



T.C.

ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK TOPOLOJİ ÜZERİNE

Tuğçe AYDIN

Matematik Anabilim Dalı

ÇANAKKALE

T.C.
ÇANAKKALE ONSEKİZ MART ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESNEK TOPOLOJİ ÜZERİNE

Tuğçe AYDIN

Matematik Anabilim Dalı

Tezin Sunulduğu Tarih: 08/01/2016

Tez Danışmanı:

Yrd. Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU

ÇANAKKALE

Tuğçe AYDIN tarafından Yrd. Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU yönetiminde hazırlanan ve **08/01/2016** tarihinde aşağıdaki jüri karşısında sunulan “**Esnek Topoloji Üzerine**” başlıklı çalışma, Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

JÜRİ

Yrd. Doç. Dr. Serkan KARATAŞ

Başkan

Yrd. Doç. Dr. Çetin CAMCI

Üye

Yrd. Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU

Üye

Prof. Dr. Levent GENÇ

Müdür

Fen Bilimleri Enstitüsü

Sıra No:

Bu tez çalışması BAP tarafından 646 numaralı projeden desteklenmiştir.

İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI

Bu tezde görsel, işitsel ve yazılı biçimde sunulan tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uyularak tarafımdan elde edildiğini, tez içinde yer alan ancak bu çalışmaya özgü olmayan tüm sonuç ve bilgileri tezde kaynak göstererek belirttiğimi beyan ederim.

Tuğçe AYDIN

TEŞEKKÜR

Bu tezin gerçekleştirilmesinde, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU'na, duygu ve düşüncelerini benimle paylaşmaktan çekinmeyen sevgili arkadaşlarım Hilal DÖNMEZ'e, Ayşe AYRAN'a ve hayatımın her evresinde bana destek olan değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe AYDIN
Çanakkale, Ocak 2016

SİMGELER VE KISALTMALAR

U	Evrensel küme
E	Parametreler kümesi
$P(U)$	U 'nun kuvvet kümesi
$S(U)$	U üzerinde E parametre kümesi yoluyla tanımlanan tüm esnek kümelerin kümesi
F_A	U üzerinde bir esnek küme
$F_\emptyset$	Boş esnek küme
$F_{\tilde{A}}$	A -evrensel esnek küme
$F_{\tilde{E}}$	Evrensel esnek küme
$\subseteq$	Esnek alt küme
$\supseteq$	Esnek üst küme
$\tilde{\cup}$	Esnek birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek kesişim
$\tilde{\setminus}$	Esnek fark
$\tilde{c}$	Esnek tümleyen
$\subseteq$	Klasik alt küme
$\cup$	Klasik birleşim
$\cap$	Klasik kesişim
$\setminus$	Klasik fark
c	Klasik tümleyen
$\in$	Ait olma
$\notin$	Ait olmama
$\tilde{\in}$	Esnek ait olma
$\tilde{\notin}$	Esnek ait olmama
α	Esnek eleman
f_A	F_A esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu
$f_{A\tilde{\cup}B}$	$F_{A\tilde{\cup}B}$ esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu
$f_{A\tilde{\cap}B}$	$F_{A\tilde{\cap}B}$ esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu
$f_{A\tilde{\setminus}B}$	$F_{A\tilde{\setminus}B}$ esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu
$f_{A\tilde{c}}$	$F_{A\tilde{c}}$ esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu
$\tilde{P}(F_A)$	F_A esnek kümesinin esnek kuvvet kümesi

$ $	Kardinalite
$(F_A, \tilde{\tau})$	Esnek topolojik uzay
$\tilde{\mathfrak{B}}$	Esnek taban
$(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$	Esnek topolojik alt uzay
$\tilde{\mathfrak{B}}_{F_B}$	$\tilde{\tau}_{F_B}$ için esnek taban
F_A°	F_A esnek kümesinin esnek içi
$\overline{F_A}$	F_A esnek kümesinin esnek kapanışı
F'_A	F_A esnek kümesinin tüm esnek limit noktalarının esnek birleşimi
F_A^b	F_A esnek kümesinin tüm esnek sınır noktalarının esnek birleşimi
$\tilde{\mathcal{N}}(\alpha)$	α 'nın esnek komşuluklar ailesi
$\tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$	α 'nın esnek açık komşuluklar ailesi
I, J	İndis kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi

ÖZET

ESNEK TOPOLOJİ ÜZERİNE

Tuğçe AYDIN

Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Serdar ENGİNOĞLU

08/01/2016, 45

Esnek küme kavramı, çeşitli belirsizlik türleri ile başa çıkmak için matematiksel bir araç olarak ilk kez Molodtsov (1999) tarafından ortaya atıldı. Bu tez çalışmasında, ilk olarak Çağman ve ark. (2010a) tarafından yeniden tanımlanan esnek küme işlemleri ve bazı özellikleri verildi. Daha sonra, Çağman ve ark. (2011) tarafından bir esnek kümenin esnek alt kümelerini kullanarak, bir esnek küme üzerinde tanımlanan esnek topoloji kavramı geliştirildi. Buna ek olarak, esnek eleman kavramı yoluyla tanımlanan esnek T_i uzaylar, esnek regüler ve esnek normal uzay tanımları (Nazmul ve Samanta, 2014) verildi ve onların temel özellikleri incelendi. Son olarak, Çağman ve ark. (2011) ve Shabir ve Naz (2011) tarafından ortaya atılan esnek topoloji kavramları üzerine bir tartışmaya yer verildi.

Anahtar sözcükler: Esnek Kümeler, Esnek Topoloji, Esnek Açık Kümeler, Esnek Tek Nokta Kümesi, Esnek Limit Noktası, Esnek Ayırma Aksiyomları.

ABSTRACT

ON SOFT TOPOLOGY

Tuğçe AYDIN

Çanakkale Onsekiz Mart University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Master of Science Thesis in Mathematics Science

Advisor: Asst. Prof. Dr. Serdar ENGİNOĞLU

08/01/2016, 45

The concept of soft sets was firstly introduced by Molotdsov (1999) as a mathematical tool for dealing with some kinds of uncertainty. In this thesis, firstly the operations and some properties of soft sets redefined by Çağman et al. (2010a) are given. Afterwards, the concept of soft topology on a soft set by using the subsets of it defined by Çağman et al. (2011) is developed. Furthermore, the definitions of soft T_i spaces, soft regular space and soft normal space (Nazmul and Samanta, 2014) defined by means of the concept of soft element are given and basic properties of them are investigated. Finally, concepts of soft topology propounded by Çağman et al. (2011) and Shabir and Naz (2011) are discussed later on works.

Keywords: Soft Sets, Soft Topology, Soft Open Sets, Soft Single Point Sets, Soft Limit Point, Soft Separation Axioms.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

TEZ SINAV SONUÇ FORMU	ii
İNTİHAL (AŞIRMA) BEYAN SAYFASI	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ÖZET	vii
ABSTRACT.....	viii
BÖLÜM 1	1
GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2.....	4
ESNEK KÜMELER.....	4
BÖLÜM 3	13
ESNEK TOPOLOJİ	13
BÖLÜM 4.....	33
ESNEK AYIRMA AKSİYOMLARI.....	33
BÖLÜM 5	41
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	I

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Esnek kümeler kavramı mühendislik, fizik, bilgisayar bilimleri, ekonomi, sosyal bilimler ve tıp bilimleri gibi birçok alanda belirsizlik içeren problemleri modellemek için yeni bir matematiksel araç olarak ilk kez Molodtsov (1999) tarafından ortaya atıldı.

Molodtsov esnek küme kavramını sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, Riemann integrasyonu, Perron integrasyonu, olasılık ve ölçüm teorisi gibi pek çok alana başarılı bir şekilde uyguladı (Molodtsov ve ark., 2006).

Daha sonra bu kavramın birçok versiyonu geliştirildi ve bu kavram cebirden karar verme problemlerine kadar pek çok alana uygulandı.

Maji ve ark., (2002, 2003) esnek küme işlemlerini tanımladı ve bu kavramı karar verme problemi üzerine uyguladı. Pei ve Miao (2005) bu çalışmayı geliştirdi ve esnek kümelerin özel bilgi sistemlerinin bir sınıfı olduğunu gösterdi. Buna ek olarak Çağman ve Enginoğlu (2010a), esnek küme işlemlerini yeniden tanımlayarak, bu yeni işlemler ile uni-int karar verme metodunu inşa etti. Daha sonra, esnek matrisler tanımlandı ve esnek max-min karar verme metodu ortaya atıldı (Çağman ve Enginoğlu, 2010b). Bu karar verme metodları belirsizlikler içeren birçok probleme başarılı bir şekilde uygulandı. Böylece esnek küme teorisi üzerine yapılan çalışmalar hızla arttı (Kovkov ve ark., 2007; Majumdar ve Samanta, 2008; Ali ve ark., 2009; Jiang ve ark., 2010; Qin ve Hong, 2010; Sezgin ve Atagün, 2011).

Esnek cebirsel yapılar ilk olarak Aktaş ve Çağman (2007) tarafından ortaya atıldı. Onlar bu çalışmalarında esnek grup kavramı ve onların temel özellikleri üzerine çalıştı. Ayrıca esnek kümelerin cebirsel yapıları üzerine literatürde Feng ve ark., (2008); Jun ve Park, (2009); Acar ve ark., (2010); Jun ve ark., (2010) gibi pek çok çalışma yer almaktadır.

Esnek küme kavramı üzerine çalışılan alanlardan biri de Çağman ve ark. (2011) tarafından ortaya atılan Esnek Topolojidir. Onlar bu çalışmalarında, esnek topolojiyi verilen bir esnek kümenin esnek alt kümelerini kullanarak, bu esnek küme üzerinde tanımladı. Ayrıca aynı dönemde Shabir ve Naz (2011) evrensel esnek kümenin esnek alt kümelerini kullanarak, evrensel küme üzerinde esnek topoloji kavramını ortaya attı.

Min (2011), Shabir ve Naz (2011) tarafından verilen esnek topolojik uzay ile ilgili bazı sonuçların hatalı olduğunu ve esnek topolojik uzaylar için genel özelliklerin incelenmesini engelleyen sorunu gösterdi. Ayrıca Shabir ve Naz (2011)'ın tanımladığı esnek ayırma aksiyomlarını, özellikle de esnek regüler uzayların özelliklerini inceledi.

Daha sonra Peyghan ve ark. (2014), Min (2011)'in çalışmasında yer alan bazı teoremlerin sağlanmadığını örnekler vererek gösterdi ve devamında genel topolojide sağlanan bazı özelliklerin Shabir ve Naz (2011) tarafından tanımlanan esnek topoloji kavramına göre Min (2011) tarafından verilen bazı teoremlerin sağlanmadığını gösterdi. Ayrıca esnek kompaktlık ve sayılabilir esnek kompaktlık kavramları ile ilgili bazı sonuçlar elde etti. Buna ek olarak, özel bir esnek topolojik uzay inşa ederek, genel topolojideki bazı klasik sonuçların esnek topolojik uzaylarda sağlanmadığını gösterdi.

Zorlutuna ve ark. (2012) çalışmasında esnek nokta kavramını tanımlayarak, esnek iç nokta, esnek iç, esnek komşuluk, esnek süreklilik gibi kavramları tanımladı ve bu kavramlar ile ilgili teoremlere yer verdi. Ne var ki bu kavram esnek limit noktası ile ilgili teoremlerin açıklanmasında bir takım zorluklara sahiptir.

Aygünoğlu ve Aygün (2011), esnek çarpım topolojisini ortaya attı ve esnek kompaktlık olarak adlandırılan esnek uzaylarda kompaktlığın çeşitli versiyonlarını tanımladı. Hazra ve ark., (2012) esnek alt kümelerin topolojisi ve esnek topoloji olarak adlandırılan iki kavram üzerine çalıştı. Onlar bu iki kavram arasındaki temel farkları ve bu iki topolojide esnek dönüşümlerin sürekliliğini tanımlayarak, bazı özelliklerini inceledi. Daha sonra, esnek topoloji ile ilgili kavramlar üzerine pek çok çalışma yapıldı (Atmaca, 2010; Aygünoğlu, 2011; Hussain ve Ahmad, 2011; Ahmad ve Hussain, 2012; Karataş, 2012; Varol ve ark., 2012; Georgiou ve ark., 2013; Peyghan ve ark., 2013; Varol ve Aygün, 2013; Georgiou ve Megaritis, 2014; Li ve Xie, 2014; Min, 2014; Roy ve Samanta, 2014; Şenel ve Çağman, 2015).

Bu tez çalışmasında ilk olarak, esnek küme kavramı ve esnek topoloji ile ilgili literatür çalışmasına yer verildi.

İkinci bölümde, Çağman ve Enginoğlu (2010a)'nda verilen esnek küme kavramı ile ilgili temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde, Çağman ve ark. (2011)'inde verilen esnek topoloji kavramı geliştirildi ve devam çalışmaları için uygun hale getirildi. Burada, esnek topolojinin bulanık parametrelili bulanık esnek topoloji gibi diğer türleri göz önüne alındığında bazı yeni düzenlemeler gerekebileceğine dikkat edilmelidir. Ayrıca yapılan bu temellendirme çalışmasının bir bölümü makale olarak yayımlandı (Enginoğlu ve ark., 2015).

Dördüncü bölümde, Çağman ve ark. (2011) tarafından tanımlanan esnek topoloji kavramı üzerine bir devam çalışması olarak Nazmul ve Samanta (2014) tarafından esnek eleman yoluyla tanımlanan esnek ayırma aksiyomları verildi ve ilgili özellikleri incelendi. Böylece genel topolojide yer alan bazı teoremlerin esnek topolojide de sağlandığı görüldü.

Son olarak, Çağman ve Enginoğlu (2011) ve Shabir ve Naz (2011) tarafından tanımlanan esnek topoloji kavramları arasında bir karşılaştırmaya yer verildi.

Bu çalışma boyunca genel topoloji kavramları için Mucuk O., 2010 ve Koçak M., 2011 kitaplarından yararlanılmıştır.

BÖLÜM 2

ESNEK KÜMELER

Bu bölümde, esnek kümeler (Molodtsov, 1999) ile ilgili temel kavramlar (Çağman ve Enginoğlu, 2010a) ve esnek küme ailelerine ait birtakım özellikler (Zorlutuna ve ark., 2012) verildi.

Bu çalışma boyunca, evrensel küme U , parametreler kümesi E , U 'nun kuvvet kümesi $P(U)$ ve U üzerinde E parametre kümesi yoluyla tanımlanan tüm esnek kümelerin kümesi $S(U)$ ile gösterilsin.

Tanım 2.1. $A \subseteq E$ olmak üzere $x \notin A$ iken $f_A(x) = \emptyset$ ile tanımlı $f_A : E \rightarrow P(U)$ fonksiyonunun grafiğine U üzerinde bir esnek küme denir ve F_A ile gösterilir (Molodtsov, 1999).

Diğer bir ifadeyle, U üzerinde bir esnek küme $F_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E\}$ biçiminde sıralı ikililerin bir kümesidir.

Burada, f_A fonksiyonu F_A esnek kümesinin yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır. $f_A(x)$ 'in değeri keyfî olabilir. Bu kümelerin bazıları boş olabilir, bazıları boştan farklı arakesite sahip olabilir.

