinde ise tek değişkenli marjinal dağılımlar ile kopula ailesinin türü hakkında belirli bir varsayım mevcut

olmayıp kopula tahmininde ampirik kopula ve kernel tahmincisi gibi parametrik olmayan yöntemlerden yararlanılmaktadır.

2.6.1 Parametrik Tahmin Yöntemleri

Parametrik tahmin yöntemleri, tek değişkenli marjinal dağılımların ve değişkenler arası bağımlılığın türü ve gücünü modelleyen parametrik kopula ailesinin bilindiğini varsaymakla birlikte marjinal dağılım parametreleri ile kopula parametrelerinin birlikte ya da ayrı tahminine dayalı tek ve birden çok aşamalı yöntemler olmak üzere iki alt grupta sınıflandırılırlar. Her bir yöntemin detayına ise izleyen alt bölümlerde yer verilmiştir.

2.6.1.1 En Çok Olabilirlik (MLE)

H ortak dağılımının tek değişkenli marjinalleri $F_1, F_2, \dots, F_n$ ve C fonksiyonu; parametresi (parametre vektörü) θ ($\theta \in \Theta$) olan $X_1, X_2, \dots, X_n$ değişkenleri arasındaki n boyutlu bağımlılık yapısını temsil eden parametrik bir kopula fonksiyonu olsun.

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1; \alpha_1), F_2(x_2; \alpha_2), \dots, F_n(x_n; \alpha_n); \theta) \quad (2.30)$$

Yukarıdaki tanımda yer alan θ terimi ($\theta \subseteq \mathbb{R}^p$) kopula parametre seti olmakla birlikte Eşitlik 2.30'da yer alan α_i ise, $i = 1, 2, \dots, n$ için F_i marjinalinin parametresini (parametre vektörünü) ifade etmektedir. Örneğin, H ortak dağılımının iki boyutlu olduğunu ($i = 1, 2$) ve normal dağıldığını varsayarsak $\alpha_i = (\mu_i, \sigma_i)$ ve $\theta = \rho_{1,2}$ olur.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal değişkenlerinin T büyüklüğünde $T = \{x_{1t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ bir örnekleme için log-olabilirlik fonksiyonu (Mai ve Scherer, 2014; Malevergne ve Sornette, 2006):

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{X}; \alpha_i; \theta) &= \sum_{i=1}^n \sum_{t=1}^T \ln f_i(x_{it}; \alpha_i) + \\ &\quad \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \alpha_1), \dots, F_n(x_{nt}; \alpha_n); \theta) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Eşitlik 2.31'deki $f_i(\cdot; \alpha_i)$ terimi, $F_i(\cdot; \alpha_i)$ marjinal dağılım fonksiyonuna ait marjinal yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedir. Benzer şekilde, $c(\cdot; \theta)$ terimi de

$C(\cdot; \theta)$ kopulasının yoğunluk fonksiyonudur. Marjinallerin parametre vektörü α_i ile θ kopula parametresini (parametre vektörünü) eş anda (tek aşamada) tahminleyen en çok olabilirlik tahmincisi $\hat{\theta}_{MLE}$ ise izleyen şekilde tanımlanabilmektedir.

$$\hat{\theta}_{MLE} = \arg \max_{\alpha_i, \theta} \ell(\mathbf{X}; \alpha_i; \theta) \quad (2.32)$$

Belirli uygunluk şartları altında $\hat{\theta}_{MLE}$; tutarlı, asimptotik etkin ve asimptotik normal dağılım özelliklerine sahip bir tahmincidir. Buna rağmen, en çok olabilirlik yöntemine (Maximum Likelihood Estimation, MLE) yöneltilen iki temel eleştiri mevcuttur. Bunlardan ilki; çok değişkenli H dağılımlarının boyutu arttırıldıkça tahmin edilmesi gereken $(\alpha_i; \theta)$ parametre vektörü büyümekte bu da log-olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonunu zorlaştırmakta ve fonksiyonun global maksimum yerine lokal (bölgesel) bir maksimum noktasının belirlenme riskini arttırmasıdır. İkinci eleştiri ise tek değişkenli $F_1, F_2, \dots, F_n$ marjinallerine dair yapılan parametrik varsayımlara yöneliktir. Bu varsayımların hatalı olması kopula parametresi θ 'nın tahminini etkileyecektir.

2.6.1.2 Marjinallere İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları Yöntemi (IFM)

En çok olabilirlik yöntemine yöneltilen eleştirilerden yola çıkan Joe ve Xu (1996) yukarıda açıklanan $(\alpha_i; \theta)$ parametre vektörünün tahminini tek değişkenli marjinal parametrelerinin tahmini ile kopula parametrelerinin tahmini olmak üzere farklı aşamalara ayırmıştır. “Marjinallere ilişkin çıkarsama fonksiyonları” (Inference Functions for Margins, IFM) olarak adlandırılan bu yöntemin ilk aşamasında $i = 1, 2, \dots, n$ için F_i marjinallerinin α_i parametre vektörü her bir marjinal için ayrı ayrı en çok olabilirlik yöntemi ile tahmin edilmektedir.

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{1,T} &= \arg \max_{\alpha_1} \sum_{t=1}^T \ln f_1(x_{1t}; \alpha_1) \\ &\vdots \\ \tilde{\alpha}_{n,T} &= \arg \max_{\alpha_n} \sum_{t=1}^T \ln f_n(x_{nt}; \alpha_n) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Sonraki aşamada ise ilk aşamada tahminlenen $\tilde{\alpha}_{i,T}$ parametreleri marjinal dağılımlarında yerlerine konarak yine en çok olabilirlik yöntemi ile kopula parametresinin (parametre vektörünün) tahmini gerçekleştirilmektedir.

$$\tilde{\theta}_{IFM} = \arg \max_{\theta} \sum_{t=1}^T \ln c(F_1(x_{1t}; \tilde{\alpha}_{1,T}), \dots, F_n(x_{nt}; \tilde{\alpha}_{n,T}); \theta) \quad (2.34)$$

Joe ve Xu (1996), belirli uygunluk koşulları altında $\tilde{\theta}_{IFM}$ tahmincisinin asimptotik olarak tutarlı ve normal dağılıma özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir. IFM yöntemi tüm parametrelerin eş anlı maksimizasyonunu gerektirmemesi nedeniyle daha hızlı ve kolay uygulanabilir bir yöntem olarak ortaya konmuştur.

2.6.2 Yarı-Parametrik Tahmin Yöntemleri

Yarı-parametrik kopula tahmin yöntemleri, Momentler Yöntemi (Method of Moments) ve Psödo (Sözde) En Çok Olabilirlik (Pseudo Maximum Likelihood Estimation, PMLE) yöntemi olmak üzere iki ayrı başlık altında sınıflandırılabilirler.

2.6.2.1 Momentler Yöntemi

Momentler yönteminde Kendall tau ve Sperman sıra korelasyonu gibi uyumluluk ölçülerinden yararlanılarak parametrik bir kopula fonksiyonunun θ parametresi tahmin edilebilmektedir. Sıra korelasyonları, verilerin marjinal dağılımları ile değil bağımlılık yapıları / kopulaları ile ilişkilidir. Dolayısı ile Kendall tau (τ) ve Sperman (ρ_s) sıra korelasyonları kopula parametresinin bir fonksiyonu olarak ($\theta \mapsto f(\theta) = \tau$) ifade edilebilmektedirler. Birçok kopula ailesi için $f(\theta)$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığında tanımlı ve kesin artandır. $f(\cdot)$ fonksiyonunun tersi $f^{-1}(\cdot)$ 'in tanımlanmasıyla kopula parametresi tahmin edilebilmektedir. Oakes (1982), iki boyutlu Clayton kopulanın θ parametresini bu yöntemle hesaplamıştır. Genest ve Rivest (1993) ise bu yöntemin analizini iki boyutlu Arşimedyen kopulalar için ortaya koymuştur (Mai ve Scherer, 2014; Malevergne ve Sornette, 2006).

Bağımlılık Yapıları ve Bağımlılık Ölçüleri bölümünde detaylı tanımları verilen Kendall tau ve Sperman sıra korelasyonlarının, Eliptik ve bazı Arşimedyen kopulalar

için kopula parametresinin birer fonksiyonu olarak ifadelerine yer verilmiştir (bkz. Tablo 4.1). Bunlar arasından, örneğin Gumbel kopula için $f(\cdot)$ fonksiyonu:

$$f(\theta) = \frac{\theta-1}{\theta}, \quad f: [1, \infty) \rightarrow [0,1) \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanmış olup bu durumda $f^{-1}(\cdot)$ ters fonksiyonu da aşağıdaki gibidir.

$$f^{-1}(\hat{t}) = \frac{1}{1-\hat{t}} \quad (2.36)$$

Eşitlik 2.36'da yer alan $\hat{t}$ terimi veri setinden hesaplanmış Kendall tau sıra korelasyonunun örneklem versiyonudur. Momentler yöntemi basit ve özellikle iki boyutlu kopulalar için uygulanması kolay bir yöntem olmasına rağmen, ikiden fazla boyuta sahip kopulalar söz konusu olduğunda çok değişkenli bağımlılık ölçüleri ile çok boyutlu denklem sistemlerinin çözümünü gerektiren bu yöntemin uygulanması da zorlaşmaktadır.

2.6.2.2 Psödo En Çok Olabilirlik Yöntemi (PMLE)

Momentler yöntemine bir alternatif olarak, Genest vd. (1995) tek değişkenli marjinal dağılımlar ile ilgili herhangi bir parametrik varsayımda bulunmadan sadece kopula fonksiyonunun parametrik gösteriminden yararlanan Psödo (Sözde) En Çok Olabilirlik yöntemini (Pseudo Maximum Likelihood Estimation, PMLE) ortaya koymuştur.

Diğer kopula tahmin yöntemlerinin açıklanması esnasında bahsedildiği gibi T büyüklüğündeki $T = \{X_{1t}, \dots, X_{nt}\}_{t=1}^T$ örnekleminin, $F_1, F_2, \dots, F_n$ sürekli marjinalleri ile $\{C(u_1, \dots, u_n; \theta)\}$ ailesine üye $C(\cdot; \theta)$, $\theta \in \Theta$ kopulasına sahip bir n boyutlu H ortak dağılımından elde edildiğini farz edelim. Kopula fonksiyonlarının tanımından (Sklar, 1959) U rassal vektörüne ait i . elemanın $u_i = F_i(x_i)$ olduğu bilinmektedir. Marjinal dağılımların bilinmemesi veya uygun bir parametrik modelin mevcut olmaması durumunda U vektörünün u_i elemanı, F_i marjinalinin $\hat{F}_i$ ampirik dağılım fonksiyonundan elde edilebilecektir. Bir $X = (X_1, \dots, X_T)$ örneklemini için tek değişkenli $\hat{F}$ ampirik dağılım fonksiyonu ise izleyen şekilde tanımlanmıştır.

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{\{X_i \leq x\}}, \quad T \in \mathbb{N}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.37)$$

Eşitlik 2.37’de yer alan $\mathbf{1}$ gösterge fonksiyonunu ifade etmekte olup $X_i \leq x$ sağlanması durumunda bir değerini alır. Sürekli marjinal dağılımlar göz önünde bulundurulduğunda, ampirik dağılım fonksiyonları sıra istatistikleri ile yakından ilişkilidir. Bunun yanında, çok değişkenli bir ampirik dağılım ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\hat{H}(x) = \hat{H}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{1}_{\{X_{1i} \leq x_1, \dots, X_{ni} \leq x_n\}}, \quad T \in \mathbb{N}, \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \quad (2.38)$$

Tek ve çok değişkenli ampirik dağılımlar sırasıyla Eşitlik 2.37 ve 2.38’deki gibi tanımlanmalarına rağmen, kopula fonksiyonları göz önünde bulundurulduğunda örnekleme yer alan en büyük X gözlem değeri için $u = F(x) = T/T = 1$ sınır değeri, kopula yoğunluk fonksiyonlarının $[0,1]^n$ aralığının içinde tanımlı olmaları durumunda sorun yaratabilmektedir. Bu nedenle, eşitliklerde yer alan $1/T$ yerine genellikle $1/T + 1$ kullanılmaktadır. Asimptotik olarak, T sonsuza ($T \rightarrow \infty$) yakınsadıkça, $(T+1)/T$ ’nin bire yakınsaması $[(T+1)/T \rightarrow 1]$ nedeni ile bu iki seçim birbirine eşittir. Ancak, ampirik fonksiyonlardan elde edilen bu $u_i, i = 1, \dots, T$ vektörü, $C(\cdot; \theta)$ kopulasından elde edilen gerçek bir örnekleme yansıtmaz. Ayrıca, gözlem sıralarının her bir gözlem için örneklemin tamamından hesaplanması stokastik bağımlılığa yol açarken, $1/T$ yerine $1/T + 1$ ’in kullanılması $\mathcal{U}[0,1]$ aralığında dağılım varsayımından hafif bir kaymaya yol açmaktadır. Bununla birlikte, bahsedilenlerin tamamı çok küçük örneklem için sorun teşkil etmektedir (Mai ve Scherer, 2014).

Psödo En Çok Olabilirlik yönteminde, ampirik fonksiyonlardan elde edilen psödo-değişkenler log-olabilirlik fonksiyonundaki yerlerine konarak (Eşitlik 2.39) en çok olabilirlik yöntemi ile (Eşitlik 2.40) θ kopula parametresinin (parametre vektörünün) tahmini gerçekleştirilmektedir.

$$\ell(\mathbf{X}; \theta) = \sum_{i=1}^T \ln c \left(\underbrace{\frac{T}{T+1} \hat{F}_{1,T}(X_{1i})}_{u_{1i}}, \dots, \underbrace{\frac{T}{T+1} \hat{F}_{n,T}(X_{ni})}_{u_{ni}}; \theta \right) \quad (2.39)$$

$$\hat{\theta}_{PMLE} = \arg \max_{\theta} \ell(\mathbf{X}; \theta) \quad (2.40)$$

Genest vd. (1995), belirli uygunluk koşulları altında $\hat{\theta}_{PMLE}$ tahmincisinin tutarlı ve asimptotik normal dağılma özelliklerine sahip olduğunu göstermiştir.

2.6.3 Parametrik Olmayan Tahmin Yöntemleri

Kopula tahmin yöntemlerinin geliştirilmesine yönelik yapılan çalışmalar bu alanda kullanılabilecek çeşitli yöntemleri ortaya koymuştur. Bu yöntemler arasından, yukarıdaki bölümlerde en popüler ve yaygın kullanım alanı bulan parametrik ve yarı-parametrik yöntemlere yer verilmeye çalışılmıştır. Tek değişkenli marjinaler ile birlikte kopula ailesinin de bilinmediği ya da belirli bir parametrik ailenin belirlenme varsayımını gerektirmeyen parametrik olmayan kopula tahmin yöntemlerine ise izleyen bölümlerde yer verilmiştir.

2.6.3.1 Ampirik Kopula

Ampirik kopula ya da asimptotik olarak benzer formlarının varlığı ilk olarak 1970’li yıllara Rüschendorf (1976) ile Deheuvels (1979, 1981)’in çalışmalarına dayanmaktadır. Yukarıda bahsedilen marjinal dağılımların ampirik dağılımlarına benzer bir şekilde, n boyutlu bir H ortak dağılımından alınan T büyüklüğündeki bir örneklem $T = \{X_{1t}, \dots, X_{nt}\}_{t=1}^T$ için C kopula fonksiyonunun parametrik olmayan doğal tahmincisi izleyen eşitlikteki gibi tanımlanmıştır (Hofert vd., 2018).

$$\hat{C}(u) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \prod_{j=1}^n \mathbf{I}_{\{U_{ij} \leq u_j\}}, \quad i = (1, \dots, T), \quad j = (1, \dots, n), \quad u \in [0,1]^n \quad (2.41)$$

Eşitlik 2.41’de yer alan ve psödo-değişkenlerin ampirik dağılımına benzetilebilecek $\hat{C}$ terimi, H ortak dağılımının “ampirik kopulası” olarak tanımlanmıştır. $\hat{C}$, C kopulasının tutarlı bir tahmincisi olmakla birlikte asimptotik özellikleri aşağıda tanımlanan “ampirik kopula sürecini” izlemektedir.

$$\sqrt{T} \left(\hat{C}(u) - C(u) \right), \quad u \in [0,1]^n \quad (2.42)$$

Ampirik kopula süreci, özellikle kopula fonksiyonlarının bilinmediği birçok tahmin (çıkarılım) prosedürünün asimptotik geçerliliğinin gösterilmesinde kullanılan anahtar bir teorik araçtır.

2.6.3.2 Kernel Kopula Tahmincisi

Fermanian ve Scaillet (2003) kopula ve türevlerinin kernel tahmincilerine ait asimptotik özelliklerini belirleyerek parametrik olmayan bir kopula tahmin yöntemi ortaya koymuşlardır. Her ne kadar Ampirik kopula gibi mevcut parametrik olmayan kopula tahmin yöntemlerini geliştirmek amacıyla ortaya konan bir yöntem olsa dahi, çok sayıda gözlem içeren büyük örneklem gerektirmesi (30 ya da 40 yıllık günlük veri gibi) yöntemin en büyük dezavantajıdır. Nitekim büyük bir örneklem değerlendirilmeye alındığı zaman dilimi içerisinde değişkenler arası bağımlılık yapısının sabit olmaması muhtemeldir. Bu nedenle, aşağıda yöntemin kısa bir özetine yer verilmiş olup daha detaylı bilgiye Fermanian ve Scaillet (2003)'ün çalışmasından ulaşılabilir.

$X_1, X_2, \dots, X_n$ rassal değişkenleri arasındaki n boyutlu bağımlılık yapısını temsil eden bir C kopulası ile bu değişkenlerin n boyutlu ortak dağılım fonksiyonu H olsun. Bununla birlikte, F_i tek değişkenli marjinal dağılımları ve $T = \{x_{1t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ ise değişkenlerin T büyüklüğündeki bir örneklemi ifade etmektedirler. $H(x)$ ile $F_i(x)$ dağılımlarının kernel tahminleri aşağıdaki gibidir.

$$\hat{F}_i(x_i) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi\left(\frac{x_i - x_{it}}{h_i}\right) \quad (2.43)$$

$$\hat{H}(x) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x_i - x_{it}}{h_i}\right) \quad (2.44)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \quad (2.45)$$

Eşitlik 2.43 ile 2.44'te yer alan $h_i \in \mathbb{R}^n (h_1, \dots, h_n)$ T'nin bir fonksiyonu olarak ifade edilen bant genişliğidir (bandwidth). C kopulasının $\hat{C}$ kernel tahmincisi ise:

$$\hat{C}(u_1, \dots, u_n) = \hat{H}(\hat{q}) \quad (2.46)$$

olup, $\hat{q}$ terimi i. elemanı $\hat{F}_i$ 'nin u_i -yüzdelik dilimi olan bir vektörü ifade etmektedir. Belirli uyumluluk koşulları altında, $\hat{C}$ kernel tahmincisi asimptotik olarak normal dağılmaktadır.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

ASMA (VINE) KOPULALAR

Bir önceki bölümde temel özellikleri açıklanan kopula fonksiyonlarının birçoğu iki boyutlu olup ikiden fazla değişken arasındaki çok boyutlu bağımlılık yapılarını modelleyebilen kopula türü sınırlıdır. Bununla birlikte, çok boyutlu bağımlılık yapılarının modellenemediği Eliptik kopulalardan biri olan Normal kopula, radyal simetri ve sıfır kuyruk bağımlılığı katsayısına sahip olması nedeniyle çok değişkenli bağımlılık yapılarının modellenmesinde yeterli bulunmamıştır. Eliptik kopula ailesinin bir diğer üyesi olan Student t kopula ise simetrik kuyruk bağımlılığı ve tek bir ν serbestlik derecesi parametresine sahip olması nedeniyle çok boyutlu ve asimetrik kuyruk bağımlılığı yapılarının modellenmesinde yeterli görülmemiştir. Benzer bir şekilde, Arşimedyen kopulalar da çok değişkenli ve karmaşık bağımlılık yapılarını tek bir parametre ile modellemeye çalıştıkları için eleştirilmişlerdir. Bu ve benzeri eleştiriler, araştırmacıların asimetrik ve karmaşık çok boyutlu bağımlılık yapılarını modelleyebilen alternatif kopula fonksiyonları geliştirmelerini sağlamıştır. Sklar (1959) teoreminden yararlanarak n değişkenli bir F ortak dağılımının izleyen şekilde gösterilebildiğinden bahsedilmiştir:

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (3.1)$$

Eşitlik 3.1'in her bir değişken için kısmi türevinin alınmasıyla F ortak dağılımının f olasılık yoğunluk fonksiyonu, marjinal ve kopula yoğunluk fonksiyonları türünden elde edilebilmektedir.

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \dots \partial F_n(x_n)} \cdot \frac{\partial F_1(x_1)}{x_1} \cdot \dots \cdot \frac{\partial F_n(x_n)}{x_n} \\ &= c_{1\dots n}(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Sklar (1959) teoremine dayanan ortak yoğunluk fonksiyonlarının yukarıdaki açılımı ve iki değişkenli kopulalar ile modellenebilmeleri “Asma” (“Vine”) kopulaların geliştirilmesini sağlayan temel etmenleri oluşturmaktadır.

“Asma” kopula ya da bir diğer adıyla “ikili kopula yapıları” (pair-copula constructions, PCC), ilk olarak Joe (1996) tarafından tanımlanan ve sadece iki boyutlu kopula fonksiyonlarından oluşturulan çok değişkenli dağılım fonksiyonlarıdır. Joe (1996) sonrasında Bedford ve Cooke (2001, 2002) bu ikili kopula yapılarının olasılık yoğunluk fonksiyonlarını tanımlamış ve daha da önemlisi bu ikili yapıların oluşturulabilmesine yönelik grafiksel bir yöntem önermiştir. Böylece, çok değişkenli karmaşık bağımlılık yapıları sadece iki boyutlu kopulalardan yararlanılarak modellenebilmekte ve bu nedenle de değişkenler arası farklılık gösteren asimetrik bağımlılık yapılarına izin verilebilmektedir. İzleyen paragraflarda, ikili kopula yapılarının tanımı ile bu yapıların oluşturulmasından başlayarak, “Düzenli Asma” (“Regular Vine”) kopulalarının geliştirilmesine ve parametre tahmini konularına yer verilmiştir.

3.1 İkili Kopula Yapıları (PCC)

Joe (1996), n adet tek değişkenli marjinal dağılım ve her bir marjinal çifti arasındaki bağımlılığı temsil eden $n(n - 1)/2$ adet koşullu ve koşulsuz bağımlılık parametresi ile n -değişkenli bir dağılım sınıfı oluşturmuştur. Çok değişkenli bir F ya da $F_{1,...,n}$ dağılımının sürekli marjinalleri $F_1, \dots, F_n$ ve C iki boyutlu bir kopula fonksiyonu olsun. $S \subset \{1, \dots, n\}$ olmak üzere F_S üst sıralı marjinalleri ve f_S yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedirler. $k = j + 1$ olması durumunda C_{jk} ($j < k$), F_j ve F_k marjinalleri ile ilişkilidir. $k > j + 1$ olması durumunda ise C_{jk} , j ve k arasında endekslenen değişkenlerin varlığında j . ve k . değişkenlerin koşullu dağılımları ile ilişkilidir. Ayrıca, $F_{j|S}$ ($j \notin S$), S 'de endekslenen değişkenlerin varlığında j . değişkenin koşullu dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. $S_j = S \cup \{j\}$ ve tüm yoğunluk fonksiyonlarının tanımlı olması durumunda;

$$F_{j|S}(z_j|y_S) = \int_{-\infty}^{z_j} f_{j|S}(y_j|y_S) dy_j \quad \text{ve} \quad f_{j|S}(y_j|y_S) = f_{S_j}(y_{S_j}) / f_S(y_S). \quad (3.3)$$

$C(u_1, u_2; \theta)$, Fréchet üst sınırı ile bağımsızlık kopulasını da içeren iki boyutlu bir kopula ailesini temsil etmektedir. Ayrıca, θ parametresinin artması ile C kopulasındaki bağımlılığın arttığı ve bağımsızlık durumunda $\theta = \theta_I$ ile Fréchet üst sınırında $\theta = \theta_U$

eşitliklerinin sağlandığı varsayılmıştır. $j < k$ için $\theta_{jk} = \theta_{kj}$ eşitliğini sağlayan bir teta parametresi ve $C_{jk} = C(\cdot; \theta_{jk})$ kopula fonksiyonu mevcuttur. $1 \leq j < n$ için çok değişkenli F dağılımının $(j, j+1)$ iki değişkenli marjinali izleyen şekilde tanımlanmıştır.

$$F_{j,j+1}(y_j, y_{j+1}) = C_{j,j+1}(F_j(y_j), F_{j+1}(y_{j+1})) \quad (3.4)$$

Eşitlik 3.4'teki gibi tanımlanan iki değişkenli marjinaller ile C_{jk} kopula fonksiyonlarının yardımıyla $3 \leq k < n$ için $F_{1...k}, \dots, F_{n-k+1...n}$ üst sıralı marjinalleri farklı k değerleri için sırasıyla tanımlanabilecek ve en sonunda $F = F_{1...n}$ fonksiyonunun tanımına ulaşılabilecektir. Örneğin, $n = 3$ için tek değişkenli marjinalleri F_1, F_2, F_3 ile iki değişkenli marjinalleri F_{12} ve F_{23} olan üç değişkenli $F = F_{123}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilecektir.

$$F_{123}(y_1, y_2, y_3; \theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}) = \int_{-\infty}^{y_2} C_{13}(F_{1|2}(y_1|z_2; \theta_{12}), F_{3|2}(y_3|z_2; \theta_{23})) F_2(dz_2) \quad (3.5)$$

Eşitlik 3.5'te yer alan $F_{1|2}$ ile $F_{3|2}$, F_{12} ve F_{23} fonksiyonlarından elde edilen koşullu kümülatif dağılım fonksiyonlarıdır. Yukarıda yer alan θ_{13} ise, ikinci marjinalin varlığında birinci ve üçüncü marjinaller arasındaki koşullu bağımlılığın parametresi olarak yorumlanabilir. Joe (1996), yukarıdaki örneğin adım adım farklı n değerleri için uygulanabileceğini ve dolayısıyla n -boyutlu bir F fonksiyonunun izleyen eşitlikteki gibi tanımlanabileceğini belirtmiştir.

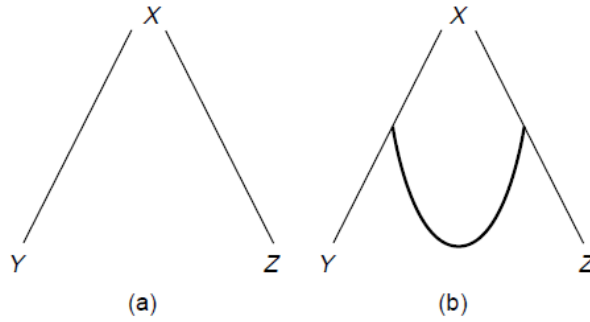
$$F_{1...n}(y_1, \dots, y_n; \theta_{12}, \dots, \theta_{1n}) = \int_{-\infty}^{y_2} \dots \int_{-\infty}^{y_{n-1}} C_{1n}(F_{1|2...n-1}(y_1|z_2, \dots, z_{n-1}; \theta_{12}, \dots, \theta_{n-2,n-1}), F_{n|2...n-1}(y_n|z_2, \dots, z_{n-1}; \theta_{23}, \dots, \theta_{n-1,n})) * F_{2...n-1}(dz_2, \dots, dz_{n-1}; \theta_{23}, \dots, \theta_{n-2,n-1}) \quad (3.6)$$

Çok boyutlu dağılım fonksiyonlarının koşullu ve koşulsuz marjinalleri ile sadece iki boyutlu kopula fonksiyonlarının yardımıyla tanımlanmasını sağlayan Joe (1996),

sonraki çalışmaların ve dolayısıyla Düzenli Asma kopulaların geliştirilmesinin önünü açmıştır. Aslında Joe (1996) yukarıda, çok değişkenli bir kopulanın “ikili kopula yapıları” (pair copula constructions, PCC) ile dağılım fonksiyonları türünden ilk tanımını ortaya koymuştur. Ayrıca, açıklanan bu yapı, Asma kopulaların geliştirilmesinden sonra bir “D-vine” yapısı olarak adlandırılmıştır. Bedford ve Cooke (2001, 2002) ise çok değişkenli bir kopulanın ikili kopula yapıları ile yoğunluk fonksiyonları türünden tanımını ortaya koymuştur.

3.2 Düzenli Asma (Regular Vine)

Bedford ve Cooke (2001, 2002), grafiksel bağımlılık modellerinden yararlanmış ve belirsizlik analizlerinde kullanılan Markov ağaçlarının koşullu bağımsızlık özelliğini esneterek koşullu bağımlılığa izin veren yeni bir model sınıfı önermiştir. “Asma” (“Vine”) olarak adlandırılan bu modeller yuvalanmış (iç içe) ağaçlardan oluşan grafiksel modellerdir. Şekil 3.1’de üç değişkenin (X,Y ve Z) ağaç ve Asma gösterimlerine yer verilmiştir.



Şekil 3.1: X,Y ve Z Değişkenlerinin Ağaç (a) ve Asma (b) Modelleriyle Gösterimi

Kaynak: Kurowicka ve Cooke (2006: 92)

Şekilden de görülebildiği gibi Asma modelinde X değişkeninin varlığına bağlı olarak Y ve Z değişkenleri üzerine koşullu bir kısıt uygulanabilmektedir. Asma modeli aslında birbirini izleyen ağaçlar dizisi olup $(\mathcal{V} = \{T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\})$ bir ağacın $(T_i, i = 1, 2, \dots, n - 1)$ köşeleri (E_i) bir sonraki ağacın (T_{i+1}) düğümlerini (N_{i+1}) oluşturmaktadır.

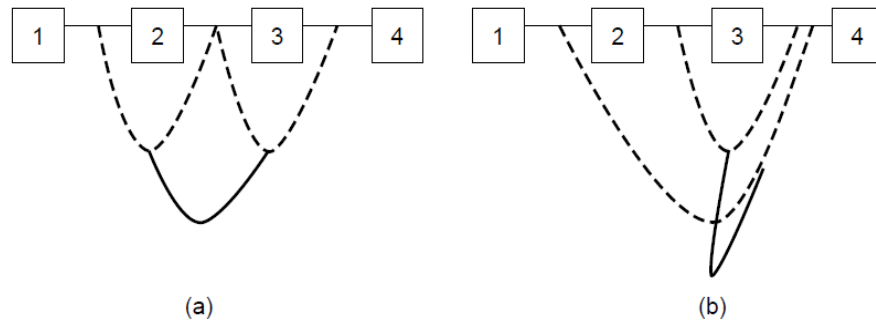
Tanım 3.2.1 (Asma ile Düzenli Asma) $\mathcal{V}$ aşağıdaki özellikleri sağlaması durumunda n elemanlı bir “Asma (Vine)” olarak tanımlanır (Bedford ve Cooke, 2002; Kurowicka ve Cooke, 2006):

1. $\mathcal{V} = \{T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\}$ setine sahip bağlantılı ağaçlar dizisidir.
2. T_1 ağacı, $N_1 = \{1, \dots, n\}$ düğümleri ile $E_1 = \{1, \dots, n-1\}$ köşe setine sahiptir; $i = 2, \dots, n-1$ için T_i ağacı $N_i = E_{i-1}$ düğümlerine sahip bağlantılı bir ağaçtır.

İlk iki maddeye ek olarak $\mathcal{V}$ aşağıda yer alan 3. maddedeki özelliği de sağlaması durumunda n elemanlı bir “Düzenli Asma (Regular Vine)” olarak tanımlanır.

3. **(yakınlık koşulu)** $i = 2, \dots, n-1$ için $\{a, b\} \in E_i$ ise o zaman $\#a \triangle b = 2$ 'dir. Bir diğer ifadeyle, $a = \{a_1, a_2\}$ ve $b = \{b_1, b_2\}$ olmak üzere eğer a ile b , T_i 'deki bir köşeyle bağlı T_i 'nin birer düğümü ise o zaman a_i 'lerden biri kesinlikle b_i 'lerden birine eşittir.

Tanım 3.2.1'in 3. maddesinde yer alan $\triangle$ simetrik farkı ve $\#$ ise niceliği (cardinality) ifade etmektedirler. Yakınlık koşulu, Düzenli Asma modelinin T_{i-1} ağacındaki herhangi iki düğümünün T_i ağacında ortak bir düğüme sahip olması durumunda bu iki düğümün T_{i-1} ağacında bir köşe ile bağlı olmalarını gerektirmektedir. Şekil 3.2'de dört değişken için Düzenli Asma ve Düzenli Asma olmayan Asma modellerinin basit bir gösterimine yer verilmiştir.



Şekil 3.2: Dört Değişkenin Düzenli Asma (a) ve Asma (b) Modelleriyle Gösterimi

Kaynak: Kurowicka ve Cooke (2006: 92)

Bir Asma modelinin her bir köşesine bir “kısıt”, “koşullanan” ve “koşullandırıcı” set tanımlanır. Verilen bir köşeden erişilebilen ilk ağacın düğümleri bu köşenin kısıt seti olarak adlandırılır. Bir sonraki ağaçta, iki köşeyi birleştiren bir köşe mevcut olduğunda ilgili kısıt setlerinin kesişimi koşullandırıcı (conditioning) seti ve bu kısıt setlerinin simetrik farkı ise koşullanan (conditioned) seti oluşturur.

Tanım 3.2.2 (kısıt, koşullanan ve koşullandırıcı setler)

1. Bir e köşesinin “tam birleşimini” (complete union) ifade eden U_e^* , e ’den üyelik ilişkisi ile ulaşılabilen $\{1, \dots, n\}$ ’nin bir altkümesidir. $e \in E_i, i \leq n - 1$ için e köşesi ile ilişkili *kısıt seti* U_e^* ’dir.

2. $i = 1, \dots, n - 1, e \in E_i$ için $e = \{j, k\}$ ise e köşesi ile ilişkili *koşullandırıcı set* $D_e = U_j^* \cap U_k^*$ ’dir.

3. e köşesi ile ilişkili *koşullanan set* ise $\{C_{e,j}, C_{e,k}\} = \{U_j^* \setminus D_e, U_k^* \setminus D_e\}$ ’dir.

Şekil 3.3’te beş değişkenli bir Düzenli Asma modelinin iki farklı gösterimine yer verilmiştir. İlk gösterimde $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ bağlantılı ağaçlar dizisi birlikte, ikinci gösterimde ise şekilsel karmaşıklığı önlemek amacıyla ayrı ayrı verilmiştir. Şekil 3.3’te gösterimi verilen beş değişkenli Düzenli Asma modelinin her bir ağacına ait düğüm (N) ve köşe (E) setleri izleyen şekilde tanımlanmıştır.

$$T_1 = (N_1, E_1) \rightarrow N_1 = \{1, \dots, 5\} \text{ ve } E_1 = \{\{1,2\}; \{2,3\}; \{3,4\}; \{4,5\}\}$$

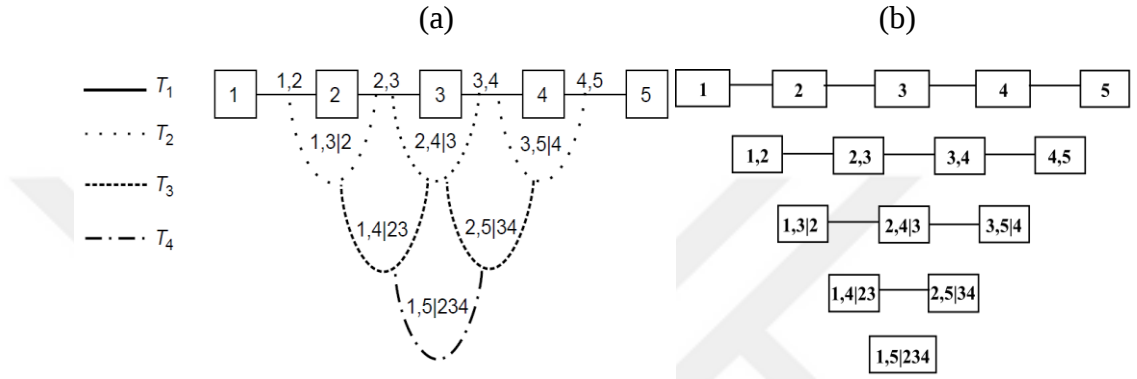
$$T_2 = (N_2, E_2) \rightarrow N_2 = E_1 \text{ ve } E_2 = \{\{\{1,2\}, \{2,3\}\}; \{\{2,3\}, \{3,4\}\}; \{\{3,4\}, \{4,5\}\}\}$$

$$T_3 = (N_3, E_3) \rightarrow N_3 = E_2 \text{ ve } E_3 = \{\{(1,3|2), (2,4|3)\}; \{(2,4|3), (3,5|4)\}\}$$

$$T_4 = (N_4, E_4) \rightarrow N_4 = E_3 \text{ ve } E_4 = \{(1,4|23), (2,5|34)\}$$

$j = \{1,2\}$ için j ’nin “tam birleşimi” (complete union) $U_j^* = \{1,2\}$ ve $k = \{3,4\}$ için k ’nin tam birleşimi $U_k^* = \{3,4\}$ olmak üzere, T_2 ağacının $e = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$ köşesine ait koşullandırıcı set $D_e = U_j^* \cap U_k^* = \{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$ ’dir. $C_{e,j}$ ve $C_{e,k}$ koşullanan

setlerin ifadesi olmak üzere $C_{e,j} = U_j^* \setminus D_e = \{1,2\} \setminus \{2\} = \{1\}$ ve $C_{e,k} = U_k^* \setminus D_e = \{2,3\} \setminus \{2\} = \{3\}$ şeklinde tanımlanmıştır. T_2 ağacının $\{1,2\}$ ile $\{2,3\}$ düğümlerini birleştiren köşe, koşullanan ($\{1\}, \{3\}$) ve koşullandırıcı ($\{2\}$) setlerin elemanlarını da içerecek şekilde $1,3|2$ olarak ifade edilmiştir. Şekil 3.3'ten de görülebildiği gibi T_2 ağacının $1,3|2$ köşesi T_3 ağacının düğümlerinden birini oluşturmaktadır.



Şekil 3.3: Beş Değişkenli Bir Düzenli Asma Modelinin Birleşik (a) ve Ayrı (b) Ağaç Yapıları ile Gösterimi

Kaynak: Kurowicka (2011: 8); Kurowicka ve Cooke (2006: 95)

Bir $\mathcal{V} = \{T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\}$ ağaç dizilişinin Düzenli Asma olması durumunda $\mathcal{V}$ 'nin özellikleri aşağıdaki gibidir (Joe, 2015: 110):

- a) $\mathcal{V}$, $n(n-1)/2$ adet köşeye sahiptir;
- b) $\mathcal{V}$ 'de yer alan her bir koşullanan set bir değişken çiftinden oluşur ve her bir değişken çifti sadece bir kez koşullanan set olarak tanımlanır.
- c) İki köşenin aynı koşullandırıcı sete sahip olması durumunda bu iki köşe de aynıdır.

3.2.1 Düzenli Asma Türleri

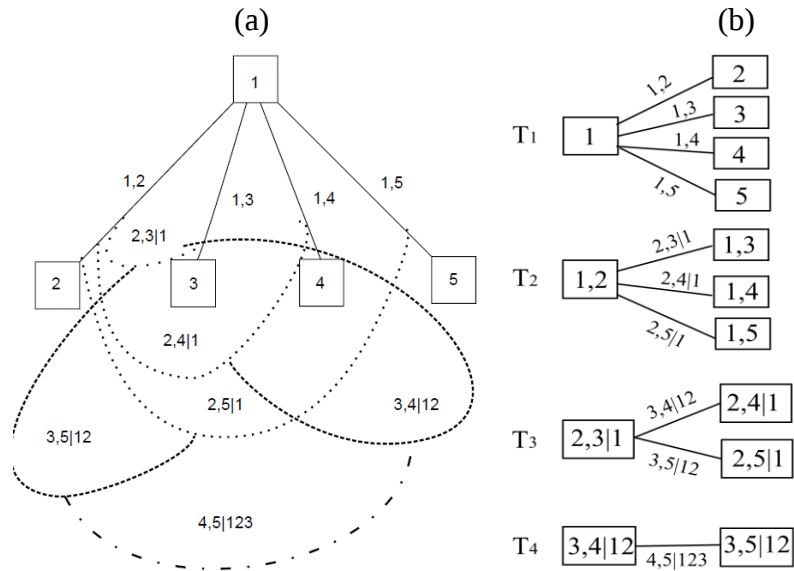
Şu ana dek tanım ve özelliklerine yer verilen n -elemanlı (boyutlu) bir Düzenli Asma (Regular Vine, R-vine) modeli elde etmenin tek bir yolu yoktur. Morales-Nápoles (2011), köşelerin farklı değişken seti kombinasyonlarını sayarak n -boyutta $(n!/2) \cdot 2^{\binom{n-2}{2}}$ adet R-vine ağaç dizilişinin mevcut olduğunu belirtmiştir. Bedford ve Cooke

(2001, 2002), grafiksel gösterim şekillerine bağlı olarak “Drawable Vine” (D-vine) ve “Canonical Vine” (C-vine) olmak üzere iki R-vine türü ortaya koymuştur. D-vine ve C-vine birer R-vine türü olmakla birlikte kendilerine has birer ağaç dizisi yapılarına sahiptirler. Şekil 3.3’te gösterimi verilen R-vine modeli ise “Drawable Vine” (D-vine) yapısına bir örnektir.

