



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



ÇARPIMSAL LATİSLERİN 2-YUTAN ELEMANLARI VE
DEĞİŞMELİ HALKALARIN 2-YUTAN ASALIMSİ İDEALLERİ

ECE YETKİN ÇELİKEL

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı/
Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2016



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**ÇARPIMSAL LATİSLERİN 2-YUTAN ELEMANLARI VE DEĞİŞMELİ
HALKALARIN 2-YUTAN ASALIMSIZ İDEALLERİ**

ECE YETKİN ÇELİKEL

(721011002)

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı/
Teorik Matematik Programı

DANIŞMAN

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL, 2016

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Öğrencisi Ece YETKİN ÇELİKEL' in “Çarpımsal Latislerin 2-yutan Elemanları ve Değişmeli Halkaların 2-yutan Asalımsı İdealleri” başlıklı tez çalışması, 22 Ocak 2016 tarihinde savunulmuş ve jüri üyeleri tarafından başarılı bulunmuştur.

Jüri Üyeleri

(İMZA)

Prof. Dr. Ünsal TEKİR (Danışman)

Marmara Üniversitesi

Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP (Üye)

Beykent Üniversitesi

Prof. Dr. İrfan ŞİAP (Üye)

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY (Üye)

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL (Üye)

Marmara Üniversitesi

ONAY

Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 01.02.2016 tarih ve 2016/04-02 sayılı kararı ile Ece YETKİN ÇELİKEL'in Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik Programında Doktora derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Uğur YAHSİ

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimin süresince yardımlarını, bilgisini ve tecrübelerini cömertçe bizimle paylaşan, pozitif eleştiri, uyarı ve önerilerini esirgemeyen, doktora sürecimde hep yol gösterici olan çok saygıdeğer danışmanım ve değerli hocam Prof. Dr. Ünsal Tekir'e; kendisine has tarzı ile cebiri farklı bir açıdan okumama olanak sağlayan, insani ve ahlaki açıdan her zaman örnek aldığımız büyük hocamız Prof. Dr. Fethi Çallıalp'e; sorduğu yerinde sorular ile yeni fikirlerin oluşmasına katkıda bulunan ve tezin yazım dili hakkında beni önerileriyle yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. İrfan Şiap'a; akademik yaşama ve hayata dair doğru saptamalarını tez canlı bir espri anlayışıyla sunan kıymetli hocam Doç. Dr. Bayram Ali Ersoy'a en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Sizlerle karşılaşmak, tanışmak ve hayatıma sizleri katmak benim için büyük bir şanstı.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TUBITAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Ayrıca, yaptığım her tercihte hep yanımda olan çok sevgili aileme; çocukluğumdan bugüne öğrenme, okuma ve araştırma alışkanlığı kazanmamı sağlayan babama; içinde bulunduğum bu yolda, anlayış ve sabırla destek olan sevgili eşime ve ailesine şükranlarımı sunarım.

Ocak 2016

Ece YETKİN ÇELİKEL

İÇİNDEKİLER

Teşekkür	i
İçindekiler	ii
Özet	iv
Abstract	v
Yenilik Beyanı	vi
Semboller	vii
Şekil Listesi	ix
BÖLÜM 1 – GİRİŞ	1
1.1 Değişmeli Halkalarda Asal İdeallerin Genelleştirmeleri	1
1.2 Çarpımsal Modüller için Ön Bilgiler	4
1.3 Çarpımsal Latisler için Ön Bilgiler	8
1.3.1 Çarpımsal latis	9
1.3.2 C -latis	15
1.3.3 Örnekler	20
1.3.4 C -latislerde asal elemanlar ve yerelleştirme	26
BÖLÜM 2 – DEĞİŞMELİ HALKALARDA 2-YUTAN ASALIMSİ VE ZAYIF 2-YUTAN ASALIMSİ İDEALLER	35
2.1 Değişmeli Halkalarda 2-Yutan Asalımsı ve Zayıf 2-Yutan Asalımsı İdeallerin Temel Özellikleri	35

2.2 Kartezyen Çarpım Halkalarının 2-Yutan Asalımsı ve Zayıf 2-Yutan Asalımsı İdealleri	55
2.3 Bazı Özel Halkalarda 2-Yutan Asalımsı ve Zayıf 2-Yutan Asalımsı İdealler	61
2.4 Zayıf Asal ve Zayıf 2-Yutan İdeallerin Bazı Özellikleri	67
BÖLÜM 3- ÇARPIMSAL MODÜLLERİN 2-YUTAN ASALIMSİ ALT MODÜLLERİ	73
3.1 Çarpımsal Modüllerin 2-Yutan Asalımsı Alt Modüllerinin Temel Özellikleri	73
3.2 Bazı Özel Çarpımsal Modüllerin 2-Yutan Asalımsı Alt Modülleri	87
BÖLÜM 4-ÇARPIMSAL LATİSLERDE 2-YUTAN VE ZAYIF 2-YUTAN ELEMANLAR	93
4.1 Çarpımsal Latislerde 2-Yutan ve Zayıf 2-Yutan Elemanların Temel Özellikleri	93
4.2. Kartezyen Çarpım Latislerinde 2-Yutan ve Zayıf 2-Yutan Elemanlar	108
4.3. Bazı Özel Latislerde 2-Yutan ve Zayıf 2-Yutan Elemanlar	114
BÖLÜM 5 – SONUÇLAR	129
Kaynaklar	131
Özgeçmiş	

