

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ÜÇÜNCÜ ANLAMDA s -KONVEKS FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER

Baki ÜNAL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



ÜÇÜNCÜ ANLAMDA s -KONVEKS FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER

Baki ÜNAL

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OCAK 2022

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÜÇÜNCÜ ANLAMDA s -KONVEKS FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER

Baki ÜNAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 21/01/2022 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Serap KEMALİ

Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

ÖZET

ÜÇÜNCÜ ANLAMDA s -KONVEKS FONKSİYONLAR VE İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Baki ÜNAL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Serap KEMALİ

Ocak 2022; 58 sayfa

Bu tezde, Üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, eşitsizlik kavramı ve eşitsizlik kavramının gelişiminde büyük öneme sahip konvekslik kavramının günümüze kadar olan gelişiminden, tarihçesinden söz edilmiştir.

İkinci bölümde, Eşitsizlik ve Konvekslik kavramlarının gelişiminde büyük katkı sağlayan kitaplar, tezler ve özellikle son yıllarda çalışılmış makaleler taranmış ve araştırmacılar için kaynaklar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, eşitsizlik ve konvekslik kavramları ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiş, Soyut konveks fonksiyon sınıflarından bazılarının özelliklerine değinilmiştir. Aynı bölümde, literatürde en çok karşılan önemli eşitsizliklere de yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Klasik konveks fonksiyonlar, Quasi-konveks fonksiyonlar, p -Konveks fonksiyonlar, Birinci, İkinci ve Üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için literatürde karşılaşılan integral eşitsizlikler verilmiştir. Sonrasında, integrallenebilir fonksiyonlar için bir Önteorem yazılmış, bu Önteorem yardımı ve bilinen integral eşitsizlikler yardımı ile yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca literatürde mevcut, n -inci mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar için yazılmış bir başka Önteorem yardımı ve yine bilinen integral eşitsizlikler yardımı ile yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, araştırmacılar için tezin genel bir özeti yapılmış, Konveks analiz ve integral eşitsizlikler ile ilgilenen araştırmacılar için öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELEER: Konveks küme, Konveks fonksiyon, Soyut konvekslik, s -Konvekslik, Üçüncü anlamda s -konvekslik, Hermite-Hadamard eşitsizliği, İntegral eşitsizlikler

JÜRİ: Dr. Öğr. Üyesi Serap KEMALİ
Doç. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK
Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN



ABSTRACT

s -CONVEX FUNCTIONS IN THE THIRD SENSE AND INTEGRAL INEQUALITIES

Baki ÜNAL

MSC Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assistant Professor Serap KEMALİ

January 2022; 58 pages

In this thesis, new integral inequalities are obtained for s -convex functions in the third sense.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, it is of great importance in the development of the concept of inequality. The development and history of the concept of convexity until today is mentioned. In the second part, a major contribution to the development of the concepts of Inequality and Convexity is presented books, theses and especially the articles that have been studied in recent years have been examined and researchers have resources are given.

In the third chapter, basic definitions and theorems about inequality and convexity are given. The properties of some of the abstract convex function classes are mentioned. In the same section, the most important inequalities encountered in the literature are also included.

In the fourth chapter, Classical convex functions, Quasi-convex functions, p -Convex functions, s -Convex in the first, second and third sense integral inequalities encountered in the literature for functions are given. After that, a Lemma has been written for integrable functions, with the help of this Lemma and known integral inequalities, new integral inequalities have been obtained. Also, some new integral inequalities have been obtained with the help well-known integral inequalities and a lemma which was written for n -th order integrable functions.

In the fifth chapter, a general summary of the thesis is made and suggestions are given for researchers interested in convex analysis and integral inequalities.

KEYWORDS: Convex set, Convex functions, Abstract convex functions, s -Convexity, s -Convex functions in the third sense, Hermite-Hadamard type inequalities, Integral inequalities

COMMITTEE: Asst. Prof. Dr. Serap KEMALİ

Assoc. Prof. Dr. İlknur YEŞİLCE IŞIK

Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN



ÖNSÖZ

2019 yılında başlamış olduğum yüksek lisans eğitimimi bu tez ile birlikte tamamlamanın hem mutluluğunu hem de hüznünü yaşamaktayım. Tez yazım aşamasında hiçbir zaman desteğini esirgemeyen aileme, öğretmenlik yaptığım okulumdaki mesai arkadaşlarıma, eğitimim sırasında verdiği desteklerden ve ayrıca bana böylesine özgün bir tez yazabilme fırsatını verdiği için danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Serap KEMALİ'ye teşekkürlerimi sunuyorum. Öğrenmek sadece derslerden ibaret değildir. Yüksek lisans eğitimim boyunca hiçbir zaman unutamayacağım ve kopamayacağım dostluklar da edindim. Birgün bile benden yardımlarını esirgemeyen dostlarım Ar. Gör. Çağla SEKİN ve Guldane YILDIZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Burada öğrendiklerimle birlikte geriye kalan hayatımın her anında yeni öğrenmelere gebe bir yaşam sürebilmeyi temenni ediyorum. Umarım bu çalışmamız bu konularda çalışacak olan kişiler için bir yol gösterici olur.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
3. MATERYAL VE METOT	5
3.1. Temel Kavramlar ve Teoremler	5
3.2. Bazı Soyut Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Özellikleri	9
3.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	25
4.1. Klasik Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler	25
4.2. Quasi-Konveks Fonksiyon Sınıfı için İntegral Eşitsizlikler	28
4.3. p -Konveks ve p -Quasi-Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler	31
4.4. Birinci Anlamda s -Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler	33
4.5. İkinci Anlamda s -Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler	36
4.6. Üçüncü Anlamda s -Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler	39
4.7. Üçüncü Anlamda s -Konveks Fonsiyonlar için Yeni İntegral Eşitsizlikler	40
5. SONUÇLAR	51
6. KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Üçüncü anlamda s -Konveks Fonksiyonlar ve İntegral Eşitsizlikler” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak yazıldığını belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

21/01/2022

Baki ÜNAL



SİMGELER

Simgeler:

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_-$	: Negatif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_+$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	: $[0, +\infty)$
$\mathbb{R}_{++}$	: $(0, +\infty)$
$\mathbb{R}_{+\infty}$	: $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\mathbb{R}_{-\infty}$	: $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\mathbb{R}^n$	: $\mathbb{R}^n$ boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_+^n$	: $\mathbb{R}^n$ ' de tüm koordinatları negatif olmayan noktaların kümesi
$\mathbb{R}_{++}^n$	: $\mathbb{R}^n$ 'de tüm koordinatları pozitif olan noktaların kümesi
I	: $\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I^0	: I 'nin içi
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
f'	: f ' nin birinci mertebeden türevi
f''	: f ' nin ikinci mertebeden türevi
$f^{(n)}$	: f 'nin n . mertebeden türevi
$L(., .)$	: Logaritmik ortalama
$A(., .)$	: Aritmetik ortalama
$G(., .)$	: Geometrik ortalama
$H(., .)$	: Harmonik ortalama
$L_n(., .)$	: Genelleştirilmiş logaritmik ortalama
$W(., .)$	: Ağırlıklı ortalama
K_s^1	: Birinci anlamda s -konveks fonksiyon sınıfı
K_s^2	: İkinci anlamda s -konveks fonksiyon sınıfı
K_s^3	: Üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon sınıfı

1. GİRİŞ

Matematikte eşitsizlik kavramının amacı, değeri tam olarak bilinmeyen bazı matematiksel ifadeleri ve fonksiyonları daha iyi bildiğimiz ifadeler ve fonksiyonlarla sınırlandırmak veya doğrudan sayısal sınırlar belirlemektir. 21. yüzyılın başlarında matematiksel eşitsizlikler alanı hızla gelişmeye devam etmiştir. Eşitsizlikler, fonksiyonel analiz, diferansiyel ve integral denklemler teorisi, olasılık gibi matematiğin birçok önemli dallarından biridir. Ayrıca eşitsizlik kavramı mekanik, fizik ve diğer bilimlerde de önemli bir yere sahiptir.

Eşitsizlikler üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Yapılan her çalışma kendisinden önce yapılmış çalışmaları referans olarak yeni eşitsizliklerin de günümüze kadar ulaşmasını ve bu konuda daha geniş bir bilgiye sahip olmamızı sağlamıştır. Eşitsizlik teorisinin gelişmesinde konvekslik kavramı önemli bir rol oynamaktadır. Kendisi de temelde bir eşitsizlik olan konvekslik kavramının tarihi Archimedes'in M.Ö.250 yılında π sabitinin hesaplanmasına kadar gitmesine rağmen matematik literatürüne kavram olarak ancak 19. yüzyıl sonunda 20. yüzyıl başında girdiği görülmüştür. Konvekslik kavramının önemli bir parçası konveks bir kümenin grafiküstü (epigrafi) olan konveks fonksiyon kavramıdır. İlk olarak Ch. Hermite' in 22 Kasım 1881'de elde ettiği bir sonucun, 1883'de "Mathesis" adlı dergide yayınlanması ile karşımıza çıkmıştır. Daha sonraki dönemlerde Hermite ve Hadamard tarafından açıkça belirtilmese de konveks fonksiyonlarla ilgili çalışmaları anlaşılmıştır. Günümüzde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinen,

"Sur deux limites d'une integrale define. Soit $f(x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de $x = a$, $x = b$ On aura les relations

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b f(x)dx < (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

ou bien

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) > \int_a^b f(x)dx > (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

suivant que la courbe $y = f(x)$ tourne sa convexité ou sa concavité vers l'axe des abscisses." eşitsizliklerini literatüre kazandırmışlardır. Konveks analizin, Uygulamalı Matematik, Optimizasyon Teorisi, Olasılık Teorisi, Eşitsizlik Teorisi, Matematiksel Ekonomi, vs. birçok alanda uygulaması mevcuttur.

Bu tezde öncelikle klasik konvekslikle ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilerek bir literatür taraması yapılmıştır. Ardından soyut konveks fonksiyonlar sınıfına genel bir bakış yapılmıştır. Daha sonra bu konveks fonksiyonlar için oluşturulmuş integral eşitsizliklerin elde edilişi hakkında genel bilgi verilmiştir.

Farklı yöntemlerle elde edilmiş birçok soyut konveks fonksiyon sınıfı ve bu sınıflar için elde edilmiş farklı integral eşitsizlikler vardır. Bu tezde asıl üzerinde durulan konvekslik sınıfı "Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen" (*Breckner 1978*) adlı çalışmada tanıtılan s -konveks fonksiyonlar sınıfının birinci ve ikinci anlamda s -konveks olan fonksiyonlar (K_s^1 ve K_s^2) için ve bu fonksiyon sınıflarının devamı gibi düşünebileceğimiz üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar (K_s^3) için elde edilmiş integral eşitsizlikleri incelemek, yeni yazılacak bir Önteorem yardımıyla üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri elde etmektir.

2. KAYNAK TARAMASI

Matematik literatüründe günümüze kadar birçok matematikçi eşitsizlikler ve konvekslik üzerine çalışmıştır. Özellikle 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından yapılan çalışmalardan sonra konveks fonksiyonlar ve eşitsizlikler üzerine çok sayıda çalışma yayınlanmıştır. Dolayısıyla bu tezin yazımında çeşitli kitap, makale ve yayından yararlanılmıştır.

Konveks fonksiyonlarla ilgili en kapsamlı çalışma 1905 ve 1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen tarafından yapılmıştır. Jensen 'nin çalışmasından sonra daha kapsamlı bir çalışma olan "Convex Functions" (*Roberts ve Varbeg 1976*) adlı eser yayınlanmıştır. Konveks fonksiyonları içeren genel eşitsizlikler ise "Convex Functions: Inequalities" adlı eser ile Pecaric (1987) tarafından yazılmıştır.

Matematikte eşitsizlik kavramı denilince akla ilk gelen kaynak Hardy, Littlewood ve Polya (1934) yazdığı "Inequalities" adlı kitabıdır. Bu kitabın öncülüğüyle birlikte yazılan ikinci kitap E.F.Beckenbach ve R.Bellman (1961) tarafından yazılan yine aynı "Inequalities" adlı kitaptır. Daha sonraları Mitrinovic (1970) "Analytic Inequalities" adlı kitap da eşitsizlikler için temel olan kitaplar arasına girmiştir. Bu kaynaklara ek olarak, "Classical and New Inequalities" (*Mitrinovic vd. 1991*), "Convex Functions Partial Orderings and Statistical Applications" (*Pecaric vd. 1992*), "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications" (*S.S.Dragomir ve Pearce 2000*), "Mathematical Inequalities" (*Pachpatte 2005*) vb. kaynakları da gösterilebilir.

Daha önce de bahsettiğimiz gibi Eşitsizlik Teorisi ile konveks fonksiyonlar yakından ilişkilidir. Örneğin, literatürde iyi bilinen Hölder ve Minkovski gibi genel eşitsizlikler, konveks fonksiyonlar için Jensen eşitsizliğinin bir sonucudur. Birçok araştırmacı farklı konveks fonksiyon sınıfları ve genelleştirmeleri üzerine çalışmıştır.

Bu tezin yazım aşamasında bir çok yüksek lisans tezi, doktora tezi ve makale incelenmiştir. Örneğin, "Konvekslik Kavramının Soyutlaşması Üzerine (*Demirsoy 2019*)" isimli yüksek lisans tezinde soyut konvekslik sınıflarının hiyerarjisi çalışılmıştır. "*s*-Convex Functions In The Third Sense (*Kemali vd. 2021*)" başlıklı makalede üçüncü anlamda *s*-konveks fonksiyonların genel özelliklerine değinilmiş ve literatürde mevcut olan birinci ve ikinci anlamda *s*-konvekslik sınıfları arasındaki ilişkiler verilmiştir. "The Hermite-Hadamard

Inequality for s -Convex functions In The Third Sense (*S. Sezer 2021*)" isimli makale de ise üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için elde edilmiş yeni eşitsizlikler ve bunların sonuçları vardır.