Tanım 3.2.1.1 (D-vine, C-vine) Bir $\mathcal{V} = \{T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\}$ Düzenli Asma ağaç dizilişi (Czado, 2019: 102):

1. Her bir $n \in N_i$ düğümü için $|\{e \in E_i | n \in e\}| \leq 2$ olması durumunda **D-vine**,
2. Her bir T_i ağacında $|\{e \in E_i | n \in e\}| = n - i$ şeklinde bir $n \in N_i$ düğümünün bulunması durumunda da **C-vine** olarak tanımlanır. Bu n düğümü T_i ağacının *kök düğümü* olarak adlandırılır.

Bir diğer ifadeyle, bir D-vine yapısının her bir ağacında yer alan her bir düğümü en fazla 2 adet köşe ile bağlantılıdır. Bir C-vine ise her bir ağacında yer alan ve kök düğümü olarak adlandırılan sadece bir düğümünün diğer tüm düğümler ile bağlantılı olması nedeniyle yıldıza benzer bir yapıya sahiptir.



Şekil 3.4: Beş Değişkenli Bir C-vine Modelinin Birleşik (a) ve Ayrı (b) Ağaç Yapıları ile Gösterimi

Kaynak: Czado (2019: 102); Kurowicka ve Cooke (2006: 95)

Tanım 3.2.2.1 (Düzenli Asma [Regular Vine] Dağılımı) $(\mathcal{F}, \mathcal{V}, B)$ üçlüsünün izleyen özellikleri sağlamaları durumunda n -boyutlu $X = (X_1, \dots, X_n)$ rassal vektörüne ait F ortak dağılımının Düzenli Asma özelliğinde (dağılımında) olduğu söylenir (Czado, 2019: 103; Kurowicka ve Cooke, 2006: 96):

1. $\mathcal{F} = (F_1, \dots, F_n)$ vektörü sürekli ve tersine çevrilebilir marjinal dağılım fonksiyonlarından oluşmaktadır.

2. $\mathcal{V}$, n elemanlı bir Düzenli Asma olarak tanımlanmıştır.

3. E_i , $\mathcal{V}$ 'de yer alan T_i ağacının köşe seti olmak üzere, $B = \{C_e | e \in E_i; i = 1, \dots, n-1\}$ seti yoğunluk fonksiyonları tanımlı iki boyutlu ve simetrik C_e kopulalarından oluşmaktadır.

4. $B = \{C_{jk} | e(j, k) \in E_i; i = 1, \dots, n-1\}$ ve $e = \{j, k\}$ koşullanan seti $\{j, k\}$ olan eşsiz bir köşe olmak üzere C_{jk} , koşullandırıcı set $D_{e(j,k)}$ varlığında $\{X_j, X_k\}$ 'nin koşullu dağılımıyla ilişkili kopuladır.

“Düzenli Asma (Regular Vine) kopula” veya bir diğer ifadeyle ikili kopula yapıları (PCC), Düzenli Asma grafiğinin her bir köşesine iki değişkenli bir kopula fonksiyonunun atanmasıyla elde edilen ve yukarıda belirtilen özellikleri taşıyan bir R-vine dağılımıdır.

Tanım 3.2.2.2 (Düzenli Asma Kopula) Düzenli Asma Kopula, tek değişkenli marjinalleri $[0,1]$ aralığında uniform dağılan bir Düzenli Asma dağılımıdır.

Bedford ve Cooke (2001) herhangi bir R-vine dağılımını yoğunluk fonksiyonu cinsinden izleyen şekilde tanımlamıştır.

Teorem 3.2.2.1 $\mathcal{V} = \{T_1, T_2, \dots, T_{n-1}\}$ n elemanlı bir Düzenli Asma olsun. Koşullanan seti $\{j, k\}$ ve koşullandırıcı seti D_e olan her bir $e(j, k) \in T_i$, $i = 1, \dots, n-1$ köşesi için koşullu kopula ve kopula yoğunluğu sırasıyla $C_{jk|D_e}$ ve $c_{jk|D_e}$ olsun. F_i marjinal dağılımları ile $f_i, i = 1, \dots, n$ yoğunluk fonksiyonları verilmiş olsun. Bu

durumda, eşsiz bir Asma dağılımı tanımlıdır ve izleyen yoğunluk fonksiyonuna sahiptir:

$$f_{1...n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{e(j,k) \in E_i} c_{jk|D_e} \left(F_{j|D_e}(x_j|x_{D_e}), F_{k|D_e}(x_k|x_{D_e}) \right) \quad (3.7)$$

Eşitlik 3.7’de, $F_1, \dots, F_n$ marjinallerinin ve B ’de yer alan iki değişkenli kopulaların türevlerinin alınabilir olması durumunda R-vine kopulanın kapalı-form yoğunluğa sahip olduğu gösterilmektedir.

Eşitlik 3.7’de yer alan R-vine yoğunluk fonksiyonunun tanımı, Aas vd. (2009: 184) tarafından n -boyutlu bir C-vine ve D-vine için sırasıyla Eşitlik 3.8 ve 3.9’daki gibi özelleştirilmiştir. C-vine:

$$f_{1...n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j,j+i|1,...,j-1} \left(F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_{j+i}|x_1, \dots, x_{j-1}) \right) \quad (3.8)$$

D-vine:

$$f_{1...n}(x_1 \dots x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j,j+i|i+1,...,i+j-1} \left(F(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}), F(x_{j+i}|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}) \right) \quad (3.9)$$

Eşitlik 3.8 ve 3.9’da olasılık yoğunluk fonksiyonları verilen C-vine ve D-vine yapılarının üç boyutlu ($n=3$ için) genel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} f_{123}(x_1, x_2, x_3) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot \\ &c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \cdot \\ &c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Üç boyutta $(x_1, x_2$ ve $x_3)$, $f_{123}(x_1, x_2, x_3)$ ortak yoğunluk fonksiyonunu elde etmenin 6 yolu bulunmasına rağmen bunların sadece üçü farklı marjinal ve kopula yoğunluk fonksiyonlarından oluşmaktadır (farklı marjinal ve kopula yoğunluk fonksiyonlarına ayrıştırılabilmektedir). Aynı zamanda, bu üç farklı yapının her biri hem C-vine hem de D-vine yapısındadır. Diğer yandan, 4 boyutlu bir C-vine yapısının gösterimi genellikle izleyen şekilde yapılmaktadır (Aas vd., 2009):

$$\begin{aligned}
 f_{1234}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot f_4(x_4) \cdot \\
 &c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot c_{13}(F_1(x_1), F_3(x_3)) \cdot c_{14}(F_1(x_1), F_4(x_4)) \cdot \\
 &c_{23|1}(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{3|1}(x_3|x_1)) \cdot c_{24|1}(F_{2|1}(x_2|x_1), F_{4|1}(x_4|x_1)) \cdot \\
 &c_{34|12}(F_{3|12}(x_3|x_1, x_2), F_{4|12}(x_4|x_1, x_2))
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

4 boyutlu bir D-vine ise genellikle:

$$\begin{aligned}
 f_{1234}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot f_3(x_3) \cdot f_4(x_4) \cdot \\
 &c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \cdot c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) \cdot c_{34}(F_3(x_3), F_4(x_4)) \cdot \\
 &c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) \cdot c_{24|3}(F_{2|3}(x_2|x_3), F_{4|3}(x_4|x_3)) \cdot \\
 &c_{14|23}(F_{1|23}(x_1|x_2, x_3), F_{4|23}(x_4|x_2, x_3))
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Yıldıza benzeyen merkezi ağaç yapıları nedeniyle C-vine kopulaların, bağımlılık yapısı modellenen değişkenler arasından birinin diğer tüm değişkenlerle en yüksek korelasyona sahip ve değişkenler arası etkileşimi yönetebilecek olması durumunda uygulanması optimaldir. D-vine kopulanın ise çizgi ya da yol gibi bir yapıya sahip olması nedeniyle değişkenler arası bağımlılık yakınlık koşuluna bağlı olarak modellenmektedir. Diğer yandan, belirli bir ağaç yapısı kısıtına sahip olmayan R-vine kopulalar, değişkenler arası bağımlılığı sadece çok değişkenli dağılımların istatistiksel özelliklerine bağlı olarak çok daha esnek bir şekilde modelleyebilmektedirler. R-vine yoğunluk fonksiyonunun tanımına ek olarak, Aas vd. (2009) C-vine ve D-vine

kopularına ait istatistiksel tahmin (çıkarılım) algoritmalarını ortaya koyarak bu modellerin finans alanındaki uygulamalarının önünü açmıştır.

3.3 R-vine Yapısının Belirlenmesi ve Tahmin

$\mathcal{V}$, Düzenli Asma ağaç yapısını, $B(\mathcal{V})$ Düzenli Asma ağaç yapısının her bir köşesi ile ilişkilendirilen iki boyutlu kopula ailelerini kapsayan seti ve $\Theta(B(\mathcal{V}))$ ise $B(\mathcal{V})$ 'de yer alan kopula ailelerinin parametre setini ifade etmek üzere, bir R-vine kopula modeli ile değişkenler arası bağımlılık yapısının modellenmesi istendiğinde:

1. Verilere uygun bir R-vine ağaç yapısının belirlenmesi ($\mathcal{V}$) veya bir diğer ifadeyle koşullu ve koşulsuz değişken çiftlerinin seçimi,
2. İlk adımda belirlenen koşullu ve koşulsuz değişken çiftleri arasındaki bağımlılığı en iyi modelleyebilen iki boyutlu (değişkenli) kopula ailelerinin seçimi ($B(\mathcal{V})$),
3. Seçilen kopula ailelerinin parametre tahmini ($\Theta(B(\mathcal{V}))$) olmak üzere üç temel aşama mevcuttur.

İzleyen bölümlerde her bir aşamanın açıklamalarına yer verilmiş olup daha detaylı bilgiye ilgili bölümlerde bahsedilen araştırmacıların çalışmalarından ulaşılabilir.

3.3.1 R-vine Ağaç Yapısının Seçimi

Düzenli Asma grafiksel modelinin tanım ve özelliklerinin açıklandığı bölümde de bahsedildiği gibi bir Düzenli Asma (R-vine) elde etmenin tek bir yolu olmamakla birlikte n -boyutta $(n!/2) \cdot 2^{\binom{n-2}{2}}$ adet farklı R-vine modeli tanımlanabilmektedir. R-vine yapısının, C-vine ya da D-vine gibi belirli yapılar ile kısıtlanması durumunda dahi n -boyutta $(n!/2)$ adet farklı ağaç yapısı elde edilmektedir. Bu nedenle, global bir optimal R-vine yapısının belirlenmesi mümkün görünmemekle birlikte R-vine ağaç yapısının yukarıdan aşağıya ya da aşağıdan yukarıya doğru her bir ağacının ardışık bir şekilde belirlenmesini sağlayan seçim stratejileri geliştirilmiştir. İlerleyen

paragraflarda açıklamalarına yer verilen bu stratejilere ek olarak, bir R-vine ağaç yapısının sonsal (posterior) dağılımının elde edilmesini sağlayan Bayes yaklaşımlar ortaya konmuştur. R-vine kopulalar ile finans literatüründeki uygulamaları nadir olan bu yaklaşımların açıklamalarına tez kapsamında yer verilmemiş olup daha detaylı bilgi Min ve Czado (2010) ile Gruber ve Czado (2015)'nin çalışmalarından elde edilebilir.

3.3.1.1 Yukarıdan Aşağıya Ardışık Seçim Stratejisi

Dißmann vd. (2013), bir R-vine modelinin ilk ağacından (T_1) başlamış ve maksimum spanning tree (MST) algoritmasını kullanarak tek tek modelin sonuncu ağacına dek her bir ağacın koşullu ve koşulsuz değişken çiftlerinin belirlenmesini sağlayan yukarıdan aşağıya ardışık seçim (sequential top-down selection) stratejisini önermiştir. Bu yöntemde, her bir ağacın köşesine maksimize edilmesi istenen genel bir ω ağırlığı atanmış ve değişken çiftleri ağaca özgü en güçlü bağımlılığı temsil edecek şekilde seçilmiştir. Dißmann vd. (2013), yukarıdan aşağıya ardışık seçim stratejisini önerdiği çalışmasında ω ağırlığını ampirik Kendall tau ($\hat{\tau}$)'nun mutlak değeri olarak belirlemiş olup $\hat{\tau}$ yerine kopula AIC / BIC gibi farklı kriterler de uygulanabilmektedir. Bir n -değişkenli $(x_{\ell 1}, \dots, x_{\ell n})$ vektörü ile $\ell = 1, \dots, N$ her bir iid rassal vektörüne ait gözlemler olmak üzere, Dißmann vd. (2013) tarafından önerilen yukarıdan aşağıya ardışık seçim stratejisinde, ilk ağaçtan başlanarak T_1 ağacında yer alan tüm $\{j, k\}$, $(1 \leq j < k \leq n)$ değişken çiftleri arasındaki ampirik Kendall tau ($\hat{\tau}_{j,k}$) değerleri hesaplanmaktadır. Spanning tree tüm düğümleri kapsayan bir ağacı ifade etmekle birlikte Eşitlik 3.13'te yer alan optimizasyon probleminde, hesaplanan mutlak $\hat{\tau}_{j,k}$ değerlerinin toplamını maksimize eden ve ağacın tüm düğümlerini kapsayan optimal ağaç yapısı seçilmektedir.

$$T_1 = \max_{e=\{j,k\} \text{ spanning tree}} \sum |\hat{\tau}_{j,k}| \quad (3.13)$$

Eşitlik 3.13'te MST algoritması ile seçilen $\{j, k\}$ köşelerinin her biri için bir kopula ailesi seçilmekte ve parametreleri hesaplanmaktadır. $\{T_2, \dots, T_{n-1}\}$ setindeki her bir T_i ağacının yapısı ise bir önceki ağaçta belirlenen köşelere bağlı olarak ($i = 2, \dots, n - 1$ için $N_i = E_{i-1}$); öncelikle Tanım 3.2.1 ile verilen koşulları (özellikle yakınlık koşulunu) sağlayan ve T_i ağacında yer alabilecek tüm koşullu değişken çiftleri

$(\{j, k|D\})$ arasındaki Kendall tau $\hat{\tau}_{j,k|D}$ değerlerinin hesaplanması, sonrasında ise tüm T_i köşeleri için hesaplanan mutlak tau değerlerinin toplamını maksimize eden optimal ağaç yapısının belirlenmesi adımlarını içermektedir.

$$T_i = \max_{e=\{j,k|D\} \text{ spanning tree}} \sum |\hat{\tau}_{j,k|D}| \quad (3.14)$$

Eşitlik 3.14'te MST algoritması ile seçilen $\{j, k|D\}$ köşelerinin her biri için bir koşullu kopula seçilmekte ve parametreleri hesaplanmaktadır. Eşitlik 3.13 ve 3.14'teki optimizasyon problemleri Prim veya Kruskal'ın algoritmaları ile çözülebilmektedir (Czado, 2019: 162). Bununla birlikte, MST algoritması her bir T_i ağacının optimal yapısını farklı adımlarda belirlediği ve her bir adımda (ağaçta) R-vine yapısındaki olası tüm ağaçları (önceki veya sonraki ardışık ağaçları) göz önünde bulundurmadığı için sadece bölgesel optimal seçimler ortaya koyar. Ancak bu durum, R-vine kopulalar ile istatistiksel modelleme hususunda makul bulunmuştur.

3.3.1.2 Aşağıdan Yukarı Ardışık Seçim Stratejisi

Kurowicka (2011) ise R-vine ağaç yapısının aşağıdan yukarıya doğru her bir ağacının ardışık bir şekilde ve değişken çiftleri arasındaki kısmi korelasyon değerlerine bağlı olarak belirlenmesini sağlayan bir seçim stratejisi önermiştir. Bu stratejide ilk olarak sonuncu yani T_{n-1} ağacının yapısı belirlenmekte sonrasında ise adım adım bir önceki ağaçların $(T_{n-i}, i \geq 2)$ yapısı belirlenerek T_1 ağacına dek ulaşılmaktadır. Kurowicka (2011), Dißmann vd. (2013)'dan farklı olarak her bir ağacın yapısını seçme kriteri olarak en küçük mutlak kısmi korelasyonları kullanmıştır. Kısmi korelasyonlar eliptik dağılımlar söz konusu olduğunda koşullu korelasyonlara eşittir. Normal dağılım varsayımı altında sıfıra eşit kısmi korelasyon koşullu bağımsızlığı ifade etmekle birlikte genel anlamda sıfıra eşit kısmi korelasyon her zaman koşullu bağımsızlığı ifade etmemektedir. Yine de Kurowicka (2011), optimal R-vine yapısının seçimi amacıyla geliştirdiği algoritmada, belirli koşulları sağlamakla birlikte mutlak kısmi korelasyon değerleri en küçük değişken çiftlerini seçmeyi tercih etmiştir. Böylece, çok boyutlu bir Asma dağılımının belirlenmesi esnasında, öncelikli olarak üst (son) düğümlerinde en fazla sayıda bağımsızlık kopulasına sahip olarak veriye en iyi yakınsayan asma yapısının seçilmesi

amaçlanmıştır. Aşağıdan yukarı ardışık seçim stratejisi bir Asma dağılımının sadece ağaç yapısını belirlemekte, ikili kopula aileleri ve parametreleri ise AIC kriteri ile seçilmektedirler. Ayrıca, R-vine yapısındaki iki değişkenli kopulaların sadece Eliptik kopula ailesine üye olmaları durumunda bu stratejinin iyi bir performans göstermesi beklenebilir.

3.3.2 Kopula Ailelerinin Seçimi

R-vine ağaç yapısının ($\mathcal{V}$) belirlenmesini takiben $T = \{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ ağaç setindeki her bir ağacın köşelerine özgü koşullu ve koşulsuz değişken çiftleri arasındaki bağımlılık yapılarını en iyi modelleyebilecek iki boyutlu kopulaların seçimi için genellikle AIC (Akaike, 1998) bilgi kriterine başvurulmakla birlikte, Bayes bilgi kriteri (BIC) (Schwarz, 1978) ve Cramér-von Mises istatistiğine dayalı kopula uyum iyiliği testi (Genest vd., 2006) alternatif seçim kriterlerini oluşturmaktadırlar. Bununla birlikte, belirli bir ağaçtaki (T_i , $i = 1, \dots, n - 1$) kopulaların seçimi bir önceki ağaçta (T_{i-1}) seçilen kopulalara bağlı olduğu için kopula ailelerinin eşzamanlı seçimi yerine R-vine ağaç yapısının belirlenmesine benzer bir şekilde kopula ailelerinin de ardışık seçimi önerilmiştir.

AIC seçim kriterine dayalı iki değişkenli kopula ailelerinin ardışık seçimi yönteminde, çok sayıdaki iki boyutlu kopula türünün varlığı göz önünde bulundurulduğunda (Eliptik ve Arşimedyen kopula ailesine üye kopulalar vd.), R-vine ağaç yapısının ($\mathcal{V}$) öncelikle ilk ağacına ait (T_1) köşelere özgü koşulsuz değişken çiftleri arasındaki bağımlılık yapılarını en küçük AIC değeri ile modelleyen kopulalar seçilmekte ve parametreleri hesaplanmaktadır. $\mathcal{V}$ yapısının T_2 ağacındaki kopula ailelerinin seçimi bir önceki ağaçta (T_1) seçilen kopulalara ve elde edilen en küçük kopula AIC değerine bağlı olarak yapılır. Bu yöntem, adım adım sonuncu ağacın (T_{n-1}) kopula ailelerinin seçimi ve parametrelerinin hesaplanmasına dek sürdürülür. Bununla birlikte, iki değişkenli kopula ailelerinin ardışık seçim yöntemi $\mathcal{V}$ yapısının tamamında kopula ailelerinin seçimine yönelik belirsizliği arttırmakta ve bu nedenle de $(\mathcal{V}, B(\mathcal{V}), \Theta(B(\mathcal{V})))$ seti ile en son oluşturulan R-vine kopula modeli dikkatle değerlendirilmelidir (Aas, 2016; Czado, 2019).

3.3.3 Parametre Tahmini

Belirli bir $(\mathcal{V}, B(\mathcal{V}))$ Düzenli Asma ağaç yapısı ile seçimi yapılmış olan iki boyutlu kopula ailelerine ait $\Theta(B(\mathcal{V}))$ parametre setinin tahmini, Kopula Tahmin Yöntemleri Bölümü'nde açıklanan En Çok Olabilirlik (MLE), Marjinallere İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları (IFM) ve Psödo En Çok Olabilirlik yöntemlerinden herhangi biri ile yapılabilmektedir. Ancak, kendisi de çok değişkenli bir dağılım olan R-vine kopulanın boyutu arttıkça hesaplanması gereken R-vine parametre adedi hızla artmakta ve dolayısıyla bir önceki paragrafta bahsedilen yöntemler ile parametre tahmini oldukça zorlaşmaktadır. Bu nedenle, Aas vd. (2009) R-vine ağaç yapısının ve iki boyutlu kopula ailelerinin belirlenmesine benzer bir şekilde, R-vine kopula parametrelerinin aynı anda tahmini yerine ardışık bir şekilde her bir ağaçta bir önceki ağacın hesaplanan kopula parametrelerine bağlı olarak ayrı ayrı tahminini içeren “ardışık tahmin” yöntemini (sequential estimation method) önermiştir. Hobæk Haff (2012) ardışık tahmin yöntemini farklı yöntemler ile karşılaştırmış, Hobæk Haff (2013) ise yöntemin asimptotik özelliklerini araştırmıştır.

Ardışık tahmin yöntemi sadece iki boyutlu kopula parametrelerinin tahminini içerdiği için diğer yöntemler ile karşılaştırıldığında daha basit ve dolayısı ile çok daha hızlı bir parametre tahmin yöntemidir. Ardışık tahmin yönteminde, yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilen üç boyutlu bir R-vine kopula için öncelikle θ_{12} ve θ_{23} kopula parametreleri $\{(u_{i1}, u_{i2}), i = 1, \dots, n\}$ ve $\{(u_{i2}, u_{i3}), i = 1, \dots, n\}$ kopula örneklemeleri kullanılarak hesaplanmaktadır.

$$c(u_1, u_2, u_3) = c_{12}(u_1, u_2; \theta_{12}) c_{23}(u_2, u_3; \theta_{23}) \\ c_{13|2}(F_{1|2}(u_1|u_2; \theta_{12}), F_{3|2}(u_3|u_2; \theta_{23}); \theta_{13|2}) \quad (3.15)$$

Bir sonraki adımda ise $\hat{\theta}_{12}$ ve $\hat{\theta}_{23}$ parametre tahminlerinden yararlanılarak psödo koşullu kopula gözlemleri elde edilmekte $\{u_{i1|2} = F_{1|2}(u_{i1}|u_{i2}; \hat{\theta}_{12}), u_{i3|2} = F_{3|2}(u_{i3}|u_{i2}; \hat{\theta}_{23}), i = 1, \dots, n\}$ ve bu gözlemler $\theta_{13|2}$ koşullu kopula parametresinin tahmininde kullanılmaktadırlar. Ayrıca, tüm parametrelerin aynı anda optimizasyonunu içeren MLE yönteminin R-vine parametre tahmininde kullanılması

durumunda, hesaplanan $\hat{\theta}_{12}, \hat{\theta}_{23}$ ve $\hat{\theta}_{13|2}$ parametreleri optimizasyonun başlangıç değerleri olarak kullanılmaktadırlar (Czado vd., 2013).



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

BAĞIMLILIK YAPILARI VE BAĞIMLILIK ÖLÇÜLERİ

İki ya da daha fazla sayıda rassal değişken arasındaki bağımlılık kavramı basit bir matematiksel kavram değildir. Anlamlı bir istatistiksel model oluşturabilmenin yolu, değişkenler arasındaki bağımlılık ile ilgili bazı varsayımlarda bulunmaktır. Ayrıca, bağımlılık yapı ve ölçü türleri farklılık göstermekte olup her birinin uyulması gereken kendine has bazı varsayımları mevcuttur. Dolayısı ile verilerin yapısı ve araştırma amacına uygun bağımlılık modelleme yöntemlerinin seçilmesi son derece önemlidir.

Bağımlılık kavramı temelde iki grup altında sınıflandırılabilir. İlk grubu, araştırmaya konu gözlem değerlerinin bir süreç sonucu ortaya çıkması ile rassal değişkenlerin ortaya koyduğu sıra veya zamana dikkat çeken “zamana göre” bir bağımlılıktan söz edilebilir. İkinci grupta ise, belirli bir dereceye kadar simetrik olma özelliğine sahip rassal değişkenlerin birlikte hareket etme şekil ve düzeyleri incelenir (Alhan, 2008: 19).

Bu çalışma kapsamında ikinci grupta yer alan bağımlılık kavramına yer verilmiş olup izleyen bölümlerde farklı türdeki bağımlılık yapıları, bağımlılık ölçüleri veya bir diğer kullanım şekli ile birliktelik ölçüleri ve bunların kopula fonksiyonları ile ifade şekilleri açıklanmıştır.

4.1 Bağımlılık Yapıları

(X,Y) rassal değişkenlerinin, bağımsız olmaması durumunda bağımlı veya ilişkili oldukları söylenmektedir. Rassal değişkenler arasındaki bağımsızlığın tanımına olasılık teorisinde yer verilmiş olup, değişkenlerden herhangi biri hakkında elde edilen bir bilginin diğer değişkenin olasılık dağılımını etkilememesi $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$ olarak ifade edilmiştir. Bağımlılık kavramının tanımlanması veya ölçülmesi ise çok daha zordur. Bu nedenle, izleyen altbölümlerde çeşitli bağımlılık yapılarına ait tanım ve kavramların açıklamalarına yer verilmiştir (Malevergne ve Sornette, 2006: 101).

4.1.1 Uyumluluk

Nelsen (2006: 157)'de açıklandığı gibi, (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) değerleri sürekli bir rassal değişken çiftine ait (X, Y) vektöründen elde edilmiş iki adet gözlemdir. Değişkenlerden biri büyük değerler aldığı anda diğeri de büyük değerler alıyor $(x_i < x_j$ ve $y_i < y_j)$, değişkenlerden biri küçük değerler aldığı anda diğeri de küçük değerler alıyorsa $(x_i > x_j$ ve $y_i > y_j)$, bu iki değişken uyumludur (concordant) denir. Uyumlu (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlem çiftine ait alternatif bir tanım ise $[(x_i - x_j) \cdot (y_i - y_j) > 0]$ şeklinde yapılabilir.

Yukarıda verilen tanımın tersinin gözlemlenmesi durumunda yani, $x_i < x_j$ olduğunda $y_i > y_j$ ise veya $x_i > x_j$ olduğunda $y_i < y_j$ olması durumunda (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumsuzdur (discordant) denilebilir.

Bununla beraber, sürekli bir rassal (X, Y) çiftinin tam pozitif bağımlılığı en üst sınırdaki olduğunda $(\rho \rightarrow \rho_{max})$, (X, Y) çifti eş-monoton (co-monotonic) ve çiftin negatif bağımlılığı en alt sınırdaki yer aldığı anda ise (X, Y) ters-monoton (counter-monotonic) olur (Alhan, 2008: 21).

İlk defa Scarsini (1984) tarafından ortaya konan “uyumluluk ölçüsü” kavramı; “iki rassal değişkenden birinin büyük değerler alması durumunda diğeri de büyük değerler alıyor ise bu değişkenler uyumludur” cümlesi ile ifade edilen değişkenlerin birlikte hareket etme eğilimlerinin matematiksel tanımını belirleme amacıyla geliştirilmiştir (Mai ve Scherer, 2014: 39).

Bir κ sayısal değeri, aşağıda belirtilen özellikleri sağlaması durumunda, kopulası C olan sürekli X ve Y rassal değişkenlerinin uyumluluk ölçüsü olarak tanımlanır (Nelsen, 2006: 168).

- 1) κ , her bir X, Y sürekli rassal çifti için tanımlıdır.
- 2) $-1 \leq \kappa_{x,y} \leq 1$, $\kappa_{x,x} = 1$ ve $\kappa_{x,-x} = -1$ 'dir.
- 3) $\kappa_{x,y} = \kappa_{y,x}$,
- 4) X ve Y bağımsız birer rassal değişken ise; o zaman $\kappa_{x,y} = \kappa_{\Pi} = 0$,

- 5) $\kappa_{-x,y} = \kappa_{x,-y} = -\kappa_{x,y}$,
- 6) C_1 ve C_2 kopulaları, $C_1 < C_2$ özelliğini taşıyor ise, $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$ 'dir.
- 7) $\{(X_n, Y_n)\}$, kopulaları C_n olan sürekli rassal değişkenlerden oluşan bir dizi ve $\{C_n\}$, C 'ye noktaca yakınsıyor ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$ olur.

Yukarıda maddeler halinde verilen ve bir uyumluluk ölçüsünün sağlaması gereken özelliklerden; ikinci madde uyumluluk ölçüsünün $[-1,1]$ kapalı aralığında değerler aldığı, üçüncü madde ölçünün simetri özelliğini, dördüncü madde X ve Y rassal değişkenlerinin bağımsız olması durumunda uyumluluk ölçüsünün sıfır değerini alacağını, beşinci madde işaret değişimini yani değişkenlerden birine ait gözlem değerlerinin -1 ile çarpılmasının bu değerlerin sıralamasını tersine çevireceğini ve dolayısı ile uyumluluk ölçüsünün sıfır etrafında dönerek işaret değiştireceğini, altıncı madde uyumluluk sıralamasının kopula sıralaması ile tutarlı olma özelliğini ve böylece daha büyük κ değerlerinin “daha güçlü bağımlılık” olarak değerlendirilebileceğini ve sonuncu madde ise n sonsuza yaklaştıkça C kopulasına yakınsayan C_n kopulası ile tutarlı bir biçimde uyumluluk ölçüsünün de yakınsama özelliğine sahip olduğunu ifade etmektedir (Mai ve Scherer, 2014: 40).

4.1.2 Bölge (Quadrant) Bağımlılığı

Bağımlılık türlerinden bir diğeri bölge bağımlılığıdır. Yukarıda açıklanan uyumluluk kavramının ikiden fazla rassal değişkeni içerecek şekilde genişletilmesi görüldüğü kadar kolay olmamakla birlikte işlemin, uyumluluk ölçülerine ait bazı özelliklerin kaybına neden olduğu, özellikle de ters-monotonluk kavramının ikiden fazla rassal değişken için kullanılamayacağı belirtilmiştir. Dolayısı ile bu ve benzeri sorunları içermeyen bağımlılık ölçülerinin elde edilebilmesi amacıyla bölge bağımlılığı geliştirilmiştir (Malevergne ve Sornette, 2006: 164).

Bölge bağımlılığının tanımı, pozitif bölge bağımlılığı ve negatif bölge bağımlılığı olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. X ve Y rassal değişkenlerinin $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ için (Nelsen, 2006: 187);

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad (4.1)$$

veya

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x) \cdot P(Y > y) \quad (4.2)$$

sağlanması durumunda X ve Y pozitif bölge bağımlıdır (PQD) ve PQD(X, Y) ile gösterilir. Eşitsizlik 4.1 ile, X ve Y rassal değişkenlerinin aynı anda küçük değerler alma olasılığının, bu iki değişkenin bağımsız olma durumundaki olasılığa eşit veya daha büyük olacağı ifade edilmektedir. Örneğin, X ve Y değişkenlerinin pozitif bölge bağımlılığına sahip iki varlığın getiri değerlerini temsil ettiğini varsayarsak, aynı anda büyük kayıp değerleri gözlemlenme olasılığı, varlık getirilerinin bağımsız olma varsayımı ile elde edilecek olasılık değerinden daha küçük olmayacaktır. Eşitsizlik 4.2'de ise bu durumun tersi yani, X ve Y rassal değişkenlerinin aynı anda büyük değerler alma olasılığının, değişkenlerin bağımsız olma durumunda elde edilecek olasılığa eşit veya daha büyük olacağı ifade edilmektedir. PQD, sadece negatif olmayan korelasyon ve sıra korelasyon değerlerini içermekle birlikte, bu özelliklerin tamamı en güçlü pozitif bağımlılık türü olan eş-monotonluğun ifadesidir (Trivedi ve Zimmer, 2007: 27).

Negatif bölge bağımlılığı (NQD) ise benzer şekilde

$$P(X \leq x, Y \leq y) \leq P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y) \quad (4.3)$$

veya

$$P(X > x, Y > y) \leq P(X > x) \cdot P(Y > y) \quad (4.4)$$

sağlanması durumunda X ve Y negatif bölge bağımlıdır ve NQD(X, Y) ile gösterilir.

Bununla beraber, X ve Y rassal değişkenlerinin sürekli marjinal dağılım fonksiyonları F ve G , ortak dağılım fonksiyonu H ile kopulası C ise;

$$H(x, y) \geq F(x) G(y) \quad (4.5)$$

H ortak dağılım fonksiyonu ya da C kopulası pozitif bölge bağımlıdır denir. Bir diğer ifade ile X ve Y rassal değişkenleri sadece ve sadece, değişkenlere ait C kopulasının;

$$C(u, v) \geq \Pi(u, v) = u \cdot v, \quad \forall u, v \in [0,1] \quad (4.6)$$

eşitsizliğini sağlaması durumunda pozitif bölge bağımlılığına sahiptir (PQD) denir. Bu özellik ile PQD'nin sadece rassal değişkenlerin bağımlılık yapısına (marjinallerine değil) bağlı olması sağlanmıştır (Malevergne ve Sornette, 2006: 165).

4.1.3 Kuyruk Bağımlılığı

Bazı durumlarda rassal değişkenlerin uç değerleri arasındaki uyumluluğun yani değişkenlerden birinin çok büyük (küçük) değer alması durumunda (koşuluyla) diğer değişkenin de çok büyük (küçük) değer alma olasılığının belirlenmesi istenir. Böyle bir durumda, değişkenlerin ortak dağılımına ait üst ya da alt kuyruk bağımlılığını ölçen bağımlılık ölçülerinin kullanılması gereklidir.

Kuyruk bağımlılığı ölçüleri, koşullu olasılık dağılımı ile ilişkilidir (değişkenlerden birinin belirlenen bir değer üzerinde ya da altında değer alması koşulu ile diğer değişkenin de belirlenen bu değer üzerinde ya da altında değer alma olasılığı). Bu türdeki koşullu olasılık ölçülerinin kopula fonksiyonları ile tanımlanması durumunda, tanımlanan ölçüler de kesin artan dönüşümler altında değişmeme özelliğine sahip olacaklardır (Trivedi ve Zimmer, 2007: 25).

(X, Y) rassal değişkenlerine ait sürekli marjinal dağılım fonksiyonları F ve G , kopulası C ise, X ve Y 'nin "alt kuyruk bağımlılık katsayısı" (λ_L) (Pfaff, 2016: 138);

$$\lambda_L = \lim_{q \searrow 0} P(Y \leq G^{-1}(q) \mid X \leq F^{-1}(q)), \quad \lambda_L \in [0,1] \quad (4.7)$$

$$\lambda_L = \lim_{q \searrow 0} \frac{P(Y \leq G^{-1}(q) \mid X \leq F^{-1}(q))}{P(X \leq F^{-1}(q))} = \lim_{q \searrow 0} \frac{C(q, q)}{q} \quad (4.8)$$

X değişkeninin q yüzdelik diliminden küçük olması koşulu ile Y 'nin q yüzdelik diliminden küçük olma olasılığını ifade eder. Bu durumda Y 'nin, q yüzdelik diliminden

$[G^{-1}(q)]$ küçük olmasının koşullu olasılığı hesaplanabilir. Alt kuyruk bağımlılığı kavramına, yukarıda verildiği şekilde q 'nın sifıra yakınsaması ile ulaşılır.

“Üst kuyruk bağımlılık katsayısı” (λ_u) ise;

$$\lambda_u = \lim_{q \nearrow 1} P(Y > G^{-1}(q) \mid X > F^{-1}(q)), \quad \lambda_u \in [0,1] \quad (4.9)$$

$$\lambda_u = 2 - \lim_{q \nearrow 1} \frac{1 - C(q, q)}{1 - q} \quad (4.10)$$

İki rassal değişken arasında $\lambda_u > 0$ olması durumunda üst kuyruk bağımlılığı (üst kuyrukta asimptotik bağımlılık) ve $\lambda_L > 0$ olması durumunda alt kuyruk bağımlılığı (alt kuyrukta asimptotik bağımlılık) mevcuttur. $\lambda_L = 0$ veya $\lambda_u = 0$ durumları için X ve Y 'nin sırasıyla, alt kuyrukta veya üst kuyrukta asimptotik bağımsız oldukları söylenebilir.

X ve Y 'nin bağımsız olması durumunda her bir x ve y için $P(Y \leq y \mid X \leq x) = P(Y \leq y)$ 'dir. Yani, Eşitlik 4.7'deki koşullu olasılık, koşulsuz $P(Y \leq G^{-1}(q))$ olasılığına eşit olur ve q sifıra yakınsadıkça ($q \searrow 0$) bu koşulsuz olasılık değeri de sifıra yaklaşır. Bu yüzden alt kuyruk bağımlılığının sifıra eşit olması ($\lambda_L = 0$), dağılımın sol uç kuyruğunda X ve Y 'nin bağımsız davrandıkları anlamına gelir (Ruppert ve Matteson, 2015: 196).

4.2 Bağımlılık Ölçüleri

Bağımlılık ölçüleri ile rassal değişkenlere ait bağımlılık yapılarının özetlenerek, anlaşılması ve kullanımı daha kolay değerler elde edilmesi amaçlanmıştır. Ancak bu ölçülerin, birtakım özelliklere sahip olması arzu edilir. Bu özellikler, beş ana madde altında sınıflandırılmış olup aşağıda açıklamalarına yer verilmiştir (Embrechts vd., 2002: 15).

X ve Y gerçek değerli rassal değişkenler olmak üzere, $\delta(.,.)$, X ve Y değişkenlerine ait herhangi bir çiftin bağımlılık ölçüsü ise, $\delta(.,.)$ 'nin aşağıdaki özelliklere sahip olması arzu edilir.

- 1) $\delta(X,Y) = \delta(Y,X)$ (simetri).
- 2) $-1 \leq \delta(X,Y) \leq 1$ (normalizasyon).
- 3) $\delta(X,Y) = 1 \Leftrightarrow X,Y$ eş-monoton;
 $\delta(X,Y) = -1 \Leftrightarrow X,Y$ ters-monoton.
- 4) X 'in değer bölgesinde yapılan $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kesin monoton dönüşüm için:
$$\delta(T(X),Y) = \begin{cases} \delta(X,Y) & T \text{ artan,} \\ -\delta(X,Y) & T \text{ azalandır.} \end{cases}$$
- 5) $\delta(X,Y) = 0 \Leftrightarrow X$ ve Y bağımsızdır.

Bağımlılığın ölçülmesi çeşitli alternatif yöntemlerin kullanılması ile yapılabilmekte olup bu çalışma kapsamında bağımlılık ölçüleri temelde üç grup altında sınıflandırılmış (doğrusal korelasyon, sıra korelasyonu ve diğer) ve izleyen altbölümlerde açıklamalarına yer verilmiştir.

4.2.1 Doğrusal (Pearson) Korelasyon Katsayısı

Doğrusal korelasyon katsayısı, bağımlılık ölçüleri arasından en yaygın bilinen ve en sık kullanılan bağımlılık ölçüsüdür. Popülerliği ile orantılı bir şekilde ölçünün, sıklıkla hatalı kullanımları mevcuttur.

Doğrusal korelasyon katsayısı (ρ) sadece, ortalama vektör, kovaryans matrisi ve bir karakteristik üretici fonksiyon ile tümüyle tanımlanabilen eliptik dağılımlarda kullanılabilecek doğrusal bir ölçüdür.

Tanım 4.2.1.1. Pearson Korelasyon Katsayısı (ρ) X ve Y rassal değişken çifti için;

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{\sigma^2(X)\sigma^2(Y)}} = \frac{E[(X-E[X])(Y-E[Y])]}{\sqrt{E[(X-E[X])^2]} \sqrt{E[(Y-E[Y])^2]}} \\ &= \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sqrt{E[(X-E[X])^2]} \sqrt{E[(Y-E[Y])^2]}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\sigma^2(X)$: X rassal değişkenine ait varyans, $\sigma^2(Y)$: Y rassal değişkenine ait varyans ve $Cov(X,Y)$: X ve Y rassal değişkenleri arasındaki kovaryans değeri olup Eşitlik 4.11'de iki farklı türdeki gösterim şekilleri ile birlikte verilmiştir.