ÖZET

ÇARPIMSAL LATİSLERİN 2-YUTAN ELEMANLARI VE DEĞİŞMELİ HALKALARIN 2-YUTAN ASALIMSİ İDEALLERİ

Bu çalışmada, değişmeli halkalarda asalımsı ideallerin bir genelleşmesi olarak 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı ideal kavramları tanımlanmıştır. Böylece değişmeli halkalarda asal ve zayıf asal ideallerin genelleştirmesi olarak literatürde A. Badawi tarafından tanımlanmış olan 2-yutan ve zayıf 2-yutan ideallerin de bir genelleştirmesi elde edilmiştir. Asal, zayıf asal, asalımsı, 2-yutan idealler ile 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı idealler arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Daha sonra, değişmeli halkalar üzerinde kurulan çarpımsal modüllerin 2-yutan asalımsı alt modül ve zayıf 2-yutan asalımsı alt modülleri tanımlanarak, temel özellikleri ve detayları ile irdelenmiştir.

Değişmeli birimli bir halkanın ideallerinin latisi, kompakt olarak ve esas olarak üretilmiş modüler bir çarpımsal latis oluşturur. Oysa modüler olmayan pek çok çarpımsal latis mevcuttur. Değişmeli halkalardaki 2-yutan ideal ve zayıf 2-yutan ideal kavramlarının, modüler olmayan çarpımsal latislere genelleştirmeleri ise 2-yutan eleman ve zayıf 2-yutan elemanlar tanımlanarak elde edilmiştir. Tanımlanan bu yeni elemanların, değişmeli halka ve çarpımsal latis teorisindeki asal, zayıf asal, asalımsı ve zayıf asalımsı elemanlarla olan ilişkileri irdelenmiştir. Dahası, bazı özel latisler için 2-yutan ve zayıf 2-yutan elemanlar cinsinden bir takım karakterizasyonlar elde edilmiştir.

ABSTRACT

2-ABSORBING ELEMENTS OF MULTIPLICATIVE LATTICES AND 2-ABSORBING PRIMARY IDEALS OF COMMUTATIVE RINGS

In this study, the concepts of 2-absorbing primary and weakly 2-absorbing primary ideals are defined as a generalization of primary ideals in commutative rings. So generalizations of 2-absorbing and weakly 2-absorbing ideals which are defined in literature by A. Badawi as generalizations of prime and weakly prime ideals in commutative rings are obtained. The relations among the concepts of prime, weakly prime, primary, 2-absorbing primary ideal and 2-absorbing primary, weakly 2-absorbing primary ideals are investigated.

Then we define 2-absorbing primary and weakly 2-absorbing primary submodules of multiplication modules over commutative rings and some basic properties are studied in detail.

The lattice of ideals of a commutative ring with identity is a compactly generated and principally generated modular lattice. However there are non-modular multiplicative lattices. The extensions of 2-absorbing and weakly 2-absorbing ideals of commutative rings to multiplicative lattices are obtained by defining 2-absorbing and weakly 2-absorbing elements. The relations among prime, weakly prime, primary and weakly primary elements in multiplicative lattices are investigated. Moreover some characterizations for some special lattices in terms of 2-absorbing and weakly 2-absorbing elements are obtained.

YENİLİK BEYANI

Tezin ikinci bölümünde, değişmeli halkalarda asalımsı ve zayıf asalımsı ideallerin genelleştirmesi olarak, 2-yutan asalımsı ideal ve zayıf 2-yutan asalımsı ideal kavramları tanımlanarak, ana özellikleri ile irdelenmiştir. Bu çalışmalar aşağıdaki gibi yayınlanmıştır:

- Badawi, A., Tekir, Ü., Yetkin, E., On 2-absorbing primary ideals in commutative rings, Bulletin Korean Mathematical Society, 4, 51 (2014) 1163-1173.
- Badawi, A., Tekir, Ü., Yetkin, E., On weakly 2-absorbing primary ideals of commutative rings, Journal of the Korean Mathematical Society, 52 (1) (2015) 97-111.