3. MATERYAL VE METOT

3.1. Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde, tezimizde ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 3.1. $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının lineer kombinasyonu denir.

Tanım 3.2. $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olmak üzere, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının afin kombinasyonu denir.

Tanım 3.3. $x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $(i = 1, 2, \dots, m)$ olmak üzere, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ noktasına $x_1, x_2, \dots, x_m$ noktalarının konveks kombinasyonu denir.

Tanım 3.4. $L \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

- i) $x_1, x_2 \in L$ için $x_1 + x_2 \in L$
- ii) $x \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda x \in L$

gerçekleniyorsa L kümesine bir lineer alt uzay denir.

Tanım 3.5. $M \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere, her $x, y \in M$ için $(1 - \lambda)x + \lambda y \in M$ gerçekleşiyor ise M kümesine $\mathbb{R}^n$ 'de bir afin kümedir denir.

Önteorem 3.6. $M \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin afin küme olabilmesi için gerek ve yeter koşul, M kümesinin içerdiği noktaların, afin kombinasyonlarını da içermesidir. Yani, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ eşitliğini sağlayan $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ve $x_1, x_2, \dots, x_m \in M$ için $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \in M$ olmasıdır.

Tanım 3.7 (Konveks Küme). $C \subset \mathbb{R}^n$ ve C boştan farklı bir küme olsun. her $x_1, x_2 \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$$

ise C kümesi konvektir denir. Bir başka şekilde ifade edecek olursak, C kümesinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine C kümesinin elemanı oluyorsa C kümesi konvektir denir (Rockafellar 1970).

Önteorem 3.8. $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ iki konveks küme olmak üzere,

i) İki konveks kümenin toplamı, $C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1 \text{ ve } x_2 \in C_2\}$ konveks kümedir.

ii) İki konveks kümenin kesişimi konveks kümedir.

iii) $\lambda \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\lambda C_1 = \{\lambda x_1 \mid \lambda \in \mathbb{R} \text{ ve } x_1 \in C_1\}$ konveks kümedir.

Tanım 3.9. $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin tüm konveks kombinasyonları topluluğuna C kümesinin konveks örtüsü denir ve $\text{conv}(C)$ ile gösterilir;

$$\text{conv}(C) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k \mid x_i \in C, \lambda_i \geq 0 \text{ ve } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}. \quad (3.1)$$

Diğer bir ifadeyle, C kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine konveks örtüsü ya da konveks zarfı denir (Rockafellar 1970).

Önteorem 3.10. Bir C kümesini kapsayan en küçük konveks küme, C kümesinin konveks örtüsüdür. Daima $C \subseteq \text{conv}(C)$ geçerlidir. C konveks bir küme ise $\text{conv}(C) = C$ doğrudur.

Önteorem 3.11. $C \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesi $K(C)$ ile gösterilmek üzere, $C \subset \mathbb{R}^n$ için $\text{conv}(C) = K(C)$ geçerlidir.

Teorem 3.12 (Caratheodory Teoremi). $C \subset \mathbb{R}^n$ ve $x \in \text{conv}(C)$ olmak üzere x noktası C 'deki en fazla $n + 1$ noktanın konveks kombinasyonu olarak gösterilebilir.

İspat Bir $x \in \text{conv}(C)$ noktasını alalım. Tanım (3.9)'dan dolayı $j = 1, 2, 3, \dots, k$ için $\lambda_j > 0$

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \text{ olmak üzere, } x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$$

x noktası şeklinde $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektörlerinin konveks kombinasyonu olarak ifade edilebilir. $k > n + 1$ olsun. $x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$ lineer bağımlıdır. Dolayısıyla hepsi birden sıfırdan farklı reel sayı $m_2, m_3, \dots, m_k$ için $\sum_{i=2}^k m_i (x_i - x_1) = 0$ 'dır. $m_1 = -\sum_{i=2}^k m_i$ olsun. Dolayısıyla,

$$\sum_{j=1}^k m_j = 0 \text{ ve } \sum_{j=1}^k m_j x_j = 0$$

olur. Herhangi bir α reel sayısı için,

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j + 0 = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^k m_j = \sum_{j=1}^k (\lambda_j - \alpha m_j) x_j$$

$$\alpha = \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\lambda_j}{m_j} : m_j > 0 \right\} = \frac{\lambda_j}{m_j}$$

ve $\alpha > 0$ şeklinde tanımlansın. O zaman,

$$\frac{\lambda_j}{m_j} \geq \alpha \text{ ve } \lambda_j - \alpha m_j \geq 0$$

olur. Ayrıca $\lambda_j - \alpha m_j \geq 0$ olduğundan x , C içindeki en fazla $k - 1$ tane noktanın bir konveks kombinasyonu olarak yazılabilir. Bu işlem $n+1$ noktanın konveks kombinasyonu olarak gösterilene kadar devam eder. $\square$

Tanım 3.13. $\bar{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel sayılar kümesi olmak üzere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}$ kümesine f fonksiyonunun tanım kümesi, $\text{epi}(f) = \{(x, a) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq a\}$ kümesine f fonksiyonunun grafiküstü ya da f 'nin epigrafi denir (Rockafellar 1970).

Tanım 3.14 (Konveks Fonksiyon). Her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (3.2)$$

eşitsizliğini sağlayan $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (eşdeğer olarak $\lambda, (0, 1)$ aralığında da seçilebilir). Geometrik olarak bu eşitsizlik, f fonksiyonunun grafiği kirişlerinin altından geçer anlamındadır (Pecaric vd. 1992).

Eğer $\lambda \in [0, 1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak o zaman konveks fonksiyon şartındaki " $\leq$ " yerine " $<$ " gelir yani

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

olur. Bu durumda bu fonksiyona kesin konveks fonksiyon denir.

$x, y \in I, p, q \geq 0, p + q > 0$ için

$$f\left(\frac{px + qy}{p + q}\right) \leq \frac{pf(x) + qf(y)}{p + q}$$

eşitsizliği (3.2) eşitsizliğine denktir (Mitrinovic 1970).

" $-f$ " konveks (kesin konveks) ise o zaman f ye konkav (kesin konkav) denir. Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afin dönüşümdür. Bu afin dönüşüm uygun m ve n sabitleri için $mx + n$ şeklindedir.

Teorem 3.15. *i) $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ve $\alpha \geq 0$ ise $f + g$ ve αf fonksiyonları da I 'da konvektir.*

ii) $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ve g artan ise $g \circ f$ bileşkesi konvektir.

iii) $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks, negatif olmayan, azalan (veya artan) ise $h(x) = f(x)g(x)$ fonksiyonu da bu özellikleri sağlar.

iv) Eğer $f_n : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sonlu bir f limit fonksiyonuna yakınsayan konveks fonksiyonların bir dizisi ise f 'de konvektir (Roberts ve Varberg, 1973).

Teorem 3.16. *(i) I aralığı üzerinde f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c \in I$ noktası için,*

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

fonsiyonunun I aralığında artan olmasıdır.

(ii) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart herhangi bir $c, x \in (a, b)$ için,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x g(t) dt$$

olacak şekilde $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

(iii) f diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, f' 'in konveks olması için gerek ve yeter şart f' fonksiyonunun artan olmasıdır.

(iv) f ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda, f' 'in konveks olması için gerek ve yeter şart $f''(x) \geq 0$ olmasıdır.

(v) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart her $x_0 \in (a, b)$ için f fonksiyonunun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır. Yani

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0) \quad \forall x \in (a, b)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada λ, x_0 a bağlıdır ve eğer f' varsa o zaman $\lambda = f'(x_0)$ ya da $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ ise $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ dir.

(vi) $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart P, Q ve R noktaları f fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$\text{eğim}PQ \leq \text{eğim}PR \leq \text{eğim}QR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Robert ve Varberg 1973).

Tanım 3.17 (Özel Ortalamalar). x, y reel sayılar ve $x \neq y$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \sqrt{xy}, & x, y &\in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{Geometrik Ortalama} \\ A(x, y) &= \frac{\alpha + \beta}{2}, & x, y &\in \mathbb{R} & \text{Aritmetik Ortalama} \\ \bar{L}(x, y) &= \frac{y-x}{\ln|y| - \ln|x|}, & x, y &\in \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{Logaritmik Ortalama} \\ L_n(x, y) &= \left[\frac{y^{n+1} - x^{n+1}}{(n+1)(y-x)} \right]^{\frac{1}{n}} & x \neq y, x, y &\in \mathbb{R} & \text{Genelleştirilmiş Logaritmik Ortalama} \\ W(x, y) &= \lambda x + (1 - \lambda)y & x, y &\in \mathbb{R}, \lambda \in [0, 1] & \text{Ağırlıklı Ortalama} \end{aligned}$$

şeklindedir (Dragomir ve Pearce 2000).

Tanım 3.18 (Beta ve Gamma Fonksiyonları). Beta ($\beta(x, y)$) ve Gamma ($\Gamma(x)$) fonksiyonları her $x, y > 0$ için,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt$$

biçiminde tanımlanır.

Beta ve Gamma fonksiyonlarının sahip olduğu özelliklerden bazıları şöyledir:

$x, y > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}_{++}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= \beta(y, x), \quad \beta(x+1, y) = \frac{x}{x+y} \beta(x, y) \\ \beta(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Gamma(n) = (n-1)!. \end{aligned}$$

3.2. Bazı Soyut Konveks Fonksiyon Sınıfları ve Özellikleri

Çeşitli konveks fonksiyon sınıfları vardır. Bu bölümde bazılarının yer verilecek ve bu tezin içeriğini oluşturan s -konvekslik sınıflarının özelliklerine de değinilecektir.

Tanım 3.19 (J -Konveks Fonksiyon). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna, I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J -konveks fonksiyon denir (Mitrinovic 1970).

Sonuç 3.20. Her konveks fonksiyon J -konveks fonksiyondur.

Tanım 3.21 (Yıldız Biçimli Fonksiyon). $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x \in [0, b]$ ve $t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx) \leq tf(x)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna yıldız biçimli fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce 2000).

Tanım 3.22 (m -konveks Fonksiyon). $f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x, y \in [0, b]$ ve $m, t \in [0, 1]$ için,

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f m -konvektir denir (Toader 1984).

— f fonksiyonu konveks ise f fonksiyonu m -konkavdır. Ayrıca $f(0) \leq 0$ için $[0, b]$ aralığında tanımlı tüm m -konveks fonksiyonların sınıfı $K_m(b)$ ile gösterilir.

Eğer $m = 0$ alınırsa yıldız biçimli fonksiyon kavramı ve $m = 1$ alınırsa bilinen konveks fonksiyon kavramı elde edilir.

Tanım 3.23 (Godunova-Levin Fonksiyon). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in (0, 1)$ olmak üzere,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \frac{f(x)}{\alpha} + \frac{f(y)}{1-\alpha}$$

ise f fonksiyonuna Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma ek olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde,

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova ve Levin 1985).

Tanım 3.24 (p -Fonksiyonu). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq f(x) + f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna p -fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir vd. 1995).

Bu tanıma ek olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise bu takdirde,

$$f(x)(x-y)(x-z) + f(y)(y-x)(y-z) + f(z)(z-x)(z-y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (*Godunova ve Levin 1985*).

Tanım 3.25 (Wright-Konveks Fonksiyon). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve $y > x, \delta > 0$ şartları altında her bir $y + \delta, x \in I$ için

$$f(x + \delta) - f(x) \leq f(y + \delta) - f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-konveks fonksiyon denir (*Dragomir ve Pearce 1998*).

Tanım 3.26 (Quasi-Konveks Fonksiyonlar). $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $C \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in C$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max \{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye quasi-konveks fonksiyon denir (*Dragomir ve Pearce 1998*).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max \{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max \{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye quasi-konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max \{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir (*Dragomir ve Pearce 1998*).

Tanım 3.27. f hem quasi-konveks hem de quasi-konkav ise f 'ye quasi-monotonik fonksiyon denir (*Green ve Pierskalla 1970*).

Tanım 3.28 (Wright-Quasi Konveks Fonksiyon). $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyon olsun. $y > x, \delta > 0$ şartları altında $\forall x, y, y + \delta \in I$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\frac{1}{2} [f(\alpha x + (1 - \alpha)y) + f((1 - \alpha)x + \alpha y)] \leq \max \{f(x), f(y)\}$$

veya

$$\frac{1}{2} [f(y) + f(x + \delta)] \leq \max \{f(x), f(y + \delta)\}$$

eşitsizliklerinden biri sağlanıyorsa f 'ye $I \subseteq \mathbb{R}$ 'de Wright-quasi-konveks fonksiyon denir (Dragomir ve Pearce 1998).

Tanım 3.29 (Logaritmik Konveks Fonksiyon). $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq f^\alpha(x) f^{1-\alpha}(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna logaritmik-konvektir denir (Pecaric vd. 1992).

Tanım 3.30 (r -Konveks Fonksiyon). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in [a, b]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için,

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq M_r(f(x), f(y); \alpha)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r -konveks fonksiyon denir. Burada $M_{r,x,y}$ pozitif sayıların r . kuvvetlerine göre ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda \in [0, 1]$ dir. (Gill vd. 1997).

Bu tanımdan 0-konveks fonksiyonların log-konveks fonksiyonlar ve 1-konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılır.

r -konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \begin{cases} \lambda f^r(x) + (1 - \lambda)f^r(y), & r \neq 0 \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce vd. 1998).