Pearson korelasyon katsayısının özellikleri ise aşağıda verildiği şekilde özetlenebilir (Mai ve Scherer, 2014: 36):

- 1) X ve Y arasındaki korelasyon simetriktir, $Cor(X,Y) = Cor(Y,X)$.
- 2) $-1 \leq Cor(X,Y) \leq 1$ kapalı aralığında değerler alır.
- 3) Korelasyon doğrusal bağımlılığın bir ölçüsüdür. Sadece ve sadece $Y = aX+b$ olması durumunda $Cor(X,Y) = işaret(a)$ ($a \neq 0$) ve $a > 0$ olduğunda işaret fonksiyonu $+1$, $a < 0$ olduğunda ise -1 değerini sağlar. Ayrıca, değişkenlere ölçeklendirme uygulanması durumunda, $Cor(aX+b,Y) = işaret(a)Cor(X,Y)$, ($a \neq 0$) kuralının doğruluğu kolayca gösterilebilir.
- 4) Marjinal kurallar değiştiğinde korelasyonun da değişiyor olması, korelasyonun; X ve Y arasındaki sadece bir kopula fonksiyonunu ifade etmediği, değişkenlerin bağımlılık ve marjinal kural boyutlarını da içerdiğini ortaya koymaktadır.
- 5) X ve Y 'nin bağımsız rassal değişkenler olması durumunda korelasyon değeri sıfıra eşit olacaktır. Ancak, bu durumun tersi doğru olmayıp genelde, korelasyonun mevcut olmaması ya da sıfıra eşit olması değişkenlerin bağımsız olduğu anlamına gelmemektedir¹.
- 6) Korelasyonun yüksek kesinlik ile ölçülmesinin arzu edilmesi durumunda gerekli veri oldukça büyüktür.

Doğrusal korelasyon katsayısının yukarıda özetlenen özellikleri arasından, Madde 2'de bahsedilen $Cor(X,Y) \in [-1,1]$ kapalı aralığının, sabit marjinal kurallar $X \sim F$ ve $Y \sim G$ ile her zaman ulaşılma gerekliliği yoktur. Şöyle ki, tercih edilen marjinal kurallara göre ulaşılabilir en yüksek korelasyon değeri $\rho=0.3$ olabilir. Daha açık bir ifade ile, sabit marjinal kurallara sahip X ve Y rassal değişkenleri arasındaki ρ_θ ile gösterilen olası en büyük korelasyon değerine ulaşılması (ya da ρ_θ ile gösterilen olası en küçük korelasyon değerine), X ve Y değişkenlerinin M eş-monoton kopulası (ya da W ters-monoton kopulası) ile eşleştirilmesi durumunda mümkün olduğu gösterilebilir. Marjinal kuralların birçoğu için $-1 < \rho_\theta < \rho_\theta < 1$ sağlanır. Bununla birlikte, aşağıda yer

¹ Çok değişkenli normal dağılımlarda bu durum sağlanır, yani korelasyonun mevcut olmaması değişkenler arası bağımsızlığı ifade eder.

alan korelasyonun sınırlarına örnek paragrafında $\rho_{\oplus}$ ve $\rho_{\ominus}$ bir örnek dahilinde açıklanmışlardır.

Doğrusal korelasyon katsayısının özellikleri arasından Madde 3'te, değişkenlere ölçeklendirme uygulanması durumunda korelasyon katsayısının değişmeyeceği ifade edilmektedir. Örneğin, yüzdesel ya da baz puan şeklinde ifade edilmelerine bakılmaksızın iki kredi marjı arasındaki korelasyon aynı olacaktır. Ancak, logaritmanın alınması gibi değişkenlere uygulanabilecek doğrusal olmayan bir dönüşüm korelasyon katsayısının değişmesine yol açacaktır.

Bununla birlikte, Embrechts vd. (2002: 24), X ve Y log-normal marjinal dağılımlarına sahip ($X \sim \log N(0,1)$ ve $Y \sim \log N(0,\sigma)$) iki rassal değişkeni ele almış ve bu değişkenler arasındaki korelasyon katsayısının alt ve üst sınırlarını aşağıdaki şekilde ortaya koymuşlardır.

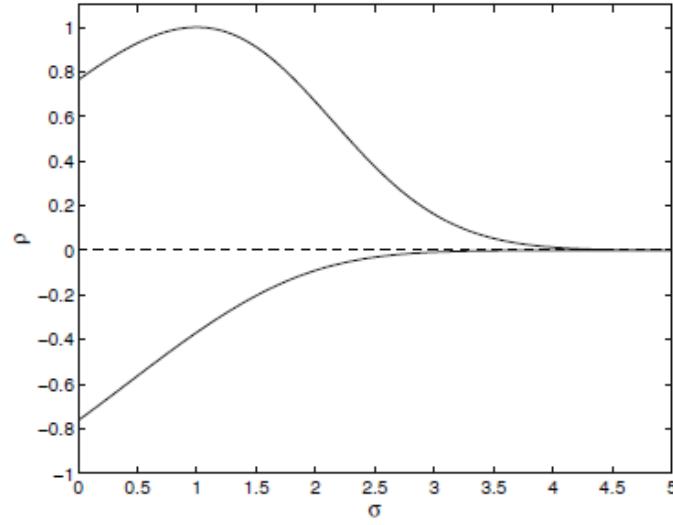
$$\rho_{\ominus} = \rho(e^Z, e^{-\sigma Z}) \text{ ve } \rho_{\oplus} = \rho(e^Z, e^{\sigma Z}) \quad (4.12)$$

Şeklinde verilmiş olup, Z standart normal dağılan ($Z \sim N(0,1)$) rassal bir değişkendir ve (Malevergne ve Sornette, 2006: 150);

$$E[e^{\alpha Z}] = e^{\frac{\alpha^2}{2}}, \quad \text{ile} \quad (4.13)$$

$$\rho_{\ominus} = \frac{e^{-\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2}-1)}} \text{ ve } \rho_{\oplus} = \frac{e^{\sigma} - 1}{\sqrt{(e-1)(e^{\sigma^2}-1)}} \quad \text{elde edilir} \quad (4.14)$$

Şekil 4.1'de korelasyon alt ve üst sınırlarının, σ 'nın birer fonksiyonu şeklinde gösterimi verilmiştir. σ 'nın dört ve üzeri değerler alması ile her iki korelasyon sınırının da sıfıra çok yakın değerler aldığı ve $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \rho_{\ominus} = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \rho_{\oplus} = 0$ olduğu görülmektedir. Dolayısı ile her zaman doğrusal korelasyon katsayısının çok küçük değerler alması, iki rassal değişken arasındaki zayıf bağımlılığın bir göstergesi olarak değerlendirilemez.



Şekil 4.1: Log-Normal Marjinal Dağılımlara Sahip İki Rassal Değişken İçin $\rho_{\ominus}$ ve $\rho_{\oplus}$ Grafiği

Kaynak: Malevergne ve Sornette (2006: 150).

4.2.2 Sıra Korelasyonu

Rassal değişkenlerin, çok değişkenli eliptik (normal ya da Student-t dağılımı gibi) bir dağılıma sahip olmamaları, değişkenler arası doğrusal olmayan türde bir ilişkinin mevcut olması veya varyanslarının bilinmemesi ya da ölçüm şekillerinin oranlama (veya eşit aralıklı) olmaması durumlarında değişkenler arası bağımlılığın ölçümlenmesi amacı ile sıra korelasyonları kullanılabilir.

Sıra korelasyonu bağımlılık yapıları bölümünde açıklanan, rassal değişkenlerden birinin büyük değerleriyle diğer değişkenin büyük değerleri ya da bu değişkenin küçük değerleriyle diğer değişkenin küçük değerlerinin birlikte gözlemlendiği uyumluluk kavramı veya tersi durumun gözlemlendiği uyumsuzluk kavramlarına dayanır.

Sıra korelasyonu olarak adlandırılan sıra istatistikleri, değişkenlere sadece sıraları aracılığıyla bağımlı olma, değişkenlere uygulanan kesin monoton dönüşümlerden etkilenmeme ve sadece değişken kopularına dayanma özelliklerine sahiptirler. Sıra istatistikleri, değişken sıralamalarına dayalı olasılık dönüşümleri yolu ile rassal değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını tanımlarlar. Rassal değişken çiftleri arasındaki istatistiksel ilişkiyi ölçen ve en yaygın kullanılan sıra korelasyonları

Kendall tau (τ) ve Sperman sıra korelasyonu (ρ_s)’dur (Ruppert ve Matteson, 2015: 194).

4.2.2.1. Kendall Tau

X ve Y sürekli rassal değişkenler ve bu değişkenlerin ortak dağılımından elde edilen gözlem değerleri (X_1, Y_1) ile (X_2, Y_2) rassal değişken çiftleri olsun. Ana kütleyle ilişkin Kendall sıra korelasyonu (“Kendall tau”, τ) (Trivedi ve Zimmer, 2007: 22):

$$\tau = \tau_{x,y} = P[(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4.15)$$

$$\tau = \tau_{x,y} = P[\text{uyumluluk}] - P[\text{uyumsuzluk}] \quad (4.16)$$

Yukarıda belirtildiği gibi Kendall tau (τ) değeri, değişkenler arası uyumluluk olasılığı ile uyumsuzluk olasılığının farkı olup, marjinal dağılımlara uygulanan artan dönüşümler altında değişmeme özelliğine sahiptir ve sadece (X,Y) rassal değişkenlerinin kopulasına bağlıdır. Eşitlik 4.15 sürekli rassal değişkenler için aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir (Malevergne ve Sornette, 2006: 155).

$$\tau = 2P[(X_1 - X_2) \cdot (Y_1 - Y_2) > 0] - 1 \quad (4.17)$$

Böylece, kopulası C olan sürekli X ve Y rassal değişkenlerine ilişkin Kendall τ değeri:

$$\tau_{x,y} = \tau_c = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad (4.18)$$

Şeklinde ifade edilir. Kendall tau, -1 ile +1 arasında değerler almakla birlikte, değişkenlerin eş-monoton olmaları durumunda üst sınır değeri, ters-monoton olmaları durumunda ise alt sınır değerine ulaşılır.

4.2.2.2. Sperman Sıra Korelasyonu

X ve Y sürekli rassal değişkenler ve bu değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu F ve sürekli marjinal dağılım fonksiyonları F_1 ve F_2 ile verilmiş olsun. Ana kütleyle ilişkin Sperman sıra korelasyonu (ρ_s):

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)) \quad (4.19)$$

ρ burada doğrusal korelasyon katsayısı olup Sperman sıra korelasyonu (ρ_s), $F_1(X)$ ve $F_2(Y)$ arasındaki doğrusal korelasyonun bir ifadesidir. Aynı zamanda, $(F_1(X), F_2(Y))$ 'nin ortak birikimli dağılım fonksiyonu X ve Y 'nin kopulası olduğu için Sperman sıra korelasyonu sadece (X, Y) rassal değişkenlerinin kopulasına bağlıdır (Ruppert ve Matteson, 2015: 195).

Kendall tau benzeri, Sperman sıra korelasyonu da rassal değişkenlerden birinin büyük değerleriyle diğer değişkenin büyük değerleri ya da bu değişkenin küçük değerleriyle diğer değişkenin küçük değerlerinin birlikte gözlemlendiği uyumluluk kavramı veya tersi durumun gözlemlendiği uyumsuzluk kavramlarına dayanır.

Kopulası C olan sürekli X ve Y rassal değişkenlerine ilişkin Sperman rho (ρ_s) değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv \, dC(u, v) - 3 \quad (4.20)$$

Şu ana dek açıklanan sıra korelasyonu istatistiklerinden Kendall tau ve Sperman rho'nun, Eliptik ve yaygın kullanıma sahip bazı Arşimedyen kopulaların parametreleri türünden gösterimine Tablo 4.1'de yer verilmiştir.

Tablo 4.1: Eliptik ve Bazı Arşimedyen Kopulaların Uyumluluk Ölçüleri ile Kuyruk Bağımlılık Katsayıları

Kopula	Kendall tau (τ)	Sperman rho	Kuyruk Bağımlılığı Katsayıları
Normal	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin(\frac{\rho}{2})$	0
t-Kopula	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin(\frac{\rho}{2})$	$\dot{U}KB = AKB = 2t_{v+1} \left[-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right]$
Clayton	$\theta/\theta + 2$	*	$\dot{U}KB_\theta = 0, \quad AKB_\theta = 2^{-1/\theta}$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)]$	$1 - \frac{12}{\theta} [D_1(\theta) - D_2(\theta)]$	$\dot{U}KB_\theta = 0, \quad AKB_\theta = 0$
Gumbel	$\frac{\theta - 1}{\theta}$	*	$\dot{U}KB_\theta = 2 - 2^{1/\theta}, \quad AKB_\theta = 0$

Kaynak: Jondeau vd. (2007); Mai ve Scherer (2014)

Tablo 4.1’de yer alan D_1 ve D_2 aşağıda tanımı verilen Debye $(D_k(x))$ fonksiyonu olmak üzere (Jondeau vd., 2007: 250), ρ doğrusal korelasyon katsayısı, θ ise her bir Arşimedyen kopula türüne özgü kopula parametresidir.

$$D_k(x) = \begin{cases} x \geq 0 \text{ için} & \frac{k}{x^k} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt \\ x < 0 \text{ için} & \frac{k|x|}{1+k} + \frac{k}{|x|^k} \int_x^0 \frac{t^k}{e^t - 1} dt \end{cases} \quad (4.21)$$

BEŞİNCİ BÖLÜM

MARKOWITZ ORTALAMA-VARYANS MODELİ, PORTFÖY RMD VE BEKLENEN KAYIP İLE PORTFÖY PERFORMANS ÖLÇÜTLERİ

5.1 Ortalama-Varyans Modeli

Portföy yönetiminde 1950’li yıllara kadar, portföyün performansı ile menkul kıymet sayısı arasında doğrusal bir ilişki bulunduğunu ve sadece portföyde yer alan menkul kıymet sayısını arttırarak riskin azaltılabileceğini ileri süren basit çeşitlendirme yaklaşımı kullanılmıştır. Bu yaklaşımda, portföye alınacak menkul kıymetler arasındaki ilişkiler dikkate alınmamakta ve menkul kıymet seçiminde sayısal yöntemlere yer verilmemektedir.

1952 yılında Harry Markowitz’in Ortalama-Varyans Modelini (OV) ortaya koyması ile portföy yönetiminde ilk defa sayısal yöntemler kullanılmış, seçimi yapılacak menkul kıymetler arasındaki ilişkiler göz önünde bulundurulmuş ve en önemlisi yatırım kararlarının verilmesinde formal bir risk/getiri çerçevesi oluşturulmuştur (Rom ve Ferguson, 1994). Markowitz (1952), risk kavramını bir varlığın getiri oranının standart sapması olarak tanımlamış ve portföy yönetiminde çeşitlendirme yoluyla belirli bir getiri düzeyinde riskin minimize edilebileceğini vurgulamıştır. Markowitz tarafından rasyonel ve riskten kaçınan olarak tanımlanan yatırımcılar, risk-getiri düzeyine göre portföylerini belirlemektedirler. Rasyonel yatırımcılar, belirli bir risk düzeyinde en yüksek getiriye, belirli bir getiri düzeyinde de en düşük riske sahip portföyü seçeceklerdir. OV modelini finans literatürüne kazandıran Markowitz, 1990 yılında Nobel ödülüne layık görülmüştür.

Markowitz’in OV modeli ve takibi William Sharpe (1964), Tobin (1958), Lintner (1965), Jensen (1969), Fama (1970), Merton (1974), Elton ve Gruber (1997), French (2003) gibi birçok araştırmacının modelin gelişimine yönelik katkıları Modern Portföy Teorisi (MPT) başlığı altında sınıflandırılmakta olup, MPT denge durumunda riskli

menkul kıymetlerin fiyatlanma şeklini ve rasyonel yatırımcıların çeşitlendirme ile portföylerini optimize etme yollarını açıklamaktadır.

5.1.1 Ortalama-Varyans Optimizasyonu

Markowitz (1952)'in ortaya koyduğu ve finans literatüründe yeni bir dönemin başlangıcını temsil eden Ortalama-Varyans (OV) Modeli, portföyü oluşturan varlıkların geçmiş getiri değerlerinin kullanılması ile varlık beklenen getiri ve risklerinin hesaplanmasını ve hesaplanan beklenen getiri ve risk değerlerinin portföy beklenen getirisini maksimize eden ya da portföy riskini minimize eden bir matematiksel model aracılığı ile portföyün optimizasyonuna dayanır.

Optimizasyon probleminde yer alan kavramlardan varlık beklenen getirileri, varlıkların geçmiş getiri değerlerinin aritmetik ortalaması, varlık riski ise geçmiş getiri değerlerinin varyans istatistiği ile temsil edilmektedir. Matematiksel gösterimi aşağıda verilen portföy beklenen getirisi (μ_p), portföyde yer alan varlıkların beklenen getirilerinin ağırlıklı ortalamasını ve portföy riski (σ_p^2), olası portföy getirilerinin beklenen portföy getirisinden sapma değerlerini ifade etmektedirler (Markowitz, 1952).

$$\mu_p = \sum_{i=1}^N w_i \mu_i = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (5.1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w} \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.3)$$

$$w_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.4)$$

μ_i : i varlığının beklenen getirisini, w_i : i varlığının portföydeki ağırlığını ve σ_{ij} : i . ile j . varlıkların arasındaki kovaryans değeridir. Eşitlik 5.1'de yer alan $\boldsymbol{\mu}$, elemanları portföydeki her bir varlığın beklenen getirisi olan kolon vektörüdür. Bununla birlikte, $\mathbf{w}^T = [w_1, \dots, w_N]$ olmak üzere, varlıkların portföy ağırlıklarını içeren $\mathbf{w}$ vektörünün transposesi alınarak elde edilen vektörü ifade etmektedir.

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Eşitlik 5.2’de yer alan Σ ise, satırları i ve sütunları j ile endekslenen σ_{ij} elemanlarını içeren varyans-kovaryans matrisidir.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

OV Modeli ile Markowitz’in portföy yönetimine en önemli katkısı, varlık seçiminde bireysel risk/getiri profillerinin tüm portföyden ayrı değerlendirilmemesi ve varlıkların birlikte hareket etme eğilimlerinin göz önünde bulundurulma gerekliliğini ortaya koymasındır. Portföy riskinin belirlenmesinde kullanılan kovaryans istatistiği (σ_{ij}), varlık getirilerinin birlikte hareket etme ölçüsünün bir göstergesidir. $-\infty$ ile $+\infty$ arasında değerler alabilen kovaryansın, pozitif bir değer alması durumunda getiriler arası bir eş yönlülük olduğu ve tersi durumunda ise getiriler arası zıt yönlü bir ilişkinin varlığından söz edebilmek dışında rakamsal değerinin bir anlamı yoktur (Korkmaz ve Pekkaya, 2012: 506).

Hesaplanan kovaryans değeri, getirilerin standart sapmalarının çarpımına bölünmesi yolu ile normalize edilir ve $[-1,+1]$ aralığında değerler alan korelasyon katsayısı elde edilir. Bağımlılık ölçüleri arasından en çok bilinen ve en sık kullanılan doğrusal korelasyon katsayısıdır (Pearson korelasyon katsayısı). Katsayı, iki rassal değişken arasındaki doğrusal ilişkinin gücü ve yönünü göstermekle birlikte, değişken dağılımlarının normal olduğu ve iki değişkenin de eşit aralıklı veya oranlama ya da değişkenlerden birinin eşit aralıklı diğerinin ise oranlama ölçülmüş olduğu varsayımlarını taşır (Alhan, 2008: 29). Varlık getirileri arasında mükemmel ve ters yönde doğrusal bir ilişki gözlemleniyor ise doğrusal korelasyon katsayısı -1 değerini ve tersi durumda, yani getiriler arasında aynı yönde ve mükemmel bir doğrusal ilişki mevcut ise +1 değerini alacaktır.

Markowitz’in OV Modeli ile ilk defa, portföy riskinin azaltılması amacı ile varlık getirileri arasındaki korelasyonun dikkate alınma gerekliliğinden bahsedilmiştir.

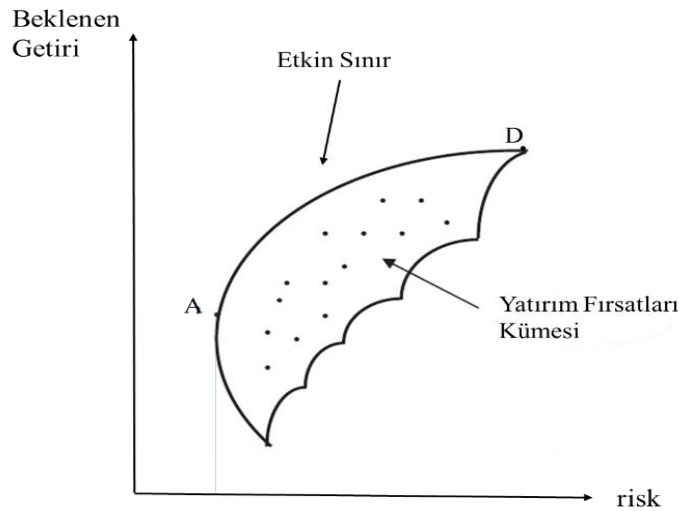
Portföye seçimi yapılacak varlık getirileri arasındaki korelasyonun negatif veya düşük olması, portföy riskinin azaltılmasını sağlayacaktır. Bununla birlikte, iki varlıktan oluşan bir portföyün varyansı, kovaryans teriminin yerine kovaryansı temsil eden varlıklar arasındaki korelasyon katsayısı ve varlık standart sapmaları çarpımının kullanılması ile aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$$\sigma_p^2 = w_1^2 \sigma_1^2 + w_2^2 \sigma_2^2 + 2w_1 w_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \quad (5.7)$$

Portföyde ikiden fazla varlık olması durumunda ise portföy riski:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \quad (5.8)$$

Markowitz'in OV portföy optimizasyonu probleminin çözümü ile, belirli bir getiri oranında en düşük portföy riskine veya belirli bir risk düzeyi için en yüksek portföy getirisine sahip etkin portföyler elde edilmektedir. Her iki durumda da belirlenecek etkin portföyler aynı olsa dahi, portföy optimizasyon problemi farklılık göstermektedir. İlk durum (riskin minimize edilmesi) doğrusal kısıtlar içeren kuadratik optimizasyon olmasına rağmen, ikinci durumun amaç fonksiyonu doğrusal, kısıtları ise kuadrattır (Pfaff, 2016: 47).



Şekil 5.1: Yatırım Fırsatları Kümesi ile Etkin Sınır

Kaynak: Francis ve Kim (2013: 119)

Şekil 5.1’de bir portföyü oluşturan riskli varlıkların olası tüm bileşimlerini içeren “yatırım fırsatları kümesi” ile AD eğrisi üzerinde yer alan etkin portföylerin gösterimine yer verilmiştir. Açığa satış veya borçlanmanın mevcut olmadığı durumlarda, N adet riskli varlık ile oluşturulabilecek tüm portföyler yarım ay şekline benzeyen yatırım fırsatları kümesinin kenar çizgileri üzerinde ya da içinde yer alacaktır. OV optimizasyonu ile elde edilen tüm etkin portföyleri birleştiren ve Şekil 5.1’de AD ile gösterilen eğri ise “Etkin Sınır” olarak adlandırılmıştır.

Bununla birlikte, OV portföy optimizasyonu probleminin matematiksel gösterimi, portföy beklenen getiri (μ_p) ve varyansının (σ_p^2) yukarıdaki vektörel tanımlarından yararlanılarak izleyen şekilde yapılabilmektedir. Beklenen ya da kabullenilen belirli bir getiri oranı için en düşük riskli etkin portföyün elde edilmesini sağlayan OV portföy optimizasyon problemi (r_m : Beklenen portföy getiri oranıdır):

$$\min \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (5.9)$$

$$\boldsymbol{\mu} = r_m \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.11)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.12)$$

Kabullenilen belirli bir risk düzeyi için en yüksek getiriye sahip etkin portföyün elde edilmesini sağlayan OV portföy optimizasyon problemi (γ : Kabullenilen belirli bir risk düzeyidir):

$$\max \mathbf{w}^T \boldsymbol{\mu} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} = \gamma \quad (5.14)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.15)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.16)$$

Tamamı riskli N adet varlığın portföy içerisindeki farklı kombinasyonlarıyla oluşturulabilecek tüm etkin portföyler arasından en düşük riske sahip “Global

Minimum Varyans” (GMV) portföyünün elde edilmesini sağlayan OV optimizasyon problemi ise aşağıdaki gibidir:

$$\min \mathbf{w}^T \Sigma \mathbf{w} \quad (5.17)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.18)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.19)$$

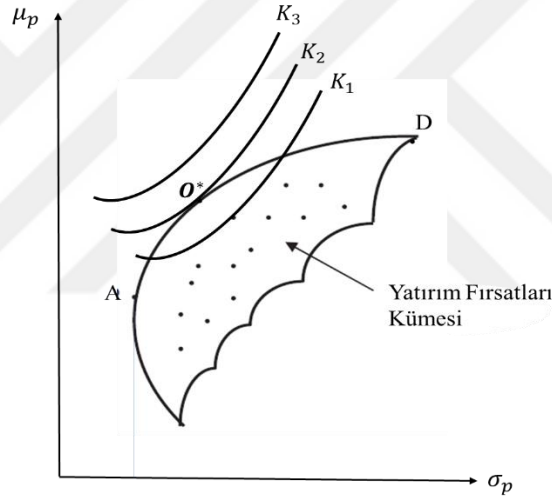
Şekil 5.1’deki etkin sınırın alt ucunda yer alan A noktası, en düşük riskli etkin portföyü ifade eden GMV portföyünü göstermektedir. Şu ana dek bahsedilen üç optimizasyon yönteminin her biri getirilerin çok değişkenli normal dağılıma sahip olma, açığa satış imkânının mevcut olmaması ve sınırsız bölünebilen N adet varlık varsayımlarına sahiptir. Ayrıca, OV portföy optimizasyon modelinin, bazıları açıkça belirtilmese dahi aşağıda yer alan varsayımları içerdiği belirtilmelidir.

- Yatırımcıların temel amacı ekonomik faydanın maksimize edilmesidir.
- Yatırımcıların piyasadaki fiyatları etkileme gücü yoktur ve yatırımcılar mevcut fiyatlar üzerinden işlem yaparlar.
- Vergi ya da işlem maliyetleri mevcut değildir.
- Yatırımcılar rasyonel ve riskten-kaçınandır.
- Yatırımcılar aynı bilgiye eşzamanlı ulaşabilmektedirler.
- Yatırımcılar, aynı beklenti ve yatırım ufkuna sahiptirler.
- Varlıklar arası korelasyon belirli ve sonsuza dek sabittir.
- Varlıkların sınırsız miktarlara bölünebilme olanağı mevcuttur.
- Varlık riski (volatilitesi) bilinmekte ve sabittir.

Bununla beraber, OV portföy optimizasyonunun; yatırım amaç ve kısıtlarının geliştirilmesi, portföy riski ve elementlerinin kontrolü, aktif getiri bilgisinin etkin bir şekilde kullanımı, varlık yöneticisinin yatırım felsefesi, stili ve piyasa görüşünün geliştirilmesi gibi birçok alanda uygulanan kullanışlı bir varlık yönetim aracı olduğu belirtilmiştir (Michaud ve Michaud, 2008: 4).

5.1.2 Optimal Portföyün Belirlenmesi

OV optimizasyonu ile elde edilen etkin sınır üzerinde yer alan hangi etkin portföyün seçileceğini ise yatırımcıların bireysel tercihleri belirlemektedir. Kayıtsızlık eğrileri, her bir yatırımcıya özgü belirli bir beklenen fayda düzeyi için yatırımcının risk ve getiri tercihlerini gösteren eğrilerdir. Bir kayıtsızlık eğrisi üzerindeki her bir nokta aynı beklenen fayda düzeyini temsil etmektedir. Bu nedenle, riskten-kaçınan bir yatırımcı Şekil 5.2’de gösterildiği gibi farklı kayıtsızlık eğrileri arasından en yüksek beklenen faydayı temsil eden ve dolayısıyla AD eğrisi ile gösterilen etkin sınıra sadece bir noktada teğet olan K_2 eğrisi üzerindeki O^* portföyünü tercih edecektir.



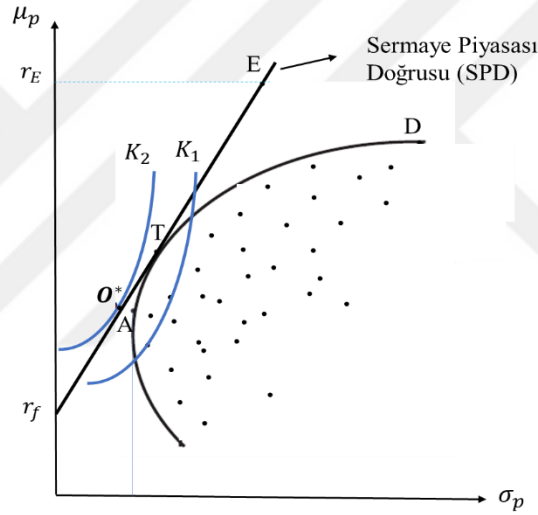
Şekil 5.2: Farklı Etkin Portföyler Arasından Riskten Kaçınan Bir Yatırımcıya Özgü Optimal Portföyün Belirlenmesi

Kaynak: Karan (2013: 171)

Bir önceki bölümde bahsedildiği gibi OV modeli, yatırımcıların rasyonel, riskten-kaçınan ve temel amaçlarının ekonomik faydayı maksimize etme olduğunu varsaymaktadır. Bir yatırımcının riskten kaçınma düzeyi kayıtsızlık eğrilerinin eğimini etkilemektedir. Riskten-kaçınma düzeyi arttıkça kayıtsızlık eğrilerinin eğimi de artmaktadır. Bu nedenle, farklı yatırımcılar aynı etkin portföyler arasından farklı bir portföyü optimal olarak belirleyebilmektedirler.

5.1.3 Risksiz Bir Varlığı İçeren Risk-Etkin Portföyler

Bir önceki bölümde açıklanan optimizasyon problemlerinin tamamı sadece riskli varlıklardan oluşturulan portföyleri içermektedir. Sharpe (1963, 1964), Markowitz'ın yaklaşımını geliştirerek “Sermaye Varlıklarını Fiyatlama Modeli” (CAPM)'in temellerini oluşturan risksiz bir varlık ile birlikte riskli bir portföye yatırım yapılması durumunu değerlendirmiştir. Varyansı sıfıra eşit ($\sigma^2 = 0$) risksiz bir varlığın portföye dahil edilmesi durumunda elde edilen yeni portföyler, risksiz varlığın getirisi ile riskli portföyü birleştiren doğru üzerinde yer alacaktır.



Şekil 5.3: Risksiz Bir Varlığı İçeren Risk-Etkin Portföyler

Kaynak: Karan (2013: 201)

Şekil 5.3'te risksiz varlığın getirisi ile T ve E noktalarını birleştiren $\overline{r_fTE}$ doğrusu “Sermaye Piyasası Doğrusu” (SPD) olarak adlandırılmıştır. SPD doğrusu üzerindeki her bir portföy farklı risk değerleri için daha yüksek portföy getirisine sahiptir. Bu nedenle, risksiz bir varlığın portföye eklenmesiyle etkin sınırı oluşturan tüm etkin portföyler SPD doğrusunun üzerinde yer alarak yeni etkin sınırın SPD doğrusu olmasını sağlamıştır. SPD doğrusunun AD eğrisine teğet olduğu T noktası “Teğet Portföyü” ya da “Maksimum Sharpe Portföyü” olarak adlandırılmıştır. Bir diğer ifadeyle, Teğet portföyü Markowitz (1952)'in OV modelindeki etkin sınırın SPD doğrusuna teğet olduğu portföydür.

Risksiz bir varlığın portföye eklenmesiyle elde edilen yeni etkin sınır bir doğru olduğu için izleyen eşitlikteki gibi tanımlanabilmektedir (Francis ve Kim, 2013: 129).

$$\mu_p = r_f + \left(\frac{r_T - r_f}{\sigma_T} \right) \sigma_p \quad (5.20)$$

Eşitlik 5.20’de yer alan r_T ve σ_T , T teğet portföyünün sırasıyla getiri ve riskini ifade etmekle birlikte portföy getirisinin risksiz faiz oranından farkı alınarak portföy riskine bölünmesiyle elde edilen oran “Sharpe Oranı” olarak adlandırılmıştır (Sharpe, 1966, 1994). Şekil 5.3’te gösterimi verilen SPD üzerindeki T teğet noktasında bir yatırımcı tamamı riskli varlıklardan oluşan Teğet portföyüne, r_f ve T noktaları arasında risksiz faiz oranı ile birlikte riskli Teğet portföyüne yatırım yapmaktadır. T ve E noktaları arasında ise yatırımcı risksiz faiz oranından borçlanarak riskli portföye yatırım yapmaktadır. Ayrıca, şu ana dek açıklanan Teğet ya da Maximum Sharpe portföyünün elde edilmesini sağlayan optimizasyon problemi ise aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\max \frac{\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{w} - r_f}{\sqrt{\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{w}}} \quad (5.21)$$

$$\sum_{i=1}^N w_i = 1 \quad (5.22)$$

$$w_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (5.23)$$

Eşitlik 5.21’de yer alan $\boldsymbol{\mu}^T$, elemanları portföydeki her bir riskli varlığın beklenen getirisini içeren $\boldsymbol{\mu}$ kolon vektörünün transposesi alınarak elde edilen vektörü, benzer şekilde $\mathbf{w}^T$ ise, varlıkların portföy ağırlıklarını içeren $\mathbf{w}$ vektörünün transposesi alınarak elde edilen vektörü ifade etmektedirler.

Risksiz bir varlığın portföye dahil edilmesiyle elde edilen doğrusal etkin portföyler sınırı ile riskten-kaçınan yatırımcılara ait konveks kayıtsızlık eğrilerinin mevcut olması durumunda dahi etkin sınır teoremi geçerlidir. Bu durumda, yatırımcılar kendilerine en yüksek faydayı sağlayan en kuzey batıdaki ve etkin sınıra sadece bir noktada teğet olabilecek portföyü optimal portföy olarak belirleyeceklerdir. Şekil 5.3’te kayıtsızlık eğrilerinin SPD doğrusuna teğet olduğu ve O^* ile belirlenen nokta optimal portföyü göstermekle birlikte portföy, A noktasında yer alan GMV

portföyünden daha az risk ve daha yüksek beklenen getiriye sahiptir. Optimal portföyünü O^* noktasında belirleyen bir yatırımcı hem risksiz faiz oranına hem de Teğet portföyüne yatırım yapmaktadır.

5.1.4 Ortalama-Varyans Modeline Yöneltilen Eleştiriler

Modern Portföy Teorisi ile Ortalama-Varyans Modeline yöneltilen en önemli eleştirilerden biri varyansın bir risk ölçütü olarak bireylerin risk tutumlarını doğru yansıtmadığı, dolayısı ile doğru bir ölçüm olmadığı yönünde olmuştur.

Bu amaçla, “Kayıp Riski” ya da “Aşağı Yönlü Risk” (Downside Risk) olarak adlandırılan ve farklı türdeki getiri dağılımlarının, belirlenen hedef getiri düzeyinin altında kalan alanın ölçümü ile ilgilenen risk ölçütleri geliştirilmiştir. Getiri dağılımlarının sadece sol tarafı dikkate alınarak geliştirilen bu tür risk ölçütlerinin daha güvenilir oldukları ve yatırımcıların tutumlarını daha doğru bir şekilde temsil ettikleri belirtilmiştir (Estrada, 2007; Harlow, 1991; Rom ve Ferguson, 1994).

OV portföy optimizasyonunda varyans istatistiği yerine kayıp riski ölçütlerinden biri ve alt-kısmi momentin (LPM) özel bir şekli olan yarı-varyans (semi-varyans) kullanılabilir. Ayrıca, varyans istatistiğine alternatif ortalama mutlak sapma ve aralık ölçütleri vb. diğer önemli değişkenlik ölçütleri de mevcuttur. Ancak, Michaud ve Michaud (2008: 21) da belirttiği gibi her bir risk ölçütünün kendine has artı ve eksisi olmakla birlikte, kullanımları getiri dağılımlarının doğasına bağlıdır. Bununla birlikte şu ana dek bahsedilen tüm ölçütler, getirilerin geçmiş gözlem değerlerinden yola çıkarak elde edilmiş ve dolayısı ile geçmiş verilere ait bazı istatistikî değerlerin (ortalama ya da ortalamadan sapma gibi) gelecek verilerin iyi birer tahmincisi oldukları varsayılmıştır.

Modele yöneltilen bir diğer önemli eleştiri ise modelin, belirsizlik altında karar vermenin temel teorik çerçevesini oluşturan beklenen fayda maksimizasyonu prensibi ile uyumlu olma gerekliliğidir. Markowitz’in OV modeli, getirilerin normal dağılım göstermesi ve fayda fonksiyonunun kuadratik olması koşullarından en az birinin

sağlanması durumunda beklenen fayda maksimizasyonu prensibi ile tam uyumlu olacaktır (Michaud ve Michaud, 2008: 22).

Modelin tek dönemli ve kısa bir yatırım ufkuna sahip olması, ortalama ve varyans gibi sadece iki istatistiki parametreyi göz önünde bulundurması ve mevcut veriler dahilinde ortaya çıkan model kararsızlığı nedeni ile teknik zorluklar modele yönelik diğer eleştiri konularını oluşturmaktadırlar.

5.2 Yarı-Varyans, Riske Maruz Değer ve Beklenen Kayıp

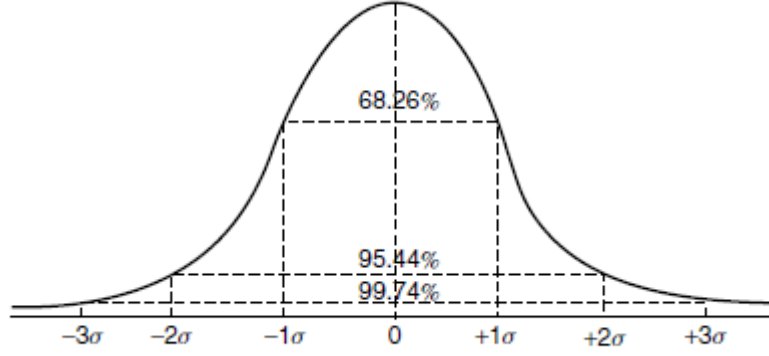
Ortalama-Varyans modeline yöneltilen en önemli eleştirilerden biri varyans istatistiğinin portföy riskinin doğru bir ölçüsü olmadığına yönelik olmuştur. Ortalama-Varyans modelinde, ortalama getiriden sapma düzeyini gösteren varyans, simetrik bir ölçüm olup yatırımcılar tarafından arzu edilecek yukarı yöndeki sapmaları, istenmeyen aşağı yöndeki sapmalarla aynı oranda cezalandırdığı için eleştirilmiştir. Aşağı yönlü sapmaların, yukarı yönlü istenen sapmalardan ayrıştırıldığı bir risk kavramı, yatırımcıların risk algısını çok daha iyi yansıtacaktır (Grootveld ve Hallerbach, 1999: 305).

Bu amaçla, “Kayıp Riski” ya da “Aşağı Yönlü Risk” (Downside Risk) olarak adlandırılan ve farklı türdeki getiri dağılımlarının, belirlenen hedef getiri düzeyinin altında kalan alanın ölçümü ile ilgilenen risk ölçütleri geliştirilmiştir. Bunlar arasında, “yarı-varyans” (semi-variance), Riske Maruz Değer (RMD, Value at Risk (VaR)) ve Koşullu Riske Maruz Değer (CVaR ya da diğer bir ifadeyle Beklenen Kayıp (BK, Expected Shortfall (ES)) risk ölçütleri yer almaktadır.

5.2.1 Yarı-Varyans

Markowitz (1959), önceki paragraflarda bahsedildiği gibi OV modelinde portföy riskinin tanımına yöneltilen eleştirilerden yola çıkarak, riskin ölçümünde sadece ortalamanın altında veya hedef getiri düzeyinin altında yer alan getirilerin değişkenliğini ölçen “yarı-varyans” (semi-variance) kavramını ileri sürmüştür. Markowitz, getirilerin Şekil 5.4’teki gibi normal dağılması durumunda, varyans ve yarı-varyans risk ölçütlerinin her ikisinin de doğru ölçümü sağladığını, getirilerin

normal dağılmaması durumunda ise sadece yarı-varyansın doğru ölçümü sağladığını göstermiştir.



Şekil 5.4: Normal Dağılım

Kaynak: Sortino ve Satchell (2001: 4)

Aşağı Yönlü yarı-varyans (“downside semi-variance”) (Chen, 2016: 72):

$$\sigma_-^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [\min((R_i - \mu), 0)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{R}_i - \mu)^2 \quad (5.24)$$

Eşitlik 5.24’te yer alan R_i varlık getirilerini ve μ getirilerin ortalamasını temsil etmekle birlikte $\bar{R}_i$:

$$\bar{R}_i = \begin{cases} R_i & \text{eğer } R_i < \mu \\ \mu & \text{eğer } R_i \geq \mu \end{cases} \quad (5.25)$$

Eşitlik 5.24 ile bulunan değer merkezi yarı-sapmanın karesi olan yarı-varyanstır. Estrada (2007: 170)’nın belirttiği gibi yatırımcıların yukarı yönlü değil sadece aşağı yönlü volatilitiyi istememeleri ile birlikte, getiri dağılımlarının simetrik olmaması durumunda yarı-varyans, varyansa oranla daha kullanışlı bir ölçüttür.