Örnek 2.1. Bir şirkette var olan boş bir pozisyona başvuran adayların kümesini göz önüne alalım ve $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$ ile gösterelim.

Burada, $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ parametreler kümesi olmak üzere x_i ($i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) parametreleri sırasıyla bir adayın “deneyim”, “bilgisayar bilgisi”, “genç”, “yüksek eğitim”, “sağlıklı” durumlarını gösterebilir. Bu durumda, bir esnek küme tanımlamak verilen parametreler yoluyla adayları deneyimli çalışanlar, bilgisayar bilen çalışanlar vb. olarak ifade etmek anlamına gelir.

$A = \{x_1, x_3, x_4\} \subseteq E$ olmak üzere $f_A(x_1) = \{u_2, u_4\}$, $f_A(x_3) = U$ ve $f_A(x_4) = \emptyset$ ile tanımlı $f_A : E \rightarrow P(U)$ yaklaşım fonksiyonunu göz önüne alalım. O halde F_A esnek kümesi,

$$F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_2, \emptyset), (x_3, U), (x_4, \emptyset), (x_5, \emptyset)\}$$

ya da kısaca

$$F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_3, U)\}$$

biçimindedir.

Tanım 2.2. $F_A \in S(U)$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $f_A(x) = \emptyset$ ise F_A esnek kümesine boş esnek küme denir ve $F_\emptyset$ ile gösterilir.

$f_A(x) = \emptyset$ ifadesi U 'nun hiçbir elemanının $x \in E$ parametresini sağlamadığı anlamına gelir. Bu nedenle, kısalığın hatırına $(x, \emptyset)$ gibi elemanlar bir esnek kümede gösterilmemektedir.

Tanım 2.3. $F_A \in S(U)$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $f_A(x) = U$ ise F_A esnek kümesine A -evrensel esnek küme denir ve $F_{\bar{A}}$ ile gösterilir.

Eğer $A = E$ ise A -evrensel esnek kümesine evrensel esnek küme denir ve F_E ile gösterilir.

Örnek 2.2. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ evrensel kümesini ve $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ parametreler kümesi göz önüne alalım.

$A = \{x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere $f_A(x_2) = \{u_2, u_4\}$, $f_A(x_3) = \emptyset$ ve $f_A(x_4) = U$ ile tanımlı $f_A : E \rightarrow P(U)$ yaklaşım fonksiyonu için $F_A = \{(x_2, \{u_2, u_4\}), (x_4, U)\}$ biçimindedir.

$B = \{x_1, x_3\}$ olmak üzere $f_B(x_1) = \emptyset$ ve $f_B(x_3) = \emptyset$ ile tanımlı $f_B : E \rightarrow P(U)$ yaklaşım fonksiyonu için $F_B = F_\emptyset$ biçimindedir.

$C = \{x_1, x_2\}$ olmak üzere $f_C(x_1) = U$ ve $f_C(x_2) = U$ ile tanımlı $f_C : E \rightarrow P(U)$ yaklaşım fonksiyonu için $F_C = F_{\bar{C}}$ biçimindedir.

$D = E$ ve $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere her $x_i \in E$ için $f_D(x_i) = U$ ile tanımlı $f_D : E \rightarrow P(U)$ yaklaşım fonksiyonu için $F_D = F_E$ biçimindedir.

Tanım 2.4. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ise F_A esnek kümesi F_B esnek kümesinin esnek alt kümesidir denir ve $F_A \subseteq F_B$ ile gösterilir.

Diğer bir ifadeyle, F_B esnek kümesi F_A esnek kümesinin esnek üst kümesidir denir ve $F_B \supseteq F_A$ ile gösterilir.

Yorum 2.1. $F_A \subseteq F_B$ ifadesi F_A esnek kümesinin her elemanının F_B esnek kümesinin de bir elemanı olmasını gerektirmez. Dolayısıyla, klasik alt küme kavramı esnek alt küme kavramından farklıdır.

Örneğin, $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ evrensel kümesini ve $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametreler kümesini göz önüne alalım. Eğer $A = \{x_1\}$, $B = \{x_1, x_3\}$, $F_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\})\}$ ve $F_B = \{(x_1, \{u_2, u_3, u_4\}), (x_3, \{u_1, u_5\})\}$ ise her $x \in E$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ sağlanır. Dolayısıyla, $F_A \subseteq F_B$ elde edilir. Fakat $(x_1, f_A(x_1)) \in F_A$ iken $(x_1, f_A(x_1)) \notin F_B$ biçimindedir.

Önerme 2.1. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $F_A \cong F_E$
- ii. $F_\emptyset \cong F_A$
- iii. $F_A \cong F_A$
- iv. $F_A \cong F_B$ ve $F_B \cong F_C \Rightarrow F_A \cong F_C$

önergeleri sağlanır.

İspat. Her $x \in E$ için

- i. $f_A(x) \subseteq U \Rightarrow f_A(x) \subseteq f_E(x)$
- ii. $\emptyset \subseteq f_A(x) \Rightarrow f_\emptyset(x) \subseteq f_A(x)$
- iii. $f_A(x) = f_A(x) \Rightarrow f_A(x) \subseteq f_A(x)$
- iv. $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ve $f_B(x) \subseteq f_C(x) \Rightarrow f_A(x) \subseteq f_C(x)$

biçimindedir.

Tanım 2.5. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. Eğer her $x \in E$ için $f_A(x) = f_B(x)$ ise F_A ve F_B esnek kümeleri esnek eşittir denir ve $F_A = F_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.2. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $F_A = F_B$ ve $F_B = F_C \Leftrightarrow F_A = F_C$
- ii. $F_A \cong F_B$ ve $F_B \cong F_A \Leftrightarrow F_A = F_B$

önergeleri sağlanır.

İspat. Her $x \in E$ için

- i. $f_A(x) = f_B(x)$ ve $f_B(x) = f_C(x) \Leftrightarrow f_A(x) = f_C(x)$
- ii. $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ve $f_B(x) \subseteq f_A(x) \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x)$

biçimindedir.

Tanım 2.6. $F_A \in S(U)$ olsun. O halde F_A esnek kümesinin esnek tümleyeni her $x \in E$ için $f_{A^c}(x) = f_A^c(x)$ yaklaşım fonksiyonu yoluyla tanımlanır ve F_A^c ile gösterilir.

Burada $f_A^c(x)$, $f_A(x)$ kümesinin U 'ya göre tümleyenidir. Diğer bir ifadeyle, her $x \in E$ için $f_A^c(x) = U \setminus f_A(x)$ biçimindedir.

Önerme 2.3. $F_A \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $(F_A^c)^c = F_A$
- ii. $F_\emptyset^c = F_E$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Her $x \in E$ için

- i. $(f_A^c(x))^c = (U \setminus f_A(x))^c = f_A(x)$
- ii. $f_{\emptyset^c}(x) = f_\emptyset^c(x) = U \setminus f_\emptyset(x) = U \setminus \emptyset = U = f_E(x)$

biçimindedir.

Tanım 2.7. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde F_A ve F_B esnek kümelerinin esnek birleşimi her $x \in E$ için $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$ yaklaşım fonksiyonu yoluyla tanımlanır ve $F_A \tilde{\cup} F_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.4. $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $F_A \tilde{\cup} F_A = F_A$
- ii. $F_A \tilde{\cup} F_\emptyset = F_A$
- iii. $F_A \tilde{\cup} F_E = F_E$
- iv. $F_A \tilde{\cup} F_A^c = F_E$
- v. $F_A \tilde{\cup} F_B = F_B \tilde{\cup} F_A$
- vi. $(F_A \tilde{\cup} F_B) \tilde{\cup} F_C = F_A \tilde{\cup} (F_B \tilde{\cup} F_C)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Her $x \in E$ için

- i. $f_{A \cup A}(x) = f_A(x) \cup f_A(x) = f_A(x)$
- ii. $f_{A \cup \emptyset}(x) = f_A(x) \cup f_\emptyset(x) = f_A(x) \cup \emptyset = f_A(x)$
- iii. $f_{A \cup E}(x) = f_A(x) \cup f_E(x) = f_A(x) \cup U = U = f_E(x)$
- iv. $f_{A \cup A^c}(x) = f_A(x) \cup f_A^c(x) = U = f_E(x)$

- v. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x) = f_B(x) \cup f_A(x) = f_{B \cup A}(x)$
- vi. $f_{(A \cup B) \cup C} = (f_A(x) \cup f_B(x)) \cup f_C(x) = f_A(x) \cup (f_B(x) \cup f_C(x)) = f_{A \cup (B \cup C)}$

biçimindedir.

Tanım 2.8. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde F_A ve F_B esnek kümelerinin esnek kesişimi her $x \in E$ için $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cap f_B(x)$ yaklaşım fonksiyonu yoluyla tanımlanır ve $F_A \tilde{\cap} F_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.5. $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $F_A \tilde{\cap} F_A = F_A$
- ii. $F_A \tilde{\cap} F_\emptyset = F_\emptyset$
- iii. $F_A \tilde{\cap} F_{\bar{E}} = F_A$
- iv. $F_A \tilde{\cap} F_A^c = F_\emptyset$
- v. $F_A \tilde{\cap} F_B = F_B \tilde{\cap} F_A$
- vi. $(F_A \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cap} F_C = F_A \tilde{\cap} (F_B \tilde{\cap} F_C)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Önerme 2.4 için verilen ispata benzer biçimde yapılabilir.

Önerme 2.6. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $(F_A \cup F_B)^c = F_A^c \tilde{\cap} F_B^c$
- ii. $(F_A \tilde{\cap} F_B)^c = F_A^c \cup F_B^c$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

- i. Her $x \in E$ için

$$f_{(A \cup B)^c}(x) = f_{A \cup B}^c(x) = (f_A(x) \cup f_B(x))^c = (f_A(x))^c \cap (f_B(x))^c = f_{A^c \tilde{\cap} B^c}(x)$$

biçimindedir.

- ii. İspatı benzer şekilde yapılabilir.

Önerme 2.7. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $F_A \cup (F_B \cap F_C) = (F_A \cup F_B) \cap (F_A \cup F_C)$
- ii. $F_A \cap (F_B \cup F_C) = (F_A \cap F_B) \cup (F_A \cap F_C)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat.

- i. Her $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
 f_{A \cup (B \cap C)}(x) &= f_A(x) \cup f_{B \cap C}(x) \\
 &= f_A(x) \cup (f_B(x) \cap f_C(x)) \\
 &= (f_A(x) \cup f_B(x)) \cap (f_A(x) \cup f_C(x)) \\
 &= f_{A \cup B}(x) \cap f_{A \cup C}(x) \\
 &= f_{(A \cup B) \cap (A \cup C)}(x)
 \end{aligned}$$

biçimindedir.

- ii. İspatı benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 2.9. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde F_A ve F_B esnek kümelerinin esnek farkı her $x \in E$ için $f_{A \setminus B}(x) = f_A(x) \setminus f_B(x)$ yaklaşım fonksiyonu yoluyla tanımlanır ve $F_A \setminus F_B$ ile gösterilir.

Önerme 2.8. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $F_A \setminus F_B = F_A \cap F_B^c$
- ii. $F_A \setminus F_B = F_\emptyset \Leftrightarrow F_A \subseteq F_B$
- iii. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow F_A \setminus F_B = F_A$ ve $F_B \setminus F_A = F_B$

önergeleri sağlanır.

İspat. Her $x \in E$ için

- i. $f_{A \setminus B}(x) = f_A(x) \setminus f_B(x) = f_A(x) \cap f_B^c(x) = f_{A \cap B^c}(x)$
- ii. $f_{A \setminus B}(x) = f_A(x) \setminus f_B(x) = f_\emptyset(x) = \emptyset \Leftrightarrow f_A(x) \subseteq f_B(x)$

iii. $A \cap B = \emptyset$ olsun. Buradan

$$f_{A \setminus B}(x) = f_A(x) \setminus f_B(x) = f_A(x) \text{ ve } f_{B \setminus A}(x) = f_B(x) \setminus f_A(x) = f_B(x)$$

biçimindedir.

Önerme 2.9. $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ olsun. O halde

$$(F_A \cup F_B) \setminus F_C = (F_A \setminus F_C) \cup (F_B \setminus F_C)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Her $x \in E$ için

$$\begin{aligned} f_{(A \cup B) \setminus C}(x) &= f_{A \cup B}(x) \setminus f_C(x) \\ &= (f_A(x) \cup f_B(x)) \setminus f_C(x) \\ &= (f_A(x) \setminus f_C(x)) \cup (f_B(x) \setminus f_C(x)) \\ &= f_{A \setminus C}(x) \cup f_{B \setminus C}(x) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Tanım 2.10. $i \in I$ için $F_{A_i} \in S(U)$ olmak üzere $\{F_{A_i} : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde $i \in I$ için F_{A_i} esnek kümelerin esnek birleşimi her $x \in E$ için

$$f_{\bigcup_{i \in I} A_i}(x) = \bigcup_{i \in I} f_{A_i}(x)$$

yaklaşım fonksiyonu yoluyla tanımlanır ve $\bigcup_{i \in I} F_{A_i}$ ile gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Tanım 2.11. $i \in I$ için $F_{A_i} \in S(U)$ olmak üzere $\{F_{A_i} : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde $i \in I$ için F_{A_i} esnek kümelerin esnek kesişimi her $x \in E$ için

$$f_{\bigcap_{i \in I} A_i}(x) = \bigcap_{i \in I} f_{A_i}(x)$$

yaklaşım fonksiyonu yoluyla tanımlanır ve $\bigcap_{i \in I} F_{A_i}$ ile gösterilir (Zorlutuna ve ark., 2012).

Önerme 2.10. $F_A \in S(U)$ ve $i \in I$ için $F_{B_i} \in S(U)$ olmak üzere $\{F_{B_i} : i \in I\}$ esnek kümelerin bir ailesi olsun. O halde

- i. $F_A \tilde{\cap} (\bigcup_{i \in I} F_{B_i}) = \bigcup_{i \in I} (F_A \tilde{\cap} F_{B_i})$
- ii. $F_A \tilde{\cup} (\bigcap_{i \in I} F_{B_i}) = \bigcap_{i \in I} (F_A \tilde{\cup} F_{B_i})$
- iii. $F_A \tilde{\setminus} (\bigcup_{i \in I} F_{B_i}) = \bigcap_{i \in I} (F_A \tilde{\setminus} F_{B_i})$
- iv. $F_A \tilde{\setminus} (\bigcap_{i \in I} F_{B_i}) = \bigcup_{i \in I} (F_A \tilde{\setminus} F_{B_i})$
- v. $F_A \tilde{\cup} (\bigcup_{i \in I} F_{B_i}) = \bigcup_{i \in I} (F_A \tilde{\cup} F_{B_i})$
- vi. $F_A \tilde{\cap} (\bigcap_{i \in I} F_{B_i}) = \bigcap_{i \in I} (F_A \tilde{\cap} F_{B_i})$

eşitlikleri sağlanır (Zorlutuna ve ark., 2012).

İspat.

- i. Her $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
 f_{A \tilde{\cap} (\bigcup_{i \in I} B_i)}(x) &= f_A(x) \cap f_{\bigcup_{i \in I} B_i}(x) \\
 &= f_A(x) \cap \left(\bigcup_{i \in I} f_{B_i}(x) \right) \\
 &= \bigcup_{i \in I} \left(f_A(x) \cap f_{B_i}(x) \right) \\
 &= \bigcup_{i \in I} f_{A \tilde{\cap} B_i}(x)
 \end{aligned}$$

biçimindedir.