Tanım 3.31 (h -Konveks Fonksiyon). $h : J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyon olsun. Her $x, y \in I$ ve $t \in (0, 1)$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan fonksiyonu için

$$f(tx + (1 - t)y) \leq h(t)f(x) + h(1 - t)f(y)$$

eşitsizliği geçerli ise f 'ye h -konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varosanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, f' 'ye h -konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Bu tanımın $h(t) = t$ için klasik konveksliğe, $s \in (0, 1)$ olmak üzere $h(t) = t^s$ için s -Breckner konveksliğe, $h(t) = 1$ için P -fonksiyonlara ve $h(t) = t^{-1}$ için Gudunova-Levin fonksiyonlarına indirgenir.

Bu teze konu olan s -konvekslik ve özellikle üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonların özelliklerine ve bu sınıflar arasındaki ilişkilere değinelim;

Tanım 3.32 (Birinci Anlamda s -Konveks Fonksiyon). $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer her $x, y \geq 0$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ için,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y) \quad (3.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f' 'ye birinci anlamda s -Orlicz konveks fonksiyon denir ve bu sınıf K_s^1 ile gösterilir. (Orlicz 1968; Dragomir vd. 1998).

Tanım 3.33 (İkinci Anlamda s -Konveks Fonksiyon). $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer her $x, y \geq 0$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ iken $\alpha + \beta = 1$ için,

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f' 'ye ikinci anlamda s -Breckner konveks fonksiyon veya ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir. İkinci anlamdaki s -konveks fonksiyonların kümesini K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978; Hudzik vd. 1994).

Örnek 3.34. $s \in (0, 1)$ ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(t) = \begin{cases} a, & t = 0 \\ bt^s + c, & t > 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde

- i) $b \geq 0$ ve $c \leq a$ ise $f \in K_s^1$ 'dir.
- ii) $b \geq 0$ ve $0 \leq c \leq a$ ise $f \in K_s^2$ 'dir.
- iii) $b \geq 0$ ve $c < 0$ ise $f, (0, \infty)$ de azalmayan fonksiyondur.
- iv) $b > 0$ ve $c < 0$ ise $f \notin K_s^2$ 'dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Teorem 3.35. $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer $f \in K_s^2$ ise $f, [0, \infty)$ aralığında negatif değildir (Hudzik and Maligranda 1994).

Teorem 3.36. $f \in K_s^2$ olsun. Her $u, v \in \mathbb{R}_+$, her $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta \leq 1$ olmak üzere, (3.3) eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter koşul $f(0) = 0$ olmasıdır (Hudzik and Maligranda 1994).

Teorem 3.37. (a) $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer, $f \in K_s^2$ ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^1$ 'dir,

(b) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer, $f \in K_{s_2}^2$ ve $f(0) = 0$ ise $f \in K_{s_1}^2$ 'dir,

(c) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq 1$ olsun. Eğer, $f \in K_{s_2}^2$ ve $f(0) \leq 0$ ise $f \in K_{s_1}^1$ 'dir (Hudzik and Maligranda 1994).

Pinheiro tarafından yapılan çalışmada birinci ve ikinci anlamda s -konveklilik tekrar tanımlanmıştır. Bu tanımda fonksiyonun tanım kümesi daha geniş bir küme alınmıştır.

Tanım 3.38. $U \subset \mathbb{R}_+$ olmak üzere, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in U$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f\left(\lambda x + (1 - \lambda^s)^{\frac{1}{s}} y\right) \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda^s) f(y)$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa f 'ye birinci anlamda s -konveks fonksiyon denir (Pinheiro 2007).

Tanım 3.39. $U \subset \mathbb{R}_+$ olmak üzere, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in U$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda^s f(x) + (1 - \lambda)^s f(y)$$

eşitsizliğini sağlanıyorsa f 'ye ikinci anlamda s -konveks fonksiyon denir (Pinheiro 2007).

Önteorem 3.40. $f \in K_s^1$ veya $f \in K_s^2$ ise $\lambda, \mu \in [0, 1]$ için özel halde

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^s f(x) + \mu^s f(y)$$

sağlanır (Pinheiro 2007).

Bu tez için kullanacağımız fonksiyon sınıfı yeni bir sınıf olup, aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.41 (Üçüncü Anlamda s -Konveks Fonksiyon). $U \subset \mathbb{R}^n$ s -konveks küme ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer her $x, y \in U$ ve $\lambda, \mu \in [0, 1]$ öyle ki $\lambda^s + \mu^s = 1$ için,

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y) \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon denir (Kemali vd. 2021).

(3.4) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliklere denktir:

$$f(\lambda^{\frac{1}{s}}x + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s}}y) \leq \lambda^{\frac{1}{s^2}}f(x) + (1 - \lambda)^{\frac{1}{s^2}}f(y)$$

veya

$$f(\lambda x + (1 - \lambda^s)^{\frac{1}{s}}y) \leq \lambda^{\frac{1}{s}}f(x) + (1 - \lambda^s)^{\frac{1}{s^2}}f(y).$$

$\lambda \in [0, 1]$ ve $x, y \in U$ dur. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^3 ile gösterilir.

Dikkat edilirse birinci, ikinci ve üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon sınıfları $s = 1$ için bilinen klasik konvekslik ile çıkarılır.

Örnek 3.42. $s \in (0, 1]$ ve $b, c < 0$ olmak üzere, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olsun.

$$f(x) = \begin{cases} a, & x = 0 \text{ ise} \\ bx^{1/s} + c, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonu, $(0, \infty)$ aralığında üçüncü anlamda s -konveks fonksiyondur. Bu koşullara ek olarak, $c \leq a$ ise f fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında üçüncü anlamda s -konvektir.

Örnek 3.43. $x, y \in (0, \infty)$ olduğunu varsayalım. O halde, $\lambda^s + \mu^s = 1$ için $\lambda x + \mu y > 0$ dır.

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= b(\lambda x + \mu y)^{1/s} + c \\ &\leq b(\lambda^{1/s}x^{1/s} + \mu^{1/s}y^{1/s}) + c \\ &= b(\lambda^{1/s}x^{1/s} + \mu^{1/s}y^{1/s}) + c(\lambda^s + \mu^s) \\ &\leq b(\lambda^{1/s}x^{1/s} + \mu^{1/s}y^{1/s}) + c(\lambda^{1/s} + \mu^{1/s}) \\ &= \lambda^{1/s}(bx^{1/s} + c) + \mu^{1/s}(by^{1/s} + c) \\ &= \lambda^{1/s}f(x) + \mu^{1/s}f(y). \end{aligned}$$

$c \leq a$ koşulu da eklendiğinde, $x = 0, y \neq 0$ ve $x = y = 0$ olmak üzere iki durum vardır.

I. durum

$y > x = 0$ için,

$$\begin{aligned} f(\lambda 0 + \mu y) &= f(\mu y) = b\mu^{1/s}y^{1/s} + c = b\mu^{1/s}y^{1/s} + c(\lambda^s + \mu^s) \\ &\leq b\mu^{1/s}y^{1/s} + c(\lambda^{1/s} + \mu^{1/s}) = \lambda^{1/s}c + \mu^{1/s}(by^{1/s} + c) \\ &= \lambda^{1/s}c + \mu^{1/s}f(y) = \lambda^{1/s}a + \mu^{1/s}f(y) = \lambda^{1/s}f(0) + \mu^{1/s}f(y). \end{aligned}$$

II. durum

$y = x = 0$ için,

$$f(\lambda 0 + \mu 0) = a \leq a(\lambda^{1/s} + \mu^{1/s}) = \lambda^{1/s} f(0) + \mu^{1/s} f(0)$$

dır (Kemali vd. 2021).

Örnek 3.44. U kümesi,

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \dots + x_n \geq 0\}$$

ve $k \in \mathbb{R}_+$ olsun. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$f(x_1, \dots, x_n) = -k(x_1 + \dots + x_n)$$

şeklinde tanımlanırsa, $f \in K_s^3$ 'tür. Çünkü, $\lambda^s + \mu^s = 1$ olacak şekilde $\lambda, \mu > 0$ için,

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1, \dots, x_n) + \mu(y_1, \dots, y_n)) &= -k(\lambda x_1 + \mu y_1 + \dots + \lambda x_n + \mu y_n) \\ &= \lambda(-k)(x_1 + \dots + x_n) + \mu(-k)(y_1 + \dots + y_n) \\ &\leq \lambda^{1/s}(-k)(x_1 + \dots + x_n) + \mu^{1/s}(-k)(y_1 + \dots + y_n) \\ &= \lambda^{1/s} f(x_1 + \dots + x_n) + \mu^{1/s} f(y_1 + \dots + y_n) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Dolayısıyla, buradan $f \in K_s^3$ olduğu elde edilir (Kemali vd. 2021).

Teorem 3.45. $f : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in K_s^3$ ise $f \in K_s^1$ 'dir (Kemali vd. 2021).

İspat $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ sağlanacak şekilde $\lambda, \mu \geq 0$ olsun. O halde,

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{1/s} f(x) + \mu^{1/s} f(y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

olur. □

Teorem 3.46. $f : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in K_s^3$ ise

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2^{\frac{1}{s}}}$$

eşitsizliği her $x, y \in U$ için sağlanır (Kemali vd. 2021).

İspat $s \in (0, 1]$ için $\frac{1}{2^{\frac{1}{s^2}}} \leq \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ olduğu açıktır. Bu eşitsizlikten yararlanarak,

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^{\frac{1}{s^2}}} \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^{\frac{1}{s}}}$$

eşitsizliği elde edilir. $\square$

Teorem 3.47. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ birer fonksiyon olmak üzere $g(t) = f(tx + (1-t)^{\frac{1}{s}}y)$ şeklinde tanımlansın. Eğer, $g \in K_s^3$ ise $f \in K_s^3$ 'tür (Kemali vd. 2021).

İspat $\lambda \in [0, 1]$ ve $x, y \in U$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} f\left(\lambda x + (1-\lambda^s)^{\frac{1}{s}}y\right) &= g(\lambda) = g\left(\lambda \cdot 1 + (1-\lambda^s)^{\frac{1}{s}} \cdot 0\right) \\ &\leq \lambda^{\frac{1}{s}}g(1) + (1-\lambda^s)^{\frac{1}{s^2}}g(0) \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}}f(x) + (1-\lambda^s)^{\frac{1}{s^2}}f(y). \end{aligned}$$

olduğundan $f \in K_s^3$ 'tür. $\square$

Teorem 3.48. $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar olsun. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f = \sum_{i=1}^m a_i f_i$ şeklinde tanımlansın ve $a_i \geq 0$ olsun. Eğer $i = 1, 2, \dots, m$ için, $f_i \in K_s^3$ ise $f \in K_s^3$ 'tür (Kemali vd. 2021).

İspat $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ sağlanacak şekilde $\lambda, \mu \geq 0$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= \sum_{i=1}^m a_i f_i(\lambda x + \mu y) \\ &\leq \sum_{i=1}^m a_i \left(\lambda^{\frac{1}{s}} f_i(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f_i(y) \right) \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^m a_i f_i(x) + \mu^{\frac{1}{s}} \sum_{i=1}^m a_i f_i(y) \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y). \end{aligned}$$

olur. Bu da bize $f \in K_s^3$ olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 3.49. $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, $f = \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i\}$ şeklinde tanımlansın. Eğer $i = 1, 2, \dots, m$ için, $f_i \in K_s^3$ ise $f \in K_s^3$ 'tür (Kemali vd. 2021).

İspat Her $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda, \mu \geq 0$ için,

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x + \mu y) &= \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(\lambda x + \mu y)\} \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} f_i(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f_i(y) \right\} \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \lambda^{\frac{1}{s}} f_i(x) \right\} + \max_{1 \leq i \leq m} \left\{ \mu^{\frac{1}{s}} f_i(y) \right\} \\
 &\leq \lambda^{\frac{1}{s}} \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x)\} + \mu^{\frac{1}{s}} \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(y)\} \\
 &= \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y)
 \end{aligned}$$

dir. Buradan, $f = \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i\} \in K_s^3$ olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.50. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon ve $g : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $f, g \in K_s^3$ ise $f \circ g \in K_s^3$ 'tür (Kemali vd. 2021).

İspat $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda, \mu \geq 0$ için,

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(\lambda x + \mu y) &= f(g(\lambda x + \mu y)) \\
 &\leq f\left(\lambda^{\frac{1}{s}} g(x) + \mu^{\frac{1}{s}} g(y)\right) \\
 &\leq f(\lambda g(x) + \mu g(y)) \\
 &\leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(g(x)) + \mu^{\frac{1}{s}} f(g(y)) \\
 &= \lambda^{\frac{1}{s}} (f \circ g)(x) + \mu^{\frac{1}{s}} (f \circ g)(y).
 \end{aligned}$$

dir. Buradan, $f \circ g \in K_s^3$ olduğu görülür. $\square$

Teorem 3.51. $f : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in K_s^3$ ise f 'nin herhangi bir yerel minimumu fonksiyonun genel minimumudur (Kemali vd. 2021).

İspat x^* , f 'in bir yerel minimumu olsun. Aksini varsayalım: Bir $y \in U$ için $f(y) < f(x^*)$ olsun. $f \in K_s^3$ olduğundan, $\lambda^s + \mu^s = 1$ olan her $\lambda, \mu \geq 0$ için,

$$\begin{aligned}
 f(\lambda x^* + \mu y) &\leq \lambda^{\frac{1}{s}} f(x^*) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y) \\
 &\leq \lambda^s f(x^*) + \mu^s f(y) \\
 &\leq (1 - \mu^s) f(x^*) + \mu^s f(y) \\
 &\leq f(x^*) + \mu^s (f(y) - f(x^*)) \\
 &< f(x^*)
 \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu x^{**} 'nin f 'in yerel minimumu olmasıyla çelişir. Dolayısıyla, f 'in her yerel minimumu genel minimumudur. $\square$

Teorem 3.52. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon ve $f \in K_s^3$ ise $g \circ f \in K_s^3$ 'tür (Kemali vd. 2021).

