A_b-Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Nur Şirin Umutoğlu

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı

Ocak 2022

Some Fixed Point Theorems in A_b-Metric Spaces

Nur Şirin Umutoğlu

MASTER OF SCIENCE

Deparment of Mathematics - Computer

January 2022

A_b-Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Nur Şirin Umutoğlu

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik - Bilgisayar Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Özcan Gelişgen

Ocak 2022

ETİK BEYAN

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Özcan Gelişgen danışmanlığında hazırlamış olduğum "A_b-Metrik Uzaylarda Bazı Sabit Nokta Teoremleri" başlıklı tezimin özgün bir çalışma olduğunu; tez çalışmamın tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; tezimde verdiğim bilgileri, verileri akademik ve bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olarak elde ettiğimi; tez çalışmamda yararlandığım eserlerin tümüne atıf yaptığımı ve kaynak gösterdiğimi ve bilgi, belge ve sonuçları bilimsel etik ilke ve kurallara göre sunduğumu beyan ederim. 16/01/2022

Nur Şirin UMUTOĞLU

ÖZET

Bu tez altı kısımdan meydana gelmekte olup, klasik metrik uzayın oldukça önemli bir genelleştirilmesi olan ve birçok genişletilmiş metrik uzayı içeren A_b- metrik uzay kavramı üzerinde durularak bu uzayda metrik uzaylar için son derece iyi bilinen bir takım sabit nokta teoremlerinin A_b-metrik uzayındaki versiyonları araştırılarak verilmiştir.

İlk kısımda, çalışmada üzerinde durulacak problemin tanımlandığı matematiksel alandan ve daha özelde bu alanda metrik uzayların ortaya çıkışı , gelişimi ve genelleştirilme çalışmalarından söz edilerek konuya giriş yapılmış ve ayrıca çalışmanın amacı verilmiştir.

İkinci kısımda çalışmada ele alınan probleme dair geçmişten günümüze olan çalışmalardan söz edilerek kısaca literatür özeti yapılmıştır.

Üçüncü kısımda problemin tanımlandığı klasik metrik uzayların en son ve önemli genelleştirilmelerinden biri olan A_b- metrik uzay kavramı ve bu uzayın temel özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü kısımda A_b- metrik uzayda klasik metrik uzayda iyi bilinen bir takım sabit nokta teoremlerinin (Banach , Kannan , Bianchini , Chaterjea, Reich , Zamfirescu gibi) A_b-metrik uzay versiyonları incelenerek çalışılmış olup elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

Beşinci ve Altıncı kısımlarda tez çalışmasında ulaşılan veriler özetlenmiş ve sonrasında yapılması muhtemel çalışmalar için önerilere değinilmiştir.

Anahtar kelimeler: Genelleştirilmiş metrik uzay , A_b- metrik uzay , Sabit Nokta teoremleri

SUMMARY

This thesis consists of seven parts, focusing on the concept of A_b-metric space, which is a very important generalization of the classical (usual) metric space and includes many generalized metric spaces, and the A_b-versions of some well-known fixed point theorems are investigated.

In the first part, the mathematical field in which the problem to be emphasized in the study is defined, and more specifically the emergence, development and generalization of metric spaces in this field, the subject is introduced and also the purpose of the study is given.

In the second part, a brief summary of the literature was made by mentioning the studies from the past to the present regarding the problem discussed in the study.

In the third part, the concept of A_b-metric space, which is one of the last and important generalizations of classical metric spaces in which the problem is defined, and the fundamental properties of this space are examined.

In the fourth part, versions of some well-known fixed point theorems (such as Banach , Kannan , Bianchini , Chaterjea, Reich , Zamfirescu) in classical metric space in A_b-metric space are studied and the obtained results are given.

In the fifth and sixth sections, the data got in the thesis study are briefly restated and offers for possible next studies are mentioned.

Key Words: Generalized metric Space, A_b-Metric Space, Fixed Point Theorems

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET . . . . **vi**

SUMMARY . . . . **vii**

TEŞEKKÜR . . . . **viii**

İÇİNDEKİLER . . . . **ix**

1. GİRİŞ VE AMAÇ **1**

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI **4**

3. TEMEL KAVRAMLAR **9**

3.1. A_b -METRİK UZAY 9

4. A_b- METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ **21**

5. BULGULAR VE TARTIŞMA **57**

6. SONUÇ VE ÖNERİLER **58**

KAYNAKLAR DİZİNİ **59**

1. GİRİŞ VE AMAÇ

Bu tez çalışmasında ele alınan problemin orijinini oluşturan tek değişkenli sabit nokta problemi olup ilgili problem aşağıdaki gibidir:

”S herhangi bir küme, A ile B en az bir ortak elemana sahip olan S de içerilen iki küme olmak üzere $T : A \to B$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda T nin sabit noktası olarak adlandırılan $T(x) = x$ koşulunu sağlayan $x \in A$ noktası ne zaman vardır? Eğer bu tür nokta veya noktalar varsa kaç tanedir ve bu noktalar nasıl bulunur ?”

O halde daha basitçe S bir küme , $T : S \to S$ dönüşüm iken hangi durumlarda T nin sabit nokta(lara)ya sahip olacağı ve bu nokta(ların) nasıl bulunacağı problemi olarak ifade edilebilir. Bu sorulara yanıt veren ifadelere sabit nokta teoremleri denilmektedir.

Doğrusal olmayan fonksiyonel analizin geliştirilmesinde öncülerden olarak görülen Browder’ın da belirttiği gibi sabit nokta teorisi şüphesiz modern matematiğin en önemli araçlarından biridir. Bu kısmen, birçok gerçek dünya probleminde sabit nokta teorisinin, uygulamalarda doğal olarak ortaya çıkan problemlere çözümlerin varlığını kurmak için kullanılan temel matematiksel araç olmasından kaynaklanmaktadır. Sonuç olarak sabit nokta teorisi teorik ve uygulamalı matematikte önemli bir çalışma alanıdır ve gelişmeye devam etmektedir.

Sabit nokta teorisinin bilimsel temeli 19. yüzyılın sonlarında ve 20. yüzyılın başlarında Poincare , Lefschetz - Hopf ve Leray-Schauder’ın ufuk açıcı katkılarıyla topolojinin ilk günlerinde atılmaya başladı. Sabit nokta teori topoloji ve analizden cebir ve geometriye ve yanı sıra ayrık ve uygulamalı matematiğe kadar yoğun ve çok yönlü bir ilkeler, sonuçlar ve yöntemler bütünü haline geldi.

Bu mükemmel disiplinler arası teori topolojik gözlemlerin çok önemli bir rol oynadığı matematiğin pek çok güncel ilgi alanlarındaki merkezi problemlerin çözülebilirlik yönleri için öngörü ve güçlü araçlar sağlar. Gerçekte doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerin varlığı genellikle sabit nokta problemlerine çevrilir. Bu noktada eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı dinamik sistemlerde kapalı periyodik yörüngelerin varlığı ve daha çok son zamanlarda mantıksal programlamada cevap kümelerin varlığı bu problemlere örnek olarak verilebilir.

Sabit nokta teorisi çalışmaları genel çerçevede üç ana alana bölünerek sınıflandırılabilir. Bu alanlar üç önemli sabit nokta teoreminin ortaya atılması ile oluşmuştur. Daha açıkça 1912 yılında Brouwer' ın yayımladığı teorem ile Topolojik sabit nokta teori , 1922 yılında Banach' ın yayınladığı teorem ile Metrik sabit nokta teori ve 1955 yılında Tarski'nin yayımladığı teorem ile Ayrık sabit nokta teori alanları oluşmaya başlamış ve sınırlar belirlemiştir.

Bu çalışmada sınırları Banach' ın teoremiyle belirlenmiş olan alanında yani Metrik kısmında araştırmalar yapılacaktır. Metrik sabit nokta teori esasen izometrik doğanın özelliklerini içeren metodları ve sonuçları kapsamaktadır. Teorinin orijini 1. mertebeden lineer olmayan başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığını ve tekliğini teşkil etmek amacıyla Picard'ın ardışık yaklaşımlarına dayanır ve Cauchy, Lioville, Libschitz,Peano, Fradholm ve özellikle Emile Picard'a kadar geri gider. Bununla birlikte, Polonyalı matematikçi Stefan Banach temeldeki fikirleri basit diferansiyel ve integral denklemlerin kapsamının çok ötesinde geniş uygulamalar için uygun soyut bir çerçeveye yerleştirmekle tanınır. Metrik sabit nokta teori sadece önemli dönüşüm sınıfları için birçok sonucun yapıcı ispatlara sahip olması nedeniyle değil aynı zamanda normlu uzayların geometrisine açıklayıcı bir ışık tuttuğu için saygınlık ve önem kazanmıştır.

Metrik sabit nokta teorisinde çalışmalar genel olarak iki farklı yönde ilerlemiştir. Buna göre alanın temelinde yer alan Banach sabit nokta teoreminde ifade edilen büzülme koşulunun değiştirilmesi veya daha basitçe dönüşümün üzerine büzülme koşulunun dışında ne gibi koşullar konulabileceği çalışmaların yönlendiği bir taraf iken diğer tarafta çalışılan metrik uzay kavramın değiştirilmesi, genelleştirilmesi şeklindedir. Daha açıkça 1922 yılında Banach tarafından ifade edilen büzülme koşulu yapılan çalışmalar ile genelleştirilmiş ve değiştirilmiştir. Örneğin bu türden yapılan çalışmalar olarak Kannan, Chaterjea, Bianchini, Reich, Hardy- Rogers gibi yazarların isimleri ile anılan sabit nokta teoremleri verilebilir. Hatta 1977 yılında Rhoades mevcut büzülme koşullarını inceleyerek bunlar arasındaki ilişkileri ifade etmiş ve yeni büzülme koşulları ortaya atmıştır. Çalışılan metrik uzayın genelleştirilmesi çalışmalarına örnek olarak 2007 de Mustafa ve Sims tanımladığı G $-$metrik uzay, 2012 de Sedhgi vd tanımladığı S $-$metrik uzay , 2015 de Abbas vd tanımladığı $A-$ metrik uzay ve 2016 da Ughade vd tanımladığı A_b- metrik uzay çalışmaları verilebilir.

Bu tez çalışmasında amaç bir kümenin $n - li$ kartezyen çarpımı üzerinde tanımlı olan ve alışılmış , S , S_b ve A $-$metrik uzaylarını genelleyen A_b- metrik uzayda sabit noktanın varlığını ve tekliğini ifade edecek teoremler elde etmekdir. Bu amaç doğrultusunda klasik (alışılmış) metrik uzay alanında popüler olan ve iyi bilinen bazı sabit nokta teoremlerinin (Banach, Kannan, Chaterjea, Hardy-Rogers, Zamfirescu vb.) A_b- metrik uzaydaki versiyonları verilecektir.

2. LİTERATÜR ARAŞTIRMASI

Metrik uzay kavramı ilk olarak M.Fréchet tarafından 1906 yılında yayımladığı doktora tezinde tanımlanmıştır. Fréchet metrik kavramını tanımladığında uzaklık fonksiyonu ismini vermiş olup uzaklık fonksiyonu kavramına metrik ismini ünlü matematikçi Hausdorff vermiştir. Buna göre Fréchet uzaklık fonksiyonu kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.1 $X \neq \emptyset$ *iken tüm* $p, q, r \in X$ *noktaları için*

(i) $d(p, q) = 0 \iff p = q$

(ii) $d(p, q) = d(q, p)$

(iii) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$

koşullarını sağlayan $d : X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir uzaklık fonksiyonu, ayrıca* (X, d) *ifadesine de metrik uzay adı verilir.*

Sonralarda metrik uzay kavramını genelleştirme çalışmaları görülmeye başlandı. Bunun ilk örneği olarak Gähler 1963 de gerçekleştirdiği çalışmalarında adına $2-$ metrik uzay dediği kavramı tanıttı ve bu uzayın klasik metrik uzayın bir geneleştirmesi olduğunu öne sürdü.

Tanım 2.2 $X \neq \emptyset$ *iken tüm* $p, q, r, a \in X$ *noktaları için*

(i) $p \neq q$ *ve* $p, q \in X$ *için* $d(p, q, r) \neq 0$ *koşulunu sağlayan bir* $r \in X$ *vardır.*

(ii) p, q, r *den en az iki tanesi eşit ise* $d(p, q, r) = 0$ *dır.*

(iii) $d(p, q, r) = d(p, r, q) = d(q, p, r) = d(q, r, p) = d(r, q, p) = d(r, p, q)$

(iv) $d(p, q, r) \leq d(p, q, a) + d(p, a, r) + d(a, q, r)$

koşullarını sağlayan $d : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir* $2 - metrik$ *ve ayrıca* (X, d) *ifadesine de* $2-$*metrik uzay adı verilir.*

Gähler iddia ettiği gibi tanımladığı yeni metrik uzay kavramının klasik (alışılmış) metrik uzayın bir genellemesi olmadığı 1988 yılında Ha ve diğerleri gerçekleştirdiği çalışmada ortaya konulmuştur. Buna göre Ha ve diğerlerinin yaptıkları çalışmada Gähler' in tanımladığı fonksiyonunun değişkenleri üzerinde sürekli olmak zorunda olmadığını göstererek alışılmış metrik uzaylardaki meşhur büzülme dönüşümüne dair teorem ile bu teoremin $2-$metrik uzaydaki karşılığının ilgisiz olduğunu ortaya koymuşlardır. Bu durumda $2-$metrik uzayın genelleme olma iddiası çürümüştür.

1989 yılında Bharktin yayınladığı çalışmasında klasik metrik aksiyomlarından biri olan ve adına üçgen eşitsizliği denilen aksiyomda eşitsizliğin sağ tarafını 1 veya daha büyük bir skaler ile çarparak metrik uzayın bir genelleştirilmişi olan $b-$metrik uzayı aşağıdaki gibi tanıttı.

Tanım 2.3 *$X \neq \emptyset$ iken tüm $p, q, r, \in X$ noktaları için*

(i) $d_b(p, q) = 0 \iff p = q$

(ii) $d_b(p, q) = d_b(q, p)$

(iii)$d_b(p, q) \leq s(d_b(p, r) + d_b(r, q))$

koşullarını sağlayan $d_b : X \times X \to [0, \infty)$ ifadesine X üzerinde bir b-metrik ve ayrıca (X, d_b) ifadesine de d_b- metrik uzay adı verilir.

$b-$metrik uzayın tanıtılması metrik uzayların ileri genellemeleri için bir kapı açmış oldu. Bharktin'in ortaya attığı genelleme fikri kronolojik sıralama ile görülen her genelleştirilmiş metrik uzaya uygulanarak ortaya atılan genelleştirilmiş metrik uzayın biraz daha genelleştirilmesi sağlanmıştır.

Daha sonralarda 1992 yılında Dhage yaptığı çalışmasıyla klasik metrik uzayı genelleştirdiğini iddia ederek adına $D - metrik$ uzayı dediği uzayı tanıtmıştır.

Tanım 2.4 *$X \neq \emptyset$ iken tüm $p, q, r, a \in X$ noktaları için*

(i) $D(p, q, r) = 0 \iff p = q = r$

(ii) $D(p, q, r) = D(p, r, q) = D(q, p, r) = D(q, r, p) = D(r, p, q) = D(r, q, p)$

(iii)$D(p, q, r) \leq D(p, q, a) + D(p, a, r) + D(a, q, r)$

koşullarını sağlayan $D : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir* $D-$ $metrik$ *ve ayrıca* (X, D) *ifadesine de* $D-$ $metrik\ uzay$ *adı verilir.*

İlave bir özellik olarak (X, D) $D-$ metrik uzayında tüm $p, q, r \in X$ noktaları için

(iv) $D(p, q, q) \leq D(p, r, r) + D(r, q, q)$

ifadesi verilebilir. Ayrıca her $p, q \in X$ için $D(p, p, q) = D(p, q, q)$ ise $D-$metriğine simetriktir adı verilir.

Yakınsaklık kavramı $D-$metrik uzayda farklı şekillerde ifade edilerek bu uzay üzerinde iki farklı topoloji inşaa edilebilir. Her ne kadar Dhage bu üretilen topolojilerin aynı olduğunu iddia etse de Mustafa ve Sims 2003 yılında gerçekleştirdikleri bir çalışma ile aynı olduğu iddia edilen topolojilerin aynı olmadığını ve Dhage'nin sunduğu bazı sonuçlarda birtakım yanlışlıkların bulunduğunu ortaya koymuşlardır. Doğal olarak D-metrik uzay kavramı da iddia edildiği gibi klasik metrik uzayın bir genellemesi olamayacaktır. Daha sonrasında Mustafa ve Sims 2006 yılında gerçekleştirdikleri çalışmaları ile klasik metrik uzayın bir genellemesini genelleştirilmiş metrik uzay adı ile ya da kısaca $G-$metrik uzay şeklinde tanıtmışlardır.

Tanım 2.5 $X \neq \emptyset$ *iken her* $p, q, r, a \in X$ *için*

(i) $p = q = r \implies G(p, q, r) = 0$ *dır.*

(ii) Her $p, q \in X$ *ve* $p \neq q$ *için* $G(p, p, q) > 0$ *dır.*

(iii) Her $p, q, r \in X$ *ve* $q \neq r$ *için* $G(p, p, q) \leq G(p, q, r)$ *dir.*

(iv) $G(p, q, r) = G(p, r, q) = G(q, p, r) = G(q, r, p) = G(r, p, q) = G(r, q, p)$

(v) $G(p, q, r) \leq G(p, a, a) + G(a, q, r)$

koşulları sağlayan $G : X \times X \times X \to [0, \infty)$ *fonksiyonuna* X *üstünde bir* $G-$ $metrik$ *ve ayrıca* (X, G) *ifadesine* $G-$ $metrik$ *uzay denir.*

Böylelikle metrik uzayın bir genişletilmesi tanıtılmış oldu. Ardından 2007 de Sedgi ve diğerleri gerçekleştirdikleri çalışma ile G-metrik uzayı da kapsayan bir metrik uzay tanıttılar.