Üçüncü bölümde değişmeli halkalar üzerindeki çarpımsal modüllerin 2-yutan asalımsı alt modülleri tanımlanarak, detaylarıyla çalışılmıştır. Bu çalışma aşağıdaki makale ile yayına kabul edilmiştir:

- Mostafanasab H., Yetkin, E., Tekir, Ü., Darani, A.Y., On 2-absorbing primary submodules of modules over commutative rings, Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta (in press)

Değişmeli halkalarda 2-yutan ideal kavramının çarpımsal latislere genelleştirmesi olarak 2-yutan eleman ve zayıf 2-yutan eleman kavramları tanımlanarak, tüm özellikleri ile dördüncü bölümde incelenmiştir. Bir takım özel latislerin için bu elemanlar cinsinden farklı karakterizasyonları elde edilmiştir. Bu çalışma aşağıdaki gibidir:

- Jayaram, C., Tekir, Ü., Yetkin, E., 2-absorbing and weakly 2-absorbing elements in multiplicative lattices, Communications in Algebra, 42, 6 (2014) 2338-2353.

SEMBOLLER

$\vee$: Supremum

$\wedge$: İnfimum

$\cup$: Birleşim

$\cap$: Arakesit

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir.

$\subseteq$: Alt kümesidir.

$\not\subseteq$: Alt kümesi değildir.

$\leq$: L latisindeki sıralama bağıntısı

a_S : a nın S çarpımsal alt kümesine göre yerelleştirmesi

$\sqrt{a}$: a nın radikali

$Ann(M)$: M nn sıfırlayıcısı

$Boy L$: L nin boyutu

$\text{Çek } f$: f fonksiyonunun çekirdeği

L : Latis

$J(R)$: R halkasının Jacobian radikali

L_* : L latisindeki kompakt elemanların kümesi

$L(R)$: R halkasının ideallerinin latisi

$M-rad(N)$: N nin M -radikali

$Nil(R)$: R halkasının nilpotent elemanlarının kümesi

$N(G)$: G grubunun normal alt gruplarının ailesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{N}_0$: Sıfırdan farklı doğal sayılar kümesi

R : Değişmeli birimli halka

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar cismi

$Spec(R)$: R halkasının asal ideallerinin kümesi

$\mathbb{Z}$: Tam sayılar halkası

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 1.1 Dağılmalı olmayan latiş örnekleri	10
Şekil 1.2 İki ve üç elemanlı latiş örnekleri	11
Şekil 1.3 $(\mathbb{Z}, \leq)$ tam sayılar latisi	11
Şekil 1.4 $(\mathbb{N}, \leq, \text{ekok}, \text{ebob})$ latisi	12
Şekil 1.5 $(P(\{a, b, c, d, e, f\}), \subseteq, \cup, \cap)$ latisi	12
Şekil 1.6 $(\text{Sub}(\mathbb{Z}_{30}), \subseteq, \cup, \cap)$ latisi	13
Şekil 1.7 (30 un bölenleri, $\leq, \text{ekok}, \text{ebob}$) latisi	13
Şekil 1.8 $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \leq)$ latisi	24
Şekil 2.1 İdealler arasındaki ilişkiler	36

BÖLÜM 1 - GİRİŞ

Asal idealler, halka teorisinde önemli bir yere sahiptir. Dolayısıyla pek çok matematikçi asal ideallerin çeşitli genelleştirmelerine başvurmuştur. Örneğin zayıf asal ideal kavramı ilk olarak (Anderson ve Smith, 2003) de ortaya atılmıştır. Diğer taraftan, asal ideallerin farklı bir genelleştirmesi olarak 2-yutan idealler, (Badawi, 2007) de tanımlanmış ve Badawi ve Darani, zayıf 2-yutan idealleri (Badawi ve Darani, 2011) de çalışmıştır. Zayıf asal ideallerin çarpımsal latislere olan genelleştirmesi ise (Çallıalp ve ark., 2012) te yapılmıştır.

Bu genelleştirmelerden hareketle, tezde aşağıdaki gibi pek çok soruya cevap aranmıştır: Değişmeli halkalarda asalımsı ideallerin bir genelleştirmesi kurulabilir mi? Tanımlanacak olan bu yeni yapı değişmeli halka teorisindeki benzer ilişkileri korur mu? Bir has idealin 2-yutan asalımsı ideallere parçalanışı mümkün müdür? Bir takım halkalarda bu genelleştirmelerin genel formları belirlenebilir mi? Bazı halkalar bu idealler yardımıyla karakterize edilebilir mi?

Tezin ikinci bölümünde tanımlanan bu yapılar, üçüncü bölümde çarpımsal modüllere, dördüncü ve bölümde ise çarpımsal latislere genelleştirilerek benzer sorulara yanıtlar bulunmuştur.

Bu bölümde ise tez boyunca kullanılacak olan değişmeli halka, çarpımsal modül ve çarpımsal latislerdeki bu genelleştirmelere ve ön bilgilere yer verildi.