İspat $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda, \mu \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(\lambda x + \mu y) &= g(f(\lambda x + \mu y)) \\ &\leq g(\lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y)) \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}} g(f(x)) + \mu^{\frac{1}{s}} g(f(y)) \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}} (g \circ f)(x) + \mu^{\frac{1}{s}} (g \circ f)(y). \end{aligned}$$

Buradan $g \circ f \in K_s^3$ olduğu görülür. $\square$

Konveks fonksiyonların temel eşitsizliklerinden olan Jensen eşitsizliğinin üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için olan eşitsizliği aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 3.53. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_1, \dots, x_m \in U$ ve $\lambda_1^s + \dots + \lambda_m^s = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$ olsun. Eğer $f \in K_s^3$ ise

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1^{\frac{1}{s}} f(x_1) + \dots + \lambda_m^{\frac{1}{s}} f(x_m)$$

eşitsizliği sağlanır (Kemali vd. 2021).

İspat m üzerine tümevarım kullanacağız. $m = 2$ için eşitsizlik doğrudur. $k > 2$ olmak üzere $m = k$ için doğru olduğunu varsayalım ve $m = k + 1$ için de doğru olduğunu görelim. $x_1, \dots, x_{k+1} \in U$ ve $\lambda_1^s + \dots + \lambda_{k+1}^s = 1$ olacak şekilde her $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1} \geq 0$ için,

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{k+1} x_{k+1}$$

olsun. Burada $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ 'den en az biri 1'den küçük olmalıdır. Diyelim ki $\lambda_{k+1} < 1$ olsun ve

$$\lambda_1^s + \dots + \lambda_k^s = 1 - \lambda_{k+1}^s$$

şeklinde yazalım. $\lambda_1^s + \dots + \lambda_k^s = \lambda_*^s$ olacak şekilde $\lambda_* < 1$ sayısı seçelim. Buradan $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_*}\right)^s + \dots + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_*}\right)^s = 1$ şeklinde yazabiliriz. Tümevarım varsayımından dolayı,

$$f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_*}x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_*}x_k\right) \leq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_*}\right)^{\frac{1}{s}} f(x_1) + \dots + \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_*}\right)^{\frac{1}{s}} f(x_k)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\lambda_* \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_*}x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_*}x_k\right) + \lambda_{k+1}x_{k+1}\right) \\ &\leq \lambda_*^{\frac{1}{s}} f\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_*}x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{\lambda_*}x_k\right) + \lambda_{k+1}^{\frac{1}{s}} f(x_{k+1}) \\ &\leq \lambda_1^{\frac{1}{s}} f(x_1) + \dots + \lambda_{k+1}^{\frac{1}{s}} f(x_{k+1}) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 3.54. $g : U \rightarrow V$ bir lineer dönüşüm ve $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in K_s^3$ ise $f \circ g \in K_s^3$ 'tür (Kemali vd. 2021).

İspat Her $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda, \mu \geq 0$ için,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\lambda x + \mu y) &= f(g(\lambda x + \mu y)) \\ &= f(\lambda g(x) + \mu g(y)) \\ &= \lambda^{\frac{1}{s}} f(g(x)) + \mu^{\frac{1}{s}} f(g(y)) \\ &\leq \lambda^{\frac{1}{s}} (f \circ g)(x) + \mu^{\frac{1}{s}} (f \circ g)(y) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da $f \circ g \in K_s^3$ demektir. □

Teorem 3.55. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $f \in K_s^3$ olsun. O halde her $x, y \in U$ ve $\lambda^s + \mu^s \leq 1$ sağlanacak şekilde $\lambda, \mu \geq 0$ için (4.8) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için gerek ve yeter şart $f(0) \leq 0$ olmasıdır (Kemali vd. 2021).

İspat $\lambda = \mu = 0$ durumda gereklilik koşulunun doğru olduğu açıktır. O halde varsayalım ki her $x, y \in U$ ve $\gamma = \lambda^s + \mu^s$ olacak şekilde $\lambda, \mu \geq 0$ ve $0 < \gamma < 1$ olsun. Burada $\alpha = \lambda\gamma^{-\frac{1}{s}}$ ve $\beta = \mu\gamma^{-\frac{1}{s}}$ değişken değiştirmesi yaparsak,

$$\alpha^s + \beta^s = \frac{\lambda^s}{\gamma} + \frac{\mu^s}{\gamma} = 1$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan yeterlilik koşulu için,

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + \mu y) &= f\left(\alpha \gamma^{\frac{1}{s}} x + \beta \gamma^{\frac{1}{s}} y\right) \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{s}} f\left(\gamma^{\frac{1}{s}} x\right) + \beta^{\frac{1}{s}} f\left(\gamma^{\frac{1}{s}} y\right) \\
&= \alpha^{\frac{1}{s}} f\left(\gamma^{\frac{1}{s}} x + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \cdot 0\right) + \beta^{\frac{1}{s}} f\left(\gamma^{\frac{1}{s}} y + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s}} \cdot 0\right) \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{s}} \left[\gamma^{\frac{1}{s^2}} f(x) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s^2}} f(0)\right] + \beta^{\frac{1}{s}} \left[\gamma^{\frac{1}{s^2}} f(y) + (1 - \gamma)^{\frac{1}{s^2}} f(0)\right] \\
&= \alpha^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s^2}} f(x) + \beta^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s^2}} f(y) + \left(\alpha^{\frac{1}{s}} + \beta^{\frac{1}{s}}\right) (1 - \gamma)^{\frac{1}{s^2}} f(0) \\
&\leq \alpha^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s^2}} f(x) + \beta^{\frac{1}{s}} \gamma^{\frac{1}{s^2}} f(y) \\
&= \lambda^{\frac{1}{s}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s}} f(y)
\end{aligned}$$

yazılır ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.56. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ artan bir fonksiyon, $g : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ bir fonksiyon ve $g(0) = 0$ olsun. $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ için, eğer $f \in K_{s_1}^3$ ve $g \in K_{s_2}^3$ ise $f \circ g \in K_{s_1}^3$ tür (Kemali vd. 2021).

İspat Her $x, y \in U$ ve $\lambda^{s_1} + \mu^{s_1} = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda, \mu \geq 0$ olsun. (3.55)'den $\lambda^{s_2} + \mu^{s_2} \leq \lambda^{s_1} + \mu^{s_1} = 1$ şeklinde yazabiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(\lambda x + \mu y) &= f(g(\lambda x + \mu y)) \\
&\leq f\left(\lambda^{\frac{1}{s_2}} g(x) + \mu^{\frac{1}{s_2}} g(y)\right) \\
&\leq f(\lambda g(x) + \mu g(y)) \\
&\leq \lambda^{\frac{1}{s_1}} (f \circ g)(x) + \mu^{\frac{1}{s_1}} (f \circ g)(y)
\end{aligned}$$

bu da $f \circ g \in K_{s_1}^3$ demektir. □

Teorem 3.57. $0 < s_1 \leq s_2 \leq 1$ için eğer $f : U \rightarrow (-\infty, 0]$ fonksiyonu $f \in K_{s_2}^3$ ise $f \in K_{s_1}^3$ tür (Kemali vd. 2021).

İspat $f \in K_{s_2}^3$, her $x, y \in U$ ve $\lambda^{s_1} + \mu^{s_1} = 1$ sağlanacak şekilde her $\lambda, \mu \geq 0$ için,

$$\lambda^{s_2} + \mu^{s_2} \leq \lambda^{s_1} + \mu^{s_1} = 1$$

yazabiliriz. Burada U konveks küme olduğu için orijini içerir. O halde Teorem (3.55)'den dolayı,

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda^{\frac{1}{s_2}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s_2}} f(y) \leq \lambda^{\frac{1}{s_1}} f(x) + \mu^{\frac{1}{s_1}} f(y).$$

bu da $f \in K_{s_1}^3$ demektir. □

3.3. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 3.58 (Üçgen Eşitsizliği). *Herhangi x, y reel sayıları için,*

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|$$

ve tümevarım metoduyla,

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 3.59 (İntegraller için Üçgen Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun.

Bu durumda,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.60 (Jensen Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, n$ olsun. O halde, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ve $\alpha_i > 0$ ise,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

eşitsizliği sağlanır (Jensen 1905).

Teorem 3.61 (İntegraller için Jensen Eşitsizliği). $f : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon,

$h : I \rightarrow (0, \infty)$ ve $u : I \rightarrow \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$f\left(\frac{\int_a^b h(t)u(t)dt}{\int_a^b h(t)dt}\right) \leq \frac{\int_a^b h(t)f(u(t))dt}{\int_a^b h(t)dt}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem 3.62 (Hölder Eşitsizliği). $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ ve $p, q > 1$ öyle ki $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir. Özel olarak, $p = q = 2$ seçilirse yukardaki eşitsizlik Cauchy-Buniakowsky-Schwartz eşitsizliği elde edilir (Mitrinovic 1970).

Teorem 3.63 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği). $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere, f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı olsun. Eğer $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ise,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği sağlanır (Mitrinovic 1970).

Teorem 3.64 (AO-GO Eşitsizliği). Eğer her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x_i \geq 0$, $\alpha_i > 0$ ve $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ ise,

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinovic 1970).

Teorem 3.65 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği). $I, \mathbb{R}'de$ bir aralık $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada, f fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir (Hermite 1883).

İspat f fonksiyonu sürekli ve sınırlı olduğundan $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Konvekslik tanımından,

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $[0, 1]$ aralığında λ ya göre integrali alınır,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(\lambda a + (1 - \lambda)b) d\lambda &\leq \int_0^1 \lambda f(a) d\lambda + \int_0^1 (1 - \lambda)f(b) d\lambda \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \end{aligned}$$

elde edilip soldaki eşitsizlikte $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, $\lambda \in [0, 1]$ dönüşümü uygulanırsa, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sağ tarafı elde edilir. Sol tarafını elde etmek için,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{b-a} \left[\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \right]$$

eşitliğinin sağındaki integrallara sırasıyla, $x = a + \lambda(b-a)/2$ ve $x = b - \lambda(b-a)/2$ değişken değiştirmesi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(a + \frac{\lambda(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{\lambda(b-a)}{2}\right) \right] d\lambda \\ &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafının ispatı demektir. $\square$

Teorem 3.66 (Fejér Eşitsizliği). $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir, negatif olmayan ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik bir fonksiyon ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir (Fejér 1906).

Eğer $g = 1$ seçilirse Fejér eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğine indirgenmiş olur.

Teorem 3.67 (Ostrowski Eşitsizliği). $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı, I^0 nde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $a, b \in I$, $a < b$ ve $f' \in L[a, b]$ olacak şekilde Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise her $x \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \right| &\leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(x-a)^2 + (b-x)^2}{2} \right] \\ &= M(b-a) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{(b-a)^2} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradaki $\frac{1}{4}$ katsayısı bu şartlar altındaki en iyi katsayıdır. Daha küçük olan bir katsayı ile yer değiştirilemez (Ostrowski 1938).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Klasik konveks fonksiyonlar için sağlanan Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilişkili elde edilmiş bazı eşitlikler ve bilinen eşitsizlikler yardımıyla integral eşitsizlikler elde etmek bir yöntem olarak araştırmacılar tarafından kullanılır.

Bu bölümde, literatürde bulunan, soyut konveks fonksiyonlar için elde edilmiş integral eşitsizliklerine yer verilmiştir.

4.1. Klasik Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler

İntegral eşitsizlikler elde edilirken bazen eşitliklerden bazen de bilinen eşitsizliklerden yararlanır. Bu yöntemde kullanılan eşitlik ve elde edilen integral eşitsizlikler şöyledir :

Önteorem 4.68. $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^o$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' [a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t)f'(ta + (1-t)b)dt$$

eşitlik sağlanır (Dragomir ve Agarwal 1997).

Önteorem 4.68'den yararlanarak Teorem 4.69 ve 4.70'deki eşitsizlikler elde edilmiştir.

Teorem 4.69. $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^o$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|$ konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)(|f'(a)| + |f'(b)|)}{8} dt$$

eşitsizliklik sağlanır (Dragomir ve Agarwal 1997).

Teorem 4.70. $f : I^o \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^o$ ve $a < b$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$ konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}} \frac{\left(|f'(a)|^{p/(p-1)} + |f'(b)|^{p/(p-1)} \right)}{2} dt$$

eşitsizliklik sağlanır (Dragomir ve Agarwal 1997).

Önteorem 4.71. $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f'' [a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) f''(ta + (1-t)b) dt$$

eşitlik sağlanır (Hussian 2009).

Önteorem 4.71'den yararlanarak Teorem 4.72'de verilen eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 4.72. $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir, $f'' [a, b]$ 'de integrallenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer , $q > 1$ için ve $|f''|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konkav ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \left| f'' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| [\beta(p+1, p+1)]^p dt$$

eşitsizliği doğrudur (Hussian 2009).

Fonksiyonun konvekslik özelliğinden ve bilinen eşitsizliklerden yararlanılarak elde edilmiş bazı integral eşitsizlikler şöyledir:

Teorem 4.73. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. O halde her $t \in [0, 1]$ için

$$f \left(\frac{a+b}{2} \right) \leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y) dx dy \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir 1990).

Teorem 4.74. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. O halde her $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} f \left(\frac{a+b}{2} \right) &\leq \frac{1}{(b-a)^n} \int_a^b \dots \int_a^b f \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\leq \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \int_a^b \dots \int_a^b f \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Pearce ve Pecaric 1990).