Tanım 2.6 *$X \neq \emptyset$ iken tüm $p, q, r, a \in X$ noktaları için*

(i) $D^*(p, q, r) = 0 \iff p = q = r$

(ii) $D^*(p, q, r)$=$D^*(p, r, q)$=$D^*(q, p, r)$=$D^*(q, r, p) = D^*(r, p, q) = D^*(r, q, p)$

(iii) $D^*(p, q, r) \leq D^*(p, q, a) + D^*(a, r, r)$

koşullarını sağlayan $D^* : X \times X \times X \to [0, \infty)$ ifadesine D^* bir $D^* - metrik$ ve $(X,\ D^*)$ ifadesine de $D^* - metrik$ uzay denir.

Buna göre her $G-$ metrik uzay bir D^*-metrik uzay olmaktadır ve fakat ifadenin tersi yanlıştır. Böylelikle her G-metrik uzayı kapsayan bir metrik uzay yapısı tanıtılmış ve metrik uzayın bir başka genellemesi verilmiş oldu. Ancak Sedghi ve diğerleri 2012 yılında gerçekleştirdikleri çalışma ile $G - metrik$ uzayın ve $D^* - metrik$ uzayın gücünü simetri özelliklerinden dolayı zayıfladığı kanaati üzerine klasik metrik uzayların başka bir genişletilmesi olan $S - metrik\ uzay$ kavramını tanıtmışlardır.

Tanım 2.7 *$X \neq \emptyset$ iken her $p, q, r, a \in X$ için*

(i) $S(p, q, r) = 0 \iff p = q = r$

(ii) $S(p, q, r) \leq S(p, p, a) + S(q, q, a) + S(r, r, a)$

koşullarını sağlayan $S : X \times X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonuna X üstünde bir $S- metrik$ ve (X, S) ifadesine de $S-$metrik uzay adı verilir.

$S- metrik\ uzay$, $G- metrik\ uzay$ ve $D^*- metrik\ uzayın$ bir genellemesi olsa da 2015 yılında Abbas ve diğerleri $S- metrik\ uzay$ kavramının genelleştirilmişi olan A-metrik uzay kavramını ortaya çıkarmışlardır. İlgili çalışmaya göre X boştan faklı bir küme olmak üzere $S- metrik$ kavramı X in üçlü kartezyen çarpımı iken $A- metrik$ kavramı X in n li $(n \geq 3)$ kartezyen çarpımı üzerinde tanımlanmaktadır. $A- metrik$ uzay kavramının tanımlanmasının hemen akabinde Ughade vd. 2016 yılında Bharktin'in genelleme fikri kullanılarak $A-$ $metrik$ uzay kavramını da genelleyen $A_b - metrik$ uzay kavramı aşağıdaki gibi tanıtılmıştır.

Tanım 2.8 *$X \neq \emptyset$, $s \geq 1$, $n \geq 3$ ve $i \in \{1, 2, ..., n\}$ iken tüm $x_i, a \in X$ için*

(i) $A_b(x_1, ..., x_n) = 0 \iff x_1 = ... = x_n$

(ii) $A_b(x_1, ..., x_n) \leq s \sum\limits_{i=1}^{n} A_b(x_i, ..., x_i, a)$

koşullarını sağlayan $A_b : X^n \to [0, \infty)$ ifadesine X üstünde bir $A_b - metrik$ ve (X, A_b) ifadesine de $A_b - metrik\ uzay$ adı verilir . (Ughade vd. 2016)

Açıkça $s = 1$ için her $A - metrik\ uzay$ bir $A_b - metrik\ uzaydır$. Ancak elbette tersi doğru değildir. Doğal olarak $A_b - metrik\ uzay$, $A - metrik\ uzayın$ bir genelleştirilmesidir.

Metrik uzay kavramının genelleştirilmesine dair pek çok çalışmalar mevcut olup günümüzde halen devam etmektedir. Bu çalışmaların yanı sıra 1922 de Banach tarafından verilen büzülme koşulunun (ilkesinin) genelleme çalışmaları da tüm hızıyla devam etmektedir. Bu bağlamda Bianchini, Ciric, Kannan, Reich, Chatterjea, Hardy-Rogers gibi bilim insanları günümüzde kendi isimleri ile anılan büzülme koşulları tanıtmışlardır. Rhodes 1977 de yaptığı çalışma ile bilinen büzülme koşulları ve aralarındaki ilişkileri incelemiş ve bunlardan faydalanarak orijinal büzülme koşulları sunmuş ve böylelikle yeni sabit nokta teoremleri elde etmiştir. Bahsedilen çalışmalar klasik metrik uzaylarda olup bunların dışında literatürde alışılmış metrik uzayın genelleştirilmiş hallerinde de sayısız çoklukta yayın mevcut olup ilgili uzaylarda sabit nokta teorisi birçok yönde irdelenmiştir.

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezin 4. bölümünde verilecek olan A_b- metrik uzaydaki sabit nokta teoremlerinin oluşturulmasında ve ispatlanmasında kullanılacak A_b- metrik uzaya dair temel fikir, tanım, teorem ve kavramlara yer verilecektir. Bütünlüğü ve anlaşılırlığı sağlamak adına verilen bu bölümde yer alan teoremlerin ve hükümlerin bazıları sadece ifade edilecek olup ispatlarına yer verilmeyecekdir. Bu hükümlerin ispatları işaret edilen kaynaklardan incelenebilir.

3.1 A_b -METRİK UZAY

Literatür araştırması kısmında da kısaca bahsedildiği üzere 1906 yılında Frechet'in tanımlaması ile başlayan metrik uzay kavramının aradan geçen süreç boyunca birçok genellemesi verilmiştir. Önceleri boştan farklı X bir kümesi için klasik metrik kavramı $X \times X$ kümesi üzerinde tanımlanmıştır. Bir süre sonra bu kavram $X \times X \times X$ için genellenmiş olup sonralarda bu genelleme daha da genelleştirilerek $\underbrace{X \times X \times ... \times X}_{n \text{ tane}}$ üzerinde tanımlanan metrikler ile geliştirilmiştir. Bu bölümde $X \neq \emptyset$ için $\underbrace{X \times X \times ... \times X}_{n \text{ tane}}$ üzerinde tanımlanan A_b-metrik ile oluşturulan A_b-metrik uzay kavramı ele alınacak, bu uzayın özellikleri verilecektir.

Ayrıca bu bölümde ve gelecek bölümde gösterimlerde karmaşa ve uzunluğu önlemek amacı ile $A_b(x, ..., x, y)$ ifadesi $A_b\,(\mathbf{x};y)$ biçiminde ifade edilecektir.

Tanım 3.1 *$X \neq \emptyset$, $s \geq 1$ ve $n \geq 3$ iken $A_b : X^n \to [0, \infty)$ fonksiyonu $i \in \{1, 2, ..., n\}$ olmak üzere her x_i , $a \in X$ için*

$$A_b1)\ A_b\,(x_1, ..., x_n) = 0 \iff x_1 = ... = x_n$$

$$A_b2)\ A_b\,(x_1, ..., x_n) \leq s\sum_{i=1}^{n} A_b\,(x_i, ..., x_i, a)$$

şartlarını gerçekliyorsa A_b ye X üzerinde bir $A_b - metrik$ adı verilir ve (X, A_b) ifadesine de $A_b - metrik\ uzay$ denir. (Ughade vd. 2016)

A_b $-$ $metrik$ uzay kavramı sadece alışılmış metrik uzayın değil aynı zamanda A $-metrik$ uzay kavramının bir genelleştirilmesidir. Yani A_b-metrik uzay sınıfı A $-metrik$ uzay sınıfından daha geniştir. Açıkça her A $-metrik$ uzay $s = 1$ olmak üzere bir $A_b - metrik$ uzaydır. Fakat tersi doğru değildir.

A_b $-$ metrik uzay n. mertebeden bir S_b $-$ metrik uzaydır. Özetlenirse her S_b $-$ metrik uzay $A_b - metrik$ uzayın özel durumudur.

Aşağıda A_b $-$ $metrik$ için iki örnek verilmiştir.

Örnek 3.1 $X = [1, \infty)$ *ve* $i = 1, 2, ..., n$ *olsun.* $A_b : X^n \to [0, \infty)$ *ifadesi her* $x_i \in X$ *için*

$$A_b\left(\mathbf{x_1}; x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} \left|x_i - x_j\right|^2$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre üst satırda ifade edilen A_b *fonksiyonu açıkca bir* A_b- *metriktir.(Ughade vd. 2016)*

Verilen fonksiyonun bir A_b- *metrik olduğunu görmek için tanım 4.1 de yer alan* $(A_b\,1)$ *ve* $(A_b\,2)$ *koşullarının sağlandığını göstermek yeterlidir. Bu takdirde* $(A_b\,1)$ *için* x_1, x_2, ..., $x_n \in X$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} A_b(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 &\iff \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{i<j} \left|x_i - x_j\right|^2 = 0 \\ &\iff \left|x_i - x_j\right|^2 = 0 \\ &\iff \left|x_i - x_j\right| = 0 \\ &\iff x_i = x_j \\ &\iff x_1 = x_2 = ... = x_n \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla açıkça (A_b1) *sağlanır.* (A_b2) *için* $i = 1, 2, ..., n$ *ve* $x_i, a \in X$ *olmak üzere açıkça*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_1}; a) &= (n-1)\left|x_1 - a\right|^2 \\ A_b(\mathbf{x_2}; a) &= (n-1)\left|x_2 - a\right|^2 \\ A_b(\mathbf{x_3}; a) &= (n-1)\left|x_3 - a\right|^2 \\ &\vdots \\ A_b(\mathbf{x_{n-1}}; a) &= (n-1)\left|x_{n-1} - a\right|^2 \\ A_b(\mathbf{x_n}; a) &= (n-1)\left|x_n - a\right|^2 \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $i=1,2,...,n$ ve her $x_i, a \in X$ için yukarıdaki eşitliklerden faydalanarak

$$\begin{aligned}
A_b(x_{1,}x_2,...,x_n) &= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|x_i-x_j|^2 \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}|(x_i-a)-(x_j-a)|^2 \\
&\leq \{2(n-1)|x_1-a|^2+2|x_2-a|^2+2|x_3-a|^2+...+2|x_n-a|^2\} \\
&\quad +\{2(n-2)|x_2-a|^2+2|x_3-a|^2+... \\
&\quad +2|x_n-a|^2\}+\{2(n-3)|x_3-a|^2+2|x_4-a|^2+... \\
&\quad +2|x_n-a|^2\}+...+\{2(2)|x_{n-2}-a|^2+2|x_{n-1}-a|^2 \\
&\quad +2|x_n-a|^2\}+2|x_{n-1}-a|^2+2|x_n-a|^2 \\
&= 2(n-1)|x_1-a|^2+2(n-1)|x_2-a|^2+... \\
&\quad +2(n-1)|x_{n-1}-a|^2+2(n-1)|x_n-a|^2 \\
&= 2\left[A_b(\mathbf{x}_1;a)+A_b(\mathbf{x}_2;a)+A_b(\mathbf{x}_3;a)+...+A_b(\mathbf{x}_{n-1};a)+A_b(\mathbf{x}_n;a)\right]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece açıkca A_b fonksiyonu bir $A_b-metriktir$. Dolayısyla (X,A_b) , $s=2>1$ olduğundan bir $A_b-metrik$ uzaydır.

Örnek 3.2 *$X=\mathbb{R}$ ve $i=1,2,...,n$ olsun. $A_b : X^n \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x_i \in X$ için*

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{x_1};x_n) &= \left|\textstyle\sum_{i=n}^{2}x_i-(n-1)_{x_1}\right|^2 \\
&\quad +\left|\textstyle\sum_{i=n}^{3}x_i-(n-2)_{x_2}\right|^2+... \\
&\quad +\left|\textstyle\sum_{i=n}^{n-3}x_i-3x_{n-3}\right|^2 \\
&\quad +\left|\textstyle\sum_{i=n}^{n-2}x_i-2x_{n-2}\right|^2 \\
&\quad +|x_n-x_{n-1}|^2
\end{aligned}$$

olacak şekilde tanımlansın. O halde A_b - fonksiyonu bir $A_b-metriktir$. (Ughade vd. 2016)

Burada da açıkça bir önceki örnekte olduğu gibi A_b -metriğin aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir. Bu takdirde $i=1,2,...,n$ ve her $x_i \in X$ için

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{x_1};x_n)=0 &\iff \left|\textstyle\sum_{i=n}^{2}x_i-(n-1)_{x_1}\right|^2+... \\
&\quad +\left|\textstyle\sum_{i=n}^{n-1}x_i-2x_{n-2}\right|^2+|x_n-x_{n-1}|^2=0 \\
&\iff \left|\textstyle\sum_{i=n}^{2}x_i-(n-1)_{x_1}\right|^2=0,..., \\
&\quad \left|\textstyle\sum_{i=n}^{n-1}x_i-2x_{n-2}\right|^2=0, \\
&\quad |x_n-x_{n-1}|^2=0 \\
&\iff x_n=x_{n-1}\ ,\ x_n=x_{n-2}\ ,...,\ x_n=x_1 \\
&\iff x_1=x_2=...=x_n
\end{aligned}$$

bulunur. Açıkça (A_b1) *sağlanmaktadır. Şimdi* (A_b2) *için* $i = 1, 2, ..., n$ *ve her* $x_i, a \in X$ *olmak üzere*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_1}; a) &= (n-1)\left|a - \mathbf{x}_1\right|^2 \\ A_b(\mathbf{x_2}; a) &= (n-1)\left|a - \mathbf{x}_2\right|^2 \\ A_b(\mathbf{x_3}; a) &= (n-1)\left|a - \mathbf{x}_3\right|^2 \\ &\vdots \\ A_b(\mathbf{x_{n-1}}; a) &= (n-1)\left|a - \mathbf{x}_{n-1}\right|^2 \\ A_b(\mathbf{x_n}; a) &= (n-1)\left|a - \mathbf{x}_n\right|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $i \in \{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ *ve her* $x_i,\ a \in X$ *için yukarıdaki eşitsizliklerden faydalanarak*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_1}; x_n) &= \textstyle\sum_{i=n}^{2} \left|(x_i - a) - (n-1)(x_1 - a)\right|^2 \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=n}^{3} \left|(x_i - a) - (n-2)(x_2 - a)\right|^2 + ... \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=n}^{n-2} \left|(x_i - a) - 3(x_{n-3} - a)\right|^2 \\ &\quad + \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} \left|(x_i - a) - 2(x_{n-2} - a)\right|^2 + \left|(x_n - a) - 3(x_{n-1} - a)\right|^2 \\ &\leq 2\textstyle\sum_{i=n}^{2} \left|x_i - a\right|^2 + 2(n-1)\left|x_1 - a\right|^2 \\ &\quad + 2\textstyle\sum_{i=n}^{3} \left|x_i - a\right|^2 + 2(n-2)\left|x_2 - a\right|^2 + ... \\ &\quad + 2\textstyle\sum_{i=n}^{n-2} \left|x_i - a\right|^2 + 2(3)\left|x_{n-3} - a\right|^2 + 2\textstyle\sum_{i=n}^{n-1} \left|x_i - a\right|^2 + 2(2)\left|x_{n-2} - a\right|^2 \\ &= 2\left|x_n - a\right|^2 + 2\left|x_{n-1} - a\right|^2 + ... + 2\left|x_2 - a\right|^2 \\ &\quad + 2(n-1)\left|x_1 - a\right|^2 + 2\left|x_n - a\right|^2 + 2\left|x_{n-1} - a\right|^2 \\ &\quad + ... + 2\left|x_3 - a\right|^2 + 2(n-2)\left|x_2 - a\right|^2 + ... \\ &\quad + 2\left|x_n - a\right|^2 + 2\left|x_{n-1} - a\right|^2 + 2(3)\left|x_{n-3} - a\right|^2 \\ &\quad + \left|x_n - a\right|^2 + \left|x_{n-1} - a\right|^2 + 2(2)\left|x_{n-2} - a\right|^2 \\ &\quad + 2\left|x_n - a\right|^2 + 2\left|x_{n-1} - a\right|^2 \\ &= 2(n-1)\left|x_n - a\right|^2 + 2(n-1)\left|x_{n-1} - a\right|^2 + 2(n-1)\left|x_{n-2} - a\right|^2 + ... \\ &\quad + 2(n-1)\left|x_3 - a\right|^2 + 2(n-1)\left|x_2 - a\right|^2 + 2(n-1)\left|x_1 - a\right|^2 \\ &= 2(n-1)\{\left|x_2 - a\right|^2 + \left|x_2 - a\right|^2 + ... + \left|x_n - a\right|^2\} \\ &= 2\begin{bmatrix} A_b(x_1, x_1, x_1, ..., (x_1)_{n-1}, a) \\ +A_b(x_2, x_2, x_2, ..., (x_2)_{n-1}, a) \\ +A_b(x_3, x_3, x_3, ..., (x_3)_{n-1}, a) + ... \\ +A_b(x_{n-1}, x_{n-1}, x_{n-1}, ..., (x_{n-1})_{n-1}, a) \\ +A_b(x_n, x_n, x_n, ..., (x_n)_{n-1}, a) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. O halde açıkça $s = 2 > 1$ *olduğundan* A_b *ifadesi bir* $A_b - metriktir$*. Dolayısıyla* (X, A_b) *bir* $A_b - metrik\ uzaydır$*.*

Aşağıda verilen iki yardımcı teorem $A_b - metrik$ uzaylarda sıklıkla kullanılan iki özelliği ifade etmektedir.