1.1 Değişmeli Halkalarda Asal İdeallerin Genelleştirmeleri

Tez boyunca kullanacağımız notasyonları sıralayalım. R ile değişmeli ve birimli bir halkayı göstereceğiz. R halkasının bir I idealine $I \neq R$ ise has ideal diyeceğiz. I idealinin radikali $\sqrt{I} = \{r \in R : r^k \in I, \exists k \in \mathbb{N}\}$ ile tanımlanırken, bilindiği gibi değişmeli halkalarda $\sqrt{I} = \bigcap_{I \subseteq P} P$ (P asal) sağlanır. $a \in R$ elemanına, bir n pozitif tam sayısı için $a^n = 0_R$ sağlandığı takdirde nilpotent eleman denir. $\sqrt{0_R}$ ile R nin nilpotent elemanlarının kümesini göstereceğiz. $\sqrt{0_R} = 0_R$ durumunda R ye indirgenmiş (reduced) halka diyeceğiz. R nin bir I idealinin nilpotent olması ise $I^n = \{0_R\}$ 1

sağlayan bir n pozitif tamsayısının mevcut olması anlamına gelir. R nin her I ideali ve her $a \in R$ elemanı için $(I:a) = \{r \in R : ra \in I\}$ olarak tanımlayacağız.

2003 te Anderson ve Smith Tanım 1.1.1 ile zayıf asal idealleri tanımlamıştır.

Tanım 1.1.1 (Anderson ve Smith, 2003) P , R nin bir has ideali olsun. $0 \neq ab \in P$ koşulunu sağlayan her $a, b \in R$ için $a \in P$ veya $b \in P$ sağlanıyorsa P idealine R nin bir zayıf asal ideali denir.

Her asal idealin bir zayıf asal ideal olduğu açıktır. Oysa bu gerektirmenin tersi doğru değildir.

Örnek 1.1.2 $R = \mathbb{Z}_4$ halkasında (0) idealini düşünelim. $2 \cdot 2 \in (0)$ iken $2 \notin (0)$ olduğundan (0) ideali açıkça asal ideal olmayıp bir zayıf asal idealdir.

Asalımsı ideallerin bir genelleştirmesi ise zayıf asalımsı idealler tanımlanarak elde edilmiştir.

Tanım 1.1.3 (Atani ve Farzalipour, 2005) R nin bir P has idealine, $0 \neq ab \in P$ koşulunu gerçekleyen her $a, b \in R$ için $a \in P$ veya $b \in \sqrt{P}$ sağlandığı takdirde R nin bir zayıf asalımsı ideali denir.

Değişmeli birimli bir halkada asal ideallerin farklı bir genelleştirmesi olarak 2-yutan ideal kavramı ise (Badawi, 2007) de tanımlandı.

Tanım 1.1.4 (Badawi, 2007) I , R nin bir has ideali olsun. $abc \in I$ eşitsizliğini sağlayan her $a, b, c \in R$ için $ab \in I$ veya $bc \in I$ veya $ac \in I$ olması gerekiyor ise I idealine 2-yutan ideal denir.

Bir 2-yutan idealin radikali için iki durum söz konusudur. Bu durumlar aşağıdaki teorem ile belirlenmiştir.

Teorem 1.1.5 (Theorem 2.4, (Badawi, 2007)) I , R nin 2-yutan ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlardan biri gerçekleşir:

(1) $\sqrt{I} = P$, R nin bir asal ideali ve $P^2 \subseteq I$ dir.

(2) P_1, P_2, I nun farklı minimal asal idealleri olmak üzere $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$ ve $P_1 P_2 \subseteq I$ dir.

2-yutan ideallerin bir genelleştirmesi olarak, zayıf 2-yutan idealler ise (Badawi ve Darani, 2011) de çalışıldı.

Tanım 1.1.6 (Badawi ve Darani, 2011) R halkasında bir I ideali için, $0 \neq abc \in I$ eşitsizliğini sağlayan her $a, b, c \in R$ için $ab \in I$ veya $bc \in I$ veya $ac \in I$ olması gerekiyor ise I idealine zayıf 2-yutan ideal denir.

Önerme 1.1.7 (Badawi, 2007) P_1 ve P_2 , R halkasının iki (zayıf) asal ideali ise $P_1 \cap P_2$ bir (zayıf) 2-yutan idealdir.

İspat $a, b, c \in R$ için $abc \in P_1 \cap P_2$ ($0 \neq abc \in P_1 \cap P_2$) olsun. Bu takdirde P_1 ve P_2 , (zayıf) asal idealler olduğundan ($a \in P_1$ veya $b \in P_1$ veya $c \in P_1$) ve ($a \in P_2$ veya $b \in P_2$ veya $c \in P_2$) sağlanır. Buradan $ab \in P_1 \cap P_2$ veya $bc \in P_1 \cap P_2$ veya $ac \in P_1 \cap P_2$ elde edilir. Dolayısıyla I bir (zayıf) 2-yutan idealdir. $\square$

1.2 Çarpımsal Modüller için Ön Bilgiler

R bir değişmeli birimli halka, M bir R -modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. $(N :_R M)$ ile $rM \subseteq N$ koşulunu gerçekleyen tüm $r \in R$ elemanlarının kümesini göstereceğiz. M modülünün sıfırlayıcısı $\{r \in R : rM = 0\}$ kümesini $Ann(M)$ veya $(0 :_R M)$ ile göstereceğiz.