Teorem 4.75. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks sürekli fonksiyon ve $q_i \geq 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) olmak üzere $Q_n = \sum_{i=1}^n q_i > 0$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^n} \int_a^b \dots \int_a^b f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\leq \frac{1}{(b-a)^n} \int_a^b \dots \int_a^b f\left(\frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n}{Q_n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Buse 1995).

Teorem 4.76. $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ve $\alpha_i \in (0, 1)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n; n \geq 2$) olmak üzere $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{(b-a)^n} \int_a^b \dots \int_a^b f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{1-\alpha_i}{n-1} \frac{1}{(b-a)^{n-1}} \int_a^b \dots \int_a^b f\left(\frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + \dots + q_n x_n}{Q_n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Yang ve Wang 1997).

Teorem 4.77. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer f' $[a, b]$ 'de integrallenebilir, $p > 0$ ve $|f'|^q$ konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} dt$$

eşitsizliklik sağlanır (Pearce ve Pecaric 2000).

Teorem 4.78. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer f' $[a, b]$ 'de integrallenebilir, $p > 0$ ve $|f'|^q$ konveks ise

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} dt$$

eşitsizliklik sağlanır (Pearce ve Pecaric 2000).

Teorem 4.79. $f : I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde türevlenebilir bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $f' [a, b]$ 'de integrallenebilir, $p > 0$ ve $|f'|^q$ konkav ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| dt,$$

ve

$$\left| f \left(\frac{a+b}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{4} \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right| dt$$

eşitsizlikler sağlanır (Pearce ve Pecaric 2000).

4.2. Quasi-Konveks Fonksiyon Sınıfı için İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.80. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $|f'| [a, b]$ aralığında quasi-konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a) \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}}{4}$$

eşitsizliği sağlanır (Ion 2007).

Teorem 4.81. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ için $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. $p \in \mathbb{R}$ ve $p > 1$ olmak üzere eğer $|f'|^{\frac{p}{p-1}} [a, b]$ aralığında quasi-konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\max \left\{ |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right\} \right]^{\frac{p-1}{p}}$$

eşitsizliği sağlanır (Ion 2007).

Önteorem 4.82. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 'da ikinci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında f'' integrallenebilir ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) f''(ta + (1-t)b) dt$$

eşitliği geçerlidir (Dragomir vd 2000).

Bu Önteorem kullanılarak, ikinci mertebeden türevlenebilir Quasi-konveks fonksiyonlar için elde edilmiş daha genelleştirilmiş integral eşitsizlikleri şöyledir:

Teorem 4.83. $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$ $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve $[a, b]$ aralığında Quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} \max \{|f''(a)| + |f''(b)|\}$$

eşitliliği sağlanır (Dragomir vd. 2010).

Teorem 4.84. $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|^{p/p-1}$ $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve $[a, b]$ aralığında Quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{8} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)} \right)^{1/p} (\max \{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q\})^{1/q}$$

eşitsizliği $p > 1$ için sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Dragomir vd. 2010).

Teorem 4.85. $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|^q$ $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve $[a, b]$ aralığında Quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{12} (\max \{|f''(a)| + |f''(b)|\})^{1/q}$$

eşitsizliği $q \geq 1$ için sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Dragomir vd. 2010).

Aşağıdaki Önteorem'den yararlanarak quasi-konveks fonksiyonlar için daha genel integral eşitsizlikler çalışılmıştır ve bu eşitsizlikler yukarıda verilenlerden daha iyidir;

Önteorem 4.86. $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $a, b \in I^\circ$, $a < b$ ve f'' $[a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{16} \int_0^1 (1-t)^2 \left(\begin{array}{c} f''(\frac{1+t}{2}a + \frac{1-t}{2}b) \\ + f''(\frac{1-t}{2}a + \frac{1+t}{2}b) \end{array} \right) dt$$

eşitliği sağlanır (Dragomir ve Barani 2011).

Teorem 4.87. $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|$ $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve $[a, b]$ aralığında Quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[\max \left\{ |f''(a)|, \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right\} + \max \left\{ |f''(b)|, \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right\} \right]$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Barani 2011).

Sonuç 4.88. f fonksiyonu Teorem 4.87'de tanımlandığı gibi olsun. Eğer

i) $|f''|$ artan ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[|f''(b)| + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right]$$

ii) $|f''|$ azalan ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{24} \left[|f''(a)| + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right]$$

eşitsizlikler sağlanır (Dragomir ve Barani 2011).

Teorem 4.89. $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|f''|^{p/p-1}$ $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve $[a, b]$ aralığında Quasi-konveks fonksiyon ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)} \right)^{1/p} \left[\left(\max \left\{ |f''(a)|^q, \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q \right\} \right)^{1/q} + \left(\max \left\{ |f''(b)|^q, \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right)|^q \right\} \right)^{1/q} \right]$$

eşitsizliği $p > 1$ için sağlanır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (Dragomir ve Barani 2011).

Sonuç 4.90. f fonksiyonu Teorem 4.89'da tanımlandığı gibi olsun. Eğer

i) $|f''|$ artan ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)} \right)^{1/p} \left[|f''(b)| + \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \right]$$

ii) $|f''|$ azalan ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)} \right)^{1/p} \left[|f''(a)| + f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right]$$

eşitsizlikler sağlanır (Dragomir ve Barani 2011).

4.3. p -Konveks ve p -Quasi-Konveks Fonsiyonlar için İntegral Eşitsizlikler

Yine bu sınıflar için integral eşitsizlikler elde edilirken benzer yöntem kullanılmış ve aşağıdaki yardımcı Önteorem tanımlanmıştır:

Önteorem 4.91. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' [a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$\frac{b^p f(b) - a^p f(a)}{b^p - a^p} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du = \frac{1}{p} \int_0^1 A_{t,p}^{\frac{1}{p}} f' \left(A_{t,p}^{\frac{1}{p}} \right) dt$$

eşitliği sağlanır. Burada $A_{t,p} = tb^p + (1-t)a^p$ şeklindedir (İşcan vd. 2017).

Tanım 4.92. Aşağıdaki bazı Teoremler için kullanılan ortalamaların tanımlarını verelim,

$$C_p(a, b) = \int_a^b A_{t,p}^{\frac{1}{p}} dt = \begin{cases} A(a, b) & p = 1 \\ G^2(a, b)/L(a, b) & p = -1 \\ L_p^p(a, b)/L_{p-1}^{p-1} & p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

ve

$$D_{p,r}(a, b) = \left(\int_a^b A_{t,p}^{\frac{1}{p}} dt \right)^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} L_r(a, b) & p = 1 \\ G^2(a, b)/L_{-r}(a, b) & p = -1 \\ L_{\frac{p+r-1}{p+r-1}}^{\frac{p-1}{p+r-1}}(a, b)/L_{\frac{p-1}{p-1}}^{\frac{p-1}{p-1}}(a, b) & p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 4.93. $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f' [a, b]$ 'de integrallenebilir olsun. Eğer $|f'|^q, [a, b]$ üzerinde p -quasi-konveks ise $q \geq 1$ ve her $x \in [a, b]$ için

$$\left| \frac{b^p f(b) - a^p f(a)}{b^p - a^p} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{C_P(a, b)}{|p|} \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kadakal vd. 2017).

Sonuç 4.94. *Teorem 4.93 için,*

i) Eğer $p = 1$ ve $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ p -konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(u) du \right| \leq A(a, b) \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

ii) Eğer $p = -1$ ve $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ harmonik konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{af(b) - bf(a)}{b - a} - \frac{ab}{b - a} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \right| \leq \frac{G^2(a, b)}{L(a, b)} \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

(Kadalk vd. 2017).

Teorem 4.95. $a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'de türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $q > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1$ ve $f' [a, b]$ 'de integrallenebilir olsun. Eğer $|f'|^q$, $[a, b]$ üzerinde p -quasi-konveks ise

$$\left| \frac{b^p f(b) - a^p f(a)}{b^p - a^p} - \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(u)}{u^{1-p}} du \right| \leq \frac{D_{p,r}(a, b)}{|p|} \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kadalk vd. 2017).

Sonuç 4.96. *Teorem 4.95 için,*

i) Eğer $p = 1$ ve $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ quasi-konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} - \frac{1}{b - a} \int_a^b f(u) du \right| \leq L_r(a, b) \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

ii) Eğer $p = -1$ ve $[a, b]$ üzerinde $|f'|^q$ harmonik quasi-konveks ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| \frac{af(b) - bf(a)}{b - a} - \frac{ab}{b - a} \int_a^b \frac{f(u)}{u^2} du \right| \leq \frac{G^2(a, b)}{L_{-r}(a, b)} \max \{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

(Kadalk vd. 2017).

Teorem 4.97. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ p -konveks fonksiyon olsun. $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $f [a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$f \left(\left[\frac{a^p + b^p}{2} \right]^{\frac{1}{p}} \right) \leq \frac{p}{b^p - a^p} \int_a^b \frac{f(x)}{x^{1-p}} dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Kadalk vd. 2017).

4.4. Birinci Anlamda s -Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler

Bu sınıf için Hermite-Hadamard integral eşitsizliği aşağıdaki teoremdedir verilmiştir.

Teorem 4.98. $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Eğer f , birinci anlamda s -konveks bir fonksiyon, $a, b \in \mathbb{R}_+$ öyle ki $a < b$ ve $s \in (0, 1]$ ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1} \quad (4.1)$$

eşitsizliği doğrudur (Dragomir vd. 1998).

f fonksiyonunun s -konkav olması durumunda (4.1) eşitsizliği yön değiştirir.

Önteorem 4.99. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer f'' $[a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^2}{16} \left[\int_0^1 t^2 f''\left(t\frac{a+b}{2} + (1-t)a\right) dt + \int_0^1 (1-t)^2 f''\left(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dt \right]$$

eşitliği sağlanır (M. Özdemir vd. 2013).

Bu Önteorem'den yararlanarak aşağıdaki Teorem 4.100 ve 4.103'de birinci anlamda s -konveks bir fonksiyon için integral eşitsizlikler elde edilmiştir:

Teorem 4.100. $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I° 'da ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $s \in (0, 1]$ için $|f|$, $[a, b]$ aralığında birinci anlamda s -konveks bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)} \left\{ |f''(a)| + (s+1)(s+2) \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(b)| \right\} \\ & \leq \frac{[1 + (s+2)2^{1-s}](b-a)^2}{8(s+1)(s+2)(s+3)} \{|f''(a)| + |f''(b)|\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir vd. 2013).

Sonuç 4.101. Teorem 4.100'de eğer $s = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| & \leq \frac{(b-a)^2}{192} \left\{ |f''(a)| + 6 \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(b)| \right\} \\ & \leq \frac{(b-a)^2}{48} \{|f''(a)| + |f''(b)|\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (Özdemir vd. 2013).

Sonuç 4.102. *Teorem 4.100'de eğer $s = 1$ alınırsa*

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| &\leq \frac{(b-a)^2}{192} \left\{ |f''(a)| + 6 \left| f''\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| + |f''(b)| \right\} \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{48} \{ |f''(a)| + |f''(b)| \} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir (M. Özdemir vd. 2013).

Teorem 4.103. *$a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'da ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $q < 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $s \in (0, 1]$ için $|f''|$, $[a, b]$ aralığında s -konveks bir fonksiyon ise*

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \\ &\leq \frac{(b-a)^2}{16} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \times \left[\begin{aligned} &(|f''(a)|^q + |f''(\frac{a+b}{2})|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &+ (|f''(\frac{a+b}{2})|^q + |f''(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Özdemir vd. 2013).

Önteorem 4.104. *$a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in [a, b]$ için f' $[a, b]$ 'de integrallenebilir ise*

$$\begin{aligned} &f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(u)du \\ &= \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \frac{t}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}a \right) dt \\ &\quad - \frac{(x-a)^2}{b-a} \int_0^1 \frac{t}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}a \right) dt \\ &\quad - \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \frac{t}{2} f' \left(\frac{1+t}{2}x + \frac{1-t}{2}b \right) dt \\ &\quad + \frac{(b-x)^2}{b-a} \int_0^1 \frac{t}{2} f' \left(\frac{1-t}{2}x + \frac{1+t}{2}b \right) dt \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (M. Latif 2015).

Teorem 4.105. *$a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a, b]$ ve $s \in (0, 1]$ için $|f'|$, $[a, b]$ aralığında s -konveks bir fonksiyon ise*

$$\begin{aligned} &\left| f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(u)du \right| \\ &\leq \frac{s+2^{-s}}{(s+1)(s+2)} \left\{ \frac{(x-a)^2}{b-a} [|f'(x)| + |f'(a)|] + \frac{(b-x)^2}{b-a} [|f'(x)| + |f'(b)|] \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (M. Latif 2016).

Sonuç 4.106. *Teorem 4.105’de $x = a$ ya da $x = b$ alınırsa*

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \leq \frac{(s+2^{-s})(b-a)}{2(s+1)(s+2)} [|f'(a)| + |f'(b)|]$$

eşitsizliği sağlanır (M. Latif 2016).

Teorem 4.107. *$a, b \in I^0$ ve $a < b$ olmak üzere $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 ’da türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in [a, b]$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ olmak üzere, $s \in (0, 1]$ için $|f'|^q$, $[a, b]$ aralığında s -konveks bir fonksiyon ise*

$$\begin{aligned} & \left| f(x) + \frac{(b-x)f(b) + (x-a)f(a)}{b-a} - \frac{2}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{(x-a)^2}{b-a} \left[\begin{aligned} & ((2-2^{-s})|f'(x)|^q + 2^{-s}|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ & + (2^{-s}|f'(x)|^q + (2-2^{-s})|f'(a)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \right] \\ & + \frac{(b-x)^2}{b-a} \left[\begin{aligned} & ((2-2^{-s})|f'(x)|^q + 2^{-s}|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ & + (2^{-s}|f'(x)|^q + (2-2^{-s})|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (M. Latif 2016).