Yardımcı Teorem 3.1 $(X,\, A_b)$ *ifadesi* $s \geq 1$ *için bir* A_b- $metrik$ *uzay olsun. O halde her* $x, y \in X$ *için*

$$A_b(\mathbf{x}; y) \leq sA_b(\mathbf{y}; x)$$

olur. (Ughade vd. 2016)

İspat $(X,\, A_b)$ *bir* A_b- $metrik$ *uzay olduğundan her* $x,\, y \in X$ *için* (A_b2) *aksiyomu uygulanırsa basitçe*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x}; y) &\leq s\left[A_b(\mathbf{x}; x){+}A_b(\mathbf{x}; x){+}A_b(\mathbf{x}; x){+}...{+}\left(A_b(\mathbf{x}; x)\right)_{n-1}){+}A_b(\mathbf{y}; x)\right] \\ &= sA_b(\mathbf{y}; x) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.2 $s \geq 1$ *için* $(X,\, A_b)$ *ifadesi bir* A_b- $metrik$ *uzay olsun. O halde her* $x, y, z \in X$ *için*

$$A_b(\mathbf{x}; z) \leq s\left[(n-1)A_b(\mathbf{x}; y){+}A_b(\mathbf{z}; y)\right]$$

ve

$$A_b(\mathbf{x}; z) \leq s\left[(n-1)A_b(\mathbf{x}; y){+}sA_b(\mathbf{y}; z)\right]$$

olur. (Ughade vd. 2016)

İspat $(X,\, A_b)$ *bir* A_b- $metrik$ *uzay olduğundan her* $x,\, y,\, z \in X$ *için* (A_b2) *aksiyomu uygulanırsa kolaylıkla*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x}; z) &\leq s\left[(n-1)A_b(\mathbf{x}; y){+}A_b(\mathbf{x}; y){+}A_b(\mathbf{x}; y){+}...{+}A_b(\mathbf{x}; y))_{n-1}{+}A_b(\mathbf{z}; y)\right] \\ &= s\left[(n-1)A_b(\mathbf{x}; y){+}A_b(\mathbf{z}; y)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre yardımcı teorem 4.1 kullanılarak

$$A_b(\mathbf{x}; z) \leq s\left[(n-1)A_b(\mathbf{x}; y) + sA_b(\mathbf{y}; z)\right]$$

sonucuna ulaşılır. Böylelikle ifade ispatlanmış olur.

Aşağıdaki yardımcı teorem bir A_b- $metrik$ uzayın kendisi ile kartezyen çarpımı üzerinde bir A_b- $metrik$ uzay oluşturduğunu göstermektedir. Bir başka deyişle A_b- $metrik$ uzay ile yeni bir A_b- $metrik$ uzay oluşturulabileceği ifade edilmektedir.

Yardımcı Teorem 3.3 *(X, A_b) $s \geq 1$ için bir $A_b - metrik$ uzay ve $i, j = 1, 2, ..., n$ olsun. O halde her x_i, $y_j \in X$ için*

$$D_{A_b}((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)) = A_b(x_1, x_2, ..., x_n) + A_b(y_1, y_2, ..., y_n)$$

şeklinde tanımlanan $D_{A_b} : X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu bir $A_b - metriktir$. Dolayısıyla $(X \times X, D_{A_b})$ $s \geq 1$ olmak üzere bir $A_b - metrik$ uzaydır. (Ughade vd. 2016)

D_{A_b} fonksiyonunun bir $A_b - metrik$ olduğunu göstermek için $A_b - metrik$ aksiyomlarının sağlandığı gösterilmedir. Buna göre $i, j = 1, 2, ..., n$ olmak üzere $x_i, y_j \in X$ için

$$\begin{aligned} D_{A_b}((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)) &= 0 \\ &\iff A_b(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + A_b(y_1, y_2, y_3, ..., y_n) = 0 \\ &\iff A_b(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = 0 \ ve \ A_b(y_1, y_2, y_3, ..., y_n) = 0 \\ &\iff x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_n \ ve \ y_1 = y_2 = y_3 = ... = y_n \\ &\iff (x_1, y_1) = (x_2, y_2) = (x_3, y_3) = ... = (x_n, y_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise açıkça (A_b1) aksiyomunun sağlandığını ifade eder. Şimdi $i, j = \{1, ..., n\}$ olmak üzere $x_i, y_j, a \in X$ için

$$\begin{aligned} D_{A_b}((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)) &= A_b(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + A_b(y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \\ &\leq s \begin{bmatrix} A_b(\mathbf{x}_1; a) + A_b(\mathbf{x}_2; a) + \\ A_b(\mathbf{x}_3; a) + ... + A_b(\mathbf{x}_{n-1}; a) + A_b(x_n; a) \end{bmatrix} \\ &\quad + s \begin{bmatrix} A_b(\mathbf{y_1}; b) + A_b(\mathbf{y_2}; b) \\ + A_b(\mathbf{y_3}; b) + ... + A_b(\mathbf{y_{n-1}}; b) + A_b(\mathbf{y_n}; b) \end{bmatrix} \\ &= s[A_b(\mathbf{x}_1; a) + A_b(\mathbf{y}_1; b)] + s[A_b(\mathbf{x}_2; a) + A_b(\mathbf{y}_2; b)] \\ &\quad + s[A_b(\mathbf{x}_3; a) + A_b(\mathbf{y}_3; b)] + ... \\ &\quad + s[A_b(\mathbf{x}_{n-1}; a) + A_b(\mathbf{y}_{n-1}; b)] \\ &\quad + s[A_b(\mathbf{x}_n; a) + A_b(\mathbf{y}_n; b)] \\ &= s[D_{A_b}((x_1, y_1), (x_1, y_1), (x_1, y_1), ..., (a, b))] \\ &= s[D_{A_b}((x_1, y_1), (x_1, y_1), (x_1, y_1), ..., (a, b)) \\ &\quad + D_{A_b}((x_2, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_2), ..., (a, b)) + ... \\ &\quad + D_{A_b}((x_n, y_n), (x_n, y_n), (x_n, y_n), ..., (a, b))] \end{aligned}$$

bulunur. O halde bunun anlamı ise

$$D_{A_b}((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)) \leq s \begin{bmatrix} D_{A_b}((x_1, y_1), (x_1, y_1), (x_1, y_1), ..., (a, b)) \\ + D_{A_b}((x_2, y_2), (x_2, y_2), (x_2, y_2), ..., (a, b)) + ... \\ + D_{A_b}((x_n, y_n), (x_n, y_n), (x_n, yn), ..., (a, b)) \end{bmatrix}$$

olduğudur. Yani D_{A_b} fonksiyonunu (A_b2) aksiyomunu sağlamaktadır. Dolayısıyla D_{A_b} bir A_b-metriktir . Buna göre $(X \times X, D_{A_b})$ $s \geq 1$ olmak üzere bir $A_b - metrik$ uzaydır.

Yukarıdaki yardımcı teoremde verilen ifadeler için n ve s çeşitli değerlerine göre aşağıda listenen sonuçlar hemen verilebilir.

a) $s = 1$ alınırsa

$$D_{A_b}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\right) \quad = \quad A(x_1, x_2, ..., x_n) + A(y_1, y_2, ..., y_n)$$

olacağından $(X \times X, D_{A_b})$ ifadesi $X \times X$ üzerinde bir $A - metrik$ uzaydır.

b) $n = 3$ alınırsa

$$D_{A_b}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)(x_3, y_3)\right) \quad = \quad S_b(x_1, x_2, x_3) + S_b(y_1, y_2, y_3)$$

olacağından $(X \times X, D_{A_b})$ ifadesi $X \times X$ üzerinde bir S_b-metrik uzaydır.

c) $n = 3$ ve $s = 1$ alınırsa

$$D_{A_b}\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)(x_3, y_3)\right) \quad = \quad S(x_1, x_2, x_3) + S(y_1, y_2, y_3)$$

olacağından $(X \times X, D_{A_b})$ ifadesi $X \times X$ üzerinde bir S-metrik uzaydır.

Aşağıdaki diyagram uzaylar arasındaki ilişkiyi net bir şekilde ortaya koymaktadır.

$$\begin{array}{ccccccc}
G\text{-}metrik\ uzay & \Longrightarrow & D^*\text{-}metrik\ uzay & \Longrightarrow & S\text{-}metrik & \Longrightarrow & A\text{-}metrik\ uzay \\
\Downarrow & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\
G_b\text{-}metrik\ uzay & & \Longrightarrow & & S_b\text{-}metrik & \Longrightarrow & A_b\text{-}\ metrik\ uzay
\end{array}$$

Aşağıdaki tanım bir $A_b - metrik$ uzayda bir dizinin yakınsak olmasını , Cauchy olmasını ve uzayın tam olmasını ifade etmektedir. (Ughade vd. 2016)

Tanım 3.2 *(X, A_b) bir A_b- metrik uzay ve (x_k) ifadesi de (X, A_b) A_b- metrik uzayında dizi ve $x \in X$ olsun. Bu takdirde ;*

1. Verilen her $\epsilon > 0$ değerine karşılık $k \geq n_0$ koşulunu sağlayan her bir k doğal sayısı için

   $$A_b(x_k, x_k, x_k, ..., x_{k(n-1)}, x) < \epsilon$$

   olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_k) dizisine A_b- yakınsaktır denir ve x değerine de $\{x_k\}$ dizisinin limiti denir. Ayrıca

   $$\lim_{k\to\infty} A_b(x_k, , ..., x_k, x) = x$$

   ile gösterilir.

2. Verilen her $\epsilon > 0$ değerine karşılık $m, k \geq n_0$ koşulunu sağlayan her $m, k \in \mathbb{N}$ için

$$A_b(x_k, ..., x_{k(n-1)}, x_m) < \epsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_k) dizisine A_b- $Cauchy$ dizisi denir.

3. (X, A_b) A_b- metrik uzaydaki her A_b- $Cauchy$ dizisi yakınsak ise (X, A_b) A_b- metrik uzayına A_b- tamdır denir. (Ughade vd. 2016)

Yardımcı Teorem 3.4 *(X, A_b) bir A_b- metrik uzay olsun. Bu takdirde (X, A_b) A_b- metrik uzaydaki (x_k) dizisi x noktasına A_b- yakınsak ise x tektir. (Ughade vd. 2016)*

İspat *Yardımcı teoremin hipootezindeki ifadenin aksine $x \neq y$ olmak üzere (x_k) dizisinin x ve y değerlerine A_b-yakınsak olduğu varsayılsın. Bu takdirde verilen her $\epsilon > 0$ değerine karşılık $k \geq n_1$ koşulunu sağlayan her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(x_k, x_k, x_k, ..., x_{k(n-1)}, x) \quad < \quad \frac{\epsilon}{2s^2(n-1)}$$

olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $k \geq n_2$ koşulunu sağlayan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$A_b(x_k, x_k, x_k, ..., x_{k(n-1)}, y) \quad < \quad \frac{\epsilon}{2s^2}$$

olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ değerleri vardır. Şimdi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınsın. O halde açıkça her $k \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x}; y) &\leq s\left[A_b(x; , x_k) + A_b(\mathbf{x}; x_k) + A_b(\mathbf{x}; x_k) + ... + A_b((\mathbf{x}; x_k))_{n-1} + A_b(\mathbf{y}; x_k)\right] \\ &= s(n-1)A_b(\mathbf{x}; , x_k) + sA_b(\mathbf{y}; x_k) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre yardımcı teorem 4.1 ve 4.2 gereğince

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x}; y) &\leq s^2(n-1)A_b(\mathbf{x}_k; x) + s^2 A_b(\mathbf{x}_k; y) \\ &< s^2(n-1)\frac{\epsilon}{2s^2(n-1)} + s^2\frac{\epsilon}{2s^2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

bulunur. Burada açıkça ϵ keyfi olduğundan $A_b(x, x, x, ..., x_{(n-1)}, y) = 0$ sonucuna ulaşılır. Bunun anlamı ise $x = y$ olmasıdır. Dolayısıyla (x_k) dizisinin yakınsadığı değer tektir.

Yardımcı Teorem 3.5 *(X, A_b) A_b $-$ metrik uzaydaki her A_b- yakınsak dizi bir A_b- Cauchy dizisidir. (Ughade vd. 2016)*

İspat *(x_k) (X, A_b) $A_b-metrik$ uzayda $x \in X$ noktasına yakınsak dizi olsun. Yani $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x$ olsun. Bu taktirde verilen her $\epsilon > 0$ değerine karşılık $k \geq n_1$ koşulunu sağlayan her $k \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(\mathbf{x_k}; x) \quad < \quad \frac{\epsilon}{2s(n-1)}$$

olacak şekilde $n_1 \in N$ ve $m \geq n_2$ koşulunu sağlayan her $m \in N$ için

$$A_b(\mathbf{x_m}; x) \quad < \quad \frac{\epsilon}{2s}$$

olacak şekilde $n_2 \in N$ değeri vardır. Şimdi $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınsın. O halde açık bir şekilde her $m, k \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_k}; x_m) &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x) + sA_b(\mathbf{x_m}; , x) \\ &< s(n-1)\frac{\epsilon}{2s(n-1)} s\frac{\epsilon}{2s} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

olur. Bu ise (x_k) dizisinin bir A_b- Cauchy dizisi olmasını gerektirir.

Yardımcı Teorem 3.6 *$(X,\ A_b)$ A_b-metrik uzay ve (x_k) ile (y_k) da A_b-metrik uzayda birer dizi olsun. Bu takdirde $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y$ ise*

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} A_b\left(x, ..., x, y\right) &\leq \lim_{k\to\infty} \inf\ A_b\left(x_k, ..., x_k, y_k\right) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sup\ A_b\left(x_k, ..., x_k, y_k\right) \\ &\leq s^2 A_b\left(x, ..., x, y\right) \end{aligned}$$

dir. Özel olarak $y_k = y$ olacak şekilde sabit dizi ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} A_b\left(x, ..., x, y\right) &\leq \lim_{k\to\infty} \inf\ A_b\left(x_k, ..., x_k, y\right) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sup\ A_b\left(x_k, ..., x_k, y\right) \\ &\leq s^2 A_b\left(x, ..., x, y\right) \end{aligned}$$

dır. (Ughade vd. 2016)

İspat *A_b- metriğin (A_b2) aksiyomu kullanılarak*

$$\begin{aligned} A_b\left(\mathbf{x}; y\right) &\leq s(n-1)A_b\left(\mathbf{x}; x_k\right) + sA_b\left(\mathbf{y}; x_k\right) \\ &\leq s(n-1)A_b\left(\mathbf{x}; x_k\right) + s^2(n-1)A_b\left(\mathbf{y}; y_k\right) + s^2 A_b\left(\mathbf{x_k}; y_k\right) \\ &\leq s^2(n-1)A_b\left(\mathbf{x_k}; x\right) + s^3(n-1)A_b\left(\mathbf{y_k}; y\right) + s^2 A_b\left(\mathbf{x_k}; y_k\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan da

$$\begin{aligned} A_b\left(\mathbf{x_k}; y_k\right) &\leq s(n-1)A_b\left(\mathbf{x_k}; x\right) + sA_b\left(\mathbf{y_k}; x\right) \\ &\leq s(n-1)A_b\left(\mathbf{x_k}; x\right) + s^2(n-1)A_b\left(\mathbf{y_k}; y\right) + s^2 A_b\left(\mathbf{x}; y\right) \end{aligned}$$

bulunur. İlk eşitsizlikte $k \to \infty$ için alt limit ve ikinci eşitsizlikte $k \to \infty$ için üst limit alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} A_b(\mathbf{x}; y) &\leq \lim_{k\to\infty} \inf\ A_b(\mathbf{x_k}; y_k) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sup\ A_b(\mathbf{x_k}; y_k) \\ &\leq s^2 A_b(\mathbf{x}; y) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu noktada $(y_k) = y$ olacak şekilde bir sabit dizi ise A_b- metriğin $(A_b 2)$ aksiyomu kullanılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x}; y) &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x}; x_k) + sA_b(\mathbf{y}; x_k) \\ &\leq s^2(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x) + s^2 A_b(\mathbf{x_k}; y) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan ise

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_k}; y) &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x) + sA_b(\mathbf{y}; x) \\ &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x) + s^2 A_b(\mathbf{x}; y) \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Yine ilk eşitsizlikte $k \to \infty$ için alt limit ve ikinci eşitsizlikte $k \to \infty$ için üst limit alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2} A_b(\mathbf{x}; y) &\leq \lim_{k\to\infty} \inf\ A_b(\mathbf{x_k}; y) \\ &\leq \lim_{k\to\infty} \sup\ A_b(\mathbf{x_k}; y) \\ &\leq s^2 A_b(\mathbf{x}; y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.3 *$(X,\ A_b)$ bir A_b -metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için $A_b(\mathbf{x};y) \leq r$ olacak şekilde bir sabit $r > 0$ değeri varsa A_b- metrik uzaya sınırlı denir. Aksi takdirde $(X,\ A_b)$ A_b- metrik uzayı sınırsızdır denir. (Maliki vd. 2017)*

Tanım 3.4 *(X, A_b) bir A_b -metrik uzay , $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olacak şekilde bir reel sayı olsun. Bu takdirde*

$$B(x_0, r) = \{y \in X \mid A_b(y, ..., y, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar ,

$$\overline{B(x_0, r)} = \{y \in X \mid A_b(y, ..., y, x_0) \leq r\}$$

kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar adı verilir. (Maliki vd. 2017)

Tanım 3.5 *$(X,\ A_b)$ bir A_b- metrik uzay ve $G \subset X$ olsun. Her bir $x \in G$ için $B(x,\ r) \subset G$ olacak şekilde bir $r > 0$ değeri varsa $G \subset X$ kümesine bir açık küme denir. $F \subset X$ olmak üzere $X \setminus F$ kümesi açık ise $F \subset X$ kümesine bir kapalı küme denir. (Maliki vd. 2017)*

Yardımcı Teorem 3.7 $(X,\ A_b)$ *bir* A_b- *metrik uzay olsun. Bu takdirde* A_b-*metrik uzaydaki her açık yuvar bir açık küme ve her kapalı yuvar bir kapalı kümedir. (Maliki vd. 2017)*

Teorem 3.1 $(X,\ A_b)$ *bir* A_b- *metrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğru olur.*

(i) A_b- *metrik uzaydaki* $B\,(x,\ r)$ *açık yuvarlarının keyfi birleşimi ve sonlu kesişimi açıktır.*

(ii) A_b-*metrik uzaydaki* $\overline{B\,(x,\ r)}$ *kapalı yuvarların keyfi kesişimi ve sonlu birleşimi kapalıdır. (Maliki vd. 2017)*

Teorem 3.2 $(X,\ A_b)$ *bir* A_b- *metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki tüm açık yuvarların*

$$\tau = \{B\,(x,r) \mid x \in X\ ,\ r > 0\}$$

koleksiyonu X *üzerinde bir* τ *topolojinin tabanıdır. (Maliki vd. 2017)*

Tanım 3.6 $(X,\ A_x)$ *ve* $(Z,\ A_z)$ *birer* A_b- *metrik uzay ve* $f : X \to Z$ *bir fonksiyon olsun. Bu takdirde* Z *deki her* G *açık kümesi için* $f^{-1}(G)$ *ifadesi* X *de bir açık ise* f *fonksiyonuna* $x_0 \in X$ *noktasında sürekli denir. (Maliki vd. 2017)*