- ii. İspatı benzer şekilde yapılabilir.
- iii. Her $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
 f_{A \tilde{\setminus} (\bigcup_{i \in I} B_i)}(x) &= f_A(x) \setminus f_{\bigcup_{i \in I} B_i}(x) \\
 &= f_A(x) \setminus \left(\bigcup_{i \in I} f_{B_i}(x) \right) \\
 &= \bigcap_{i \in I} \left(f_A(x) \setminus f_{B_i}(x) \right) \\
 &= \bigcap_{i \in I} f_{A \tilde{\setminus} B_i}(x)
 \end{aligned}$$

biçimindedir.

- iv. İspatı benzer şekilde yapılabilir.
- v. Her $x \in E$ için

$$\begin{aligned}
 f_{A \cup (\cup_{i \in I} B_i)}(x) &= f_A(x) \cup f_{\cup_{i \in I} B_i}(x) \\
 &= f_A(x) \cup \left(\cup_{i \in I} f_{B_i}(x) \right) \\
 &= \cup_{i \in I} \left(f_A(x) \cup f_{B_i}(x) \right) \\
 &= \cup_{i \in I} f_{A \cup B_i}(x)
 \end{aligned}$$

biçimindedir.

- vi. İspatı benzer şekilde yapılabilir.

BÖLÜM 3

ESNEK TOPOLOJİ

Bu bölümde, Çağman ve ark. (2011)'ında verilen esnek topoloji kavramı geliştirildi ve devam çalışmaları için uygun hale getirildi. Burada, esnek topolojinin bulanık parametrelili bulanık esnek topoloji gibi diğer türleri göz önüne alındığında bazı yeni düzenlemeler gerekebileceğine dikkat edilmelidir. Ayrıca yapılan bu temellendirme çalışmasının bir bölümü makale olarak yayımlandı (Enginoğlu ve ark., 2015).

Tanım 3.1. $F_A \in S(U)$ olmak üzere,

$$\{F_{A_i} : F_{A_i} \subseteq F_A, i \in I\}$$

kümesine F_A esnek kümesinin esnek kuvvet kümesi denir ve $\tilde{P}(F_A)$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 3.2. $F_A \in S(U)$ olmak üzere, $2^{\sum_{x \in E} |f_A(x)|}$ sayısına $\tilde{P}(F_A)$ kümesinin kardinalitesi denir ve $|\tilde{P}(F_A)|$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Burada, $|f_A(x)|$ sayısı $f_A(x)$ 'in kardinalitesidir.

Örnek 3.1. $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ evrensel kümesini, $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ parametreler kümesini, $A = \{x_1, x_2\} \subseteq E$ ve $F_A = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kümesini göz önüne alalım. O halde

$$F_{A_1} = \{(x_1, \{u_1\})\}$$

$$F_{A_2} = \{(x_1, \{u_2\})\}$$

$$F_{A_3} = \{(x_1, \{u_1, u_2\})\}$$

$$F_{A_4} = \{(x_2, \{u_2\})\}$$

$$F_{A_5} = \{(x_2, \{u_3\})\}$$

$$F_{A_6} = \{(x_2, \{u_2, u_3\})\}$$

$$F_{A_7} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2\})\}$$

$$F_{A_8} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_3\})\}$$

$$F_{A_9} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$$

$$F_{A_{10}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2\})\}$$

$$F_{A_{11}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_3\})\}$$

$$F_{A_{12}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$$

$$F_{A_{13}} = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_2\})\}$$

$$F_{A_{14}} = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_3\})\}$$

$$F_{A_{15}} = F_A$$

$$F_{A_{16}} = F_\phi$$

esnek kümeleri F_A esnek kümesinin tüm esnek alt kümeleridir.

Ayrıca $|\tilde{P}(F_A)| = 2^4 = 16$ biçimindedir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 3.3. $F_A \in S(U)$ olsun. O halde aşağıdaki koşulları sağlayan F_A esnek kümesinin esnek alt kümelerinin bir $\tilde{\tau}$ koleksiyonuna F_A üzerinde bir esnek topoloji denir (Çağman ve ark., 2011).

- i. $F_\phi, F_A \in \tilde{\tau}$
- ii. $\{F_{A_i} \cong F_A : i \in I\} \subseteq \tilde{\tau} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_{A_i} \in \tilde{\tau}$
- iii. $\{F_{A_i} \cong F_A : 1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \tilde{\tau} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n F_{A_i} \in \tilde{\tau}$

Burada $(F_A, \tilde{\tau})$ sıralı ikilisi bir esnek topolojik uzay olarak adlandırılır (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 3.2. Örnek 3.1’de verilen F_A esnek kümesinin esnek alt kümelerini göz önüne alalım. O halde $\tilde{\tau}_1 = \{F_\phi, F_A\}$, $\tilde{\tau}_2 = \tilde{P}(F_A)$ ve $\tilde{\tau}_3 = \{F_\phi, F_A, F_{A_2}, F_{A_{11}}, F_{A_{13}}\}$ koleksiyonları F_A esnek kümesi üzerinde esnek topolojilerdir (Çağman ve ark., 2011).

$\{F_\phi, F_A\}$ ve $\tilde{P}(F_A)$ koleksiyonları sırasıyla F_A esnek kümesi üzerinde ayrık olmayan esnek topoloji ve ayrık esnek topoloji olarak adlandırılır (Enginoğlu ve ark., 2015).

Tanım 3.4. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. O halde $\tilde{\tau}$ ’nın her elemanına bir esnek açık küme ya da kısaca $\tilde{\tau}$ ’da esnek açık denir (Çağman ve ark., 2011).

Açıktır ki F_ϕ ve F_A esnek kümeleri $\tilde{\tau}$ ’da esnek açıktır (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 3.5. $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzaylar olsun. O halde

- i. Eğer $\tilde{\tau}_2 \supseteq \tilde{\tau}_1$ ise $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_1$ ’den esnek incedir denir.
- ii. Eğer $\tilde{\tau}_2 \supset \tilde{\tau}_1$ ise $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_1$ ’den kesin olarak esnek incedir denir.
- iii. Eğer ya $\tilde{\tau}_2 \supseteq \tilde{\tau}_1$ ya da $\tilde{\tau}_2 \subseteq \tilde{\tau}_1$ ise $\tilde{\tau}_1$ ile $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojileri karşılaştırılabilir denir (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 3.3. Örnek 3.2’de verilen F_A esnek kümesi üzerindeki esnek topolojileri göz önüne alalım. O halde $\tilde{\tau}_2$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_1$ ve $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojilerinden esnek incedir ve $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}_1$ esnek topolojisinden esnek incedir. Üstelik, $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ ve $\tilde{\tau}_3$ karşılaştırılabilir esnek topolojilerdir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 3.6. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\mathfrak{B}} \subseteq \tilde{\tau}$ olsun. Eğer $\tilde{\tau}$ ’nın her elemanı $\tilde{\mathfrak{B}}$ ’nin elemanlarının esnek birleşimi olarak yazılabilirse $\tilde{\mathfrak{B}}$ ’ye, $\tilde{\tau}$ esnek topolojisinin bir esnek tabanı denir (Çağman ve ark., 2011).

Tanım 3.7. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\tau}$ ’nın bir esnek tabanı olsun. $\tilde{\mathfrak{B}}$ ’nin her elemanına esnek taban elemanı denir (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 3.4. Örnek 3.1 ve Örnek 3.2’yi göz önüne alalım. Burada $\tilde{\mathfrak{B}} = \{F_\phi, F_{A_1}, F_{A_2}, F_{A_4}, F_{A_5}\}$ koleksiyonu $\tilde{\tau}_2$ için bir esnek tabandır (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 3.1. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\tau}$ için bir esnek taban olsun. O halde $\tilde{\tau}$, $\tilde{\mathfrak{B}}$ ’nin elemanlarının tüm esnek birleşimlerinin koleksiyonuna eşittir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. Esnek taban tanımından açıktır.

Tanım 3.8. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \cong F_A$ olmak üzere

$$\{F_{A_i} \tilde{\cap} F_B : F_{A_i} \in \tilde{\tau}, i \in I\}$$

koleksiyonuna F_B üzerinde bir esnek alt uzay topolojisi denir ve $\tilde{\tau}_{F_B}$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Ayrıca $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ sıralı ikilisi $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek topolojik alt uzayı olarak adlandırılır (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 3.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. O halde F_B üzerinde bir esnek alt uzay topolojisi bir esnek topolojidir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $\tilde{\tau}_{F_B}, F_B$ üzerinde bir esnek alt uzay topolojisi olsun.

- i. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olduğundan $F_\phi, F_A \in \tilde{\tau}$ dir. $F_B \subseteq F_A$ ve esnek alt uzay topoloji tanımından, $F_\phi \cap F_B = F_\phi$ ve $F_A \cap F_B = F_B$ olur. O halde $F_\phi, F_B \in \tilde{\tau}_{F_B}$ elde edilir.
- ii. $\tilde{\tau} = \{F_{A_i} : F_{A_i} \subseteq F_A, i \in I\}$ sonlu esnek kesişimler altında kapalı olduğu için,

$$\bigcap_{i=1}^n (F_{A_i} \cap F_B) = \left(\bigcap_{i=1}^n F_{A_i} \right) \cap F_B$$

elde edilir. O halde $\tilde{\tau}_B$ sonlu esnek kesişimler altında kapalıdır.

- iii. $\tilde{\tau} = \{F_{A_i} : F_{A_i} \subseteq F_A, i \in I\}$ keyfi esnek birleşimler altında kapalı olduğu için,

$$\bigcup_{i \in I} (F_{A_i} \cap F_B) = \left(\bigcup_{i \in I} F_{A_i} \right) \cap F_B$$

elde edilir. O halde $\tilde{\tau}_B$ keyfi esnek birleşimler altında kapalıdır.

Sonuç olarak $\tilde{\tau}_{F_B}, F_B$ üzerinde bir esnek topolojidir.

Örnek 3.5. Örnek 3.2’de verilen F_A üzerindeki $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojisini ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $F_B = F_{A_9} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kümesi göz önüne alalım.

O halde $F_\phi \cap F_{A_9} = F_\phi$, $F_A \cap F_{A_9} = F_{A_9}$, $F_{A_2} \cap F_{A_9} = F_\phi$, $F_{A_{11}} \cap F_{A_9} = F_{A_5}$ ve $F_{A_{13}} \cap F_{A_9} = F_{A_7}$ olduğu için F_B esnek kümesi üzerindeki esnek alt uzay topolojisi $\tilde{\tau}_{F_B} = \{F_\phi, F_{A_5}, F_{A_7}, F_{A_9}\}$ biçimindedir. Dolayısıyla $(F_{A_9}, \tilde{\tau}_{F_{A_9}})$, $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayının bir esnek topolojik alt uzayıdır (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 3.3. $(F_A, \tilde{\tau})$ ve $(F_A, \tilde{\tau}')$ esnek topolojik uzay ve $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{B}'$ sırasıyla $\tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau}'$

esnek topolojileri için esnek tabanlar olsun. Eğer $\tilde{\mathfrak{B}}' \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}$ ise $\tilde{\tau}$, $\tilde{\tau}'$ esnek topolojisinden esnek incedir (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ ve $(F_A, \tilde{\tau}')$ esnek topolojik uzay, $\tilde{\mathfrak{B}}$ ve $\tilde{\mathfrak{B}}'$ sırasıyla $\tilde{\tau}$ ve $\tilde{\tau}'$ esnek topolojileri için esnek tabanlar ve $\tilde{\mathfrak{B}}' \subseteq \tilde{\mathfrak{B}}$ olsun. O halde her $F_B \in \tilde{\tau}'$ ve $F_C \in \tilde{\mathfrak{B}}'$ için

$$F_B = \bigcup_{F_C \in \tilde{\mathfrak{B}}'} F_C = \bigcup_{F_C \in \tilde{\mathfrak{B}}} F_C$$

biçimindedir. Dolayısıyla $F_B \in \tilde{\tau}$ elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{\tau}' \subseteq \tilde{\tau}$ olduğundan $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi $\tilde{\tau}'$ esnek topolojisinden esnek incedir.

Teorem 3.4. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi için bir esnek taban ise

$$\tilde{\mathfrak{B}}_{F_B} = \{F_{A_i} \tilde{\cap} F_B : F_{A_i} \in \tilde{\mathfrak{B}}, i \in I\}$$

koleksiyonu $\tilde{\tau}_{F_B}$ için bir esnek tabandır (Çağman ve ark., 2011).

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\tau}$ esnek topolojisi için bir esnek taban olsun. Esnek alt uzay topoloji tanımından $F_C \in \tilde{\tau}_{F_B}$ ve $F_D \in \tilde{\tau}$ olmak üzere $F_C = F_D \tilde{\cap} F_B$ biçimindedir. $F_D \in \tilde{\tau}$ olduğundan $F_D = \bigcup_{F_{A_i} \in \tilde{\mathfrak{B}}} F_{A_i}$ biçiminde yazılabilir. Buradan,

$$F_C = F_D \tilde{\cap} F_B = \left(\bigcup_{F_{A_i} \in \tilde{\mathfrak{B}}} F_{A_i} \right) \tilde{\cap} F_B = \bigcup_{F_{A_i} \in \tilde{\mathfrak{B}}} (F_{A_i} \tilde{\cap} F_B)$$

elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{\mathfrak{B}}_{F_B}$, $\tilde{\tau}_{F_B}$ için bir esnek tabandır.

Yorum 3.1. Çağman ve ark. (2011) makalesinde verilen Teorem 5'deki

$$“F_C \in \tilde{\tau}_{F_B} \Rightarrow F_C \in \tilde{\tau}”$$

koşulunun sağlanmadığı görülür. Bu nedenle teorem aşağıdaki gibi güncellendi.

Teorem 3.5. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $(F_A, \tilde{\tau}_{F_B})$ bu esnek topolojik uzayın bir esnek topolojik alt uzayı olsun. Eğer $F_C, \tilde{\tau}_{F_B}$ de esnek açık ise $F_C \subseteq F_D$ olacak

biçimde $\exists F_D \in \tilde{\tau}$ vardır (Enginoğlu ve ark., 2015).

İspat. $F_C \in \tilde{\tau}_{F_B}$ olsun. Tanım 3.8'den $F_D \in \tilde{\tau}$ olmak üzere $F_C = F_D \tilde{\cap} F_B$ biçiminde yazılır. Bu durumda her $F_C \in \tilde{\tau}_{F_B}$ için $F_C \subseteq F_D$ olacak biçimde $\exists F_D \in \tilde{\tau}$ vardır.

Yorum 3.2. Çağman ve ark. (2011) makalesinde verilen Teorem 6 (i.)'deki " $F_{\tilde{E}}$ evrensel esnek kümesi ve $F_A^{\tilde{C}}$ esnek kapalı kümelerdir." önermesinin aynı makalede verilen Tanım 13'e göre sağlanmadığı görülür. Bunun yanı sıra, $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayında bir esnek kümenin F_A 'ya göre esnek tümleyeni $F_{\tilde{E}}$ evrensel esnek kümesine göre esnek tümleyenden daha yararlı ve anlamlıdır. Bu nedenle esnek kapalı küme tanımı aşağıdaki gibi güncellendi.

