



SONLU GRUPLARDA PADOVAN DİZİLERİ

Sait TAŞ

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

2016

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

SONLU GRUPLARDA PADOVAN DİZİLERİ

Sait TAŞ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM
2016**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

SONLU GRUPLARDA PADOVAN DİZİLERİ

Prof. Dr. Erdal KARADUMAN danışmanlığında, Sait TAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma 05/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Yasin SOYLU

İmza :

Üye : Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ömür DEVECİ

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 14 / 01 / 2016 tarih ve 07 / 22 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirilerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU GRUPLARDA PADOVAN DİZİLERİ

Sait TAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

Bu çalışmada, ilk olarak m modülüne göre Padovan dizileri çalışılmış ve $(x, y) \in G$ geren çift için G grubunun Padovan orbiti tanımlanmıştır. (x, y) geren çifti için bazı sonlu grupların Padovan uzunlukları elde edilmiştir. İkinci olarak, m modülüne göre Fibonacci-Padovan dizileri çalışılarak, $2 \leq j \leq 5$ olacak şekilde j gerenli sonlu grupların Fibonacci-Padovan orbitleri incelenmiştir. Son olarak, sonlu gruplarda k -basamak Padovan dizisi tanımlanmış ve $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ Semidihedral grubunun 2-basamak ve 3-basamak Padovan uzunlukları elde edilmiştir.

2016, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dizi, Padovan dizisi, Fibonacci dizisi, Fibonacci-Padovan dizisi, orbit, Padovan orbiti, Fibonacci-Padovan orbiti.

ABSTRACT

Doctoral Thesis

THE PADOVAN SEQUENCES IN FINITE GROUPS

Sait TAŞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Algebra and Number Theory Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal KARADUMAN

In this study, firstly, the Padovan sequences with modulo m have been studied and also, the Padovan orbit of a 2-generator group G has been defined for a generating pair $(x, y) \in G$. The Padovan lengths of some finite groups have been obtained for a generating pair (x, y) . Secondly, the Fibonacci-Padovan sequence with modulo m has been studied. Also, the Fibonacci-Padovan orbits of the j -generator finite groups have been examined where $2 \leq j \leq 5$. Finally, k -step Padovan sequence in finite groups has been defined and 2- step and 3- step Padovan lengths of $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ (Semidihedral group) have been obtained for $n \geq 4$.

2016, 75 pages

Keywords: Sequence, Padovan sequence, Fibonacci-Padovan sequence, Orbit, Padovan orbit, Fibonacci-Padovan orbit.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez hazırlama sürecinde yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Erdal KARADUMAN'a teşekkürlerimi arz ederim.

Üniversitemizin Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı Öğretim Üyeleri'nden Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN, Sayın Doç. Dr. İnci GÜLTEKİN, Sayın Doç. Dr. Nurullah ANKARALIOĞLU, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Yasin SOYLU'ya, Kafkas Üniversitesi Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı Öğretim Üyeleri'nden Doç. Dr. Ömür DEVECİ'ye ve Erzurum Teknik Üniversitesi Topoloji Bilim Dalı Öğretim Üyesi Sayın Ceren Sultan ELMALI'ya teşekkürlerimi arz ederim.

Her zaman için bana tam destek veren ve güvenlerini hissettiren aileme ve varlıklarıyla huzur veren eşime ve çocuklarıma sonsuz minnettarlığımı dile getirmek isterim.

Doktora eğitimi boyunca “Yurt İçi Doktora Burs Programı” ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Sait TAŞ

Ocak, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
3. MATERYAL ve YÖNTEMLER.....	13
3.1. Sonlu Gruplarda k-nacci Dizisi	13
3.2. Fibonacci Uzunluğu	23
3.3. Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Fibonacci Uzunlukları	25
3.4. Genişletilmiş Triangle Grupların Fibonacci Uzunlukları.....	26
3.5. $h_k(m)$ Fonksiyonu	27
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	33
4.1. Padovan Dizileri	33
4.2. Bir m Modülüne göre Padovan Dizileri	39
4.3. $(2, 2, 2)$, $(n, 2, 2)$, $(2, n, 2)$ ve $(2, 2, n)$ Polyhedral Grupların Padovan Uzunlukları.....	42
4.4. $\langle 2, 2, 2 \rangle$, $\langle n, 2, 2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ Binary Polyhedral Grupların Padovan Uzunlukları.....	499
4.5. Fibonacci-Padovan Dizisi.....	53
4.6. Bir m Modülüne Göre Fibonacci-Padovan Dizisi.....	54
4.7. Sonlu Gruplarda k - Basamak Padovan Dizisi	645
5. SONUÇLAR.....	70
KAYNAKLAR	74
ÖZGEÇMİŞ	76

SİMGELER DİZİNİ

A_n	: Alterne grup
D_n	: Dihedral grup
Q_{2n}	: Genelleştirilmiş Quaternion grup
S_n	: Simetrik grup
$<$	: Küçüktür
$=$	: Eşittir
$>$	: Büyüktür
$\emptyset$	: Boş küme
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$\cong$	: İzomorf
$\neq$	: Eşit değil
$\equiv$	: Denktir
$\leq$	: Küçük ya da eşittir
$\geq$	: Büyük ya da eşittir
$\leqslant$	: Alt grup
$\subset$	: Alt küme
$\triangleleft$	: Normal alt grup
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$a \mid b$	: a, b yi böler
$a \nmid b$	: a, b yi bölmez
e	: Birim eleman

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_3(p) \mid (p^3 - p^i)$ nin durumu	30
Çizelge 3.2. $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_4(p) \mid (p^4 - p^i)$ nin durumu	31
Çizelge 3.3. $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_5(p) \mid (p^5 - p^i)$ nin durumu	32



1. GİRİŞ

Toplama işlemi ile tamsayılar, çarpma işlemi ile sıfırdan farklı rasyonel sayılar birer grup meydana getirdiğinden, grup ifadesinin matematiğin ilk yıllarında var olduğu ve üzerinde çalışıldığı düşünülebilir; fakat bu yanlıştır. Günümüzdeki şekliyle grup kavramı matematiğin farklı bölümlerinde zaman içinde meydana çıkan ve üzerinde çalışılan fikirlerin soyutlanmasıyla geliştirilmiştir.

Soyut grup tanımının ilk kez Cayley tarafından verildiği (1854) kabul edilmektedir. Bununla birlikte, alenen grup ifadesi kullanılsa da daha önceki pek çok matematikçinin araştırmasında grup kavramı görülmektedir.

Euler'in 1761'de elde ettiği sonuçlar arasında, bir sonlu grubun her altgrubunun mertebesinin o grubun mertebesini böldüğünü içeren Lagrange Teoremi'nin bir özel durumunun ispatı mevcuttur. Yine de bu sonuçlar arasında, grup teorik olarak ifade edilmese de bir değişmeli grubun herhangi bir altgrubunun eşkümelerinin o grubun bir ayrışımını oluşturduğu ifade edilmiştir.

1801'de Gauss, Euler'in çalışmalarını geliştirerek değişmeli grupların yapısını önemli ölçüde belirlemiştir. Gauss, günümüz gösterimleriyle olmasa da elemanların mertebelerini incelemiş, bugünün ifadeleriyle, devirli bir grubun mertebesini bölen her sayı için o mertebeden bir altgruba sahip olduğunu ispatlamıştır.

Soyut grup kavramının meydana gelmesine sebep olan diğer bir yaklaşım, cebirsel denklemlerin köklerinin, köklerin permütasyonları vasıtasıyla incelenmesi olmuştur. Bu doğrultudaki çalışmaları Lagrange'ın başlattığı söylenebilir (1770).

Cebirsel denklemlerin köklerle çözülebildiğini araştırırken grup kelimesini ilk kullanan Galois olmuştur (1831).

Soyut grup ifadesinin matematiğin temel kavramlarından biri haline gelmesinde Klein'in Erlanger Programı'nın etkisinden bahsetmek gerekir. Bu programda amaç, geometrilerin grup teorisel sınıflandırılmasıydı. Daha grup kavramı ortada yokken de Möbius (1827)'un her geometrinin belli bir grup altında değişmez kalan özellikleri incelediğini farkederek geometrileri sınıflandırmaya çalıştığı bilinmektedir. Yine 1832 lerde Steiner'in ele aldığı sentetik geometri konuları bu gün dönüşüm grupları olarak bilinen grupların incelenmesinden başka bir şey değildir.

Soyut grup ifadesini ilk tanımlayanın Cayley olduğunun genel kabul gördüğünü belirtmiştik. Cayley'in ilk çalışmaları (1854) zamanının oldukça ilerisinde olduğundan gerekli ilgiyi görmemiştir. 24 yıl sonra (1878), Cayley konu ile ilgili 4 çalışma yayınladığında artık soyut grup kavramının matematiğin temel araştırma alanı içine girmişti. Çalışmlardan birinin başlığı Grup Kuramı idi. Cayley'in ispatladığı ifadelerden biri, her grubun bir permütasyon grubuna izomorf olduğudur.

Padovan dizisi Richard Padovan ile Hollandalı mimar Hans van der Laan birlikte 1994 yılında yaptıkları "Dom. Hans van der Laan: Modern Primitive" isimli çalışmadan sonra adlandırılmıştır. Bu dizi Haziran 1996 yılında Ian Stewart tarafından tanımlanmıştır.

Padovan sayıları ve özellikleri bazı araştırmacılar tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalardan bir kaçı aşağıdaki gibidir.

Weger (1997) tarafından yapılmış olan "Padua and pisa are exponentially far apart" isimli çalışmada Padovan ve Fibonacci sayıları arasındaki farklar üzerinde durulmuştur.

Gil *et al.* (2007) tarafından yapılmış olan "Complete padovan sequences in finite fields" isimli çalışmada $p \geq 5$ ve $1 < k < p - 1$ (p asal) olmak üzere complete Φ_k (Complete Padovan)- dizisini tanımlamak için gerekli olan durumlar üzerinde durulmuştur.

Bu anlamda gruplarda Fibonacci dizilerini ilk olarak Wall çalışmıştır (Wall 1960). Wall bu çalışmasında devirli gruplardaki Fibonacci dizilerini araştırmıştır. Daha sonra Wilcox 1986 yılında problemi abelyen gruplara taşımıştır. Campbell 1990 yılında bu teoriyi bazı sonlu gruplara uygulamıştır. Aydın and Smith 1994 yılında 2-basamak Fibonacci dizisinin uzunluğunun, nilpotent sınıfı 4 ve exponenti p (p asal) olan sonlu nilpotent gruplardaki 2-basamak Fibonacci dizilerinin uzunluğuna eşit olduğunu ispatlamışlardır.

Bu teoriyi, Dikici and Smith 1995 yılında nilpotent sınıfı 2 ve exponenti 2 olan sonlu nilpotent gruplardaki 3-basamak Fibonacci dizilerine genelleştirmişlerdir.

Aydın and Dikici 1998 yılında 2-basamak genel Fibonacci dizisinin periyodunun uzunluğunun nilpotent sınıfı 2 ve exponenti p (p asal) olan herhangi bir sonlu p -grup için bu grubun geren elemanlarıyla oluşturulan 2-basamak genel Fibonacci dizisinin periyoduna eşit olduğunu göstermişlerdir. Karaduman 2002 yılında Fibonacci sayılarının gruplardaki uygulamaları üzerinde durmuştur. 2003 yılında Karaduman and Yavuz $2 < p \leq 2927$ aralığındaki p asal sayısı için $k(p)$, 2-basamak Fibonacci dizilerinin periyodu olmak üzere, exponenti p nilpotent sınıfı 5 olan sonlu nilpotent gruplarda 2-basamak Fibonacci dizilerinin periyodlarının $p.k(p)$ olduğunu göstermişlerdir. Karaduman and Aydın 2003 yılında exponenti p ve nilpotent sınıfı 4 olan gruplardaki 2-basamak genel Fibonacci dizilerini incelemişlerdir. 2003 yılında Özkan exponenti p ve nilpotent sınıfı 4 olan gruplardaki 3-basamak Fibonacci dizileri üzerinde durmuştur.

Knox 1992 yılında sonlu bir gruptaki, k -nacci dizisini tanımlamış ve $n \geq 3$ için a, b gerenleriyle takdim edilmiş D_n dihedral grubunun periyodunun $P_k(D_n; a, b) = 2k + 2$ olduğunu göstermiştir. Lü and Wang 2007 yılında k -basamak Fibonacci dizileri için Wall sayılarını incelemiştir. Campbell 2004 yılında $i \geq 2$ için D_∞^i nin Fibonacci orbitini tanımlamış ve D_{2m}^i nin Fibonacci uzunluğunu hesaplamıştır. Campbell 2005 ve 2009 yıllarında (l, m, n) *polyhedral*, $\langle l, m, n \rangle$ *binary polyhedral*, $E(p, q, r)$ genişletilmiş *polyhedral* ve *centro polyhedral* gruplarının orbitlerini tanımlamış ve bu grupların Fibonacci uzunluklarını hesaplamıştır.

Karaduman and Deveci 2009 yılında $n > 2$ için sonlu $(2, 2, 2)$, $(n, 2, 2)$, $(2, n, 2)$, $(2, 2, n)$ *polyhedral* ve $E(2, 2, 2)$, $E(n, 2, 2)$, $E(2, n, 2)$, $E(2, 2, n)$ genişletilmiş *triangle* gruplardaki k -nacci dizilerinin periyodlarını hesaplamışlardır.



2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1.1 $\alpha \subset A^n$ ve $\alpha \neq \emptyset$ olsun. α 'dan A ya tanımlı fonksiyona A da n -li işlem denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.2. Boş kümeden farklı bir küme üzerinde bir veya daha fazla ikili işlem tanımlanmış ise bu ikili işlemlerle birlikte bu kümeye bir cebirsel yapı denir. A kümesi üzerinde bir “*” işlemi tanımlanmışsa bu cebirsel yapı $(A,*)$ ile gösterilir (Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.3. G boştan farklı bir küme ve $*$ G üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa $(G,*)$ cebirsel yapısına bir grup denir (Çallıalp 2001).

- i) $\forall a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$,
- ii) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır,
- iii) $\forall a \in G$ için $a * a' = a' * a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır.

Tanım 2.1.4. $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere $\varphi: G \rightarrow H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ şartını sağlarsa φ ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.5. $\varphi: G \rightarrow H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ ye epimorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.6. $\varphi: G \rightarrow H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise φ ye monomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.7. $\varphi: G \rightarrow H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir grup izomorfismi denir ve $G \cong H$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.8. $\varphi: G \rightarrow G$, grup homomorfizmine endomorfizm denir. φ , 1-1 ve örten bir endomorfizm ise φ ye bir grup otomorfizmi denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.9. G bir grup ve $X \subseteq F$ olmak üzere $\beta: X \rightarrow G$ fonksiyonu verilsin. Eğer β nın genişlemesi olacak şekilde tek bir $\beta': F \rightarrow G$ homomorfizmi varsa F , X üzerinde serbesttir denir (Johnson 1997).

Tanım 2.1.10. X bir küme, $F(x)$, X üzerinde serbest bir grup ve $R \subseteq F(x)$ olsun. $G = \langle X \mid R \rangle$ 'a, G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerinin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir. r elemanlarına da bağıntılar denir (Johnson 1997).