Teorem 3.3 $(X,\ A_x)$ *ve* $(Z,\ A_z)$ *iki* A_b- *metrik uzay olsun. Bu takdirde* $f : X \to Z$ *fonksiyonunun* $x_0 \in X$ *noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul* f *nin* x_0 *noktasında dizisel sürekli olmasıdır. (Maliki vd. 2017)*

Teorem 3.4 $(X,\ A_b)$ *bir* A_b- *metrik uzay olsun. O halde* $A(x,\ ...,\ x,\ y)$ *fonksiyonu tüm bileşenleri üzerinde süreklidir. Bir diğer deyişle* (x_k) *ve* (y_k) A_b- *metrik uzayda sırasıyla* x *ve* y *ye yakınsayan iki dizi ise* $\lim\limits_{k\to\infty} A_b\,(x_k, ..., x_k, y_k) = A_b(x, ..., x, y)$ *olur. (Maliki vd. 2017)*

Aşağıda verilen yardımcı teorem ile bir $A_b-\ metrik$ uzayda ele alınan bir dizinin A_b- Cauchy dizisi olmasını dizinin ardışık terimlerinin üzerinden değerlendirmenin bir kriterine (bir yoluna) ışık tutmaktadır. Gelecek bölümde ele alınacak olan $A_b-\ metrik$ uzaydaki sabit nokta teoremlerinde bu yardımcı teoreme atıfta bulunarak buradaki yöntem kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 3.8 $(X,\ A_b)$ *$s \geq 1$ olmak üzere bir A_b- metrik uzay olsun. (x_k), (X, A_b) A_b- metrik uzayda $\lambda \in \left[0, \dfrac{1}{s^2}\right)$ ve $k = 1, 2, ...$ olmak üzere*

$$A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) \leq \lambda A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k)$$

koşulunu sağlayan bir dizi ise (x_k) dizisi (X, A_b) $A_b - metrik$ uzayda bir $A_b - Cauchy$ dizisidir. (Ughade vd. 2016)

İspat (x_k), $(X,\ A_b)$ *A_b- metrik uzayda bir dizi olsun. Teoremin hipotezi gereğince $k = 1, 2, ...$ için*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) &\leq \lambda A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k) \\ & \lambda^2 A_b(\mathbf{x_{k-2}}; x_{k-1}) \\ &\vdots \\ &\leq \lambda^k A_b(\mathbf{x_0}; x_1) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre genelliği bozmaksızın $m > k$ olsun. Buna göre A_b- metriğin aksiyomları ve yukarıdaki eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_k}; x_m) &\leq [(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + A_b(\mathbf{x_m}; x_{k+1})] \\ &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + s^2 A_b(\mathbf{x_{k+1}}, x_m) \\ &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + s^3\left[(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+2}) + A_b(\mathbf{x_m}; x_{k+2})\right] \\ &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + s^3(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+2}) + s^4 A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_m)] \\ &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + s^3(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+2}) \\ &\quad + s^5\left[(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+3}) + A_b(\mathbf{x_m}; x_{k+3})\right] \\ &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + s^3(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+2}) \\ &\quad + s^5(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+3}) + s^7(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+4}) + ... \\ &\quad + s^{2m-2k-3}(n-1)A_b(\mathbf{x_{m-2}}, x_{m-1}) + s^{2m-2k-2}A_b(\mathbf{x_{m-1}}; x_m) \\ &\leq (n-1)\left[s\lambda^k + s^3\lambda^{k+1} + s^5\lambda^{k+2} + s^7\lambda^{k+3} + ... + s^{2m-2k-3}\lambda^{m-2}\right] \\ &\quad A_b(\mathbf{x_0}; x_1) + s^{2m-2k-2}\lambda^{m-1}A_b(\mathbf{x_0}; x_1) \\ &= (n-1)s\lambda^k\left[1 + s^2\lambda + s^4\lambda^2 + s^6\lambda^3 + ... + s^{2m-2k-4}\lambda^{m-k-2}\right] \\ &\quad A_b(\mathbf{x_0}; x_1) + s^{2m-2k-3}\lambda^{m-k-1}A_b(\mathbf{x_0}; x_1) \\ &\leq (n-1)\, s\lambda^k\left[1 + s^2\lambda + s^4\lambda^2 + s^6\lambda^3 + ...\right] A_b(\mathbf{x_0}; x_1) \\ &\quad (n-1)\frac{s\lambda^k}{1-\lambda s^2}A_b(\mathbf{x_0}; x_1) \end{aligned}$$

elde edilir. $A_b\ (\mathbf{x_0}; x_1) > 0$ olduğu varsayılır ve $\lambda s^2 < 1$ olduğundan dolayı yukarıdaki eşitsizlikte $k, m \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k,m\to+\infty} A_b(\mathbf{x_k}; x_m) = 0$$

bulunur. Bu nedenle (x_k) dizisi $(X,\ A_b)$ A_b- metrik uzayında bir $A_b - Cauchy$ dizisidir. Eğer $A_b\,(\mathbf{x_0}; x_1) = 0$ ise tüm $m > k$ için $A_b\,(\mathbf{x_k}; x_m) = 0$ olur Dolayısıyla (x_k) ifadesi $(X,\ A_b)$ A_b- metrik uzayında bir A_b $-Cauchy$ dizisidir.

4. A_b- METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde A_b- metrik uzayda çeşitli sabit nokta teoremleri verilecektir. Burada ele alınan sabit nokta teoremleri alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Banach, Kannan, Chaterjee, Bianchini, Zamfirescu ve benzeri sabit nokta teoremlerinin A_b-metrik uzay versiyonlarını oluşturmaktadır.

Teorem 4.1 *(Banach) $(X,\ A_b)$ bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$ olmak üzere her x_1 , x_2 , ..., $x_n \in X$ için*

$$A_b(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq \lambda\ A_b(x_{1,}x_2, ..., x_n)$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat *$x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezindeki koşul gereğince*

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\ \leq\ \lambda\ A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\ \leq\ ...\ \leq\ \lambda^k\ A_b(\mathbf{x_1}; x_0)$$

olur. Burada $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$ olduğundan dolayı $\lambda < \frac{1}{s^2}$ dir. O halde Cauchy olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça (x_k) bir A_b- Cauchy dizisidir. Üstelik $(X,\ A_b)$ bir tam A_b- metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Bu aşamada $Tu \neq u$ olduğu varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi kullanılarak

$$A_b(Tu, ..., Tu, x_k)\ \leq\ \lambda\ A_b(u, ..., u, x_{k-1})$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa ve A_b- metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı

$$\begin{aligned} A_b(Tu, ..., Tu, u) &\leq \lambda A_b(u, ..., u, u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde açıkça $Tu = u$ olur.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ ve u, v T nin sabit noktaları olsunlar. O halde

$$A_b(u, ..., u, v)\ =\ A_b(Tu, ..., Tu, Tv)\ \leq\ \lambda A_b(u, ..., u, v)$$

olup buradan basit bir düzenleme ile

$$(1-\lambda)A_b(u,...,u,v) \quad \leq \quad 0$$

sonucuna ulaşılır. Ancak açık bir şekilde $\lambda \in \left[0, \dfrac{1}{s^2}\right)$ *olduğundan* $A_b(u,...,u,v) = 0 \Longrightarrow u$ $= v$ *bulunur. Dolayısıyla* T *nin sabit noktası tektir.*

T *nin* u *da sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre*

$$A_b(Ty_k,...,Ty_k,Tu) \quad \leq \quad \lambda A_b(y_k,...,y_k,u)$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen bu eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(Ty_k;u) \leq \lambda$ $A_b(u;u) = 0$ *bulunur. O halde süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T *,* u *da* A_b-*süreklidir.*

Aşağıda ifade edilen sonuç teoremde verilen koşulda T dönüşümü yerine $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere T^m dönüşümü için sağlandığında bulunan sabit noktanın T için de yine sabit nokta olduğunu ifade etmektedir. Bu sonuç bu bölümde elde edilen her sabit nokta teoremi için verilebilecektir. İlgili sonuçların ispatları aynı olacağından bundan sonraki sonuçlarda ispata yer verilmeyecektir.

Sonuç 4.1 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\lambda \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$ *olmak üzere her* x_1 , x_2 , ..., $x_n \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A_b(T^m x_1, T^m x_2, ..., T^m x_n) \leq \lambda\ A_b(x_1, x_2, ..., x_n)$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat *Teorem 5.1 den dolayı* T^m *bir tek sabit noktaya sahiptir. Yani* $T^m u = u$ *dur. Buna göre*

$$Tu \quad = \quad T(T^m u) \quad = \quad T^{m+1}u \quad = \quad T^m(Tu)$$

olduğundan dolayı Tu *,* T^m *için bir sabit noktadır. Ancak sabit noktanın tekliği gereğince* $Tu = u$ *olur. Açıkça* T *dönüşümü bir tek noktaya sahiptir. Üstelik teorem 4.3 gereğince* T^m u *noktasında süreklidir.*

Teorem 4.2 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b-*metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ *olmak üzere her* $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in X$ *için*

$$A_b(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \quad \leq \quad q\,[A_b(Tx_1,x_1)+A_b(Tx_2,x_2)+\cdots+A_b(Tx_n,x_n)]$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat *$x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q\left[A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + \cdots + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right] \\ &= q(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + qA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada düzenleme yapılarak kolaylıkla

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \frac{q}{1-(n-1)q} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

sonucuna ulaşılır. Burada $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ olduğundan dolayı $a = \dfrac{q}{1-(n-1)q} < \dfrac{1}{s^2}$ dir. O halde Cauchy olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı (x_k) bir A_b- Cauchy dizisidir. (X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Bu aşamada $Tu \neq u$ olduğu varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi kullanılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; x_k) &\leq q\left[A_b(\mathbf{Tu}; u) + \cdots + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right] \\ &= q(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; u) + qA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa ve A_b- metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı

$$A_b(Tu; u) \leq q(n-1)A_b(Tu; u) + qA_b(u; u) \Longrightarrow A_b(Tu; u) \leq q(n-1)A_b(Tu; u)$$

bulunur. $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ olduğundan $q(n-1) < \dfrac{n-1}{s^2+(n-1)} < 1$ dir. Dolayısıyla açık bir şekilde bu bir çelişkidir. O halde $Tu = u$ olur. Yani u, T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ ve u, v T nin sabit noktaları olsunlar. O halde

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; Tv) &\leq q\left[A_b(\mathbf{Tu}; u) + \cdots + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tv}; v)\right] \\ &= q\left[A_b(\mathbf{u}; u) + \cdots + A_b(\mathbf{u}; u) + A_b(\mathbf{v}; v)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise açıkça $A_b(u; v) = 0$ olmasını yani $u = v$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla T nin sabit noktası tektir.

T nin u da sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ bir dizi ve $\lim_{k\to\infty} y_k = u$ olsun. Buna göre teoremin hipotezi ve A_b- metriğin aksiyomları kullanılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q\left[A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + \cdots + A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Tu}; u)\right] \\ &= q(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \\ &\leq q(n-1)\left[s(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{y_k}; \mathbf{Tu}))\right] \\ &= sq(n-1)^2 A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + sq(n-1)A_b(\mathbf{y_k}; u) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$A_b(\mathbf{Ty_k};Tu) \leq \frac{sq(n-1)}{1-sq(n-1)^2} A_b(\mathbf{y_k};u)$$

sonucuna ulaşılır. Elde edilen bu eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(Ty_k;u) \to 0$ *olur.*

Süreklilik teoreminden dolayı $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T , u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.2 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A_b(T^m x_1, T^m x_{2,...,} T^m x_n) \leq q\left[A_b(\mathbf{T^m x_1}, x_1) + A_b(\mathbf{T^m x_2},; x_2) + \cdots + A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_n)\right]$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.3 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b-*metrik uzay olsun.* T*:* $X \to X$ *dönüşümü* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2}$ *olmak üzere her* $x_{1,}\ x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \quad \leq \quad q \max\{A_b(\mathbf{Tx_1}; x_1), ..., A_b(\mathbf{Tx_n}; x_n)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), ..., A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\} \\ &= qA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte düzenleme ile $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq q\ A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$ *elde edilir. Burada* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2}$ *olduğundan dolayı* $q < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *tam metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \quad \leq \quad q \max\left\{A_b(\mathbf{Tu}; u), ..., A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right\}$$

elde edilir. $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} & A_b(\mathbf{Tu}; u) \leq q \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), ..., A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{u}; u)\} \\ \Longrightarrow\ & A_b(\mathbf{Tu}; u) \leq qA_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $q \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$ *olduğundan dolayı açıkça bu bir çelişkidir. O halde* $Tu = u$ *olmalıdır. Doğal olarak bu durumda* u, T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Tv}; v), ..., A_b(\mathbf{Tv}; v), A_b(\mathbf{Tu}; u)\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{v}; u) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{v}; v), A_b(\mathbf{u}; u)\} = 0 \end{aligned}$$

bulunur. O halde açıkça $A_b(v; u) = 0 \Longrightarrow v = u$ *olur. Yani* T *nin sabit noktası tektir.*

T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul nedeniyle*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), ..., A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), A_b(\mathbf{Tu}; u)\} \\ &= qA_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \\ &\leq q((n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{y_k}; Tu)) \end{aligned}$$

bulunup gerekli düzenleme yapılarak $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \frac{q}{1-(n-1)} A_b\ (\mathbf{y_k}; u)$ *elde edilir. Burada* $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T, u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.3 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $0 \leq q < \frac{1}{s^2}$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *ler için*

$$A_b(\mathbf{T^m x_1}; T^m x_n) \leq q \max\{A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_1), ..., A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_n)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.4 .(X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $s^2\alpha + (s^2 + (n-1))\,\beta < 1$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A_b(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq \alpha A_b(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta\left[A_b(Tx_1, x_1) + \cdots + A_b(Tx_n, x_n)\right]$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b *− süreklidir.*

İspat *$x_0 \in X$ olmak üzere $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir $(x_k) \subseteq X$ dizisi tanımlansın. Bu takdirde teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \alpha A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + \beta \left[A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + \ldots + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right] \\ &= \alpha A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + \beta(n-1) A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + \beta A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \\ &= (\alpha + \beta) A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + \beta(n-1) A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte düzenleme yapılarak basitçe

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta(n-1)} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

sonucu elde edilir. Burada $s^2\alpha + (s^2 + (n-1))\,\beta < 1$ olduğundan dolayı $a = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\beta(n-1)}$ $< \dfrac{1}{s^2}$ dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça (x_k) bir A_b- Cauchy dizisidir. (X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Bu noktada u nun sabit nokta olduğunu göstermek için $Tu \neq u$ varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; x_k) &\leq \alpha A_b(\mathbf{u}; x_{k-1}) + \beta \left[A_b(\mathbf{Tu}; u) + \cdots + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right] \\ &= \alpha A_b(\mathbf{u}; x_{k-1}) + \beta(n-1) A_b(\mathbf{Tu}; u) + \beta A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa ve A_b- metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı

$$A_b(\mathbf{Tu}; u) \leq \alpha A_b(\mathbf{u}; u) + \beta(n\text{-}1) A_b(\mathbf{Tu}; u) + \beta A_b(\mathbf{u}; u) \Longrightarrow A_b(\mathbf{Tu}; u) \leq \beta(n\text{-}1) A_b(\mathbf{Tu}; u)$$

bulunur. $s^2\alpha + (s^2 + (n-1))\beta < 1$ olduğundan $\beta(n-1) < 1$ dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. Bu takdirde açıkça $Tu = u$ olmalıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ ve u, v T nin sabit noktaları olsunlar. O halde

$$\begin{aligned} A_b(Tu; Tv) &\leq \alpha A_b(\mathbf{u}; v) + \beta \left[A_b(\mathbf{Tu}; u) + \cdots + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tv}; v)\right] \\ &= \alpha A_b(\mathbf{u}; v) + \beta \left[(n-1) A_b(\mathbf{u}; u) + A_b(\mathbf{v}; v)\right] \\ &= \alpha A_b(\mathbf{u}; v) \end{aligned}$$

bulunur. Ancak $s^2\alpha + (s^2 + (n-1))\beta < 1$ olduğundan $\alpha < 1$ olup açıkça $A_b(\mathbf{u}; v) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $u = v$ dir. Yani T nin sabit noktası tektir.

T nin u da sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ bir dizi ve $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ olsun.Buna göre

$$\begin{aligned} A_b(Ty_k; Tu) &\leq \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta \left[A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + \cdots + A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Tu}; u)\right] \\ &= \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta(n-1) A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \\ &\leq \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta(n-1) \left[s(A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + \cdots + A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{y_k}; Tu))\right] \\ &= \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + s\beta(n-1)^2 A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + s\beta(n-1) A_b(\mathbf{y_k}; u) \\ &= \left[\alpha + s\beta(n-1)\right] A_b(\mathbf{y_k}; u) + s\beta(n-1)^2 A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan düzenleme ile

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \frac{\alpha + s\beta(n-1)}{1 - s\beta(n-1)^2} A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

sonucuna ulaşılır. Bulunan bu son eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ *olur. Süreklilik teoreminden dolayı* $\mathbf{Ty_k} \to u = Tu$ *olup* T, u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.4 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.*$T : X \to X$ *dönüşümü* $s^2\alpha + (s^2 + (n-1))\beta < 1$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A_b(T^m x_1, T^m x_{2,...,} T^m x_n) \leq \alpha A_b(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta \left[A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_1) + \cdots + A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_n)\right]$$

koşulunu sağlıyor olsun. Bu takdirde T *dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik* T^m *dönüşümü bu sabit noktada süreklidir.*

Teorem 4.5 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $s^2(\alpha + \beta) < 1$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A_b(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq \alpha A_b(x_1, x_{2,...,} x_n) + \beta \max\{A_b(\mathbf{Tx_1}; x_1), ..., A_b(\mathbf{Tx_n}; x_n)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat $x_0 \in X$ *olmak üzere* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* $(x_k) \subseteq X$ *dizisi tanımlansın. Bu takdirde teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \alpha A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + \beta \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\}$$

olup burada maksimum operatörün değerine bağlı olarak iki durum söz konusudur.