Tanım 3.9. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. Eğer $F_A \tilde{\setminus} F_B$ esnek kümesi $\tilde{\tau}$ da esnek açık ise F_B esnek kümesine bir esnek kapalı küme ya da kısaca $\tilde{\tau}$ 'ya göre esnek kapalı denir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Teorem 3.6. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. O halde aşağıdaki koşullar sağlanır (Enginoğlu ve ark., 2015).

- i. F_{ϕ} ve F_A esnek kapalı kümelerdir.
- ii. Esnek kapalı kümelerin keyfi esnek arakesitleri esnek kapalıdır.
- iii. Esnek kapalı kümelerin sonlu esnek birleşimleri esnek kapalıdır.

İspat.

- i. Esnek kapalı küme tanımından, $F_A \tilde{\setminus} F_A = F_{\phi}$ ve $F_A \tilde{\setminus} F_{\phi} = F_A$ $\tilde{\tau}$ 'da esnek açıktır. O halde F_A ve F_{ϕ} esnek kapalıdır.
- ii. $\{F_{A_i} : F_A \tilde{\setminus} F_{A_i} \in \tilde{\tau}, i \in I\}$ esnek kapalı kümelerin bir koleksiyonu ise

$$F_A \tilde{\setminus} \left(\bigcap_{i \in I} F_{A_i} \right) = \bigcup_{i \in I} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_i})$$

esnek açıktır. Bu nedenle $\bigcap_{i \in I} F_{A_i}$ esnek kapalıdır.

- iii. Benzer olarak, eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için F_{A_i} esnek kapalı ise

$$F_A \tilde{\setminus} \left(\bigcup_{i=1}^n F_{A_i} \right) = \bigcap_{i=1}^n (F_A \tilde{\setminus} F_{A_i})$$

esnek açıktır. Bu nedenle $\bigcup_{i=1}^n F_{A_i}$ esnek kapalıdır.

Yorum 3.3. Çağman ve ark. (2011) makalesinde verilen Teorem 12-17 ve aynı makaledeki bazı tanımların birtakım uyumsuzluklara sahip olduğu görüldü. Bu zorlukların üstesinden gelmek için yukarıda bahsedilen teoremler esnek eleman (Nazmul ve Samanta, 2013) yoluyla güncellendi.

Tanım 3.10. $F_A \in S(U)$ ve $F_B \cong F_A$ olsun. Eğer $f_B(x)$ sadece bir $x \in B$ için bir tek nokta kümesi ve $y \in E \setminus \{x\}$ için $f_B(y) = \emptyset$ ise F_B esnek kümesine F_A 'nın esnek elemanı denir ve $F_B \tilde{=} F_A$ ya da kısaca $\alpha \tilde{=} F_A$ ile gösterilir (Nazmul ve Samanta, 2013).

Bu çalışmada, esnek eleman kavramı esnek tek nokta kümesi olarak da adlandırıldı ve $(x, f_B(x)) \tilde{=} F_A$ biçiminde de gösterildi.

Örnek 3.6. Örnek 3.1'de verilen F_A esnek kümesinin esnek alt kümelerini göz önüne alalım. O halde F_{A_1} , F_{A_2} , F_{A_4} ve F_{A_5} esnek kümeleri F_A 'nın esnek tek nokta kümeleridir. Kısaca bu esnek kümeler sırasıyla α_1 , α_2 , α_4 ve α_5 ile gösterilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Yorum 3.4. $F_A \cong F_B$ ifadesi F_A esnek kümesinin her esnek elemanının F_B esnek kümesinin de bir esnek elemanı olmasını gerektirir. Diğer bir ifadeyle, her α için

$$F_A \cong F_B \Leftrightarrow (\alpha \tilde{=} F_A \Rightarrow \alpha \tilde{=} F_B)$$

biçimindedir.

Yorum 3.5. $F_A, F_B \in S(U)$ olmak üzere, esnek küme işlemleri

$$F_A \tilde{\cup} F_B = \{\alpha : \alpha \tilde{=} F_A \vee \alpha \tilde{=} F_B\}$$

$$F_A \tilde{\cap} F_B = \{\alpha : \alpha \tilde{=} F_A \wedge \alpha \tilde{=} F_B\}$$

$$F_A \tilde{\setminus} F_B = \{\alpha : \alpha \tilde{=} F_A \wedge \alpha \not\tilde{=} F_B\}$$

$$F_A^c = \{\alpha : \alpha \not\tilde{=} F_A \wedge \alpha \tilde{=} F_E\}$$

biçiminde esnek eleman yoluyla da tanımlanabilir.

Teorem 3.7. $F_A, F_B \in S(U)$ ve $F_B \cong F_A$ olsun. O halde

$$\alpha \tilde{\in} F_B \Leftrightarrow \alpha \tilde{\notin} (F_A \setminus F_B)$$

önermesi sağlanır (Nazmul ve Samanta, 2013).

İspat. $F_B \subseteq F_A$ ve $\alpha = (x, f_C(x))$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\in} F_B &\Leftrightarrow \alpha \tilde{\in} F_A \wedge \alpha \tilde{\in} F_B \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E \text{ için } f_C(x) \subseteq f_A(x) \wedge \forall x \in E \text{ için } f_C(x) \subseteq f_B(x) \\ &\Leftrightarrow \forall x \in E \text{ için } f_C(x) \subseteq f_A(x) \wedge \exists x \in E \text{ için } f_C(x) \not\subseteq f_A(x) \setminus f_B(x) \\ &\Leftrightarrow \alpha \tilde{\notin} F_A \setminus F_B \end{aligned}$$

biçimindedir.

Teorem 3.8. $F_A, F_B \in S(U)$ olsun. O halde

$$(F_A = F_B) \Leftrightarrow (\alpha \tilde{\in} F_A \Leftrightarrow \alpha \tilde{\in} F_B)$$

önermesi sağlanır (Enginoğlu ve ark., 2015).

İspat. Açıktır.

Teorem 3.9. $F_A, F_B, F_C, F_D \in S(U)$ olsun. O halde

- i. $(F_A \subseteq F_B \wedge F_C \subseteq F_D) \Rightarrow (F_A \cap F_C \subseteq F_B \cap F_D)$
- ii. $(F_A \subseteq F_B \wedge F_C \subseteq F_D) \Rightarrow (F_A \cup F_C \subseteq F_B \cup F_D)$

önergeleri sağlanır (Enginoğlu ve ark., 2015).

İspat.

- i. $F_A \subseteq F_B \wedge F_C \subseteq F_D$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\in} F_A \cap F_C &\Rightarrow \alpha \tilde{\in} F_A \wedge \alpha \tilde{\in} F_C \\ &\Rightarrow \alpha \tilde{\in} F_A \subseteq F_B \wedge \alpha \tilde{\in} F_C \subseteq F_D \\ &\Rightarrow \alpha \tilde{\in} F_B \cap F_D \end{aligned}$$

biçimindedir. Buradan, $F_A \cap F_C \subseteq F_B \cap F_D$ elde edilir.

- ii. İspatı benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.10. $F_A, F_B, F_C \in S(U)$ ve $F_B, F_C \cong F_A$ olsun. O halde

$$F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi \Leftrightarrow F_B \cong (F_A \tilde{\setminus} F_C)$$

önermesi sağlanır.

İspat.

$(\Rightarrow)$: $F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi$ olsun. O halde

$$\alpha \tilde{\in} F_B \Rightarrow \alpha \not\tilde{\in} F_C \Rightarrow \alpha \tilde{\in} (F_A \tilde{\setminus} F_C) \Rightarrow F_B \cong (F_A \tilde{\setminus} F_C)$$

biçimindedir.

$(\Leftarrow)$: Kabul edelim ki $F_B \cong (F_A \tilde{\setminus} F_C)$ iken $F_B \tilde{\cap} F_C \neq F_\phi$ olsun. O halde her $\alpha \tilde{\in} F_B \tilde{\cap} F_C$ için $\alpha \tilde{\in} F_B$ ve $\alpha \tilde{\in} F_C$ olur. $F_B \cong (F_A \tilde{\setminus} F_C)$ olduğundan $\alpha \tilde{\in} (F_A \tilde{\setminus} F_C)$ biçimindedir. Bu durumda, $\alpha \tilde{\in} F_C$ ve $\alpha \tilde{\in} (F_A \tilde{\setminus} F_C)$ olması bir çelişkidir. O halde kabul yanlıştır. Dolayısıyla, $F_B \cong (F_A \tilde{\setminus} F_C)$ iken $F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi$ biçimindedir.

Sonuç 3.1. Teorem 3.10'da $F_A = F_{\tilde{E}}$ olarak alınırsa teorem

$$F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi \Leftrightarrow F_B \cong F_C^c$$

biçiminde ifade edilir.

Tanım 3.11. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay, $F_B \cong F_A$ ve $\alpha \tilde{\in} F_B$ olsun. Eğer $\alpha \tilde{\in} F_C$ ve $F_C \cong F_B$ olacak biçimde $\exists F_C \in \tilde{\tau}$ varsa α 'ya, F_B esnek kümesinin bir esnek iç noktası denir. F_B esnek kümesinin tüm esnek iç noktalarının esnek birleşimine F_B esnek kümesinin esnek içi denir ve F_B° ile gösterilir (Nazmul ve Samanta, 2013).

Ayrıca F_B esnek kümesinin esnek içi, F_B 'nin tüm esnek açık alt kümelerinin esnek birleşimidir. Diğer bir ifadeyle, F_B° esnek kümesi F_B tarafından esnek kapsanan en büyük esnek açıktır (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 3.7. Örnek 3.2'de verilen $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojisini ve $F_B \cong F_A$ olmak üzere $F_B = F_{A_{12}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kümesini göz önüne alalım. O halde F_B esnek kümenin esnek içi, $F_B^\circ = F_\phi \cup F_{A_2} \cup F_{A_{11}} = F_{A_{11}}$ biçimindedir (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 3.11. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \cong F_A$ olsun. F_B esnek açıktır

gerek ve yeter koşul $F_B = F_B^\circ$ olmasıdır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

($\Rightarrow$): F_B bir esnek açık küme olsun. O halde F_B tarafından esnek kapsanan en büyük esnek açık küme F_B 'ye eşittir. Bu nedenle $F_B = F_B^\circ$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $F_B = F_B^\circ$ olsun. O halde F_B° esnek kümesi esnek açık olduğundan $F_B = F_B^\circ$ eşitliğinden F_B esnek açıktır.

Teorem 3.12. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B, F_C \subseteq F_A$ olsun. O halde

- i. $(F_B^\circ)^\circ = F_B^\circ$
- ii. $F_B \subseteq F_C \Rightarrow F_B^\circ \subseteq F_C^\circ$
- iii. $F_B^\circ \cap F_C^\circ = (F_B \cap F_C)^\circ$
- iv. $F_B^\circ \cup F_C^\circ \subseteq (F_B \cup F_C)^\circ$

önergeleri sağlanır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

- i. $F_B^\circ = F_D$ olsun. Bu durumda, $F_D \in \tilde{\tau}$ gerek ve yeter koşul $F_D = F_D^\circ$ olmasıdır. Dolayısıyla $(F_B^\circ)^\circ = F_B^\circ$ elde edilir.
- ii. $F_B \subseteq F_C$ olsun. Esnek iç tanımından, $F_B^\circ \subseteq F_B$ ve $F_C^\circ \subseteq F_C$ biçimindedir. Ayrıca F_C° esnek kümesi F_C tarafından esnek kapsanan en büyük esnek açık kümedir. O halde $F_B \subseteq F_C \Rightarrow F_B^\circ \subseteq F_C^\circ$ elde edilir.
- iii. Esnek iç tanımından, $F_B^\circ \subseteq F_B$ ve $F_C^\circ \subseteq F_C$ biçimindedir. Buradan, $F_B^\circ \cap F_C^\circ \subseteq F_B \cap F_C$ elde edilir. $(F_B \cap F_C)^\circ$ esnek kümesi $F_B \cap F_C$ esnek kümesi tarafından esnek kapsanan en büyük esnek açık kümedir. Bu nedenle $F_B^\circ \cap F_C^\circ \subseteq (F_B \cap F_C)^\circ$ olur. Tersine, $F_B \cap F_C \subseteq F_B$ ve $F_B \cap F_C \subseteq F_C$ biçimindedir. O halde $(F_B \cap F_C)^\circ \subseteq F_B^\circ$ ve $(F_B \cap F_C)^\circ \subseteq F_C^\circ$ elde edilir. Bu nedenle, $(F_B \cap F_C)^\circ \subseteq F_B^\circ \cap F_C^\circ$ olur. Sonuç olarak $F_B^\circ \cap F_C^\circ = (F_B \cap F_C)^\circ$ elde edilir.
- iv. Esnek iç tanımından, $F_B^\circ \subseteq F_B$ ve $F_C^\circ \subseteq F_C$ olur. O halde $F_B^\circ \cup F_C^\circ \subseteq F_B \cup F_C$ elde edilir. $(F_B \cup F_C)^\circ$ esnek kümesi $F_B \cup F_C$ esnek kümesini esnek kapsayan en büyük esnek açık kümedir. Dolayısıyla $F_B^\circ \cup F_C^\circ \subseteq (F_B \cup F_C)^\circ$ elde edilir.

Tanım 3.12. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. O halde F_B 'nin tüm esnek kapalı üst kümelerinin esnek kesişimine F_B 'nin esnek kapanışı denir ve $\overline{F_B}$ ile gösterilir (Çağman ve ark., 2011).

Ayrıca $\overline{F}_B$ esnek kümesi F_B esnek kümesini esnek kapsayan en küçük esnek kapalı kümedir (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 3.8. Örnek 3.2’de verilen $\tilde{\tau}_3$ esnek topolojisini göz önüne alalım. Burada $F_B = F_{A_9} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kümesi için $F_{A_9} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ ve $F_A = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kapalı üst kümelerdir. O halde $\overline{F}_B = F_{A_9} \tilde{\cap} F_A = F_{A_9}$ biçimindedir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Teorem 3.13. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. F_B esnek kapalı kümedir gerek ve yeter koşul $F_B = \overline{F}_B$ olmasıdır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

($\Rightarrow$): F_B bir esnek kapalı küme olsun. O halde F_B ’yi esnek kapsayan en küçük esnek kapalı küme F_B ’ye eşittir. Bu nedenle $F_B = \overline{F}_B$ elde edilir.

($\Leftarrow$): $F_B = \overline{F}_B$ olsun. O halde $\overline{F}_B$ esnek kümesi esnek kapalı olduğundan $F_B = \overline{F}_B$ eşitliğinden F_B esnek kapalıdır.

Teorem 3.14. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. O halde $F_B^\circ \subseteq F_B \subseteq \overline{F}_B$ esnek kapsama sağlanır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

$F_B^\circ = \bigcup \{F_{B_i} : F_{B_i} \in \tilde{\tau}, F_{B_i} \subseteq F_B, i \in I\}$ olduğundan her $x \in E$ için $f_{B_i}(x) \subseteq f_B(x)$ ve $\bigcup_{i \in I} f_{B_i}(x) \subseteq f_B(x)$ biçimindedir. Bu nedenle $F_B^\circ \subseteq F_B$ elde edilir.