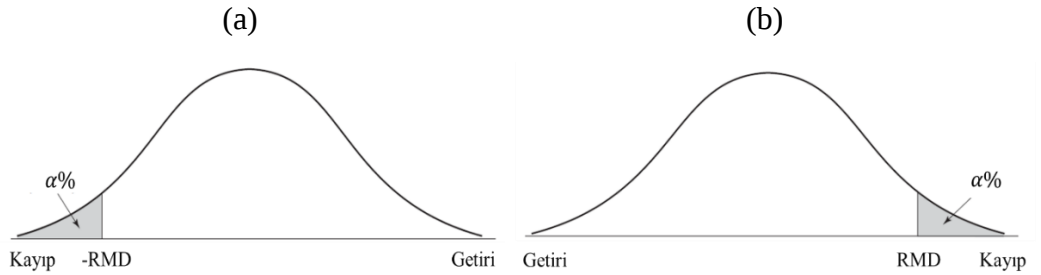
5.2.2 Riske Maruz Değer

Riske Maruz Değer (RMD, Value at Risk (VaR)), finansal bir varlığın veya bir portföyün piyasa riskinin ölçülmesi amacıyla finansal risk yönetimi alanında yaygın bir şekilde kullanılan popüler risk ölçütlerinden biridir. RMD’nin popülerliği farklı türdeki finansal varlıklara ve/veya karmaşık portföylere uygulanabilecek bir ölçüt olmasıyla ilişkilidir.

Riske Maruz Değer, finansal bir varlığın ya da bir portföyün belirli bir zaman ve güvenilirlik düzeyi için beklenen en yüksek kayıp miktarını ifade etmektedir (Jorion, 2000: 86). Bir diğer deyişle, bir finansal varlığın ya da portföyün RMD tahmini, belirlenen olasılık ve zaman dilimi içinde varlığın değerinde meydana gelebilecek en yüksek değer kaybının tahminidir. Örneğin; %99 güvenilirlik düzeyi ($\alpha = 0.01$) için 10 günlük RMD tahmini 5 milyon TL olan bir portföyün 10 gün içinde değerinde 5 milyon TL üzeri bir kayıp oluşma olasılığı sadece %1'dir. Bir finansal varlık ya da portföye ait t zamanındaki R_t getirileri ve $(1 - \alpha)$ güvenilirlik düzeyi için RMD ölçütünün matematiksel tanımı aşağıdaki gibidir.

$$RMD_t^\alpha = F_R^{-1}(\alpha) = \inf \{r \in \mathbb{R} : F_R(r) \geq \alpha\} \quad (5.26)$$

Eşitlik 5.26'da yer alan F_R terimi portföy ya da finansal varlık getirilerinin dağılım fonksiyonunu ve $F_R^{-1}(\alpha)$ ise getiri dağılımının (F_R 'nin) standardize α –yüzdeliğini ifade etmektedirler. Bununla birlikte, $\inf$ terimi ise $F_R(r) \geq \alpha$ eşitsizliğini sağlayan en küçük reel sayıyı belirtmektedir. RMD, getiri (R) dağılımının alt α -yüzdeliğinden hesaplanabildiği gibi kayıp ($\mathcal{L} = -R$) dağılımının üst $(1 - \alpha)$ -yüzdeliğinden de Şekil 5.5'te gösterimi verildiği gibi hesaplanabilmektedir.



Şekil 5.5: RMD Değerinin (a) Getiri Dağılımı (b) Kayıp Dağılımıyla Hesaplanması

Kaynak: Hull (2018: 271)

Şekil 5.5'te finansal bir varlığa ait getiri/kayıp dağılımlarının normal dağıldığı varsayılmıştır. Bununla birlikte, RMD hesabına konu varlık bir portföy ise getiri/kayıp dağılımlarının çok değişkenli normal dağıldığı varsayılmaktadır. Getiri dağılımlarının normal ya da Student- t gibi parametrik bir dağılım ailesine mensup olmaları durumunda “Parametrik Yöntemler” olarak adlandırılan RMD hesaplama yöntemleri kullanılmaktadır. Getiri dağılımlarının parametrik bir aileye mensup olmamaları

ve/veya dağılım türleri üzerine bir varsayımda bulunamaması durumunda “Tarihi Simülasyon” gibi parametrik olmayan RMD hesaplama yöntemleri kullanılmaktadır. İzleyen bölümlerde bu yöntemlerin kısaca açıklamalarına değinilmiş olup konu ile ilgili detaylı bilgi kaynak olarak gösterilen çalışmalardan elde edilebilir.

5.2.2.1 RMD Hesaplama Yöntemleri

Bir önceki paragrafta bahsedildiği gibi parametrik veya bir diğer ifadeyle “Varyans-Kovaryans” RMD hesaplama yöntemleri, getiri dağılımlarının belirli bir parametrik dağılım ailesinin bir mensubu olduğunu varsaymakta ve ilgili ailenin olasılık dağılımından yararlanarak varyans-kovaryans matrislerinin hesaplanmasına dayanmaktadır. Varyans-Kovaryans yöntemi, normal dağılım varsayımı ile birlikte oran ya da fiyat değişimleri ile RMD hesabına konu varlık/portföy değerinin doğrusal değişip değişmeme durumuna göre “Delta-Normal/Varyans-Kovaryans” ve “Delta-Gamma/Varyans-Kovaryans” yöntemleri olmak üzere iki alt grupta sınıflandırılmaktadır. İzleyen paragraflarda, bu iki parametrik yönteme ek olarak ve parametrik olmayan simülasyon metodlarının açıklamalarına yer verilmiştir.

5.2.2.1.1 Varyans-Kovaryans (Delta-Normal) Yöntemi

Bir finansal varlığa ait fiyat değişimlerinin normal dağılması durumunda geçmiş getiri verilerini kullanan Varyans-Kovaryans yöntemiyle $(1 - \alpha)$ güvenilirlik düzeyi için bir gün sonrası RMD değeri izleyen eşitlikteki gibi hesaplanabilmektedir (Ruppert ve Matteson, 2015).

$$RMD_t^\alpha = -PV \cdot (\mu + \sigma q_\alpha) \quad (5.27)$$

Eşitlik 5.27’de yer alan $\mu = E(r)$ ve σ terimleri, RMD hesaplamasına konu finansal varlığın sırasıyla ortalama getirisi ile standart sapmasını, q_α standart normal dağılımın α –yüzdeliğini ve PV terimi ise varlığın bugünkü değerini ifade etmektedirler. Hesaplanan RMD negatif bir değer alacağından genellikle eşitlikte verildiği gibi -1 ile çarpılmaktadır. Bir finansal varlığın piyasa riski bir gün sonrası yerine T gün sonrası için hesaplanmak istenirse (Francis ve Kim, 2013):

$$RMD_{\alpha}(T) = -PV \cdot (\mu T + \sigma q_{\alpha} \sqrt{T}) \quad (5.28)$$

Bununla birlikte, N adet varlıktan oluşan bir portföyün $(1 - \alpha)$ güvenilirlik düzeyi için bir gün sonrası RMD değeri, öncelikle portföy beklenen getiri ve standart sapmasının hesaplanması yoluyla izleyen şekilde elde edilebilmektedir.

$$R_{pt} = \sum_{i=1}^N w_i r_i \quad \wedge \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} w_i w_j \quad (5.29)$$

Eşitlik 5.29’da yer alan r_i ve w_i terimleri, portföyde yer alan i . varlığın sırası ile getiri ve portföy ağırlığını ifade etmekte olup σ_p^2 ise portföy varyans istatistiğidir. Portföy getirilerinin normal dağılım $(R_{pt} \sim N(\mu_p, \sigma_p^2))$ varsayımı altında portföy bir gün sonrası RMD değeri, Eşitlik 5.27’deki finansal varlığa özgü momentlerin yerine yukarıda hesaplanan portföy getiri dağılımına ait birinci ve ikinci momentlerin yerleştirilmesiyle aşağıdaki gibi hesaplanabilmektedir (Ruppert ve Matteson, 2015).

$$RMD_p^{\alpha} = -PV \cdot (\mu_p + \sigma_p q_{\alpha}) \quad (5.30)$$

Benzer şekilde, Eşitlik 5.30’da yer alan PV , portföy bugünkü değerini, $\mu_p = E(R_{pt})$ portföy beklenen getirisini, σ_p portföy standart sapmasını ve q_{α} standart normal dağılımın α –yüzdeliğini ifade etmektedirler.

Şu ana dek açıklanan finansal varlık/portföy RMD hesaplarının tam olarak doğru olması aşağıda maddeler halinde verilen varsayımların geçerli olmasına bağlıdır. Aksi durumlarda RMD_{α} sadece yaklaşık olarak hesaplanan bir değeri ifade edecektir (Hull, 2018: 280).

- Varlık getiri dağılımları normal dağılıma uygun bağımsız ve özdeşçe dağılmakta,
- Bir portföye ait RMD hesaplanması durumunda portföy getirileri çok değişkenli normal dağılıma sahip ve
- T adet bağımsız ve özdeş dağılımın toplamına ait standart sapma, her bir dağılımın standart sapması ile $\sqrt{T}$ ‘nin çarpımına eşittir.

Ayrıca, RMD bir finansal varlığın veya portföyün belirli bir zaman ve güvenilirlik düzeyi için beklenen en yüksek kayıp miktarını ifade etmekle birlikte alınan pozisyonun en yüksek kayıp yüzdesini ifade edecek şekilde aşağıdaki kullanımı da son derece yaygındır (Francis ve Kim, 2013).

$$RMD_{\alpha} = \sigma q_{\alpha} \quad (5.31)$$

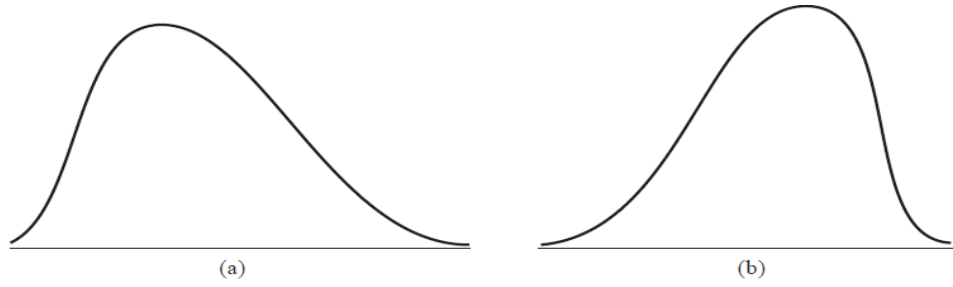
Eşitlik 5.31'deki bir gün sonrası RMD kayıp yüzdesi hesabında beklenen (ortalama) getirinin sıfıra eşit olduğu ($\mu = 0$) varsayılmış olmakla birlikte bu varsayımın sağlanmaması durumunda eşitlik kolayca yeniden düzenlenebilecektir.

5.2.2.1.2 Delta-Gamma Yöntemi

Delta-Normal yöntemi önceki bölümde bahsedildiği üzere doğrusallık varsayımına sahiptir. Doğrusal model olarak da adlandırılan bu yöntem (bkz. Hull (2012: 484)), türev varlıkları içermeyen ve varlıkların fiyat değişimleri (getirileri) ile portföy değerindeki değişimin doğrusal bir ilişkiye sahip olduğu hisse senedi, tahvil ve emtia portföylerinin RMD değerlerinin hesaplanması amacıyla yaygın bir şekilde uygulanmaktadır.

Bir portföyün opsiyonlar vb. türev varlık/varlıklardan oluşması durumunda Delta-Normal yöntemi, gamma ya da konveksite riskine sahip bu portföyün RMD değerinin hesaplanmasında yetersiz kalmaktadır. Delta-Gamma yöntemi, Taylor serisi açılımındaki ikinci dereceden gamma terimini de RMD hesabına dahil ederek portföy değeri ile opsiyona konu varlık arasındaki kuadratik ilişkileri de dikkate almaktadır.

Delta-Normal yönteminde, altta yatan varlığın fiyat değişimine bağlı olarak portföy değerindeki değişim oranı yani delta dikkate alınmakla birlikte bu varlığa bağlı olarak deltanın değişim oranını ifade eden gamma göz ardı edilmektedir. Şekil 5.6'da opsiyon kontratı içeren bir portföyün gammanın sıfırdan farklı değerler alması durumunda olasılık dağılım fonksiyonunun gösterimine yer verilmiştir. Şekilden de görülebileceği gibi gammanın pozitif veya negatif bir değer alması durumunda portföy değerine ait olasılık dağılımı pozitif veya negatif çarpıklığa sahip bir dağılıma dönüşmektedir.



Şekil 5.6: Portföy Değerinin (a) Pozitif Gamma (b) Negatif Gamma İçin Olasılık Dağılımı

Kaynak: Hull (2012: 486)

Böyle bir durumda, dağılımın kuyruk bölümünden hesaplanan portföy RMD değeri olması gerekenden çok daha küçük ya da büyük bir değer olarak hesaplanabilecektir. Delta-Gamma yönteminde, delta ve gamma ölçülerinin her ikisi de RMD hesabına dahil edilerek daha doğru bir değer elde edilmesi amaçlanmıştır. Tek bir opsiyon kontratından oluşan bir portföyde, f opsiyona konu varlığın değeri ve $r \sim N(0, \sigma^2)$ şeklinde dağılan varlığın getiri oranını ($r = df/f$) ifade etmek üzere (Francis ve Kim, 2013: 286):

$$RMD_{\alpha} = z_{\alpha} \left[\Delta^2 \sigma^2 f^2 + \frac{1}{2} \Gamma^2 f^4 \sigma^4 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

Eşitlik 5.32’de yer alan z_{α} , belirlenen güvenilirlik düzeyine özgü standart normal dağılım katsayısını ifade etmekle birlikte, delta ve gamma ise sırasıyla $\Delta = \partial V / \partial f$ ve $\Gamma = \partial^2 V / \partial f^2$ şeklinde tanımlanmıştır.

5.2.2.1.3 Tarihsel Simülasyon

Parametrik olmayan RMD hesaplama yöntemlerinden “Tarihsel Benzetim (Simülasyon)” yöntemi, getiri dağılımlarıyla ilgili herhangi bir varsayımda bulunmadan sadece belirli bir büyüklükteki geçmiş veriler ile ampirik yüzdeliklerinden yararlanarak RMD değeri elde edilmesini sağlayan en eski ve en yaygın kullanıma sahip yöntemidir.

Tarihsel Simülasyon yöntemiyle, varyans-kovaryans matrislerinin hesaplanması ya da tahminine gerek duyulmadan herhangi bir dağılım türüne sahip getirilerin RMD değeri hesaplanabilmektedir. Bununla birlikte yöntem, getirilerin bağımsız ve özdeşçe

dağıldığını (iid) ve geçmiş getiri dağılımlarının zamanla değişmeyeceğini varsaymaktadır (Nieto ve Ruiz, 2016). Bu yöntemle belirli bir güvenilirlik düzeyi $(1 - \alpha)$ için bir portföyün RMD değeri, portföyde yer alan ve belirli bir zaman aralığını kapsayan geçmiş finansal varlık getirilerinin belirlenmesi, varlığa özgü portföy ağırlıklarının geçmiş getirilere uygulanması ve geçmiş portföy getirilerinin elde edilmesini takiben portföy getirilerinin ampirik α –yüzdeliğinin hesaplanmasıyla elde edilmektedir.

Tarihsel Simülasyon, uygulanması göreceli olarak daha kolay ve popüler bir yöntem olmasına rağmen, geçmiş getiri dağılımlarının geleceğin iyi birer temsilcisi olduğu ve getirilerin iid dağılımına yönelik varsayımları nedeniyle eleştirilmiştir. Ayrıca, yöntem ile yapılan RMD hesaplamalarında uç gözlemlerin hesaplama dönemi içinde yer alabilmesi için en az bir yıl veya üzeri bir zaman aralığına ait geçmiş verilerin kullanılması önerilmiştir.

5.2.2.1.4 Monte Carlo Simülasyonu

Monte Carlo Simülasyonu, Tarihsel Simülasyon yöntemiyle benzerlik göstermesine rağmen yöntemin en temel farklılığı portföy değerinin hesaplanmasında geçmiş veriler yerine belirli bir istatistiksel dağılımdan üretilen rassal değerlerin kullanılmasıdır. Bu amaçla, farklı parametrik dağılımlar arasından çok değişkenli normal dağılım en yaygın kullan türdür. Aynı zamanda Monte Carlo Simülasyonu, Delta-Gamma Yöntemi bölümünde bahsedilen portföy varlıkları ile portföy değeri arasındaki doğrusal olmayan ilişkilerin modellenmesi amacıyla sıklıkla kullanılan yöntemlerden birini oluşturmaktadır.

Monte Carlo Simülasyonu yönteminde, belirli bir dağılım varsayımı altında psödo-rassal sayı üreticileri kullanılarak portföyün değerini belirleyen finansal faktör veya varlıkların alabileceği değerlere yönelik on binlerce adet değer üretilmekte ve böylece portföy değerindeki değişimin dağılımı elde edilmektedir. Oluşturulan portföy getiri dağılımının sol uç değerleri arasından belirli bir $(1 - \alpha)$ güvenilirlik düzeyi için dağılımın α -yüzdeliğinde yer alan değer portföy RMD kayıp yüzdesi olarak belirlenmektedir (Francis ve Kim, 2013: 276). Örneğin, iki adet hisse ile eşit ağırlıklı

bir portföyün oluşturulduğu varsayılın. Çoklu normal dağılım varsayımı altında, simülasyonlarla 10 000 adet hisse değeri ve dolayısıyla eşit ağırlıklı portföyün değeri elde edilebilmektedir. Eşit ağırlıklı portföyün bugünkü değeri ile her bir simülasyondan elde edilen değer kullanılarak portföy getirilerinin olasılık dağılımı oluşturulmaktadır. Simülasyonlarla elde edilen 10 000 adet portföy getirisi artan getiriye göre sıralandığında, 100. getiri (en küçük getiri değerlerinin yüzüncüsü) %99 güvenilirlik düzeyinde bu dağılımın bir gün sonrası RMD kayıp yüzdesini ifade etmektedir. Portföy bugünkü değeri ve RMD kayıp yüzdesinin çarpımıyla da bir gün sonrası portföy RMD değeri elde edilmektedir (farklı bir örnek için bkz. Hull (2018: 335)).

Monte Carlo Simülasyonu, portföy değeri ile altta yatan varlık arasındaki doğrusal olmayan ilişki ile birlikte, parametrelerin durağan olmama ve/veya kalın kuyruk gibi verilerdeki düzensizlikler durumunda dahi modelleme yapılabilen son derece esnek ve güçlü bir yöntemdir. Buna rağmen yöntem, altta yatan faktörlerin/varlıkların artması ile varlıklar arası birlikte hareketin daha da karmaşıklaşması sonucu ağırlaşmakta ve hatalı RMD hesaplamaları ortaya koyabilmektedir.

5.2.2.2 RMD Geriye Dönük Testler

Önceki bölümlerde açıklandığı gibi bir finansal varlık ya da portföyün Riske Maruz Değeri (RMD) farklı yöntemlerle hesaplanabilmekte olup hangi yöntemin daha doğru sonuçlar verdiğinin belirlenmesi ayrı bir araştırma alanı oluşturmuştur. Bu amaçla, bazı araştırmacılar RMD (hesaplamalarının) tahminlerinin doğruluğunun değerlendirilmesi ile ilgilenirken, bazı araştırmacılar da doğru tahminler üreten yöntemler arası seçim yapabilme amacıyla yöntemlerin sıralanması ile ilgilenmiştir. Bu amaçlarla geliştirilen ve “geriye dönük test” (backtesting) olarak adlandırılan çeşitli test türlerinden, izleyen paragraflarda akademik literatür ile birlikte akademi dışı profesyoneller arasında da yaygın kullanım alanı bulan “Koşulsuz Kapsama” (“Unconditional Coverage”) ve “Koşullu Kapsama” (“Conditional Coverage”) geriye dönük testlerinin açıklamalarına yer verilmiştir.

Koşulsuz Kapsama Testi: Kupiec (1995), belirli bir α olasılık düzeyi için beklenen RMD değerini aşım adedi ile gerçekleşen RMD aşım adedini karşılaştıran bir test önermiştir. Bir RMD aşımı, belirli bir zaman aralığı ve güvenilirlik düzeyi ($1 - \alpha$) için gerçekleşen getirinin, bir yöntemle hesaplanan ya da bir diğer ifadeyle bir yöntemin tahmini olan RMD değerini aşan bir değer alması durumunda gözlemlenmektedir. RMD, getiri dağılımının sol alt kuyruğundaki negatif bir değeri ifade etmesi durumunda I_t ile gösterimi verilen bir RMD aşımı Eşitlik 5.33'teki gibi tanımlanmaktadır.

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{eğer } R_t < RMD_t^\alpha \\ 0, & \text{eğer } R_t > RMD_t^\alpha \end{cases} \quad (5.33)$$

Bununla birlikte, RMD'nin kayıp dağılımının ($\mathcal{L} = -R$) sağ üst kuyruğundaki pozitif bir değeri ifade etmesi durumunda bir RMD aşımı Eşitlik 5.34'teki gibi tanımlanır.

$$I_t = \begin{cases} 1, & \text{eğer } R_t > RMD_t^\alpha \\ 0, & \text{eğer } R_t < RMD_t^\alpha \end{cases} \quad (5.34)$$

Ayrıca I_t , α olasılığına eşit p parametresi ile bağımsız ve özdeşçe dağılan bir Bernoulli sürecini izlemektedir. Kupiec (1995)'e göre toplam gerçekleşen RMD aşım yüzdesi belirlenen α olasılık düzeyi ile tutarlı olmalıdır. “Başarısızlık Oranı” (“Proportion of Failures”, POF) olarak da adlandırılan Koşulsuz Kapsama testinin sıfır hipotezi aşağıdaki gibidir.

$$H_0 : p = \hat{p} = \frac{n_1}{T} \quad \wedge \quad n_1 = \sum_{t=1}^T I_t \quad (5.35)$$

Eşitlik 5.35'te yer alan n_1 , toplam gerçekleşen RMD aşım adedini ifade etmekle birlikte binom olasılık dağılımına sahip olduğu varsayılmıştır. T terimi, RMD hesabına konu döneme ait toplam gözlem adedini ve p terimi ise belirlenen olasılık düzeyini (α) ifade etmektedirler. Gerçekleşen RMD aşım oranının ($\hat{p}$) p ile tutarlı olma sıfır hipotezini test eden ve $\chi^2(1)$ ile dağıldığı varsayılan Koşulsuz Kapsama testi (LR_{uc}) izleyen şekilde tanımlanmıştır:

$$LR_{uc} = -2 \ln[(1 - p)^{n_0} p^{n_1}] + 2 \ln[(1 - \hat{p})^{n_0} \hat{p}^{n_1}] \quad (5.36)$$

Eşitlik 5.36’da yer alan $n_0 = T - n_1$ olarak tanımlanmıştır.

Koşullu Kapsama Testi: Christoffersen (1998) ise önceki paragraflarda açıklanan Koşulsuz Kapsama testini geliştirerek doğru RMD aşım oranı ile birlikte RMD aşımalarının bağımsızlığını da test eden “Koşullu Kapsama” (“Conditional Coverage”, CC) testini ortaya koymuştur. Koşullu Kapsama testi, RMD aşımalarını (I_t) Eşitlik 5.33 veya 5.34’teki gibi tanımlamakta olup testin bağımsızlık olabilirlik oranı (LR_{ind}), RMD aşımalarının bağımsız rassal değişkenler olmalarına karşın bir sıralı Markov bağımlı olmaları alternatifine dayanmaktadır.

$$LR_{ind} = -2 \ln \left[\frac{(1-\pi_2)^{(n_{00}+n_{10})} \pi_2^{(n_{01}+n_{11})}}{\pi_{01}^{n_{01}} \pi_{11}^{n_{11}} (1-\pi_{01})^{n_{00}} (1-\pi_{11})^{n_{10}}} \right] \quad (5.37)$$

Eşitlik 5.37’de tanımı verilen $LR_{ind} \sim \chi^2(1)$ ile dağılmakta olup $\pi_2 = (n_{01} + n_{11}) / (n_{00} + n_{01} + n_{10} + n_{11})$, $\pi_{01} = n_{01} / (n_{00} + n_{01})$ ve $\pi_{11} = n_{11} / (n_{10} + n_{11})$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımlarda yer alan n_{ij} terimi ise $i, j = 0, 1, I_t$ dizisindeki i ’yi takip eden j gözlemlerinin sayısını ifade etmektedir. Koşullu Kapsama testi, doğru koşulsuz kapsama ile RMD aşımalarının bağımsızlığını ortaklaşa test ederek LR_{uc} ve LR_{ind} istatistiklerini birleştirmektedir.

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind} \quad (5.38)$$

Bu nedenle, Koşulsuz Kapsama testinin sıfır hipotezi bağımsızlık testinin alternatifine karşın test edilmektedir. Koşullu Kapsama testinin olabilirlik oranı (LR_{cc}):

$$LR_{cc} = -2 \ln \left[\frac{(1-p)^{n_0} p^{n_1}}{\pi_{01}^{n_{01}} \pi_{11}^{n_{11}} (1-\pi_{01})^{n_{00}} (1-\pi_{11})^{n_{10}}} \right] \quad (5.39)$$

Eşitlik 5.39’da tanımı verilen LR_{cc} istatistiğinin iki bağımsızlık dereceli $\chi^2(2)$ ile dağıldığı varsayılmakla birlikte test, RMD aşımları arasındaki sadece birinci dereceden otokorelasyonu dikkate almaktadır.

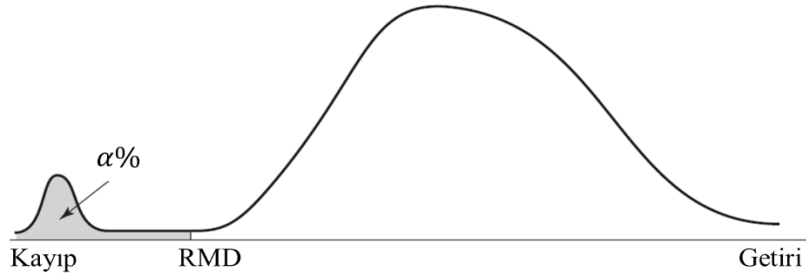
5.2.3 Beklenen Kayıp

Riske Maruz Değer anlaşılmaması kolay ve popüler bir risk ölçütü olmasına rağmen, Artzner vd. (1999) tarafından tanımlanan ve aşağıda maddeler halinde verilen “tutarlı risk ölçütleri” (coherent measures of risk) özelliklerinin tamamına sahip değildir (Hull, 2018: 275).

- Monotonluk: Bir portföy her bir durumda diğerine nazaran daha kötü sonuçlar üretiyorsa bu portföyün riski daha büyük olmalıdır.
- Çevrim (Dönüşüm) değişmezliği: Belirli bir M miktarındaki nakit tutarın bir portföye dahil edilmesi durumunda portföyün riski M kadar azalmalıdır.
- Homojenlik: Varlıklar arası yüzdesel dağılımı sabit tutulan bir portföy büyüklüğünün bir λ faktörü kadar değiştirilmesi durumunda, portföy riskinin de λ ile çarpılması sonucunun elde edilmesi gereklidir.
- Alt-toplanabilirlik: İki portföyün birleşimi ile elde edilen portföyün riski, birleşim öncesi iki alt portföye ait risk ölçütlerinin ayrı ayrı toplamalarından daha büyük olmamalıdır.

Yukarıda yer alan dört özelliği de sağlayan risk ölçütleri uyumlu ya da tutarlı (coherent) olarak adlandırılmıştır. RMD, getirilerin normal dağılımı durumunda tutarlı bir ölçüttür. Ancak diğer durumlarda, RMD ilk üç özelliğe sahip olmasına karşın dördüncü özelliği her zaman sağlamamaktadır.

Ayrıca RMD, getiri dağılımının α –yüzdeliğine tekabül eden tek bir değeri temsil etmekle birlikte ölçüt bu değer altında kalan getirilerin büyüklüğünü göz önünde bulundurmamaktadır. Belirli bir t zamanında getiri olasılık dağılımı Şekil 5.7’deki gibi olan bir portföyün, $1 - \alpha$ güvenilirlik düzeyi için hesaplanan RMD değeri α olasılığı ile portföy değerinde meydana gelebilecek en yüksek değer kaybının iyi bir tahmincisi olmayacaktır. Şekil 5.5 ile Şekil 5.7’de α -düzeyi için hesaplanan RMD değerleri eşit olabilecekken Şekil 5.7’dekine benzer bir getiri dağılımına sahip bir portföye yatırım yapılması durumunda yatırımcının hesaplanan RMD değerinden daha büyük bir portföy kaybı ile karşılaşma olasılığı daha yüksektir.

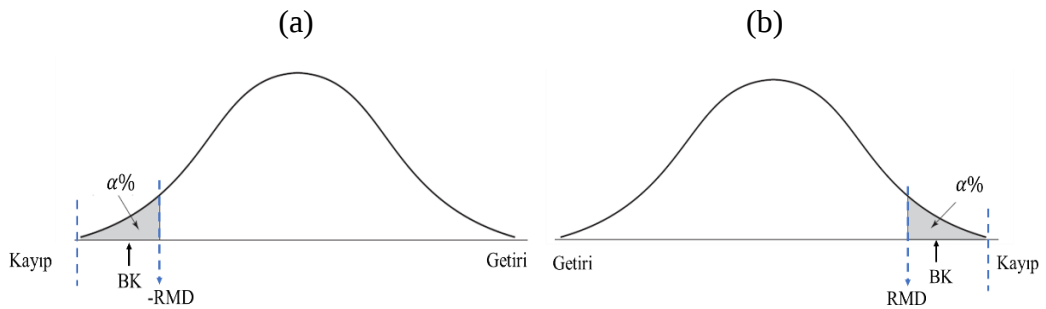


Şekil 5.7: Bir Portföyün Getiri Olasılık Dağılımı

Kaynak: Hull (2018: 273)

Bu ve benzeri nedenlerle, “Beklenen Kayıp” (Expected Shortfall), “Koşullu Riske Maruz Değer” (Conditional VaR, CVaR) veya “Beklenen Kuyruk Kaybı” (Expected Tail Loss) olarak da adlandırılan ve RMD tahmininin altında kalan getirileri de dikkate alan alternatif bir risk ölçütü ortaya konmuştur (Hull, 2018).

Belirli bir t zamanı ve $(1 - \alpha)$ güvenilirlik düzeyi için bir finansal varlığın ya da portföyün Beklenen Kayıp (BK) değeri, o varlığın/portföyün RMD_t^α değerinin altında kalan getirilerin beklenen değerine eşittir (Acerbi ve Tasche, 2002; Artzner vd., 1999). Bir diğer ifadeyle BK, hesaplanan portföy RMD değerini aşan portföy kaybının beklenen değeridir. Şekil 5.8’de ise Şekil 5.5 ile getiri ve kayıp dağılımları için ayrı ayrı gösterimi verilen RMD_t^α değerinin yanında BK_t^α ’nın da gösterimine yer verilmiştir.



Şekil 5.8: Beklenen Kayıp (a) Getiri Dağılımı (b) Kayıp Dağılımı

Şekil 5.8’den de görülebildiği gibi RMD_t^α , getiri veya kayıp dağılımı üzerindeki bir noktayı temsil eden bir değer olmasına rağmen BK_t^α , RMD_t^α ’yı aşan ve dağılımların sol ya da sağ uç kuyruk bölgelerinde yer alan getiri veya kayıpların olasılık ağırlıklı

ortalamasını temsil etmektedir. Sürekli bir getiri dağılımı için BK_t^α 'nın tanımı aşağıdaki gibidir.

$$BK_t^\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_R^{-1}(r) dr \quad (5.40)$$

Eşitlik 5.40'ta yer alan F_R getirilerin dağılım fonksiyonunu ve F_R^{-1} ise getiri dağılımının standardize α –yüzdeliğini ifade etmektedirler. RMD ile karşılaştırıldığında BK (CVaR) risk ölçütünün uyumlu ya da tutarlı bir ölçü olduğu ilk kez Pflug (2000)'da gösterilmiştir.

5.2.3.1 Optimizasyon Problemi

Şu ana dek tanım ve açıklamalarına yer verilen BK veya bir diğer ifadeyle CVaR risk ölçütünün Markowitz (1952)'in OV modeline benzer bir şekilde ancak portföy riskinin varyans yerine CVaR değeri olarak belirlenmesi ile ortalama-CVaR etkin portföyler oluşturulmuştur. Portföy optimizasyon probleminin temel risk minimizasyon hedefini CVaR olarak belirleyen bu yöntem Rockafellar ve Uryasev (2000) tarafından geliştirilmiştir. Rockafellar ve Uryasev (2000), öncelikle β olasılık düzeyi için sürekli bir kayıp dağılımına ait RMD eşik değerini α ile ifade ederek Beklenen Kaybın $(CVaR_\beta(w))$ fonksiyonunu izleyen şekilde tanımlamıştır.

$$F_\beta(w, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{r \in \mathbb{R}^n} [-w^T r - \alpha]^+ p(r) dr \quad (5.41)$$

Eşitlik 5.41'de yer alan r portföy getiri vektörünü, w portföy getirilerinin ağırlık vektörünü ve $p(r)$ ise portföy getirilerinin yoğunluk fonksiyonunu ifade etmektedirler. Bununla birlikte, $\mathcal{L} = -w^T r$ olmak üzere portföy kayıp dağılımıdır. Yukarıda tanımlanan $F_\beta(w, \alpha)$ fonksiyonunun özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- $F_\beta(w, \alpha)$, α ve r 'ye bağlı konveks bir fonksiyondur.
- $RMD_\beta(w)$, $F_\beta(w, \alpha)$ fonksiyonunun aynı zamanda bir minimize edenidir.
- $F_\beta(w, \alpha)$ fonksiyonunun en küçük değeri $CVaR_\beta(w)$ 'dir.

Bu nedenle, $w \in \mathbb{R}$ üzerinde F_β fonksiyonunun minimizasyonu konveks bir optimizasyon problemi olacaktır. Bunun yerine, Rockafellar ve Uryasev (2000), getirilerin $(r_1, r_2, \dots, r_n)$ olasılık dağılımının örneklenmesiyle elde edilen ve aşağıda tanımı verilen F_β 'nin yaklaştığı olan $\tilde{F}_\beta(w, \alpha)$ fonksiyonunun optimizasyon probleminde kullanılmasını önermiştir.

$$\tilde{F}_\beta(w, \alpha) = \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{s=1}^n [-w^T r_s - \alpha]^+ \quad (5.42)$$

Eşitlik 5.42'deki tanıma ek olarak u_s ikincil gerçek değişkenlerinin $\min CVaR_\beta(w)$ konveks optimizasyonuna tanıtılmasıyla problem aşağıda yer alan lineer optimizasyon problemine indirgenebilmektedir.

$$\min \quad \alpha + \frac{1}{n(1-\beta)} \sum_{s=1}^n u_s \quad (5.43)$$

$$u_s \geq 0 \quad \wedge \quad w^T + r_s + \alpha + u_s \geq 0 \quad (5.44)$$

Eşitlik 5.44'te doğrusal kısıtları verilen ve getirilerin dağılımıyla ilgili herhangi bir varsayımda bulunmayan $\min CVaR_\beta(w)$ optimizasyonu, OV optimizasyonundan farklı olarak portföy getirilerinin Eliptik dağılma gerekliliğine sahip değildir.

5.2.3.2 BK Geriye Dönük Testler

Farklı RMD hesaplama yöntemleriyle elde edilen farklı RMD değerlerine dayanılarak hesaplanan BK değerlerinin doğruluğunun değerlendirilmesi ve/veya yöntemler arası sıralama yapılabilmesi amacıyla geliştirilen BK geriye dönük testlerinden, izleyen paragraflarda McNeil ve Frey (2000) tarafından önerilen “Aşan Kalıntılar Geriye Dönük Testi” (“Exceedance Residual Backtesting”) ile Embrechts vd. (2005)'in ortaya koyduğu ve farklı modeller arası BK tahmin performansına göre sıralama yapılmasını sağlayan BK geriye dönük testlerine yer verilmiştir.

McNeil ve Frey (2000) tarafından geliştirilen Aşan Kalıntılar Geriye Dönük Testi, getiri serilerinden elde edilen ve aşan kalıntılar olarak adlandırılan yeni serilere (s_{t+1}) dayanmaktadır.

$$s_{t+1} = \frac{r_{t+1} - BK_t^\alpha}{\sigma_{t+1}}, \quad \{s_{t+1} : t \in T, r_{t+1} < RMD_t^\alpha\} \quad (5.45)$$

Eşitlik 5.45'te yer alan r_{t+1} , $t+1$ zamanındaki getiri değerlerini ifade etmekle birlikte bu değerlerin aşan kalıntılar serisinde yer almaları t zamanı için hesaplanan RMD_t^α değerinden küçük olma koşuluna bağlıdır. RMD_t^α değerinin hesaplanmasında kayıp dağılımının kullanılması durumunda bu koşul RMD_t^α değerinden büyük olma olarak değiştirilmelidir. Eşitlik 5.45 ile elde edilen aşan kalıntılar serisi (s_{t+1}), sıfır ortalamaya sahip bağımsız ve özdeşçe dağılan bir seri olma sıfır hipotezi için tek taraflı t-testi ile sınanmaktadır. Belirli bir güvenilirlik düzeyi için test sıfır hipotezinin reddedilmesi, sistematik bir şekilde düşük hesaplanan BK değerlerinin bir ifadesidir.

Embrechts vd. (2005) BK tahminlerinin değerlendirilmesi amacıyla iki ölçütün kombinasyonunu kullanmayı önermiştir. İlk ölçüt olan V_1^{BK} ile RMD_t^α değerinden küçük getirilerin hesaplanan BK_t^α değerinden ortalama farkı elde edilmektedir.

$$V_1^{BK} = \frac{\sum (r_t - BK_t^\alpha) \mathbf{1}_{(r_t < RMD_t^\alpha)}}{\sum \mathbf{1}_{(r_t < RMD_t^\alpha)}} \quad (5.46)$$

Yukarıdaki eşitlikte r_t , t zamanındaki getirileri, $\mathbf{1}$ ise gösterge fonksiyonunu ifade etmektedir. İkinci ölçüt olan V_2^{BK} ile de RMD hesaplamalarının hatalı olabilme olasılığı göz önünde bulundurularak hesaplanan BK_t^α değerinden farkı alınan serinin ampirik α -yüzdeliğinden küçük getirilerin BK_t^α değerinden ortalama farkı elde edilmektedir.

$$V_2^{BK} = \frac{\sum (r_t - BK_t^\alpha) \mathbf{1}_{(D_t < D_\alpha)}}{\sum \mathbf{1}_{(D_t < D_\alpha)}} \quad (5.47)$$

Eşitlik 5.47'de yer alan $D_t = r_t - BK_t^\alpha$ olup D_α ise D_t 'nin ampirik α -yüzdeliğidir. Yukarıda tanımlanan bu iki ölçütün mutlak değerlerinin ortalaması V^{BK} olarak tanımlanan sonuncu ölçütün değerini belirlemektedir.

$$V^{BK} = (|V_1^{BK}| + |V_2^{BK}|) / 2 \quad (5.48)$$

Eşitlik 5.48 ile elde edilen V^{BK} değeri, farklı modellerden elde edilen BK tahminlerinin karşılaştırılması amacıyla kullanılmakta olup daha düşük V^{BK} değeri daha iyi bir BK tahminini ifade etmektedir.

5.4 Portföy Performans Ölçütleri

Modern Portföy Teorisi (MPT) ile birlikte Geleneksel Portföy Teorisi'nin bir portföyün performansı ile menkul kıymet sayısı arasında doğrusal bir ilişki bulunduğunu ve sadece portföyde yer alan menkul kıymet sayısını arttırarak riskin azaltılabileceğini ileri süren basit çeşitlendirme yaklaşımı terkedilmiştir. MPT'de bir portföyün performans değerlendirmesi, temelde portföyün belirli dönemler dahilinde sağladığı getiri ve taşıdığı riskle ilişkili olup farklı portföyler ya da pazar portföyü gibi belirli bir referansla karşılaştırılmayı içerir. Farklı özellik ve risk gruplarında yer alan portföyleri, sadece sağladığı getiri oranları ile karşılaştırmanın doğru olmayacağı açıktır. Bu nedenle, “riske göre düzeltilmiş ya da uyarlanmış” portföy performans değerlendirme ölçütleri önerilmiştir. Portföy getiri ve riskini birlikte dikkate alan ilk portföy performans ölçütleri, Markowitz (1952)'in OV modelini takiben geliştirilen Sermaye Varlıklarını Fiyatlama Modeli'ne dayanmaktadır. Treynor (1966) ve Sharpe (1966) tarafından önerilen ve alınan bir birim risk başına elde edilen getiriyi ölçen bu yöntemlerin açıklamalarına izleyen paragraflarda yer verilmiştir. Bununla birlikte, ilk portföy performans ölçütlerinin ortaya konmasından bu yana bu yöntemlere alternatif birçok portföy performans değerlendirme ölçütü geliştirilmiştir. Bunlar arasından, literatürde kendilerine yaygın kullanım alanı bulan ve bu tezin uygulama bölümünde de bazılarına değinilen performans ölçütlerine izleyen bölümlerde yer verilmiştir.

5.4.1 Sharpe Oranı

Risksiz bir varlığı içeren risk etkin portföylerin açıklandığı bölümde kısaca değinilen ve portföy getirisinin risksiz faiz oranından farkı alınarak portföy standart sapmasına bölünmesiyle elde edilen oran şeklinde tanımlanan “Sharpe Oranı” (Sharpe, 1966, 1994) finans literatüründe iyi bilinen ve yaygın kullanılan bir performans ölçütüdür.

$$S_p = \frac{R_p - r_f}{\sigma_p} \quad (5.49)$$

Eşitlik 5.49 ile tanımına tekrar yer verilen ölçüt, alınan her birim portföy riskine karşın risksiz faiz oranı üzerinde elde edilen portföy getirisini ortaya koymaktadır. Bununla birlikte ölçüt, OV modelinin getirilerin çok değişkenli normal dağılım varsayımı altında geliştirilmiş olup normal dağılmayan getirilerin varlığında doğru sonuçlar vermeyeceğine yönelik sıklıkla eleştirilmiştir.