Tanım 2.1.11. Bir grubun takdimi aşağıda verilen dönüşümler yardımıyla kendisine izomorf başka bir takdime dönüştürebilir. Bu dönüşümlere Tietze dönüşümleri denir (Johnson 1997).

- i) Verilen takdime bağıntı ekleme,
- ii) Verilen takdime bağıntı yok etme,
- iii) Verilen takdime geren ekleme,
- iv) Verilen takdime geren yok etme.

Örnek 2.1.1. $G = \langle x, y: x^3 = 1, y^2 = 1, (xy)^2 = 1 \rangle$ olsun.

$$G = \langle x, y, z: x^3 = 1, y^2 = 1, (xy)^2 = 1, z = xy \rangle \quad (z \text{ gereni ekleme})$$

$$G = \langle x, y, z: x^3 = 1, y^2 = 1, (z)^2 = 1, x = zy \rangle \quad (x = zy^{-1} = zy \text{ ekleme})$$

$$G = \langle y, z: (zy)^3 = 1, y^2 = 1, (z)^2 = 1 \rangle \quad (x \text{ gereni kaldırma ekleme})$$

olacak şekilde Tietze dönüşümleri yardımıyla $G = \langle y, z: (zy)^3 = 1, y^2 = 1, (z)^2 = 1 \rangle$ grubuna dönüştürülür.

Tanım 2.1.12. $F(r, n)$ Fibonacci grubu, $r > 0, n > 0$ ve bütün alt indisler n modülüne göre indirgenmiş olmak üzere,

$$F(r, n) = \langle a_1, a_2, \dots, a_n: a_1 a_2 \cdots a_r = a_{r+1}, a_2 a_3 \cdots a_{r+1} = a_{r+2}, \dots, a_{n-1} a_n \cdots a_{r-2} \\ = a_{r-1}, a_n a_1 \cdots a_{r-1} = a_r \rangle$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.2. $F(2, 4) \cong C_5$ olduğunu gösterelim.

$$F(2, 4) = \langle x, y, z, t: xy = z, yz = t, zt = x, tx = y \rangle$$

olmak üzere

$$xy = z \text{ ve } yz = t \Rightarrow \underline{yxy} = t$$

yazılır. Diğer taraftan

$$t = yxy, z = xy \text{ ve } zt = x \Rightarrow \underline{xy\overline{yxy}} = x$$

$$tx = y \text{ ve } t = yxy \Rightarrow \overline{yxy}x = y \Rightarrow xyx = e$$

elde edilir. Son olarak

$$\underline{xy}\overline{yxy} = x \text{ ve } xyx = e \Rightarrow xy^2xy\underline{x} = x\underline{x}$$

$$xy^2e = x^2 \Rightarrow x^{-1}xy^2 = x^{-1}x^2 \Rightarrow x = y^2$$

elde edilir. Bu takdirde

$$z = xy \text{ ve } t = yz \Rightarrow z = y^3 \text{ ve } t = y^4$$

elde edilir. Böylece,

$$F(2,4) \cong C_5 = \langle y: y^5 = e \rangle$$

olduğu gösterilmiş olur.

Tanım 2.1.13. G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için $I_a(x) = axa^{-1}$ ile tanımlanan $I_a: G \rightarrow G$ otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $I(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesi de $Aut(G)$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.14. Bir G grubu $0(a) = n, 0(b) = 2$ ve $ba = a^{-1}b$ bağıntılarını sağlayacak şekilde a, b elemanları tarafından geriliyorsa bu G grubuna $2n$. mertebeden Dihedral grup denir ve

$$D_n = \langle a, b: a^n = e, b^2 = e, ba = a^{-1}b \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

Tanım 2.1.15. Bir G grubu $0(a) = 4, a^2 = b^2$ ve $ba = a^3b$ bağıntılarını sağlayacak şekilde a, b elemanları tarafından geriliyorsa bu G grubuna Quaternion grup denir ve

$$Q = \langle a, b: a^4 = e, b^2 = a^2, ba = a^3b \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

Genelleştirilmiş Quaternion grubu ise

$$Q_{2n} = \langle a, b: a^{2k} = e, b^2 = a^k, aba = b, k = 2^{n-2} \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

Tanım 2.1.16. (l, m, n) polyhedral grubu $l, m, n > 1$ için

$$\langle x, y, z: x^l = y^m = z^n = xyz = e \rangle$$

veya

$$\langle x, y: x^l = y^m = (xy)^n = e \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

Eğer $t = lmn \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right) = mn + ln + lm - lmn$ sayısı pozitif ise (l, m, n) polyhedral grubu sonludur. Eğer $1 < l \leq m \leq n$ ise yalnızca aşağıdaki durumlarda t sayısı pozitif olup (l, m, n) polyhedral grubunun sonlu olduğu durumlar elde edilir;

- i) $l = m = 2$ ve $n, n \geq 2$ olacak şekilde tamsayı ise,
- ii) $l = 2, m = 3$ ve $n, 3 \leq n \leq 5$ olacak şekilde tamsayı ise.

(l, m, n) polyhedral grubu sonlu ise bu grubun mertebesi $2 \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1 \right)^{-1} = \frac{2lmn}{t}$ olur.

(i) durumundaki grupların yapısı aşağıdaki teoremle belirlenir.

Teorem 2.1.1. D , mertebeleri 2 olan iki eleman tarafından üretilmiş bir grup olsun. Bu durumda D grubu aşağıdaki takdime sahiptir,

$$D = \langle x, y: x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle$$

burada n ya bir doğal sayıdır ya da $n = \infty$ dur. Eğer $n = \infty$ ise $(xy)^n = e$ bağıntısı ihmal edilecektir. n nin sonlu olduğu durumlarda ise D grubu mertebesi $2n$ olan bir dihedral gruba izomorf olur (Suzuki 1982).

(ii) durumundaki grupların yapısı ile ilgili aşağıdaki durumlar söz konusudur.

$(2, 3, 5)$ polyhedral grubu basit bir grup olup bu grupta $t = 1$ dir. Bu grubun mertebesi 60 olup A_5 alterne gruptur. Aynı zamanda bu grup icosahedral grup olarak adlandırılır.

$(2, 3, 4)$ polyhedral grubu indeksi 2 olan bir alt gruba sahip olup bu grupta $t = 2$ dir. Bu grubun mertebesi 24 olup S_4 simetrik gruptur. Aynı zamanda bu grup octahedral grup olarak adlandırılır.

$(2, 3, 3)$ polyhedral grubunda ise $t = 3$ dür. Bu grubun mertebesi 12 olup A_4 alterne grubudur. Aynı zamanda bu grup tetrahedral olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.17 $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu $l, m, n > 1$ için;

$$\langle x, y, z: x^l = y^m = z^n = xyz \rangle$$

veya

$$\langle x, y: x^l = y^m = (xy)^n \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

(l, m, n) polyhedral grubu $\langle l, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu için bir bölüm grubu olarak meydana geldiğinden $t \leq 0$ olduğu zaman bu grup sonsuzdur. Bu gruptaki bağıntılar; $x^l = y^m = z^n = xyz = f$ şeklindedir. $t > 0$ olduğu zaman $f^2 = 1$ olur. Bu grupta x, y, z nin mertebeleri (l, m, n) polyhedral grubundakinin iki katıdır. Aynı zamanda bu grubun mertebesi de (l, m, n) nin mertebesinin iki katı olup $\frac{4lmn}{t}$ dir.

$\langle 2, 3, 5 \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 120 olup binary icosahedral grup olarak adlandırılır.

$\langle 2, 3, 4 \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 48 olup binary octahedral grup olarak adlandırılır.

$\langle 2, 3, 3 \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 24 olup binary tetrahedral grup olarak adlandırılır.

$\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi $4n$ olup dicyclic grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.18. $\langle l, m, n \rangle$ centro-polyhedral grubu $l, m, n \in \mathbb{Z}$ için,

$$\langle x, y, z: x^l = y^m = z^n = xyz \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

Tanım 2.1.19. $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu $p, q, r > 1$ için,

$$\langle x, y, z: x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (zx)^r = e \rangle$$

şeklinde takdim edilir (Coxeter 1972).

Eğer $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$ ise $E(p, q, r)$ genişletilmiş triangle grubu sonludur.

Tanım 2.1.20. Belli bir noktadan sonra grup elemanlarının dizisi sabit bir alt dizinin tekrarından oluşuyorsa grup elemanlarının dizisine periyodik dizi denir (Knox 1990).

Tanım 2.1.21. Periyodik dizideki tekrarlanan alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir.

Örneğin; $a, b, c, d, b, c, d, b, c, d, \dots$ dizisi periyodiktir ve periyodu 3 tür.

Tanım 2.1.22. Dizideki ilk k elemanı tekrarlanan bir alt dizi oluşuyorsa diziye k periyodlu basit periyodik dizi denir (Knox 1990).

Örneğin; $a, b, c, d, e, a, b, c, d, e, \dots$ dizisi basit periyodik bir dizidir ve periyodu 5'tir.

3. MATERYAL ve YÖNTEMLER

3.1. Sonlu Gruplarda k-nacci Dizisi

Tanım 3.1.1. Sonlu bir gruptaki bir k –nacci dizisi, grubun $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları için,

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 x_2 \cdots x_{n-1}; & j \leq n < k \text{ için} \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1}; & n \geq k \text{ için} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu girmesi gerekir. Böylece bu k –nacci dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki bir k –nacci dizisi $F_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir. Bir $F_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ k –nacci dizisinin periodu $P_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ şeklinde gösterilir (Knox 1990).

Tanım 3.1.2. G bir grup olsun. G nin her elemanının içinde bulunduğu bir k –nacci dizisi varsa G ye k –nacci dizilenebilirdir denir (Knox 1990).

Teorem 3.1.1. $n \geq 3$ olmak üzere $\langle x, y : x^n = y^2 = e, yx = x^{-1}y \rangle$ şeklinde takdim edilen D_n dihedral grubunda $P_k(D_n; x, y) = P_k(D_n; y, x) = 2k + 2$ dir (Knox 1990).

Teorem 3.1.2. G , 2-gerenli bir grup ve G nin birim elemanı $F_2(G; x, y)$ veya $F_2(G; y, x)$ Fibonacci dizilerinde görülüyorsa G abelyendir (Knox 1990).

İspat: Genelliği bozmaksızın G nin $F_2(G; x, y)$ Fibonacci dizisini ele alalım ve n doğal sayısı için G nin birim elemanı bu dizinin $(n + 1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Bu dizinin n . elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece,

$$x, y, \dots, s, e, \dots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Buna göre sadece s^{-1} , $(n - 1)$. eleman için tanımlayıcı bağıntıyı sağlar. Benzer şekilde s^2 dizinin $(n - 2)$. pozisyonunda, s^{-3} dizinin $(n - 3)$. pozisyonunda olur. Bu şekilde devam ederek

$$x, y, \dots, s^{-8}, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s, e, \dots$$

şeklinde bir dizi elde edilir. Buradan $u_{i-2} = -u_{i-1} + u_i$ bağıntısı kullanılarak s nin üslerinde ortaya çıkan ardışık pozitif ve negatif tamsayılardan bir Fibonacci dizisi elde edilir. Böylece grubun bir Fibonacci dizisi aşağıdaki iki formda olur:

(i). n tek ise dizi

$$s^{u_n}, s^{-u_{n-1}}, s^{u_{n-2}}, \dots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s, e, \dots$$

şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{u_n} = x, s^{-u_{n-1}} = y, s^{u_{n-2}} = xy$$

olur. Yine

$$s^{u_{n-1}} s^{u_{n-2}} = s^{u_{n-1} + u_{n-2}} = s^{u_n}$$

olduğundan

$$y^{-1}xy = x, \quad xy = yx$$

olur. O halde bu grup değişmelidir.

(ii). n çift ise dizi

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \dots, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s, e, \dots$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} s^{-u_n} &= x, s^{u_{n-1}} = y, s^{-u_{n-2}} = xy \\ s^{-u_{n-1}} s^{-u_{n-2}} &= s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})} = s^{-u_n} \\ y^{-1}xy &= x, \quad xy = yx \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu grup değişmelidir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu durumu bir örnek ile açıklayalım

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, \quad xy = yx \rangle$$

abelyen grubunu ele alalım. Bu grubun Fibonacci dizileri

$$x, y, xy, x, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y,$$

$$x^8y, x^8, x^7y, x^6y, x^4, xy, x^5y, x^6, x^2y, x^8y, x, y, xy, \dots$$

ve

$$y, x, xy, x^2y, x^3, x^5y, x^8y, x^4, x^3y, x^7y, x, x^8y, y, x^8,$$

$$x^8y, x^7y, x^6, x^4y, xy, x^5, x^6y, x^2y, x^8, xy, y, x, xy, \dots$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse bu grubun e, x^2 ve x^7 elemanları bu dizilerde yer almamaktadır.

Sonuç 3.1.1. 2-nacci dizilenebilir bir grup devirlidir (Knox 1990).

İspat: G , 2-nacci dizilenebilir bir grup olsun. Bu takdirde, G grubu ya 1-gerenli ya da 2-gerenlidir. G , 2-gerenli bir grup ise e , G nin 2-nacci dizisinde bulunacağından yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi G nin bir s elemanının terimlerinden bir dizi oluşturulabilir. G nin her elemanı kendisinin 2-nacci dizisinde bulunur ve bu yüzden G nin bütün elemanları sadece bir s elemanının terimleri ile takdim edilir. O halde G grubu 1-gerenlidir ya da devirlidir.

Teorem 3.1.3. $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$ şeklinde takdim edilen $G_2 = (2, 2, 2)$ polyhedral grubu için k –nacci dizisinin periodu $k + 1$ dir (Deveci 2010).

Teorem 3.1.4. $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (n, 2, 2)$ polyhedral grubu için k –nacci dizisinin periodu $2k + 2$ dir (Deveci 2010).

Teorem 3.1.5. $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (2, n, 2)$ polyhedral grubu için k –nacci dizisinin periodu $2k + 2$ dir (Deveci 2010).

Teorem 3.1.6. $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen $G_n = (2, 2, n)$ polyhedral grubu için k –nacci dizisinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur (Deveci 2010).

İlk olarak grubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 2-gerenli durumunu ele alalım. Bu durumda hem x, y hemde y, x başlangıç elemanlarına göre k –nacci dizilerinin periodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n ; x, y) = P_2(G_n ; y, x) = 6$.

ii. $P_{3,4}(G_n ; x, y) = P_{3,4}(G_n ; y, x) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$

iii. $k \geq 5$ olsun. Bu durumda

1. Eğer n nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n ; x, y) = P_k(G_n ; y, x) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

2. Eğer α, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i. Eğer $j \in N$ için $\alpha \cdot 3^j \notin [3, k-2]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n ; x, y) = P_k(G_n ; y, x) = \begin{cases} \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \alpha(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \alpha(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ii. Eğer $\beta, [3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha \cdot 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y) = P_k(G_n; y, x) = \begin{cases} \beta\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \beta(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \beta(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Şimdi grubun $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$, $n > 2$ şeklinde takdim edilen 3-gerenli durumunu ele alalım. x, y, z başlangıç elemanları için bu gruptaki k -nacci dizisinin periodu için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i. $P_2(G_n; x, y, z) = 6$.

ii. $P_{3,4}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$

iii. $k \geq 5$ olsun. Bu durumda

1. Eğer n nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-2]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n\left(\frac{k+1}{2}\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ n(k+1), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2n(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

2. Eğer α, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i. Eğer $j \in N$ için $\alpha \cdot 3^j \notin [3, k-2]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \alpha\left(n\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \alpha(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \alpha(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ii. Eğer $\beta, [3, k - 2]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha.3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \beta \left(n \left(\frac{k+1}{2} \right) \right), & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ \beta(n(k+1)), & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ \beta(2n(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

z, x, y başlangıç elemanları için ise k -nacci dizisinin periodu $2k + 2$ dir.