$\overline{F}_B = \bigcap \{F_{A_i} : F_A \setminus F_{A_i} \in \tilde{\tau}, F_B \subseteq F_{A_i}, i \in J\}$ olduğundan her $x \in E$ için $f_B(x) \subseteq f_{A_i}(x)$ ve $f_B(x) \subseteq \bigcap_{i \in J} f_{A_i}(x)$ biçimindedir. Bu nedenle $F_B \subseteq \overline{F}_B$ elde edilir.

Dolayısıyla $F_B^\circ \subseteq F_B \subseteq \overline{F}_B$ elde edilir.

Teorem 3.15. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B, F_C \subseteq F_A$ olsun. O halde

- i. $(\overline{\overline{F}_B}) = \overline{F}_B$
- ii. $(F_A \setminus \overline{F}_B) = (F_A \setminus F_B)^\circ$
- iii. $F_B \subseteq F_C \Rightarrow \overline{F}_B \subseteq \overline{F}_C$
- iv. $\overline{(F_B \tilde{\cap} F_C)} \subseteq \overline{F}_B \tilde{\cap} \overline{F}_C$
- v. $\overline{F}_B \tilde{\cup} \overline{F}_C = \overline{(F_B \tilde{\cup} F_C)}$

önergeleri sağlanır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

- i. $\overline{F}_B = F_D$ olsun. Bu durumda F_D esnek kapalı kümedir gerek ve yeter koşul $F_D = \overline{F}_D$ olmasıdır. Dolayısıyla $(\overline{\overline{F}_B}) = \overline{F}_B$ elde edilir (Çağman ve ark., 2011).
- ii. Esnek kapanış ve esnek iç tanımlarından,

$$(F_A \setminus \overline{F}_B) = F_A \setminus \left(\bigcap_{\substack{F_{A_i} \cong F_B \\ F_A \setminus F_{A_i} \in \tilde{\tau}}} F_{A_i} \right) = \bigcup_{\substack{F_A \setminus F_B \cong F_A \setminus F_{A_i} \\ F_A \setminus F_{A_i} \in \tilde{\tau}}} (F_A \setminus F_{A_i}) = (F_A \setminus F_B)^\circ$$

elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

- iii. $F_B \cong F_C$ olsun. Esnek kapanış tanımından, $F_B \cong \overline{F}_B$ ve $F_C \cong \overline{F}_C$ olur. Diğer bir ifadeyle, $F_B \cong \overline{F}_B$ ve $F_B \cong \overline{F}_C$ biçimindedir. $\overline{F}_B$ esnek kümesi F_B 'yi esnek kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğu için $F_B \cong \overline{F}_B \cong \overline{F}_C$ esnek kapsaması sağlanır. Bu nedenle $\overline{F}_B \cong \overline{F}_C$ elde edilir (Çağman ve ark., 2011).
- iv. Esnek kapanış tanımından, $F_B \cong \overline{F}_B$ ve $F_C \cong \overline{F}_C$ olur. O halde $F_B \tilde{\cap} F_C \cong \overline{F}_B \tilde{\cap} \overline{F}_C$ elde edilir. $(F_B \tilde{\cap} F_C)$ esnek kümesi $F_B \tilde{\cap} F_C$ esnek kümesini esnek kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğu için $\overline{(F_B \tilde{\cap} F_C)} \cong \overline{F}_B \tilde{\cap} \overline{F}_C$ elde edilir (Çağman ve ark., 2011).
- v. Esnek kapanış tanımından, $F_B \cong \overline{F}_B$ ve $F_C \cong \overline{F}_C$ olur. O halde $F_B \tilde{\cup} F_C \cong \overline{F}_B \tilde{\cup} \overline{F}_C$ elde edilir. $(F_B \tilde{\cup} F_C)$ esnek kümesi $F_B \tilde{\cup} F_C$ esnek kümesini esnek kapsayan en küçük esnek kapalı küme olduğu için $\overline{(F_B \tilde{\cup} F_C)} \cong \overline{F}_B \tilde{\cup} \overline{F}_C$ elde edilir. Tersine, $F_C \cong \overline{F}_C \cong \overline{(F_B \tilde{\cup} F_C)}$ ve $F_B \cong \overline{F}_B \cong \overline{(F_B \tilde{\cup} F_C)}$ olur. Bu nedenle, $\overline{F}_B \tilde{\cup} \overline{F}_C \cong \overline{(F_B \tilde{\cup} F_C)}$ biçimindedir. Dolayısıyla $\overline{F}_B \tilde{\cup} \overline{F}_C = \overline{(F_B \tilde{\cup} F_C)}$ elde edilir (Çağman ve ark., 2011).

Teorem 3.16. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B, F_C \cong F_A$ olsun. O halde

- i. $\alpha \in \overline{F}_B$ gerek ve yeter koşul $\alpha \in F_C$ olacak biçimde $\forall F_C \in \tilde{\tau}, F_B \tilde{\cap} F_C \neq F_\emptyset$.
- ii. $\tilde{\mathfrak{B}}, \tilde{\tau}$ için bir esnek taban olsun. O halde $\alpha \in \overline{F}_B$ gerek ve yeter koşul $\alpha \in F_D$ olacak biçimde $\forall F_D \in \tilde{\mathfrak{B}}, F_B \tilde{\cap} F_D \neq F_\emptyset$ biçimindedir (Çağman ve ark. 2011).

İspat.

- i. Mantıksal olarak; hipotez “ $\alpha \notin \overline{F}_B$ gerek ve yeter koşul $\alpha \in F_C$ ve $F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C$ esnek açık kümesi vardır.” ifadesine denktir.
 $(\Rightarrow)$: Eğer $\alpha \notin \overline{F}_B$ ise $\alpha \in (F_A \setminus \overline{F}_B)$ olur. Teorem 3.15 (ii.)’den $\alpha \in (F_A \setminus F_B)^\circ$ elde edilir. Esnek iç tanımından, $\alpha \in F_C \subseteq (F_A \setminus F_B)$ olacak biçimde $\exists F_C \in \tilde{\tau}$ vardır. Dolayısıyla $\alpha \in F_C$ ve $F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C \in \tilde{\tau}$ vardır.
 $(\Leftarrow)$: Eğer $\alpha \in F_C$ ve $F_B \tilde{\cap} F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C$ esnek açık kümesi var ise $F_B \subseteq (F_A \setminus F_C)$ olacak biçimde $F_A \setminus F_C$ bir esnek kapalı kümedir. Esnek kapanış tanımından, $\overline{F}_B \subseteq (F_A \setminus F_C)$ olur. Dolayısıyla, $\alpha \notin \overline{F}_B$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).
- ii. $(\Rightarrow)$: $\alpha \in F_D$ olacak biçimde $\alpha \in \overline{F}_B$ ve $F_D \in \tilde{\mathfrak{B}}$ olsun. Esnek taban tanımından ve Teorem 3.16 (i.)’den $\alpha \in F_D$ olacak biçimde $\forall F_D \in \tilde{\mathfrak{B}}$, $F_B \tilde{\cap} F_D \neq F_\phi$ elde edilir.
 $(\Leftarrow)$: $\alpha \in F_D$ olacak biçimde $\forall F_D \in \tilde{\mathfrak{B}}$, $F_B \tilde{\cap} F_D \neq F_\phi$ ise bu nedenle $\alpha \in F_C$ olacak biçimde $\forall F_C \in \tilde{\tau}$, $F_B \tilde{\cap} F_C \neq F_\phi$ olur. Dolayısıyla $\alpha \in \overline{F}_B$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Örnek 3.9. Örnek 3.2’de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayını ve $F_{A_8} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_3\})\}$ esnek kümesini göz önüne alalım. Burada $\alpha_1 = \{(x_1, \{u_1\})\}$, $\alpha_2 = \{(x_1, \{u_2\})\}$, $\alpha_4 = \{(x_2, \{u_2\})\}$ ve $\alpha_5 = \{(x_2, \{u_3\})\}$ biçimindedir.

O halde Teorem 3.16 gereğince,

$F_{A_{13}}, F_A \in \tilde{\tau}_3$ olmak üzere $\alpha_1 \in F_{A_{13}}$ için $F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_8} \neq F_\phi$ ve $\alpha_1 \in F_A$ için $F_A \tilde{\cap} F_{A_8} \neq F_\phi$ olduğundan $\alpha_1 \in \overline{F}_{A_8}$ elde edilir.

$F_{A_2} \in \tilde{\tau}_3$ olmak üzere $\alpha_2 \in F_{A_2}$ için $F_{A_2} \tilde{\cap} F_{A_8} = F_\phi$ olduğundan $\alpha_2 \notin \overline{F}_{A_8}$ elde edilir.

$F_{A_{13}}, F_A \in \tilde{\tau}_3$ olmak üzere $\alpha_4 \in F_{A_{13}}$ için $F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_8} \neq F_\phi$ ve $\alpha_4 \in F_A$ için $F_A \tilde{\cap} F_{A_8} \neq F_\phi$ olduğundan $\alpha_4 \in \overline{F}_{A_8}$ elde edilir.

$F_{A_{11}}, F_A \in \tilde{\tau}_3$ olmak üzere $\alpha_5 \in F_{A_{11}}$ için $F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_8} \neq F_\phi$ ve $\alpha_5 \in F_{A_{13}}$ için $F_A \tilde{\cap} F_{A_8} \neq F_\phi$ olduğundan $\alpha_5 \in \overline{F}_{A_8}$ elde edilir.

Ayrıca esnek kapanış tanımından, $\overline{F}_{A_8} = F_{A_9} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ olduğu görülür.

Tanım 3.13. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay $F_B \subseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$ olsun. Eğer $\alpha \in F_C \subseteq F_B$ olacak biçimde bir F_C esnek açık kümesi var ise F_B esnek kümesine α 'nın esnek komşuluğu denir. α 'nın tüm esnek komşuluklarının kümesine α 'nın esnek komşuluklarının ailesi denir ve $\tilde{\mathcal{N}}(\alpha)$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle,

$$\tilde{\mathcal{N}}(\alpha) = \{F_B : F_C \in \tilde{\tau} \wedge \alpha \in F_C \subseteq F_B\}$$

biçimindedir (Nazmul ve Samanta, 2013).

Tanım 3.14. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay $F_C \subseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$ olmak üzere

$$\{F_C \in \tilde{\tau} : \alpha \in F_C\}$$

kümesine α 'nın esnek açık komşuluklarının ailesi denir ve $\tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ ile gösterilir (Enginoğlu ve ark, 2015).

Örnek 3.10. Örnek 3.2'de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayını ve $\alpha_5 = (x_2, \{u_3\}) \in F_A$ esnek tek nokta kümesini göz önüne alalım. O halde $\tilde{\mathcal{N}}(\alpha) = \{F_A, F_{A_{11}}, F_{A_{12}}, F_{A_{14}}\}$ ve $\tilde{\mathcal{V}}(\alpha) = \{F_A, F_{A_{11}}\}$ biçimindedir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Sonuç 3.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olsun. F_B 'nin esnek açık olması için gerek ve yeter koşul $\forall \alpha \in F_B$ için $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ olmak üzere $F_C \subseteq F_B$ olacak biçimde bir F_C esnek kümesi olmasıdır.

Tanım 3.15. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay $F_B, F_C \subseteq F_A$ ve $\alpha \in F_A$ olsun. Eğer $\forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ için $F_C \cap (F_B \setminus \alpha) \neq F_\emptyset$ ise α 'ya, F_B esnek kümesinin bir esnek limit noktası denir (Nazmul ve Samanta, 2013).

Burada, F_B esnek kümesinin tüm esnek limit noktalarının esnek birleşimi F'_B ile gösterilir.

Örnek 3.11. Örnek 3.2'de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayını ve $F_{A_{13}}$ esnek kümesini göz önüne alalım. O halde

$$F_{A_{13}} \cap (F_{A_{13}} \setminus F_{A_1}) = F_{A_{13}} \cap F_{A_{10}} = F_{A_{10}} \neq F_\emptyset$$

$$F_A \cap (F_{A_{13}} \setminus F_{A_1}) = F_A \cap F_{A_{10}} = F_{A_{10}} \neq F_\emptyset$$

$$F_{A_2} \tilde{\cap} (F_{A_{13}} \tilde{\setminus} F_{A_2}) = F_{A_2} \tilde{\cap} F_{A_7} = F_\phi$$

$$F_{A_{13}} \tilde{\cap} (F_{A_{13}} \tilde{\setminus} F_{A_4}) = F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_3} = F_{A_3} \neq F_\phi$$

$$F_A \tilde{\cap} (F_{A_{13}} \tilde{\setminus} F_{A_4}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_3} = F_{A_3} \neq F_\phi$$

$$F_{A_{11}} \tilde{\cap} (F_{A_{13}} \tilde{\setminus} F_{A_5}) = F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_{13}} = F_{A_2} \neq F_\phi$$

$$F_A \tilde{\cap} (F_{A_{13}} \tilde{\setminus} F_{A_5}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_{13}} = F_{A_{13}} \neq F_\phi$$

olduğu için

$$F'_{A_{13}} = \bigcup^{\sim} \{F_{A_1}, F_{A_4}, F_{A_5}\} = F_{A_9}$$

elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Teorem 3.17. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \cong F_A$ olsun. O halde

$$F_B \tilde{\cup} F'_B = \overline{F}_B$$

eşitliği sağlanır (Çağman ve ark., 2011).

İspat. Eğer $\alpha \tilde{\in} F_B \tilde{\cup} F'_B$ ise $\alpha \tilde{\in} F_B \vee \alpha \tilde{\in} F'_B$ biçimindedir. Bu durumda, eğer $\alpha \tilde{\in} F_B$ ise $\alpha \tilde{\in} \overline{F}_B$ olur. Eğer $\alpha \tilde{\in} F'_B$ ise $\forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ için $F_C \tilde{\cap} (F_B \tilde{\setminus} \alpha) \neq F_\phi$ biçimindedir ve bu nedenle $\forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ için $F_C \tilde{\cap} F_B \neq F_\phi$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.16 (i.)'den $\alpha \tilde{\in} \overline{F}_B$ elde edilir. Tersine, $\alpha \tilde{\in} \overline{F}_B$ ise $\alpha \tilde{\in} F_B \vee \alpha \tilde{\notin} F_B$ biçimindedir. Bu durumda, $\alpha \tilde{\in} F_B$ ise $\alpha \tilde{\in} F_B \tilde{\cup} F'_B$ olduğu açıktır. Eğer $\alpha \tilde{\notin} F_B$ ise Teorem 3.16 (i.)'den ve Tanım 3.15'den $\forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ için $F_C \tilde{\cap} F_B = F_C \tilde{\cap} (F_B \tilde{\setminus} \alpha) \neq F_\phi$ olur. Bu nedenle, $\alpha \tilde{\in} F'_B$ olduğu için $\alpha \tilde{\in} F_B \tilde{\cup} F'_B$ elde edilir. Sonuç olarak $F_B \tilde{\cup} F'_B = \overline{F}_B$ eşitliği sağlanır (Enginoğlu ve ark., 2015).