1.Durum:

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \geq A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

olsun. O halde bu kabullenme ve gerekli işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \alpha A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + \beta A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \frac{\alpha}{1-\beta} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.Durum:

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \quad \leq \quad A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

olsun. Buna göre gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \alpha A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + \beta A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \\ &= (\alpha+\beta) A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

bulunur. O halde iki durum birlikte düşünülürse $\lambda = \max\left\{\frac{\alpha}{1-\beta}, \alpha+\beta\right\}$ *olmak üzere* $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \lambda A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$ *dir. Burada* $(\alpha+\beta) < \frac{1}{s^2}$ *olduğundan* $\lambda < \frac{1}{s^2}$ *dir. O halde* A_b- *Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 gereğince* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir. Ayrıca* $(X,\, A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \leq \alpha A_b(\mathbf{u}; x_{k-1}) + \beta \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\}$$

olup $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq \alpha A_b(\mathbf{u}; u) + \beta \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{u}; u)\} \\ &\leq \beta A_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

elde edilir. $s^2(\alpha+\beta) < 1$ *olduğundan* $\beta < 1$ *dir. Dolayısıyla açıkça* $Tu = u$ *olur.*

Sabit noktanın tekliğini ispat etmek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezindeki koşul kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa*

$$A_b(\mathbf{Tu}; Tv) \quad \leq \quad \alpha A_b(\mathbf{u}; v) + \beta \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{Tv}; v)\} \quad \leq \quad \alpha A_b(\mathbf{u}; v)$$

bulunur. $s^2(\alpha+\beta) < 1$ *olduğundan* $\alpha < 1$ *olup açıkça* $A_b(u; v) = 0$ *olacağından dolayı* $u = v$ *dir. Yani* T *nin sabit noktası tektir.*

T *nin* u *da sürekliliğini göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Bu takdirde teoremin hipotezi ,* A_b- *metriğin aksiyomları kullanılarak*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta \max\{A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), A_b(\mathbf{Tu}; u)\} \\ &= \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \\ &= \alpha A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta s(n-1) A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + \beta s A_b(\mathbf{y_k}; Tu) \\ &= (\alpha + s\beta)\, A_b(\mathbf{y_k}; u) + \beta s(n-1) A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \end{aligned}$$

olacağından

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \frac{\alpha + s\beta}{1 - \beta s(n-1)} A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \to 0$ *olur. Sürekliliği karakterize eden teorem 4.3 den dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T, u *da süreklidir.*

Sonuç 4.5 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun.$T : X \to X$ dönüşümü $s^2(\alpha+\beta) < 1$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve bazı $m \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(T^m x_1, T^m x_{2,...,} T^m x_n) \leq \alpha A_b(x_1, x_2, ..., x_n) + \beta \max\{A_b(T^m x_1; x_1) + ... + A_b(\mathbf{T}^m \mathbf{x_n}; x_n)\}$$

koşulunu sağlıyor olsun. Bu takdirde T dönüşümü bir tek sabit noktaya sahiptir.Üstelik T^m dönüşümü bu sabit noktada süreklidir.

Teorem 4.6 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \frac{1}{s^2+s}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{Ty}; Tx) \leq \max\{aA_b(\mathbf{y}; x), b\left[A_b(\mathbf{Tx}, x) + A_b(\mathbf{Ty}; y)\right], b\left[A_b(\mathbf{Ty}; x) + A_b(\mathbf{Ty}; y) + A_b(\mathbf{Tx}; y)\right]\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \max \left\{ \begin{array}{c} aA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right], \\ b\left[A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_k)\right] \end{array} \right\}$$

elde edilir. Bu noktada A_b- metrik aksiyomu gereğince

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) &\leq s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k) \\ &= s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

olduğundan açıkça

$$b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right] \leq b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + sA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right]$$

olur. O halde

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \max\{a.A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + sA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right]\}$$

elde edilir. Buna göre maksimum operatörünün sonucuna göre 2 durum vardır.

1.Durum

$$\max\{a.A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + sA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right]\} = b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + sA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right]$$

olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) &\leq b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + sA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right] \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \frac{b}{1-bs} A_b(x_k; x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

2.Durum

$$\max\{a.A_b(\mathbf{x_k};x_{k-1}),b\left[A_b(\mathbf{x_k};x_{k-1})+sA_b(\mathbf{x_{k+1}};x_k)\right]\}=aA_b(\mathbf{x_k};x_{k-1})$$

olsun. Buna göre

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}};x_k)\leq aA_b(\mathbf{x_k};x_{k-1})$$

bulunur. O halde her iki durum göz önünde bulundurularak $q=\max\left\{\frac{b}{1-bs},a\right\}$ *olmak üzere* $A_b(x_{k+1};x_k)\leq q\ A_b(x_k;x_{k-1})$ *dir. Burada* $a\in\left[0,\frac{1}{s^2}\right)$, $b\in\left[0,\frac{1}{s^2+s}\right)$ *olduğundan* $q<\frac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.*(X,A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k)\to u$ *olacak şekilde* $u\in X$ *vardır. Bu aşamada* $Tu\neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi kullanılarak*

$$A_b(\mathbf{Tu};x_k)\leq\max\left\{\begin{array}{c}aA_b(\mathbf{u};x_{k-1}),b\left[A_b(\mathbf{x_k};x_{k-1})+A_b(\mathbf{Tu};u)\right],\\ b\left[A_b(\mathbf{Tu};x_{k-1})+A_b(\mathbf{Tu};u)+A_b(\mathbf{x_k};u)\right]\end{array}\right\}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k\to\infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$A_b(\mathbf{Tu};u)\leq 2bA_b(\mathbf{Tu};u)$$

$b\in\left[0,\frac{1}{s^2+s}\right)$ *ve* $n\geq 3$ *olduğundan açıkça* $2b<1$ *dir. Dolayısıyla aşikar olarak bu bir çelişkidir. O halde* $Tu=u$ *olur.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u\neq v$ *olacak şekilde* u,v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezi kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa*

$$\begin{aligned}A_b(\mathbf{Tv};Tu)&\leq\max\left\{\begin{array}{c}aA_b(\mathbf{v};u),b\left[A_b(\mathbf{Tu};u)+A_b(\mathbf{Tv};v)\right],\\ b\left[A_b(\mathbf{Tv};u)+A_b(\mathbf{Tv};v)+A_b(\mathbf{Tu};v)\right]\end{array}\right\}\\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{v};u)&\leq\max\{aA_b(\mathbf{v};u),2bA_b(\mathbf{v};u)\}\\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{v};u)&\leq cA_b(\mathbf{v};u)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Burada $c=\max\{a,2b\}$ *olup* $a\in\left[0,\frac{1}{s^2}\right)$, $b\in\left[0,\frac{1}{s^2+s}\right)$ *olduğundan* $c<1$ *dir. Buna göre açıkça* $A_b(\mathbf{v};u)=0\Longrightarrow u=v$ *dir. Yani* T *nin sabit noktası tektir.*

T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k)\subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim_{k\to\infty}y_k=u$ *olsun. Buna göre teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Ty_k};Tu)\leq\max\left\{\begin{array}{c}aA_b(\mathbf{y_k};u),b\left[A_b(\mathbf{Tu};u)+A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)\right],\\ b\left[A_b(\mathbf{Ty_k};u)+A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)+A_b(\mathbf{Tu};y_k)\right]\end{array}\right\}$$

olacağından ve açıkça

$$A_b(\mathbf{Tu}; u) = A_b(\mathbf{u}; u) = 0$$

olduğundan dolayı

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \max\{aA_b(\mathbf{y_k}; u), b\left[A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Tu}; y_k)\right]\}$$

elde edilir. Ayrıca A_b- metriğin aksiyomları gereğince

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \leq s((n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{y_k}; u))$$

olduğundan dolayı

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \max\{aA_b(\mathbf{y_k}; u), b\left[snA_b(\mathbf{Ty_k}; u) + 2sA_b(\mathbf{y_k}; u)\right]\}$$

bulunur. O halde maksimum operatörünün olası sonuçlarına göre mevcut 2 durum vardır.

1.Durum

$$aA_b(\mathbf{y_k}; u) \geq b\left[snA_b(\mathbf{Ty_k}; u) + 2sA_b(\mathbf{y_k}; u)\right]$$

olsun. O halde açık bir şekilde

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq aA_b(\mathbf{y_k}; u)$$

2.Durum

$$aA_b(\mathbf{y_k}; u) \leq b\left[snA_b(\mathbf{Ty_k}; u) + 2sA_b(\mathbf{y_k}; u)\right]$$

olsun. Bu takdirde

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \frac{2bs}{s(1-n)b} A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

olur. Her iki durumda $k \to \infty$ için limit alınırsa $A_b(Ty_k; u) \to 0$ olur. Süreklilik teoreminden dolayı $Ty_k \to u = Tu$ olup T, u noktasında A_b- süreklidir.

Sonuç 4.6 (X, A_b) *bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \frac{1}{s^2+s}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve bazı $m \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(\mathbf{T^m y}; T^m x) \leq \max\left\{\begin{array}{c} aA_b(\mathbf{y}; x), b\left[A_b(\mathbf{T^m x}; x) + A_b(\mathbf{T^m y}; y)\right], \\ b\left[A_b(\mathbf{T^m y}; x) + A_b(\mathbf{T^m y}; y) + A_b(\mathbf{T^m x}; y)\right] \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T^m dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Teorem 4.7 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T{:}X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \frac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{Ty}; Tx) \leq \max \left\{ \begin{array}{c} aA_b(\mathbf{y}; x), b\left[A_b(\mathbf{Tx}; x) + A_b(\mathbf{Ty}; y)\right], \\ b\left[A_b(\mathbf{Tx}; y) + A_b(\mathbf{Ty}; x)\right] \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir **.**

İspat *$x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \max \left\{ \begin{array}{c} aA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right], \\ b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1})\right] \end{array} \right\}$$

olur. Bu noktada A_b- metriğin $(A_b 2)$ aksiyomu gereğince

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) \leq s(n\text{-}1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k) = s(n\text{-}1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1})$$

olduğundan dolayı

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \max\{a.A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), sb\left[(n\text{-}1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right]\}$$

bulunur.O halde maksimum operatörünün sonucuna göre 2 durum söz konusudur.

1.Durum

$$a.A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \quad \geq \quad sb\left[(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right]$$

olsun. Bu durumda açıkça

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq aA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

olur.

2.Durum

$$a.A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \quad \leq \quad sb\left[(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right]$$

olsun. Buna göre gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq bs\left[(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right] \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \frac{bs}{1-s(n-1)b} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre her iki durum göz önünde bulundurularak $q = \max \left\{ a, \dfrac{bs}{1 - s(n-1)b} \right\}$ *olmak üzere* $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq q\, A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$ *dir.*

Burada $a \in \left[0, \dfrac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \dfrac{1}{s^2 + s(n-1)}\right)$ *olduğundan açıkça* $q < 1$ *dir. O halde Cauchy olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir. Üstelik* (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu aşamada* $Tu \neq u$ *olduğu varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi kullanılarak*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \leq \max \left\{ \begin{array}{l} aA_b(\mathbf{u}; x_{k-1}), \\ \quad b\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{Tu}; u)\right] + b\left[A_b(\mathbf{x_k}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1})\right] \end{array} \right\}$$

olur. $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b *fonksiyonunun tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı* $A_b(\mathbf{Tu}; u) \leq bA_b(Tu; u)$ *bulunur.* $a \in \left[0, \dfrac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \dfrac{1}{s^2 + s(n-1)}\right)$ *olduğundan dolayı bu bir çelişkidir.Bu takdirde* $Tu = u$ *elde edilir. Yani* u, T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} aA_b(\mathbf{v}; u), sb\left[A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tv}; v)\right], \\ \quad b\left[A_b(\mathbf{Tu}; v) + A_b(\mathbf{Tv}; u)\right] \end{array} \right\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{v}; u) &\leq \max\{aA_b(\mathbf{v}; u), 2sbA_b(\mathbf{v}; u)\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq cA_b(\mathbf{v}; u) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $c = \max\{a, 2bs\}$ *olup* $a \in \left[0, \dfrac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \dfrac{1}{s^2 + s(n-1)}\right)$ *olduğundan* $c < 1$ *dir. Buna göre açıkça* $A_b(v; u) = 0 \Longrightarrow u = v$ *dir.*

T nin u noktasında sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre*

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \max \left\{ \begin{array}{l} aA_b(\mathbf{y_k}; u), b\left[A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k)\right], \\ \quad b\left[A_b(Ty_k, u) + A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(Tu, y_k)\right] \end{array} \right\}$$

olur. Açıkça

$$A_b(\mathbf{Tu}; u) = A_b(\mathbf{u}; u) = 0$$

olduğundan

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \max \left\{ \begin{array}{l} aA_b(\mathbf{y_k}; u), \\ \quad b\left[A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Tu}; y_k)\right] \end{array} \right\}$$

elde edilir. Bu noktada A_b- metriğin aksiyomları gereğince

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \leq s(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

olduğundan dolayı

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \max\{aA_b(\mathbf{y_k}; u), bs\left[nA_b(\mathbf{Ty_k}; u)+2A_b(\mathbf{y_k}; u)\right]\}$$

bulunur. O halde maksimum operatörünün sonucuna göre 2 durum söz konusudur.

1.Durum:

$$aA_b(\mathbf{y_k}; u) \quad \geq \quad bs\left[nA_b(\mathbf{Ty_k}; u)+2A_b(\mathbf{y_k}; u)\right]$$

olsun. Buna göre

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq aA_b(\mathbf{y_k}; u)$$

olur.

2.Durum:

$$aA_b(\mathbf{y_k}; u) \quad \leq \quad bs\left[nA_b(\mathbf{Ty_k}; u)+2A_b(\mathbf{y_k}; u)\right]$$

olsun. O halde

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \frac{b(1+s)}{1-(1+s(n-1))b}A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

olur. Her iki durumda $k \to \infty$ için limit alınırsa $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ olur. Süreklilik teoreminden dolayı $Ty_k \to u = Tu$ olup T, u da A_b- süreklidir.

Sonuç 4.7 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $a \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$, $b \in \left[0, \frac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ i çin*

$$A_b(\mathbf{T^m y}; Tx) \leq \max\{aA_b(\mathbf{y}; x), b\left[A_b(T^m x, x)+A_b(\mathbf{T^m y}; y)\right], b\left[A_b(\mathbf{T^m x}; y)+A_b(\mathbf{T^m y}; x)\right]\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T^m dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Teorem 4.8 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $k \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{Ty};Tx) \quad \leq \quad k\max\left\{\begin{array}{c} A_b(\mathbf{Tx}; x) + A_b(\mathbf{Ty}; y), \\ A_b(\mathbf{Ty}; x) + A_b(\mathbf{Ty}; y) + A_b(\mathbf{Tx}; y), \\ A_b(\mathbf{y}; Tx) + A_b(\mathbf{y}; Ty) + A_b(\mathbf{x}; Ty) \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat *$x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\le k \max \left\{ \begin{array}{r} sA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), \\ A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x\ _{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_k), \\ A_b(\mathbf{x_k}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_{k+1})) \end{array} \right\} \\ &= k \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), \\ nA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), \\ nA_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\ \mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olur. Buna göre maksimum operatörünün değerlerine göre 2 durum vardır.

1.Durum

$$\begin{array}{c} sA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), \\ A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x\ _{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_k) \end{array} \ge A_b(\mathbf{x_k}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_{k+1})$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\le k\left[A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)\right] \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\le \frac{k}{1-k} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

olur.