Teorem 3.1.7. $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^2 = (zx)^2 = e \rangle$ şeklinde takdim edilen $E_2 = E(2, 2, 2)$ genişletilmiş triangle grubundaki k -nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur (Deveci 2010).

- i. Eğer $k = 2$ ise bu gruptaki 2-nacci dizilerinin herbiri basit periodik olmayıp periodiktir ve her bir 2-nacci dizisinin periodu 3 tür.
- ii. Eğer $k > 2$ ise $P_k(E_2; x, y, z) = k + 1$ dir.

Teorem 3.1.8. $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^2 = (yz)^2 = (zx)^r = e \rangle, r > 2$ şeklinde takdim edilen $E_r = E(2, 2, r)$ genişletilmiş triangle grubundaki k -nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur (Deveci 2010).

- i. Eğer $k = 2$ ise bu gruptaki 2-nacci dizilerinin herbiri basit periodik olmayıp periodiktir ve her bir 2-nacci dizisinin periodu 6 dır.

$$\text{ii. } P_{4,5}(E_r; x, y, z) = \begin{cases} r \left(\frac{k+1}{2} \right), & r \equiv 0 \pmod{4}, \\ r(k+1), & r \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2r(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

iii. $k \geq 6$ olsun. Bu durumda

- 1. Eğer r nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k - 3]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_r; x, y, z) = \begin{cases} r \left(\frac{k+1}{2} \right), & r \equiv 0 \pmod{4}, \\ r(k+1), & r \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2r(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

2. Eğer α, r nin $[3, k-3]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i. Eğer $j \in N$ için $\alpha \cdot 3^j \notin [3, k-3]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_r; x, y, z) = \begin{cases} \alpha \left(r \left(\frac{k+1}{2} \right) \right), & r \equiv 0 \pmod{4}, \\ \alpha(r(k+1)), & r \equiv 2 \pmod{4}, \\ \alpha(2r(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ii. Eğer $\beta, [3, k-3]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha \cdot 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_r; x, y, z) = \begin{cases} \beta \left(r \left(\frac{k+1}{2} \right) \right), & r \equiv 0 \pmod{4}, \\ \beta(r(k+1)), & r \equiv 2 \pmod{4}, \\ \beta(2r(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Teorem 3.1.9 $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^2 = (zx)^2 = e \rangle, p > 2$ şeklinde takdim edilen $E_p = E(p, 2, 2)$ genişletilmiş triangle grubundaki k -nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur (Deveci 2010).

i. Eğer $k = 2$ ise bu gruptaki 2-nacci dizilerinin herbiri basit periodik olmayıp periodiktir ve her bir 2-nacci dizisinin periodu 6 dır.

$$\text{ii. } P_{4,5}(E_p; x, y, z) = \begin{cases} p\left(\frac{k+1}{2}\right), & p \equiv 0 \pmod{4}, \\ p(k+1), & p \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2p(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

iii. $k \geq 6$ olsun. Bu durumda

1. Eğer p nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-3]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_p; x, y, z) = \begin{cases} p\left(\frac{k+1}{2}\right), & p \equiv 0 \pmod{4}, \\ p(k+1), & p \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2p(k+1), & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

2. Eğer α, p nin $[3, k-3]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i. Eğer $j \in N$ için $\alpha \cdot 3^j \notin [3, k-3]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_p; x, y, z) = \begin{cases} \alpha\left(p\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & p \equiv 0 \pmod{4}, \\ \alpha(p(k+1)), & p \equiv 2 \pmod{4}, \\ \alpha(2p(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ii. Eğer $\beta, [3, k-3]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha \cdot 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_p; x, y, z) = \begin{cases} \beta\left(p\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & p \equiv 0 \pmod{4}, \\ \beta(p(k+1)), & p \equiv 2 \pmod{4}, \\ \beta(2p(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Teorem 3.1.10. $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = (xy)^p = (yz)^q = (zx)^2 = e \rangle, q > 2$ şeklinde takdim edilen $E_q = E(2, q, 2)$ genişletilmiş triangle grubundaki k -nacci dizilerinin periodları için aşağıdaki durumlar söz konusudur (Deveci 2010).

i. Eğer $k = 2$ ise bu gruptaki 2-nacci dizilerinin herbiri basit periodik olmayıp periodiktir ve her bir 2-nacci dizisinin periodu 6 dır.

$$\text{ii. } P_{4,5}(E_q; x, y, z) = \begin{cases} q \left(\frac{k+1}{2} \right), & q \equiv 0 \pmod{4}, \\ q(k+1), & q \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2q(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

iii. $k \geq 6$ olsun. Bu durumda

1. Eğer q nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbirisi $[3, k-3]$ aralığında değil ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_q; x, y, z) = \begin{cases} q \left(\frac{k+1}{2} \right), & q \equiv 0 \pmod{4}, \\ q(k+1), & q \equiv 2 \pmod{4}, \\ 2q(k+1), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

2. Eğer α, q nin $[3, k-3]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

i. Eğer $j \in N$ için $\alpha \cdot 3^j \notin [3, k-3]$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_q; x, y, z) = \begin{cases} \alpha \left(q \left(\frac{k+1}{2} \right) \right), & q \equiv 0 \pmod{4}, \\ \alpha(q(k+1)), & q \equiv 2 \pmod{4}, \\ \alpha(2q(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

ii. Eğer $\beta, [3, k-3]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in N$ için $\beta = \alpha \cdot 3^j$ ise period aşağıdaki gibidir;

$$P_k(E_q; x, y, z) = \begin{cases} \beta\left(q\left(\frac{k+1}{2}\right)\right), & q \equiv 0 \pmod{4}, \\ \beta(q(k+1)), & q \equiv 2 \pmod{4}, \\ \beta(2q(k+1)), & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

3.2. Fibonacci Uzunluğu

Tanım 3.2.1. G grubu $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tarafından gerilen bir grup olsun. Bu takdirde $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n, x_{i+n} = \prod_{j=1}^n x_{i+j-1}, i \geq 1$ dizisine G grubunun Fibonacci orbiti denir ve $F_A(G)$ ile gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

Tanım 3.2.2. Eğer $F_A(G)$ dizisi periodik ise bu dizinin perioduna A geren kümesine göre G grubunun Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ ile gösterilir. Eğer $F_A(G)$ dizisi periodik değilse G grubunun, A geren kümesine göre Fibonacci uzunluğu sonsuzdur denir ve $LEN_A(G) = \infty$ ile gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

Bir grubun Fibonacci uzunluğu, gerenlerin seçilen farklı n –lisine yani başlangıç elemanlarına bağlı olarak değişir. Bu durum için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.2.1. A_5 grubunun farklı geren 2 –lisine göre Fibonacci uzunluğu $LEN_X(A_5) = 12$, $LEN_Y(A_5) = 14$ olur. Burada X geren kümesi $X = [(1,2,3,4,5), (3,4,5)]$ ve Y geren kümesi $Y = [(3,4,5), (1,2,3,4,5)]$ şeklinde olup, farklı iki geren çifti için Fibonacci uzunluklarının farklı olduğu görülmektedir.

Gerçekten, $X = [(1,2,3,4,5), (3,4,5)]$ için

$$\begin{aligned} x_0 &= (12345), x_1 = (345), x_2 = (12354), x_3 = (124), x_4 = (13542), x_5 = (135), \\ x_6 &= (15342), x_7 = (234), x_8 = (15324), x_9 = (154), x_{10} = (13245), x_{11} = (132), \\ x_{12} &= (12345), x_{13} = (345), \dots \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $LEN_X(A_5) = 12$ olur. $Y = [(3,4,5), (1,2,3,4,5)]$ için

$$\begin{aligned} x_0 &= (345), x_1 = (12345), x_2 = (12435), x_3 = (13)(25), x_4 = (15432), \\ x_5 &= (12354), x_6 = (345), x_7 = (123), x_8 = (12453), x_9 = (13245), \\ x_{10} &= (25)(34), x_{11} = (13542), x_{12} = (14532), x_{13} = (123), x_{14} = (345), \\ x_{15} &= (12345), \dots, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $LEN_Y(A_5) = 14$ olur.

Ayrıca, H ve G grupları için $H \leq G$ veya $H \triangleleft G$ ise aşağıdaki durumların herhangi biri sözkonusudur,

$$\begin{aligned} LEN(H) &\geq LEN(G) \\ LEN(H) &\leq LEN(G) \\ LEN(H) &| LEN(G) \\ LEN(H) &\nmid LEN(G) \end{aligned}$$

Bu durum için örnek olarak, n tek olduğunda,

$$S_n = \langle (1,2, \dots, n), (1,2) \rangle \text{ ve } A_n = \langle (1,2, \dots, n), (n-2, n-1, n) \rangle$$

şeklinde ve n çift olduğunda,

$$S_n = \langle (1,2, \dots, n), (1,2) \rangle \text{ ve } A_n = \langle (1,2, \dots, n-1), (n-2, n-1, n) \rangle$$

şeklinde takdim edilen S_n ve A_n grupları verilebilir (Campbell 2003).

$f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere,

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad n \geq 2$$

şeklinde tanımlanan Fibonacci dizisinde n . Fibonacci sayısı f_n ile ve bu dizinin mod m ye göre en küçük periodunun uzunluğunu da $k(m)$ ile gösterilsin (Wall 1960).

Teorem 3.2.1. $f_n \pmod{m}$ basit periodik bir dizidir (Wall 1960).

İspat: Bu dizide mümkün olan terim çifti m^2 tane olduğunda tekrar eder. Fibonacci dizisinin tanımından $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ olarak yazabiliriz. Böylece eğer $f_{t+1} = f_{s+1}$ ve $f_t \equiv f_s \pmod{m}$ olursa $f_{t-1} \equiv f_{s-1}, \dots, f_{t-s+1} \equiv f_1$ ve $f_{t-s} \equiv f_0$ olur ki dizi basit periodiktir.

Teorem 3.2.2. i. p bir asal sayı olmak üzere, eğer $m = \prod p_i^{e_i}$ olacak şekilde asal çarpanlarına ayrılabilirse ve $t_i = k(p_i^{e_i})$ ise $k(m), t_i$ lerin en küçük ortak katıdır (Wall 1960).

ii. p bir asal sayı olmak üzere, $k(p^2) \neq k(p)$ ise $k(p^e) = p^{e-1}k(p)$ dir. Ayrıca l , $k(p^l) = k(p)$ olacak şekilde en büyük tamsayı olmak üzere $e > l$ için $k(p^e) = p^{e-l}k(p)$ olur.

3.3. Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Fibonacci Uzunlukları

Bu bölümde, sonlu polyhedral ve binary polyhedral gruplarının Fibonacci uzunlukları ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilecektir.

Teorem 3.3.1. Herhangi bir n için $\langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış grubun Fibonacci uzunluğu 8 olur (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç 3.3.1. $G = \langle x, y, z : x^n = y^2 = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ olsun. Bu durumda $LEN_{(x,y,z)}(G) = 8$ olur (Campbell and Campbell 2009).

Benzer ifadeler kullanılarak aşağıdaki teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.3.2. Herhangi bir n için $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış grubun Fibonacci uzunluğu 8 olur (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç 3.3.2. $G = \langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz = e \rangle$, $n > 2$ olsun. Bu durumda $LEN_{(x,y,z)}(G) = 8$ olur (Campbell and Campbell 2009).

Direkt olarak hesaplama ile iki gerenli durumda yani herhangi geren çifti için $LEN(\langle n, 2, 2 \rangle) = 6$, $LEN(\langle n, 2, 2 \rangle) = 6$, $LEN(\langle 2, n, 2 \rangle) = 6$ ve $LEN(\langle 2, n, 2 \rangle) = 6$ olduğu görülür.

Teorem 3.3.3. G_n , $n > 0$ için $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. Bu durumda

$$LEN_{(x,y,z)}(G_n) = \begin{cases} 4n, & n \text{ çift,} \\ 8n, & n \text{ tek.} \end{cases}$$

olur (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç 3.3.3. G_n , $n > 0$ için $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^n = xyz = e \rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. Bu durumda

$$LEN_{(x,y,z)}(G_n) = \begin{cases} 2n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 4n, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 8n, & \text{diğer durumlarda .} \end{cases}$$

olur (Campbell and Campbell 2009).

3.4. Genişletilmiş Triangle Grupların Fibonacci Uzunlukları

Bu bölümde, genişletilmiş triangle grupların Fibonacci uzunluğu ile ilgili yapılan bazı çalışmalara yer verilecektir.

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^k f_{n-j}^{(k)}, \quad n > k \quad (3.1)$$

k –basamak Fibonacci dizisinin n . elemanıdır. $f_i^{(k,m)} \equiv f_i^{(k)} \pmod{m}$ olmak üzere bu dizi m modülüne göre indirgenirse tekrar eden

$$f(k, m) = (f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_n^{(k,m)}, \dots)$$

dizisi elde edilir. Bu takdirde $(f_1^{(k,m)}, f_2^{(k,m)}, \dots, f_k^{(k,m)}) = (0, 0, 0, \dots, 1)$ olup bu dizi için tekrar eden bağıntılar (1) deki ile aynıdır (Lü and Wang 2007).

Teorem 3.5.1. $f(k, m)$ periyodik bir dizidir (Lü and Wang 2007).

İspat:

$$S_k = \{(a_1, a_2, \dots, a_k) : 0 \leq a_i \leq m - 1\}$$

olsun. $|S_k| = m^k$ olup sonludur. Yani

$$f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \dots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$$

olacak şekilde $u \geq 0$ için $v \geq u$ sayısı vardır. Tanımdan

$$f_{n+k}^{(k)} = \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

yazılır. Böylece

$$f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=1}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$$

yazılır. Buradan

$$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \dots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)},$$

$$f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$$

olur. Böylece $f(k, m)$ periodik bir dizidir.

$h_k(m)$ ile $f(k, m)$ nin en küçük periodu gösterilir. $f(k, m)$ nin periodu veya m modülüne göre k –basamak Fibonacci dizisinin Wall sayısı diye adlandırılır (Lü and Wang 2007).

Örnek olarak,

$$s(3,3) = (0, 0, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 1, 2, \dots)$$

dizisi ele alınırsa bu dizi $k = 3$ basamak için her 13 terimde bir başlangıç terimleri ile tekrar edip $h_3(3) = 13$ olur.

Teorem 3.5.2. t , $h_k(p) = h_k(p^t)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Her $\alpha \geq t$ için $h_k(p^\alpha) = p^{\alpha-t} h_k(p)$ olur. Özellikle eğer $h_k(p) = h_k(p^2)$ ise her $\alpha > 1$ için, $h_k(p^\alpha) = p^{\alpha-1} h_k(p)$ dir (Lü and Wang 2007).