Örnek 3.12. Örnek 3.2'de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayını ve $F_{A_{13}}$ esnek kümesini göz önüne alalım. Örnek 3.11'den $F'_{A_{13}} = F_{A_9} = \{(x_1, \{u_1\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ olduğu görülür. Ayrıca F_A esnek kümesi $F_{A_{13}}$ 'ün en küçük esnek kapalı üst kümesi

olduğundan $F_{A_{13}}$ esnek kümesinin esnek kapanışı $\overline{F}_{A_{13}} = F_A$ elde edilir. Teorem 3.17 gereğince $F_{A_{13}} \tilde{\cup} F'_{A_{13}} = \overline{F}_{A_{13}}$ biçimindedir.

Teorem 3.18. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \tilde{\subseteq} F_A$ olsun. O halde F_B esnek kapalıdır gerek ve yeter koşul $F'_B \tilde{\subseteq} F_B$ olmasıdır (Çağman ve ark., 2011).

İspat. F_B esnek kapalıdır $\Leftrightarrow F_B = \overline{F}_B \Leftrightarrow F_B = F_B \tilde{\cup} F'_B \Leftrightarrow F'_B \tilde{\subseteq} F_B$.

Teorem 3.19. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B, F_C \tilde{\subseteq} F_A$ olsun. O halde

- i. $F'_B \tilde{\subseteq} \overline{F}_B$
- ii. $F_B \tilde{\subseteq} F_C \Rightarrow F'_B \tilde{\subseteq} F'_C$
- iii. $(F_B \tilde{\cap} F_C)' \tilde{\subseteq} F'_B \tilde{\cap} F'_C$
- iv. $(F_B \tilde{\cup} F_C)' = F'_B \tilde{\cup} F'_C$

önergeleri sağlanır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

- i. Tanım 3.15 ve Teorem 3.16 (i.)'den

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\in} F'_B &\Rightarrow \forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha), F_C \tilde{\cap} (F_B \setminus \alpha) \neq F_\phi \\ &\Rightarrow \forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha), F_C \tilde{\cap} F_B \neq F_\phi \\ &\Rightarrow F'_B \tilde{\subseteq} \overline{F}_B \end{aligned}$$

biçimindedir (Enginoğlu ve ark., 2015).

- ii. $F_B \tilde{\subseteq} F_C$ olsun.

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{\in} F'_B &\Rightarrow \forall F_D \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha), F_D \tilde{\cap} (F_B \setminus \alpha) \neq F_\phi \\ &\Rightarrow \forall F_D \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha), F_D \tilde{\cap} (F_C \setminus \alpha) \neq F_\phi \\ &\Rightarrow \alpha \tilde{\in} F'_C \end{aligned}$$

O halde $F'_B \tilde{\subseteq} F'_C$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

- iii. $F_B \tilde{\cap} F_C \tilde{\subseteq} F_B$ ve $F_B \tilde{\cap} F_C \tilde{\subseteq} F_C$ olduğu için $(F_B \tilde{\cap} F_C)' \tilde{\subseteq} F'_B$ ve $(F_B \tilde{\cap} F_C)' \tilde{\subseteq} F'_C$ elde edilir. O halde $(F_B \tilde{\cap} F_C)' \tilde{\subseteq} F'_B \tilde{\cap} F'_C$ bulunur (Enginoğlu ve ark., 2015).
- iv. $F_B \tilde{\subseteq} F_B \tilde{\cup} F_C$ ve $F_C \tilde{\subseteq} F_B \tilde{\cup} F_C$ olduğu için $F'_B \tilde{\subseteq} (F_B \tilde{\cup} F_C)'$ ve

$F'_B \cong (F_B \cup F_C)'$ elde edilir. O halde $F'_B \cup F'_C \cong (F_B \cup F_C)'$ bulunur.

Tersine, $\forall F_D \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ için

$$\begin{aligned}
\alpha \in (F_B \cup F_C)' &\Leftrightarrow F_D \cap [(F_B \cup F_C) \setminus \alpha] \neq F_\phi \\
&\Leftrightarrow F_D \cap [(F_B \setminus \alpha) \cup (F_C \setminus \alpha)] \neq F_\phi \\
&\Leftrightarrow [F_D \cap (F_B \setminus \alpha)] \cup [F_D \cap (F_C \setminus \alpha)] \neq F_\phi \\
&\Leftrightarrow \alpha \in F'_B \vee \alpha \in F'_C \\
&\Leftrightarrow \alpha \in F'_B \cup F'_C
\end{aligned}$$

Bu nedenle $(F_B \cup F_C)' \cong F'_B \cup F'_C$ bulunur. Dolayısıyla $(F_B \cup F_C)' = F'_B \cup F'_C$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Tanım 3.16. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \cong F_A$ olsun. Eğer her $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ için $F_C \cap F_B \neq F_\phi$ ve $F_C \cap (F_A \setminus F_B) \neq F_\phi$ ise α 'ya F_B 'nin bir esnek sınır noktası denir. F_B 'nin tüm esnek sınır noktalarının esnek birleşimine F_B 'nin esnek sınırı denir ve F_B^b ile gösterilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Diğer bir ifadeyle, F_B 'nin esnek sınırı $F_B^b = \overline{F_B} \cap \overline{(F_A \setminus F_B)}$ biçiminde de ifade edilir (Çağman ve ark., 2011).

Örnek 3.13. Örnek 3.8'i göz önüne alalım. $F_B = F_{A_9}$ esnek kümesi için $\overline{F_B} = F_{A_9}$ ve $\overline{(F_A \setminus F_B)} = \overline{F_{A_2}} = F_A$ biçimdedir. O halde $F_B^b = \overline{F_B} \cap \overline{(F_A \setminus F_B)} = F_{A_9} \cap F_A = F_{A_9}$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Teorem 3.20. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \cong F_A$ olsun. O halde

- i. $F_B^b \cong \overline{F_B}$
- ii. $F_B^b = (F_A \setminus F_B)^b$
- iii. $F_B^b = \overline{F_B} \setminus F_B^\circ$

önergeleri sağlanır (Çağman ve ark., 2011).

İspat.

- i. Esnek sınır noktası tanımından,

$$\begin{aligned}
\alpha \in F_B^b &\Rightarrow \alpha \in \overline{F_B} \tilde{\cap} (\overline{F_A \tilde{\setminus} F_B}) \\
&\Rightarrow \alpha \in \overline{F_B} \wedge \alpha \in \overline{(F_A \tilde{\setminus} F_B)} \\
&\Rightarrow \alpha \in \overline{F_B}
\end{aligned}$$

O halde $F_B^b \subseteq \overline{F_B}$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

ii. Esnek sınır noktası tanımından,

$$\begin{aligned}
\alpha \in F_A^b &\Leftrightarrow \forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha), F_C \tilde{\cap} F_B \neq F_\phi \wedge F_C \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_B) \neq F_\phi \\
&\Leftrightarrow \forall F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha), F_C \tilde{\cap} [F_A \tilde{\setminus} (F_A \tilde{\setminus} F_B)] \neq F_\phi \wedge F_C \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_B) \neq F_\phi \\
&\Leftrightarrow \alpha \in (F_A \tilde{\setminus} F_B)^b
\end{aligned}$$

O halde $F_A^b = (F_A \tilde{\setminus} F_B)^b$ elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

iii. Esnek kapanış ve esnek iç tanımlarından,

$$\begin{aligned}
\overline{F_B} \tilde{\setminus} F_B^\circ &= \overline{F_B} \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_B^\circ) = \overline{F_B} \tilde{\cap} \left(F_A \tilde{\setminus} \left(\bigcup_{\substack{F_{B_i} \subseteq F_B \\ F_{B_i} \in \tilde{\tau}}} F_{B_i} \right) \right) \\
&= \overline{F_B} \tilde{\cap} \left(\bigcap_{\substack{F_A \tilde{\setminus} F_B \subseteq F_A \tilde{\setminus} F_{B_i} \\ F_{B_i} \in \tilde{\tau}}} (F_A \tilde{\setminus} F_{B_i}) \right) = \overline{F_B} \tilde{\cap} \overline{(F_A \tilde{\setminus} F_B)} \\
&= F_B^b
\end{aligned}$$

elde edilir (Enginoğlu ve ark., 2015).

Örnek 3.14. Örnek 3.2’de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayını ve $F_{A_{12}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ esnek kümesini göz önüne alalım. $F_{A_{12}}$ esnek kümesinin esnek içi,

$$F_{A_{12}}^\circ = \bigcup \{F_{A_2}, F_{A_5}\} = F_{A_{11}}$$

biçimindedir. Gerçekten,

$\alpha_2 = (x_1, \{u_2\})$ için $\alpha_2 \in F_{A_{11}} \subseteq F_{A_{12}}$ olacak biçimde bir $F_{A_{11}} \in \tilde{\tau}$ vardır.

$\alpha_4 = (x_2, \{u_2\})$ için $\alpha_4 \in F_{A_{13}} \not\subseteq F_{A_{12}}$ ve $\alpha_4 \in F_A \not\subseteq F_{A_{12}}$ olduğu için $\alpha_4 \notin F_{A_{12}}^\circ$ dir.

$\alpha_5 = (x_2, \{u_3\})$ için $\alpha_5 \in F_{A_{11}} \subseteq F_{A_{12}}$ olacak biçimde bir $F_{A_{11}} \in \tilde{\tau}$ vardır.

F_A esnek kümesi $F_{A_{12}}$ 'nin en küçük esnek kapalı üst kümesi olduğundan $F_{A_{12}}$ esnek kümesinin esnek kapanışı $\overline{F_{A_{12}}} = F_A$ biçimindedir.

$F_{A_{12}}$ esnek kümesinin tüm esnek limit noktalarının esnek birleşimi,

$$F'_{A_{12}} = \bigcup^{\sim} \{F_{A_1}, F_{A_4}, F_{A_5}\} = F_{A_9}$$

olarak bulunur. Gerçekten,

$$F_{A_{13}} \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_1}) = F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{10}} \neq F_\Phi$$

$$F_A \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_1}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{12}} \neq F_\Phi$$

$$F_{A_2} \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_2}) = F_{A_2} \tilde{\cap} F_{A_6} = F_\Phi$$

$$F_{A_{13}} \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_4}) = F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_{11}} = F_{A_2} \neq F_\Phi$$

$$F_A \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_4}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_{11}} = F_{A_{11}} \neq F_\Phi$$

$$F_{A_{11}} \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_5}) = F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_{10}} = F_{A_2} \neq F_\Phi$$

$$F_A \tilde{\cap} (F_{A_{12}} \tilde{\setminus} F_{A_5}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_{10}} = F_{A_{10}} \neq F_\Phi$$

biçimindedir. $F_{A_{12}}$ esnek kümesinin esnek sınırı,

$$F_{A_{12}}^b = \bigcup^{\sim} \{F_{A_1}, F_{A_4}\} = F_{A_7}$$

olarak bulunur. Gerçekten,

$$F_{A_{13}}, F_A \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1) \text{ için}$$

$$F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{10}} \neq F_\phi \text{ ve } F_{A_{13}} \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_{12}}) = F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_1} = F_{A_1} \neq F_\phi$$

$$F_A \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{12}} \neq F_\phi \text{ ve } F_A \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_{12}}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_1} = F_{A_1} \neq F_\phi$$

$$F_{A_2}, F_{A_{11}}, F_{A_{13}}, F_A \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2) \text{ için}$$

$$F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{11}} \neq F_\phi \text{ ve } F_{A_{11}} \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_{12}}) = F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_1} = F_\phi$$

$$F_{A_{13}}, F_A \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_4) \text{ için}$$

$$F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{10}} \neq F_\phi \text{ ve } F_{A_{13}} \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_{12}}) = F_{A_{13}} \tilde{\cap} F_{A_1} = F_{A_1} \neq F_\phi$$

$$F_A \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{12}} \neq F_\phi \text{ ve } F_A \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_{12}}) = F_A \tilde{\cap} F_{A_1} = F_{A_1} \neq F_\phi$$

$$F_{A_{11}}, F_A \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_5) \text{ için}$$

$$F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_{12}} = F_{A_{11}} \neq F_\phi \text{ ve } F_{A_{11}} \tilde{\cap} (F_A \tilde{\setminus} F_{A_{12}}) = F_{A_{11}} \tilde{\cap} F_{A_1} = F_\phi$$

biçimindedir (Enginoğlu ve ark., 2015).

BÖLÜM 4

ESNEK AYIRMA AKSİYOMLARI

Bu bölümde, esnek ayırma aksiyomları verildi ve ilgili özellikleri incelendi.

Tanım 4.1. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ veya $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir esnek T_0 uzay denir (Nazmul ve Samanta, 2014).

Örnek 4.1. Örnek 3.2’de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_1)$ esnek topolojik uzayı bir esnek T_0 uzay değildir. Gerçekten, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için tek esnek açık F_A esnek kümesidir.

Teorem 4.1. Bir $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı esnek T_0 uzaydır gerek ve yeter koşul $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2$ olmasıdır.

İspat.

$(\Rightarrow)$: $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_0 uzay olsun. O halde $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ veya $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ vardır. Burada, $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olduğundan $F_B \cap \alpha_2 = F_\emptyset$ biçimindedir. Aynı zamanda $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ olduğundan Teorem 3.16 (i.)’den $\alpha_1 \not\subseteq \bar{\alpha}_2$ olur. Dolayısıyla $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $\bar{\alpha}_1 \neq \bar{\alpha}_2$ olsun. O halde Teorem 3.16 (i.)’den $\alpha_1 \not\subseteq \bar{\alpha}_2$ olduğunda $F_B \cap \alpha_2 = F_\emptyset$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ vardır. Dolayısıyla $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\tau}$ vardır. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı bir esnek T_0 uzaydır.

Örnek 4.2. Örnek 3.1’de verilen F_A esnek kümesi üzerinde $\tilde{\tau} = \{F_A, F_\emptyset, F_{A_1}, F_{A_5}, F_{A_8}, F_{A_{11}}, F_{A_{12}}, F_{A_{14}}\}$ koleksiyonu bir esnek topolojidir. Ayrıca farklı $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 \in F_A$ esnek elemanları için $\bar{\alpha}_1 = F_{A_1}$, $\bar{\alpha}_2 = F_{A_{10}}$, $\bar{\alpha}_4 = F_{A_4}$ ve $\bar{\alpha}_5 = F_{A_{12}}$ olduğundan Teorem 4.1 gereğince, $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_0 uzaydır.

Teorem 4.2. Bir esnek T_0 uzayın her esnek alt uzayı da bir esnek T_0 uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_0 uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek topolojik alt uzay olsun. O halde $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_B$ için $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ veya $F_D \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_D \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_C, F_D \in \tilde{\tau}$ vardır. Esnek alt uzay tanımından, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_B$ için $F_C \cap F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \cap F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ veya $F_D \cap F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_D \cap F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_C \cap F_B, F_D \cap F_B \in \tilde{\tau}_{F_B}$

vardır. O halde $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek T_0 uzaydır.

Tanım 4.2. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir esnek T_1 uzay denir (Nazmul ve Samanta, 2014).

Teorem 4.3. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı esnek T_1 uzaydır.
- ii. Her esnek tek nokta kümesi esnek kapalıdır.
- iii. $\forall \alpha \in F_A$ için $\tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha) = \alpha$ biçimindedir.

İspat.

(i.) $\Rightarrow$ (ii.)