2.Durum

$$\begin{array}{c} sA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{x\ _{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_k) \\ \le A_b(\mathbf{x_k}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_{k+1}) \end{array}$$

olsun. Buna göre gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\le k\left[A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\right] \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\le \frac{k}{1-k} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $k \in \left[0, \frac{1}{s^2+1}\right)$ olduğundan $q = \frac{k}{1-k} < \frac{1}{s^2}$ dir. O halde Cauchy olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı (x_k) bir A_b- Cauchy dizisidir. (X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Bu aşamada $Tu \neq u$ olduğu varsayılsın. Bu durumda teoremin hipotezi kullanılarak

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \le k \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1}) + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{u}; x_k) + A_b(\mathbf{u}; Tu) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; Tu) \end{array} \right\}$$

olur. Son elde edilen eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa ve A_b- fonksiyonunun tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\le k \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{u}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{u}; u) + A_b(\mathbf{u}; u) + A_b(\mathbf{u}; Tu) + A_b(\mathbf{u}; Tu) \end{array} \right\} \\ &\Longrightarrow 2kA_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+1}\right)$ *olduğundan açıkça* $2k < 1$ *dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde* $Tu = u$ *olur. Yani* u *,* T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *ve* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde*

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{Tv};Tu) &\leq k\max\left\{\begin{array}{c} A_b(\mathbf{Tu};u)+A_b(\mathbf{Tv};v), \\ A_b(\mathbf{Tv};u)+A_b(Tv,v)+A_b(\mathbf{Tu};v), \\ A_b(\mathbf{v};Tu)+A_b(\mathbf{v};Tv)+A_b(\mathbf{u};Tv) \end{array}\right\} \\
\Longrightarrow A_b(\mathbf{Tv};Tu) &\leq k\max\left\{\begin{array}{c} A_b(\mathbf{Tu};u)+A_b(\mathbf{Tv};v), \\ A_b(\mathbf{Tv};u)+A_b(\mathbf{Tu};v), \\ A_b(\mathbf{v};Tu)+A_b(\mathbf{u};Tv) \end{array}\right\} \\
\Longrightarrow A_b(\mathbf{Tv};Tu) &\leq k\max\{0, 2A_b(\mathbf{v};u), 2A_b(\mathbf{v};u)\} \\
\Longrightarrow A_b(\mathbf{v};u) &\leq 2kA_b(\mathbf{v};u)
\end{aligned}$$

bulunur. $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+1}\right)$ *olup* $2k < 1$ *dir. Dolayısıyla açıkça* $A_b(\mathbf{v};u) = 0 \Longrightarrow u = v$ *dir. Buna göre* T *nin bir tek sabit noktası vardır.*

T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre*

$$A_b(\mathbf{Ty_k};Tu) \leq k\max\left\{\begin{array}{l} A_b(\mathbf{Tu};u)+A_b(\mathbf{Ty_k};y_k), \\ A_b(\mathbf{Ty_k};u)+A_b(Ty_k,y_k)+A_b(Tu,y_k), \\ A_b(\mathbf{y_k};Tu)+A_b(\mathbf{y_k};Ty_k)+A_b(\mathbf{u};Ty_k) \end{array}\right\}$$

olur. Açıkça

$$A_b(\mathbf{Tu};u) = A_b(\mathbf{u};u) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{Ty_k};Tu) &\leq k\max\left\{\begin{array}{l} A_b(Ty_k,y_k), \\ A_b(\mathbf{Ty_k};u)+A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)+A_b(Tu,y_k), \\ A_b(\mathbf{y_k};Tu)+A_b(\mathbf{y_k};Ty_k)+A_b(\mathbf{u};Ty_k) \end{array}\right\} \\
&= k\left(A_b(Ty_k,u)+A_b(Ty_k,y_k)+A_b(Tu,y_k)\right) \\
&\leq k\left(nA_b(Ty_k,u)+2A_b(\mathbf{y_k};u)\right) \\
\Longrightarrow A_b(\mathbf{Ty_k};u) &\leq \frac{2k}{1-nk}A_b(\mathbf{y_k};u)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k};u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T*,* u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.8 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.*$T : X \to X$ *dönüşümü* $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+1}\right)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A_b(\mathbf{T^m y}; T^m x) \leq k \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{T^m x}; x) + A_b(\mathbf{T^m y}; y), \\ A_b(\mathbf{T^m y}; x) + A_b(\mathbf{T^m y}; y), A_b(\mathbf{T^m x}; y), \\ A_b(\mathbf{y}; T^m x) + A_b(\mathbf{y}; T^m y) + A_b(\mathbf{x}; T^m x) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.9 (X, A_b) *bir tam* A_b-*metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *i çin*

$$A_b(T(x_1), T(x_2), ..., T(x_n)) \leq q \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(x_1, x_2, ..., x_n), \\ A_b(\mathbf{Tx_1}; x_1), ..., A_b(\mathbf{Tx_n}; x_n), \\ A_b(\mathbf{Tx_2}; x_2), ..., A_b(\mathbf{Tx_1}; x_n) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), ..., \\ A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), \\ A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), ..., A_b(\mathbf{x_k}; x_k), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}) \end{array} \right\} \\ &= q \max\{A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1})\} \\ &\leq q \max \left\{ \begin{array}{c} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k); \\ (n-1)\, A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{array} \right\} \\ &= q(n-1) A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + q A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte düzenleme yapılarak

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \frac{q}{1-(n-1)q} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1})$$

elde edilir. Burada $a = \dfrac{q}{1-(n-1)q} < \dfrac{1}{s^2}$ *olduğundan dolayı* $a < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır.*

Bu noktada u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \quad \leq \quad q \max\left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{u}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{Tu}; u), ..., A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{x_k}; u), A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1}) \end{array} \right\}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq q \max\left\{ \begin{array}{r} A_b(\mathbf{u}; u), A_b(\mathbf{Tu}; u), ..., \\ A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{u}; u), A_b(\mathbf{Tu}; u), ..., A_b(\mathbf{u}; u); A_b(\mathbf{Tu}; u) \end{array} \right\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq qA_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2 + (n-1)}\right)$ *olduğundan açıkça bu bir çelişkidir. O halde* $Tu = u$ *olur. Yani* u *,* T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *ve* u*,* v *T nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezindeki koşul gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{v}; u), A_b(\mathbf{Tv}; v), ..., A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ A_b(Tv, v), ..., A_b(\mathbf{Tu}; v), A_b(\mathbf{Tv}; u) \end{array} \right\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{v}; u), A_b(\mathbf{Tu}; v), A_b(\mathbf{Tv}; u)\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{v}; u) &\leq qA_b(\mathbf{v}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $q < 1$ *olduğundan açıkça* $A_b(v; u) = 0 \Longrightarrow u = v$ *dir. Dolayısıyla T nin sabit noktası tektir.* T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q \max\left\{ \begin{array}{c} A_b(\mathbf{y_k}; u), A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), ..., A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ A_b(\mathbf{Ty_k}, y_k), ..., A_b(\mathbf{Tu}, y_k); A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \end{array} \right\} \\ &\leq q \max\{A_b(\mathbf{y_k}; u), A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), A_b(\mathbf{Ty_k}; u)\} \\ &\leq q \max\left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{y_k}; u), \\ (n\text{-}1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{y_k}; Tu), \\ A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \end{array} \right\} \\ &= q(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + qA_b(\mathbf{y_k}; u) \end{aligned}$$

olacağından $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \dfrac{q}{1-(n-1)q} A_b(\mathbf{y_k}; u)$ *elde edilir. Burada* $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T*,* u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.9 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ *olmak üzere her* $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in X$ *i çin*

$$A_b(T^m x_1, T^m x_2, ..., T^m x_n) \quad \leq q \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(x_1, x_2, ..., x_n), \\ A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_1), ..., A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_n), \\ A_b(\mathbf{T^m x_2}; x_2), ..., A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_n) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.10 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* T*:* $X \to X$ *dönüşümü* $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(2n-3)}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A_b(Tx_1, Tx_2, ..., Tx_n) \leq k \max \left\{ \begin{array}{l} A_b(\mathbf{T}\mathbf{x}_1; x_1) + \cdots + A_b(\mathbf{T}\mathbf{x}_n; x_n), \\ A_b(\mathbf{T}\mathbf{x}_2; x_1) + \cdots + A_b(\mathbf{T}\mathbf{x}_1; x_n), \\ A_b(\mathbf{x}_2; Tx_1) + \cdots + A_b(\mathbf{x}_1; Tx_n) \end{array} \right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} & A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \\ & \leq k \max \left\{ \begin{array}{r} s((n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), \\ (n-2)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_k), \\ +A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}), (n-2)A_b(\mathbf{x_k}; x_{k+1}) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+1}) + A_b(\mathbf{x_k}; x_k)) \end{array} \right\} \\ & = k \max\{s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), (n-2)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1})\} \\ & \leq k \max\{s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), (2n-3)A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})\} \\ & = k(2n-3)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + kA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

bulunur.Bu eşitsizlikte düzenleme yapılarak

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \quad \leq \quad \frac{k}{1-(2n-3)k} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

elde edilir. Burada $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(2n-3)}\right)$ *olduğundan dolayı* $\dfrac{k}{1-(2n-3)k} < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *tam metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak* *şekilde $u \in X$ vardır. Bu noktada u nun sabit nokta olduğunu göstermek için $Tu \neq u$ olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \quad \leq \quad k \max \left\{ \begin{array}{c} s(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}), \\ (n-2)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tx_k}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1}), \\ (n-2)A_b(\mathbf{u}; Tu) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; Tu) + A_b(\mathbf{u}; x_k) \end{array} \right\}$$

olur. Burada $k \to \infty$ için limit alınırsa ve A_b- metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) \quad &\leq \quad k \max \left\{ \begin{array}{c} s(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{u}; u), \\ (n-2)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{u}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ (n-2)A_b(\mathbf{u}; Tu) + A_b(\mathbf{u}; Tu) + A_b(\mathbf{u}; u) \end{array} \right\} \\ &= \quad ks(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2 + (2n-3)}\right)$ olduğ undan açıkça $k < 1$ dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde $Tu = u$ olur.Yani u , T nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ olacak şekilde u, v T nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezinden

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) \quad &\leq \quad k \max \left\{ \begin{array}{c} s((n-1)A_b(\mathbf{Tv}; v) + A_b(\mathbf{Tu}; u), \\ (n-2)A_b(\mathbf{Tv}; v) + A_b(\mathbf{Tu}; v) + A_b(\mathbf{Tv}; u), \\ (n-2)A_b(\mathbf{v}; Tv) + A_b(\mathbf{u}; Tv) + A_b(\mathbf{v}; Tu)) \end{array} \right\} \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{Tv}; Tu) \quad &\leq \quad k \max\{0, 2sA_b(\mathbf{u}; v), 2sA_b(\mathbf{v}; u)\} \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{v}; u) \quad &\leq \quad 2ksA_b(\mathbf{v}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2 + (2n-3)}\right)$ olduğ undan $2ks < 1$ dir. Dolayısıyla açıkça $A_b(\mathbf{v}; u) = 0$ $\Longrightarrow u = v$ dir. Yani T nin sabit noktası tektir.

T nin u noktasında sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ bir dizi ve $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul gereğince

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{Ty_k};Tu) &\leq k\max\left\{\begin{array}{l} s((n-1)A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)+A_b(\mathbf{Tu};u), \\ \quad (n-2)A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)+A_b(\mathbf{Tu};y_k)+A_b(\mathbf{Ty_k};u), \\ \qquad (n-2)A_b(\mathbf{y_k};Ty_k)+A_b(\mathbf{u};Ty_k)+A_b(\mathbf{y_k};Tu)) \end{array}\right\} \\
&\leq k\max\left\{\begin{array}{l} s(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k};y_k), \\ \quad (n-2)A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)+A_b(u;y_k)+A_b(\mathbf{Ty_k};u), \\ \qquad (n-2)A_b(\mathbf{y_k};Ty_k)+A_b(\mathbf{u};Ty_k)+A_b(\mathbf{y_k};Tu) \end{array}\right\} \\
&\leq k\max\left\{\begin{array}{l} s((n-1)A_b(\mathbf{Ty_k};y_k), \\ \quad (n-2)A_b(\mathbf{Ty_k};y_k)+A_b(\mathbf{u};y_k)+A_b(\mathbf{Ty_k};u) \end{array}\right\} \\
&\leq k(n-1)sA_b(\mathbf{Ty}_k;y_k) \\
&\leq k(n\text{-}1)s(s^2(n\text{-}1)A_b(\mathbf{Ty}_k;u)+A_b(\mathbf{y_k};u)) \\
\Longrightarrow \quad A_b(Ty_k;Tu) &\leq \frac{k(n-1)s}{1-k(n-1)^2s^2}A_b(\mathbf{y_k};u)
\end{aligned}$$

olacağından $A_b(\mathbf{Ty_k};Tu) \leq \dfrac{k(n-1)s}{1-k(n-1)^2s^2}A_b(\mathbf{y_k};u)$ elde edilir. Burada $k\to\infty$ için limit alınırsa $A_b(\mathbf{Ty_k};u)\to 0$ olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı $Ty_k \to u = Tu$ olup T, u da A_b- süreklidir

Sonuç 4.10 *$(X,\ A_b)$ bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $k \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(2n-3)}\right)$ olmak üzere her $x, y \in X$ ve bazı $m \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(\mathbf{Ty};Tx) \;\leq\; k\max\left\{\begin{array}{l} A_b(\mathbf{Ty};y)+A_b(\mathbf{Tx};x), \\ A_b(\mathbf{Ty};x)+A_b(\mathbf{Tx};y), \\ A_b(\mathbf{y};Tx)+A_b(\mathbf{x};Ty) \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T^m dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Teorem 4.11 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. T: $X \to X$ dönüşümü $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^3+(2n-3)s}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{Ty};Tx) \;\leq\; q\max\{(n-2)A_b(\mathbf{Ty};y)+A_b(\mathbf{Ty};x),(n-1)A_b(\mathbf{Tx};y)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q \max \left\{ \begin{array}{l} s((n\text{-}2)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}), \\ (n\text{-}1)A_b(\mathbf{x_k}; x_k)) \end{array} \right\} \\ &\leq q \max\{s((n\text{-}2)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + (n\text{-}1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}))\} \\ &= qs(2n-3)A_b(x_{k+1}; x_k) + qsA_b(x_k; x_{k-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte düzenleme ile $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \dfrac{qs}{1-(2n-3)qs} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$ *elde edilir. Burada* $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^3+(2n-3)s}\right)$ *olduğundan dolayı* $\dfrac{qs}{1-(2n-3)qs} < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* $(X,\, A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \leq q \max\{s((n-2)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1}), (n-1)A_b(\mathbf{u}; u))\}$$

elde edilir.$k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq q \max\{s(n-2)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; u), (n-1)A_b(\mathbf{u}; u))\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq q \max s(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^3+(2n-3)s}\right)$ *olduğ undan dolayı açıkça* $q(n-1) < \dfrac{1}{2}$ *dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde* $Tu = u$ *olmalıdır. Yani* u*,* T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\{s((n-2)A_b(\mathbf{Tv}; v) + A_b(\mathbf{Tv}; u), (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; v))\} \\ &= qs(n-1)A_b(\mathbf{u}; v) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $qs(n-1) < \dfrac{1}{2}$ *olduğundan açıkça* $A_b(\mathbf{v}; u) = 0 \Longrightarrow v = u$ *olur. Dolayısıyla* T *nin sabit noktası tektir.*

T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul dolayısıyla*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q \max\{s((n-2)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Ty_k}; u), (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k))\} \\ &\leq q \max \left\{ \begin{array}{r} s((n\text{-}2)\,[s^2(n\text{-}1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu)] + A_b(\mathbf{Ty_k}; u), \\ (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)) \end{array} \right\} \\ &= q \max \left\{ \begin{array}{r} s(n\text{-}1)\{s^3((n\text{-}2)(n\text{-}1)+1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + (n\text{-}2)A_b(\mathbf{y_k}; Tu), \\ (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada maksimum operatörünün değerlerine göre iki durum söz konusudur.

1.Durum:

$$s((n-2)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k)+A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \quad \geq \quad (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq s^3q(n^2-3n+3)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu)+(n-2)qsA_b(\mathbf{y_k}; u) \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq \frac{qs^3(n-2)}{1-s^3q(n^2-3n+3)}A_b(\mathbf{y_k}; u) \end{aligned}$$

2.Durum:

$$s((n-2)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k)+A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \quad \leq \quad (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)$$

olsun. Buna göre gerekli işlemler yapılarak

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \quad \leq \quad sq(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; Ty_k) = sq(n-1)A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

elde edilir. $r = \max\{\frac{qs^3(n-2)}{1-s^3q(n^2-3n+3}, sq(n-1)\}$ *olsun. Her iki durum içinde* $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq rA_b(\mathbf{y_k}; u)$ *elde edilir. Burada* $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(Ty_k; u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T, u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.11 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \frac{1}{s^3+(2n-3)s}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A_b(\mathbf{T^my}; Tx) \quad \leq \quad q\max\{(n-2)A_b(\mathbf{T^my}; y)+A_b(\mathbf{T^my}; x), (n-1)A_b(\mathbf{T^mx}; y)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.12 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \frac{1}{s^3+(2n-3)s}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \quad \leq \quad q\max\left\{\begin{array}{c} A_b(\mathbf{Tx_1}; x_2)+\cdots+A_b(\mathbf{Tx_1}; x_n), \\ A_b(\mathbf{Tx_2}; x_1)+\cdots+A_b(\mathbf{Tx_2}; x_n), \\ \vdots \\ A_b(\mathbf{Tx_n}; x_1)+\cdots+A_b(\mathbf{Tx_n}; x_{n-1}), \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat *$x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q \max \left\{ \begin{array}{r} s((n-2)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}), \\ (n-1)A_b(\mathbf{x_k}; x_k)) \end{array} \right\} \\ &\leq q \max\{s((n-2)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + (n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}))\} \\ &= qs(2n-3)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + qsA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlikte düzenleme ile $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \dfrac{qs}{1-(2n-3)qs} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$ elde edilir. Burada $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^3 + (2n-3)s}\right)$ olduğundan dolayı $\dfrac{qs}{1-(2n-3)qs} < \dfrac{1}{s^2}$ dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça (x_k) bir A_b- Cauchy dizisidir. (X, A_b) bir tam A_b metrik uzay olduğundan $(x_k) \to u$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Bu noktada u nun sabit nokta olduğunu göstermek için $Tu \neq u$ olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \leq q \max\left\{s((n-2)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1}), (n-1)A_b(\mathbf{u}; u))\right\}$$

elde edilir. $k \to \infty$ için limit alınırsa ve A_b- metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq q \max\{s(n-2)A_b(\mathbf{Tu}; u) + A_b(\mathbf{Tu}; u), (n-1)A_b(\mathbf{u}; u))\} \\ \Longrightarrow A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq q \max s(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^3 + (2n-3)s}\right)$ olduğundan dolayı açıkça $q(n-1) < \dfrac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde $Tu = u$ olmalıdır. Yani u, T nin sabit noktasıdır.

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ olacak şekilde u, v T nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezi gereğince

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\{s((n-2)A_b(\mathbf{Tv}; v) + A_b(\mathbf{Tv}; u), (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; v))\} \\ &= qs(n-1)A_b(\mathbf{u}; v) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $qs(n-1) < \dfrac{1}{2}$ olduğundan açıkça $A_b(\mathbf{v}; u) = 0 \Longrightarrow v = u$ olur.

T nin u noktasında sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ bir dizi ve $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q \max \left\{ \begin{array}{r} s((n-2)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Ty_k}; u), \\ (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)) \end{array} \right\} \\ &\leq q \max \left\{ \begin{array}{r} s((n\text{-}2)\left[s^2(n\text{-}1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu)\right] + A_b(\mathbf{Ty_k}; u), \\ (n\text{-}1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)) \end{array} \right\} \\ &= q \max \left\{ \begin{array}{r} s^3((n-2)(n-1)+1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + (n-2)A_b(\mathbf{y_k}; Tu), \\ (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada maksimum operatörünün alacağı değerlere göre iki durum söz konusudur.

1.Durum:

$$s(n-2)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \quad \geq \quad (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)$$

olsun. Buna göre gerekli işlemler ile

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq s^3q(n^2-3n+3)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + (n-2)qs^3A_b(\mathbf{y_k}; u) \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq \frac{qs^3(n-2)}{1-s^3q(n^2-3n+3)}A_b(\mathbf{y_k}; u) \end{aligned}$$

olur.