Varsayım 3.5.1. Eğer $p \geq k$ bir asal sayı ise, $h_k(p) | (p^k - p^i)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq k - 1$ aralığında bir i sayısı vardır (Lü and Wang 2007).

Yukarıdaki varsayımı doğrulayan bazı örnekler aşağıdaki tablolar yardımıyla gösterilmiştir (Deveci 2010).

Çizelge 3.1. $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_3(p) \mid (p^3 - p^i)$ nin durumu

p	$h_3(p)$	Sonuç
5	31	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
13	168	$h_3(p) \mid (p^3 - p^2)$
23	553	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
67	1519	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
107	1272	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
179	32221	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
241	29040	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
317	100807	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
389	151711	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
557	103416	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
839	704761	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
881	777043	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
971	943813	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
1033	1067088	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
1103	1217713	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
1301	1693903	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
1447	2093808	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
1759	3094080	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
2851	8128200	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
3347	11205757	$h_3(p) \mid (p^3 - 1)$
4831	11669280	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
13367	7444862	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
15791	10389820	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$
17207	17206	$h_3(p) \mid (p^3 - p^2)$
18047	1696324	$h_3(p) \mid (p^3 - p)$

Çizelge 3.2. $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_4(p) | (p^4 - p^i)$ nin durumu

p	$h_4(p)$	Sonuç
5	312	$h_4(p) (p^4 - 1)$
11	120	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
13	84	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
19	6858	$h_4(p) (p^4 - p)$
29	280	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
37	1368	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
41	240	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
67	100254	$h_4(p) (p^4 - p)$
83	1157520	$h_4(p) (p^4 - 1)$
151	533216	$h_4(p) (p^4 - 1)$
211	9393930	$h_4(p) (p^4 - p)$
433	23248760	$h_4(p) (p^4 - 1)$
907	822648	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
1277	1630728	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
1579	623310	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
1973	1946364	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
2593	1680912	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
2749	7557000	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
3079	4740120	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
3331	369270	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
3581	3205890	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
3733	2322548	$h_4(p) (p^4 - p^2)$
3823	3822	$h_4(p) (p^4 - p^3)$
4019	8076180	$h_3(p) (p^3 - p^2)$
4253	6029336	$h_4(p) (p^4 - p^2)$

Çizelge 3.3. $p \geq 5$ olacak şekildeki p asal sayısı için $h_5(p) \mid (p^5 - p^i)$ nin durumu

p	$h_5(p)$	Sonuç
5	781	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
7	2801	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
11	16105	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
19	13032	$h_5(p) \mid (p^5 - p)$
31	190861	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
41	2896405	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
53	8042221	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
79	39449441	$h_5(p) \mid (p^5 - 1)$
89	3690720	$h_5(p) \mid (p^5 - p)$
163	176477940	$h_5(p) \mid (p^5 - p)$
283	20022	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
419	35112	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
503	127263526	$h_5(p) \mid (p^5 - p^2)$
683	159305993	$h_5(p) \mid (p^5 - p^2)$
823	677328	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
1259	317016	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
1709	1460340	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
2287	50292	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
2549	6497400	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
2957	8743848	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
3163	3162	$h_5(p) \mid (p^5 - p^4)$
3541	12538680	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
3929	15437040	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$
4159	17297280	$h_5(p) \mid (p^5 - p^3)$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Padovan, Fibonacci–Padovan ve k -basamak padovan dizileri ile ilgili elde edilen çalışmalara yer verildi. 4.1 ve 4.2 başlıkları altında Padovan dizisi ile ilgili bazı tanım ve teoremler verildi. 4.3 ve 4.4 başlıkları altında Padovan orbiti tanımlanarak bazı Polyhedral ve Binary Polyhedral gruplarının Padovan uzunlukları elde edildi. 4.5 ve 4.6 başlıkları altında Fibonacci- Padovan dizisi ve bir m -modülüne göre Fibonacci-Padovan dizisi ele alındı. Ayrıca $2 \leq j \leq 5$ olacak için j -gerenli sonlu gruplar için Fibonacci-Padovan orbitleri tanımlandı. Son olarak 4.7 ve 4.8 başlıkları altında da k -basamak Padovan dizisi ve sonlu gruplarda k -basamak Padovan dizisi tanımlandı. Ayrıca $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ grubunun 2-basamak Padovan ve 3- basamak Padovan uzunlukları elde edildi.

4.1. Padovan Dizileri

Tanım 4.1.1. $P(0) = P(1) = P(2) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere, Padovan dizisi,

$$P(n) = P(n - 2) + P(n - 3), n \geq 3 \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$P(n)$ nin ilk birkaç terimi;

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, 151, 220, 265, \dots$$

şeklindedir.

Padovan sayıları ve

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki bir Q matrisi ile arasındaki ilişki aşağıdaki teoremden verilmiştir.

Teorem 4.1.1. $Q^n = \begin{bmatrix} P(n-1) & P(n+1) & P(n) \\ P(n) & P(n+2) & P(n+1) \\ P(n+1) & P(n+3) & P(n+2) \end{bmatrix}, n \geq 3$ olur (Sokhuma 2013).

İspat: $n = 3$ için

$$\begin{aligned} Q^3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(2) & P(4) & P(3) \\ P(3) & P(5) & P(4) \\ P(4) & P(6) & P(5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(3-1) & P(3+1) & P(3) \\ P(3) & P(3+2) & P(3+1) \\ P(3+1) & P(3+3) & P(3+2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde olup eşitlik doğrudur. Şimdi $n = k$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani

$$Q^k = \begin{bmatrix} P(k-1) & P(k+1) & P(k) \\ P(k) & P(k+2) & P(k+1) \\ P(k+1) & P(k+3) & P(k+2) \end{bmatrix}$$

olduğunu kabul edip $n = k + 1$ içinde doğru olduğunu gösterelim. Bu durumda

$$Q^{k+1} = Q^k Q = \begin{bmatrix} P(k-1) & P(k+1) & P(k) \\ P(k) & P(k+2) & P(k+1) \\ P(k+1) & P(k+3) & P(k+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P(k) & P(k-1) + P(k) & P(k+1) \\ P(k+1) & P(k) + P(k+1) & P(k+2) \\ P(k+2) & P(k+1) + P(k+2) & P(k+3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P(k) & P(k+2) & P(k+1) \\ P(k+1) & P(k+3) & P(k+2) \\ P(k+2) & P(k+4) & P(k+3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P((k+1)-1) & P((k+1)+1) & P(k+1) \\ P(k+1) & P((k+1)+2) & P((k+1)+1) \\ P((k+1)+1) & P((k+1)+3) & P((k+1)+2) \end{bmatrix}$$

şeklinde olup eşitlik $n = k + 1$ içinde doğrudur. Böylece eşitlik tüm $n \geq 3$ için doğrudur.

Q matrisinin kuvvetleri,

$$Q^n = \begin{bmatrix} P(n-1) & P(n+1) & P(n) \\ P(n) & P(n+2) & P(n+1) \\ P(n+1) & P(n+3) & P(n+2) \end{bmatrix}, n \geq 3 \quad (4.2)$$

şeklinde olur.

$P(n)$ padovan sayıları $n < 0$ için,

$$P(n) = P(n+3) - P(n+1)$$

şeklindedir. Buna göre bazı terimler

..., 4, -3, 1, 1, -2, 2, -1, 0, 1, -1, 1, 0, 0, 1, 0

olur.

Padovan dizisi ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir
(<http://mathworld.wolfram.com>)

1. $\sum_{m=0}^n P(m) = P(n+5) - 2$
2. $\sum_{m=0}^n P(2m) = P(2n+3) - 1$
3. $\sum_{m=0}^n P(3m) = P(3n+2)$
4. $\sum_{m=0}^n P(3m+1) = P(3n+3) - 1$
5. $\sum_{m=0}^n P(3m+2) = P(3n+4) - 1$
6. $\sum_{m=0}^n P(5m) = P(5n+1)$
7. $\sum_{m=0}^n P(m)^2 P(m+1) = P(n)P(n+1)P(n+2)$
8. $\sum_{m=0}^n P(m)P(m+2) = P(n+2)P(n+3) - 1$

Yukarıda verilen özelliklerden 1., 4. ve 7. özelliklerin ispatları tümevarım yöntemi kullanılarak aşağıda verilmiştir. Diğer özelliklerin ispatları da benzer yöntemle yapılabilir.

1. özelliğin ispatı: $n = 1$ için

$$\sum_{m=0}^1 P(m) = P(0) + P(1) = 2 = 4 - 2 = P(6) - 2$$

olup ifade doğrudur. Şimdi $n = k$ için doğru olduğunu kabul edip $n = k + 1$ içinde doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\sum_{m=0}^k P(m) = P(0) + P(1) + \dots + P(k) = 2 = P(k+5) - 2$$

olsun. $n = k + 1$ için

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m) = P(0) + P(1) + \cdots + P(k) + P(k+1)$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m) = P(k+5) - 2 + P(k+1) \quad (n = k \text{ için doğru olduğundan})$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m) = P(k+3) + P(k+2) + P(k+1) - 2 \quad (\text{Padovan dizisi tanımından})$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m) = P(k+3) + P(k+4) - 2 \quad (\text{Padovan dizisi tanımından})$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m) = P(k+6) - 2 \quad (\text{Padovan dizisi tanımından})$$

şeklinde olup ifade doğrudur. Böylece bu ifade tüm $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

4. özelliğin ispatı: $n = 1$ için

$$\sum_{m=0}^1 P(3m+1) = P(1) + P(4) = 3 = 4 - 1 = P(6) - 1$$

olup ifade doğrudur. Şimdi $n = k$ için doğru olduğunu kabul edip $n = k+1$ içinde doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\sum_{m=0}^k P(3m+1) = P(1) + P(4) + \cdots + P(3k+1) = 2 = P(3k+3) - 1$$

olsun. $n = k + 1$ için

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(3m+1) = P(1) + P(4) + \dots + P(3k+1) + P(3k+4)$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(3m+1) = P(3k+3) - 1 + P(3k+4) \quad (n = k \text{ için doğru olduğundan})$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(3m+1) = P(3k+6) - 1 \quad (\text{Padovan dizisi tanımından})$$

şeklinde olup ifade doğrudur. Böylece bu ifade tüm $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

7. özelliğin ispatı: $n = 1$ için

$$\sum_{m=0}^1 P(m)^2 P(m+1) = P(0)^2 P(1) + P(1)^2 P(0) = 2 = P(1) \cdot P(2) \cdot P(3)$$

olup ifade doğrudur. Şimdi $n = k$ için doğru olduğunu kabul edip $n = k + 1$ içinde doğru olduğunu gösterelim. Yani

$$\sum_{m=0}^k P(m)^2 P(m+1) = P(0)^2 P(1) + P(1)^2 P(0) + \dots + P(k)^2 P(k+1)$$

$$= P(k)P(k+1)P(k+2)$$

olsun. $n = k + 1$ için

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m)^2 P(m+1) = P(0)^2 P(1) + P(1)^2 P(0) + \dots + P(k)^2 P(k+1) +$$

$$P(k+1)^2 P(k+2)$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m)^2 P(m+1) = P(k)P(k+1)P(k+2) + P(k+1)^2 P(k+2)$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m)^2 P(m+1) = P(k+1)P(k+2)[P(k) + P(k+1)]$$

$$\sum_{m=0}^{k+1} P(m)^2 P(m+1) = P(k+1)P(k+2)P(k+3) \quad (\text{Padovan dizisi tanımından})$$

şeklinde olup ifade doğrudur. Böylece bu ifade tüm $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur.

4.2. Bir m Modülüne göre Padovan Dizileri

Bir m modülü ile indirgenmiş Padovan dizisi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\{P^{(m)}(n)\} = \{P^{(m)}(0), P^{(m)}(1), P^{(m)}(2), \dots, P^{(m)}(n), \dots\}, \quad P^{(m)}(i) \equiv P(i) \pmod{m}$$

Teorem 4.2.1. $\{P^{(m)}(n)\}$ dizisi basit periodiktir (Taş and Karaduman 2014).

İspat: Padovan dizisinin tanımdan $P(n-2) = P(n) - P(n-3)$ olarak yazılabilir. Böylece eğer,

$$P^{(m)}(i+2) \equiv P^{(m)}(j+2), P^{(m)}(i+1) \equiv P^{(m)}(j+1) \text{ ve } P^{(m)}(i) \equiv P^{(m)}(j)$$

oluyorsa, o zaman $P^{(m)}(i - j + 2) \equiv P^{(m)}(2), P^{(m)}(i - j + 1) \equiv P^{(m)}(1)$ ve

$P^{(m)}(i - j) \equiv P^{(m)}(0)$ olur ki $\{P^{(m)}(n)\}$ dizisi basit periyodiktir.

$kP(m)$ ile $\{P^{(m)}(n)\}$ dizisinin periodu gösterilir.

Örnek 4.2.1. $\{P^{(3)}(n)\} = \{1, 1, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, \dots\}$ olup $kP(3) = 13$ olur.

Teorem 4.2.1'ye bağlı olarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2.1. $\{P^{(m)}(kP(m) - 7), P^{(m)}(kP(m) - 6), \dots, P^{(m)}(kP(m)), P^{(m)}(kP(m) + 1), P^{(m)}(kP(m) + 2)\} = \{1, m - 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1\}$ dir.

Gerçekten, $kP(m) = r$ olsun. Bu durumda

$$P^{(m)}(r) = 1 \equiv m + 1 \pmod{m}, P^{(m)}(r + 1) = 1 \equiv m + 1 \pmod{m},$$

$$P^{(m)}(r + 2) = 1 \equiv m + 1 \pmod{m}$$

olarak yazılır. Padovan dizisinin tanımından aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$P^{(m)}(r + 2) = P^{(m)}(r) + P^{(m)}(r - 1) \Rightarrow P^{(m)}(r - 1) = 0 \equiv m \pmod{m}$$

$$P^{(m)}(r + 1) = P^{(m)}(r - 1) + P^{(m)}(r - 2) \Rightarrow P^{(m)}(r - 2) = 1 \equiv m + 1 \pmod{m}$$

$$P^{(m)}(r) = P^{(m)}(r - 2) + P^{(m)}(r - 3) \Rightarrow P^{(m)}(r - 3) = 0 \equiv m \pmod{m}$$

$$P^{(m)}(r-1) = P^{(m)}(r-3) + P^{(m)}(r-4) \Rightarrow P^{(m)}(r-4) = 0 \equiv m \pmod{m}$$

$$P^{(m)}(r-2) = P^{(m)}(r-4) + P^{(m)}(r-5) \Rightarrow P^{(m)}(r-5) = 1 \equiv m+1 \pmod{m}$$

$$P^{(m)}(r-3) = P^{(m)}(r-5) + P^{(m)}(r-6) \Rightarrow P^{(m)}(r-6) = -1 \equiv m-1 \pmod{m}$$

$$P^{(m)}(r-4) = P^{(m)}(r-6) + P^{(m)}(r-7) \Rightarrow P^{(m)}(r-7) = 1 \equiv m+1 \pmod{m}$$

Bu takdirde, $\{P^{(m)}(kP(m)-7), P^{(m)}(kP(m)-6), \dots, P^{(m)}(kP(m)), P^{(m)}(kP(m)+1), P^{(m)}(kP(m)+2)\} = \{1, m-1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1\}$ olarak bulunur.