5.4.2 Treynor Ölçütü

Riske göre düzeltilmiş ya da değişkenliğe göre getiri ölçütlerinden bir diğeri Treynor (1966) tarafından önerilmiştir. “Treynor Ölçütü”, bir portföyden risksiz faiz oranı üzerinde elde edilen getiriye portföyün toplam riskine göre değil pazar riskine oranla değerlendirmektedir.

$$T_p = \frac{R_p - r_f}{\beta_p} \quad (5.50)$$

Eşitlik 5.50’de yer alan R_p portföy getirisini, β_p portföy betasını ve r_f risksiz faiz oranını ifade etmektedirler. Treynor ölçütü firma riskini dikkate almamakla birlikte son derece iyi çeşitlendirilmiş bir portföyün toplam riski sistematik riskine çok yakın bir değer alabileceğinden, iyi çeşitlendirilmiş portföylerin Sharpe ve Treynor ölçütleri de birbirinden çok farklı değerler almayacaktır.

5.4.3 Sortino Oranı

1980 yılında Frank Sortino tarafından geliştirilen “Sortino Oranı”, Modern Portföy Teorisi’nde yer alan ve portföy performansının değerlendirilmesi amacıyla kullanılan Sharpe oranına benzerdir. Ancak, Sortino oranı, alınan bir birim aşağı yönlü risk karşılığı hedef getiri oranının (r_τ) üzerinde elde edilen getiriye göstermektedir (Chen, 2016: 80).

$$S_{Op} = \frac{R_p - r_\tau}{\sigma_{-p}} \quad (5.51)$$

Eşitlik 5.51'deki R_p portföy getirisini, r_t altına düşülmesi durumunda risk olarak algılanan hedef getiri ya da kabul edilebilir en düşük getiri düzeyini ve σ_{-p} ise portföyün aşağı yönlü riskini (yarı-sapmayı) ifade etmektedirler.

5.4.4 Omega Oranı

Aşağı yönlü riske göre uyarlanmış Sortino oranının ortaya konması, getirilerin normal dağılım gösterme kısıtını aşan ve sadece belirlenen bir hedefin altına doğru aşağı-yönlü sapmaları değil, getirilerin yukarı-yönlü sapma potansiyelini de değerlendiren oranların geliştirilmesini sağlamıştır.

Bu oranlardan biri olan “Omega Oranı”, William Shadwick ve Con Keating tarafından 2002 yılında, yapılan bir yatırımın kabul edilebilir en düşük getiri oranından yukarı yönlü sapma potansiyelinin bu orandan aşağı yönlü sapma riski ile karşılaştırılabilmesi amacıyla geliştirilmiştir. Bir diğer ifadeyle, Keating ve Shadwick (2002)'in Omega ölçütü, belirli bir hedef getirinin (ζ) üstünde ve altında kalan portföy getirilerinin olasılık ağırlıklı oranını ortaya koymaktadır:

$$\Omega(\zeta) = \frac{\int_{\zeta}^b [1-F(r)]dr}{\int_a^{\zeta} F(r)dr} \quad (5.52)$$

Eşitlik 5.52'de yer alan r rassal portföy getirilerini, (a, b) ise sırasıyla portföy dağılımının en uç kuyruk (minimum ve maksimum) gözlem değerlerini ifade etmektedirler. Ayrıca, $F(R) = P[r \leq R]$ portföy getirilerinin kümülatif dağılım fonksiyonudur.

Böylece Omega oranı, ζ 'daki ilk üst-kısmi momentin, yine ζ 'daki ilk alt-kısmi momente oranını vermektedir. Ölçüt, getiri dağılımının türü ile ilgili herhangi bir varsayımda bulunmamakla birlikte Eşitlik 5.52'nin payında ve paydasında yer alan integrallerin tanımlı olması yeterlidir.

5.4.5 Sharpe – Omega Oranı

Omega oranının ortaya konmasını takiben Kazemi vd. (2003) oranın farklı bir açılımını geliştirerek “Sharpe-Omega” oranını önermişlerdir. Kazemi vd. (2003), öncelikle Omega oranının portföy üzerine yazılan bir Avrupa call ve Avrupa put opsiyon fiyatlarının oranına eşit olduğunu göstermiştir:

$$\Omega(\zeta) = \frac{\int_{\zeta}^b [1-F(x)]dx}{\int_a^{\zeta} F(x)dx} = \frac{\int_{\zeta}^b (x-\zeta)f(x)dx}{\int_a^{\zeta} (\zeta-x)f(x)dx} = \frac{E[\max(x-\zeta,0)]}{E[\max(\zeta-x,0)]} = \frac{C(\zeta)}{P(\zeta)} \quad (5.53)$$

Eşitlik 5.53’te yer alan $f(x)$ portföy getirilerinin yoğunluk fonksiyonunu, $C(\zeta)$ ve $P(\zeta)$ ise portföy üzerine yazılan indirgenmemiş Avrupa call ve put opsiyon fiyatlarını ifade etmektedirler. Eşitlik 5.53 aracılığıyla Kazemi vd. (2003) Sharpe-Omega oranını, belirli bir hedef getirinin (ζ) üstünde kalan portföy beklenen getirisinin Avrupa put opsiyon fiyatına oranı olarak aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$S-O = \frac{\bar{\mu}_p - \zeta}{P(\zeta)} \quad (5.54)$$

Eşitlik 5.54’te yer alan $\bar{\mu}_p$ portföy beklenen getirisini, ζ ise eşik ya da bir diğer ifadeyle kabul edilebilir en düşük getiri oranını ifade etmektedirler.

5.4.6 D Oranı

Şu ana dek açıklamalarına yer verilen performans ölçütlerine ek olarak, Bacon (2008) portföy getiri ve kayıplarının gözlemlenen frekanslarını da dikkate alan “D Oranı” (“DRatio”) önermiştir.

$$DOranı = \frac{n_d * \sum_{k=1}^T \max(-R_k, 0)}{n_u * \sum_{k=1}^T \max(R_k, 0)} \quad (5.55)$$

Eşitlik 5.55’teki R_k , T adet portföy getirisinden k . getiriyi, n_d ve n_u ise sırasıyla sıfırın altında değer alan toplam portföy getiri adedi ile sıfırın üstünde değer alan getirilerin toplam adedini ifade etmektedirler. Dolayısıyla bir portföyün diğer portföylere göre daha küçük bir D Oranına sahip olması istenen durumdur.

ALTINCI BÖLÜM

KOPULA-GARCH MODELİ VE LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

6.1 Kopula-GARCH Modeli

Kopula-GARCH modeli, yeni bir yöntem olarak ilk defa Rockinger ve Jondeau (2001) tarafından, koşullu bağımlılığın GARCH kontekstinde ölçülebilmesi amacı ile ortaya konmuştur. Ortaya konmasından bu yana, modelin farklı kombinasyonları portföy getiri ve riskinin modellenmesi, optimal portföy dağılımlarının belirlenmesi ve finansal türevler gibi farklı alanlarda da kullanılır olmuştur.

Kopula-GARCH modeli, karmaşık marjinal dağılımlara sahip zaman serileri arasındaki bağımlılığın ölçülmesi amacı ile geliştirilmiş bir yöntemdir. Yöntem, koşullu getirilerin modellenmesinde ikinci, üçüncü ve dördüncü momentlerin zamanla değişimine izin veren Engle (1982)'in ARCH ve Bollerslev (1986)'in GARCH modelleri ile dağılımlardaki asimetri ve kalın kuyrukların kontrolünü sağlayan Student- t ya da yatık Student- t gibi farklı dağılımların geliştirilmesi ile ortaya konmuştur (Jondeau ve Rockinger, 2006: 828).

Kopula-GARCH modeli, “marjinler için çıkarım fonksiyonları” konseptine dayanmaktadır. Model dahilinde değişkenler ya da finansal risk faktörleri arasındaki bağımlılık, belirli birer GARCH modeli olan bireysel marjinal dağılımlardan elde edilmekte ya da çıkarsanmaktadır (Pfaff, 2016: 150). Bu amaçla, çok değişkenli normalliğin sağlanmadığı ve sadece marjinal dağılımların bilindiği durumlarda çok değişkenli dağılımların modellenmesinde kullanışlı olan kopula fonksiyonları kullanılmıştır. Bununla birlikte model, çok değişkenli GARCH modellerine alternatif bir yaklaşım olarak ortaya çıkmıştır.

Bu tez çalışmasının ilk iki bölümünde tanım ve açıklamalarına yer verilen GARCH modelleri (Engle, 1982; Bollerslev, 1986) ile kopula fonksiyonlarının (Sklar, 1959) kombinasyonu ile oluşturulan kopula-GARCH modeli, tek değişkenli marjinallerin Student- t (t_ν , $\nu > 2$) kalıntı dağılımlı GARCH(1,1) süreçleri ile modellenmesi durumunda izleyen şekilde tanımlanabilir (Joe, 2015: 335):

$$R_{k,t} = \mu_k + \epsilon_{k,t} \quad (6.1)$$

$$\epsilon_{k,t} = \sigma_{k,t} Z_{k,t} \quad (6.2)$$

$$\sigma_{k,t}^2 = \omega_k + \alpha_k \epsilon_{k,t-1}^2 + \beta_k \sigma_{k,t-1}^2 \quad (6.3)$$

$$Z_{k,t} \sim t_v(0,1) \quad (6.4)$$

Eşitlik 6.2 ile 6.4'te yer alan $(Z_{k,t})_{k \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{Z}}$, beklenen değeri sıfır (0), varyansı bir (1) ve t_v dağılımına sahip rassal bir değişkeni ve $k = 1, \dots, d$ için $R_{k,t}$ portföyde yer alan k 'nci finansal varlığın t zamanındaki getirisini ifade etmektedirler.

Yukarıda, $Z_{k,t}$ standardize kalıntıların Student- t ile dağıldığı varsayılmış olmakla birlikte, Normal veya yatık Student- t gibi farklı dağılımlara sahip oldukları da varsayılabilir. Benzer şekilde, d adet tek değişkenli marjinal, GARCH(1,1) süreçleri ile modellenmiş olmakla birlikte her bir marjinalin farklı P, Q ve p, q sıralı ARMA(P, Q)-GARCH(p, q) süreçleriyle modellendiği de varsayılabilir.

Elde edilen $(Z_{1,t}, \dots, Z_{d,t})$ vektörlerine ait ortak dağılım fonksiyonu Eşitlik 6.5'te verildiği şekilde tanımlanabilir.

$$F_Z(\mathbf{z}; \nu_1, \dots, \nu_d, \theta) = C(F_1(z_1; \nu_1), \dots, F_d(z_d; \nu_d); \theta) \quad (6.5)$$

Burada θ , d -boyutlu C kopulasının bağımlılık parametresini ve F_k ise $\nu_k > 2$ serbestlik dereceli Student- t dağılımını ifade etmektedirler. Her bir marjinaline ait $\xi_k = (\mu_k, \omega_k, \alpha_k, \beta_k, \nu_k)$ parametre vektörünün tanımlanmasını takiben log-olabilirlik fonksiyonu Eşitlik 6.6'daki gibi tanımlanarak bu tez çalışmasının 2.6 Kopula Tahmin Yöntemleri bölümünde açıklanan en çok olabilirlik yöntemiyle (MLE) marjinal parametre vektörü ξ_k ile θ kopula parametresi eş anda (tek aşamada) tahminlenir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi_1, \dots, \xi_d, \theta) &= \sum_{t=1}^n \log f_{R_t}(r_{1,t}, \dots, r_{d,t}; \xi_1, \dots, \xi_d, \theta) \\ &= \sum_{t=1}^n \left(\log [c(F_1((r_{1,t} - \mu_1)/s_{1,t}; \nu_1), \dots, F_d((r_{d,t} - \mu_d)/s_{d,t}; \nu_d); \theta)] + \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^d \log [s_{k,t}^{-1} f_k((r_{k,t} - \mu_k) / s_{k,t}; \nu_k)] \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

Eşitlik 6.6'da yer alan $s_{k,t} = [\omega_k + \alpha_k r_{k,t-1}^2 + \beta_k s_{k,t-1}^2]^{1/2}$ ve $c(\cdot; \theta)$ terimi de $C(\cdot; \theta)$ kopulasının yoğunluk fonksiyonudur. En çok olabilirlik yöntemiyle eş anlı parametre tahmini, özellikle çok değişkenli bağımlılık yapısı modellenen değişken sayısının (tek değişkenli marjinal adedinin) artmasıyla karmaşık ve uygulanması zor bir hale dönüşmektedir. Bu nedenle, kopula-GARCH model parametreleri çoğunlukla 2.6 Kopula Tahmin Yöntemleri bölümünde açıklanan Marjinallere İlişkin Çıkarsama Fonksiyonları Yöntemi (IFM) ile birden fazla aşamada tahmin edilmektedir. Bu yöntem ile öncelikle yukarıdaki eşitliklerde yer alan bilinmeyen GARCH parametreleri hesaplanarak $z_1, \dots, z_K$ standardize kalıntıları belirlenir. İkinci aşamada standardize kalıntılardan psödo-uniform değişkenler elde edilir ve kopula parametreleri hesaplanır. Parametreleri hesaplanan kopula-GARCH modelinden getiri serilerinin elde edilmesi ise öncelikle kopula parametrelerinden simülasyonlarla istenen belirli adet psödo-uniform değişkenin elde edilmesini ve bir sonraki aşamada bu psödo-uniform değişkenlerin ters olasılık dönüşümleri ile standardize kalıntıların elde edilerek bu kalıntıların koşullu ortalama ve/veya varyans denklemlerindeki yerlerine konarak getirilerin hesaplanması aşamalarını içerir.

6.2 Literatür Araştırması

İzleyen paragraflarda kopula-GARCH modelini finans alanında kullanan çalışmalara yer verilmiştir. Temelinde kopulalara dayalı GARCH yöntemini kullanan bu çalışmalar, araştırma amacı ve değişken serilerinin özelliklerine bağlı olarak farklılık göstermekte olup GARCH modelinin çeşitli açılımlarını da içerebilmektedirler.

Finansal varlık getirilerine ait marjinal dağılımların modellenmesi amacıyla, getirilerin koşullu ortalama ve varyans özelliklerini dikkate alan ARMA-GARCH modelleri finans alanında sıklıkla tercih edilmektedirler. 2001 yılındaki çalışmaları ile Rockinger ve Jondeu sıklıkla kullanılan bu yöntemleri kopula fonksiyonları ile birleştirerek varlık getirileri arasındaki koşullu bağımlılığı da modellemiş ve kopula-GARCH terimi ile yönteminin finans alanındaki kullanımının yaygınlaşmasına katkıda bulunmuşlardır.

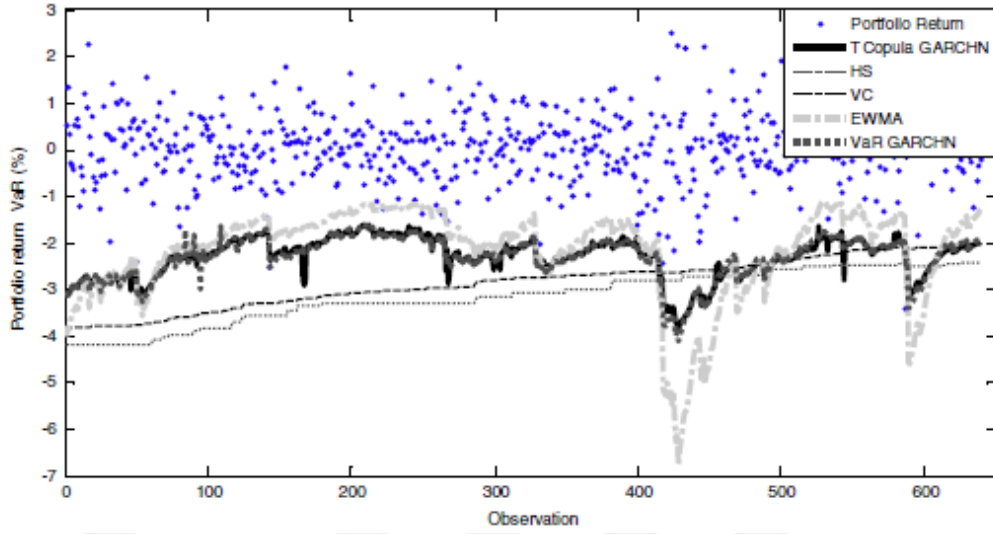
Jondeau ve Rockinger (2006) çalışmalarında, hisse getirilerinin normal dağılmadığı ve getiriler arası korelasyonların sabit olmadığı durumlarda, tek değişkenli seriler arası bağımlılık yapısının modellenmesini sağlayabilecek çok değişkenli bir dağılımın belirlenememesi sorunundan yola çıkarak, sadece tek değişkenli marjinal dağılımların bilinmesi durumunda dahi çok değişkenli bir dağılım ile değişkenler arası koşullu bağımlılığın da modellenmesini sağlayan yeni bir yöntemden bahsetmişlerdir. Araştırmalarında modelin teorik yapısının açıklanmasını takiben uygulamada elde edilen ampirik bulgularına da yer vermişlerdir. Çalışma kapsamında, uluslararası dört temel hisse endeksinin (S&P500, FTSE, DAX ve CAC) 1 Ocak 1980 ile 29 Aralık 2000 dönemi günlük getirileri kullanılmıştır. Tek değişkenli bu serilere uygun dağılımın zamanla değişen volatilité, yatıklık ve basıklık ile yatık Student-*t* dağılımının ve Student *t* kopulasının olduğu belirlenmiştir. Araştırma sonucu, sadece Avrupa endeks çiftleri arasındaki koşullu bağımlılığın geçmiş gözlem değerlerine dayandığını ve bağımlılığın aynı yöndeki hareketler altında zıt yönde kilere oranla daha geniş bir şekilde etkilendiğini ortaya koymuştur. Ayrıca, Avrupa endeks çiftleri arasındaki bağımlılığın zamanla değiştiği ve Avrupa ile Amerika piyasaları arasındakine oranla, Avrupa piyasaları arasındaki bağımlılığın 1980 ile 1999 dönemi içerisinde önemli bir şekilde arttığı belirlenmiştir.

Roch ve Alegre (2006), hisse getirileri arasındaki bağımlılığın modellenmesinde çok değişkenli getiri dağılımlarının normal kabul edilmesi, yani bilinen ve normal dağıldığı varsayılan çok değişkenli dağılımlar aracılığıyla ve serilere herhangi bir filtreleme işlemi uygulamadan getiri serileri arasındaki bağımlılığın belirlenmeye çalışılması sorununu analiz etmişlerdir. Bu amaçla çalışma dahilinde, 1/2/1997 ile 11/11/2004 dönemi İspanya borsasında işlem gören on altı hisseye ait günlük logaritmik getiriler elde edilmiş ve getiri serileri arasındaki bağımlılık yapısı; ilk olarak ham getirilerin kullanılması ile (getirilere herhangi bir filtreleme işlemi uygulanmadan) sonrasında da özdeş ve bağımsız dağılan (iid) gözlemlerin elde edilebilmesi amacıyla getirilerin ARMA(1,1)-GARCH(1,1) ile filtrelenerek standardize hata terimlerinin kullanılması yolu ile olmak üzere iki farklı şekilde modellenmiştir. Araştırma sonucunda, iki değişkenli günlük (ham) hisse getiri dağılımları ile kopula belirleme zorluğunu, yani ham getiri verileri arası bağımlılık

yapısının modellenme zorluğunu, bununla beraber ham veriler yerine filtreleme sonrası getiri verilerinin kullanılması durumunda ise, analize dahil edilen tüm kopula ailelerinin çok daha iyi birer performans gösterdiği ortaya konmuştur.

Huang vd. (2009) koşullu kopula-GARCH yöntemini kullanarak portföy riske maruz değerini (RMD) hesaplamışlardır. Araştırmacılar, 3 Temmuz 2000 ile 18 Mayıs 2007 dönemini kapsayan ve 1639 günlük veriyi içeren NASDAQ ve TAIEX endekslerine ait getiri serilerinin marjinal dağılım parametrelerini normal ve Student-t dağılımlı GARCH ve GJR (GARCH-n, GARCH-t, GJR-n ve GJR-t) yöntemlerini kullanarak belirlemişlerdir. Seriler arası bağımlılık yapısının modellenmesi amacıyla ise sekiz farklı türdeki (Normal, t-Kopula, Clayton, Rotated-Clayton, Plackett, Frank, Gumbel ve Rotated-Gumbel) kopulanın uygunluğu araştırılmıştır. Çalışma sonucunda; bir sonraki gün portföy riske maruz değerinin hesaplanmasında uygulanan farklı yöntemler arasından (Tarihi Simülasyon (HS), Varyans-Kovaryans (VC) ve Üssel Hareketli Ortalama Yöntemi (EWMA)) t-Kopula-GARCH-n yönteminin en başarılı tahmini ortaya koyduğu (bkz. Şekil 6.1.) belirtilmiştir.

Leśkow vd. (2011) ortaya koydukları çalışma, zaman serilerinde çok değişkenli koşullu dağılımların oluşturulmasında kopula fonksiyonlarının kullanımına yönelik bir uygulamayı içermektedir. Araştırma kapsamında iki endeksin (Warsaw Hisse Endeksi – WIG20 ve Alman Hisse Endeksi – DAX) 2 Ocak 2004 – 27 Şubat 2008 dönemine ait günlük getirileri kullanılmıştır. Getirilere ait marjinal dağılım parametrelerinin belirlenmesi amacı ile WIG20 endeksi için yatık Student-t dağılımlı GARCH(1,1) ve DAX endeksi için yatık Student-t dağılımlı APARCH(1,1) modeli kullanılmıştır. Bir sonraki adımda araştırmacılar, farklı kopula türlerinden (Normal, Joe-Clayton, Gumbel ve Student t) elde edilen veriler dahilinde en uygun türü Student t kopula olarak belirlemişler ve bu nedenle de mevcut iki boyutlu (varlıkları) portföyün çok değişkenli normal dağılım ile modellenemeyeceği sonucuna varmışlardır.



Şekil 6.1: Farklı Yöntemler ile Hesaplanan Portföy RMD Değerleri ($\alpha=0.01$)

Kaynak: Huang vd. (2009: 323).

Çalışmanın ikinci bölümünde, endeks getirileri arasındaki bağımlılık yapısının zamanla değişebilme olasılığı göz önünde bulundurularak Engle ve Sheppard (2001) çalışmasında tanımlanan sabit korelasyon testi uygulanmış ve test sonucu zamanla değişen korelasyona sahip bir model kullanma gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu nedenle, endeks getirileri ilk olarak DCC-MVGARCH ile modellenmiş, sonrasında ise dinamik bağımlılık yapısının daha iyi modellenebileceği farklı türdeki yöntemler kullanılmıştır. Bu yöntemlerden, dinamik Normal kopula (Patton, 2006) ile elde edilen dinamik korelasyon katsayılarının, DCC-MVGARCH ile modellenen katsayılarla çok benzer olduğu görülmüştür. Diğer bir yöntem olarak, simetrik dinamik Joy-Clayton kopula modeli uygulanmış ve WIG20 ile DAX endeks getirileri arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesinde en uygun model olarak belirlenmiştir. Araştırmacılar son bölümde, Polonya hisse piyasasından seçilmiş dört varlıklı bir portföyün kopulalara dayalı Riske Maruz Değerini (RMD) hesaplamış ve uygulayıcıların RMD hesaplamalarında çok değişkenli normal dağılıma dayanan yöntemlere nazaran kopulalara dayanan teknikleri kullanmalarını tavsiye etmişlerdir.

Dajčman (2013), kopula-GARCH modelini uluslararası finansal piyasalar arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesi amacıyla kullanmıştır. Araştırmacı, 2 Aralık 2003 – 27 Ocak 2012 dönemini kapsayan, ATX (Avusturya), CAC40 (Fransa), DAX (Almanya), FTSE100 (Birleşik Krallık), FTSE-MIB (İtalya), ve CROBEX

(Hırvatistan) endekslerine ait günlük kapanış fiyatlarını Yahoo Finance (Hırvatistan endeksine ait getiriler hariç) kaynağından elde etmiştir. Günlük kapanış fiyatlarından her bir endekse ait logaritmik getiriler hesaplanmış ve çiftler halinde endeks getirileri arasındaki bağımlılığın ölçü ve yapısı incelenmiştir. Araştırma sonucunda, endeks getirileri arasındaki korelasyonun ve uç getiri değerlerindeki kuyruk bağımlılık yapısının zamanla değiştiği, yani finansal çalkantı dönemlerinde, endekslerin hızla yükseldiği ya da düştüğü dönemlerde, endeksler arası artan korelasyon ve bağımlılık gözlemlendiği ortaya konmuştur. Dolayısı ile araştırmacı, hisse senedi piyasaları arasındaki bağımlılığın dinamik olduğu ve muhtemelen de doğrusal olmadığını, bu nedenle de endeksler arası bağımlılık yapısının klasik bağımlılık ölçüleri ile değil, dinamik normal veya simetrikleştirilmiş Joe-Clayton kopula-GARCH modellerinin kullanılmasıyla daha doğru bir şekilde modellenebileceğini öne sürmüştür.

Autchariyapanitkul vd. (2014) Tayland borsasının SET50 endeksinde işlem gören dört hisseden oluşturdukları bir portföyün CVaR risk ölçümüne dayalı optimal varlık dağılımının belirlenmesinde, varlıklar arası asimetrik ve doğrusal olmayan bağımlılık yapılarını da göz önünde bulunduran kopula fonksiyonlarını kullanmayı amaçlamışlardır. Bu doğrultuda, seçilen hisseler (Airports Of Thailand Public Company Limited (AOT), Bangkok Bank Public Company Limited (BBL), The Siam Commercial Bank Public Company Limited (SCB), ve The Siam Cement Public Company Limited (SCC)) ait Mart 2009 – Ocak 2014 dönemi haftalık getiri serileri elde edilmiş ve serilere ait marjinal dağılımlar ARMA-GARCH-Student- t ile modellenmiştir. Seriler arası bağımlılık yapısı ise Student t kopula ile modellenerek Monte Carlo simülasyonları gerçekleştirilmiş ve en küçük CVaR değerine sahip portföy belirlenmiştir. Çalışma sonucunda, portföy yönetiminde varlıklar arası bağımlılık yapısının belirlenmesi amacıyla Student t kopulasının kullanılabileceği belirtilmiştir.

Döviz kuru ile enflasyon oranı arasındaki bağımlılık yapısı ve volatilité değerlerinin incelenmesi amacıyla Xiongtoua ve Sriboonchitta (2014), yatık Student- t dağılımlı ARMA(1,1)–GARCH(1,1) sürecini zamanla değişen t -kopula ile birlikte kullanmışlardır. Çalışmada, değişkenler arası bağımlılık yapısının modellenmesi

amacı ile farklı türdeki kopulalar (Normal, t-kopula, Gumbel, Joe gibi) sınanmış ve mevcut verilere en uygun kopula türünün zamanla değişen t-kopula olduğu belirlenmiştir. Araştırma sonucunda, enflasyon ile döviz kuru büyüme oranları arasındaki korelasyonun pozitif olduğu ve doğrusal olmadığı ortaya konmuştur.

4 Ocak 2007 – 1 Ağustos 2013 dönemini kapsayan araştırmalarında Kemaloğlu ve Kara (2015), BİST30 ve BİST100 endeksleri ile Euro ve dolar kuru günlük getirilerinin marjinal dağılımlarını GARCH ve GJR ile modellemişlerdir. Araştırmacılar, BİST30 ve BİST100 endeks getirileri için GJR-t, Euro ve dolar kuru günlük getirileri için ise GARCH-t modelinin kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Değişken serileri arası bağımlılığın modellenmesi amacıyla Normal, Student t, Clayton ve Simetrik Joe Clayton-SJC kopulalarının sabit ve zamanla değişen türleri kullanılmış ve her iki durum için de (sabit ya da zamanla değişen) Student t kopulasının veriler arasındaki bağımlılık yapısının açıklanmasında en iyi olduğu ifade edilmiştir. Bununla birlikte, durağan ve dinamik durumların ayrı birer değerlendirmesini yapan araştırmacılar, marjinallerin modellenmesi için GJR-t ve değişkenler arası bağımlılık yapısının modellenmesi için de dinamik Student t (tDCC) kopulasını kullanarak 10000 adetli Monte Carlo simülasyonu gerçekleştirmişler ve hesaplanan en küçük CVaR risk ölçümüne sahip portföyü belirlemişlerdir. %95 güven aralığında, CVaR risk ölçümüne dayalı portföy optimizasyonunun sonucuna göre; portföy varlığının %37.6'sı BİST30 endeksine, %16.11'i BİST100 endeksine, %27.15'i dolar kuruna ve geriye kalan %19.13'ü de Euro kuruna yatırılmalıdır.

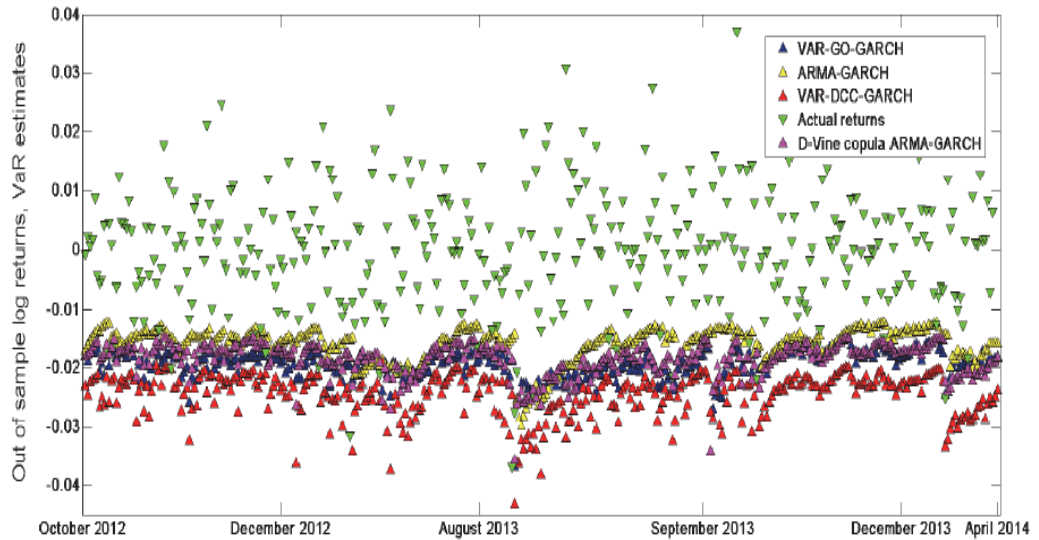
Kresta (2015), kopula-GARCH modelinin portföy optimizasyon problemine uygulanabilirliğini araştırmak amacıyla, 6 Ekim 2014 tarihi itibarıyla Dow Jones Industrial Average (DJIA) Endeksi'ne üye yirmi sekiz adet hisse senedinin 1 Aralık 1997 ile 31 Aralık 2014 dönemini kapsayan günlük getirilerini veri olarak kullanmıştır. Araştırma kapsamında, yatırımcıların Sharpe oranını maksimize ettikleri varsayılmış ve geçmiş günlük getiri verilerine dayalı optimum portföyler ile kopula-GARCH modeliyle tahminlenen gelecek getirilerin kullanılmasıyla elde edilen optimum portföyler karşılaştırılmıştır. Kopula-GARCH yöntemi ile gelecek getiri değerlerinin tahmini amacıyla bireysel getiri serileri Student-t dağılımlı AR(1)-GARCH(1,1)

süreçleriyle modellenerek filtrelenmiş ve standardize kalıntı terimleri elde edilmiştir. Bir sonraki aşamada ise standardize kalıntı terimleri kullanılarak getiri serileri arası bağımlılık yapısını belirleyen Student t kopulasının parametreleri hesaplanmıştır. Son aşamada, Student t kopula modeli ile belirlenen bağımlılık yapısı kullanılarak 100 000 adet hisse getiri senaryosu simülasyonlar yardımı ile hesaplanmıştır. Çalışma sonucunda, geçmiş verilere ait getiriler ile karşılaştırıldığında, kopula-GARCH modelinin finansal zaman serilerinin daha iyi birer tahmincisi olduğu ortaya konmuştur.

Wanat, Papież ve Śmiech (2015), değerli metal getirileri arasındaki bağımlılık yapısını analiz etme amacıyla kopula DCC-GARCH yöntemini uygulamışlardır. Çalışma kapsamında, altın, gümüş, platin ve paladyum metallerinin 22 Eylül 1997 – 13 Şubat 2014 dönemi günlük logaritmik getirileri kullanılmıştır. Getiriler, çeşitli ARMA-GARCH süreçleri ile modellenmiştir (altın için Student-t AR(1)-GARCH(1,1), gümüş için normal AR(1)-GARCH(1,1), platin için yatık Student-t ARMA(1,1)-GARCH(1,1) ve paladyum için Student-t AR(1)-GARCH(1,1)). Bağımlılık dinamiklerinin modellenmesi amacı ile koşullu korelasyon ve sabit şekil parametrelili (η) Student t kopula seçilmiş ve uygulanmıştır. Analiz sonucunda, metal getirileri arasındaki ikili dinamik korelasyonlar elde edilmiş ve bu korelasyonların 2004 yılı içerisinde önemli ölçüde artış gösterdiği, izleyen dönemlerde ise 2004 yılı değerlerini sürdürdüğü gözlemlenmiştir. Çalışmada, değerli metal getirileri arasındaki bağımlılık yapısının dinamik olduğu ve Nisan 2004 yılında köklü bir yapısal değişiklik geçirdiği ortaya konmuştur.

Araştırmalarının temel amacını, eşit ağırlıklı bir portföyde D-vine kopula ARMA-GARCH modelinin kullanılması ile bir gün sonrası için Riske Maruz Değer (RMD) hesaplanmasında, modelin tahmininin gücünün değerlendirilmesi olarak belirten Klepač ve Hampel (2015), Prag Borsası'nda işlem gören dört adet hissenin Ocak 2010 ve Nisan 2014 dönemi günlük logaritmik getirilerini araştırma kapsamında kullanmışlardır. Araştırmacılar, verilere en uygun modelin belirlenebilmesi amacıyla yüz elli adet tek değişkenli model kombinasyonunu değerlendirmişler ve ARMA(3,1)-GJR-ged (Telefonica), ARMA(1,0)-GARCH(1,1)-Student-t (ČEZ), ARMA(1,1)-

GJR-Student- t (KB) ve ARMA(1,0)-GARCH(1,1)-GJR-ged (ERSTE) modellerinin parantez içlerinde her bir hissenin belirtildiği zaman serileri için en uygun modeller olduklarını öne sürmüşlerdir. Bu nedenle, hesaplanan portföy getirilerinin modellenmesi ARMA(1,1)-GARCH(1,1)-GJR-Student- t ile yapılmış ve bir sonraki gün RMD tahminleri oluşturulmuştur. Bir sonraki adımda ise araştırmanın temel amacı olarak ifade edilen, hisse senedi getirileri arasındaki bağımlılığın ölçü ve yapısı D-vine kopula ile belirlenerek, D-vine kopula-ARMA-GARCH modeli kullanılmış ve bir gün sonrası için RMD tahmin değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca, modeller arası karşılaştırmaların yapılabilmesi amacıyla portföy getirileri, çok değişkenli volatilité modellerinden çok değişkenli Student- t dağılımlı VAR(1)-GO-GARCH(1,1)-GJR ve VAR(1)-DCC(1,1)-GARCH(1,1)-GJR ile de modellenmiş ve %95 güven aralığı için bir sonraki gün portföy RMD değerleri hesaplanmıştır. Aşağıda verilen Şekil 6.2'den de görülebileceği üzere, bir sonraki gün en iyi RMD tahmini değerlerini sağlayan yöntem ARMA-GARCH olarak belirlenmiştir.



Şekil 6.2: Eşit Ağırlıklı Portföyün Bir Gün Sonrası İçin Örneklem Dışı RMD Tahmin Değerleri

Kaynak: Klepač ve Hampel (2015:1293).

Kim ve Jung (2016), Amerikan Borsası'nda işlem gören beş adet hissenin (Apple, Amazon, IBM, GE ve Walmart) günlük getirilerine ait volatilité tahminlerini gerçekleştirmek amacıyla yeni bir model önermişlerdir. Kopula-DCC-GARCH'lı Zamanla-Değişen Lineer Regresyon (LTVR) modeli olarak adlandırdıkları bu yöntem

ile araştırmacılar, daha önce Kim, Jung ve Quin (2016) tarafından ortaya konan DCC-GARCH'lı LTVR modelini, dinamik koşullu korelasyonların (DCC) kopulalar ile hesaplanmasını sağlayarak mevcut modeli geliştirdiklerini belirtmişlerdir. Ayrıca, yeni önerilen modelin volatilité tahmin gücünün eskisiyle karşılaştırılabilmesi amacıyla Kim, Jung ve Quin (2016)'de kullanılan hisse senedi getirilerinin aynısı bu araştırma kapsamında da kullanılmıştır. Araştırma sonuçları, bu çalışma ile önerilen yeni modelin, Kim, Jung ve Quin (2016)'de önerilen mevcut modelin tahmin performansını önemli ölçüde arttırdığını göstermiştir.

Lee, Klumpe, Vlk ve Lee (2017) hisse senedi getirileri arasındaki bağımlılık yapısını araştırma amacıyla kopula-GARCH modelini kullanmışlardır. Çalışmada, Apple ve Samsung hisselerinin Ocak 2010 ile Mayıs 2016 dönemlerine ait haftalık getirileri arasındaki bağımlılık yapısı, Eliptik ve Arşimedyen kopulalar ile modellenmiştir. Hisse getirilerinin otokorelasyon ve zamanla değişen oynaklığa (volatilitéye) sahip olmaları durumunda, getirilerin doğrudan kopulalar ile modellenmesi doğru olmayan tahminlere yol açacaktır. Bu nedenle araştırmacılar, ARMA(1,1) ve GARCH(1,1) modellerini otokorelasyon ve oynaklık kümelenmesi etkilerinin filtrelenmesi amacıyla kullanmışlardır. Kopulaya dayalı ARMA(1,1)-GARCH(1,1) modelinden elde edilen parametreler ve Kendall sıra korelasyon katsayısının veri olarak kullanıldığı Monte Carlo simülasyonu ile 200 000 adet Apple ve Samsung getiri değerleri elde edilmiştir. Araştırma sonucunda, Ocak 2010 ve Mayıs 2016 dönemini içeren, ARMA(1,1)-GARCH(1,1) ile filtrelenen Apple ve Samsung hisse getirilerinin tahmini amacıyla t-kopula en iyi yöntem olarak belirlenmiştir.

Yıldırım ve Cengiz (2017) döviz kurları arasındaki bağımlılık yapısını belirlemeyi hedefledikleri çalışmalarında, 21 Nisan 2010 – 6 Ağustos 2017 dönemi için altı adet kurun (EUR/USD, YEN/USD, GBP/USD, AUD/USD, CAD/USD ve CHF/USD) günlük logaritmik getirilerini hesaplamış ve elde edilen serilerin otokorelasyon ve değişen varyans özellikleri nedeni ile marjinal dağılımlarını AR(1)-GARCH(1,1) ile modellemişlerdir. Çalışma sonucunda, kurlar arası bağımlılığın zamanla değiştiği ve seriler arası bağımlılık yapısının modellenmesinde kullanılabilecek en uygun kopula türünün dinamik Student t olduğu belirlenmiştir.

Ayrıca, Allen vd. (2017) üç farklı dönem için on bir Avrupa endeksi arasındaki bağımlılık yapısını R-vine ve C-vine kopulaları ile modellemiştir. Bağımlılık modellemesine ek olarak araştırmacılar, eşit ağırlıklı bir portföy oluşturarak R-vine ve C-vine kopulaların portföy RMD tahmin performansını, tek değişkenli GARCH(1,1) süreçlerinin simülasyonlarından elde edilen tahminlerle karşılaştırmışlardır. Müller ve Rigbi (2018) ise Tarihsel Simülasyon, DCC-GARCH (Engle, 2002) ile Normal ve Student-t marjinal dağılımlı AR(1)-GARCH(1,1) sürecinden simülasyonlarla elde edilen verileri kullanan çok değişkenli kopula modellerinin (Düzenli Asma ve Nested Arşimedyen kopulalar) portföy riski tahmin performanslarını karşılaştırmıştır.