Tanım 1.2.1 M bir R -modül olsun. Eğer M nin her N alt modülü için $N = IM$ olacak şekilde R nin bir I ideali bulunabiliyorsa, M ye çarpımsal modül denir. Dikkat edilecek olursa, $I \subseteq (N :_R M)$ ise $N = IM \subseteq (N :_R M) M \subseteq N$ olup, $N = (N :_R M) M$ elde edilir. (El-Bast ve Smith, 1988)

M nin bir N alt modülü için $N = IM$ yazılımındaki R nin I idealine, N nin takdim (presentation) ideali adı verilir. Tanımdan açıkça anlaşıldığı üzere, M nin her alt modülünün bir takdim idealine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin bir çarpımsal modül olmasıdır. N ve K , bir M çarpımsal R -modülün alt modülleri ve R nin I_1 ve I_2 idealleri için $N = I_1M$ ve $K = I_2M$ olsun. N ve K alt modüllerinin çarpımı NK ile gösterilir ve $NK = I_1I_2M$ ile tanımlanır. N ve K nin çarpımı N ve K nin takdimlerinden bağımsızdır. (bkz Theorem 3.4, (Ameri, 2003)) Ayrıca, $a, b \in M$ için ab çarpımı ile Ra ve Rb nin çarpımını kastederiz. Açıkça NK, M nin bir alt modülüdür ve $NK \subseteq N \cap K$ dir. (Ameri, 2003).

Tanım 1.2.2 M bir R -modül olsun. Eğer $IM = JM$ özdeşliğini gerçekleyen R nin her I ve J ideali için $I = J$ sağlanıyorsa, M ye bir kısaltmalı (cancellation) modül denir.

Sonlu üretilmiş sadık çarpımsal bir modül, kısaltmalı modüldür. (bkz. Corollary 10, (Smith, 1988)) Eğer M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R -modül (dolayısıyla kısaltmalı modül) ise M nin her N alt modülü ve R nin her I ideali için $(IN : M) = I(N : M)$ sağlandığını görmek kolaydır.

Asal ve asalımsı alt modüller modül teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 1.2.3 M bir R modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun.

(1) $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N$ iken $m \in N$ veya $a \in (N:_R M)$ sağlanıyorsa N ye M nin bir asal alt modülü adı verilir.

(2) $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in N$ iken $m \in N$ veya bir $k > 0$ pozitif tamsayısı için $a^k \in (N:_R M)$ sağlanıyorsa N ye M nin bir asalımsı alt modülü adı verilir.

Asal alt modül kavramını genişletmek için pek çok yola başvurulabilir. Örneğin Atani ve Farzalipour (Atani ve Farzalipour, 2007), zayıf asal alt modülleri aşağıdaki tanım yardımıyla asal alt modüllerin bir genişlemesi olarak tanımlamıştır.

Tanım 1.2.4 (Atani ve Farzalipour, 2007) N , bir M modülünün has alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ için $0 \neq am \in N$ iken $m \in N$ veya $a \in (N:_R M)$ sağlanıyorsa N ye M nin bir zayıf asal alt modülü adı verilir.

Çarpımsal modüllerin asal ve maksimal alt modülleri ise Teorem 1.2.5 yardımıyla belirlenir.

Teorem 1.2.5 (Corollary 2.11, (El-Bast ve Smith, 1988)) N , bir M çarpımsal R -modülün alt modülü olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) N , M nin bir asal alt modülüdür,

(2) $\text{Ann}(M/N)$, R nin bir asal idealidir.

(3) $\text{Ann}(M) \subseteq P$ olmak üzere bir R nin bir P asal ideali için $N = PM$ biçimindedir.

Teorem 1.2.6 (Teorem 2.5, (El-Bast ve Smith, 1988)) M bir sıfırdan farklı çarpımsal R -modül olsun.

(1) M nin her has alt modülü bir K maksimal alt modülü tarafından içerilir.

(2) K nin M nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul R nin bir P maksimal ideali için $K = PM \neq M$ olmasıdır.