2.Durum:

$$s(n-2)A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \quad \leq \quad (n-1)A_b(\mathbf{Tu}; y_k)$$

olsun. Bu takdirde

$$A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq sq(n-1)A_b(\mathbf{Tu}; Ty_k) = sq(n-1)A_b(\mathbf{y_k}; u)$$

elde edilir. $r = \max\{\frac{qs^3(n-2)}{1-s^3q(n^2-3n+3}, sq(n-1)\}$ *olsun. Her iki durum için de* $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq rA_b(\mathbf{y_k}; u)$ *elde edilir. Burada* $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(Ty_k; u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T, u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.12 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \frac{1}{s^3+(2n-3)s}\right)$ *olmak üzere her* $x, y \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *için*

$$A_b(\mathbf{T^m x_1}; T^m x_n) \quad \leq \quad q\max\left\{\begin{array}{c} A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_2) + \cdots + A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_n), \\ A_b(\mathbf{T^m x_2}; x_1) + \cdots + A_b(\mathbf{T^m x_2}; x_n), \\ \vdots \\ A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_1) + \cdots + A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_{n-1}), \end{array}\right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.13 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $q \in \left[0, \frac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *i çin*

$$A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \quad \leq \quad q\max\{A_b(\mathbf{Tx_2}; x_1), ..., A_b(\mathbf{Tx_n}; x_{n-1}), A_b(\mathbf{Tx_1}; x_n)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), ..., A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_k}; x_k), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1})\} \\ &= q \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1})\} \\ &\leq q \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k)\} \\ &= q(s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte düzenleme ile $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \dfrac{q}{1-s(n-1)q} A_b(x_k; x_{k-1})$ *elde edilir. Burada* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2}$ *olduğundan dolayı* $a = \dfrac{q}{1-s(n-1)q} < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* $(X,\, A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; x_k) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), ..., A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{x_k}; u), A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1})\} \\ &= q \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{x_k}; u), A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1})\} \end{aligned}$$

elde edilir. $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq \mathbf{q} \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{u}; u), A_b(\mathbf{Tu}; \mathbf{u})\} \\ &= qA_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ *olduğundan dolayı açıkça bu bir çelişkidir. O halde* $A_b(\mathbf{Tu}; u) = 0$ *olup* $Tu = u$ *olur. Bu nedenle* u, T *nin sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Tv}; v), ..., A_b(\mathbf{Tv}; v), A_b(\mathbf{Tu}; v), A_b(\mathbf{Tv}; Tu)\} \\ &= q \max\{A_b(\mathbf{v}; v), A_b(\mathbf{u}; v), A_b(\mathbf{v}; u)\} \\ &= qA_b(\mathbf{v}; u) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre $A_b(\mathbf{Tv}; Tu) = A_b(\mathbf{v}; u) \leq qA_b(\mathbf{v}; u)$ *ve* $q \in \left[0, \frac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ *olduğundan açıkça* $A_b(\mathbf{v}; u) = 0 \Longrightarrow v = u$ *olur. Yani* T *nin bir tek sabit sabit noktası vardır.*

T nin u noktasında sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ bir dizi ve $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul kullanılarak

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), ..., A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), A_b(\mathbf{Tu}; y_k), A_b(\mathbf{Ty_k}; u)\} \\ &= q \max\{A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), A_b(\mathbf{y_k}; u), A_b(\mathbf{Ty_k}; u)\} \\ &\leq q \max\{s(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{y_k}; Tu), A_b(\mathbf{y_k}; u), A_b(\mathbf{Ty_k}; u)\} \\ &= q \max\{s(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{y_k}; u), A_b(\mathbf{y_k}; u), A_b(\mathbf{Ty_k}; u)\} \\ &= qs(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + qA_b(\mathbf{y_k}; u) \end{aligned}$$

olacağından $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \dfrac{q}{1-s(n-1)q} A_b(\mathbf{y_k}; u)$ elde edilir. Burada $k \to \infty$ için limit alınırsa $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı $Ty_k \to u = Tu$ olup T, u da A_b- süreklidir.

Sonuç 4.13 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $q \in \left[0, \frac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve bazı $m \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(\mathbf{T^m x_1}; T^m x_n) \leq q \max\{A_b(\mathbf{T^m x_2}; x_1), ..., A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_{n-1}), A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_n)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T^m dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Sonuç 4.14 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{Ty}; Tx) \leq q \max\{A_b(\mathbf{Ty}; y), A_b(\mathbf{Tx}; y), A_b(\mathbf{Ty}; x)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Sonuç 4.15 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. T: $X \to X$ dönüşümü $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2}$ olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{T^m y}; T^m x) \leq q \max\{A_b(\mathbf{T^m y}; y), A_b(\mathbf{T^m x}; y), A_b(\mathbf{T^m y}; x)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T^m dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Teorem 4.14 *(X, A_b) bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ olmak üzere her $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ $j, l \in \{1, ..., n\}$ ve $j \neq l$ olmak üzere*

$$A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \leq q \max\{A_b(\mathbf{Tx_1}; x_{j_1}), A_b(\mathbf{Tx_2}; x_{j_2}), ..., A_b(\mathbf{Tx_n}; x_{j_n})\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{x_k}; x_k)\} \\ &\leq q \max\{A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k), s(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + A_b(\mathbf{x_{k-1}}; x_k)\} \\ &= q(n-1)A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + sqA_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte düzenleme ile $A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \leq \dfrac{q}{1-s(n-1)q} A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$ *elde edilir. Burada* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2}$ *olduğundan dolayı* $a = \dfrac{q}{1-s(n-1)q} < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \leq q \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{Tu}; x_{k-1}), A_b(\mathbf{x_k}; u)\}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{Tu}; u), A_b(\mathbf{u}; u)\} \\ &= qA_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. Bu noktada $q \in \left[0, \frac{1}{s^2+s(n-1)}\right)$ *olduğundan dolayı açıkça bu bir çelişkidir. O halde* $A_b(\mathbf{Tu}; u) = 0$ *olup* $Tu = u$ *olur. Bu nedenle* u *,* T *nin sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Tv}; v), A_b(\mathbf{Tv}; u), A_b(\mathbf{Tu}; v)\} \\ &= q \max\{A_b(\mathbf{v}; v), A_b(\mathbf{u}; v), A_b(\mathbf{v}; u)\} \end{aligned}$$

olacağından $A_b(\mathbf{v}; u) \leq qA_b(\mathbf{v}; u)$ *elde edilir. Buna göre açıkça* $A_b(\mathbf{v}; u) = 0 \Longrightarrow v = u$ *olur. Dolayısıyla* T *nin bir tek sabit noktası vardır.*

T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul ve* A_b- *metrik özellikleri gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq q \max\{A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k), A_b(\mathbf{Ty_k}; u), A_b(\mathbf{Tu}; y_k)\} \\ &\leq q \max\{s(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + A_b(\mathbf{y_k}; Tu), A_b(\mathbf{Ty_k}; u), A_b(\mathbf{Tu}; y_k)\} \\ &= qs(n-1)A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) + qA_b(\mathbf{y_k}; u) \end{aligned}$$

olacağından $A_b(\mathbf{Ty_k};Tu) \leq \dfrac{q}{1-s(n-1)q}A_b(\mathbf{y_k};u)$ *elde edilir. Burada elde edilen son eşitsizlikte* $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k};u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T, u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.16 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2+s(n-1)}$ *olmak üzere her* $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in X$ *ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ $j,\ l \in \{1,\ ...,\ n\}$ *ve* $j_l \neq l$ *olmak üzere*

$$A_b(\mathbf{T^m x_1};T^m x_n) \quad \leq \quad q\max\{A_b(\mathbf{T^m x_1};x_{j_1}),...,A_b(\mathbf{T^m x_n};x_{j_n})\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.17 (X,A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2+s(n-1)}$ *olmak üzere her* $x,y \in X$ *için*

$$A_b(\mathbf{Ty};Tx) \quad \leq \quad q\max\{A_b(\mathbf{Ty};y),A_b(\mathbf{Ty};x),A_b(\mathbf{Tx};y)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.18 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $0 \leq q < \dfrac{1}{s^2+s(n-1)}$ *olmak üzere her* $x,y \in X$ *için*

$$A_b(\mathbf{T^m y};T^m x) \leq q\max\{A_b(\mathbf{T^m y};y),A_b(\mathbf{T^m x};y),A_b(\mathbf{T^m y};x)\}$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T^m *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.15 $(X,\ A_b)$ *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\gamma \in \left[0,\dfrac{1}{s^4+s(n-1)^2}\right)$ *olmak üzere her* $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in X$ *olmak üzere*

$$A_b(\mathbf{Tx_1};Tx_n) \quad \leq \gamma\left[A_b(x_1,Tx_2,...,Tx_n)+A_b(Tx_1,x_2,Tx_3,...,Tx_n)+\cdots+A_b(Tx_1,...,Tx_{n-1},x_n)\right]$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat $x_0 \in X$ *olsun. Ayrıca* $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ *olacak şekilde bir* (x_k) *dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden ve* A_b- *metriğin aksiyomlarından dolayı*

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+1}) &\leq \gamma \left[\begin{array}{r} A_b(x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+1})+ \\ A_b(x_{k+2}, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+1})+\cdots+A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_k) \end{array} \right] \\
&\leq \gamma \left[\begin{array}{l} s(n-1)(n-2)A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) \\ +2sA_b(x_{k+1}, ..., x_{k+1})+s(n-1)A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) \\ +sA_b(x_k, ..., x_k, x_{k+1}) \end{array} \right] \\
&= \gamma s(n-1)^2 A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1})+s^2 A_b(x_{k+1}, ..., x_{k+1}, x_k) \\
\Longrightarrow \quad & A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+1}) \leq \gamma s(n-1)^2 A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+1})+\gamma s^2 A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte düzenleme ile $A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+1}) \leq \dfrac{\gamma s^2}{1-\gamma s(n-1)^2} A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k)$ *elde edilir. Burada* $\gamma \in \left[0, \dfrac{1}{s^4+s(n-1)^2}\right)$ *olduğundan dolayı* $\lambda = \dfrac{\gamma s^2}{1-\gamma s(n-1)^2} < \dfrac{1}{s^2}$ *dir.O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; Tx_k) \quad \leq \gamma \left[A_b(u, Tu, ..., Tu, x_k)+A_b(Tu, u, Tu, ..., Tu, x_k)+\cdots+A_b(Tu, Tu, ..., Tu, x_{k-1})\right]$$

elde edilir. O halde son eşitsizlikte $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq \gamma \left[A_b(u, Tu, ..., Tu, u)+A_b(Tu, u, Tu, ..., Tu, u)+\cdots+A_b(Tu, Tu, ..., Tu, u)\right] \\
&\leq \gamma \left[s(n-1)(n-2)A_b(Tu; u)+2sA_b(u; u)+A_b(Tu; u)\right] \\
&= \gamma(s(n-1)(n-2)+1)A_b(Tu; u)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $q \in \left[0, \dfrac{1}{s^4+s(n-1)^2}\right)$ *olduğundan dolayı* $\dfrac{s(n-1)(n-2)+1}{s^2+s(n-1)^2} < 1$ *dir. O halde açıkça bu bir çelişkidir. Dolayısıyla* $Tu = u$ *olur. Yani* u T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{Tu}; Tv) &\leq \gamma \left[A_b(u, Tu, ..., Tu, Tv)+A_b(Tu, u, Tu, ..., Tu, v)+\cdots+A_b(Tu, ..., Tu, v)\right] \\
&= \gamma \left[A_b(u, u, ..., u, v)+A_b(u, ..., v)+A_b(u, ..., u, v)\right] \\
&= \gamma n A_b(u, ..., u, v)
\end{aligned}$$

olacağından $A_b(\mathbf{u}; v) \leq \gamma \ n A_b(\mathbf{u}; v)$ *elde edilir.Buna göre* $\gamma \ n < 1$ *olduğundan açıkça* $A_b(\mathbf{v}; u) = 0 \Longrightarrow u = v$ *olur. Dolayısıyla* u T *nin bir tek sabit noktası vardır.*

T nin u noktasında sürekli olduğunu göstermek için $(y_k) \subseteq X$ bir dizi ve $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = u$ olsun. Buna göre teoremin hipotezindeki koşul ve A_b- metriğin aksiyomları gereğince

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq \gamma \left[\begin{array}{c} A_b(y_k, Ty_k, ..., Ty_k, Tu) + \\ A_b(Ty_k, y_k, Ty_k, ..., Ty_k, Tu) + \cdots + A_b(Ty_k, ..., Ty_k, u) \end{array} \right] \\
&\leq \gamma \left[\begin{array}{c} (sA_b(y_k, ..., y_k, u) + s(n-2)A_b(Ty_k, ..., Ty_k, u) \\ +sA_b(u, ..., u, u))(n-1) + A_b(Ty_k, ..., Ty_k, u) \end{array} \right] \\
&\leq \gamma s(n-1)A_b(y_k, ..., y_k, u) + \gamma\left[s(n-1)(n-2)+1\right] A_b(Ty_k, ..., Ty_k, u)
\end{aligned}$$

olacağından buradan düzenleme ile $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \dfrac{\gamma s(n-1)}{1-\gamma\left[s(n-1)(n-2)+1\right]} A_b(\mathbf{y_k}; u)$ elde edilir. Bu son eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit alınırsa $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı $Ty_k \to u = Tu$ olup T, u da A_b- süreklidir.

Sonuç 4.19 *$(X,\ A_b)$ bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $\gamma \in \left[0, \dfrac{1}{s^4 + s(n-1)^2}\right)$ olmak üzere her $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in X$ ve bazı $m \in \mathbb{N}$ için*

$$A_b(\mathbf{T^m x_1}; T^m x_n) \leq \gamma \left[\begin{array}{r} A_b(x_1, T^m x_2, ..., T^m x_n) + \\ A_b(T^m x_1, x_2, T^m x_3, ..., T^m x_n) + \cdots + A_b(T^m x_1, ..., T^m x_{n-1}, x_n) \end{array} \right]$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T^m dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

Teorem 4.16 *$(X,\ A_b)$ bir tam A_b- metrik uzay olsun. $T : X \to X$ dönüşümü $0 \leq \sum_{i=0}^{n} a_i < \dfrac{1}{s^2}$ olmak üzere her $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \in X$ için*

$$A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \leq a_0 A_b(\mathbf{x_1}; x_n) + a_1 A_b(\mathbf{Tx_1}; x_1) + \cdots + a_n A_b(\mathbf{Tx_n}; x_n)$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T bir tek sabit noktaya sahiptir ve T dönüşümü bu sabit noktada A_b- süreklidir.

İspat *$x_0 \in X$ olsun. Ayrıca $x_k = Tx_{k-1} = T^k x_0$ olacak şekilde bir (x_k) dizisi tanımlansın. O halde teoremin hipotezinden dolayı*

$$\begin{aligned}
A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \begin{array}{l} a_0 A_b((\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \\ +a_1 A_b((\mathbf{x_{k+1}}; x_k) + \cdots + a_{n-1} A_b((\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \\ +a_n A_b((\mathbf{x_k}; x_{k-1}) \end{array} \\
\Longrightarrow A_b((\mathbf{x_{k+1}}; x_k) &\leq \frac{a_0 + a_n}{1-(a_1 + \cdots + a_{n-1})} A_b((\mathbf{x_k}; x_{k-1}))\}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i < \dfrac{1}{s^2}$ *olduğundan* $q = \dfrac{a_0 + a_n}{1 - (a_1 + \cdots + a_{n-1})} < \dfrac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Bu durumda teoremin hipotezi gereğince*

$$A_b(\mathbf{Tu}; x_k) \leq a_0 A_b(\mathbf{u}; x_{k-1}) + a_1 A_b(\mathbf{Tu}; u) + \cdots + a_{n-1} A_b(\mathbf{Tu}; u) + a_n A_b(\mathbf{x_k}; x_{k-1})$$

elde edilir. $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq a_n A_b(\mathbf{u}; u) + a_1 A_b(\mathbf{Tu}; u) + \cdots + a_{n-1} A_b(\mathbf{Tu}; u) + a_n A_b(\mathbf{u}; u)) \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{Tu}; u) &\leq (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) A_b(\mathbf{Tu}; u) \end{aligned}$$

bulunur. $\sum\limits_{i=0}^{n=\infty} a_i < \dfrac{1}{s^2}$ *olduğundan dolayı açıkça* $\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i < 1$ *dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde* $Tu = u$ *olmalıdır. Buna göre açık bir şekilde* u*,* T *nin bir sabit noktasıdır.*

Şimdi sabit noktanın tekliğini göstermek için $u \neq v$ *olacak şekilde* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde teoremin hipotezindeki koşul nedeniyle*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tv}; Tu) &\leq a_0 A_b(\mathbf{v}; u) + a_1 A_b(\mathbf{Tv}; v) + \cdots + a_{n-1} A_b(\mathbf{Tv}; v) + a_n A_b(\mathbf{Tu}; u) \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{v}; u) &\leq a_0 A_b(\mathbf{v}; u) + a_1 A_b(\mathbf{v}; v) + \cdots + a_{n-1} A_b(\mathbf{v}; v) + a_n A_b(\mathbf{u}; u) \\ \Longrightarrow \quad A_b(\mathbf{v}; u) &\leq a_0 A_b(\mathbf{v}; u) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i < 1$ *olduğundan açıkça* $A_b(\mathbf{v}; u) = 0 \Longrightarrow v = u$ *olur. Dolayısıyla* T *nin bir tek sabit noktası vardır.*

T *nin* u *noktasında sürekli olduğunu göstermek için* $(y_k) \subseteq X$ *bir dizi ve* $\lim\limits_{k \to \infty} y_k = u$ *olsun. Buna göre teoremin hipotezi gereğince*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) &\leq a_0 A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + a_1 A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + \cdots + a_{(n-1)} A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) + a_n A_b(\mathbf{Tu}; u) \\ &= a_0 A_b(\mathbf{y_k}; u) + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) A_b(\mathbf{Ty_k}; y_k) \\ &\leq a_0 A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + (a_1 + \cdots + a_{n-1}) \left[s(n-1) A_b(\mathbf{Ty_k}; u) + A_b(\mathbf{y_k}; Tu) \right] \\ &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) A_b(\mathbf{y_k}; u) + s(n-1)(a_1 + \cdots + a_{n-1}) A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \end{aligned}$$

olacağından gerekli düzenlemeler yapılarak $A_b(\mathbf{Ty_k}; Tu) \leq \dfrac{(a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1})}{1 - s(n-1)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})} A_b(\mathbf{y_k}; u)$ *elde edilir. Burada* $k \to \infty$ *için limit alınırsa* $A_b(\mathbf{Ty_k}; u) \to 0$ *olmalıdır. Süreklilik teoreminden dolayı* $Ty_k \to u = Tu$ *olup* T*,* u *da* A_b- *süreklidir.*