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay ve $\alpha_1 \in F_A$ olsun. O halde $\alpha_2 \in (F_A \setminus \alpha_1)$ için $\alpha_1 \neq \alpha_2$ biçimindedir. Burada $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay olduğundan $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ vardır. $\alpha_1 \notin F_C$ ve $\alpha_2 \in F_C$ olduğundan $\alpha_1 \cap F_C = F_\emptyset$ ve $F_C \subseteq (F_A \setminus \alpha_1)$ biçimindedir. Sonuç 3.2'den $F_A \setminus \alpha_1$ esnek kümesi esnek açıktır. Dolayısıyla α_1 esnek kapalıdır. Sonuç olarak $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay ise her esnek tek nokta kümesi esnek kapalıdır.

(ii.) $\Rightarrow$ (iii.)

Her esnek tek nokta kümesi esnek kapalı olsun. Bir $\alpha_1 \in F_A$ esnek tek nokta kümesi her esnek açık komşuluğunun esnek elemanı olduğundan $\alpha_1 \in \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \in \tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ biçiminde yazılabilir.

Kabul edelim ki, $\alpha_1 \in \tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\alpha_2 \in \tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ olsun. Bu durumda $\forall F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ için $F_B \cap \alpha_2 \neq F_\emptyset$ olur. O halde Teorem 3.16 (i.)'den $\alpha_1 \in \bar{\alpha}_2$ biçimindedir. Ancak her esnek tek nokta kümesi esnek kapalı olduğundan $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ eşitliği sağlanır. Diğer bir ifadeyle, $\alpha_1 \notin \bar{\alpha}_2$ biçimindedir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha_1 = \alpha_2$ elde edilir. Her $\alpha \in F_A$ için $\tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha) = \alpha$ biçimindedir.

(iii.) $\Rightarrow$ (i.)

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ esnek tek nokta kümeleri için $\tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1) = \alpha_1$ ve $\tilde{\cap} \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2) = \alpha_2$ olsun. O halde $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ vardır. Buradan $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayının bir esnek T_1 uzay olduğu görülür.

Örnek 4.3. Örnek 3.2'de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayları

göz önüne alalım. $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayı için her esnek tek nokta kümesi esnek kapalı olduğundan $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ bir esnek T_1 uzaydır. Diğer taraftan $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayı için $\alpha_2 = (x_1, \{u_2\})$ ve $\alpha_5 = (x_2, \{u_3\})$ esnek tek nokta kümelerinin birbirini içermeyen bir esnek açık komşulukları olmadığından $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ bir esnek T_1 uzay değildir.

Teorem 4.4. Bir esnek T_1 uzayın her esnek alt uzayı da bir esnek T_1 uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek topolojik alt uzayı olsun. O halde $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_B$ için $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_D \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_D \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_C, F_D \in \tilde{\tau}$ vardır. Esnek alt uzay tanımından, $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_B$ için $F_C \cap F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_C \cap F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_D \cap F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_D \cap F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olacak biçimde $\exists F_C \cap F_B, F_D \cap F_B \in \tilde{\tau}_{F_B}$ vardır. O halde $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek T_1 uzaydır.

Tanım 4.3. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $F_B \cap F_C = F_\emptyset$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir *esnek* Hausdorff uzay (esnek T_2 uzay) denir (Nazmul ve Samanta, 2014).

Örnek 4.4. Örnek 3.2’de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayını göz önüne alalım. Her $\alpha \in F_A$ için $\alpha \in \tilde{\tau}$ biçimindedir. Diğer bir ifadeyle, her $\alpha \in F_A$ için $\alpha \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)$ dir. $\forall i$ için $\alpha_i \subseteq \alpha_i$ ve esnek eleman tanımından $\alpha_i \neq \alpha_j$ olduğunda $\alpha_i \cap \alpha_j = F_\emptyset$ biçimindedir. Örneğin, $\alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ olmak üzere $\alpha_1 = (x_1, \{u_1\})$ ve $\alpha_2 = (x_1, \{u_2\})$ için $F_{A_1} \cap F_{A_2} = F_\emptyset$ olacak biçimde $F_{A_1} \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $F_{A_2} \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ vardır. Dolayısıyla $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayı bir esnek Hausdorff uzaydır.

Örnek 4.5. Örnek 3.2’de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayındaki F_A esnek kümesinin $\alpha_1 = (x_1, \{u_1\})$ ve $\alpha_2 = (x_1, \{u_2\})$ esnek tek nokta kümelerini göz önüne alalım. Burada $F_B \cap F_C = F_\emptyset$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ bulunamadığı için $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ bir esnek Hausdorff uzay değildir.

Teorem 4.5. Bir esnek Hausdorff uzayda her esnek tek nokta kümesi esnek kapalıdır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzay ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olacak biçimde $\alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ olsun. O halde esnek Hausdorff uzay tanımından, $F_B \cap F_C = F_\emptyset$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ vardır. $F_B \cap \alpha_2 = F_\emptyset$ olduğundan Teorem 3.16 (i)’den $\alpha_1 \notin \bar{\alpha}_2$ elde edilir. Bu nedenle, $\forall \alpha_1 \neq \alpha_2$ için $\alpha_1 \notin \bar{\alpha}_2$ olur. Diğer bir ifadeyle, $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 3.13’den α_2 esnek kapalıdır.

Teorem 4.6. Bir esnek Hausdorff uzayın her esnek alt uzayı da bir esnek Hausdorff uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek topolojik alt uzay olsun. O halde $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_B$ için $F_C \cap F_D = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_D \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ vardır. Esnek alt uzay tanımından, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_B$ için $(F_C \cap F_B) \cap (F_D \cap F_B) = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C \cap F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_D \cap F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ vardır. O halde $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek Hausdorff uzaydır.

Teorem 4.7. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

- i. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzaydır.
- ii. $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $\alpha_1 \in F_B$ ve $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ olacak biçimde bir $F_B \in \tilde{\tau}$ vardır.
- iii. $\forall \alpha \in F_A$ için $\bigcap_{F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha)} \overline{F_B} = \alpha$ biçimindedir.

İspat.

(i.) $\Rightarrow$ (ii.)

$(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzay olsun. O halde $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $F_B \cap F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ vardır. Teorem 3.16 (i.)’den $\alpha_2 \in F_C$ ve $F_B \cap F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C \in \tilde{\tau}$ olduğundan $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ elde edilir. Dolayısıyla $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $\alpha_1 \in F_B$ ve $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ olacak biçimde bir $F_B \in \tilde{\tau}$ vardır.

(ii.) $\Rightarrow$ (iii.)

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ için $\alpha_1 \in F_B$ ve $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ olacak biçimde bir $F_B \in \tilde{\tau}$ var olsun. Buradan, $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ için $\alpha_1 \in \overline{F_B}$ olduğundan $\alpha_1 \in \bigcap_{F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)} \overline{F_B}$ elde edilir. Diğer taraftan $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ olduğundan $\alpha_2 \notin \bigcap_{F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)} \overline{F_B}$ olur. O halde $\forall \alpha_1 \in F_A$ için $\bigcap_{F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)} \overline{F_B} = \alpha_1$ biçimindedir.

(iii.) $\Rightarrow$ (i.)

$\forall \alpha_1 \in F_A$ için $\bigcap_{F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)} \overline{F_B} = \alpha_1$ ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ olsun. Bu durumda, $\alpha_2 \notin \bigcap_{F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)} \overline{F_B}$ olur. Diğer bir ifadeyle, $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ vardır. Burada $\overline{F_B}$ esnek kapalı olduğundan $F_A \setminus \overline{F_B} \in \tilde{\tau}$ olur. Üstelik, $\alpha_2 \notin \overline{F_B}$ olduğundan $\alpha_2 \in F_A \setminus \overline{F_B}$ ve aynı zamanda $F_B \cap (F_A \setminus \overline{F_B}) = F_\phi$ biçimindedir. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzaydır.

Teorem 4.8. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun.

- i. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay ise $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_0 uzaydır.
- ii. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzay ise $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzaydır.

(Nazmul ve Samanta, 2014).

İspat. Esnek T_0 , T_1 ve Hausdorff uzay tanımlarından açıktır.

Ancak Teorem 4.8'in tersi her zaman sağlanmamaktadır.

Örnek 4.6. $\tilde{\tau} = \{F_A, F_\phi, F_{A_1}, F_{A_5}, F_{A_8}, F_{A_{11}}, F_{A_{12}}, F_{A_{14}}\}$ olmak üzere Örnek 4.2'de verilen $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_0 uzaydır. Ancak $\alpha_2 = (x_1, \{u_2\})$ ve $\alpha_4 = (x_2, \{u_2\})$ esnek elemanları için $F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_B \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_4)$ ve $F_C \notin \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ ve $F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_4)$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ bulunamadığından $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay değildir.

Tanım 4.4. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Esnek kapalı her F_B esnek kümesi ve $\alpha_1 \notin F_B$ özelliğindeki her $\alpha_1 \in F_A$ için $F_B \subseteq F_C$, $\alpha_1 \in F_D$ ve $F_C \cap F_D = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C, F_D \in \tilde{\tau}$ varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir esnek regüler uzay denir (Nazmul ve Samanta, 2014).

Teorem 4.9. Bir esnek topolojik uzayda her esnek açık küme esnek kapalı ise bu esnek topolojik uzay esnek regüler uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve bu uzaydaki her esnek açık küme esnek kapalı olsun. Esnek kapalı F_B esnek kümesi ve $\alpha_1 \notin F_B$ özelliğinde $\alpha_1 \in F_A$ esnek elemanı verilsin. Bu durumda, $\alpha_1 \notin F_B \Rightarrow \alpha_1 \in F_A \setminus F_B$ ve F_B esnek kapalı olduğundan $F_A \setminus F_B \in \tilde{\tau}$ elde edilir. Aynı zamanda F_B esnek kapalı kümesi $\tilde{\tau}$ 'da esnek açık olduğundan $F_B \subseteq F_B$ olur. O halde esnek kapalı her F_B esnek kümesi ve $\alpha_1 \notin F_B$ özelliğindeki her $\alpha_1 \in F_A$ için $F_B \subseteq F_B$, $\alpha_1 \in F_A \setminus F_B$ ve $F_B \cap (F_A \setminus F_B) = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_B, F_A \setminus F_B \in \tilde{\tau}$ vardır. Dolayısıyla $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek regüler uzaydır.

Örnek 4.7. Örnek 3.1'de verilen F_A esnek kümesinin esnek alt kümeleri için $\tilde{\tau} = \{F_A, F_\phi, F_{A_1}, F_{A_{12}}\}$ olmak üzere $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek regüler uzaydır. Gerçekten, $F_A, F_\phi, F_{A_1}, F_{A_{12}}$ esnek kümeleri $\tilde{\tau}$ 'da hem esnek açık hem de esnek kapalıdır.

Teorem 4.10. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bu esnek topolojik uzayın bir esnek topolojik alt uzayı olsun. O halde $F_C \subseteq F_B$ esnek kümesi $\tilde{\tau}_{F_B}$ 'de esnek kapalıdır gerek ve yeter koşul $F_C = F_D \cap F_B$ olacak biçimde $\tilde{\tau}$ 'da esnek kapalı bir F_D esnek kümesi vardır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek topolojik alt uzay olsun.

($\Rightarrow$): $F_C \subseteq F_B$ esnek kümesi $\tilde{\tau}_B$ 'de esnek kapalı olsun. Bu durumda, $F_B \setminus F_C \in \tilde{\tau}_{F_B}$ olur. Esnek alt uzay tanımından, $F_D \in \tilde{\tau}$ olmak üzere $F_B \setminus F_C = F_D \cap F_B$ biçimindedir. Buradan, $F_C = (F_A \setminus F_D) \cap F_B$ olacak biçimde $F_A \setminus F_D, \tilde{\tau}$ 'da esnek kapalıdır.

($\Leftarrow$): $F_C = F_D \cap F_B$ olacak biçimde F_D esnek kümesi $\tilde{\tau}$ 'da esnek kapalı bir küme olsun. Buradan, $F_B \setminus F_C = (F_A \setminus F_D) \cap F_B$ olduğundan $F_B \setminus F_C \in \tilde{\tau}_{F_B}$ elde edilir. O halde F_C esnek kümesi $\tilde{\tau}_{F_B}$ 'de esnek kapalıdır.

Teorem 4.11. Bir esnek regüler uzayın her esnek alt uzayı da bir esnek regüler uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek regüler uzay, $F_B \subseteq F_A$ olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek topolojik alt uzay ve $F_C \subseteq F_B$ olmak üzere $\alpha_1 \notin F_C$ özelliğinde $\alpha_1 \in F_B$ için $F_C, \tilde{\tau}_{F_B}$ 'de bir esnek kapalı küme olsun. Bu durumda, Teorem 4.10'dan F_D esnek kümesi $\tilde{\tau}$ 'da esnek kapalı bir küme olmak üzere $F_C = F_D \cap F_B$ biçimindedir. $\alpha_1 \notin F_C$ olduğundan $\alpha_1 \notin F_D \cap F_B \Rightarrow \alpha_1 \notin F_D \vee \alpha_1 \notin F_B$ olur. Buradan, $\alpha_1 \notin F_D$ ve $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek regüler uzay olduğundan $F_D \subseteq F_F, \alpha_1 \in F_G$ ve $F_F \cap F_G = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_F, F_G \in \tilde{\tau}$ vardır. Üstelik, $F_D \cap F_B \subseteq F_F \cap F_B, \alpha_1 \in F_G \cap F_B$ ve $(F_F \cap F_B) \cap (F_G \cap F_B) = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_F \cap F_B, F_G \cap F_B \in \tilde{\tau}_{F_B}$ vardır. O halde $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ esnek topolojik alt uzayı bir esnek regüler uzaydır.

Tanım 4.5. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı bir esnek T_1 uzay ve bir esnek regüler uzay ise $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir esnek T_3 uzay denir.

Örnek 4.8. Örnek 3.2'de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ ve $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayları göz önüne alalım.

$(F_A, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayı için her esnek tek nokta kümesi esnek kapalı olduğundan $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ bir esnek T_1 uzaydır. Üstelik, $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ esnek topolojik uzayındaki her esnek açık esnek kapalı olduğundan $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ bir esnek regüler uzaydır. Bu nedenle, $(F_A, \tilde{\tau}_2)$ bir esnek T_3 uzaydır.

$(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayı için her esnek tek nokta kümesi esnek kapalı olmadığından $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ bir esnek T_1 uzay değildir. Ayrıca $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ bir esnek regüler uzay değildir. Bu nedenle, $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ bir esnek T_3 uzay değildir.

Teorem 4.12. Her esnek T_3 uzay bir esnek Hausdorff uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_3 uzay ve $\alpha_1 \neq \alpha_2$ olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2 \in F_A$ olsun. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 uzay olduğundan α_1 esnek tek nokta kümesi esnek kapalıdır. Diğer bir

ifadeyle $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$ biçimindedir. Buradan $\alpha_2 \notin \alpha_1$ elde edilir. Ayrıca, $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek regüler uzay olduğundan $\alpha_1 \subseteq F_B$, $\alpha_2 \subseteq F_C$ ve $F_B \cap F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ vardır. Dolayısıyla, $F_B \cap F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_B \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_1)$ ve $\exists F_C \in \tilde{\mathcal{V}}(\alpha_2)$ olduğundan $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek Hausdorff uzaydır.