İspat (1) N , M nin bir has alt modülü olsun. Bu takdirde M/N bir sıfırdan farklı çarpımsal modüldür. Dolayısıyla teoremin ispatı için herhangi sıfırdan farklı bir çarpımsal M modülünün bir maksimal ideale sahip olduğunu göstermek yeter. Bir $0 \neq m \in M$ alalım. Buradan $I = (0:m) = \{r \in R : rm = 0\}$, R nin bir has idealidir. Şu halde $I \subseteq P$ olacak şekilde bir P maksimal ideali vardır. Burada $PM \neq M$ dir. Gerçekten $PM = M$ varsayalım. $m \in M$ alalım. O halde $Rm = AM$ olacak şekilde R nin bir A ideali vardır. $Rm = AM = APM = PAM = Pm$ ve bir $p \in P$ için $m = pm$ dir. Fakat buradan $(1 - p) \in I \subseteq P$ çelişmesine varılır. Bu sebepten $M \neq PM$ dir. Burada M/PM , R/P cismi üzerinde bir vektör uzayı ve M/PM 1-boyutlu olduğundan PM , M nin maksimal alt modülüdür. Böylelikle (1) ispatlanmış olur.

(2) $(\Rightarrow)$ K , M nin bir maksimal alt modülü olsun. $Q = \text{Ann}(M/K)$ diyelim. Bu takdirde M/K basittir ve dolayısıyla Q , R nin maksimal idealidir. $K = (\text{Ann}(M/K))M = QM$ biçimindedir.

($\Leftarrow$) $M \neq PM$ olsun. O halde (1) de gösterdiğimiz üzere, eğer $M \neq PM$ ise PM , M nin maksimal alt modülü olarak bulunur. $\square$

Teorem 1.2.7 (Corollary 1.7, (El-Bast ve Smith, 1988)) M bir çarpımsal R -modül ve I_α ($\alpha \in \Lambda$), R nin bir idealler ailesi ise $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha M) = (\bigcap_{\alpha \in \Lambda} (I_\alpha + \text{Ann}(M)))M$ özdeşliği sağlanır.

Tanım 1.2.8 N , M nin bir sıfırdan farklı has alt modülü olsun. Bu durumda N nin M -radikali, $M - \text{rad}(N)$ ile gösterilirken ve N yi içeren tüm asal alt modüllerin arakesiti olarak tanımlanır. M nin N yi içeren hiç asal alt modülü yoksa $M - \text{rad}(N) = M$ dir.

Yardımcı Teorem 1.2.9 (El-Bast ve Smith, 1988) N bir R -modül M nin alt modülü olsun. Bu takdirde $\sqrt{(N : M)}M \subseteq M - rad(N)$ sağlanır.

İspat $M - rad(N) = M$ ise iddia açıktır. $M - rad(N) \neq M$ ve P, M nin N yi içeren bir asal alt modülü olsun. Buradan $(N : M) \subseteq (P : M)$ dir. $(P : M)$ nin bir asal ideal olduğunu gösterelim. $rs \in (P : M)$ varsayalım. Bu halde $rsM \subseteq P$ olur. Burada $sM \subseteq P$ veya $sm \in M \setminus P$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. İkinci durumda, P bir asal alt modül ve $rsm \in P$ olduğundan $rM \subseteq P$ bulunur. Böylece $r \in (P : M)$ veya $s \in (P : M)$ dir. Yani $(P : M)$ bir asal ideal olarak bulunur. Buradan $\sqrt{(N : M)}M \subseteq (P : M)M$, yani $\sqrt{(N : M)}M \subseteq (P : M)M \subseteq P$ sağlanır. P, N yi içeren herhangi bir alt modül olarak alındığından $\sqrt{(N : M)}M \subseteq M - rad(N)$ sonucuna varılır. $\square$

Sonuç 1.2.10 M bir sonlu üretilmiş R -modül, $P, Ann(M)$ yi içeren bir asal ideal ve $IM \subseteq PM$ olacak şekilde I, R nin bir ideali ise $I \subseteq P$ dir. Özel olarak M sonlu üretilmiş R -modül ve $P, Ann(M)$ yi içeren bir asal ideal ise $(PM : M) = P$ dir.

Teorem 1.2.11 (Theorem 2.12, (El-Bast ve Smith, 1988)) N bir çarpımsal R -modül M nin alt modülü ise $M - rad(N) = \sqrt{(N :_R M)}M$ dir.

İspat Genelliği kaybetmeden M yi bir sadık R -modül olarak alabiliriz. $\Omega = \{P \in Spec(R) : (N :_R M) \subseteq P\}$ diyelim. Buradan $\sqrt{N :_R M} = \bigcap_{P \in \Omega} P$ olup $\sqrt{N :_R M}M = (\bigcap_{P \in \Omega} P)M = \bigcap_{P \in \Omega} (PM)$ olur. $M = PM$ ise $M - rad(N) \subseteq PM$ açıktır. $M \neq PM$ olsun. P, R nin bir asal ideali olduğundan PM nin, M nin bir asal alt modülü olacağı göz önüne alınırsa, $M - rad(N) \subseteq PM$ ve buradan $M - rad(N) \subseteq \sqrt{N :_R M}M$ elde edilir.