Kırkpınar (2018), kopula DCC-GARCH modelini tahvil ve emtia piyasaları arasındaki oynaklık yayılımının analizi ve bu piyasalar arasındaki bağımlılık yapısının ölçülmesi amacı ile kullanmıştır. Çalışma kapsamında, Ocak 2008 – Nisan 2017 dönemi Hindistan, Brezilya, Rusya, Türkiye ve Çin (BRIC-T) tahvil piyasaları ile altın ve petrol emtia piyasalarının günlük kapanış fiyatları kullanılmış ve küresel likidite riski açısından tahvil ve emtia piyasaları arasındaki oynaklık yayılımı analiz edilmiştir. Çalışma sonucunda; Türkiye ve Rusya tahvil piyasaları ile petrol emtia piyasası arasında, Brezilya, Türkiye ve Rusya tahvil piyasaları ile altın piyasası arasında önemli oynaklık yayılımlarının mevcudiyeti belirlenmiştir. Kopulalar ile ölçülen piyasalar arası bağımlılığın, emtia piyasaları (petrol ve altın) ile analiz kapsamına dahil edilen tüm tahvil piyasaları arasında var olduğu gözlemlenmiştir. Ayrıca, araştırma kapsamında piyasalar arası nedensellik ilişkisinin yönünün belirlenmesi amacıyla Hong Nedensellik Testi uygulanmıştır. Test sonucuna göre, Hindistan dışındaki diğer tüm tahvil piyasaları ile petrol arasında tek yönlü bir nedensellik ilişkisinin varlığı belirlenmiştir. İlişkinin yönü, petrolden Brezilya ve Türkiye piyasalarına doğru iken, diğer piyasalar için ters yöndedir. Bununla beraber, Brezilya'dan altına doğru ve altından Rusya ve Türkiye tahvil piyasalarına doğru oynaklıkta tek yönlü nedensellik belirlenmiştir.

Kim ve Jung (2018), 1998-2017 dönemi döviz kurları, ham petrol fiyatları ve Amerikan faiz oranları arasındaki bağımlılık yapısını araştırma amacıyla bir çalışma ortaya koymuşlardır. Bu çalışmada, getiri serilerinin yatıklık ve asimetrik kuyruk

bağımlılığı özelliklerinin de modellenebilmesi amacıyla kopulalara dayalı GARCH modeli kullanılmıştır. Böylece, değişken getirilerinin marjinal davranışları koşullu ortalama ve asimetrik varyansı dikkate alan asimetrik GARCH modelleri (ARMA(p,q)-TGARCH(1,1)-Student-*t* ve ARMA(p,q)-APARCH(1,1)-Student-*t*) kullanılarak incelenmiş, getirilere ait eşzamanlı aşırı piyasa hareketlerinin araştırılması ise çeşitli kopulalar yolu ile yapılmıştır. Bununla beraber, Granger nedensellik testi ve çok değişkenli GARCH süreçlerinden BEKK yönteminin uygulanması ile de değişkenler arası nedensellik ve oynaklık yayılım etkileri araştırılmıştır. Çalışmada, 1998-2017 dönemi dahilinde günlük WTI ve Brent petrol fiyatları, 10 yıllık sabit Amerikan tahvil oranları ile dokuz en önemli petrol ihracat ve ithalatçısı ülkeye ait Amerikan dolarına karşı değişim oranları (petrol üreten ihrac eden ülkeler için: Kanada Doları, İngiliz Poundu, Kuveyt dinarı, Rus Rublesi, Suudi Arabistan Riyali, petrol ithal eden ülkeler için: Japon Yeni, Hindistan Rupisi, Güney Kore Wonu ve Euro) döviz kuru değişkenleri olarak kullanılmıştır. Araştırma sonucunda, ham petrol fiyatları ile Amerikan faiz oranları arasında ters yönlü bir ilişkinin ve neredeyse tüm ham petrol-döviz kuru çiftleri arasında ise asimetrik kuyruk bağımlılığının mevcudiyeti ortaya konmuştur. Granger nedensellik testlerinin sonuçları, WTI petrol fiyatlarının döviz kurlarının Granger nedeni olduğunu göstermiştir. Ayrıca, petrol ihrac eden ülkeler için petrolden döviz kurlarına ve Amerikan faiz oranlarına olmak üzere tek yönlü oynaklık yayılımının varlığı da ortaya konmuştur.

Liu, Cai ve Hamori (2018) üç adet Çin bankasına ait hisse getirileri arasındaki bağımlılık yapısının modellenmesi amacı ile kopulaları kullanmışlardır. Araştırma kapsamında Beijing, Ningbo ve Nanjin Bankalarına ait 19 Eylül 2007 – 21 Mayıs 2018 dönemini kapsayan günlük logaritmik hisse getirileri elde edilmiş ve araştırma dönemi global finansal krizleri içeren 19 Eylül 2007 – 4 Haziran 2015 dönemi ile Çin hisse piyasasına özgü krizi içeren 12 Haziran 2015 – 21 Mayıs 2018 dönemi olmak üzere iki alt döneme ayrılmıştır. Her bir döneme ait getiri serilerinin marjinal dağılımları ARMA(p,q)-GARCH(1,1)-Student-*t* süreci ile modellenmiştir. Bir sonraki aşamada sabit ve zamanla değişen kopula modelleri (Normal, Student *t*, rotated Gumbel ve simetrikleştirilmiş Joe-Clayton (SJC)) ile getiriler arası bağımlılık yapısı araştırılmıştır. Araştırma sonucunda, getiriler arası bağımlılık yapısının 2007 ile 2018

arasında önemli ölçüde azalma gösterdiği ve bu yapının hisseler arasında ve zamanla değiştiği ortaya konmuştur.

Araştırma amacını, ham petrol fiyatları ile Çin, Hindistan ve Güney Kore döviz kurları arasındaki koşullu bağımlılığın incelenmesi olarak belirten Hung (2019), 1 Haziran 2008 - 30 Aralık 2018 dönemi haftalık ham petrol fiyatları (WTI) ile Çin, Hindistan ve Güney Kore ulusal paralarının dolar karşılıklarını kullanarak her bir değişkenin haftalık logaritmik getirilerini hesaplamıştır. Logaritmik getirilere ait marjinal dağılımlar, koşullu ortalama ve varyansı dikkate alan AR(p)-GARCH(1,1) ile modellenmiş ve değişkenler arası bağımlılığın belirlenmesi amacı ile de farklı türdeki sabit ve koşullu kopula türlerinin verilere uygunluğu test edilmiştir. Çalışma sonucunda; ham petrol ile kurlar arasındaki bağımlılık yapısının asimetrik ve kuyruk bağımlılığına sahip olduğu belirlenmiştir. Bununla birlikte, ham petrol ile döviz kuru getirileri arasındaki korelasyonun negatif olduğu yani değişkenler arası birlikte hareketin ters yönde olduğu gözlemlenmiştir. Araştırma dönemi dahilinde, değişkenler arası korelasyonu en iyi açıklayan modelin ise yaşam Gumbel kopulalı GARCH modeli olduğu ifade edilmiştir.

Li, Zhong ve Huang (2019), beş adet gelişmiş (ABD, Birleşik Krallık, Almanya, Fransa ve Japonya) ve beş adet gelişmekte olan (Rusya, Çin, Brezilya, Hindistan ve Güney Afrika) ülkenin finansal döngüleri arasındaki olası bağımlılığı araştırma amacıyla kopula-ARIMA-GARCH modelini kullanmışlardır. Araştırmacılar, Ocak 1993 – Aralık 2017 dönemi aylık döviz kurları, faiz oranları, piyasa değeri, toplam rezervler ile döviz rezervleri değişkenlerini kullanarak ülke bazlı finansal döngü endekslerini hesaplamışlardır. Elde edilen gelişmiş ve gelişmekte olan ülkelerin finansal döngü endeks serilerine ait marjinal dağılımlar ARIMA-GARCH ile modellenmiş ve her bir seriye özgü standardize artıklar kullanılarak ikili seriler arası bağımlılık yapısının mevcudiyeti altı adet kopula türü kullanılarak (Normal, Student t, Gumbel, Frank, Clayton ve Joe kopula) araştırılmıştır. Çiftlerin birçoğu için hesaplanan kopula fonksiyon parametrelerinin anlamlı olduğu, yani ülkelerin finansal döngü serileri arasındaki bağımlılığın mevcut olduğu görülmüştür. Buna rağmen, bazı gelişmiş ve gelişmekte olan ülke çiftleri arasında hesaplanan kopula parametreleri

anlamsız bulunmuştur. Ayrıca, gelişmekte olan ülkeler arası (BRIC) bağımlılığın, gelişmiş ülkeler arası bağımlılığa nazaran daha güçlü olduğu görülmüştür. Gelişmiş ülkeler arasından ise Amerika, Japonya ve Almanya'nın diğerleri ile daha bağlantılı olduğu görülmüş iken, Japonya ve Amerika arasındaki finansal döngü bağımlılığı en güçlü bulunmuştur. Ayrıca araştırmacılar, Amerikan hisse piyasasındaki bir oynaklığın diğer ülke piyasalarında hızlı bir şekilde finansal dengesizliğe yol açabileceğini de öne sürmüşlerdir.



YEDİNCİ BÖLÜM

BİST30 ÜZERİNE BİR UYGULAMA

Bu tez kapsamında bir önceki bölümde tanım ve açıklamalarına yer verilen kopula-GARCH modelinin kullanılmasıyla BIST30 endeksinde listelenen belirli şirket hisselerinin getirileri, hisseler arası bağımlılık yapısını da göz önünde bulundurarak hisselerin farklı değerleri için tahminlenmiştir. Aslında bu tahminler, ilki portföy dağılımı ikincisi ise risk yönetimi alanında olmak üzere iki farklı uygulamaya ait farklı dönem ve hisseleri içeren ve her bir hisse getirisinin alacağı değere bağlı olarak değerinin de alacağı değerin (hisseler arası bağımlılık yapısına bağlı olarak) belirlendiği koşullu tahminlerdir. Her bir uygulamanın amacı, veri seti, yöntemi ve ampirik sonuçlarına ise izleyen bölümlerde yer verilmiştir.

7.1 Birinci Uygulama

Bu araştırmanın temel amacı, Eliptik kopula ve Karışım kopulalar gibi farklı kopula fonksiyonları ile oluşturulan Kopula-GARCH modelinin uygulanarak hisse getirilerinin elde edilmesi ve bu getirilerin tek değişkenli serilere nazaran çok değişkenli birlikte hareketin çok daha önemli olduğu portföy dağılımı probleminde kullanılarak farklı yöntemler arası performansın karşılaştırılmasıdır. Bu nedenle, Kopula-GARCH modeli ile elde edilen getiriler farklı portföy optimizasyon yöntemlerinde kullanılmış ve oluşturulan portföyler çeşitli performans ölçütleri ile karşılaştırılmıştır.

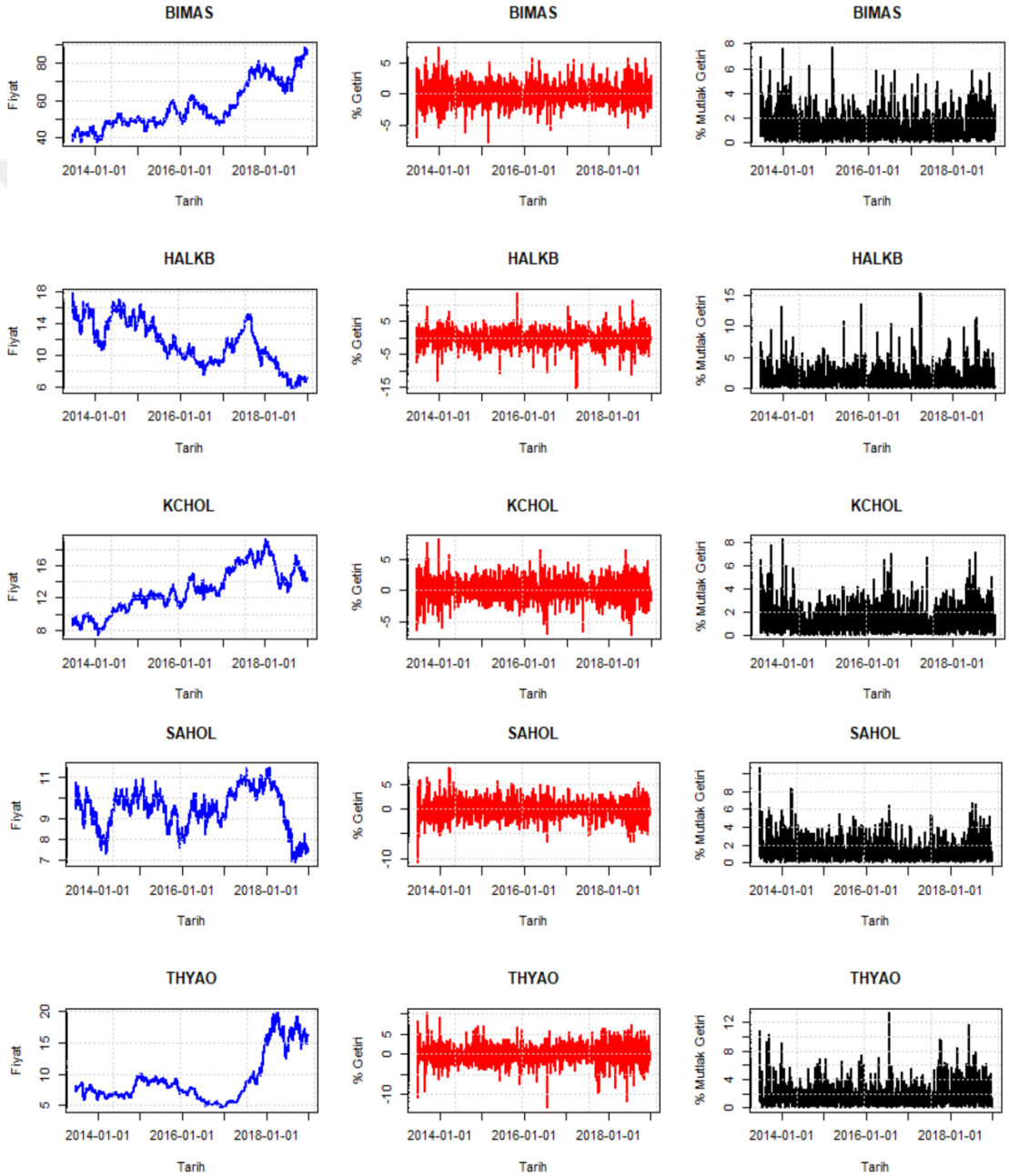
7.1.1 Veri Seti

Uygulama konusunun birinci bölümü için, 19 Haziran 2013 – 28 Aralık 2018 tarihlerinde BİST30 endeksinde sürekli olarak listelenen beş adet hissenin toplam 1390 adet günlük getiri değerleri elde edilerek araştırma kapsamında kullanılmıştır. Beş hisseden üçü olan BIM Birleşik Mağazalar A.Ş. (BIMAS), Türkiye Halk Bankası (HALKB) ve Türk Hava Yolları (THYAO) sırasıyla perakende, finans ve havacılık sektörlerinde faaliyet göstermektedirler. Diğer iki hisse ise farklı alanlarda faaliyet

gösteren Sabancı ve (SAHOL) ve Koç (KCHOL) Holding hisseleridir. Hisse getirileri izleyen eşitlikteki gibi hesaplanmıştır.

$$r_t = 100 * \ln (P_t/P_{t-1}) \quad (7.1)$$

Hisselerin fiyat, getiri ve mutlak getiri değerlerinin zamanla değişimi ise Şekil 7.1'de verilmiştir.



Şekil 7.1: Hisselerin Fiyat, Getiri ve Mutlak Getiri Değerlerinin Zamanla Değişimi

Getirilerin betimsel istatistiklerine ise Tablo 7.1’de yer verilmiştir. Tablo 7.1’deki 19 Haziran 2013 - 30 Aralık 2016 dönemi 887 adet gözlemden oluşan ve getirilerin kopula-GARCH ile ilk defa modellenip bir gün sonrası için 1000’er adet getiri simülasyonlarının elde edildiği 503 adet dönemden (pencereden) ilkidir. Yukarıda bahsedildiği gibi, 19 Haziran 2013 – 28 Aralık 2018 ise tüm örneklem dönemini kapsamaktadır.

Tablo 7.1: Getiri Serilerine ait Betimsel İstatistikler

	19 Haziran 2013 - 30 Aralık 2016					19 Haziran 2013 - 28 Aralık 2018				
İst. / Hisse	BIMAS	HALKB	KCHOL	SAHOL	THYAO	BIMAS	HALKB	KCHOL	SAHOL	THYAO
Ortalama	0.021	-0.073	0.042	-0.015	-0.054	0.054	-0.067	0.028	-0.025	0.049
Medyan	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
Min	-7.776	-13.172	-7.026	-10.795	-13.449	-7.776	-15.387	-7.192	-10.795	-13.449
Max	7.605	13.638	8.289	8.417	10.344	7.605	13.638	8.289	8.417	10.344
Stand. Sapma	1.688	2.346	1.726	1.913	2.217	1.628	2.445	1.730	1.829	2.380
Yatıklık	-0.006	-0.346	0.062	-0.027	-0.266	0.181	-0.337	0.006	-0.167	-0.274
Basıklık	4.909	6.886	4.963	4.732	6.567	4.940	7.214	4.696	4.785	5.377
Jarque-Bera	136.33***	580.24***	144.67***	112.32***	484.75***	227.13***	1059.66***	167.94***	192.34***	346.81***
ADF istat.	-10.402**	-9.857**	-10.540**	-10.380**	-9.128**	-11.534**	-11.492**	-11.018**	-11.394**	-10.309**
LB Q(10)	0.576	0.635	0.075	0.289	0.004	0.016	0.258	0.051	0.065	0.000
Arch LM(5)	0.000	0.011	0.083	0.040	0.000	0.000	0.009	0.016	0.000	0.000
Arch LM(10)	0.003	0.121	0.000	0.000	0.006	0.000	0.042	0.000	0.000	0.000

Notlar: *** ve ** sırasıyla %1 ve %5 düzeylerindeki anlamlılığı ifade etmektedirler. Ljung-Box ve Arch LM testlerinin p değerleri raporlanmıştır.

Her bir hisse getirisine ait Tablo 7.1 ile raporlanan betimsel istatistikler incelendiğinde, serilerin her iki dönemde de yatıklık ve sivri basıklığa sahip olduğu ve bu nedenle de normal dağılıma nazaran uç değerlerin gözlemlenme olasılığının daha yüksek olduğu anlaşılmaktadır. Ayrıca, serilere uygulanan Jarque-Bera testinin sıfır hipotezi reddedilmiş ve böylece normal dağılım varsayımının uygun olmayacağı onaylanmıştır.

Serilerin Normal dağılıma uygunluğunun incelenmesinin yanında uygulanan Augmented Dickey-Fuller (ADF) (Dickey ve Fuller, 1979) birim kök testinin sonucuna göre seriler durağandır. Bununla birlikte, serilerde otokorelasyon varlığını araştıran Ljung-Box (Ljung ve Box, 1978) testinin sonucuna göre de ilk model uygulama penceresinde THYAO dışında diğer serilerde otokorelasyon gözlemlenmemektedir. Benzer bir şekilde tüm örneklem döneminde de %99 güven aralığında sadece THYAO serisinin otokorelasyona sahip olduğu, %95 güven

aralığında ise BIMAS ve THYAO dışında diğer serilerde otokorelasyon gözlemlenmediği görülmektedir.

7.1.2 Sabit Oynaklık ve Oynaklık Kümelenmesi

Araştırma konusu getiri serilerinin zamanla değişen ve kümelenen oynaklığa sahip olduklarına dair ön izlenim, serilerin zamana bağlı değişimlerinin çizdirildiği diyagramlar aracılığı ile edinilmiş olsa dahi herhangi bir sonuca varılabilmesi formal testlerin uygulanmasını gerektirmektedir. Bu testlerden biri olan ARCH LM testi, otoregresif koşullu değişen varyansın tespiti için Engle (1982, 1984) tarafından geliştirilmiş ve son derece yaygın bir kullanıma sahiptir. Test istatistiği; Eşitlik 7.2 ile verilen denklemden elde edilen hata terimlerinin kareleri aracılığı ile Eşitlik 7.3'te yer alan denklemin modellenerek uygulanması ile hesaplanmaktadır. ARCH LM testi, H_0 : Hatalarda ARCH etkileri yoktur sıfır hipotezine karşı, hatalarda ARCH etkileri mevcuttur karşıt hipotezini test eder (Özden, 2008: 342).

$$y_t = C + \theta_1 y_{t-1} + \theta_2 y_{t-2} + \dots + \theta_p y_{t-p} + u_t \quad (7.2)$$

$$\hat{u}_t^2 = C + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_q \hat{u}_{t-q}^2 + v_t \quad (7.3)$$

Özden (2008, s.346)'in de belirttiği gibi, ARCH etkilerinin testi için ARCH LM her bir seri için belirlenen koşullu ortalama denklemlerinden elde edilen hata terimlerine uygulanmaktadır.

Ayrıca, serilerde mevcut herhangi bir oynaklık etkisinin araştırılması serilerin durağan olma önkoşulunu gerekli kılmakla birlikte, bir önceki bölümde bahsedildiği gibi uygulanan ADF birim kök test sonuçları serilerin bu önkoşulu sağladığını göstermektedir. Tablo 7.1'de beş ve onuncu gecikmeler için uygulanan ARCH LM test sonuçları verilmiş olup serilerin varyans durağan olmadıklarına yönelik gözlem bulguları test sonuçları ile de teyit edilmiştir.

7.1.3 Tek Değişkenli Serilerin Koşullu Varyans Denklemleri

Toplam 1390 adet gözlemden oluşan getiri serilerinin ilk 887 adedi için belirlenen Student-*t* dağılımlı GARCH(1,1) denklemlerinin parametrelerine Tablo 7.2’de yer verilmiştir. Yapılan birçok çalışma ile aykırı gözlemlerin, serilere ait ARMA ve GARCH modellerinin belirlenme aşamalarını ve dolayısı ile tahmin performanslarını olumsuz yönde etkiledikleri ortaya konmuştur. Bununla birlikte, aykırı gözlemlerin serilere dahil edilmeyerek (serilerden çıkarılmaları yolu ile) koşullu varyans denklemlerinin oluşturulması durumunda GARCH modellerinin örneklem dışı tahmin gücünün azaldığı belirlenmiştir (bkz. Carnero vd. (2012); Charles ve Darne (2005)).

Bu nedenle, aykırı gözlemlerin GARCH modellerinin belirlenmesi ile tahmini üzerindeki bu ve benzeri olumsuz etkilerinden kaçınmak amacıyla Carnero vd. (2012)’nin bahsettiği gibi bir aykırı gözlem filtreleme yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem ile araştırma kapsamında yer alan tüm serilerin öncelikle koşullu varyans denklemleri belirlenmiş ve sonrasında da $|r_t| > 5\hat{\sigma}_t$ (beş koşullu standart sapma) aralığının dışında yer alan gözlem değerleri $5\hat{\sigma}_t \cdot \text{işaret}(r_t)$ ile değiştirilerek elde edilen serilere ait koşullu varyans modellerinin uygunluğu yeniden değerlendirilmiştir (hisse bazlı yukarıda yer alan her bir aşama tekrar edilerek serilere ait koşullu varyans denklemlerinin seçimi yeniden yapılmıştır). Özetle, Tablo 7.2 ile verilen koşullu varyans modellerinin, serilerin getiri ve volatilité tahminlerinin yapılması amacıyla kullanılmalarına karar verilmiştir.

Tablo 7.2: Serilere Özgü Koşullu Varyans Denklem Parametreleri / 19 Haziran 2013 – 30 Aralık 2016

GARCH Fiti	AR(1)	ω	α_1	β_1	ν	LB(12)	LM(10)
BIMAS GARCH(1,1)	-	0.212	0.073**	0.853***	5.871***	0.580	0.645
HALKB GARCH(1,1)	-	0.807	0.065	0.784***	5.057***	0.860	0.757
KCHOL GARCH(1,1)	-	0.081*	0.039**	0.933***	6.597***	0.204	0.752
SAHOL GARCH(1,1)	-	0.340	0.047**	0.856***	9.265***	0.669	0.613
THYAO AR(1)-GARCH(1,1)	-0.0735**	0.733**	0.089**	0.758***	5.163***	0.234	0.643

***, ** and * sırasıyla %1, %5 ve %10 düzeylerindeki anlamlılığı ifade etmektedirler. GARCH kalıntıları Student-*t* dağılımı ile modellenmiş olup ν dağılımın serbestlik derecesidir.

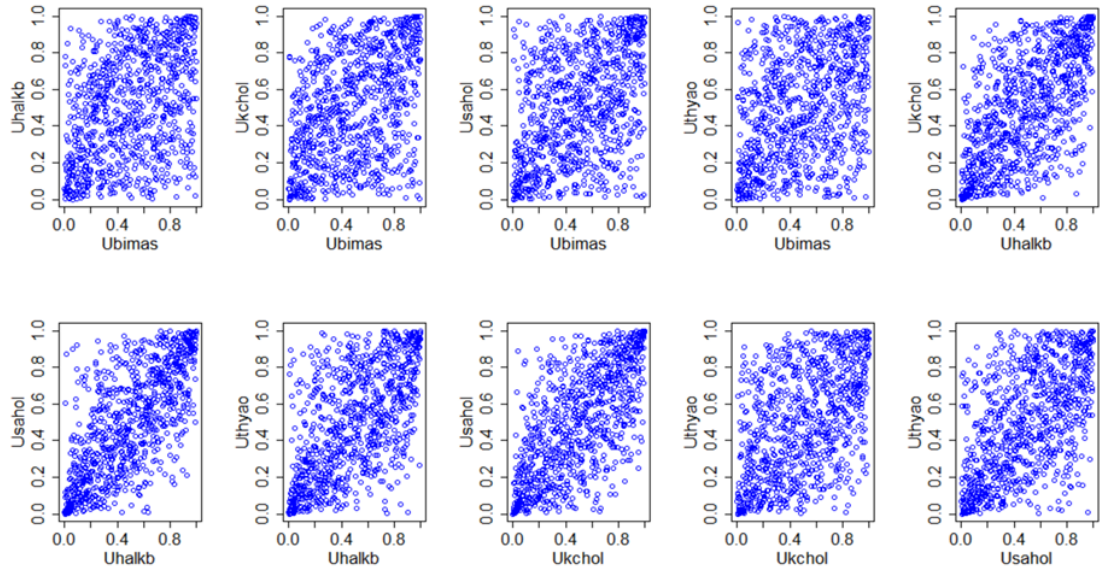
Bu araştırma, hisse getirilerinin tahmini ve örneklem dışı dönem olarak belirlenen Ocak 2017 - 28 Aralık 2018 dönemi için günlük optimal portföy dağılımlarının belirlenmesi amacıyla bir gün ileriye doğru yuvarlanan pencereler yaklaşımını

kullanmıştır. Bu nedenle, yukarıda açıklamalarına yer verilen aykırı gözlem filtreleme yöntemi her bir dönem için ayrı ayrı uygulanmış olup Tablo 7.2’de yer alan serilere özgü koşullu ortalama ve/veya varyans denklemlerinin (p,q) sıraları sabit tutularak denklem parametreleri 503 dönem (pencere) için ayrı ayrı hesaplanmıştır.

7.1.4 Psödo-Uniform Değişkenler

Bir sonraki aşamada, getiri serileri arasındaki bağımlılık yapısının modellenebilmesi amacıyla serilere özgü psödo-uniform değişkenlerin elde edilmesi gereklidir. Psödo-uniform değişkenler, marjinal dağılımların standartlaştırılarak uniform dağılımlara dönüştürülmesi yolu ile elde edilen değişkenlerdir. Bir diğer ifadeyle, getiri serilerine ait (örneğin: $r^{(HALKB)}, r^{(BIMAS)}$) orijinal olasılık dağılım vektörlerinin (HALKB ve BIMAS hisse çifti için), $[0,1]^2$ kapalı aralığında değerler alan yeni bir ($U^{(halkb)}, U^{(bimas)}$) olasılık dağılım vektörüne dönüştürülmesi sonucu elde edilen değişkenleri ifade ederler (Mai ve Scherer, 2014: 3).

Araştırma konusu getiri serilerinin ilk dönemi (pencere) için elde edilen psödo-uniform değişkenlerin serpilme diyagramlarına Şekil 7.2’de yer verilmiştir.



Şekil 7.2: Psödo-Uniform Değişkenlerin Serpilme Diyagramları

Şekil 7.2 incelendiğinde, değişkenlerin farklı düzeylerde alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip oldukları gözlemlenebilmektedir. Ancak bu tür gözlemler yanıltıcı

olabileceğinden Genest ve Nešlehová (2014) ile Kojadinovic (2017)'in çok değişkenli “Radyal Simetri Testi” uygulanmış ve radyal asimetri varlığı ortaya konmuştur. Özellikle, bu araştırma kapsamında 503 dönemin mevcut olduğu ve her bir dönem için kopula parametrelerinin yeniden hesaplandığı göz önünde bulundurulsa, hisseler arası simetrik bağımlılık yapısı son derece güçlü bir varsayım olacaktır.

7.1.5 Çok Boyutlu Bağımlılık Yapısının Modellenmesi

Her bir getiri serisine özgü psödo-uniform değişkenlerin elde edilmesini takiben, getiriler arası beş boyutlu bağımlılık yapısının modellenebilmesi amacıyla Normal, Student-t ve eşit ağırlıklı Clayton-Gumbel Karışım kopula türleri seçilmiş ve parametreleri Psödo En Çok Olabilirlik (PMLE) yöntemi ile tahmin edilmiştir. Bu amaçla, R yazılımının (R Core Team, 2019) “copula” paketi (Hofert vd., 2020) kullanılmıştır.

Her bir döneme özgü modellenen bağımlılık yapısı ve hesaplanan kopula parametreleri aracılığıyla her bir hisse ve kopula türü için bir gün sonrası 1000'er adet getiri serileri elde edilmiştir. Şöyle ki: $u_{d,i,s}$ belirlenen i dönemi ($i = 1, 2, \dots, 503$) için parametreleri hesaplanmış beş boyutlu Normal, Student t ya da Karışım kopulalarından simülasyonlarla elde edilen psödo-uniform değişkenler olsun. Değişken tanımında yer alan d her bir getiriyi ($d = 1, \dots, 5$), s ise simülasyon numarasını ($s = 1, 2, \dots, 1000$) ifade etmektedirler. Her bir hissenin bir gün sonrası getiri serilerinin elde edilmesinden portföy dağılımlarının belirlenmesine dek izlenen aşamalar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- $u_{d,i,s}$ psödo-üniform değişkenlerinin kopula simülasyonları ile elde edilmesini takiben her bir dönem ve seriye ait standardize kalıntılar, hisse dağılım fonksiyonlarının ters olasılık dönüşümleri ile elde edilmiştir:

$$z_{d,i,s} = F_d^{-1}(u_{d,i,s}).$$
- Her bir seriye özgü belirlenen koşullu ortalama ve/veya varyans denklemleri ile birlikte 1000 adet günlük hisse getiri değerleri hesaplanmıştır: $\hat{r}_{d,i,s} = \hat{\mu}_{d,i,s} + z_{d,i,s} \sigma_{d,i,s}.$

- Yukarıda yer alan adımlar örneklem dışı dönemin her bir günü için ($i = 1, 2, \dots, 503$) tekrar edilerek kopula-GARCH türüne (Normal kopula-GARCH, Student t kopula-GARCH ve Karışım kopula-GARCH) özgü tüm örneklem dışı dönem için günlük hisse getiri değerleri elde edilmiştir.

7.1.6 Portföy Dağılımlarının Belirlenmesi

Getiriler arası çok boyutlu bağımlılık yapılarının modellenmesi ve günlük getirilerin elde edilmesini takiben getiriler, bu tezin beşinci bölümünde açıklanan Global Minimum Varyans (GMV), Teğet Portföyü (TP) ve Global Minimum CVaR (GMCVaR) portföy optimizasyonları aracılığı ile optimal portföy dağılımlarının belirlenmesi amacıyla kullanılmışlardır. Bir önceki bölümde yer alan aşamaları takiben:

- Her bir hisseye özgü günlük 1000 adet getirinin $[\hat{r}_{d,i,s} = \{\hat{r}_{d,i,1}, \dots, \hat{r}_{d,i,1000}\}]$, GMV, Teğet Portföyü ve GMCVaR optimizasyonlarında kullanılmasıyla örneklem dışı dönemin her bir günü için ($i = 1, 2, \dots, 503$) kopula türü ve optimizasyon yöntemine özgü optimal portföy ağırlıkları belirlenmiştir.
- Optimizasyon problemlerinin varsayım ve kısıtları ise işlem maliyetlerinin ve açığa satışın mevcut olmaması ile başlangıç tutarın tamamının yatırımda kullanılmasıdır. Ayrıca, Teğet portföyündeki r_f risksiz faiz oranının sıfıra eşit olduğu varsayılmıştır.
- Kopula-GARCH türü ve optimizasyon yöntemine özgü günlük optimal portföy ağırlıklarının yuvarlanan pencereler yöntemiyle tüm örneklem dışı dönem için belirlenmesini takiben bu ağırlıklar günlük gerçekleşen hisse getirilerine uygulanmış ve böylece her bir yönteme özgü örneklem dışı dönem günlük portföy getirileri hesaplanmıştır.

Üç farklı kopula türüne dayalı GARCH modeli ile üç farklı optimizasyon yönteminin kombinasyonlarıyla oluşturulan portföylere ek olarak, tarihsel (geçmiş) verilerin veya GARCH simülasyonlarından elde edilen getirilerin yine bu üç

optimizasyon yönteminde kullanılmasıyla örneklem dışı dönemin her bir günü için optimal portföy ağırlıkları belirlenmiştir. Tarihsel verilerin kullanılması durumunda bu ağırlıkların belirlenmesinde izlenen yol aşağıdaki gibidir.

- Tek değişkenli koşullu ortalama ve/veya varyans denklemlerinin ve kopula parametrelerinin ayrı ayrı hesaplandığı her bir i döneminin getirileri, TP, GMV ve GMCVaR portföylerinin elde edilmesini sağlayan optimizasyon problemlerinin verisi olarak kullanılarak bir gün sonrası optimal portföy dağılımları elde edilmiştir.
- Kopula-GARCH modellerinden elde edilen getiriler yerine örneklem içi gerçek hisse getirilerinin kullanılmasını içeren bu yöntem, örneklem dışı dönemin her bir günü için ($i = 1, 2, \dots, 503$) yuvarlanan pencereler yöntemiyle tekrar edilerek tarihsel verilere dayalı günlük optimal portföy ağırlıkları elde edilmiştir.
- Belirlenen günlük optimal portföy ağırlıklarının örneklem dışı gerçekleşen getirilere uygulanmasıyla tarihsel verilere dayalı portföy getirileri elde edilmiş ve bu portföyler optimizasyon yöntemine bağlı olarak GMV_{tv} , $GMCVaR_{tv}$ ve TP_{tv} olarak adlandırılmışlardır.

GARCH simülasyonlarının kullanılması durumunda ise:

- Her bir dönem ve seriye özgü belirlenen koşullu ortalama ve/veya varyans denklemlerinden 1000 adet günlük hisse getiri değerleri simülasyonlarla elde edilmiş ve bu getiriler TP, GMV ve GMCVaR optimizasyonlarında kullanılarak bir gün sonrası optimal portföy ağırlıkları elde edilmiştir.
- GARCH simülasyonlarından elde edilen verilerin kullanıldığı ilk aşama dışında, sonraki aşamalar yukarıda yer alan tarihsel verilere dayalı portföylerin elde edilme aşamaları ile aynı şekilde uygulanarak tüm örneklem dışı dönemi kapsayan günlük optimal portföy dağılımları ile optimizasyon yöntemine bağlı olarak GMV_{garch} , $GMCVaR_{garch}$ ve TP_{garch} şeklinde adlandırılan portföyler oluşturulmuştur.

Şu ana dek açıklamalarına yer verilen portföylere ek olarak, birçok çalışmada çok daha gelişmiş yöntemlere nazaran son derece iyi bir performans gösterdiği öne sürülen eşit ağırlıklı portföyün (EAP) diğer portföylerle karşılaştırma yapılabilmesi amacıyla bu araştırma kapsamına alınmasına karar verilmiştir.

7.1.7 Ampirik Bulgular

Örnekleme dışı Ocak 2017 – 28 Aralık 2018 dönemi dahilinde bulunan 503 gün için farklı yöntemler ile oluşturulan portföylerin performansı; varyans, Riske Maruz Değer (RMD) ve Beklenen Kayıp (BK) portföy risk ölçütleri ile birlikte alınan her bir birim riske karşın elde edilen getiriyi göz önünde bulunduran riske göre uyarlanmış (düzeltilmiş) Sharpe ve Sharpe-Omega oranları kullanılarak değerlendirilmiştir. Bu ölçütlere ek olarak, her bir portföyün dönem sonu toplam portföy değeri (W_{DS}) aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$W_{DS} = W * \prod_{i=1}^{503} (1 + r_i) \quad (7.4)$$

Eşitlik 7.4'te yer alan W dönem başı başlangıç (baz) portföy değeri olup $W = 100$ olarak kabul edilmiştir. r_i terimi ise bir önceki bölümde detaylarına yer verilen ve farklı yöntemlerle oluşturulan portföylerin hesaplanan getirilerini ifade etmektedir.

Portföy performanslarının değerlendirilmesi amacıyla hesaplanan ölçütlere Tablo 7.3'te yer verilmiştir. Bu ölçütler arasından “D Oranı” (“D Ratio”), frekanslarını da dikkate alarak portföy toplam kayıp ve getirilerinin birbirine oranını vermektedir (Bacon, 2008). Dolayısıyla bu oranın küçük olması istenen durumdur.

Tablo 7.3 incelendiğinde, en küçük varyansa sahip tarihsel verilere dayalı Global Minimum Varyans portföyünün dışında diğer tüm risk ölçütlerinde (RMD ve BK) en küçük değerlere sahip portföyün, Student t kopula-GARCH modelinin getiri tahminlerini kullanan Global Minimum CVaR ($GMCVaR_{st}$) portföyü olduğu görülmektedir. Varyans istatistiğinin, portföy ortalama getirisinden sağa ve sola simetrik sapmaların bir ölçüsü olduğu göz önünde bulundurulduğunda portföy getiri dağılımının simetrik olmadığı durumlarda istatistik portföy ortalamasının altına (sola) doğru olan sapmaların doğru bir ölçüsü olmayacaktır.

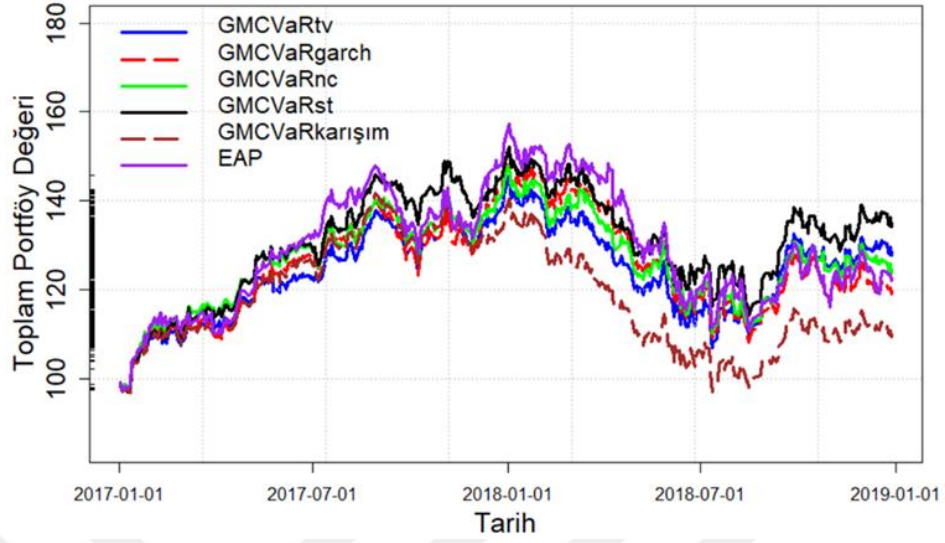
Tablo 7.3: Portföy Performans Ölçütleri

Yöntem	Portföy Ortalama	Port. Varyans	RMD5%	BK5%	Sharpe Oranı	Sharpe-Omega Oranı	Doranı	Toplam Portföy Değeri
EAP	0.0494	1.9775	2.4721	3.2428	0.0351	0.0963	0.8390	121.96
GMVtv	0.0639	1.3744	1.9577	2.5573	0.0545	0.1532	0.7726	133.19
GMCVaRtv	0.0553	1.3753	1.9223	2.5591	0.0471	0.1325	0.8385	127.58
TPtv	0.0636	2.2782	2.3800	3.4356	0.0421	0.1178	0.8035	130.02
GMVgarch	0.0458	1.5623	2.0628	2.7977	0.0367	0.1001	0.8564	121.08
GMCVaRgarch	0.0423	1.5812	2.1397	2.8684	0.0336	0.0913	0.8362	118.88
TPgarch	-0.0011	2.8372	2.8477	4.1352	-0.0006	-0.0017	0.9474	92.57
GMVnc	0.0652	1.4098	1.9568	2.5597	0.0549	0.1561	0.8020	133.95
GMCVaRnc	0.0495	1.4546	1.9840	2.7408	0.0411	0.1161	0.8308	123.68
TPnc	0.0704	3.2951	2.5263	4.0771	0.0388	0.1165	0.9137	131.11
GMVst	0.0623	1.3998	1.9524	2.5213	0.0527	0.1490	0.8199	132.07
GMCVaRst	0.0655	1.4282	1.9034	2.5003	0.0548	0.1549	0.8093	134.13
TPst	0.1682	3.6940	2.7296	4.3275	0.0875	0.2854	0.6873	212.26
GMVkarışım	0.0364	1.3851	1.9421	2.5290	0.0310	0.0849	0.8964	116.01
GMCVaRkarışım	0.0245	1.4063	1.9396	2.5733	0.0207	0.0560	0.8850	109.20
TPkarışım	0.1860	3.1548	2.8132	3.9176	0.1047	0.3324	0.6706	235.34

Not: Her bir durum için en iyi ölçütlere sahip (Doranı ve risk ölçütleri arasından en küçük değere; portföy ortalama, son değer ve bir birim riske karşı elde edilen getiri ölçütleri arasından en büyük değere sahip) modeller kalın karakterlerle gösterilmiştir. EAP eşit ağırlıklı portföyü ifade etmektedir. Her bir optimizasyon yöntemi sonrasında (GMV, GMCVaR ve TP) yer alan -tv, -garch, -nc, -st ve -karışım ekleri optimizasyon yönteminde kullanılan verilerin elde edilme yöntemini gösteren ve sırasıyla tarihi veriler, GARCH simülasyonu, Normal kopula-GARCH, Student t kopula-GARCH ve Karışım kopula-GARCH simülasyonlarını ifade etmektedirler.