$\langle Q \rangle_{p^\alpha} = \{Q^i \pmod{p^\alpha} \mid i \geq 0\}$ bir devirli grup olsun. $|\langle Q \rangle_{p^\alpha}|$, $\langle Q \rangle_{p^\alpha}$ nın mertebesini gösterebilir. Böylece (2) eşitliğinden $kP(p^\alpha) = |\langle Q \rangle_{p^\alpha}|$ olduğu görülür. Gerçekten $|\langle Q \rangle_{p^\alpha}| = m$ ve $kP(p^\alpha) = n$ olsun. $|\langle Q \rangle_{p^\alpha}| = m$ olduğundan

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^m \pmod{p^\alpha} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ yazılır. Bu takdirde}$$

$$\begin{pmatrix} P(m) \\ P(m+1) \\ P(m+2) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^m \pmod{p^\alpha} \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{pmatrix}$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} P(m) &\equiv P(0) \pmod{p^\alpha} \\ P(m+1) &\equiv P(1) \pmod{p^\alpha} \\ P(m+2) &\equiv P(2) \pmod{p^\alpha} \end{aligned}$$

olur. $kP(p^\alpha) = n$ olduğundan $n|m$ yazılır. Diğer yandan $kP(p^\alpha) = n$ olduğundan

$$\begin{aligned}
P(n) &\equiv P(0)(\text{mod } p^\alpha) \\
P(n+1) &\equiv P(1)(\text{mod } p^\alpha) \\
P(n+2) &\equiv P(2)(\text{mod } p^\alpha)
\end{aligned}$$

olur. Bu takdirde

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n (\text{mod } p^\alpha) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olur. $|\langle Q \rangle_{p^\alpha}| = m$ olduğundan $m|n$ elde edilir. Böylece $m|n$ ve $n|m$ olup $n = m$ olur. Yani $kP(p^\alpha) = |\langle Q \rangle_{p^\alpha}|$ dır.

Teorem 4.2.2. p_i ler farklı asal sayılar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^t p_i^{e_i}$, ($t \geq 1$) ise $kP(m) = \text{ekok}[kP(p_i^{e_i})]$ olur (Taş and Karaduman 2014).

İspat. “ $kP(p_i^{e_i}), \{P^{(p_i^{e_i})}(n)\}$ dizisinin periyodunun uzunluğudur.” ifadesinden $\{P^{(p_i^{e_i})}(n)\}$ dizisinin sadece $u \cdot kP(p_i^{e_i}), (u \in \mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar ettiği anlaşılır. “ $kP(m), \{P^{(m)}(n)\}$ dizisinin periyodunun uzunluğudur.” ifadesinden $\{P^{(p_i^{e_i})}(n)\}$ dizisinin tüm i değerleri için $kP(m)$ den sonra tekrar ettiği anlaşılır. Böylece $kP(m)$ tüm i değerleri için $u \cdot kP(p_i^{e_i}), (u \in \mathbb{N})$ formundadır. O zaman $kP(m) = \text{ekok}[kP(p_i^{e_i})]$ olur.

4.3. $(2, 2, 2), (n, 2, 2), (2, n, 2)$ ve $(2, 2, n)$ Polyhedral Grupların Padovan Uzunlukları

Bu bölümde, $(x, y) \in G$ geren çifti için 2-gerenli bir G grubunun Padovan orbitini tanımlayıp, (x, y) geren çifti için

$$(2, 2, 2), (n, 2, 2), (2, n, 2), (2, 2, n)$$

Polyhedral gruplarının Padovan uzunlukları araştırıldı.

Tanım 4.3.1. $(x, y) \in G$ için $P_{x,y,y}(G) = \{x_i\}$ Padovan orbiti

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_{i+2} = x_{i-1} \cdot x_i, \quad i \geq 1$$

şeklinde tanımlanır (Taş and Karaduman 2014).

$P_{x,y,y}(G)$ padovan orbitinin periyodunun uzunluğu $LP_{x,y,y}(G)$ ile gösterilir ve (x, y) geren çiftine göre G nin Padovan uzunluğu şeklinde adlandırılır.

Örneğin $(2, 2, 2)$ polyhedral grubunun Padovan uzunluğu 7 olur. Gerçekten

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = e, x_5 = x, x_6 = xy, x_7 = x, x_8 = y, x_9 = y$$

olur. Buradan $LP_{x,y,y}((2, 2, 2)) = 7$ olur.

Teorem 4.3.1. $n > 2$ için $(2, n, 2)$ polyhedral grubunun padovan uzunluğu

$$LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = \begin{cases} \frac{7}{4}n, & n \equiv 0 \pmod{8}, \\ \frac{7}{2}n, & n \equiv 4 \pmod{8}, \\ 7n, & n \equiv 2 \pmod{8}, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklindedir (Taş and Karaduman 2014).

İspat. $\langle x, y : x^2 = y^n = (xy)^2 = e \rangle$ olduğundan $|x| = 2, |y| = n$ ve $|xy| = 2$ yazılır. Padovan orbiti,

$$x, y, y, xy, y^2, x, xy^3, y^2x, y^3, y^{-5}, xy, y^{-2}, xy^6, xy^{-1}, xy^8, y^{-7}, y^9, \dots$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = y^2, x_5 = x, x_6 = xy^3,$$

$$x_7 = y^2x, x_8 = y^3, x_9 = y^{-5}, x_{10} = xy, x_{11} = y^{-2}, x_{12} = xy^6, x_{13} = xy^{-1},$$

$$x_{14} = xy^8, x_{15} = y^{-7}, x_{16} = y^9, x_{17} = xy, x_{18} = y^2, x_{19} = y^8x, x_{20} = xy^3,$$

$$x_{21} = y^{10}x, x_{22} = y^{11}, x_{23} = y^{-13}, x_{24} = xy, x_{25} = y^{-2}, x_{26} = xy^{14}, x_{27} = xy^{-1},$$

$$x_{28} = xy^{16}, x_{29} = y^{-15}, x_{30} = y^{17}, x_{31} = xy, x_{32} = y^2, x_{33} = y^{16}x, x_{34} = xy^3,$$

$$x_{35} = y^{18}x, x_{36} = y^{19}, x_{37} = y^{-21}, x_{38} = xy, x_{39} = y^{-2}, x_{40} = xy^{22}, x_{41} = xy^{-1},$$

$$x_{42} = xy^{24}, x_{43} = y^{-23}, x_{44} = y^{25}, x_{45} = xy, x_{46} = y^2, x_{47} = y^{24}x, x_{48} = xy^3,$$

$$x_{49} = y^{26}x, x_{50} = y^{27}, x_{51} = y^{-29}, x_{52} = xy, x_{53} = y^{-2}, x_{54} = xy^{30}, x_{55} = xy^{-1}, \dots,$$

$$x_{14 \cdot i} = xy^{8 \cdot i}, x_{14 \cdot i+1} = y^{-8 \cdot i+1}, x_{14 \cdot i+2} = y^{8 \cdot i+1}, x_{14 \cdot i+3} = xy, x_{14 \cdot i+4} = y^2,$$

$$x_{14 \cdot i+5} = y^{8 \cdot i}x, x_{14 \cdot i+6} = xy^3,$$

$$x_{14 \cdot i+7} = y^{8 \cdot i+2}x, x_{14 \cdot i+8} = y^{8 \cdot i+3}, x_{14 \cdot i+9} = y^{-8 \cdot i-5}, x_{14 \cdot i+10} = xy, x_{14 \cdot i+11} = y^{-2},$$

$$x_{14 \cdot i + 12} = xy^{8 \cdot i + 6}, x_{14 \cdot i + 13} = xy^{-1}, \dots,$$

elde edilir.

Böylece, en küçük $u \in \mathbb{N}$ için $8 \cdot i = u \cdot n$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ye ihtiyaç vardır. Eğer $n \equiv 0(mod 8)$ ise iki durum söz konusudur:

Birinci durum: eğer $\frac{n}{2} \equiv 0(mod 8)$ ise o zaman $i = \frac{n}{8}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = \frac{7}{4}n$ olur.

İkinci durum: eğer $\frac{n}{2} \equiv 4(mod 8)$ ise o zaman $i = \frac{n}{8}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = \frac{7}{4}n$ olur.

Eğer $n \equiv 4(mod 8)$ ise o zaman $i = \frac{n}{4}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = \frac{7}{2}n$ olur.

Eğer $n \equiv 2(mod 8)$ ya da $n \equiv 6(mod 8)$ ise o zaman $i = \frac{n}{2}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = 7n$ olur.

Eğer n tek o zaman $i = n$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = 14n$ olur.

Teorem 4.3.2. $n > 2$ için G , $(n, 2, 2)$ ve $(2, 2, n)$ polyhedral gruplarından herhangi biri olsun. Böylece

$$LP_{x,y,y}(G) = \begin{cases} \frac{7}{2}n, & n \equiv 0 mod 4, \\ 7n, & n \equiv 2 mod 4, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

olur (Taş and Karaduman 2014).

İspat: İlk olarak $(n, 2, 2)$ polyhedral grubu ele alınırsa, Padovan orbiti,

$$x, y, y, xy, y^2 = e, x^{-1}, xy, x^{-1}, y, x^2y, x^{-1}y, x^{-2}, x^3, xy, x, x^4y, y, \dots$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = e, x_5 = x^{-1}, x_6 = xy,$$

$$x_7 = x^{-1}, x_8 = y, x_9 = x^2y, x_{10} = x^{-1}y, x_{11} = x^{-2}, x_{12} = x^3, x_{13} = xy,$$

$$x_{14} = x, x_{15} = x^4y, x_{16} = y, x_{17} = x^5y, x_{18} = x^4, x_{19} = x^{-5}, x_{20} = xy,$$

$$x_{21} = x^{-1}, x_{22} = x^{-4}y, x_{23} = x^2y, x_{24} = x^{-5}y, x_{25} = x^{-6}, x_{26} = x^7, x_{27} = xy,$$

$$x_{28} = x, x_{29} = x^8y, x_{30} = y, x_{31} = x^9y, x_{32} = x^8, x_{33} = x^{-9}, x_{34} = xy,$$

$$x_{35} = x^{-1}, x_{36} = x^{-8}y, x_{37} = x^2y, x_{38} = x^{-9}y, x_{39} = x^{-10}, x_{40} = x^{11}, x_{41} = xy,$$

$$x_{42} = x, x_{43} = x^{12}y, x_{44} = y, x_{45} = x^{13}y, x_{46} = x^{12}, x_{47} = x^{-13}, x_{48} = xy,$$

$$x_{49} = x^{-1}, x_{50} = x^{-12}y, x_{51} = x^2y, x_{52} = x^{-13}y, x_{53} = x^{-14}, x_{54} = x^{15}, x_{55} = xy, \dots,$$

$$x_{14.i} = x, x_{14.i+1} = x^{4.i}y, x_{14.i+2} = y, x_{14.i+3} = x^{4.i+1}y, x_{14.i+4} = x^{4.i},$$

$$x_{14.i+5} = x^{-4.i-1}, x_{14.i+6} = xy,$$

$$x_{14.i+7} = x^{-1}, x_{14.i+8} = x^{-4.i}y, x_{14.i+9} = x^2y, x_{14.i+10} = x^{-4.i-1}y,$$

$$x_{14.i+11} = x^{-4.i-2}, x_{14.i+12} = x^{4.i+3}, x_{14.i+13} = xy, \dots,$$

elde edilir.

$\langle x, y: x^n = y^2 = (xy)^2 = e \rangle, |x| = n, |y| = 2$ ve $|xy| = 2$ olur. Böylece en küçük $u \in \mathbb{N}$ için $4 \cdot i = u \cdot n$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ye ihtiyaç vardır.

Eğer $n \equiv 0(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{4}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((n, 2, 2)) = \frac{7}{2}n$ olur.

Eğer $n \equiv 2(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{2}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((n, 2, 2)) = 7n$ olur.

Eğer n tek ise o zaman $i = n$ olur. Bu durumda da $LP_{x,y,y}((n, 2, 2)) = 14n$ olur.

Şimdi $(2, 2, n)$ polyhedral grubu ele alınırsa, bu durumda Padovan orbiti,

$$x, y, y, xy, e, yxy, xy, yxy, y(xy)^2, y, \dots$$

şeklinde yazılır. Buradan

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = e, x_5 = yxy, x_6 = xy,$$

$$x_7 = yxy, x_8 = y(xy)^2, x_9 = y, x_{10} = xy, x_{11} = (yx)^2, x_{12} = yxy, x_{13} = yx,$$

$$x_{14} = y(xy)^3, x_{15} = y, x_{16} = (yx)^4y, x_{17} = (yx)^3, x_{18} = (xy)^4, x_{19} = yxy, x_{20} = xy,$$

$$x_{21} = (xy)^2x, x_{22} = y(xy)^2, x_{23} = (xy)^3x, x_{24} = (xy)^5, x_{25} = y(xy)^5x, x_{26} = yxy,$$

$$x_{27} = yx,$$

$$x_{28} = y(xy)^7, x_{29} = y, x_{30} = y(xy)^8, x_{31} = (yx)^7, x_{32} = (xy)^8, x_{33} = yxy,$$

$$x_{34} = xy,$$

$$x_{35} = (xy)^6x, x_{36} = y(xy)^2, x_{37} = (xy)^7x, x_{38} = (xy)^9, x_{39} = y(xy)^9y, x_{40} = yxy,$$

$$x_{41} = yx,$$

$$x_{42} = y(xy)^{11}, x_{43} = y, x_{44} = y(xy)^{12}, x_{45} = (yx)^{11}, x_{46} = (xy)^{12}, x_{47} = yxy,$$

$$x_{48} = xy,$$

$$x_{49} = (xy)^{10}x, x_{50} = y(xy)^2, x_{51} = (xy)^{11}x, x_{52} = (xy)^{13}, x_{53} = y(xy)^{13}y,$$

$$x_{54} = yxy, x_{55} = yx, \dots,$$

$$x_{14.i} = y(xy)^{4.i-1}, x_{14.i+1} = y, x_{14.i+2} = y(xy)^{4.i}, x_{14.i+3} = (yx)^{4.i-1},$$

$$x_{14.i+4} = (xy)^{4.i}, x_{14.i+5} = yxy, x_{14.i+6} = xy,$$

$$x_{14.i+7} = (xy)^{4.i-2}x, x_{14.i+8} = y(xy)^2, x_{14.i+9} = (xy)^{4.i-1}x, x_{14.i+10} = (xy)^{4.i+1},$$

$$x_{14.i+11} = y(xy)^{4.i+1}x, x_{14.i+12} = yxy, x_{14.i+13} = yx, \dots,$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\langle x, y: x^2 = y^2 = (xy)^n = e, |x| = 2, |y| = 2 \text{ ve } |xy| = n \text{ olur.}$
Böylece, en küçük $u \in \mathbb{N}$ için $4 \cdot i = u \cdot n$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ye ihtiyaç vardır.