Ters taraf Yardımcı Teorem 1.2.9 dolayısıyla açıktır. $\square$

Değişmeli halkalarda tanımlanan 2-yutan ve zayıf 2-yutan ideal kavramı, 2011 de Darani ve Soheilnia tarafından çarpımsal modüllerin alt modüllerinde 2-yutan ve zayıf 2-yutan alt modülleri tanımlanarak genelleştirdi.

Tanım 1.2.12 (Darani ve Soheilnia, 2011) N , M modülünün has alt modülü olsun.

(1) $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ iken $ab \in (N:_R M)$ veya $am \in N$ veya $bm \in N$ sağlanıyorsa N ye M nin bir 2-yutan alt modülü denir.

(2) $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $0 \neq abm \in N$ iken $ab \in (N:_R M)$ veya $am \in N$ veya $bm \in N$ sağlanıyorsa N ye M nin bir zayıf 2-yutan alt modülü denir.

Her 2-yutan alt modül açıkça bir zayıf 2-yutan alt modüldür. Ancak ters gerektirme genel olarak sağlanmaz. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklar.

Örnek 1.2.13 $R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkasını göz önüne alalım. $M = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ bir R -modül ve $N = 0$, M nin alt modülü olarak alınsın. Sıfır alt modülü her modülde bir zayıf 2-yutan alt modül olduğundan N , M nin bir zayıf 2-yutan alt modülüdür. Ancak $2 \cdot 3 \cdot (5 + 30\mathbb{Z}) = 0 \in N$ iken $2 \cdot 3 \notin (N:_R M)$, $2 \cdot (5 + 30\mathbb{Z}) \notin N$ ve $3 \cdot (5 + 30\mathbb{Z}) \notin N$ olduğundan N , M nin bir 2-yutan alt modülü değildir.

Teorem 1.2.14 (Theorem 2.3, Darani ve Soheilnia, 2011)

M bir R -modül olsun. Bu takdirde

(1) M nin herhangi iki asal alt modülünün arakesiti 2-yutan alt modüldür.

(2) M nin herhangi iki zayıf asal alt modülünün arakesiti zayıf 2-yutan alt modüldür.

1.3 Çarpımsal Latisler için Ön Bilgiler

Bu bölümde, tezin dördüncü bölümünde ihtiyaç duyacağımız çarpımsal latis ve C -latis yapılarının temel özellikleri verilecektir.

1.3.1 Çarpımsal latis

Tanım 1.3.1.1 K boş olmayan bir küme ve " $\leq$ " bu küme üzerinde bir bağıntı olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikleri gerçekleyen " $\leq$ " bağıntısına K üzerinde bir (kısmi) sıralama bağıntısı ve $(K, \leq)$ ye bir kısmi sıralı küme ya da kısaca sıralı küme adı verilir.

- (1) Her $a \in K$ için $a \leq a$. (Yansıma özelliği)
- (2) $a, b \in K$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ iken $a = b$. (Ters simetri özelliği)
- (3) $a, b, c \in K$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ iken $a \leq c$. (Geçişme özelliği)

$(K, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olmak üzere $A \subseteq K$ olsun. Herhangi iki $a, b \in A$ elemanı için $a \leq b$ veya $b \leq a$ sağlanıyorsa, yani A nın herhangi iki elemanı karşılaştırılabilir ise A ya tamamen sıralı küme ya da zincir (chain) adı verilir.

Tanım 1.3.1.2

- (1) $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde her $a, b \in L$ elemanının bir supremumu ve infimumu

$$\sup \{a, b\} = a \vee b \text{ ve } \inf \{a, b\} = a \wedge b$$

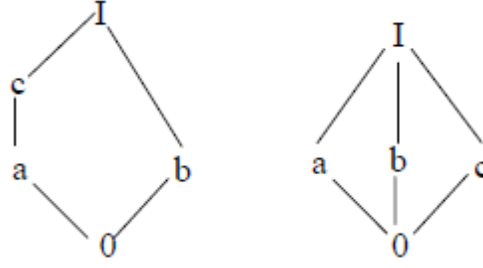
varsa, L ye latis adı verilir. Bir latiste boş olmayan sonlu her A alt kümesi için $\sup(A)$ ve $\inf(A)$ vardır. Bu durum $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olarak alındığında $\sup(A)$ nın varlığı tümevarım yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

- (2) L latisinin her alt kümesinin supremumu ve infimumu varsa bu latise tam (complete) latis denir. Burada $L \subseteq L$ olduğundan açıkça $\sup(L)$ ve $\inf(L)$ varlığı görülür. O halde tam latiste bir en büyük eleman ve en küçük eleman her zaman vardır.

Tanım 1.3.1.3 L bir latis olsun. Her $a, b, c \in L$ için

- (1) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ sağlanıyorsa L ye dağılmalı latis,
- (2) $a \leq c$ iken $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ ise L ye modüler latis denir.