Sonuç 4.20 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $0 \leq \sum_{i=0}^{n} a_i < \frac{1}{s^2}$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için ve bazı* $m \in \mathbb{N}$ *ler için*

$$A_b(\mathbf{T^m x_1}; T^m x_n) \leq a_0 A_b(\mathbf{x_1}; x_n) + a_1 A_b(\mathbf{T^m x_1}; x_1) + \cdots + a_n A_b(\mathbf{T^m x_n}; x_n)$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

Teorem 4.17 (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olsun.* $T : X \to X$ *dönüşümü* $\alpha \in \left[0, \frac{1}{s^2}\right)$ $\beta \in \left[0, \frac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ $\gamma \in \left[0, \frac{1}{s^4 + s(n-1)^2}\right)$ *olmak üzere her* $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ *için*

$$z1) \quad A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \leq \alpha A_b(x_1; x_n)$$

$$z2) \quad A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \leq \beta \left[A_b(x_1, Tx_1, ..., Tx_1) + \cdots + A_b(x_n, Tx_n, ..., Tx_n)\right]$$

$$z3) \quad A_b(\mathbf{Tx_1}; Tx_n) \leq \gamma \begin{bmatrix} A_b(x_1, Tx_2, ..., Tx_n) + \\ A_b(Tx_1, x_2, Tx_3, ..., Tx_n) + \cdots + A_b(Tx_1, ..., Tx_{n-1}, Tx_n) \end{bmatrix}$$

koşullarından en az birini sağlasın. Bu takdirde T *bir tek sabit noktaya sahiptir ve* T *dönüşümü bu sabit noktada* A_b- *süreklidir.*

İspat *z1 koşulu sağlanıyorsa*

$$\begin{aligned} A_b(x_{k+1}, x_{k+2,}..., x_{k+2}) &\leq \alpha A_b(x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+1}) \\ &\leq \lambda A_b(x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+1}) \end{aligned}$$

bulunur.

z2 koşulu sağlanıyorsa

$$\begin{aligned} A_b(x_{k+1}, x_{k+2,}..., x_{k+2}) &\leq \beta \left[A_b(x_k, x_{k+1}, ...x_k) + A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+1}) + \cdots + A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+1})\right] \\ &\leq \frac{\beta}{1-(n-1)\beta}(\mathbf{x_{k+1}}; x_k) \\ &\leq \lambda A_b(x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+1}) \end{aligned}$$

elde edilir.

z3 koşulu sağlanıyorsa

$$
\begin{aligned}
A_b(\mathbf{x_{k+2}}; x_{k+1}) &\leq \gamma \begin{bmatrix} A_b(x_{k+1,}x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) + \\ A_b(x_{k+2,}x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) + \cdots \\ +A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_k) \end{bmatrix} \\
&\leq \gamma \begin{bmatrix} s(n-2)A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) \\ +s(n-1)A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) + \\ sA_b(x_k, ..., x_k, x_{k+1}) \end{bmatrix} \\
&\leq \begin{matrix} \gamma s(n\text{-}1)^2 A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) \\ +\gamma s^2 A_b(x_{k+1}, ..., x_{k+1}, x_k) \end{matrix} \\
\Longrightarrow A_b(x_{k+2}, x_{k+2,}..., x_{k+2}, x_{k+1}) &\leq \gamma s(n\text{-}1)^2 A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) + s^2 A_b(x_{k+1}, ..., x_{k+1}, x_k) \\
\Longrightarrow A_b(x_{k+2}, ..., x_{k+2}, x_{k+1}) &\leq \frac{\gamma s^2}{1-\gamma s(n-1)^2} A_b(x_{k+1}, ..., x_{k+1}, x_k) \\
&\leq \lambda A_b(x_{k+1}, x_{k+1}, ..., x_k)
\end{aligned}
$$

olur. O halde üç durum birlikte düşünülürse $\lambda = \max\left\{\alpha, \frac{\beta}{1-(n-1)\beta}, \frac{\gamma s^2}{1-\gamma s(n-1)^2}\right\}$ *olmak üzere*

$$A_b(\mathbf{x_{k+1}}; x_{k+2}) \leq \lambda A_b(x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+1})$$

dir. Burada $\alpha < \frac{1}{s^2}$ *olduğundan* $\lambda < \frac{1}{s^2}$ *dir. O halde Cauchy dizisi olmayı karakterize eden yardımcı teorem 4.8 den dolayı açıkça* (x_k) *bir* A_b- *Cauchy dizisidir.* (X, A_b) *bir tam* A_b- *metrik uzay olduğundan* $(x_k) \to u$ *olacak şekilde* $u \in X$ *vardır. Bu noktada* u *nun sabit nokta olduğunu göstermek için* $Tu \neq u$ *olsun. Buna göre* $x_1 = x_{k+1}, x_k = ... = x_n = T(u)$ *noktaları için 3 durum söz konusudur.*

1.durum: Noktalar (z1) koşulunu sağlıyorsa

$$A_b(x_{k+1}, T(u), ..., T(u)) \leq \lambda A_b(x_k, u, ..., u)$$

olup $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$A_b(u, T(u), ..., T(u)) \leq \lambda A_b(u, u, ..., u)$$

bulunur. O halde açıkça $A_b(u, T(u), ..., T(u)) = 0$ *olup* $T(u) = u$ *olduğu görülür.*

2.durum: Noktalar (z2) koşulunu sağlıyorsa

$$
\begin{aligned}
A_b(x_{k+1}, T(u), ..., T(u)) &\leq \beta\left[A_b(u, u, ..., u) + (n-1)A_b(u, T(u), ..., T(u)\right] \\
&= (n-1)\beta A_b(u, T(u), ..., T(u))
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\beta \in \left[0, \dfrac{1}{s^2+(n-1)}\right)$ *olduğundan* $(n-1)\beta \in [0,1)$ *dir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir. O halde* $T\ (u) = u$ *olmalıdır.*

3.durum:Noktalar (z3) koşulunu sağlıyorsa

$$A_b(T(u),T(u),...,T(u),Tx_k) \quad \leq \gamma \begin{bmatrix} A_b(u,Tu,...,Tu,x_k)+A_b(Tu,u,Tu,...,Tu,x_k) \\ +\cdots+A_b(Tu,Tu,...,Tu,x_{k-1}) \end{bmatrix}$$

olup $k \to \infty$ *için limit alınırsa ve* A_b- *metriğinin tüm değişkenleri üzerinde sürekli olmasından dolayı*

$$\begin{aligned} A_b(\mathbf{Tu};u) \quad &\leq \gamma\left[A_b(u,Tu,...,Tu,u)+A_b(Tu,u,Tu,...,Tu,u)+\cdots+A_b(Tu,Tu,...,Tu,u)\right] \\ &= \gamma(s(n-1)(n-2)+1)A_b(Tu,...,Tu,u) \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\gamma\ (s(n-1)(n-2)+1) < 1$ *dir. O halde* $\alpha \in [0,1)$ *olmak üzere*

$$A_b(\mathbf{Tu};u) \quad \leq \quad \alpha A_b(\mathbf{Tu};u)$$

bulunur. Açıkça bu bir çelişkidir. Yani $Tu = u$ *olmalıdır. Bu takdirde her üç durum için* u *noktasının* T *nin sabit noktası olduğu görülmüş olur. Şimdi sabit noktanın tekliğini ispat etmek için* $u \neq v$ *ve* u, v T *nin sabit noktaları olsunlar. O halde* $x_1 = T\ (u)$, $x_2 = ... = x_n = T\ (v)$ *noktaları için öncekilerde olduğu gibi üç durum söz konusudur.*

1.durum: Noktalar (z1) koşulunu sağlıyorsa

$$\begin{aligned} A_b(T(u),T(v),...,T(v)) \quad &\leq \quad \alpha A_b(u,v,...,v) \\ \Longrightarrow \qquad A_b(u,v,...,v) \quad &\leq \quad \alpha A_b(u,v,...,v) \end{aligned}$$

olur. $\alpha \in \left[0, \dfrac{1}{s^2}\right)$ *olduğundan* $A_b(u,\ v,\ ...,\ v) = 0$ *olmalıdır. Buna göre* $u = v$ *sonucuna varılır.*

2.durum:Noktalar (z2) koşulunu sağlıyorsa

$$\begin{aligned} A_b(T(u),T(v),...,T(v)) \quad &\leq \quad \beta\left[A_b(u,T(u),...,T(u))+(n-1)A_b(v,T(v),...,T(v))\right] \\ \Longrightarrow A_b(u,v,...,v) \quad &\leq \quad \beta\left[A_b(u,u,...,u)+(n-1)A_b(v,v,...,v)\right] \\ &= \quad 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda açıkça $A_b(u,\ v,\ ...,\ v) = 0$ *ve* $u = v$ *dir.*

3.durum: Noktalar (z3) koşulunu sağlıyorsa

$$\begin{aligned} A_b(T(u),T(v),...,T(v)) \quad &\leq \gamma \begin{bmatrix} A_b(u,Tu,...,Tu,Tv)+ \\ A_b(Tu,u,Tu,...,Tu,Tv)+\cdots+A_b(Tu,...,Tu,v) \end{bmatrix} \\ &= \gamma\left[A_b(u,u,...,u,v)+A_b(u,u,u,...,v)+\cdots+A_b(u,...,u,v)\right] \\ &= \gamma n A_b(u,u,...,u,v) \\ A_b(u,...,u,v) \quad &\leq \gamma n A_b(u,...,u,v) \end{aligned}$$

dolayısıyla $\gamma \in \left[0, \dfrac{1}{s^4 + s(n-1)^2}\right)$ *olduğundan* $\gamma\ n \in [0,1)$ *dir. Buradan* $A_b(u,\ ...,\ u,\ v)$ $= 0$ *olmalıdır. Yani açıkça* $u = v$ *dir. Her üç durum incelendiğinde sabit noktanın tek olduğu görülmüş olur.*

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

Sabit nokta teorisinin üç temel alanından biri olan metrik sabit nokta teorisi alanı 1922 yılında Banach'ın yayımladığı makalesindeki günümüzde Banach büzülme prensibi olarak bilinen teoremi merkeze alan bir disiplindir. Sabit nokta teorisinin bu alanı önceleri Banach büzülme koşulunun değiştirilmesi ve bu koşulun yerine ne tür koşullar konulabileceği üzerine yoğunlaşmış iken sonradan alışılmış metrik uzayların genelleştirilmesi fikirleri ve bu doğrultuda üretilen genelleştirilmiş metrik uzaylar ile birlikte bu uzaylarda Banach büzülme prensibinin uygulanması ve Banach büzülme dönüşümünün yerine konulabilecek büzülme dönüşümlerin ilgili genelleştirilmiş uzaylardaki versiyonları üzerine olarak yoğunlaşmıştır.

Bu bağlamda genelleştirilmiş metrik uzayların en son versiyonlarından biri olan $A_b -$ metrik uzaylar bu çalışmada ele alınmıştır. Buna göre $A_b -$ metrik uzaylarda Banach büzülme prensibinden yola çıkarak alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Kannan, Bianchini, Chaterjea, Genelleştirilmiş Chaterjea, Reich, Zamfirescu ve bu teoremlerin çeşitli kombinasyonlar ile birleştirilmesi ile oluşturulan sabit nokta teoremlerin $A_b -$ metrik uzaydaki versiyonları verilmiştir. Üstelik $A_b -$ metrik uzaylar $A -$ metrik uzayları ve S_b ile $S -$ metrik uzayları kapsadığından bu genelleştirilmiş metrik uzaylar içinde yukarda ifade edilen sabit nokta teoremlerinin ilgili uzaylardaki versiyonları da otomatik olarak verilmiş veya başka bir deyişle ilgili versiyon sabit nokta teoremleri verilmiş oldu.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında alışılmış metrik uzayların en son genellemelerinden biri olan $A_b - $ metrik uzaylarda metrik sabit nokta teorisi alanında çalışılmıştır. $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere X in kendisi ile n kez çarpımı ile oluşturulan veya X in n li kartezyen çarpımı üzerinde tanımlanan A_b- metrik yardımıyla oluşturulan A_b- metrik uzay ele alınmıştır. Metrik sabit nokta teorisinin merkezinde yer alan Banach büzülme teoreminden (Banach sabit nokta teoreminden) başlayarak alışılmış metrik uzaylarda iyi bilinen Kannan, Bianchini, Chaterjea, Zamfirescu, Reich gibi ünlü sabit nokta teoremleri ile bu teoremlerdeki koşulların veya başka bir deyişle büzülme koşullarının birleştirilerek ortaya atılmış çeşitli sabit nokta teoremlerinin $A_b -$ metrik uzay için versiyonları (karşılıkları) verilmiş ve ispatlanmıştır.

$A_b -$ metrik uzay kavramı nispeten yeni tanıtılmış bir kavram olduğundan bu tez çalışmasında ele alınamamış olan sabit nokta teoremlerinin bu uzaydaki karşılıkları araştırılarak ortaya koyulabilir. Bunların dışında $A_b -$ metrik uzaya has olan özellikler ve kavramlar tespit edilerek verilebilir. $A_b -$ metrik uzayların çeşitli uygulama alanları araştırılarak bu kavramın kullanımının yaygınlaşmasına destek verilebilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbas, M., Ali B., Suleiman Y.I., 2015, Generalized coupled common fixed point results in partially ordered Ametric spaces. Fixed Point Theory and Applications., 2015:64.

Agarwal, R.P., Karapınar E., O'Regan, D., Francisco A., 2015, Fixed Point Theory in Metric Type Space, Springer

Altun, I., Erduran, A., 2011, A Suzuki type fixed-point theorem, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol:2011.

Banach, S., 1922, Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3, 133-181.

Berinde V.,1997, Berinde M., 2005, On Zamfirescu's fixed point theorem, Revue Roumaine des Mathematiques Pures et Appliquees

Bianchini, R.M.T., 1972, Su un problema di S. Reich aguardante la teoría dei punti fissi, Boll. Un. Mat. Ital., 5, 03-108

Bucur, A.,2017 About Applications of ,The Fixed Point Theory, Scientific Bulletin , 22(1), 13-17

Ciric, L.B., 1971, Generalized contractions and fixed-point theorems, Publications de l'Institut Mathematique, 12, 19-26.

Chatterjea, S.K., 1972, Fixed point theorem, Comptes Rendus de l'Academie Bulgare des Sciences, 25, 727 –730.

Dhage, B.C., 1992, Generalized metric spaces and mapping with fixed point, Bull. Cal. Math. Soc., 84, 329–336

Dhage, B.C., 1994, Generalized metric space and topological structure II, Pure Appl. Math. Sci., 40, 37–41

Dhage, B.C., 2000, Generalized metric space and topological structure I, An. Stiint. Univ. Al.I, Cuza. Iazi, Mat (ANS) 46, 3–24

Fréchet, M., 1906, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 22, 1–74

Fréchet, M., 1926, Les espaces abstrait topologiquement affine, Acta Math., 47, 2552.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Gähler, S., 1963, 2Metriche raume und ihre topologische strüktüre, Math. Nachr. 26, 115–148

Gähler, S., 1966, Zur geometric 2metriche raume, Revue Roumaine de Math. Pures Appl., XI, 664–669

Hardy, G. E., Rogers, T. D., 1973, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canad. Math. Bull., 201-206.

Kannan, R., 1969, Some results on fixed points II, Am. Math. Mon., 76, 405 –408.

Khamsi, M. A., Ben-El-Mechaiekh, H., Schroeder, B., 2014, Recent Contributions to Fixed Point Theory and Its Applications, Abstract and Applied Analysis, Article ID:329815

Kikkawa, M., Suzuki, T., 2008, Some similarity between contractions and Kannan mappings, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2008,

Kreyszig, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, Wiley Classics Library.

Kurakula, S.,Rao, V. S., Monkona, R.,2018, The Development of Fixed Point Theory-Review, Int. Conf. of Trends in Information, Management, Engineering and Sciences (ICTIMES),5(2), 1-3.

Maliki, N., Rohen, Y., 2017, Some Coupled fixed point theorems in partially ordered Ab-metric space, J. Nonlinear Sci. Appl., 10, 1731–1743.

Mustafa, Z., Sims, B., 2006, A new approach to generalized metric spaces, J. Nonlinear Convex Anal. 7, 289–297.

Pant, R. P.,Lohoni, A. B., Jha, K., 2002, A History of Fixed Point Theorems, Ganita Bharati Bull. Soc. His. Math.Ind., 24(1-4), 147-159.

Popescu, O., 2008, Fixed point theorem in metric spaces, Bulletin of the Transilvania University of Braşov, 50, 479–482.

Popescu, O., 2009, Two fixed point theorems for generalized contractionswith constants in complete metric space, Central European Journal of Mathematics, 7, 3, 529–538.

Reich, S., 1971, Some remarks concerning contraction mappings, Canadian Mathematical Bulletin, 14, 121-124.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Rhoades, B. E., 1977, A comparison of various definitions of contractive mappings, Trans. Amer. Math. Soc., 226, 257 – 290.

Sedghi, S., Shobe, N., Aliouche, A., 2012, A generalization of fixed point theorems in S – metric spaces, Mat. Vesnik, 64 (3), 258 – 266.

Sedghi, S., Dung, N.V., 2014, Fixed point theorems on S – metric spaces, Mat. Vesnik, 66 (1), 113 – 124.

Tarski, A.; A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. Pacific J.Math. 5,285-309(1955)

Ughade, M., Türkoğlu, D., Singh, S. K. and Daheriya, R. D., 2016, Some fixed point theorems in Ab – metric space, British Journal of Mathematics and Computer Science, 19 (6), 1 – 24.