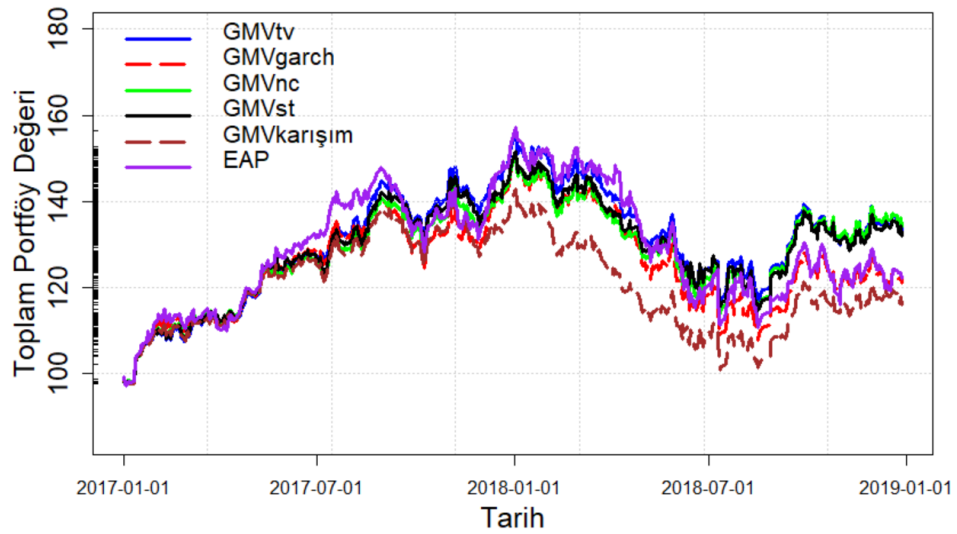
Bunun yanında, portföy performansları alınan her bir birim riske karşın elde edilen getiriyi de dikkate alan ölçütlere göre değerlendirildiğinde, eşit ağırlıklı Clayton-Gumbel Karışım kopula-GARCH modelinin tahminlerini kullanan Teğet portföyünün ($TP_{karışım}$) en iyi değerli oranlara sahip olduğu görülmektedir. Sharpe, Sharpe-Omega ve Doranı ölçütleri incelendiğinde, $TP_{karışım}$ portföyünün hemen ardından ikinci en iyi oranlara sahip olan portföyün Student t kopula-GARCH modelinden elde edilen getirileri kullanan Teğet portföyünün (TP_{st}) olduğu görülebilmektedir.

Portföyler, Eşitlik 7.4 ile tanımlanan dönem sonu toplam portföy değerlerine (W_{DS}) göre sıralandığında yine $TP_{karışım}$ portföyünün ilk, TP_{st} portföyünün ise ikinci sırada yer aldıkları görülebilmektedir. Şekil 7.3, 7.4 ve 7.5'te model bazlı toplam portföy değerlerinin zamanla değişimi gösterilmiştir.

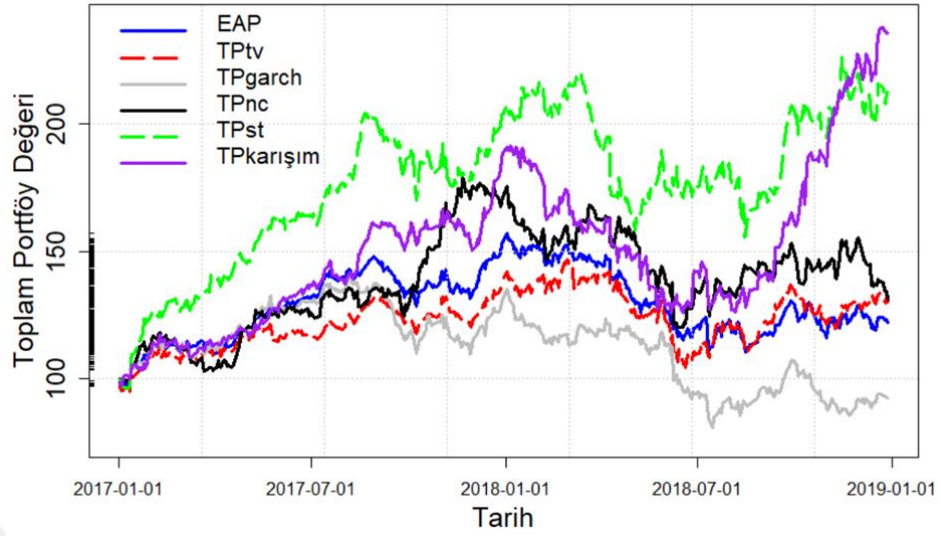


Şekil 7.3: GMCVaR Toplam Portföy Değerlerinin Zamanla Değişimi

Şekil 7.3 ve 7.4 incelendiğinde GMV ve GMCVaR portföylerinin belirli dönemler içerisinde benzer hareketler göstererek birbirlerine çok yakın bir aralıkta değer aldıkları görülebilmektedir. Her iki şekilde de 2018 yılının başı ve sonrasında belirgin bir şekilde diğerlerinden ayrılarak dönem sonu en düşük toplam değere sahip $GMCVaR_{karışım}$ ve $GMV_{karışım}$ portföyleri olmuştur. Bununla birlikte, GARCH simülasyonlarından elde edilen verileri kullanan TP_{garch} , $GMCVaR_{garch}$ ve GMV_{garch} portföyleri, her üç optimizasyon yönteminde de eşit ağırlıklı portföyün dönem sonu değerinin altında bir değere ulaşabilmişlerdir.



Şekil 7.4: GMV Toplam Portföy Değerlerinin Zamanla Değişimi



Şekil 7.5: TP Toplam Portföy Değerlerinin Zamanla Değişimi

Şekil 7.5 incelendiğinde, diğer iki şekilden farklı olarak 90-150 bandının üzerine doğru bir hareketin mevcut olduğu ve özellikle iki portföyün (TP_{st} ve $TP_{karışım}$) örneklem dışı dönemin büyük bir kısmında 150 üzerinde toplam portföy değerine sahip oldukları görülebilmektedir. Eşit ağırlıklı, tarihi verilere dayalı veya GARCH gibi diğer yöntemlerle oluşturulan Teğet portföylerle karşılaştırıldığında, kopula-GARCH modellerinden elde edilen verileri kullanan Teğet portföylerin daha yüksek toplam portföy değerlerine ulaşabildikleri görülmektedir.

Özetle, seriler arası doğrusal olmayan bağımlılık yapılarını da modelleyebilen kopula fonksiyonlarıyla oluşturulan kopula-GARCH modellerinin, RMD ve BK gibi portföy kuyruk riskini minimize eden optimizasyon yöntemleri ile alınan her bir birim risk başına elde edilen getiriyi maksimize eden Teğet portföyü gibi yöntemlerin performansına olumlu katkı sağladığı söylenebilmektedir. Özellikle, Normal kopula ile karşılaştırıldığında, alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip Student t ve Karışım kopulalarına dayanan GARCH modellerinin kullanılan değerlendirme ölçütleri bazında çok daha iyi bir performans sergiledikleri görülmektedir.

7.2 İkinci Uygulama

Bir önceki bölümde Eliptik ve Karışım kopulalara dayalı kopula-GARCH modellerinden elde edilen getiriler portföy dağılımı probleminde kullanılarak farklı yöntemlerle oluşturulan portföylerin performansları karşılaştırılmıştır. Bununla birlikte, çok boyutlu bağımlılık yapılarının modellenemediği Eliptik kopulalardan biri olan Normal kopula, radyal simetri ve sıfır kuyruk bağımlılığı katsayısına, Student t kopula ise simetrik kuyruk bağımlılığı ve tek bir ν serbestlik derecesi parametresine sahip olmaları nedeniyle çok boyutlu ve asimetrik kuyruk bağımlılığı yapılarının modellenmesinde yeterli görülmemişlerdir. Benzer bir şekilde, Arşimedyen kopulalar da çok değişkenli ve karmaşık bağımlılık yapılarını tek bir parametre ile modellemeye çalıştıkları için eleştirilmişlerdir. Bu ve benzeri eleştiriler, araştırmacıların asimetrik ve karmaşık çok boyutlu bağımlılık yapılarını sadece iki-boyutlu kopula fonksiyonlarıyla çok daha esnek bir şekilde modelleyebilen Düzenli Asma kopula fonksiyonları geliştirmelerini sağlamıştır.

Bu tez çalışmasının ikinci uygulama bölümünde, özellikle değişken sayısının 10 ve üzeri olması durumunda çok daha esnek olduğu ve karmaşık çok boyutlu bağımlılık yapılarını daha iyi modelleyebildiği öne sürülen Düzenli Asma (R-vine) kopulalar ile koşullu varyansın modellenmesini sağlayan GARCH süreçlerinin kombinasyonu ile oluşturulan Düzenli Asma kopula-GARCH modeli ile 12 adet hissenin getiri tahminlerinin elde edilmesi amaçlanmıştır. Bir sonraki aşamada ise elde edilen bu getirilerle oluşturulan eşit ağırlıklı portföyün RMD ve ES gibi kuyruk riski ölçütleri tahmin edilmiş ve bu ölçütlerin gerçekleşen getirilerle oluşturulan eşit ağırlıklı portföyün iyi birer RMD ve ES tahmincisi olup olmadığının araştırılması amaçlanmıştır. Bunun yanında, Eliptik kopula fonksiyonlarına dayalı GARCH modelleri ile literatürde yaygın kullanım alanı bulan Varyans-Kovaryans yöntemi ve DCC-GARCH süreçlerinden de eşit ağırlıklı portföy RMD ve BK tahminlerinin elde edilmesi ve Düzenli Asma kopula-GARCH modeli ile karşılaştırılması hedeflenmiştir.

7.2.1 Veri Seti

Uygulama konusunun ikinci bölümü için Tablo 7.4'te hisse kodu ve firma bilgileri verilen on iki adet hissenin Haziran 2010 – Aralık 2018 tarihleri arasındaki toplam 2160 adet günlük getiri değerleri elde edilmiş ve Haziran 2010 – Ocak 2012 dönemini kapsayan ilk dört yüz adedi serilerin koşullu varyans denklemlerinin belirlenmesi amacı ile kullanılmıştır.

Tablo 7.4: Hisse Kodu, Firma ve Sektör Bilgileri

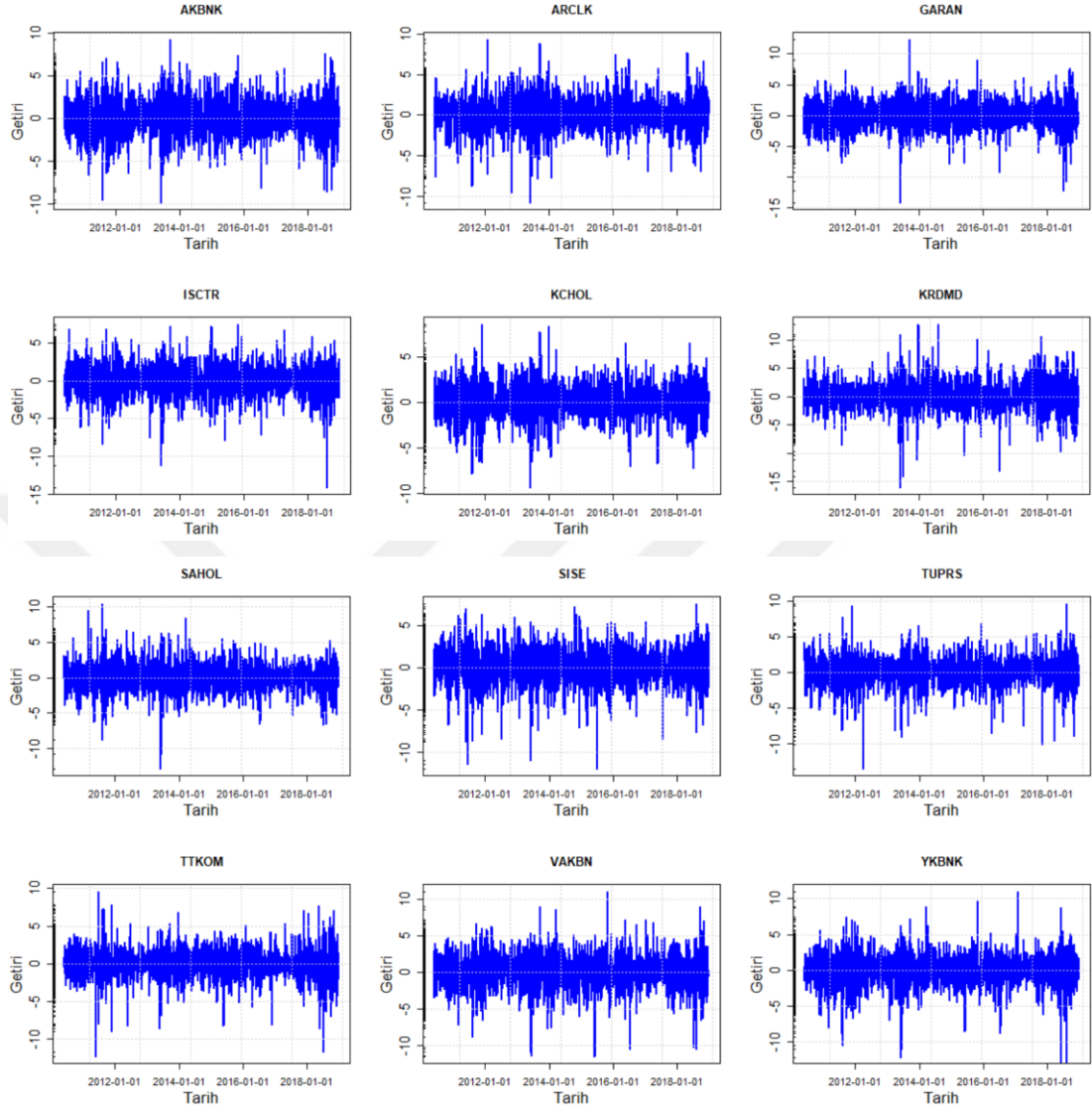
Hisse Kodu	Firma	Sektör	Hisse Kodu	Firma	Sektör
AKBNK	Akbank	Finans	SAHOL	Sabancı Holding	Holding
ARCLK	Arçelik	Endüstri	SISE	Şişe Cam	Endüstri
GARAN	Garanti Bankası	Finans	TUPRS	Tüpraş	Enerji
ISCTR	İş Bankası	Finans	TTKOM	Türk Telekom	Telekom
KCHOL	Koç Holding	Holding	VAKBN	Vakıflar Bankası	Finans
KRDMD	Kardemir	Endüstri	YKBNK	Yapi ve Kredi Bankası	Finans

Borsa İstanbul A.Ş.'den temin edilen hisse fiyat bilgileri (P_t) kullanılarak günlük hisse getirileri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$$r_t = \ln(P_t / P_{t-1}) \cdot 100 \quad (7.5)$$

Her bir hisseye ait günlük getirilerin Haziran 2010 – Aralık 2018 tarihleri arasındaki değişimi Şekil 7.6'da verilmiş olup getirilerin koşullu varyans denklemlerinin belirlenmesi amacı ile kullanılan ve Haziran 2010 – Ocak 2012 dönemini kapsayan ilk dört yüz adedine ait betimsel istatistiklerine Tablo 7.5'te yer verilmiştir.

Her bir getiri serisine ait ilk örneklem içi dönemin betimsel istatistiklerinin yer aldığı Tablo 7.5 incelendiğinde getirilerin standart normal dağılıma göre yatık ve sivri basıklığa sahip oldukları görülebilmektedir. Jarque-Bera test sonuçları da serilerin normal dağılmadığını göstermektedir. Bununla birlikte, medyan değerlerinin çoğu sıfır olan (SISE haricinde) getirilerin ortalama değerlerinin sıfırdan farklı olup olmadığı çift yönlü t-testi ile araştırılmış ve %95 güvenirlilik düzeyinde seri ortalamalarının sıfırdan farklı olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.



Şekil 7.6: Hisse Getirilerinin Zamanla Değişimi

Normal dağılıma uygunluğun incelenmesinden sonra serilerde birim kök mevcudiyeti Arttırılmış Dickey-Fuller (ADF) (Dickey ve Fuller, 1979) testi ile araştırılmış ve serilerin durağan olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Aynı zamanda, serilerde otokorelasyon varlığını araştıran Ljung-Box (Ljung ve Box, 1978) testinin sonucuna göre de koşullu varyans denklemlerinin belirlendiği ilk dönem dahilinde serilerde otokorelasyon gözlemlenmemektedir. Son aşamada, uygulanan ARCH LM testine göre ise serilerde ARCH etkileri mevcuttur.

Tablo 7.5: Betimsel İstatistikler / Haziran 2010 – Ocak 2012

Hisse	Ortalama	Medyan	Min	Max	Standart Sapma	Yatıklık	Basıklık	JB (p değeri)	ADF (p değeri)	LB(10)	LM(7)
AKBNK	-0.052	0.000	-9.53	7.00	2.258	-0.356	4.197	0.000	0.01	0.554	0.000
ARCLK	-0.010	0.000	-8.73	5.70	1.981	-0.397	4.188	0.000	0.01	0.085	0.032
GARAN	-0.023	0.000	-7.76	7.43	2.268	-0.285	3.328	0.024	0.01	0.298	0.013
ISCTR	-0.079	0.000	-8.36	6.90	2.138	-0.327	4.332	0.000	0.01	0.967	0.000
KCHOL	0.020	0.000	-7.82	8.59	2.111	-0.175	3.969	0.000	0.01	0.062	0.030
KRDMD	0.062	0.000	-8.59	7.10	2.059	-0.043	4.382	0.000	0.01	0.476	0.045
SAHOL	-0.033	0.000	-8.73	10.46	2.170	0.262	5.847	0.000	0.01	0.399	0.000
SISE	0.122	0.120	-11.47	6.96	2.362	-0.607	5.213	0.000	0.01	0.604	0.019
TUPRS	0.091	0.000	-8.19	9.31	2.207	-0.030	4.252	0.000	0.01	0.136	0.000
TTKOM	0.097	0.000	-12.28	9.62	2.041	-0.288	8.829	0.000	0.01	0.514	0.003
VAKBN	-0.067	0.000	-8.90	6.67	2.207	-0.346	3.822	0.000	0.01	0.570	0.000
YKBNK	-0.089	0.000	-10.40	7.47	2.402	-0.527	4.783	0.000	0.01	0.485	0.000

Not: Ljung-Box ve ARCH LM testlerinin p değerleri raporlanmıştır.

7.2.2 Tek Değişkenli GARCH Marjinalleri

Bu araştırma kapsamında tüm örneklem döneminin ilk model uygulama penceresi ile birlikte takibi diğer pencerelere de uygulanan ARCH LM test sonuçları serilerde ARCH etkilerinin mevcudiyetini göstermiştir. Öncelikle, ilk örneklem içi dönemde (pencerede) her bir seriye ait en uygun koşullu varyans denkleminin belirlenebilmesi için en temel modellerden biri olan ve Engle, Robert F. (1982) tarafından finans literatürüne kazandırılan Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (ARCH) modeli ve sonrasında da Bollerslev (1986) tarafından koşullu varyansın kendi geçmiş değerlerine de bağlı olmasını sağlayarak genişletilen Genelleştirilmiş Otoregresif Koşullu Değişen Varyans (GARCH) modellerinin uygunluğu araştırılmıştır. Her bir getiri serisi için farklı p ve q gecikme uzunlukları göz önünde bulundurularak model katsayıları anlamlı, durağanlık ve parametre kısıtları sağlanan en küçük Bayes Bilgi Kriteri'ne (BIC) sahip GARCH(p,q) modelleri belirlenmiştir. Bu amaçla R yazılımının (R Core Team, 2019) “rugarch” paketi kullanılmıştır.

Ayrıca, araştırmanın ilk bölümündeki uygulamaya benzer bir şekilde bir aykırı gözlem filtreleme yöntemi uygulanmıştır. Bu yöntem ile araştırma kapsamında yer alan tüm serilerin öncelikle koşullu varyans denklemleri belirlenmiş ve sonrasında da $|r_t| > 5\hat{\sigma}_t$ (beş koşullu standart sapma) aralığının dışında yer alan gözlem değerleri $5\hat{\sigma}_t \cdot \text{işaret}(r_t)$ ile değiştirilerek elde edilen serilere ait koşullu varyans modellerinin uygunluğu yeniden değerlendirilmiştir. Özetle, Tablo 7.6'da verilen koşullu varyans

modellerinin, serilerin getiri ve volatilité tahminlerinin yapılması amacıyla kullanılmalarına karar verilmiştir.

Tablo 7.6: Tek Değişkenli GARCH Marjinaleri / Haziran 2010 – Ocak 2012

Hisse GARCH(p,q)	ω	α_1	α_2	β_1	v	LB(5)*	LB(10)*	LM(5)*	LM(7)*
AKBNK GARCH(1,1)-norm	0.614 (0.152)	0.130 (0.007)	-	0.749 (0.000)	-	0.953	0.837	0.781	0.821
ARCLK GARCH(1,1)-norm	0.491 (0.041)	0.124 (0.005)	-	0.753 (0.000)	-	0.130	0.069	0.328	0.363
GARAN GARCH(1,1)-norm	1.022 (0.202)	0.081 (0.06)	-	0.72 (0.000)	-	0.917	0.356	0.981	0.376
ISCTR GARCH(1,1)-std	0.683 (0.10)	0.097 (0.03)	-	0.759 (0.000)	6.8 (0.002)	0.988	0.990	0.918	0.793
KCHOL GARCH(1,1)-norm	0.448 (0.105)	0.146 (0.008)	-	0.758 (0.000)	-	0.430	0.298	0.984	0.930
KRDMD GARCH(1,1)-std	0.917 (0.101)	0.102 (0.058)	-	0.679 (0.000)	7.38 (0.004)	0.749	0.528	0.851	0.950
SAHOL GARCH(1,1)-std	0.827 (0.085)	0.163 (0.048)	-	0.662 (0.000)	6.40 (0.001)	0.962	0.538	0.968	0.981
SISE GARCH(1,1)-std	0.86 (0.127)	0.191 (0.016)	-	0.661 (0.000)	8.37 (0.016)	0.938	0.644	0.684	0.863
TUPRS GARCH(1,1)-norm	0.627 (0.03)	0.161 (0.003)	-	0.712 (0.000)	-	0.498	0.819	0.955	0.985
TTKOM GARCH(1,1)-std	1.07 (0.06)	0.148 (0.026)	-	0.577 (0.001)	5.37 (0.000)	0.703	0.567	0.272	0.435
VAKBN GARCH(2,1)-norm	0.892 (0.05)	0 (1)	0.163 (0.12)	0.652 (0.000)	-	0.853	0.612	0.497	0.707
YKBNK GARCH(1,1)-std	0.177 (0.356)	0.087 (0.073)	-	0.891 (0.000)	6.19 (0.003)	0.436	0.290	0.278	0.441

Not: Ljung-Box (LB) (1978) ve ARCH LM (LM) (Engle, 1984) istatistiklerine ait (5, 7 veya 10 gecikme için) p değerleridir. v, Student-t dağılımlı kalıntı terimleri için hesaplanan serbestlik derecesidir. Parantez içlerinde model parametreleri için hesaplanan p değerlerine yer verilmiştir. Model son ekleri kalıntı dağılımlarını ifade etmektedirler (-norm: Normal dağılım ve -std: Student-t dağılım).

Tablo 7.6'daki Haziran 2010 - Ocak 2012 dönemi, 400 adet gözlemden oluşan ve getirilerin kopula-GARCH ile ilk defa modellenip bir gün sonrası için 10 000'er adet getiri simülasyonlarının elde edildiği ilk dönemdir. İlk dönemi izleyen dönemlerin koşullu varyans denklem parametreleri, Tablo 7.6'daki p, q sıraları ile kalıntı dağılım türleri sabit tutularak bir gün ileriye yuvarlanan pencereler yöntemiyle her bir dönem için yeniden hesaplanmıştır. İlk döneme benzer bir şekilde, her bir döneme özgü aykırı gözlem filtreleme işlemi uygulanmıştır.

Bu çalışmada, yukarıda tanımlanan koşullu varyans denklemlerine ek olarak, birçok çalışmada temel model olarak uygulanan ARMA(1,1)-GARCH(p,q) koşullu ortalama ve varyans süreci de araştırma kapsamına dahil edilmiştir. Bu nedenle, her bir seriye özgü koşullu ortalamalar ARMA(1,1) ile modellenirken koşullu varyansların p, q

sıraları ile kalıntı dağılım türleri Tablo 7.6'daki gibi sabit tutulmuştur. Bir diğer ifadeyle, ikinci bir marjinal modelleme yöntemi olarak her bir getiri serisi ARMA(1,1)-GARCH(1,1) ile de (sadece VAKBN ARMA(1,1)-GARCH(2,1)-norm ile) modellenmiştir. Bu yöntemde de aykırı gözlemler serilere özgü koşullu ortalama ve varyans denklemleriyle filtrelenmiş $(r_t = 5\hat{\sigma}_t \cdot i\mathit{ş}aret(r_t))$ ve denklem parametreleri bir gün ileriye yuvarlanan pencereler yöntemiyle her bir döneme özgü olarak yeniden hesaplanmıştır.

Böylece, getiri serileri Tablo 7.6'da detaylarına yer verilen ilk örneklem içi döneme özgü GARCH(p,q) süreçleri ile birlikte ARMA(1,1)-GARCH(p,q) süreçleri ile de modellenmiştir. Kopula fonksiyonları ile çok değişkenli bağımlılığın modellenmesini takiben bu iki marjinal modelleme yöntemiyle oluşturulan kopula-(ARMA)-GARCH modellerinin eşit ağırlıklı portföy kuyruk riskini tahmin performansları karşılaştırılmıştır.

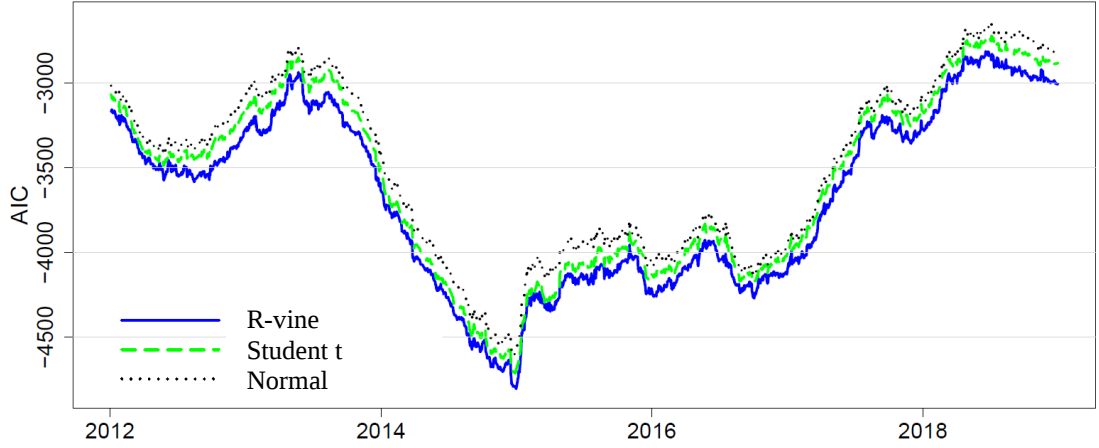
7.2.3 Düzenli Asma Kopula Yapısı

Bir sonraki aşamada, tek değişkenli GARCH marjinaleri ile filtrelenen getiri serileri arasındaki bağımlılık yapısının modellenebilmesi amacıyla serilere özgü psödo-uniform değişkenler elde edilmiş ve Kolmogorov-Smirnov testi ile uniform dağılıma uygunlukları test edilmiştir. Uniform dağılıma uygun oldukları görülen psödo-uniform değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı öncelikle, on iki boyutlu Eliptik kopulalar, sonrasında ise Düzenli Asma (R-vine) kopula ile modellenmiştir. Bu yaklaşım, bir gün ileriye yuvarlanan pencereler (rolling windows) yöntemi kullanılarak tüm örneklem dışı veri dönemini kapsayacak şekilde uygulanmıştır. Normal ve Student-t kopula fonksiyonlarının parametreleri psödo en çok olabilirlik yöntemiyle (PMLE) R yazılımının (R Core Team, 2019) “copula” paketi (Hofert vd., 2020) kullanılarak hesaplanmıştır.

R-vine kopula yapısı, Dißmann vd. (2013)'nin ampirik mutlak Kendall tau kriterine dayanan maksimum spanning tree (MST) algoritmasını kullanan yukarıdan aşağıya ardışık seçim stratejisiyle belirlenmiştir. Bu algoritma, her bir ağaç seviyesinde mutlak Kendall tau değerlerinin toplamını maksimize eden düğümleri seçmektedir. Bir diğer

ifadeyle, algoritma en güçlü bağımlılığa sahip değişken çiftlerini seçerek ardışık bir şekilde ağaç yapısını oluşturmaktadır. Koşullu ve koşulsuz ikili kopula (iki değişkenli kopula) türlerinin seçimi AIC kriterine göre yapılmış ve parametreleri en çok olabilirlik (MLE) yöntemi ile hesaplanmıştır. Bu amaçla, R yazılımının (R Core Team, 2019) “VineCopula” paketi (Nagler vd., 2019) kullanılmıştır.

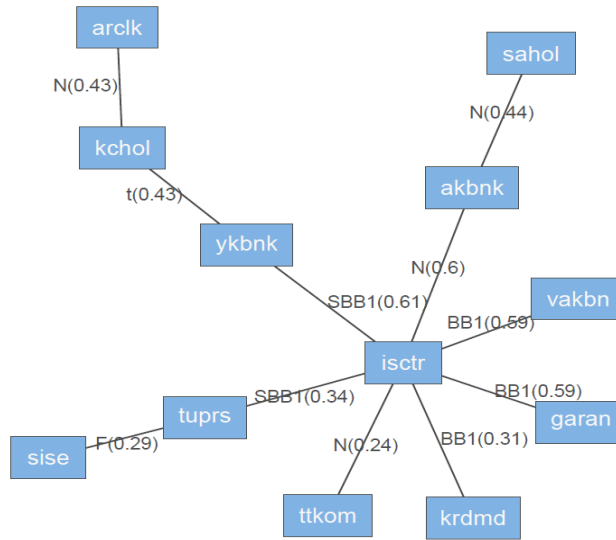
Önceki paragraflarda bahsedildiği gibi, her bir döneme (pencereye) özgü hesaplanan tek değişkenli GARCH denklemleri ile filtrelenen getiri serilerinden elde edilen psödo-uniform değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı öncelikle, on iki boyutlu Normal ve Student t kopulalar, sonrasında ise R-vine kopula ile modellenmiştir. Bu yaklaşım, yuvarlanan pencereler (rolling windows) yöntemi kullanılarak tüm veri dönemini kapsayacak şekilde uygulanmıştır. Bir diğer anlatımla, Haziran 2010-Ocak 2012 dönemini oluşturan getiri serileri ilk dönemi ya da pencereyi oluştururken, ikinci pencere dönemi ise birinci dönemin ilk getirisinin çıkarılması (birinci dönemin ikinci getirisi) ile başlayan ve dört yüz birinci gözlem ile biten dönemi kapsamaktadır (her bir seriye ait toplam 2160 adet gözlemden 2 ile 401’inci gözlemlerini içeren). Üçüncü pencere dönemi, toplam 2160 adet gözlemden 3 ile 402’incisini, dördüncü pencere dönemi 4 ile 403’üncüsünü olmak üzere toplam 1760 adet dönem için seriler arası bağımlılık yapısı modellenmiştir. Her bir dönemde koşullu varyans model parametreleri yeniden hesaplanmış ve seriler arası bağımlılık yapısı döneme özgü veriler kullanılarak yeniden belirlenmiştir. Bunun sonucunda, her bir dönem ve kopula türü için elde edilen model AIC değerlerine Şekil 7.7’de yer verilmiştir. Şekil 7.7’ye göre R-vine kopula her dönemde elde ettiği en küçük AIC değeri ile değişkenler arası bağımlılık yapısını en iyi modelleyebilen kopula türü olarak belirlenmiştir. Şekil 7.8’de ise ilk döneme özgü GARCH marjinalleri (Tablo 7.6’da yer alan) ile filtrelenen getiri serilerine ait Düzenli Asma kopula yapısının ilk ağacına yer verilmiştir.



Şekil 7.7: Normal, Student-t ve R-vine Kopulaların Dönemsel Bazlı AIC Değerleri

Şekil 7.8 incelendiğinde Ağaç 1'in her bir düğümü içerisinde hisse kodlarına yer verilmiş olup iki düğümü birleştiren köşeler üzerinde de modellenmesi yapılan iki boyutlu kopula türü ile hesaplanan Kendall tau değerlerine yer verilmiştir.

Ağaç 1 (T1)



Şekil 7.8: Haziran 2010 – Ocak 2012 Dönemi R-vine Kopula Yapısının Birinci Ağaç Seviyesi (T1)

Not: N: Normal kopula, t: Student t kopula, F: Frank kopula, BB1: BB1 kopula ve SBB1: Yaşam (survival) BB1 kopulayı ifade etmektedirler.

Şekil 7.8'den, finans sektöründe faaliyet gösteren firma hisseleri arasındaki Kendall tau değerlerinin yüksek ve bu hisselerin ağacın merkezinde birleşmiş olduğu

görülmektedir. Ayrıca, ARCLK, KCHOL, YKBNK ve SAHOL, AKBNK gibi birbiriyle yakından ilişkili firma hisselerinin ağacın kenarlarında direk bağlantılar ile kümелendikleri gözlemlenmektedir.

7.2.4 Portföy Getirileri ile RMD ve Beklenen Kaybın Hesaplanması

Hisseler arası bağımlılık yapısının modellenmesini takiben her bir dönem ve her bir hisse için belirlenen koşullu varyans denklemleri (tek değişkenli marjinaler) ile hisseler arası bağımlılık yapısını modelleyen çok boyutlu kopulalar (Normal, Student t ve R-vine) kullanılarak oluşturulan kopula-GARCH modellerinden günlük hisse ve eşit ağırlıklı portföy getirileri izleyen şekilde elde edilmiştir.

1. Her bir hisse için modellemeye konu kopula türünden $i = 10\,000$ adet psödo-uniform değişkenin $(u_{d,t,i})$ simülasyonu yapılmıştır. Burada; $d: 1, 2, \dots, 12$ portföydeki hisse adedini, $t: T + 1$ bir gün sonrası tahmin horizonunu, T : örneklem içi gözlemlerin elde edildiği son günü ifade etmektedirler.

2. Her bir seriye ait standardize kalıntılar, hisse dağılım fonksiyonlarının ters olasılık dönüşümleri ile elde edilmişlerdir: $\eta_{d,t,i} = F_d^{-1}(u_{d,t,i})$.

3. Her bir seriye özgü belirlenen koşullu ortalama ve/veya varyans denklemleri ile birlikte $10\,000$ adet günlük hisse getirileri elde edilmiştir: $\hat{r}_{d,t,i} = \hat{\mu}_{d,t,i} + \eta_{d,t,i} \sigma_{d,t,i}$.

4. Elde edilen hisse getiri serilerinden eşit ağırlıklı portföy getirileri hesaplanmıştır: $\hat{R}_{t,i} = \frac{1}{12} \sum_{d=1}^{12} \hat{r}_{d,t,i}$.

Bir sonraki aşamada ise örneklem dışı dönemin her bir günü $t = 1, \dots, 1760$) için hesaplanan $10\,000$ adet eşit ağırlıklı portföy getiri dağılımları kullanılarak $(1 - \alpha)$ güvenilirlik düzeyinde günlük portföy RMD ve BK değerleri hesaplanmıştır.

5. $RMD_t^\alpha(\hat{R}_t) = F_{R_t}^{-1}(\alpha)$, eşitlikte yer alan F_{R_t} portföy getirilerinin t günündeki dağılımını ifade etmekle birlikte $F_{R_t}^{-1}(\alpha)$ ise getiri dağılımının α –yüzdeliğini ifade etmektedirler. Eşit ağırlıklı portföy $BK_t^\alpha = ortalama(\hat{R}_{t,i} < RMD_t^\alpha)$.

Normal, Student t ve R-vine kopula-(ARMA(1,1))-GARCH modelleri için yukarıdaki aşamalar tekrarlanarak örneklem dışı dönemin her bir gününü kapsayan günlük portföy RMD ve BK tahminleri elde edilmiştir. Ayrıca, literatürde yaygın kullanım alanı bulan Varyans-Kovaryans yöntemi ve DCC-GARCH süreçlerinden de eşit ağırlıklı portföy RMD ve BK tahminleri hesaplanmıştır.

Varyans-Kovaryans yönteminde, ortalaması μ ve standart sapması σ olan eşit ağırlıklı portföy getirilerinin normal dağıldığı varsayılarak $(1 - \alpha)$ güvenilirlilik düzeyinde günlük portföy RMD ve BK değerleri Eşitlik 7.6 ve 7.7'deki gibi hesaplanmıştır.

$$RMD_t^\alpha = \mu + \sigma q_\alpha \quad (7.6)$$

$$BK_t^\alpha = \mu - \sigma \left(\frac{d(q_\alpha)}{\alpha} \right) \quad (7.7)$$

Eşitlik 7.6 ve 7.7'de yer alan q_α standart normal dağılımın α –yüzdeliğini, Eşitlik 7.7'deki d ise standart normal yoğunluğu ifade etmektedirler. DCC-GARCH modelinin bir gün sonrası portföy RMD ve BK tahminleri izleyen eşitliklerle elde edilmiştir.

$$RMD_t^\alpha = \mu_t + q_\alpha \sqrt{\mathbf{w}H\mathbf{w}^T} \quad (7.8)$$

$$BK_t^\alpha = \mu_t - \sqrt{\mathbf{w}H\mathbf{w}^T} \left(\frac{d(q_\alpha)}{\alpha} \right) \quad (7.9)$$

Eşitlik 7.8 ve 7.9'da yer alan μ_t portföy koşullu ortalamasını, $\mathbf{w}$ portföy ağırlık vektörünü, q_α standart normal dağılımın α –yüzdeliğini ve d standart normal yoğunluğu ifade etmektedirler. Kopula-GARCH modellerindekine benzer bir şekilde, Varyans-Kovaryans ve DCC-GARCH modellerinin günlük portföy RMD ve BK değerleri bir gün ileriye yuvarlanan pencereler yöntemiyle elde edilmiştir.

7.2.5 Bulgular

Bir önceki bölümde detaylarına yer verilen farklı yöntemlerin günlük eşit ağırlıklı portföy RMD ve BK tahmin performanslarının değerlendirilmesi amacıyla, üç farklı düzey (%1, %2.5, %5) için geriye dönük test prosedürleri uygulanmıştır. Bunlardan, RMD için uygulanan Kupiec (1995)'in Koşulsuz Kapsama testi (LR_{uc}) ve Christoffersen (1998)'in Koşullu Kapsama testinin (LR_{cc}) sonuçlarına Tablo 7.7'de yer verilmiştir.

Tablo 7.7: RMD Geriye Dönük Test Sonuçları

Yöntem	RMD%5			RMD%2.5			RMD%1		
	Gerç. Aşma	LR _{uc} İstat.	LR _{cc} İstat.	Gerç. Aşma	LR _{uc} İstat.	LR _{cc} İstat.	Gerç. Aşma	LR _{uc} İstat.	LR _{cc} İstat.
Var-Kovar	83	0.31	4.01	54	2.18	4.76	35	13.50*	13.62*
DCC-GARCH	77	1.51	1.63	44	0	0.63	28	5.26	5.8
DCC-ARMA(1,1)-GARCH	78	1.24	2.95	47	0.21	0.60	27	4.36	4.98
Normal kopula-GARCH	86	0.05	0.23	48	0.36	0.7	26	3.53	4.24
Normal kopula-ARMA(1,1)-GARCH	87	0.01	0.72	48	0.36	2.08	27	4.36	4.98
t-kopula-GARCH	87	0.01	0.72	47	0.21	0.6	24	2.11	3.04
t-kopula-ARMA(1,1)-GARCH	85	0.11	0.33	49	0.56	2.13	24	2.11	3.04
R-vine kopula-GARCH	89	0.01	1.41	49	0.56	2.13	24	2.11	3.04
R-vine kopula-ARMA(1,1)-GARCH	89	0.01	0.56	46	0.09	0.56	24	2.11	3.04

Not: *H₀ hipotezi reddedilmiştir. Beklenen Aşma, belirlenen α düzeyi için portföy RMD tahminini aşması beklenen ($R_t < RMD_\alpha$) toplam getiri adedini ifade etmektedir. %5, %2.5 ve %1 düzeyleri için sırası ile beklenen aşma 88, 44 ve 17'dir. Gerç. Aşma ise gerçek getirilerin (örneklem dışı gözlemlerin) belirlenen α düzeyi için RMD değerini aşan toplam adedidir.