Eğer $n \equiv 0(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{4}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((n, 2, 2)) = \frac{7}{2}n$ olur.

Eğer $n \equiv 2(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{2}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}((n, 2, 2)) = 7n$ olur.

Eğer n tek ise o zaman $i = n$ olur. Bu durumda da $LP_{x,y,y}((n, 2, 2)) = 14n$ olur.

4.4. $\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle n, 2, 2 \rangle, \langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ Binary Polyhedral Grupların Padovan Uzunlukları

Bu bölümde, $(x, y) \in G$ geren çifti için 2-gerenli bir G grubunun, (x, y) geren çifti için

$$\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle n, 2, 2 \rangle, \langle 2, n, 2 \rangle, \langle 2, 2, n \rangle$$

Binary Polyhedral gruplarının Padovan uzunluklarını araştırıldı.

Teorem 4.4.1. $\langle 2, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubunun padovan uzunluğu 14 olur (Taş and Karaduman 2014).

İspat: $\langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle$ olup $|x| = |y| = |xy| = 4$ olur. Padovan orbiti,

$$x, y, y, xy, y^2, x, xy^3, x^{-1}, y, y, x^3y, y^{-2}, x^3, xy, x, y, y, \dots$$

olur. Böylece $LP_{x,y,y}(\langle 2, 2, 2 \rangle) = 14$ olur.

Teorem 4.4.2. $n > 2$ için $\langle 2, n, 2 \rangle$ binary polyhedral grubunun Padovan uzunluğu

$$LP_{x,y,y}(G) = \begin{cases} \frac{7}{2}n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 7n, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklindedir (Taş and Karaduman 2014).

İspat: $\langle x, y : x^2 = y^n = (xy)^2 \rangle$ olup $|x| = |xy| = 4$ ve $|y| = 2n$ olur. Padovan orbiti,

$$x, y, y, xy, y^2, x, xy^3, y^2x, x^2y^3, x^2y^{-5}, x^3y, y^{-2}, xy^6, x^3y^{-1}, xy^8, y^{-7}, y^9, \dots$$

şeklinde olur. Buna göre

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = y^2, x_5 = x, x_6 = xy^3,$$

$$x_7 = y^2x, x_8 = x^2y^3, x_9 = x^2y^{-5}, x_{10} = x^3y, x_{11} = y^{-2}, x_{12} = xy^6, x_{13} = x^3y^{-1},$$

$$x_{14} = xy^8, x_{15} = y^{-7}, x_{16} = y^9, x_{17} = xy, x_{18} = y^2, x_{19} = y^8x, x_{20} = xy^3,$$

$$x_{21} = y^{10}x, x_{22} = x^2y^{11}, x_{23} = x^2y^{-13}, x_{24} = x^3y, x_{25} = y^{-2}, x_{26} = xy^{14},$$

$$x_{27} = x^3y^{-1},$$

$$x_{28} = xy^{16}, x_{29} = y^{-15}, x_{30} = y^{17}, x_{31} = xy, x_{32} = y^2, x_{33} = y^{16}x, x_{34} = xy^3$$

$$x_{35} = y^{18}x, x_{36} = x^2y^{19}, x_{37} = x^2y^{-21}, x_{38} = x^3y, x_{39} = y^{-2}, x_{40} = xy^{22},$$

$$x_{41} = x^3y^{-1},$$

$$x_{42} = xy^{24}, x_{43} = y^{-23}, x_{44} = y^{25}, x_{45} = xy, x_{46} = y^2, x_{47} = y^{24}x, x_{48} = xy^3$$

$$x_{49} = y^{26}x, x_{50} = x^2y^{27}, x_{51} = x^2y^{-29}, x_{52} = x^3y, x_{53} = y^{-2}, x_{54} = xy^{30},$$

$$x_{55} = x^3y^{-1},$$

$$x_{14.i} = xy^{8.i}, x_{14.i+1} = y^{-8.i+1}, x_{14.i+2} = y^{8.i+1}, x_{14.i+3} = xy, x_{14.i+4} = y^2,$$

$$x_{14.i+5} = y^{8.i}x, x_{14.i+6} = xy^3,$$

$$x_{14.i+7} = y^{8.i+2}x, x_{14.i+8} = x^2y^{8.i+3}, x_{14.i+9} = x^2y^{-8.i-5}, x_{14.i+10} = x^3y,$$

$$x_{14.i+11} = y^{-2}, x_{14.i+12} = xy^{8.i+6}, x_{14.i+13} = x^3y^{-1}, \dots,$$

elde edilir.

Böylece, en küçük $v \in \mathbb{N}$ için $8 \cdot i = v \cdot 2 \cdot n$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ye ihtiyaç vardır.

Eğer $n \equiv 0(mod 4)$ ise iki durum söz konusudur:

Birinci durum: eğer $n \equiv 0(mod 8)$ ise o zaman $i = \frac{n}{4}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}(\langle 2, n, 2 \rangle) = \frac{7}{2}n$ olur.

İkinci durum: eğer $n \not\equiv 0(mod 8)$ ise o zaman $i = \frac{n}{4}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}(\langle 2, n, 2 \rangle) = \frac{7}{2}n$ olur.

Eğer $n \equiv 2(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{2}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}(\langle 2, n, 2 \rangle) = 7n$ olur.

Eğer n tek o zaman $i = n$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}(\langle 2, n, 2 \rangle) = 14n$ olur.

Teorem 4.4.3. G_n , $n > 2$ için $\langle n, 2, 2 \rangle$ ve $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral gruplarından herhangi biri olsun. Bu durumda

$$LP_{x,y,y}(G_n) = \begin{cases} 7n, & n \text{ çift ise,} \\ 14n, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

olur (Taş and Karaduman 2014).

İspat: İlk olarak $\langle n, 2, 2 \rangle$ binary polyhedral grubu ele alınırsa,

$\langle x, y : x^n = y^2 = (xy)^2 \rangle$ olup $|x| = 2n$, $|y| = 4$ ve $|xy| = 4$ olur. Buna göre:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = y^2, x_5 = y^2x^{-1}, x_6 = xy^3,$$

$$x_7 = x^{-1}, x_8 = y, x_9 = x^2y^3, x_{10} = x^{-1}y, x_{11} = x^{-2}, x_{12} = x^3, x_{13} = xy,$$

$$x_{14} = x, x_{15} = x^4y, x_{16} = y, x_{17} = x^5y, x_{18} = x^4y^2, x_{19} = y^2x^{-5}, x_{20} = xy^3,$$

$$x_{21} = x^{-1}, x_{22} = x^{-4}y, x_{23} = x^2y^3, x_{24} = x^{-5}y, x_{25} = x^{-6}, x_{26} = x^7, x_{27} = xy,$$

$$x_{28} = x, x_{29} = x^8y, x_{30} = y, x_{31} = x^9y, x_{32} = x^8y^2, x_{33} = y^2x^{-9}, x_{34} = xy^3,$$

$$x_{35} = x^{-1}, x_{36} = x^{-8}y, x_{37} = x^2y^3, x_{38} = x^{-9}y, x_{39} = x^{-10}, x_{40} = x^{11}, x_{41} = xy,$$

$$x_{42} = x, x_{43} = x^{12}y, x_{44} = y, x_{45} = x^{13}y, x_{46} = x^{12}y^2, x_{47} = y^2x^{-13}, x_{48} = xy^3,$$

$$x_{49} = x^{-1}, x_{50} = x^{-12}y, x_{51} = x^2y^3, x_{52} = x^{-13}y, x_{53} = x^{-14}, x_{54} = x^{15}, x_{55} = xy,$$

$$x_{14.i} = x, x_{14.i+1} = x^{4.i}y, x_{14.i+2} = y, x_{14.i+3} = x^{4.i+1}y, x_{14.i+4} = x^{4.i}y^2,$$

$$x_{14.i+5} = y^2x^{-4.i-1}, x_{14.i+6} = xy^3,$$

$$x_{14.i+7} = x^{-1}, x_{14.i+8} = x^{-4.i}y, x_{14.i+9} = x^2y^3, x_{14.i+10} = x^{-4.i-1}y,$$

$$x_{14.i+11} = x^{-4.i-2}, x_{14.i+12} = x^{4.i+3}, x_{14.i+13} = xy, \dots,$$

elde edilir. Böylece, en küçük $v \in \mathbb{N}$ için $4 \cdot i = v \cdot 2 \cdot n$ olacak şekilde bir $i \in \mathbb{N}$ ye ihtiyaç vardır.

Eğer $n \equiv 0(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{2}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}(\langle n, 2, 2 \rangle) = 7n$ olur.

Eğer $n \equiv 2(mod 4)$ ise o zaman $i = \frac{n}{2}$ olur. Bu durumda $LP_{x,y,y}(\langle n, 2, 2 \rangle) = 7n$ olur.

Eğer n tek ise o zaman $i = n$ olur. Bu durumda da $LP_{x,y,y}(\langle n, 2, 2 \rangle) = 14n$ olur.

İkinci olarak $\langle 2, 2, n \rangle$ binary polyhedral grubu ele alınırsa,

$\langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^n \rangle$ olup $|x| = 4$, $|y| = 4$ ve $|xy| = 2n$ olur. Buna göre:

Eğer $n \equiv 0(mod 4)$ ise $LP_{x,y,y}(\langle 2, 2, n \rangle) = 7n$ olur.

Eğer $n \equiv 2(mod 4)$ ise $LP_{x,y,y}(\langle 2, 2, n \rangle) = 7n$ olur.

Eğer n tek ise $LP_{x,y,y}(\langle 2, 2, n \rangle) = 14n$ olur.

4.5. Fibonacci-Padovan Dizisi

Tanım 4.5.1. $\{a_n\}$ Fibonacci-Padovan dizisi $n \geq 5$ ve $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 3,$

$a_4 = 7$ başlangıç değerleri için

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-5} \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlanır (Gogin and Myllari 2007).

Kalman, bu dizilerin, k dan önceki terimlerin lineer bir kombinasyonu olarak tekrarlanan bir dizinin özel durumları olduğunu belirtmiştir. Yani $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ reel sabitler olmak üzere

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1}$$

dir.

Kalman, aşağıda verilen matris metoduyla genelleştirilmiş diziler için

$$a_n = (1 \quad 0 \quad 0 \cdots 0 \quad 0)_{1 \times k} (A^n)_{k \times k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{k \times 1}$$

şeklinde bir formül elde etmiştir.

$$A_k = [a_{ij}]_{k \times k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}_{k \times k} \quad (4.4)$$

olmak üzere tümevarım yöntemi ile

$$A_k^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

olduğunu göstermiştir.

4.6. Bir m Modülüne Göre Fibonacci-Padovan Dizisi

(4.3) ve (4.5) eşitliklerinden Fibonacci-Padovan dizisi için

$$g_{n+1} = 0.g_n + g_{n+1} + 0.g_{n+2} + 0.g_{n+3} + 0.g_{n+4}$$

$$g_{n+2} = 0 \cdot g_n + 0 \cdot g_{n+1} + g_{n+2} + 0 \cdot g_{n+3} + 0 \cdot g_{n+4}$$

$$g_{n+3} = 0 \cdot g_n + 0 \cdot g_{n+1} + 0 \cdot g_{n+2} + g_{n+3} + 0 \cdot g_{n+4}$$

$$g_{n+4} = 0 \cdot g_n + 0 \cdot g_{n+1} + 0 \cdot g_{n+2} + 0 \cdot g_{n+3} + g_{n+4}$$

$$g_{n+5} = g_n + 0 \cdot g_{n+1} - 2 \cdot g_{n+2} + 2 \cdot g_{n+3} + g_{n+4}$$

olup,

$$\begin{bmatrix} g_{n+1} \\ g_{n+2} \\ g_{n+3} \\ g_{n+4} \\ g_{n+5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_n \\ g_{n+1} \\ g_{n+2} \\ g_{n+3} \\ g_{n+4} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

eşitliği yazılır. Buradan

$$M = [m_{ij}]_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi yazılır. $n \geq 0$ için

$$M^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_n \\ g_{n+1} \\ g_{n+2} \\ g_{n+3} \\ g_{n+4} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

şeklinde yazılır.

Bir m modülüne göre indirgenen Fibonacci-Padovan dizisi,

$$\{g_n(m)\} = \{g_0(m), g_1(m), g_2(m), \dots, g_i(m), \dots\}, \quad g_i(m) \equiv g_i(\text{mod } m)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.6.1. $\{g_n(m)\}$ dizisi basit periodik bir dizidir (Taş, Deveci and Karaduman 2014).

İspat: Herhangi bir $j \geq 0$ için

$$g_{i+4}(m) \equiv g(m), g_{i+3}(m) \equiv g_{j+3}(m), g_{i+2}(m) \equiv g_{j+2}(m), g_{i+1}(m) \equiv g_{j+1}(m),$$

$$g_i(m) \equiv g_j(m)$$

olacak şekilde $i \geq j$ vardır. Fibonacci-Padovan dizisinin tanımından

$$g_{n+5} = g_{n+4} + 2g_{n+3} - 2g_{n+2} + g_n$$

yazılır. Yani

$$g_n = g_{n+5} - g_{n+4} - 2g_{n+3} + 2g_{n+2}$$

olur. Buradan,

$$g_{i-1}(m) \equiv g_{j-1}(m), g_{i-2}(m) \equiv g_{j-2}(m), \dots, g_{i-j+1}(m) \equiv g_1(m), g_{i-j}(m) \equiv g_0(m)$$

olup $\{g_n(m)\}$ dizisi basit periodik bir dizidir.

$l(m)$ ile $\{g_n(m)\}$ dizisinin en küçük periodunu gösterelim.

Örnek 4.6.1.

$$\{g_n(2)\} = \{1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\}$$

olup $l(2) = 21$ dir.

p , asal bir sayı olmak üzere $\langle M \rangle_{p^u} = \{M^i \pmod{p^u} : i \geq 0\}$ devirli bir grup ve $|\langle M \rangle_{p^u}|$ ile $\langle M \rangle_{p^u}$ grubunun mertebesini gösterelim.

(4.6) eşitliğinden

$$l(p^u) = |\langle M \rangle_{p^u}|$$

olduğu görülür. Gerçekten $|\langle M \rangle_{p^u}| = m$ ve $l(p^u) = n$ olsun. $|\langle M \rangle_{p^u}| = m$ olduğundan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^m \pmod{p^u} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ yazılır. Bu takdirde}$$

$$\begin{bmatrix} g_m \\ g_{m+1} \\ g_{m+2} \\ g_{m+3} \\ g_{m+4} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^m \pmod{p^u} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned} g_m &\equiv g_0 \pmod{p^u} \\ g_{m+1} &\equiv g_1 \pmod{p^u} \\ g_{m+2} &\equiv g_2 \pmod{p^u} \\ g_{m+3} &\equiv g_3 \pmod{p^u} \\ g_{m+4} &\equiv g_4 \pmod{p^u} \end{aligned}$$

olur. $l(p^u) = n$ olduğundan $n|m$ yazılır. Diğer yandan $l(p^u) = n$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_n &\equiv g_0(\text{mod } p^u) \\ g_{n+1} &\equiv g_1(\text{mod } p^u) \\ g_{n+2} &\equiv g_2(\text{mod } p^u) \\ g_{n+3} &\equiv g_3(\text{mod } p^u) \\ g_{n+4} &\equiv g_4(\text{mod } p^u) \end{aligned}$$

olur. Bu takdirde

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^n (\text{mod } p^u) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. $|\langle M \rangle_{p^u}| = m$ olduğundan $m|n$ elde edilir. Böylece $m|n$ ve $n|m$ olup $n = m$ olur. Yani, $l(p^u) = |\langle M \rangle_{p^u}|$ dur.