Sonuç 4.108. *Teorem 4.107’deki koşulların sağlandığını varsayalım. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $x = a$ ya da $x = b$ alınırsa*

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(u) du \right| & \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} (b-a) \\ & \quad \times \left\{ \begin{aligned} & (2^{-s}|f'(a)|^q + (2-2^{-s})|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \\ & + ((2-2^{-s})|f'(a)|^q + 2^{-s}|f'(b)|^q)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (M. Latif 2016).

Teorem 4.109. *$f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ sırasıyla $f \in K_{s_1}^1$ ve $g \in K_{s_2}^1$ olsun. $s_1, s_2 \in [0, 1]$ olmak üzere,*

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\frac{x-a}{b-a}}(x) g^{\frac{b-x}{b-a}}(x) dx & \leq \frac{1}{s_1+2} f(b) + \beta(2, s_1+1) f(a) \\ & \quad + \frac{1}{s_2+2} g(b) + \beta(2, s_2+1) g(a) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada β fonksiyonu klasik anlamdaki Beta fonksiyonudur (Ekinci vd. 2020).

Sonuç 4.110. *Teorem 4.109’da $s_1 = s_2$ alınırsa*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f^{\frac{x-a}{b-a}}(x) g^{\frac{b-x}{b-a}}(x) dx \leq \frac{1}{3} [f(b) + g(b)] + \frac{1}{6} [f(a) + g(a)]$$

eşitsizliği elde edilir (Ekinci vd. 2020).

Tanım 4.111. *Şimdi aşağıdaki bazı teoremler için kullanılan ortalamalarının tanımlarını verelim:*

$$\begin{aligned} A(f; a, b) &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(z) dz \\ B(f; a, b; s) &= \frac{f(a) + s f(b)}{s+1} \\ A(a, b) &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.112. *$f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında integrallenebilir ve $s \in (0, 1)$ için $f \in K_s^1$ olsun. $a < b$ ve $a, b \in I$ olmak üzere*

$$f(A(a, b)) \leq A(f; a, b) \leq B(f; a, b; s)$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Fitzpatrick 1999).

4.5. İkinci Anlamda s –Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler

İkinci anlamda s -konveks fonksiyonlar için bir çok integral eşitsizliğinin elde edildiği çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmaların bir çoğuna temel oluşturan eşitsizlik Dragomir tarafından elde edilmiştir:

Teorem 4.113. *$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tanımlı ve $[a, b]$ aralığında integrallenebilir olsun. Eğer $f \in K_s^2$, $a, b \in \mathbb{R}_+$ öyle ki $a < b$ ve $s \in (0, 1]$ ise,*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği doğrudur (Dragomir vd. 1998).

Önteorem 4.114 ile ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar için elde edilmiş integral eşitsizliklerden bazıları:

Önteorem 4.114. $f : I^0 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, türevlenebilir fonksiyon, $a, b \in I^0$, $a < b$ olsun. Eğer $f'' [a, b]$ 'de integrallenebilir ise

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{2} \int_0^1 t(1-t) f''[ta + (1-t)b]dt \quad (4.2)$$

eşitliği sağlanır (Hussian vd. 2009).

(4.2) eşitliği ve bilinen bazı eşitsizlikler yardımı ile elde edilmiş integral eşitsizliklerden bazıları şöyledir:

Teorem 4.115. $q > 1$, $s \in (0, 1]$, $f : I \subseteq [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I^0 'da ikinci mertebeden türevlenebilir ve $a < b$, $a, b \in I^0$ olsun. Eğer $f'' [a, b]$ 'de integrallenebilir ve $|f''|^q$ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında s -konveks ise

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(a-b)^2}{2 \times 6^{\frac{(q-1)}{q}}} \left[\frac{|f''(a)|^q + |f''(b)|^q}{(s+2)(s+3)} \right]^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği, sağlanır (Hussian vd. 2009).

Teorem 4.116. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I^o üzerinde türevlenebilir ve $f'' [a, b]$ 'de integrallenebilir olsun. Eğer $q > 1$ ve $s \in (0, 1]$ için $|f''|^q$ fonksiyonu ikinci anlamda s -konveks ise,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} [|f''(a)|^q + |f''(b)|^q]^{\frac{1}{q}} (s+1)^{-\frac{1}{q}} [\beta(p+1, p+1)]^p dt$$

eşitsizliği doğrudur (Hussian, 2009).

Önteorem 4.117. $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I^0 'da n .mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. $a, b \in I^0$, $a < b$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \int_a^b f(x)dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_a^b x^n f^{(n)}(x)dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir (Kadalk vd. 2017).

Teorem 4.118. Her $n \in \mathbb{N}$ için; $a, b \in I^0$, $a < b$ ve $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ I' 'de n inci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $q > 1$ için $[a, b]$ aralığında $|f^{(n)}|^q [a, b]$ 'de integrallenebilir ve $|f^{(n)}|^q \in K_s^2$ ise

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left(\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{n!} (b-a) \left(\frac{2}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} L_{np}^n(a, b) A^{\frac{1}{q}}(|f^{(n)}(a)|^q, |f^{(n)}(b)|^q)$$

eşitsizliği elde edilir (Kadalk vd. 2017).

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.119. Teorem 4.118'deki koşullar altında $n = 1$ alınırsa,

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left(\frac{2}{s+1} \right)^{\frac{1}{q}} L_p(a, b) A^{\frac{1}{q}}(|f'(a)|^q, |f'(b)|^q)$$

eşitsizliği elde edilir (Kadalk vd. 2017).

Teorem 4.120. $f : I \subseteq \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında integrallenebilir ve $s \in (0, 1)$ ve $a, b \in I$, $a < b$ olsun. Eğer f ikinci anlamda s -konveks fonksiyon ise

$$2^{s-1} f(A(a, b)) \leq A(f; a, b) \leq \frac{2}{s+1} A(f(a), f(b))$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir ve Fitzpatrick 1999).

Teorem 4.121. $b^* > 0$ için $f, g : I \subset [0, b^*] \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci anlamda s -konveks fonksiyonlar ve $a < b$, $a, b \in I$ ve $s_1, s_2 \in (0, 1]$ olsun. Eğer her $x, y \in [a, b]$ için, f ve g sırasıyla ikinci anlamda s_1 ve s_2 konveks ise

$$\int_a^b \int_a^b A(fg; x, y) dy dx \leq \frac{2(b-a)}{s_1 + s_2 + 1} A(fg; a, b) + \frac{\Gamma(s_1 + 1)\Gamma(s_2 + 1)}{2\Gamma(s_1 + s_2 + 1)} [M(a, b) + N(a, b)]$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada $M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$ ve $N(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$ şeklinde tanımlanmıştır (Tunç ve Kirmaci 2010).

4.6. Üçüncü Anlamda s -Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.122. $U \subseteq \mathbb{R}_+$ ve $f : U \rightarrow \mathbb{R}_+$ üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. $a < b$ olan $a, b \in U$ için,

$$\begin{aligned} 2^{\frac{1}{s^2}-1} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) (b-a) &\leq \int_a^b f(x) dx \\ &\leq \frac{1}{s+1} \left(\frac{1}{s} [f(a)b + f(b)a] \beta\left(\frac{1}{s^2}, \frac{1}{s}\right) + s[f(b)b + f(a)a] \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Sezer 2021).

Sonuç 4.123. Teorem 4.122'de $s = 1$ durumunda Hermite-Hadamard eÅşitsizliÄyi elde edilir.

Teorem 4.124. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. $a < b$ olacakşekilde her $a, b \in U$ için,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) \left[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right] dt \\ &\leq \frac{1}{s+1} \left(s + \frac{1}{s} B\left(\frac{1}{s^2}, \frac{1}{s}\right)\right) [f(a) + f(b)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitsizliği geçerlidir (Sezer 2021).

(4.3) eşitsizliğinin üst sınırı Beta fonksiyonunu barındırmaktadır. Ancak aynı çalışmada, yazarlar üst sınırı Beta fonksiyonundan bağımsız olarak şu teorem ile vermişlerdir;

Teorem 4.125. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ integrallenebilir üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. $a < b$ olacak şekilde her $a, b \in U$ için,

$$\int_0^1 f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) \left[1 + (1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right] dt \leq \left(s + \frac{1}{4s}\right) [f(a) + f(b)].$$

eşitsizliği geçerlidir (Sezer 2021).

Teorem 4.126. $U \subseteq \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. $a < b$ olacak şekilde $a, b \in U$ için,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) &\leq \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\left[t + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}\right]\right) dt \\ &\leq \frac{1}{2^{\frac{1}{s^2}}} \int_0^1 f\left((1-t^s)^{\frac{1}{s}}a + tb\right) \left[1 + (1-t)^{\frac{1}{s}-1}t^{s-1}\right] dt \end{aligned} \quad (4.4)$$

eşitsizliği geçerlidir (Sezer 2021).

Sonuç 4.127. $U \subseteq \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. $a < b$ olacak şekilde $a, b \in U$ için,

$$2^{\frac{1}{s^2}} f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{2}{s}-1}}\right) \leq \frac{1}{s+1} \left(s + \frac{1}{s} B\left(\frac{1}{s^2}, \frac{1}{s}\right)\right) [f(a) + f(b)] \leq \left(s + \frac{1}{4s}\right) [f(a) + f(b)]$$

elde edilir.

Teorem 4.128. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. O halde $a < b$ olacak şekilde her $a, b \in U$ için,

$$\int_0^1 f\left(t^{\frac{1}{s}}a + (1-t)^{\frac{1}{s}}b\right) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Sezer 2021).

Teorem 4.129. $0 < a < b$ ve $U \subseteq \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ artan üçüncü anlamda s -konveks bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s(s-1)}} f(x) dx$$

sonlu ise

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{s}{1-s} \left[a^{\frac{1+s^2}{s(1-s)}} \int_a^\infty x^{\frac{s+1}{s(s-1)}} f(x) dx + b^{\frac{1+s^2}{s(1-s)}} \int_b^\infty x^{\frac{s+1}{s(s-1)}} f(x) dx \right]$$

eşitsizliği geçerlidir (Sezer 2021).

4.7. Üçüncü Anlamda s -Konveks Fonksiyonlar için Yeni İntegral Eşitsizlikler

Bu bölümde, aşağıdaki Önteorem, literatürde mevcut olan bir başka Önteorem ve fonksiyonun konveksliğinden yararlanarak üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edilir.

Önteorem 4.130. $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f' [a, b]$ 'de integrallenebiliyorsa,

$$bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 \left[\begin{array}{l} b^2t - a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} \\ -abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \\ f'(tb + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}a) \end{array} \right] dt$$

eşitliği doğrudur.

İspat *Kısmi integrasyon metodu ile aşağıdaki belirli integral hesaplanırsa,*

$$\int_a^b x f'(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $x = tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a$ değişken değiştirmesi yapılırsa;

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left[b^2 t - a^2 t^{s-1} (1 - t^s)^{\frac{2}{s}-1} - ab t^s (1 - t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} \right] \\ &\quad f'(tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) dt \\ &= \int_0^1 (tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) \cdot (b - t^{s-1} \cdot (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) f'(tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) dt \\ &= (tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) f(tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) \Big|_0^1 \\ &\quad - \int_0^1 f(tb + (1 - t^s)^{\frac{1}{s}} a) (b - a(1 - t^s)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}) dt \\ &= (b) f(b) - (a) f(a) - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Önteorem 4.130'da verilen özdeşlikten yararlanarak, üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde edelim.

Teorem 4.131. $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ 'de integrallenebilir ve üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur;

$$\begin{aligned} &\left| b f(b) - a f(a) - \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq (|a| + |b|)^2 \left[\frac{s}{1+s} \left| f'(b) + \frac{1}{s} \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) |f'(a)| \right| \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

İspat

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\
& \leq \left| \int_0^1 \left(b^2t - a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} - abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right) \right. \\
& \quad \left. f' \left(tb + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}a \right) dt \right| \\
& \leq \int_0^1 \left| \left(b^2t - a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} - abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right) \right| \\
& \quad \left| f' \left(tb + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}a \right) \right| dt \\
& \leq \int_0^1 \left[|b^2t| + |a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1}| + |abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1}| + |ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}}| \right] \\
& \quad \left[t^{\frac{1}{s}} |f'(b)| + (1-t^s)^{\frac{1}{s^2}} |f'(a)| \right] dt \\
& \leq \int_0^1 (|a| + |b|)^2 \left[t^{\frac{1}{s}} |f'(b)| + (1-t^s)^{\frac{1}{s^2}} |f'(a)| \right] dt \\
& = (|a| + |b|)^2 \left[|f'(b)| \frac{t^{\frac{1}{s}+1}}{\frac{1}{s}+1} \Big|_0^1 + |f'(a)| \frac{1}{s} \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) \right] \\
& = (|a| + |b|)^2 \left[\frac{s}{1+s} |f'(b)| + \frac{1}{s} \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) |f'(a)| \right]
\end{aligned}$$

□

Sonuç 4.132. *Teorem 4.131'deki koşullar altında, $s = 1$ alırsak,*

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (|a| + |b|)^2 \frac{|f'(a)| + |f'(b)|}{2}$$

Sonuç 4.133. *Teorem 4.131'deki koşullara, $x \in [a, b]$ için $|f'(x)| \leq M$ koşulunu ilave edersek,*

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq M (|a| + |b|)^2$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.134. *$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ve $p \in (1, \infty)$ öyle ki $\frac{1}{p} < s$ olsun. Eğer $|f'|^p$, $\mathbb{R}$ 'de üçüncü anlamda s -konveks ise aşağıdaki eşitsizlik doğrudur;*