Tablo 7.7'ye göre, sadece parametrik Var-Kovar modelinin sıfır hipotezi %1 düzeyinde reddedilmiş olup, diğer modellerin tamamının performansları LR_{uc} ve LR_{cc} testlerine göre yeterli bulunmuştur. Bununla birlikte, beklenen ve gerçekleşen aşma değerleri arasındaki farkı daha küçük olan bir modelin daha iyi bir RMD tahmincisi olduğu söylenebilmektedir. Bu durumda, farklı kopula fonksiyonlarının kombinasyonlarıyla oluşturulan kopula-(ARMA)-GARCH modelleri $\alpha = \%5$ düzeyinde Var-Kovar, DCC-GARCH ve DCC-ARMA-GARCH modellerinden daha iyi performans göstermişlerdir. Modeller $\alpha = \%1$ düzeyi için değerlendirildiğinde, R-vine ve Student t kopulalar ile oluşturulan kopula-(ARMA)-GARCH modelleri diğerlerine nazaran daha iyi bir performans ortaya koymuşlardır. %5 ve %1 düzeylerinden farklı olarak %2.5 düzeyinde ise birbirine eşit beklenen ve gerçekleşen

aşma değerlerine sahip olan DCC-GARCH modelinin en iyi performansı gösterdiği söylenebilir.

Modellerin günlük portföy Beklenen Kayıp tahmin performanslarının değerlendirilmesi amacıyla, McNeil ve Frey (2000)' in Aşan Kalıntılar ve Embrechts vd. (2005)'nin geriye dönük BK testleri (V^{BK}) uygulanmış ve Tablo 7.8'de sonuçlarına yer verilmiştir.

Tablo 7.8: BK Geriye Dönük Test Sonuçları

Yöntem	BK5%		BK2.5%		BK1%	
	Aşan Kal.	V^{BK}	Aşan Kal.	V^{BK}	Aşan Kal.	V^{BK}
Var-Kovar	0.00	0.52	0.00	0.82	0.00	1.19
DCC-GARCH	0.00	0.36	0.00	0.61	0.02	0.96
DCC-ARMA(1,1)-GARCH	0.00	0.37	0.00	0.62	0.01	1.03
Normal kopula-GARCH	0.01	0.33	0.01	0.60	0.02	1.01
Normal kopula-ARMA(1,1)-GARCH	0.01	0.33	0.01	0.63	0.01	1.07
t-kopula-GARCH	0.03	0.28	0.02	0.54	0.04	0.92
t-kopula-ARMA(1,1)-GARCH	0.02	0.30	0.02	0.53	0.03	0.94
R-vine kopula-GARCH	0.07	0.23*	0.04	0.46*	0.07	0.78*
R-vine kopula-ARMA(1,1)-GARCH	0.07	0.23	0.02	0.51	0.05	0.82

Not: H_0 hipotezi reddedilemeyen modellerin p değerleri kalın rakamlarla gösterilmiştir.

* V^{BK} değeri en küçük modeli göstermektedir (Embrechts vd., 2005).

Tablo 7.8'e göre, Aşan Kalıntılar testinde R-vine kopula-GARCH modeli hariç, diğer tüm modeller %5 ve %2.5 düzeylerinde reddedilmiştir. Bununla birlikte, R-vine Kopula-GARCH modeli, her üç düzeyde de en yüksek p değerine ve Embrechts vd. (2005)'nin BK testinde de en küçük V^{BK} değerlerine sahip olarak bir gün sonrası portföy beklenen kayıp tahmin performansı en iyi model olarak belirlenmiştir.

SONUÇ

Bu tez çalışmasının temelinde, özellikle finansal çalkantı dönemlerinde finansal varlıkların öngörülenin çok üzerinde gerçekleşen birlikte hareket etme eğilimleri ve volatilité değeri nereden ile portföylerin maruz kaldığı risklerin büyüklüğüne dair gözlemler yer almaktadır. Bu gözlemler ve çeşitli araştırma bulguları, finansal piyasa verilerinin biçimlendirilen gerçekler olarak adlandırılan tipik özellikleri ile bu verilerin farklı piyasa durumları altında doğrusal olmayan birlikte hareket etme şekillerini de dikkate alan bir yöntemin gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu ve benzeri nedenlerle, tek değişkenli finansal getiri serilerinin zamanla değişen ve kümelenen volatilité gibi özelliklerini dikkate alarak finans literatüründe son derece yaygın bir kullanım alanı bulan GARCH süreçleri ile birlikte serilerin doğrusal olmayan ve dağılımların kuyruk bölgelerindeki artan birlikte hareketini de modelleyebilen kopula fonksiyonlarının kombinasyonu ile oluşturulan kopula-GARCH modeli araştırma yöntemi olarak belirlenmiştir.

Öncelikle, en temel ve yaygın kullanım alanı bulan Normal ve Student t kopula ile birlikte bir Clayton ve Gumbel karışımı olan Karışım kopula fonksiyonlarıyla oluşturulan kopula-GARCH modellerinden BİST30 Endeksi'nde işlem gören beş adet hissenin getiri tahminleri elde edilmiştir. Hisseler arası bağımlılık yapısı dikkate alınarak elde edilen bu koşullu getiriler, en düşük riske sahip etkin portföylerin elde edilmesini sağlayan Global Minimum Varyans ve Global Minimum CVaR portföyleri ile alınan bir birim risk başına elde edilen getiriyi maksimize eden Teğet portföyünün belirlenmesinde kullanılmışlardır. Normal, Student t ve Karışım kopula-GARCH modellerinin getirilerini kullanarak oluşturulan portföylerin örneklem dışı performansı, eşit ağırlıklı portföy, tarihsel getirilerin kullanılmasıyla ve hisseler arası bağımlılık yapısını dikkate almayan tek değişkenli GARCH simülasyonlarından elde edilen getirilerin kullanılmasıyla oluşturulan portföyler gibi daha klasik yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Araştırma dönemi ve uygulanan performans ölçütleri bazında, getiriler arası doğrusal olmayan çok değişkenli bağımlılık yapılarını da dikkate alan farklı kopula fonksiyonları ile oluşturulan kopula-GARCH modellerinin portföy performansına olumlu katkı sağladığı söylenebilmektedir. Özellikle, Normal kopula

ile karşılaştırıldığında, alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip Student t ve Karışım kopula-GARCH modellerinin çok daha iyi bir performans sergiledikleri görülmüştür.

Birinci uygulamanın yukarıda bahsedilen bulgularına ek olarak araştırma kapsamında, işlem maliyetlerinin mevcut olmama varsayımı ile hisse portföy dağılımlarının negatif olamayacağı bir diğer ifadeyle açığa satışın mevcut olmadığı varsayımları mevcuttur. Bu nedenle, bir sonraki aşamada kopula-GARCH modellerinin açığa satış ve işlem maliyetlerinin (dolayısıyla işlem sıklığını da değerlendiren) mevcudiyeti durumlarındaki performansını değerlendiren farklı araştırmalar ortaya konabilir.

Bu tez kapsamında, portföy dağılım problemine olumlu etkisi gözlemlenen kopula-GARCH modelinin, çok daha esnek ve karmaşık bağımlılık yapılarını sadece iki değişkenli kopula fonksiyonlarını kullanarak modelleyebilen Düzenli Asma kopulaların kombinasyonu ile oluşturulması ve oluşturulan modelin Riske Maruz Değer ve Beklenen Kayıp gibi portföy kuyruk riski tahmin performansının değerlendirilmesini içeren ikinci bir araştırmaya yer verilmiştir. Kopula fonksiyonlarının risk yönetimi alanındaki uygulamalarına bir örnek teşkil eden bu araştırmada, BİST30 Endeksi'nde işlem gören 12 adet hissenin getiri serileri Düzenli Asma kopula-GARCH ile modellenerek örneklem dışı dönemin her bir günü için hisse getirileri elde edilmiştir. Bir sonraki aşamada, elde edilen getiriler ile eşit ağırlıklı bir portföy oluşturulmuş ve örneklem dışı dönemin tamamını kapsayan eşit ağırlıklı portföy RMD ve BK tahminleri elde edilmiştir. Bu tahminler, Varyans-Kovaryans ve DCC-GARCH gibi son derece popüler yöntemlerin ve Eliptik kopulalara dayalı kopula-GARCH modellerinin RMD ve BK tahminleri ile karşılaştırılmıştır. Model bazlı portföy RMD ve BK tahmin performansının yeterliğinin değerlendirilmesi ve modeller arası karşılaştırma yapılabilmesi amacıyla çeşitli RMD ve BK Geriye Dönük test prosedürleri uygulanmıştır. Üç farklı düzey için (%5, %2.5 ve %1) uygulanan RMD Geriye Dönük test sonuçlarına göre Varyans-Kovaryans modelinin haricinde (%1 düzeyi için) diğer tüm modellerin RMD tahmin performansları yeterli bulunmuştur. Ancak, portföy getiri dağılımı üzerinde sadece bir noktayı ifade eden RMD, bu noktanın altında kalan portföy kayıplarını dikkate almamaktadır. Bununla

birlikte, uygulanan RMD Geriye Dönük testleri de sadece RMD değerini aşan portföy kayıplarının adediyle ilgilenmekte kayıpların büyüklüğünü dikkate almamaktadırlar. Diğer yandan, portföy BK değeri RMD değerini aşan portföy kayıplarının büyüklüğünü de dikkate alan uyumlu bir risk ölçütüdür. Üç farklı düzey için (%5, %2.5 ve %1) uygulanan BK Geriye Dönük test sonuçlarına göre ise sadece Düzenli Asma kopula-GARCH modeli üç düzeyin tamamında Aşan Kalıntılar testinde reddedilmeyerek diğer modellere nazaran daha yüksek p değerlerine ulaşmış ve Embrechts vd. (2005)'nin BK testinde de ilk sırada yer almıştır. BK Geriye Dönük testlerde Düzenli Asma kopula-GARCH modelinden sonra en iyi ikinci performansı Student t kopula-GARCH modeli göstermiştir.

Özetle, bu çalışmada farklı kopula fonksiyonları ile GARCH süreçlerinin kombinasyonlarıyla oluşturulan kopula-GARCH modellerinin BİST30 Endeks kapsamında listelenen ve belirli hisseleri içeren ilki portföy dağılımının ikincisi ise portföy riskinin belirlenmesi olmak üzere iki farklı alandaki uygulamalarına yer verilmiştir. Her iki alandaki uygulamada da olumlu sonuçlar elde edilmiş ve diğer yöntemlerle karşılaştırıldığında en iyi ilk iki performansı gösteren modeller, alt ve üst kuyruk bağımlılığına sahip kopulalara dayalı Düzenli Asma kopula-GARCH, Student t kopula-GARCH veya Karışım kopula-GARCH modellerinden biri olmuştur.

Bu araştırmanın şu ana dek açıklanan birinci ve ikinci uygulama bulguları, akademik araştırmacılarla birlikte alım-satım davranışları ve portföy yatırım kararlarıyla piyasa arz ve talebini oluşturan finans profesyonellerinin portföy risk tahminleri veya portföy dağılım problemlerinin çözümü esnasında çok değişkenli normal dağılım ile seriler arası doğrusal bağımlılık varsayımlarının dışına çıkabilen ve ortak dağılımların uç kuyruk bölgelerinde gözlemlenen finansal varlıklar arası artan birlikte hareketi de (bağımlılığı) modelleyebilen yöntemleri kullanma gerekliliğini ortaya koymaktadır.

Ayrıca, her iki alanda da (portföy dağılımı ve risk yönetimi) son derece iyi performans gösteren kopula-GARCH modellerinin performansı, yine BİST30 Endeksi'nde listelenen hisse getirilerinin farklı marjinal modelleme yöntemleri (uzun hafızalı veya Markov süreçleri gibi) ve/veya farklı kopula fonksiyonlarının ("Uç

Değer Kopulalar (Extreme Value Copulas)” gibi) kullanılmasıyla elde edilen modellerin performansı ile karşılaştırılabileceği gibi arzu edilmesi durumunda farklı dönem ve yöntemlere özgü genel bir performans değerlendirmesini içeren araştırmalar da yapılabilecektir.



KAYNAKÇA

- Aas, Kjersti: “Pair-Copula Constructions for Financial Applications: A Review”, **Econometrics**, Cilt:4, Sayı:4, 2016.
- Aas, K., Czado, C, Frigessi, A. ve Bakken, H.: “Pair-copula constructions of multiple dependence”, **Insurance: Mathematics & Economics**, Cilt:44, Sayı:2, 2009, ss. 182-198.
- Acerbi, C. ve Tasche, D. “On the coherence of expected shortfall”, **Journal of Banking & Finance**, Cilt:26, Sayı:7, 2002, ss. 1487-1503.
- Akaike, H.: **Information Theory and an Extension of the Maximum Likelihood Principle**, Ed. E. Parzen, K. Tanabe, G. Kitagawa, New York, NY, Springer, 1998, ss. 199-213.
- Alhan, A.: “Bağımsızlık Kapulasını İçeren Kapula Aileleri, Kapula Tahmin Yöntemleri Ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında Sektörler Arası Bağımlılık Yapısı”, **Doktora Tezi**, Gazi Üniversitesi, Ankara, Haziran 2008, (Çevrimiçi) <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/giris.jsp>.
- Allen, D., McAleer, M. ve Singh, A.: “Risk Measurement and Risk Modelling Using Applications of Vine Copulas”, **Sustainability**, Cilt:9, Sayı:10, 2017.
- Ang, A. ve Chen, J.: “Asymmetric correlations of equity portfolios”, **Journal of Financial Economics**, Cilt:63, Sayı:3, 2002, ss. 443-494.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M. ve Heath, D.: “Coherent Measures of Risk”, **Mathematical Finance**, Cilt:9, Sayı:3, 1999, ss. 203-228.
- Autchariyapanitkul, K., Chanaim, S. ve Sriboonchitta, S.: “Portfolio optimization of stock returns in high-dimensions: A copula-based approach”, **Thai Journal of Mathematics**, 2014, ss.11-23.
- Bacon, C.R.: **Practical Portfolio Performance Measurement and Attribution**, John Wiley & Sons, 2008.
- Bauwens, L., Laurent, S. ve Rombouts, J.V.K.: “Multivariate GARCH models: a survey”, **Journal of Applied Econometrics**, Cilt:21, Sayı:1, 2006, ss. 79-109.
- Bedford, T. ve Cooke, R.M.: “Probability Density Decomposition for Conditionally Dependent Random Variables Modeled by Vines”, **Annals of Mathematics and Artificial Intelligence**, Cilt:32, Sayı:1, 2001, ss. 245-268.

- Bedford, T. ve Cooke, R.M.: "Vines: A New Graphical Model for Dependent Random Variables", **The Annals of Statistics**, Cilt:30, Sayı:4, 2002, ss. 1031-1068.
- Beichelt, F.: **Applied Probability and Stochastic Processes**, 2. Baskı, Boca Raton, CRC Press, 2016.
- Black, F: "Studies of stock market volatility changes", **1976 Proceedings of the American Statistical Association Business and Economic Statistics Section**, 1976.
- Bildirici, M.: "The chaotic behavior among the oil prices, expectation of investors and stock returns: TAR-TR-GARCH copula and TAR-TR-TGARCH copula", **Petroleum Science**, 16, 2019, ss. 217-228. doi: 10.1007/s12182-018-0281-7.
- Bollerslev, T.: "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", **Journal of Econometrics**, Cilt:31, 1986, ss. 307-327.
- Bollerslev, T.: "Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized Arch Model", **The Review of Economics and Statistics**, Cilt:72, Sayı:3, 1990, ss. 498-505.
- Bollerslev, T., Engle, R.F. ve Wooldridge, J.M.: "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances", **Journal of Political Economy**, Cilt:96, Sayı:1, 1988, ss. 116-131.
- Bollerslev, T., Russell, J.R. ve Watson, M.W.: **Volatility and Time Series Econometrics: Essays in Honor of Robert F. Engle**, New York, OXFORD University Press, 2010.
- Box, G.E.P. ve Jenkins, G.M: **Time Series Analysis: Forecasting and Control**, , Holden-Day, San Francisco, 1970.
- Brockwell, P.J. ve Davis, R.A.: **Introduction to Time Series and Forecasting**, 3. Baskı, Springer, 2016.
- Brooks, C.: **Introductory Econometrics for Finance**, 2. Baskı, Cambridge University Press, 2008.
- Campbell, L.A. ve MacKinlay, A.: **The Econometrics of Financial Markets**, 2. Baskı, Princeton,NJ, Princeton University Press, 1997.
- Carnero, M.A., Pena, D. ve Ruiz, E.: "Estimating GARCH volatility in the presence of outliers", **Economics Letters**, Cilt:114, Sayı:1, 2012, ss. 86-90.

- Chang, C.-L. ve McAleer, M.: "The correct regularity condition and interpretation of asymmetry in EGARCH", **Economics Letters**, Cilt:161, 2017, ss. 52-55.
- Charles, A. ve Darne, O.: "Outliers and GARCH models in financial data", **Economics Letters**, Cilt:86, Sayı:3, 2005, ss.347-352.
- Chen, J.M.: **Postmodern Portfolio Theory: Navigating Abnormal Markets and Investor Behavior**, USA, Palgrave Macmillan, 2016.
- Cherubini, U., Luciano, E. ve Vecchiato, W.: **Copula Methods in Finance**, New York, John Wiley, 2004.
- Christodoulakis, G.A. ve Satchell, S.E.: "Correlated ARCH (CorrARCH): Modelling the time-varying conditional correlation between financial asset returns", **European Journal of Operational Research**, Cilt:139, Sayı:2, 2002, ss. 351-370.
- Christoffersen, P.F.: "Evaluating Interval Forecasts", **International Economic Review**, Cilt:39, Sayı:4, 1998, ss. 841-862.
- Cochrane, D. ve Orcutt, G.H.: "Application of Least Squares Regression to Relationships Containing Auto-Correlated Error Terms", **Journal of the American Statistical Association**, Cilt:44, Sayı:245, 1949, ss. 32-61.
- Cooke, R.M., Joe, H. ve Aas, K.: **Vines Arise**, Eds. D. Kurowicka, H. Joe, Singapore, World Scientific, 2011, ss. 37-71.
- Czado, C.: **Analyzing Dependent Data with Vine Copulas: A Practical Guide With R**, Eds. Peter Digggle, Ursula Gather, Scott Zeger, Switzerland, Springer, 2019.
- Czado, C., Jeske, S. ve Hofmann, M.: "Selection strategies for regular vine copulae", **Journal de la Société Française de Statistique**, Cilt:154, Sayı:1, 2013, ss. 174-191.
- Dajčman, S.: "Dependence between Croatian and European stock markets – A copula GARCH Approach", **Zb. rad. Ekon. fak. Rij.**, Cilt:31, Sayı:2, 2013, ss. 209-232.
- Deheuvels, P.: "La fonction de dépendance empirique et ses propriétés. Un test non paramétrique d'indépendance", **Académie Royale de Belgique – Bulletin de la Classe des Sciences**, Cilt:65, Sayı:1, 1979, ss. 274-292.

- Deheuvels, P.: “A non parametric test for independence”, **Publications de l’Institut de Statistique de l’Université de Paris**, Cilt:26, 1981, ss. 29-50.
- Dickey, D.A. ve Fuller, W.A.: “Distribution of the Estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root”, **Journal of the American Statistical Association**, Cilt:74, Sayı:366a, 1979, ss. 427-431.
- Ding, Z., Granger, C.W.J. ve Engle, R.F.: “A long memory property of stock market returns and a new model”, **Journal of Empirical Finance**, Cilt:1, Sayı:1, 1993, ss. 83-106.
- Dißmann, J., Brechmann, E.C., Czado, C. ve Kurowicka, D.: “Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns”, **Computational Statistics & Data Analysis**, Cilt:59, 2013, ss. 52-69.
- Dobrow, R.P.: **Introduction to Stochastic Processes with R**, New Jersey, John Wiley & Sons, 2016.
- Embrechts, P., Kaufmann, R. ve Patie, P.: “Strategic long-term financial risks: Single risk factors”, **Computational Optimization and Applications**, Cilt:32, Sayı:1-2, 2005, ss. 61-90.
- Embrechts, P., McNeil, A. ve Straumann, D.: “Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls”, **Risk Management: Value at Risk and Beyond**, Ed. M.A.H. Dempster, Cambridge, Cambridge University Press, 2002, ss. 176-223.
- Engle, R.F.: “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation”, **Econometrica**, Cilt:50, Sayı:4, 1982, ss. 987-1007.
- Engle, R.F.: “Wald, likelihood ratio, and Lagrange multiplier tests in econometrics”, **Handbook of Econometrics 2**, Ed. Z. Griliches ve M.D. Intriligator, Amsterdam, North-Holland, 1984, ss. 775–826.
- Engle, R.F.: “Dynamic Conditional Correlation”, **Journal of Business & Economic Statistics**, Cilt:20, Sayı:3, 2002, ss. 339-350.
- Engle, R.F. ve Kroner, K.F.: “Multivariate Simultaneous Generalized ARCH”, **Econometric theory**, Cilt:11, Sayı:1, 1995, ss. 122-150.
- Engle, R.F. ve Sheppard, K.: “Theoretical and Empirical properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH”, **National Bureau of Economic Research Working Paper Series**, 8554, 2001.

- Estrada, J: “Mean-semivariance behavior: Downside risk and capital asset pricing”, **International Review of Economics & Finance**, Cilt:16, Sayı:2, 2007, ss. 169-185.
- Fermanian, J.D. ve Scaillet, O.: “Nonparametric estimation of copulas for time series”, **Journal of Risk**, Cilt:5, Sayı:4, 2003, ss. 25-54.
- Francis, J.C ve Kim, D.: **Modern Portfolio Theory: Foundations, Analysis and New Developments**, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2013.
- Francq, C. ve Zakoian, J.-M.: **GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications**, 2. Baskı, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2019.
- Fréchet, M.: “Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données”, **Ann. Univ. Lyon, Sect. A**, Cilt:9, 1951, ss. 53-77.
- Genest, C., Ghoudi, K. ve Rivest, L.-P.: “A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions”, **Biometrika**, Cilt:82, Sayı:3, 1995, ss. 543-552.
- Genest, C., Quessy, J.-F. ve Rémillard, B.: “Goodness-of-fit Procedures for Copula Models Based on the Probability Integral Transformation”, **Scandinavian Journal of Statistics**, Cilt:33, Sayı:2, 2006, ss. 337-366.
- Genest, C. ve Nešlehová, J.G.: “On tests of radial symmetry for bivariate copulas”, **Statistical Papers**, Cilt:55, Sayı:4, 2014, ss. 1107-1119.
- Genest, C. ve Rivest, L.-P.: “Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas”, **Journal of the American Statistical Association**, Cilt:88, Sayı:423, 1993, ss. 1034-1043.
- Ghalanos, A: **rugarch: Univariate GARCH models**. R package version 1.4-1, 2019.
- Glosten, L.R., Jagannathan, R. ve Runkle, D.E.: “On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks”, **The Journal of Finance**, Cilt:48, Sayı:5, 1993, ss. 1779-1801.
- Grootveld, H. ve Hallerbach, W.: “Variance vs downside risk: Is there really that much difference?”, **European Journal of Operational Research**, Cilt:114, Sayı:2, 1999, ss. 304-319.
- Gruber, L. ve Czado, C. “Sequential Bayesian Model Selection of Regular Vine Copulas”, **Bayesian Analysis**, Cilt:10, Sayı:4, 2015, ss. 937-963.

- Hansen, B. E.: “Autoregressive Conditional Density Estimation”, **International Economic Review**, Cilt:35, Sayı:3, 1994, ss. 705-730.
- Harlow, W.V.: “Asset Allocation in a Downside-Risk Framework”, **Financial Analysts Journal**, Cilt:47, Sayı:5, 1991, ss. 28-40.
- Hobæk Haff, I.: “Comparison of estimators for pair-copula constructions”, **Journal of Multivariate Analysis**, Cilt:110, 2012, ss. 91-105.
- Hobæk Haff, I.: “Parameter estimation for pair-copula constructions”, **Bernoulli**, Cilt:19, Sayı:2, 2013, ss. 462-491.
- Hoeffding, W.: Masstabinvariante Korrelationstheorie. Schriften des Mathematischen Instituts und des Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin 5 Heft 3:179-233 [Reprinted as Scale-invariant correlation theory. The Collected Works of Wassily Hoeffding, (1940), ss. 57-107].
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Maechler, M. ve Yan, J.: **copula: Multivariate Dependence with Copulas**. R package version 1.0-0, 2020.
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Maechler, M. ve Yan, J.: **Elements of Copula Modelling with R**, Springer, 2018.
- Huang, J.-J., Lee, K.-J., Liang, H. ve Lin, W.-F.: “Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method.” **Insurance: Mathematics and Economics**, Cilt:45, 2009, ss. 315-324. doi: 10.1016/j.insmatheco.2009.09.009.
- Hull, J.C.: **Options, Futures, and Other Derivatives**, 8. Baskı, USA, Prentice Hall, 2012.
- Hull, J.C.: **Risk Management and Financial Institutions**, Cilt:5, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, Inc., 2018.
- Hung, N.T.: “Interdependence of oil prices and exchange rates: Evidence from copula-based GARCH model.” **AIMS Energy**, Cilt:7, Sayı:4, 2019, ss.465-482.
- Hyndman, R.J. ve Athanasopoulos, G.: **Forecasting: Principles and Practice**, 2. Baskı, OTexts, Melbourne, Australia, 2018, (Çevrimiçi) OTexts.com/fpp2, Erişim tarihi: 23.09.2019.

- Hyndman, R. J. ve Khandakar, Y.: “Automatic time series forecasting: The forecast package for R”, **Journal of Statistical Software**, Cilt:27, Sayı:3, 2008, ss.1–22. doi: 10.18637/jss.v027.i03.
- Joe, H: “Families of m-Variate Distributions with Given Margins and $m(m-1)/2$ Bivariate Dependence Parameters”, **Lecture Notes-Monograph Series**, Cilt:28, 1996, ss. 120-141.
- Joe, H: **Dependence Modeling with Copulas**, CRC Press, 2015.
- Joe, H. ve Xu, J.J.: "The Estimation Method of Inference Functions for Margins for Multivariate Models", **Technical Report**, 1996, Vancouver: University of British Columbia, Department of Statistics, Cilt:166.
- Jondeau, E. ve Rockinger, M.: “Conditional Dependency of Financial Series: The Copula-GARCH Model.” **FAME Research Paper No:69**, 2002.
- Jondeau, E., Poon, S.H. ve Rockinger, M.: **Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions**. London, Springer, 2007.
- Jondeau, E. ve Rockinger, M.: “The Copula-GARCH Model of conditional dependencies: An international stock market application”, **Journal of International Money and Finance**, Cilt:25, 2006, ss.827-853.
- Jorion, P.: **Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk**, New York, McGraw-Hill, 2000.
- Karan, M.B.: **Yatırım Analizi ve Portföy Yönetimi**, Cilt:4, Ankara, Gazi Kitabevi, 2013.
- Kazemi, H., Schneeweis, T. ve Gupta, R.: “Omega as a Performance Measure”, **CISDM Research Paper**, June, 2003.
- Keating, C. ve Shadwick, W.F.: “A Universal Performance Measure”, **Journal of Performance Measurement**, Cilt:6, Sayı:3, 2002, ss. 59-84.
- Kemaloğlu, S.A. ve Kara, E.K.: “MODELING DEPENDENT FINANCIAL ASSETS BY DYNAMIC COPULA AND PORTFOLIO OPTIMIZATION BASED ON CVAR.” **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1**, Cilt:64, Sayı:1, 2015, ss.1-13.
- Kırkpınar, A.: “A Volatility Spillover Analysis between Bond and Commodity Markets as an Indicator for Global Liquidity Risk”, Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, 2018, (Çevrimiçi) <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/giris.jsp>.

- Kim, J.M., Jung, H. ve Qin, L.: “Linear time-varying regression with a DCC-GARCH model for volatility.” **Appl. Econ**, Cilt:48, Sayı:17, 2016, ss. 1573–1582.
- Kim, J.M. ve Jung, H.: “Linear time-varying regression with Copula–DCC–GARCH models for volatility.” **Economic Letters**, Cilt:145, 2016, ss. 262-265.
- Kim, J.M. ve Jung, H.: “Dependence Structure between Oil Prices, Exchange Rates and Interest Rates.” **The Energy Journal**, Cilt:39, Sayı:2, 2018, ss. 259-280.
- Kirchgässner, G., Wolters, J. ve Hassler, U.: **Introduction to Modern Time Series Analysis**, 2. Baskı, Springer, 2013.
- Klepač, V. ve Hampel, D.: “Assessing Efficiency of D-Vine Copula ARMA-GARCH Method in Value at Risk Forecasting: Evidence from PSE Listed Companies.” **Acta Universitatis Agriculturae et Silviculturae Mendelianae Brunensis**, Cilt:63, Sayı:4, 2015, ss. 1287–1295.
- Kojadinovic, I.: “Some copula inference procedures adapted to the presence of ties”, **Computational Statistics & Data Analysis**, Cilt:112, 2017, ss. 24-41.
- Korkmaz, T. ve Pekkaya, M.: **Excel Uygulamalı Finans Matematiği**, 3. Basım, Bursa, Ekin Basın Yayın Dağıtım, 2012.
- Kresta, A.: “Application of GARCH-Copula Model in Portfolio Optimization”, **Financial Assets and Investing**, Cilt:6, Sayı:2, 2015, ss. 7-20. doi: 10.5817/FAI2015-2-1.
- Kupiec, P.: “Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models”, **The J. of Derivatives**, Cilt:3, Sayı:2, 1995.
- Kurowicka, D.: **Introduction: Dependence Modeling**, Ed. D. Kurowicka, H. Joe, Singapore, World Scientific, 2011, ss. 1-17.
- Kurowicka, D. ve Cooke, R.M.: **Uncertainty Analysis with High Dimensional Dependence Modelling**, Chichester, UK, John Wiley & Sons, 2006.
- Lee, E.J, Klumpe, N., Vlk, J. ve Lee, S.H.: “Modeling Conditional Dependence of Stock Returns Using a Copula-based GARCH Model.” **International Journal of Statistics and Probability**, Cilt:6, Sayı:2, 2017, ss. 32-41.

- Leśkow, J.,
Mokrzycka, J. ve
Krawiec, K.: “Modeling Stock Market Indexes with Copula Functions.” **Financial Internet Quarterly „e-Finanse”**, Cilt:7, Sayı:2, 2011, ss. 1-16.
- Lindsey, J.K.: **Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics**, UK, Cambridge University Press, 2004.
- Liu, G., Cai, X.-J.
ve Hamori, S.: “Modeling the Dependence Structure of Share Prices among Three Chinese City Banks”, **Journal of Risk and Financial Management**, Cilt:11, Sayı:57, 2018, ss. 1-18. doi: 10.3390/jrfm11040057.
- Li, T., Zhong, J. ve
Huang, Z.: “Potential Dependence of Financial Cycles between Emerging and Developed Countries: Based on ARIMA-GARCH Copula Model”, **Emerging Markets Finance and Trade**, 2019, ss. 1-14. doi: 1001080/1540496X.2019.1611559.
- Ljung, G.M. ve
Box, G. E. P.: “On a Measure of Lack of Fit in Time Series Models.” **Biometrika**, Cilt:65, Sayı:2, 1978, ss. 297–303.
- Mai, J.-F. ve
Scherer, M.: **Financial Engineering with Copulas Explained**, UK, Palgrave Macmillan, 2014.
- Malevergne, Y. ve
Sornette, D.: **Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management**, Springer, 2006.
- Markowitz, H.M.: “PORTFOLIO SELECTION*”, **The Journal of Finance**, Cilt:7, Sayı:1, 1952, ss. 77-91.
- Markowitz, H.M.: **Portfolio selection: Efficient diversification of investments**, NY, Wiley, 1959.
- McNeil, A., Frey,
R. ve Embrechts,
P.: **Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools**, Princeton, NJ, Princeton University Press, 2005.
- McNeil, A.J. ve
Frey, R.: “Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach”, **Journal of Empirical Finance**, Cilt:7, Sayı:3-4, 2000, ss. 271-300.
- Michaud, R.O. ve
Michaud R.O.: **Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Optimization and Asset Allocation**, 2. Baskı, New York, Oxford University Press, 2008.
- Micocchi, M. ve
Masala, G.: “Backtesting value-at-risk estimation with non-Gaussian marginal Working Paper”, **8th International Congress on Insurance: Mathematics & Economics**, Rome, 2005.

- Mikosch, T.: “Copulas: Tales and facts”, **Extremes**, Cilt:9, Sayı:1, 2006, ss. 3-20.
- Min, A. ve Czado, C.: “Bayesian Inference for Multivariate Copulas Using Pair-Copula Constructions”, **Journal of Financial Econometrics**, Cilt:8, Sayı:4, 2010, ss. 511-546.
- Morales-Nápoles, O.: **Counting Vines**, Ed. D. Kurowicka ve H. Joe, Singapore, World Scientific Publishing Co., 2011.
- Müller, F.M. ve Righi, M.B.: “Numerical comparison of multivariate models to forecasting risk measures”, **Risk Management**, Cilt:20, Sayı:1, 2018, ss. 29-50.
- Nagler, T., Schepsmeier, U., Stoeber, J., Brechmann, E.C., Graeler, B. ve Erhardt, T.: **VineCopula: Statistical Inference of Vine Copulas**. R package version 2.3.0, 2019.
- Nelsen, R.B.: **An Introduction to Copulas**, 2. Baskı, New York, Springer-Verlag, 2006.
- Nelson, D.B.: “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach”, **Econometrica**, Cilt:59, Sayı:2, 1991, ss. 347-370.
- Nieto, M.R. ve Ruiz, E.: “Frontiers in VaR forecasting and backtesting”, **International Journal of Forecasting**, Cilt:32, Sayı:2, 2016, ss. 475-501.
- Oakes, D.: “A Model for Association in Bivariate Survival Data”, **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)**, Cilt:44, Sayı:3, 1982, ss. 414-422.
- Özden, Ü.H.: “İMKB Bileşik 100 Endeksi Getiri Volatilitesinin Analizi.” **İstanbul Ticaret Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi**, Cilt:7, Sayı:13, 2008, ss. 339-350.
- Palma, Wilfredo: **Time Series Analysis**, Hoboken, New Jersey, John Wiley & Sons, 2016.
- Paolella, M.S.: **Linear Models and Time-Series Analysis: Regression, ANOVA, ARMA and GARCH**, Hoboken, NJ, John Wiley & Sons, 2019.
- Patton, A. J.: “Modeling Asymmetric Exchange Rate Dependence”, **International Economic Review**, Cilt:47, Sayı:2, 2006, ss. 527-556.

- Pfaff, B.: **Financial Risk Modelling and Portfolio Optimization with R**, 2. Baskı, UK, John Wiley & Sons, 2016.
- Pflug, G.Ch.: **Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk**, Ed. Stanislav P. Uryasev, Boston, MA, Springer, 2000, ss. 272-281.
- R Core Team: "R: A language and environment for statistical computing." **R Foundation for Statistical Computing**, Vienna, Austria, 2019. (Çevrimiçi) <http://www.R-project.org/>.
- Roch, O. ve Alegre, A.: "Testing the bivariate distribution of daily equity returns using copulas. An application to the Spanish stock market", **Computational Statistics & Data Analysis**, Cilt:51, 2006, ss. 1312-1329. doi: 10.1016/j.csda.2005.11.007.
- Rockafellar, R.T. ve Uryasev, S.: "Optimization of conditional value-at-risk", **Journal of risk**, Cilt:2, 2000, ss. 21-42.
- Rockinger, M. ve Jondeau, E.: "Conditional dependency of financial series: An application of copulas", **Notes d' Études et de Recherche NER 82**, 2001, Banque de France, Paris, France.
- Rom, B.M. ve Ferguson, K.W.: "Post-Modern Portfolio Theory Comes of Age", **Journal of Investing**, Cilt:3, Sayı:3, 1994, ss. 11-17.
- Ruppert, D. ve Matteson, D.S.: **Statistics and Data Analysis for Financial Engineering with R Examples**, 2. Basım, New York, Springer, 2015.
- Rüschendorf, L.: "Asymptotic Distributions of Multivariate Rank Order Statistics", **The Annals of Statistics**, Cilt:4, Sayı:5, 1976, ss. 912-923.
- Scarsini, M.: "On Measures of Concordance", **Stochastica**, Cilt:8, Sayı:3, 1984, ss. 201-218.
- Schwarz, G.: "Estimating the Dimension of a Model", **The Annals of Statistics**, Cilt:6, Sayı:2, 1978, ss. 461-464.
- Sevüktekin, M ve Çınar, M.: **Ekonometrik Zaman Serileri Analizi: Eviews Uygulamalı**, 5. Baskı, Bursa, Dora, 2017.
- Shabazov, A.: **Olasılık Teorisine Giriş**. İstanbul, Birsen Yayınevi, 2005.
- Sharpe, W.F.: "A Simplified Model for Portfolio Analysis", **Management Science**, Cilt:9, Sayı:2, 1963, ss. 277-293.

- Sharpe, W.F.: "CAPITAL ASSET PRICES: A THEORY OF MARKET EQUILIBRIUM UNDER CONDITIONS OF RISK*", **The Journal of Finance**, Cilt:19, Sayı:3, 1964, ss. 425-442.
- Sharpe, W.F.: "Mutual Fund Performance", **The Journal of Business**, Cilt:39, Sayı:1, 1966, ss. 119-138.
- Sharpe, W.F.: "The Sharpe Ratio", **The Journal of Portfolio Management**, Cilt:21, Sayı:1, 1994, ss. 49-58.
- Sklar, A.: "Fonctions de repartition `a n dimensions et leurs marges", **Publications de l'Institut de Statistique de l'Universit'e de Paris**, Cilt:8, 1959, ss.229-231.
- Sortino, F. ve Satchell, S.: **Managing Downside Risk in Financial Markets: Theory, Practice and Implementation**, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2001.
- Spanos, A.: **Probability Theory and Statistical Inference: Econometric Modeling with Observational Data**, Cambridge University Press (Virtual Publishing), 2003.
- Topçu, Ç. ve Arslan, F.: "Copula Approach for Modelling Dependence Structure", **Journal of New World Sciences Academy NWSA - Physical Sciences**, Cilt:7, Sayı:4, 2012, ss. 122-128.
- Treynor, J.L.: "How to Rate Management Investment Funds", **Harvard Business Review**, Cilt:43, 1966.
- Trivedi, P.K. ve Zimmer, D.M.: **Copula Modeling: An Introduction for Practitioners**. USA, now Publishers Inc., 2007.
- Tsay, R.S.: **An Introduction to Analysis of Financial Data with R**, USA, John Wiley & Sons, 2013.
- Tse, Y. K. ve Tsui, A.K.C.: "A Multivariate Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Model With Time-Varying Correlations", **Journal of Business & Economic Statistics**, Cilt:20, Sayı:3, 2002, ss. 351-362.
- Wanat, S., Papież, M. ve Śmiech, S.: "The Conditional Dependence Structure between Precious Metals: A Copula-GARCH Approach." **Zesz. Nauk. UEK**, Cilt:4, Sayı:940, 2015, ss. 19-33. doi: 10.15678/ZNUEK.2015.0940.0402
- Wuertz, D., Setz, T. ve Chalabi, Y.: **timeSeries: Rmetrics - Financial Time Series Objects**. R package version 3042.102, 2017.

- Xiongtoua T. ve Sriboonchitta, S.: “Analysis of Volatility of and Dependence between Exchange Rate and Inflation Rate in Lao People’s Democratic Republic Using Copula-Based GARCH Approach”, **Modeling Dependence in Econometrics, Advances in Intelligent Systems and Computing 251**, Ed. Huynh VN., Kreinovich V. ve Sriboonchitta S., 2014, ss. 201-214, doi: 10.1007/978-3-319-03395-2_13
- Yıldırım, E. ve Cengiz, M.A.: “DETERMINING OF DEPENDENCY BETWEEN EXCHANGE RATES THROUGH COPULA – GARCH MODEL”, **EPRA International Journal of Research and Development**, Cilt:2, Sayı:11, 2017, ss. 7-15.
- Zakoian, J.M.: “Threshold heteroskedastic models”, **Journal of Economic Dynamics and Control**, Cilt:18, Sayı:5, 1994, ss. 931-955.

ÖZGEÇMİŞ

Cemile ÖZGÜR, Kırklareli'ye bağı Lüleburgaz İlçesi'nde başladığı ilk öğrenimine Bursa'da devam etmiştir. Bursa Erkek Lisesi'nden 2001 yılında mezun olmuş, 2005 yılında ise Hacettepe Üniversitesi İİBF İşletme (ing.) lisans diplomasını almıştır. Özel sektörde ulusal ve uluslararası alanlarda farklı deneyimler edindikten sonra 2012 yılında Hochschule Rhine-Waal'da başladığı Yüksek Lisans eğitimini 2014 yılında Ekonomi ve Finans Yüksek Lisans diplomasını alarak tamamlamıştır. 2014 - 2016 yılları arasında aynı üniversitede asistan olarak görev almış ve 2017 yılında İstanbul Üniversitesi Finans Doktora Programı'na katılarak akademik araştırmalarına program kapsamında devam etmiştir.