Teorem 4.6.2. Eğer p_i ler farklı asallar olmak üzere $m = \prod_{i=1}^t p_i^{e_i}$ ise

$$l(m) = \text{okek} [l(p_i^{e_i})]$$

olur (Taş, Deveci and Karaduman 2014).

İspat: $l(p_i^{e_i}), \{g_n(p_i^{e_i})\}$ dizisinin period uzunluğu olup $\{g_n(p_i^{e_i})\}$ dizisi sadece $u.l(p_i^{e_i}), (u \in \mathbb{N})$ uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar eder. $l(m)$ de $\{g_n(m)\}$ dizisinin period uzunluğu olduğundan $\{g_n(p_i^{e_i})\}$ dizisi tüm i değerleri için $l(m)$ uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar eder. Böylece $l(m)$, tüm i değerleri için $u.l(p_i^{e_i})$ şeklindedir.

Sonuç olarak,

$$l(m) = \text{okek} [l(p_i^{e_i})]$$

olur.

G, j –gerenli sonlu bir grup ve $X, \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{j \text{ tane}}$ nin bir alt grubu olsun. $2 \leq j \leq 5$

olacak şekilde j –gerenleri için sonlu grupların Fibonacci-Padovan orbitleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 4.6.1. (Taş, Deveci and Karaduman 2014)

i. G , 2-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1) \in X$ geren çifti için $FP(G)_{x_0, x_1}$ Fibonacci-Padovan orbiti, $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = (b_0)^2 b_1, b_3 = (b_0)^{-2} (b_1)^2 b_2, b_4 = (b_1)^{-2} (b_2)^2 b_3$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

ii. G , 3-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1, x_2) \in X$ geren üçlüsü için $FP(G)_{x_0, x_1, x_2}$ Fibonacci-Padovan orbiti, $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = (b_0)^{-2} (b_1)^2 b_2, b_4 = (b_1)^{-2} (b_2)^2 b_3$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

iii. G , 4-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in X$ geren dörtlüsü için $FP(G)_{x_0, x_1, x_2, x_3}$ Fibonacci-Padovan orbiti, $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = x_3, b_4 = (b_1)^{-2}(b_2)^2 b_3$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

iv. G , 5-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in X$ geren beşlisi için $FP(G)_{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4}$ Fibonacci-Padovan orbiti, $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = x_3, b_4 = x_4$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

Teorem 4.6.3. $2 \leq j \leq 5$ gerenli, sonlu bir grubun basit periodik Fibonacci-Padovan orbiti vardır (Taş, Deveci and Karaduman 2014).

İspat: G dört gerenli sonlu bir grup ve (x_0, x_1, x_2, x_3) , G nin bir geren dörtlüsü olsun. Eğer G nin meretebesi n ise o zaman G nin n^5 tane 5-li elemanları vardır. Böylece (x_0, x_1, x_2, x_3) geren dörtlüsü için bu 5-lilerin en az biri G nin Fibonacci-Padovan orbitinde iki kez görünür. Yani Fibonacci-Padovan orbiti periodiktir. (x_0, x_1, x_2, x_3) geren dörtlüsü için Fibonacci-Padovan orbiti periodik olduğundan

$$b_{r+1} = b_{s+1}, b_{r+2} = b_{s+2}, \dots, b_{r+5} = b_{s+5}$$

olacak şekilde $r > s$ için r ve s pozitif tam sayıları vardır. Fibonacci-Padovan orbitinin tanımından

$$b_r = (b_{r+5})(b_{r+4})^{-1}(b_{r+3})^{-2}(b_{r+2})^2$$

ve

$$b_s = (b_{s+5})(b_{s+4})^{-1}(b_{s+3})^{-2}(b_{s+2})^2$$

yazılır. Böylece, $b_r = b_s$ dir ve

$$b_{r-s} = b_{s-s} = b_0 = x_0, b_{r-s+1} = b_{s-s+1} = b_1 = x_1,$$

$$b_{r-s+2} = b_{s-s+2} = b_2 = x_2, b_{r-s+3} = b_{s-s+3} = b_3 = x_3$$

olur. Böylece, $FP(G)_{x_0, x_1, x_2, x_3}$ Fibonacci-Padovan orbiti basit periodiktir.

2-gerenli gruplar, 3-gerenli gruplar ve 5-gerenli gruplar içinde ispatlar üstteki ispata benzerdir.

$FP(G)_{x_0, \dots, x_j}$, $1 \leq j \leq 4$ Fibonacci-Padovan orbitlerinin periodlarını $LFP(G)_{x_0, \dots, x_j}$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.6.2. G sonlu bir grup olsun. Eğer G nin herbir elemanı dizide görünecek şekilde G nin Fibonacci-Padovan orbiti varsa G ye Fibonacci-Padovan dizilenebilirdir denir (Taş, Deveci and Karaduman 2014).

Örnek 4.6.2. Q_8 grubu Fibonacci-Padovan dizilenebilir olduğunu gösterelim. $FP(Q_8)_{x,y}$ Fibonacci-Padovan orbiti

$$x, y, y^3, y^3, y^3, x^3y, x^3, x^3y, x, xy, e, x^3, y^3, xy, x^2, x^2, x^3, x^3y, x^2, e, e, x^3, y, y,$$

$$y, y, x^3y, x^3, xy, x, x^3y, x^2, x, y^3, xy, e, x^2, x, xy, e, e, e, x, y, y^3, y^3, y^3, x^3y, \dots,$$

şeklinde yazılır. Q_8 grubunun her bir elemanı $FP(Q_8)_{x,y}$ Fibonacci-Padovan orbitinde görüldüğünden Q_8 grubu Fibonacci-Padovan dizilenebilir.

Teorem 4.6.4. $LFP(Q_8)_{x,y} = LFP(Q_8)_{y,x} = 42$ olur (Taş, Deveci and Karaduman 2014)

İspat: Q_8 quaternion grubunun takdiminden ve 2-gerenli gruplar için Fibonacci-Padovan orbitinin tanımından

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = (b_0)^2 b_1, b_3 = (b_0)^{-2} (b_1)^2 b_2, b_4 = (b_1)^{-2} (b_2)^2 b_3$$

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

$FP(Q_8)_{y,x}$ Fibonacci-Padovan orbiti

$$b_0 = y, b_1 = x, b_2 = x^3, b_3 = x^3, b_4 = x^3, b_5 = yx^3, b_6 = y^3,$$

$$b_7 = xy, b_8 = y, b_9 = x^3y, b_{10} = e, b_{11} = y^3, b_{12} = x^3, b_{13} = yx,$$

$$b_{14} = y^2, b_{15} = y^2, b_{16} = y^3, b_{17} = xy, b_{18} = y^2, b_{19} = e, b_{20} = e,$$

$$b_{21} = y^3, b_{22} = x, b_{23} = x, b_{24} = x, b_{25} = x, b_{26} = y^3x, b_{27} = y^3,$$

$$b_{28} = xy^3, b_{29} = y, b_{30} = xy, b_{31} = y^2, b_{32} = y, b_{33} = x^3, b_{34} = yx,$$

$$b_{35} = e, b_{36} = y^2, b_{37} = y, b_{38} = x^3y, b_{39} = e, b_{40} = e, b_{41} = e,$$

$$b_{42} = y, b_{43} = x, b_{44} = x^3, b_{45} = x^3, b_{46} = x^3, b_{47} = yx^3, \dots,$$

şeklinde yazılır. Buna göre $LFP(Q_8)_{y,x} = 42$ olur.

Diğer taraftan $FP(Q_8)_{x,y}$ Fibonacci-Padovan orbiti

$$b_0 = x, b_1 = y, b_2 = y^3, b_3 = y^3, b_4 = y^3, b_5 = x^3y, b_6 = x^3,$$

$$b_7 = yx, b_8 = x, b_9 = yx^3, b_{10} = e, b_{11} = x^3, b_{12} = y^3, b_{13} = xy,$$

$$b_{14} = x^2, b_{15} = x^2, b_{16} = x^3, b_{17} = yx, b_{18} = x^2, b_{19} = e, b_{20} = e,$$

$$b_{21} = x^3, b_{22} = y, b_{23} = y, b_{24} = y, b_{25} = y, b_{26} = x^3y, b_{27} = x^3,$$

$$b_{28} = yx^3, b_{29} = x, b_{30} = yx, b_{31} = x^2, b_{32} = x, b_{33} = y^3, b_{34} = xy,$$

$$b_{35} = e, b_{36} = x^2, b_{37} = x, b_{38} = yx^3, b_{39} = e, b_{40} = e, b_{41} = e,$$

$$b_{42} = x, b_{43} = y, b_{44} = y^3, b_{45} = y^3, b_{46} = y^3, b_{47} = x^3y, \dots,$$

şeklinde yazılır. Böylece $LFP(Q_8)_{x,y} = 42$ olur.

Tanım 4.6.3. k - basamak Padovan dizisi, $P(0) = P(1) = \dots = P(k) = 1$ ve $n \geq 0$ için

$$P(n + k + 1) = \sum_{i=0}^{k-1} P(n + i)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

Örnek 4.6.3. 2- basamak Padovan dizisi, 3-basamak Padovan dizisi ve 5- basamak Padovan dizisi sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$P(n+3) = \sum_{i=0}^1 P(n+i) = P(n) + P(n+1)$$

$$P(n+4) = \sum_{i=0}^2 P(n+i) = P(n) + P(n+1) + P(n+2)$$

$$P(n+6) = \sum_{i=0}^4 P(n+i) = P(n) + P(n+1) + P(n+2) + P(n+3) + P(n+4)$$

Bu dizilerin birkaç terimi;

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, 37, 49, 65, 86, 114, \dots,$$

$$1, 1, 1, 1, 3, 3, 5, 7, 11, 15, 23, 33, 49, 71, 105, 153, 225, \dots,$$

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 9, 13, 21, 33, 53, 81, 129, \dots,$$

gibidir.

4.7. Sonlu Graplarda k - Basamak Padovan Dizisi

Bu bölümde sonlu graplarda k - basamak Padovan dizisi tanımlanarak, $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ grubunun 2-basamak ve 3- basamak Padovan uzunlukları elde edildi.

Tanım 4.7.1. Sonlu grupta k - basamak Padovan dizisi $x_0, x_1, \dots, x_j$ ve $x_j = x_{j-1}$ başlangıç elemanları için

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots x_{n-2} & ; & j+1 \leq n \leq k+1 \\ x_{n-k-1} x_{n-k} \cdots x_{n-2} & ; & n \geq k+2 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.7.1. i. $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ grubunun 2-basamak padovan uzunluğu

$$LP_{a,b}(SD_{2^n}) = 7.2^{n-2}$$

dir.

ii. $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ grubunun 3-basamak padovan uzunluğu

$$LP_{a,b}(SD_{2^n}) = 14$$

dir.

İspat. i. $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ olduğundan $|a| = 2^{n-1}, |b| = 2$ yazılır. Şimdi $n = 4$ için $SD_{2^4} = \langle a, b: a^8 = b^2 = e, bab = a^3 \rangle$ olup

$$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = b, x_3 = ab, x_4 = e, x_5 = a^3, x_6 = ab, x_7 = a^3, x_8 = a^4b,$$

$$x_9 = a^2b, x_{10} = a^7b, x_{11} = a^2, x_{12} = a^7, x_{13} = a^5b, x_{14} = a, x_{15} = a^4b,$$

$$x_{16} = b, x_{17} = a^5b, x_{18} = a^4, x_{19} = a^7, x_{20} = ab, x_{21} = a^3, x_{22} = b, x_{23} = a^2b,$$

$$x_{24} = a^3b, x_{25} = a^6, x_{26} = a^3, x_{27} = a^5b, x_{28} = a^9 = a, x_{29} = a^8b = b,$$

$$x_{30} = a^8b = b, \dots,$$

elde edilir. Buna göre, dizi $x_{28} = a, x_{29} = b, x_{30} = b$ elemanlarından sonra tekrar edip $LP_{a,b}(SD_{2^4}) = 28 = 7 \cdot 2^2$ olur.

$n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ olmak üzere

$$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = b, x_3 = ab, x_4 = e, x_5 = a^{2^{n-2}-1}, x_6 = ab,$$

$$x_7 = a^{2^{n-2}-1}, x_8 = a^{2^{n-2}}b, x_9 = a^2b, x_{10} = a^{-1}b, x_{11} = a^{2^{n-2}-2}, x_{12} = a^{2^{n-2}+3},$$

$$x_{13} = a^{2^{n-2}+1}b,$$

$$x_{14} = a, x_{15} = a^4b, x_{16} = b, x_{17} = a^5b, x_{18} = a^4, x_{19} = a^{2^{n-2}-5}, x_{20} = ab,$$

$$x_{21} = a^{2^{n-2}-1}, x_{22} = a^{2^{n-2}-4}b, x_{23} = a^2b, x_{24} = a^{-5}b, x_{25} = a^{2^{n-2}-6}, x_{26} = a^{2^{n-2}+7},$$

$$x_{27} = a^{2^{n-2}+1}b,$$

$$x_{28} = a, x_{29} = a^8b, x_{30} = b, x_{31} = a^9b, x_{32} = a^8, x_{33} = a^{2^{n-2}-9}, x_{34} = ab,$$

$$x_{35} = a^{2^{n-2}-1}, x_{36} = a^{2^{n-2}-8}b, x_{37} = a^2b, x_{38} = a^{-9}b, x_{39} = a^{2^{n-2}-10},$$

$$x_{40} = a^{2^{n-2}+11}, x_{41} = a^{2^{n-2}+1}b,$$

$$x_{42} = a, x_{43} = a^{12}b, x_{44} = b, x_{45} = a^{13}b, x_{46} = a^{12}, x_{47} = a^{2^{n-2}-13}, x_{48} = ab,$$

$$x_{49} = a^{2^{n-2}-1}, x_{50} = a^{2^{n-2}-12}b, x_{51} = a^2b, x_{52} = a^{-13}b, x_{53} = a^{2^{n-2}-14},$$

$$x_{54} = a^{2^{n-2}+15}, x_{55} = a^{2^{n-2}+1}b,$$

$$x_{56} = a, x_{57} = a^{16}b, x_{58} = b, x_{59} = a^{17}b, x_{60} = a^{16}, x_{61} = a^{2^{n-2}-17}, x_{62} = ab,$$

$$x_{63} = a^{2^{n-2}-1}, x_{64} = a^{2^{n-2}-16}b, x_{65} = a^2b, x_{66} = a^{-17}b, x_{67} = a^{2^{n-2}-18},$$

$$x_{68} = a^{2^{n-2}+19}, x_{69} = a^{2^{n-2}+1}b, \dots,$$

elde edilir. Bu durumda $i \in \mathbb{N}$ için

$$x_{14.i} = a, x_{14.i+1} = a^{4.i}b, x_{14.i+2} = b, x_{14.i+3} = a^{4.i+1}b, x_{14.i+4} = a^{4.i},$$

$$x_{14.i+5} = a^{2^{n-2}-(4.i+1)}, x_{14.i+6} = ab,$$

$$x_{14.i+7} = a^{2^{n-2}-1}, x_{14.i+8} = a^{2^{n-2}-4.i}b, x_{14.i+9} = a^2b, x_{14.i+10} = a^{-(4.i+1)}b,$$

$$x_{14.i+11} = a^{2^{n-2}-(4.i+2)}, x_{14.i+12} = a^{2^{n-2}+(4.i-1)}, x_{14.i+13} = a^{2^{n-2}+1}b,$$

yazılır.