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\
& \leq \left(\frac{1}{1+s} \right)^{\frac{1}{p}} (|a| + |b|)^2 \left[s |f'(b)|^p + (1+s) \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) |f'(a)|^p \right]^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

İspat Öteorem 4.130'de Hölder integral eşitsizliği ve $|f'|^p$ 'nin üçüncü anlamda s -konveksliğini kullanırsak;

$$\begin{aligned}
& \left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \\
& \leq \left| \int_0^1 \left(b^2t - a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} - abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right) \right. \\
& \quad \left. f' \left(tb + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}a \right) dt \right| \\
& \leq \int_0^1 \left| b^2t - a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} - abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right| \\
& \quad \left| f' \left(tb + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}a \right) \right| dt \\
& \leq \left[\int_0^1 \left[b^2t + a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} + abt^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + ab(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right]^{\frac{p}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
& \quad \left[\int_0^1 \left| f' \left(tb + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}a \right) \right|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \left[\int_0^1 \left[b^2t + a^2t^{s-1}(1-t^s)^{\frac{2}{s}-1} + |ab|t^s(1-t^s)^{\frac{1}{s}-1} + |ab|(1-t^s)^{\frac{1}{s}} \right]^{\frac{p}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} \\
& \quad \left[\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{s}}|f'(b)|^p + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}|f'(a)|^p dt \right) \right]^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \left[\int_0^1 [b^2 + 2|ab| + a^2]^{\frac{p}{p-1}} dt \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_0^1 \left(t^{\frac{1}{s}}|f'(b)|^p + (1-t^s)^{\frac{1}{s}}|f'(a)|^p \right) dt \right]^{\frac{1}{p}} \\
& = \left([|a| + |b|]^{\frac{2p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(|f'(b)|^p \frac{t^{\frac{1}{s}+1}}{\frac{1}{s}+1} \Big|_0^1 + |f'(a)|^p \frac{1}{s} \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = (|a| + |b|)^2 \left(\frac{s}{1+s} |f'(b)|^p + \frac{1}{s} \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) |f'(a)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = (|a| + |b|)^2 \left(\frac{1}{1+s} \right)^{\frac{1}{p}} \left(s |f'(b)|^p + (s+1) \beta \left(\frac{1}{s^2} + 1, \frac{1}{s} \right) |f'(a)|^p \right)
\end{aligned}$$

□

Sonuç 4.135. Teorem 4.134'deki koşullar altında, $s = 1$ alırsak,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq (|a| + |b|)^2 \left(\frac{|f'(b)|^p + |f'(a)|^p}{2} \right)^{\frac{1}{p}}$$

Sonuç 4.136. Teorem 4.134'deki koşullara, her $x \in \mathbb{R}$ için $|f'(x)|^p \leq M$ koşulu eklersek,

$$\left| bf(b) - af(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq M^{\frac{1}{p}} (|a| + |b|)^2$$

elde edilir.

Bu kısımda da, literatürde mevcut olan bir Önteorem yardımı ile, n -inci mertebeden türevinin mutlak değeri üçüncü anlamda s -konveks olan fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edildi.

Önteorem 4.137. $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $[a, b]$ aralığında n -inci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $f^n \in L[a, b]$ ise,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx = \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_a^b x^n f^{(n)}(x)dx$$

eşitliği vardır (Kadalk vd. 2017).

Teorem 4.138. $s \in [0, 1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n -inci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $q > 1$ için $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{n!} (b-a) L_{np}^n(a, b) \left[\frac{s[|f^{(n)}(b)|^q + |f^{(n)}(a)|^q]}{s+1} \right]^{1/q} \end{aligned} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat $x = \frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a$ olsun. $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun üçüncü anlamda s -konveksliğinden,

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)|^q &= \left| f^{(n)} \left(\frac{x-a}{b-a}b + \frac{b-x}{b-a}a \right) \right|^q \\ &\leq \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} |f^{(n)}(b)|^q + \left[1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right]^{1/s} |f^{(n)}(a)|^q. \end{aligned}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.

Önteorem (4.137)'den, $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun üçüncü anlamda s -konveksliğinden ve

Hölder integral eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\
& \leq \frac{1}{n!} \int_a^b x^n |f^{(n)}(x)| dx \\
& \leq \frac{1}{n!} \left[\int_a^b x^{np} dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b |f^{(n)}(x)|^q dx \right]^{1/q} \\
& \leq \frac{1}{n!} \left[\int_a^b x^{np} dx \right]^{1/p} \left[\int_a^b \left[\left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} |f^{(n)}(b)|^q + \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} \right) |f^{(n)}(a)|^q \right] dx \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\int_a^b x^{np} dx \right]^{1/p} \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} \int_a^b (x-a)^{1/s} dx + \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \int_a^b [(b-a)^{1/s} - (x-a)^{1/s}] dx \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{np+1}}{np+1} \Big|_a^b \right]^{1/p} \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} \left[\frac{(x-a)^{\frac{1}{s}+1}}{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}} \right] \Big|_a^b + \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \left[(b-a)^{1/s} x - \frac{(x-a)^{\frac{1}{s}+1}}{\frac{1}{s}+1} \right] \Big|_a^b \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\frac{b^{np+1} - a^{np+1}}{np+1} \right]^{1/p} \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} \frac{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}}{\frac{1}{s}+1} + \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \left[(b-a)^{1/s} b - \frac{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}}{\frac{1}{s}+1} - (b-a)^{1/s} a \right] \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} (b-a)^{1/p} \left[\frac{b^{np+1} - a^{np+1}}{np+1} \right]^{1/p} \left[(b-a)^{\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{\frac{1+s}{s}}} + |f^{(n)}(a)|^q \left[b - \frac{(b-a)}{\frac{1+s}{s}} - a \right] \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} (b-a)^{1/p} L_{np}^n(a, b) \left[\frac{s(b-a) |f^{(n)}(b)|^q}{1+s} + \frac{s(b-a) |f^{(n)}(a)|^q}{1+s} \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} (b-a)^{1/p} L_{np}^n(a, b) (b-a)^{1/q} \left(\frac{s}{1+s} \right)^{1/q} \left(|f^{(n)}(b)|^q + |f^{(n)}(a)|^q \right)^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} (b-a) L_{np}^n(a, b) \left[\frac{s(|f^{(n)}(b)|^q + |f^{(n)}(a)|^q)}{1+s} \right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

□

Sonuç 4.139. *Teorem 4.138’de verilen aynı koşullar altında,*

i) *Eğer $s = 1$ alırsak, (4.6) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,*

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{b-a}{n!} L_{np}^n(a, b) A^{1/q} \left(|f^{(n)}(b)|^q + |f^{(n)}(a)|^q \right).$$

ii) *Eğer $s = 1, n = 1$ alırsak, (4.6) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,*

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq L_p(a, b) A^{1/q} (|f'(a)|^q, |f'(b)|^q).$$

iii) *Eğer $s = 1, n = 1$ ve $q = 1$ alırsak, (4.6) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,*

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq L_p(a, b) A (|f'(a)|, |f'(b)|).$$

Teorem 4.140. $s \in [0, 1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n -inci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ, a < b$ olsun. Eğer $q > 1$ için $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon ise

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)}{n!} L_n^{\frac{q-1}{q}}(a, b) \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}} F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) + |f^{(n)}(a)|^q L_n^n(a, b) \right]^{1/q} \quad (4.7)$$

burada, $F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) = \int_a^b (x-a)^{1/s} x^n dx$.

İspat Önteorem 4.137’de $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun üçüncü anlamda s -konveksliğinden ve Power mean integral eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\
& \leq \frac{1}{n!} \left[\int_a^b x^n dx \right]^{1-1/q} \left[\int_a^b \left[x^n \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} |f^{(n)}(b)|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} \right) |f^{(n)}(a)|^q \right] dx \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\int_a^b x^n dx \right]^{1-1/q} \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} \int_a^b x^n (x-a)^{1/s} dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \int_a^b [(b-a)^{1/s} - (x-a)^{1/s}] x^n dx \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\int_a^b x^n dx \right]^{1-1/q} \left[\left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} - \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \right) \int_a^b (x-a)^{1/s} x^n dx \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q \int_a^b x^n dx \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b \right]^{1-1/q} \left[\left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} - \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \right) F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_a^b \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} \left[\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \right]^{1-1/q} \left[\left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q}{(b-a)^{1/s}} - \frac{|f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \right) F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} (b-a)^{1-1/q} \left[\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)} \right]^{1-1/q} \left[\left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s+1}} \right) F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q (b-a) \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(b-a)(n+1)} \right]^{1/q} \\
& = \frac{1}{n!} (b-a)^{1-1/q} L_n^{\frac{n-1}{q}}(a, b) (b-a)^{1/q} \left[\left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s+1}} \right) F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q L_n^n(a, b) \right]^{1/q} \\
& = \frac{b-a}{n!} L_n^{\frac{n-1}{q}}(a, b) \left[\left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s+1}} \right) F\left(\frac{1}{s}, n, x\right) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q L_n^n(a, b) \right]^{1/q}
\end{aligned}$$

□

Sonuç 4.141. *Teorem 4.140’da verilen aynı koşullar altında, i) Eğer $s = 1$ alırsak, (4.7) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,*

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\
& \leq \frac{b-a}{n!} L_n^{\frac{n-1}{q}}(a, b) \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^2} (L_{n+1}^{n+1}(a, b) - a L_n^n(a, b)) \right. \\
& \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q L_n^n(a, b) \right]^{1/q}.
\end{aligned}$$

ii) Eğer $s = 1, n = 1$ alırsak, (4.7) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left(\frac{1}{b} \right)^{1/q} A^{1-1/q}(a, b) \left[\begin{array}{l} (2b+a) |f'(b)|^q \\ +(2a+b) |f'(a)|^q \end{array} \right]^{1/q}.$$

iii) Eğer $s = 1, n = 1$ ve $q = 1$ alırsak, (4.7) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq (2b+a) |f'(b)| + (2a+b) |f'(a)|.$$

Teorem 4.142. $s \in [0, 1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n -inci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ, a < b$ olsun. Eğer $q > 1$ için $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{n!} \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}} G\left(\frac{1}{s}, n, q, x\right) \right]^{1/q} \\ & \quad + |f^{(n)}(a)|^q L_{nq}^n(a, b) \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $G\left(\frac{1}{s}, n, q, x\right) = \int_a^b x^{nq}(x-a)^{1/s} dx$.

İspat Öntem 4.137’de $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun üçüncü anlamda s -konveksliğinden ve Hölder integral eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \int_a^b x^n f^{(n)}(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{n!} \left(\int_a^b 1^p dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b x^{nq} |f^{(n)}(x)|^q dx \right)^{1/q} \\ & \leq \frac{1}{n!} \left(\int_a^b 1 dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b x^{nq} \left[\begin{array}{l} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} |f^{(n)}(b)|^q \\ + \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{1/s} \right) |f^{(n)}(a)|^q \end{array} \right] dx \right)^{1/q} \\ & = \frac{1}{n!} \left(\int_a^b dx \right)^{1/p} \left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{1/s}} \int_a^b x^{nq}(x-a)^{1/s} dx \right. \\ & \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q \int_a^b x^{nq} dx \right)^{1/q} \\ & = \frac{1}{n!} (b-a)^{1/p} \left(\begin{array}{l} (b-a) \frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}} G\left(\frac{1}{s}, n, q, x\right) \\ + |f^{(n)}(a)|^q (b-a) \left(\frac{b^{nq+1} - a^{nq+1}}{(b-a)(nq+1)} \right) \end{array} \right)^{1/q} \\ & = \frac{1}{n!} (b-a)^{1/p} (b-a)^{1/q} \left(\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{(b-a)^{\frac{1}{s}+1}} G\left(\frac{1}{s}, n, q, x\right) \right. \\ & \quad \left. + |f^{(n)}(a)|^q L_{nq}^n(a, b) \right)^{1/q} \end{aligned}$$

□

Sonuç 4.143. *Teorem 4.142’de verilen aynı koşullar altında,*

i) Eğer $s = 1$ alırsak, (4.8) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left[\frac{|f^{(n)}(b)|^q - |f^{(n)}(a)|^q}{n!} [L_{nq+1}^{nq+1}(a, b) - aL_{nq}^{nq}(a, b)] + |f^{(n)}(a)|^q L_{nq}^{nq}(a, b) \right]^{1/q}.$$

ii) Eğer $s = 1, n = 1$ alırsak, (4.8) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq [(|f'(b)|^q - |f'(a)|^q) [L_{q+1}^{q+1}(a, b) - aL_q^q(a, b)] + |f'(a)|^q L_q^q(a, b)]^{1/q}.$$

iii) Eğer $s = 1, n = 1, q = 1$ alırsak, (4.8) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{b-a} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{1}{b} [(2b+a)|f'(b)| + (2b+a)|f'(a)|].$$

Teorem 4.144. $s \in [0, 1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ ve $f : I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde n -inci mertebeden türevlenebilir ve $a, b \in I^\circ, a < b$ olsun. Eğer $q > 1$ için $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilir ve üçüncü anlamda s -konveks fonksiyon ise

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^{1/p}}{n!} 2^{\frac{1-s^2}{qs^2}} L_{np}^n(a, b) \left| f^{(n)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|.$$

İspat Önteorem 4.137’de $|f^{(n)}|^q$ fonksiyonunun üçüncü anlamda s -konkavlığından ve