Tanım 4.6. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $F_B \cap F_C = F_\phi$ özelliğindeki her $F_B, F_C \subseteq F_A$ esnek kapalı kümeleri için $F_B \subseteq F_D$, $F_C \subseteq F_F$ ve $F_D \cap F_F = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_D, F_F \in \tilde{\tau}$ varsa $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir esnek normal uzay denir (Nazmul ve Samanta, 2014).

Örnek 4.9. Örnek 3.2’de verilen $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ esnek topolojik uzayını göz önüne alalım. $F_A, F_\phi, F_{A_5}, F_{A_7}, F_{A_9}$ esnek kümeleri $\tilde{\tau}_3$ ’deki esnek kapalı kümelerdir. Burada F_{A_5}, F_{A_7} esnek kapalı kümeleri $F_{A_5} \cap F_{A_7} = F_\phi$ özelliğini sağlamaktadır. Fakat, $F_{A_5} \subseteq F_{A_{11}}$, $F_{A_7} \subseteq F_{A_{13}}$ ve $F_{A_{11}} \cap F_{A_{13}} \neq F_\phi$ olduğundan $(F_A, \tilde{\tau}_3)$ bir esnek normal uzay değildir.

Teorem 4.13. Bir esnek topolojik uzayda her esnek açık küme esnek kapalı ise bu esnek topolojik uzay esnek normal uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay ve bu uzaydaki her esnek açık küme esnek kapalı olsun. O halde $F_B \cap F_C = F_\phi$ özelliğindeki her $F_B, F_C \subseteq F_A$ esnek kapalı kümeleri için $F_B \subseteq F_B$, $F_C \subseteq F_C$ ve $F_B \cap F_C = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_B, F_C \in \tilde{\tau}$ bulunabildiği için $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek normal uzaydır.

Örnek 4.10. Örnek 3.1’de verilen F_A esnek kümesinin esnek alt kümeleri için $\tilde{\tau} = \{F_A, F_\phi, F_{A_2}, F_{A_9}\}$ olmak üzere $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek normal uzaydır. Gerçekten, $F_A, F_\phi, F_{A_2}, F_{A_9}$ esnek kümeleri $\tilde{\tau}$ ’da hem esnek açık hem de esnek kapalıdır.

Ancak Teorem 4.13’ün tersi her zaman sağlanmamaktadır.

Örnek 4.11. Örnek 3.1’de verilen F_A esnek kümesinin esnek alt kümeleri için $\tilde{\tau} = \{F_A, F_\phi, F_{A_1}, F_{A_4}, F_{A_7}\}$ olmak üzere $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzaydır. Bu esnek topolojik uzayda $F_A, F_\phi, F_{A_{11}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_3\})\}$, $F_{A_{12}} = \{(x_1, \{u_2\}), (x_2, \{u_2, u_3\})\}$ ve $F_{A_{14}} = \{(x_1, \{u_1, u_2\}), (x_2, \{u_3\})\}$ esnek kümeleri esnek kapalıdır. Burada $F_A \cap F_\phi = F_\phi$ özelliğindeki F_A ve F_ϕ esnek kapalı kümeleri için $F_A \subseteq F_A$, $F_\phi \subseteq F_\phi$ ve $F_A \cap F_\phi = F_\phi$ olacak biçimde $F_A, F_\phi \in \tilde{\tau}$ vardır. Benzer şekilde diğer esnek kapalı kümeler içinde bu koşul sağlanmaktadır. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek normal uzaydır. Fakat $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayında her esnek açık esnek kapalı değildir.

Teorem 4.14. Bir esnek normal uzayın esnek kapalı her esnek alt uzayı da bir

esnek normal uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek normal uzay, F_B esnek kümesi $\tilde{\tau}$ 'da esnek kapalı olmak üzere $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek topolojik alt uzay ve $F_C \tilde{\cap} F_D = F_\phi$ özelliğinde $F_C, F_D \subseteq F_B$ esnek kümeleri $\tilde{\tau}_{F_B}$ 'de esnek kapalı olsun. Örnek 4.10'dan F_C, F_D esnek kümeleri $\tilde{\tau}$ 'da esnek kapalıdır. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek normal uzay olduğundan $F_C \subseteq F_F, F_D \subseteq F_G$ ve $F_F \tilde{\cap} F_G = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_F, F_G \in \tilde{\tau}$ vardır. Buradan $F_C \subseteq F_F \tilde{\cap} F_B, F_D \subseteq F_G \tilde{\cap} F_B$ ve $(F_F \tilde{\cap} F_B) \tilde{\cap} (F_G \tilde{\cap} F_B) = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_F \tilde{\cap} F_B, F_G \tilde{\cap} F_B \in \tilde{\tau}_{F_B}$ vardır. O halde $(F_B, \tilde{\tau}_{F_B})$ bir esnek normal uzaydır.

Tanım 4.7. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayı bir esnek T_1 uzay ve bir esnek normal uzay ise $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek topolojik uzayına bir esnek T_4 uzay denir.

Teorem 4.15. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek topolojik uzay olsun. Eğer $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_4 uzay ise $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_3 uzaydır.

İspat. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_4 uzay ve $\alpha_1 \notin F_B$ özelliğinde $\alpha_1 \in F_A$ için F_B bir esnek kapalı küme olsun. O halde $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 ve esnek normal uzaydır. $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_1 olduğundan α_1 esnek tek nokta kümesi esnek kapalıdır. Buradan $F_B \tilde{\cap} \alpha_1 = F_\phi$ özelliğindeki F_B, α_1 esnek kapalı kümeleri için $(F_A, \tilde{\tau})$ esnek normal uzay olduğundan $F_B \subseteq F_C, \alpha_1 \subseteq F_D$ ve $F_C \tilde{\cap} F_D = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C, F_D \in \tilde{\tau}$ vardır. O halde esnek kapalı her F_B esnek kümesi ve $\alpha_1 \notin F_B$ özelliğindeki her $\alpha_1 \in F_A$ için $F_B \subseteq F_C, \alpha_1 \subseteq F_D$ ve $F_C \tilde{\cap} F_D = F_\phi$ olacak biçimde $\exists F_C, F_D \in \tilde{\tau}$ olduğundan $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek regüler uzaydır. Sonuç olarak $(F_A, \tilde{\tau})$ bir esnek T_3 uzaydır.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİLER

Çağman ve ark. (2011) herhangi bir esnek kümenin esnek alt kümelerini kullanarak, bu esnek küme üzerinde esnek topoloji kavramını tanımladı. Daha sonra Enginoğlu ve ark. (2015) tarafından kendi içinde tutarlı hale getirilen bu çalışmanın yayımlandığı dönemde, Shabir ve Naz (2011) evrensel esnek kümenin esnek alt kümelerini kullanarak, evrensel küme üzerinde esnek topoloji kavramını ortaya attı.

Bu iki esnek topoloji kavramı hakkında ilk olarak bahsedilmesi gereken ayrıntı Çağman ve ark. (2011)'nın yeniden tanımlanmış esnek küme işlemlerini (Çağman ve ark., 2010) kullanırken Shabir ve Naz (2011)'in yaygın olarak kullanılan tanımları tercih ettiğidir.

Diğer bir ayrıntı, her iki topolojinin de farklı amaçlar için ortaya atıldığıdır. Çağman ve ark. (2011)'nin bir esnek kümenin üzerinde bir esnek topoloji inşa ederek bu esnek kümeyi daha iyi anlama çabası varken, Shabir ve Naz (2011)'in bir klasik küme üzerinde bilinen topolojinin yanı sıra bir esnek topolojiye sahip olması yoluyla bu klasik kümeyi daha iyi anlama çabası mevcuttur. Bu nedenle, tanımlanan bu esnek topolojilerin esnek eleman, esnek iç, vb. argümanlarında farklılıklar arz etmektedir. Burada, hangi esnek topoloji kavramının biçimsel olarak diğerinden daha genel ve kullanışlı olduğu, topolojilerin kullanım alanlarına göre farklılık arz ettiğine dikkat edilmelidir.

Bahsi geçen bu iki esnek topoloji kavramı arasındaki farkların açıkça ortaya konması çalışılmaya değer bir konudur.

KAYNAKLAR

- Acar U., Koyuncu F., Tanay B., 2010. Soft Sets and Soft Rings. Computers and Mathematics with Applications, 59: 3458-3463.
- Ahmad B., Hussain S., 2012. On Some Structures of Soft Topology. Mathematical Sciences, DOI: 10.1186/2251-7456-6-64.
- Aktaş H., Çağman N., 2007. Soft Sets and Soft Groups. Information Sciences, 177: 2726-2735.
- Ali M.I., Feng F., Liu X., Min W.K., Shabir M., 2009. On Some New Operations in Soft Set Theory. Computers and Mathematics with Applications, 57: 1547-1553.
- Atmaca S., 2010. Fuzzy, Rough, Soft Kümeler ile Topolojileri Üzerine. Yüksek Lisans Tezi. Cumhuriyet Üniversitesi, Türkiye.
- Aygünoğlu A., Aygün H., 2011. Some Notes on Soft Topological Spaces. Neural Computing and Applications, DOI: 10.1007/s00521-011-0722-3.
- Aygünoğlu A., 2011. Esnek Topolojik Uzaylar. Doktora Tezi. Kocaeli Üniversitesi, Türkiye.
- Çağman N., Enginoğlu S., 2010a. Soft Set Theory and uni-int Decision Making. European Journal of Operational Research, 207: 848-855.
- Çağman N., Enginoğlu S., 2010b. Soft Matrix Theory and Its Decision Making. Computers and Mathematics with Applications, 59: 3308-3314.
- Çağman N., Karataş S., Enginoglu S., 2011. Soft Topology. Computers and Mathematics with Applications, 62: 351-358.
- Enginoğlu S., Çağman N., Serkan K., Aydın T., 2015. On Soft Topology. El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2 (3): 23-38.
- Feng F., Jun Y.B., Zhao X., 2008. Soft Semirings. Computers and Mathematics with Applications, 56: 2621-2628.
- Georgiou D.N., Megaritis A.C., Petropoulos V.I., 2013. On Soft Topological Spaces. Applied Mathematics and Information Sciences, 7 (5): 1889-1901.

- Georgiou D.N., Megaritis A.C., 2014. Soft Set Theory and Topology. *Applied General Topology*, 15 (1): 93-109.
- Hazra H., Majumdar P., Samanta S.K., 2012. Soft Topology. *Fuzzy Information and Engineering*, 1: 105-115.
- Hussain S., Ahmad B., 2011. Some Properties of Soft Topological Spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 62: 4058-4067.
- Jiang Y., Tang Y., Chen Q., Wang J., Tang S., 2010. Extending Soft Sets with Description Logics. *Computers and Mathematics with Applications*, 59: 2087-2096.
- Jun Y.B., Park C.H., 2009. Applications of Soft Sets in Hilbert Algebras. *Iranian Journal of Fuzzy Systems*, 6 (2): 75-86.
- Jun Y.B., Lee K.J., Khan A., 2010. Soft Ordered Semigroups. *Mathematical Logic Quarterly*, 56 (1): 42-50.
- Karataş S., 2012. Esnek Topolojik Yapılar. Doktora Tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Türkiye.
- Koçak M., 2011. Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar (3. Baskı). Kampüs Yayıncılık, Kütahya, 1-207.
- Kovkov D.V., Kolbanov V.M., Molodtsov D.A., 2007. Soft Sets Theory-Based Optimization. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 46 (6): 872-880.
- Li Z., Xie T., 2014. The Relationship Among Soft Sets, Soft Rough Sets and Topologies. *Soft Comput*, 18: 717-728.
- Maji P.K., Roy A.R., Biswas R., 2002. An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, 44: 1077-1083.
- Maji P.K., Biswas R., Roy A.R., 2003. Soft Set Theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45: 555-562.
- Majumdar P., Samanta S.K., 2008. Similarity Measure of Soft Sets. *New Mathematics and Natural Computation*, 4 (1): 1-12.
- Min W.K., 2011. A Note on Soft Topological Spaces. *Computers and Mathematics with*

- Applications, 62: 3524-3528.
- Min W.K., 2014. Soft Sets Over a Common Topological Universe. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 26: 2099-2016.
- Molodtsov D., 1999. Soft Set Theory-First Results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37: 19-31.
- Molodtsov D., Leonov V.Y., Kovkov D.V., 2006. Soft Sets Technique and Its Application. *Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya*, 1 (1): 8-39.
- Mucuk O., 2010. Topoloji ve Kategori (2. Baskı). Nobel Yayın Dağıtım Tic. Ltd. Şti., Ankara, 1-228.
- Nazmul S.K., Samanta S.K., 2013. Neighbourhood Properties of Soft Topological Spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 6 (1): 1-15.
- Nazmul S.K., Samanta S.K., 2014. Some Properties of Soft Topologies and Group Soft Topologies. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 8 (4): 645-661.
- Pei D., Miao D., 2005. From Soft Sets to Information Systems, In: *Proceedings of Granular Computing* (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B.Zhang), (Vol. 2, pp. 617-621). IEEE.
- Peyghan E., Samadi B., Tayebi A., 2013. About Soft Topological Spaces. *Journal of New Results in Science*, 2: 60-75.
- Peyghan E., Samadi B., Tayebi A., 2014. Some Results Related to Soft Topological Spaces. *Series Mathematics and Informatics*, 29 (4): 325-336.
- Qin K., Hong Z., 2010. On Soft Equality. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234: 1347-1355.
- Roy S., Samanta T.K., 2014. A Note on a Soft Topological Space. *Journal of Mathematics*, 46 (1): 19-24.
- Sezgin A., Atagün A.O., 2011. On Operations of Soft Sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61: 1457-1467.
- Shabir M., Naz M., 2011. On Soft Topological Spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 61: 1786-1799.

- Şenel G., Çağman N., 2015. Soft Topological Subspaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 10 (4): 525-535.
- Varol B.P., Shostak A., Aygün H., 2012. A New Approach to Soft Topology. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 41 (5): 731-741.
- Varol B.P., Aygün H., 2013. On Soft Hausdorff Spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 5 (1): 15-24.
- Zorlutuna İ., Akdağ M., Min W.K., Atmaca S., 2012. Remarks on Soft Topological Spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3 (2): 171-185.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı: Tuğçe AYDIN

Doğum Yeri: Çatalca/İSTANBUL

Doğum Tarihi: 24/08/1990

EĞİTİM DURUMU

Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, 2013

Yüksek Lisans Öğrenimi: Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi

Bildiği Yabancı Diller: İngilizce

BİLİMSEL FAALİYETLERİ

a) Yayınlar -SCI -Diğer

Enginoğlu S., Çağman N., Karataş S., Aydın T., 2015. On Soft Topology. El-Cezerî Journal of Science and Engineering, 2: (3), 23-38.

b) Bildiriler -Uluslararası -Ulusal

Enginoğlu S., Çağman N., Karataş S., Aydın T., Esnek Topoloji Üzerine Bir Değerlendirme. 10. Ankara Matematik Günleri ODTÜ, Haziran 2015.

c) Katıldığı Projeler

Enginoğlu S., Aydın T., Esnek Topoloji Üzerine, BAP, 646.

İLETİŞİM

E-posta Adresi: aydintugce@gmail.com