Burada $4.i = 2^{n-1}$ için $i = 2^{n-3}$ olup

$$x_{14.(2^{n-3})} = a, x_{14.(2^{n-3})+1} = a^{2^{n-1}}b, x_{14.(2^{n-3})+2} = b, x_{14.(2^{n-3})+3} = a^{2^{n-1}+1}b,$$

$$x_{14.(2^{n-3})+4} = a^{2^{n-1}}, x_{14.(2^{n-3})+5} = a^{2^{n-2}-(2^{n-1}+1)}, x_{14.(2^{n-3})+6} = ab,$$

$$x_{14.(2^{n-3})+7} = a^{2^{n-2}-1}, x_{14.(2^{n-3})+8} = a^{2^{n-2}-2^{n-1}}b, x_{14.(2^{n-3})+9} = a^2b,$$

$$x_{14.(2^{n-3})+10} = a^{-(2^{n-1}+1)}b, x_{14.(2^{n-3})+11} = a^{2^{n-2}-(2^{n-1}+2)},$$

$$x_{14.(2^{n-3})+12} = a^{2^{n-2}+(2^{n-1}-1)}, x_{14.(2^{n-3})+13} = a^{2^{n-2}+1}b, \dots,$$

elde edilir. Sonuç olarak bu dizi

$$x_{7.(2^{n-2})} = a, x_{7.(2^{n-2})+1} = b, x_{7.(2^{n-2})+2} = b$$

elemanlarından sonra tekrar edip

$$LP_{a,b}(SD_{2^n}) = 7.2^{n-2}$$

olarak elde edilir.

ii. $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ olduğundan,

$|a| = 2^{n-1}, |b| = 2$ yazılır. Şimdi $n = 4$ için $SD_{2^4} = \langle a, b: a^8 = b^2 = e, bab = a^3 \rangle$ olup

$$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = b, x_3 = ab, x_4 = a, x_5 = ab, x_6 = a^4, x_7 = a^7, x_8 = a^6b,$$

$$x_9 = a^2b, x_{10} = ab, x_{11} = a^3, x_{12} = a^5b, x_{13} = e, x_{14} = a, x_{15} = a^8b = b,$$

$$x_{16} = a^8b = b, \dots,$$

elde edilir. Bu takdirde dizi $x_{14} = a, x_{15} = a^8b = b, x_{16} = a^8b = b$ elemanlarından sonra tekrar edip $LP_{a,b}(SD_{2^4}) = 14$ olur.

$$n \geq 4 \text{ için } SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$$

$$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = b, x_3 = ab, x_4 = a, x_5 = ab, x_6 = a^{2^{n-2}},$$

$$x_7 = a^{-1}, x_8 = a^{2^{n-2}+2}b, x_9 = a^2b, x_{10} = ab, x_{11} = a^{2^{n-2}-1}, x_{12} = a^{2^{n-2}+1}b, x_{13} = e,$$

$$x_{14} = a, x_{15} = a^{2^{n-1}}b = b, x_{16} = a^{2^{n-1}}b = b, \dots,$$

elde edilir. Bu takdirde dizi $x_{14} = a, x_{15} = b, x_{16} = b$ elemanlarından sonra tekrar edip

$$LP_{a,b}(SD_{2^n}) = 14$$

olarak bulunur.

5. SONUÇLAR

Sonlu gruplarda Padovan, Fibonacci-Padovan ve k - basamak Padovan dizileri ile ilgili elde ettiğimiz sonuçlar aşağıda verilmiştir.

$(x, y) \in G$ geren çifti için 2-gerenli bir G grubunun Padovan orbitini tanımlayıp, (x, y) geren çifti için

$$(2, 2, 2), (n, 2, 2), (2, n, 2), (2, 2, n)$$

Polyhedral gruplarının

$$LP_{x,y,y}((2, 2, 2)) = 7,$$

$$LP_{x,y,y}((2, n, 2)) = \begin{cases} \frac{7}{4}n, & n \equiv 0 \bmod 8, \\ \frac{7}{2}n, & n \equiv 4 \bmod 8, \\ 7n, & n \equiv 2 \bmod 8, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}, n > 2,$$

$$LP_{x,y,y}(G) = \begin{cases} \frac{7}{2}n, & n \equiv 0 \bmod 4, \\ 7n, & n \equiv 2 \bmod 4, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}, \quad n > 2, \quad G = (n, 2, 2) \text{ ya da } G = (2, 2, n)$$

olacak şekilde Padovan uzunluklarını elde edildi.

$(x, y) \in G$ geren çifti için 2-gerenli bir G grubunun, (x, y) geren çifti için

$$\langle 2, 2, 2 \rangle, \langle n, 2, 2 \rangle, \langle 2, n, 2 \rangle, \langle 2, 2, n \rangle$$

Binary Polyhedral gruplarının

$$LP_{x,y,y}(\langle 2, 2, 2 \rangle) = 14$$

$$LP_{x,y,y}(\langle 2, n, 2 \rangle) = \begin{cases} \frac{7}{2}n, & n \equiv 0 \pmod{4}, \\ 7n, & n \equiv 2 \pmod{4}, \\ 14n, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}, \quad n > 2$$

$$LP_{x,y,y}(G_n) = \begin{cases} 7n, & n \text{ çift ise} \\ 14n, & n \text{ tek ise} \end{cases}, \quad n > 2, \quad G = \langle n, 2, 2 \rangle \text{ ya da } G = \langle 2, 2, n \rangle$$

şeklinde Padovan uzunlukları elde edildi.

G, j –gerenli sonlu bir grup ve $X, \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{j \text{ tane}}$ nin bir alt grubu olsun. $2 \leq j \leq 5$

olacak şekilde j –gerenleri için sonlu grupların Fibonacci-Padovan orbitleri aşağıdaki gibi tanımlandı.

i. G , 2-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1) \in X$ geren çifti için $FP(G)_{x_0, x_1}$ Fibonacci-Padovan orbiti $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = (b_0)^2 b_1, b_3 = (b_0)^{-2} (b_1)^2 b_2, b_4 = (b_1)^{-2} (b_2)^2 b_3$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

ii. G , 3-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1, x_2) \in X$ geren üçlüsü için $FP(G)_{x_0, x_1, x_2}$ Fibonacci-Padovan orbiti $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = (b_0)^{-2} (b_1)^2 b_2, b_4 = (b_1)^{-2} (b_2)^2 b_3$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

iii. G , 4-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1, x_2, x_3) \in X$ geren dörtlüsü için $FP(G)_{x_0, x_1, x_2, x_3}$ Fibonacci-Padovan orbiti $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = x_3, b_4 = (b_1)^{-2}(b_2)^2b_3$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

iv. G , 5-gerenli bir grup olsun. $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) \in X$ geren beşlisi için $FP(G)_{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4}$ Fibonacci-Padovan orbiti $n \geq 5$ için

$$b_0 = x_0, b_1 = x_1, b_2 = x_2, b_3 = x_3, b_4 = x_4$$

olmak üzere

$$b_n = (b_{n-5})(b_{n-3})^{-2}(b_{n-2})^2(b_{n-1})$$

olacak şekilde G nin elemanlarının $\{b_i\}$ dizisi ile tanımlanır.

Son olarak k - basamak Padovan dizisini

$$P(n + k + 1) = \sum_{i=0}^{k-1} P(n + i), \quad n \geq 0$$

şeklinde, sonlu gruplarda k - basamak padovan dizisini de $x_0, x_1, \dots, x_j$ ve $x_j = x_{j-1}$ başlangıç elemanları için

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots x_{n-2} & ; & j+1 \leq n \leq k+1 \\ x_{n-k-1} x_{n-k} \cdots x_{n-2} & ; & n \geq k+2 \end{cases}$$

olarak tanımlayarak, $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ grubunun 2-basamak padovan uzunluğunun

$$LP_{a,b}(SD_{2^n}) = 7.2^{n-2}$$

$n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ grubunun 3-basamak padovan uzunluğunun

$$LP_{a,b}(SD_{2^n}) = 14$$

şeklinde olduğu görüldü.

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlar göz önünde bulundurularak $j \geq 2$ olacak şekilde j -gerenli bir grubun Fibonacci-Padovan orbitleri araştırılabilir. Yine yukarıdaki sonuçlara göre $n \geq 4$ için $SD_{2^n} = \langle a, b: a^{2^{n-1}} = b^2 = e, bab = a^{2^{n-2}-1} \rangle$ Semidihedral grubunda $k \geq 4$ olmak üzere k -basamak Padovan dizisinin uzunlukları araştırılarak bunlar arasındaki ilişkinin nasıl olduğu incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Aydın, H. and Dikici R., 1998, General Fibonacci Sequences in Finite Groups, *The Fibonacci Quarterly*, 36(3), 216-221.
- Aydın, H. and Smith G.C., 1994, Finite p -Quotient of Some Cyclically Presented Groups, *J. London Math. Soc.*, 29(2), 83-92.
- Aydın, H., 1991, Recurrence Relations in Finite Nilpotent Groups, Ph. Thesis, University of Bath.
- Campbell, C. M. and Campbell P. P., 2005, The Fibonacci Length of Certain Centro-Polyhedral Groups, *J. Appl. Math. Comput.*, 19, 231-240.
- Campbell, C. M. and Campbell P. P., 2009, The Fibonacci Lengths of Binary Polyhedral Groups and Related Groups, *Congressus Numerantium*, 194, 95-102.
- Campbell, C. M., Campbell P.P., Doostie H. and Robertson E.F., 2004, On the Fibonacci Lengths of Powers of Dihedral Groups, in *Applications of Fibonacci Numbers*, Vol. 9, ed. F. T. Howard, Kluwer, Dordrecht, 69-85.
- Campbell, C.M., Doostie H. and Robertson E.F., 1990, Fibonacci Length of Generating Pairs in Groups, in *Applications of Fibonacci Numbers*, Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, 27-35.
- Campbell, P. P., 2003, The Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations, Ph. Thesis, University of St. Andrews.
- Conway, J. H., Coxeter H. S. M. and Shephard G. C., 1972, The Centre of a Finitely Generated Group, *Tensor (N.S)* 25, 405-418:erratum, *ibid. (N.S)* 26, 477.
- Coxeter, H. S. M. and Moser W. O. J., 1972, *Generator and Relations for Discrete Groups*, 3rd edition, Springer, Berlin.
- Çallıalp, F., 2001, *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, 300 s, İstanbul.
- Deveci, Ö., 2010, Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Gruplardaki k -nacci Dizileri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Deveci, Ö., Karaduman E. and Campbell C. M., 2011, On the k -nacci Sequences in Finite Binary Polyhedral Groups, *Algebra Colloquium*, No.1, 945-954.
- Dikici, R. and Smith G. C., 1995, Recurrences in Finite Groups, *Turkish J. of Mathematics*, 19, 321-329.
- Dummit, D. S. and Foote R. M., 2004, *Abstract Algebra*, 3rd edition (John Wiley & Sons, Inc.).
- Gil, T. B., Weiner M. D. and Zara C., 2007, Complete Padovan Sequences in Finite Fields, *The Fibonacci Quarterly*, 45(1), 64-75.
- <http://mathworld.wolfram.com/PadovanSequence.html>
- Johnson, D. L., 1997, *Presentation of Groups*, 2nd edition (London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge).
- Johnson, D. L., Walmsley J. W. and Wright D., 1974, The Fibonacci Groups, *Proc. London Math. Soc.*, 29, 577-592.
- Kalman, D., 1980, Generalized Fibonacci Numbers By Matrix Method, *The Fibonacci Quarterly*, 20(1), 73-76.
- Karaduman, E. and Aydın H., 2003, General 2-step Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups of Exponent p and Nilpotency Class 4, *Applied Mathematics and Computations*, 141, 491-497.

- Karaduman, E. and Deveci O., 2009, k -nacci Sequences in Finite Triangle Groups, *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 453750-1-453750-10.
- Karaduman, E. and Yavuz U., 2003, On the Period of Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups, *Applied Mathematics and Computations*, 142(2-3), 321-332.
- Karaduman, E., 2002, Sonlu Gruplarda 2-Basamak Fibonacci Dizileri, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Knox, S. W., 1992, Fibonacci Sequences in Finite Groups, *The Fibonacci Quarterly*, 30(2), 116-120.
- Lucas, E., 1878, Theories des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques, *Amer. J. Math.*, 1, 184-240, 289-321.
- Lü, K. and Wang J., 2007, k -Step Sequences Modulo m , *Util. Math.*, 71, 169-178.
- Özkan, E., 2003, 3-Step Fibonacci Sequences in Nilpotent Groups, *Applied Mathematics and Computations*, 144, 517-527.
- Robinson, D. J. S., 1982, *A Course in The Theory Groups*, (Springer-Verlag, New York).
- Saito, S., Tanaka, T. and Wakabayashi, N., 2011, Combinatorial Remarks on The Cyclic Sum Formula For Multiple Zeta Values, *Journal of Integer Sequences*, 14, 11.2.4.
- Sims, C. C., 1994, *Computation With Finitely Presented Groups*, (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 48, Cambridge University Press, Cambridge).
- Sokhuma, K., 2013, Padovan Q-Matrix and The Generalized Relations, *Applied Mathematical Sciences*, 56, 2777-2780.
- Suzuki, M., 1982, *Group Theory I*, (ISBN 3-540-10915-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Printed in The United States of America).
- Taş, S. And Karaduman, E., 2014, The Padovan Sequences in Finite Groups, *Chiang Mai J. Sci.*, 41(2), 456-462.
- Taş, S., Deveci, O. and Karaduman, E., 2014, The Fibonacci-Padovan Sequences in Finite Groups, *Maejo International J. Sci. And Technology*, 8(3), 279-287.
- Taşçı, D., 2007, *Soyut Cebir*, (Alp Yayınevi, Ankara).
- Wall, D. D., 1960, Fibonacci Series Module m , *Amer. Math. Monthly.*, 67, 525-532.
- Weger, B. M. M., 1997, Padua and Pisa are Exponentially Far Apart, *Publicacions Mathematiques*, 41, 631-651.
- Wilcox, H. J., 1986, Fibonacci Sequences of Period n in Groups, *The Fibonacci Quarterly*, 24, 356-361.

ÖZGEÇMİŞ

1982 Erzurum doğumlu Sait TAŞ, 2000 yılında Mehmet Akif Ersoy Lisesi'nden mezun oldu. 2002 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans eğitimine başlamış ve 2006 yılında mezun oldu. 2006 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2009 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 2010 yılında yüksek lisansını tamamlayarak aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda doktora eğitimine başlayan TAŞ, evli ve iki çocuk babasıdır.