Hermite-Hadamard integral eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\
 & \leq \frac{1}{n!} \int_a^b x^n |f^{(n)}(x)| dx \\
 & \leq \frac{1}{n!} \left(\int_a^b x^{np} dx \right)^{1/p} \left(\int_a^b |f^{(n)}(x)|^q dx \right)^{1/q} \\
 & = \frac{1}{n!} \left[\frac{b^{np+1} - a^{np+1}}{np+1} \right]^{1/p} 2^{\frac{1}{qs^2} - \frac{1}{q}} \left| f^{(n)} \left(\frac{a+b}{2^{1/s}} \right) \right| \\
 & = \frac{(b-a)^{1/p}}{n!} 2^{\frac{1-s^2}{qs^2}} L_{np}^n(a, b) \left| f^{(n)} \left(\frac{a+b}{2^{1/s}} \right) \right|
 \end{aligned}$$

□

Sonuç 4.145. *Teorem 4.144’de verilen aynı koşullar altında,*

i) Eğer $s = 1$ alırsak, (4.5) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{f^{(k)}(b)b^{k+1} - f^{(k)}(a)a^{k+1}}{(k+1)!} \right] - \int_a^b f(x)dx \right| \\
 & \leq \frac{(b-a)^{1/p}}{n!} L_{np}^n(a, b) \left| f^{(n)} \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

ii) Eğer $s = 1, n = 1$ alırsak, (4.5) eşitsizliği aşağıdaki eşitsizliğe dönüşür,

$$\left| \frac{f(b)b - f(a)a}{(b-a)^{1/p}} - \frac{1}{(b-a)^{1/p}} \int_a^b f(x)dx \right| \leq L_p(a, b) \left| f' \left(\frac{a+b}{2} \right) \right|.$$

5. SONUÇLAR

Sonuçlar

Soyut konvekslik kavramı ve Eşitsizlikler teorisi matematiğin birçok alanında önemli bir role sahipken, uygulamaları diğer bilim dallarında da değer görmektedir. Günümüze kadar birçok araştırmacı Hermite-Hadamard, Ostrowski, Simpson tipi integral eşitsizlikleri iyileştirme üzerinde çalışmalar yapmıştır. Bu tezde, bu integral eşitsizlikler ve bu eşitsizliklerin üzerinde çalışıldığı bazı soyut konveks fonksiyon sınıfları incelenmiş, yeni integral eşitsizliklerin elde edilmesi veya mevcut eşitsizliklerin iyileştirilmesi yöntemi araştırmacılara sunulmuştur. Bunu yaparken ;

- 1.Soyut konvekslik ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verildi.
2. Klasik konvekslik sınıfı ve soyut konveks fonksiyon sınıflarından: J-konveks fonksiyonlar, m-konveks fonksiyonlar, Godunova-Levin fonksiyonlar, Quasi-konveks fonksiyonlar, Birinci anlamda s -konveks fonksiyonlar, İkinci anlamda s -konveks fonksiyonlar ve Üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar gibi sınıflar verildi.
3. Literatürde mevcut olan önemli eşitsizliklerden: Üçgen eşitsizliği, Jensen eşitsizliği, Hölder integral eşitsizliği, Power mean integral eşitsizliği gibi eşitsizlikler verildi.
- 4-Tanıtılan soyut konveks fonksiyon sınıfları için elde edilmiş integral eşitsizliklerin bazıları verildi
5. İntegrallenebilir fonksiyonlar için bir eşitlik elde edildi. Daha sonra, Üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için bu eşitlik ve bilinen Hölder, Power mean gibi integral eşitsizlikler yardımı ile yeni integral eşitsizliklere ulaşıldı.
6. Literatürde mevcut olan, n -inci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar için elde edilmiş bir eşitlik yardımı ile üçüncü anlamda s -konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikler elde edildi.

Öneriler

Bu tez ile Konveks analiz ve Eşitsizlikler Teorisi üzerine çalışan araştırmacılar için;

1. Farklı konvekslik sınıfları için elde edilmiş integral eşitsizlikleri bir arada bulabilmeleri,
2. Burada verilen eşitliği (Önteorem 4.130) kullanarak farklı konvekslik sınıfları için

yeni integral eşitsizlikler elde edebilmeleri,

3. Yeni bir konvekslik sınıfı elde ederek, eşitlik yardımı ile integral eşitsizliklerin elde edilebilmesi veya mevcut eşitsizliklerin iyileştirilebilmesi yönünde bir kaynak olması beklenmektedir.



6. KAYNAKLAR

- Adilov, G. R., Kemali, S. 2007. Hermite-Hadamard-Type inequalities for increasing positively homogeneous functions Puan. *Journal of Inequalities and Applications*, cilt. 2007, 2007.
- Adilov, G. R., Kemali, S. 2009. Abstract convexity and Hermite-Hadamard type inequalities Puan. *Journal of Inequalities and Applications*, cilt 2009, 2009.
- Alomari, M., Darus, M. and Dragomir, S.S. 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose second derivatives absolute values are quasiconvex, *Tamk. J. Math.*, (41): 353-359.
- Barani, A., Barani, S., Dragomir, S.S. 2011. Refinements of Hermite- Hadamard type inequality for functions whose second derivatives absolute values are quasiconvex. *RGMIA Res. Rep. Coll*, 14.
- Bayoumi, A. 2003. Foundation of complex analysis in non locally convex spaces, *North Holland, Mathematics Studies* (193) Elsevier.
- Breckner, W.W. 1978. Stetigkeitsaussagenf ureine Klass ever all gemeinerter konvexer funktionen in topologisc henlinearen Raumen. *Institut Mathematique Publications* (Beograd), 23(37): 13-20.
- Demirsoy, Y. ve Adilov, G. 2019. Konvekslik Kavramının Soyutlaştırılması Üzerine. *Akdeniz Üniversitesi, Antalya*.
- Dragomir, S.S. 1990. Two refinements of Hadamard's inequalities. *Cool. of Sci. Papers, Fac. Appl.*, Kragujevac, (11): 23-26.
- Dragomir, S.S., Pecaric, J.E., Sandor, J. 1990. A note on the Jensen-Hadamard inequality. *Anal. Num. Theor. Approx.* (19): 21-28.
- Dragomir, S.S., Pecaric, J., Person, L.E. 1995. Some inequalities of Hadamard type. *Jurnal of Mathematics*, 21(3): 335-341.

- Dragomir, S.S., Buse, C. 1995. Refinements of Hadamard's inequality for multiple integrals, *Utilias Mathematica*, (47): 193-198.
- Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S. 1997. s -Orlicz convex functions in linear spaces and Jenes Discrete inequality. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 210(2): 419-439.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. 1998. Two Inequalities for Differentiable Mappings and Applications to Special Means of Real Numbers and to Trapezoidal Formula, *appl. Math. Lett.*, 11(5): 91-95.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequalities and Applications. RGMIA, Monographs, <http://rgmia.vu.edu.au/monographs.html>.
- Dragomir, S.S., Fitzpatrick, S. 1999. The Hadamrd's inequality for s -convex functions in the second sense, *Demonstratio Math.*, 32(4): 687-696.
- Dragomir S.S., Pearce C.E.M. 2000. Selected topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications, in: RGMIA Monographs, Victoria University. Online: http://www.staff.vu.au/RGMIA/mongraphs/hermite_hadamard.html.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., Barnett, N.S. 2000. Inequalities for Beta and Gamma functions via some classical and new integral inequalities, *J. Inequal. Appl.*, (5): 103-165.
- Eken Z. , Kemali S. , Tınaztepe G. , Adilov G. 2021. The Hermite-Hadamard inequalities for p -convex functions Puan. *Hacettepe Journal Of Mathematics and Statistics*, cilt. 50, sa. 5, ss. 1268-1279.
- Ekinci, A., Akdemir, A.O., Özdemir, M.E. 2020. Integral inequalities for diffrent kinds of convexity via classical inequalities. *Turkish Journal of Science*, 305-313.
- Fang, Z.B., Shi, R. 2014. On the (p, h) -convex function and some integral inequalities. *J. Inequal. Appl.*, (45): 16.

- Fejér L. 1906. Über die Fourierreihen, II, Math. Naturwiss, Anz. Ungar. Akad. Wiss., 369-390. (In Hungarian).
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E. 1997. Hadamard's inequality for r -convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, (215): 461-470.
- Godunova, E.K. and Levin, V.I. 1985. Neravenstva dlja funkcii sirokogo klassa, sodersazhego vypuklye, monotonnnye i nekotorye drugie vidy funkcii. Vycislitel. Mat. i. Mat. Fiz. Mezhvuzov. Sb. Nauc Trudov, MGPI, Moskva, 138-142.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P. 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from Operations Research, (19): 7.
- Hudzik, H., Maligranda, L. 1994. Some remark on s -convex functions. *Aequationes Mathematicae*, 48(1): 100-111.
- Hussain S., Bhatti M.I., Iqbal M. 2009. Hadamard-type inequalities for s -convex function I, *Punjab Univ. J. Math.*, (41): 51-60.
- İşcan, İ. 2016. Hermite- Hadamard type inequalities for p -convex functions, *International Journal of Analysis and Applications*, 11(2): 137-145.
- İşcan, İ., Kunt, M. and Turhan, S. 2017. Some new type integral inequalities for p -convex functions, *AIP Conference Proceedings*.
- Kadakal, H., İşcan, İ and Kadakal, M. 2017. New type integral inequalities for p -quasi convex functions. *Ordu Univ. J. Sci. Tech.*, 7(1): 124-130.
- Kadakal, H., Kadakal, M., İşcan, İ. 2017. Some new integral inequalities for n -times diffrentiable s -convex and s -concave functions in the second sense.
- Kemali, S., Sezer, S., Tınaztepe, G., Adilov, G. 2021. s -Convex function in the third sense, *Korean J. Math.*, 29(3): 593-602.
- Kemali, S., Sezer Evcan, S., Yeşilce İ., Adilov, G. 2021. Some integral inequalities for the Product of s -convex functions in the in the fourth sense Puan. *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, cilt. 1, ss. 1-15.

- Latif, M.A. 2015. New inequalities of Hermite-Hamard type for functions whose derivatives in absolute value are convex with applications, *Arab j. Math. Sci.*, 21(1): 84-97.
- Latif, M.A.. 2016. On Some New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for Functions Whose Derivatives are s -Convex in the Second Sense in the Absolute Value. *Ukrainian Mathematical Journal*, (67): 10.
- Maden, S., Kadakal, H., Kadakal, M., Iscan, I. 2017. Some new integral inequalities for n -times differentiable convex and concave functions. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 10(12): 6141-6148.
- Mitrinovic, D.S. 1970. Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinovic, J.E. and Fink, A.M. 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, 740, UK.
- Mudassar, M., Bhatti, M.I., Iqbal, M., Irshad, W. 2013. Generalisations of integral inequalities of Hermite-Hadamard type through convexity. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 88(2): 320-330.
- Orlicz, W. 1968. A note on modular spaces. IX, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom. Phys., 16: 801-808, MR 39:3278.
- Pachpatte B.G. 2005. Mathematical Inequalities, Elsevier B. V., Amsterdam, The Netherlands.
- Park, J. 2012. New integral inequalities for products of similar s -convex functions in the first sense. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 80(4): 585-596.
- Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E. and Simic, V. 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality. *J. Math. Anal. and Appl.*, (220): 99-109.
- Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E. 2000. Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula. *Appl. Math. Lett.*, 13(2): 51-55.

- Pecaric, J.; Tong, Y.L. 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications. Academic Press Inc.
- Pinheiro, M.R. 2007. Exploring the concept of s -convexity. *Aequ. math.*, (74) 201-209. <https://doi.org/10.1007/s00010-007-2891-9>.
- Roberts, A.W., Varberg, D.E. 1973. Convex functions. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, vol. 57, New York-London, 300.
- Rockafellar, Tyrrell, R. 1970. Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- Sezer S. 2021. The Hermite-Hadamard inequality for s -Convex functions in the third sense *AIMS Mathematics*, 6(7): 7719-7732.
- Tınaztepe, G., Kemali, S., Sezer, S., Eken, Z. 2020. The Sharper Form of Brunn-Minkowski Type Inequality for Boxes Puan. *Hacettepe Journal Of Mathematics and Statistics*, cilt 50, sa. 2, ss. 337-386.
- Toader, G. 1984. Some generalizations of the convexity. Proceeding of The Colloquium On Approximation and Optimization. Univ. Cluj-Napoca, Cluj-Napoca, 329-338.
- Tunç, M. and Kırmacı, U. 2010. New integral inequalities for s -convex functions with applications, *Int. Elect. J. of Pure and Appl. Math.*, 1(2): 131-141.
- Varosanec, S. 2007. On h -convexity. *J. Math. Anal. Appl.*, (326): 303-311.
- Yang, G.S and Wang, C.S. 1997. Some Refinements of Hadamard's Inequalities, *Tamkang Journal of Mathematics*, 28(2), Summer.
- Yang, G.S., Hwang, D.Y. and Tseng, K.L 2004. Some Inequalities for Differentiable Convex and Concave Mappings, An Intern. *J. Computer and Mathematics with Appl.*, (47): 207-216.

ÖZGEÇMİŞ

BAKİ ÜNAL

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2019-2022	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans	Fırat Üniversitesi
2011-2016	Fen Fakültesi, Matematik ABD, Elazığ

MESLEKİ VE İDARİ GÖREVLER

2016-Devam Ediyor	Matematik Öğretmeni Özel Manavgat Parmak İzi Koleji, Antalya
-------------------	---

ESERLER

Kemali, S. and Ünal, B., On s -convex functions in the third sense and new integral inequalities. Submitted to New Trends in Mathematical Sciences.

Kemali, S. and Ünal, B., New integral inequalities for s -convex functions in the fourth sense. IFSCOM 2021, 7th ifs and Contemporary Mathematics Conference May, 25-29, 2021, Turkey.

Kemali, S. and Ünal, B., New integral inequalities for n -times differentiable s -convex functions in the third sense. Journal of Basic and Applied Research International (Accepted 2022).