Örnek 1.3.1.4



Şekil 1.1(a) Şekil 1.1 (b)

Şekil 1.1 Dağılmalı olmayan latiş örnekleri

Şekil 1.1 (a) da, $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ iken $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = I \wedge c = c$ olur. (b) de, $a \vee (b \wedge c) = a \vee 0 = a$ iken $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = I \wedge I = I$ olduğundan her ikisi de birer dağılmalı olmayan latistir.

Tanım 1.3.1.5 Bir $a \in L$ alalım.

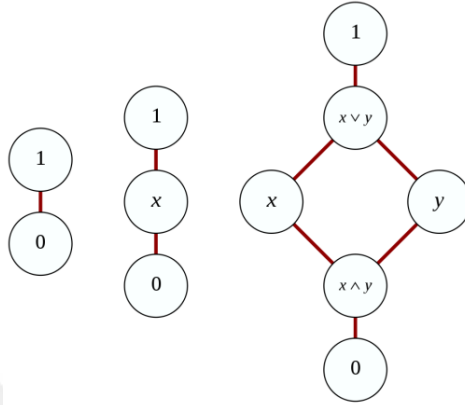
- (1) $a < 1$ ise a ya has (öz) eleman,
- (2) $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b = 0$ olacak şekilde bir $b \in L$ elemanı bulunabiliyor ise a ya tamlanabilir eleman, b ye a nın tamlayanı adı verilir.

Şekil 1.1 (a) da $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b = 0$ olduğundan a ve b tamlanabilir elemanlardır. Ayrıca $b \vee c = 1$ ve $b \wedge c = 0$ olduğundan c de bir tamlanabilir elemandır. Ayrıca bir latiste bir elemanın tamlayanı birden fazla olabilir. Şekil 1.1 (b) den $a \vee b = a \vee c = b \vee c = 1$ ve $a \wedge b = b \wedge c = a \wedge c = 0$ olduğu görülür. O halde bu latiste herhangi iki eleman birbirinin tamlayanıdır.

Örnekler 1.3.1.6

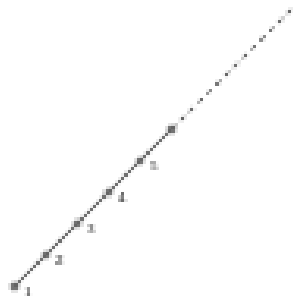
- (1) L bir latiş olsun. L nin her tam sıralı alt kümesi, bir supremum ve infimuma sahiptir, gösterelim: $L_0 \subseteq L$ bir zincir olsun. O halde her $a, b \in L_0$ için $a \leq b$ veya

$b \leq a$ sağlanır. $a \leq b$ olsun. O halde $\sup\{a, b\} = a \vee b = b$ ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b = a$ olarak elde edilir. Dolayısıyla her L_0 tam sıralı alt kümesi için $\sup(L_0)$ ve $\inf(L_0)$ vardır. Ayrıca her tam sıralı küme bir dağılmalı latistir. Herhangi $a, b, c \in L_0$, $a \leq b \leq c$ alalım. O halde $a \vee (b \wedge c) = a \vee b = b$ ve $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge c = b$ olduğundan L_0 bir dağılmalı latistir.



Şekil 1.2 İki ve üç elemanlı latis örnekleri

(2) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ den her biri bilinen $\leq$ sıralamasına göre her iki eleman karşılaştırılabilir olduğundan tamamen sıralı ve dağılmalı latislerdir. Ancak hiç biri en büyük elemana sahip olmadığından tam latis değildir.



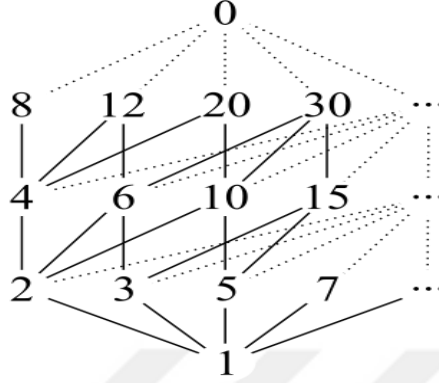
Şekil 1.3 $(\mathbb{N}, \leq)$ tamamen sıralı latisi

(3) $x < y$ için $[x, y]$ kapalı aralığı, $\mathbb{R}$ nin tamlık aksiyomu ($\mathbb{R}$ nin boş olmayan üstten sınırlı her alt kümesi en büyük elemana sahiptir) gereğince bir tam latistir. $\mathbb{Q}$ nun tam latis olmayışının sebebi yalnızca en büyük elemanın olmaması sorunu değildir. Örneğin $\{s \in \mathbb{Q} : s^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}$ kümesi üstten sınırlı olmasına rağmen bu üst sınırların en küçüğü (supremumunun) bulunamaz.

(4) $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tam sayılar kümesi üzerinde tanımlanan

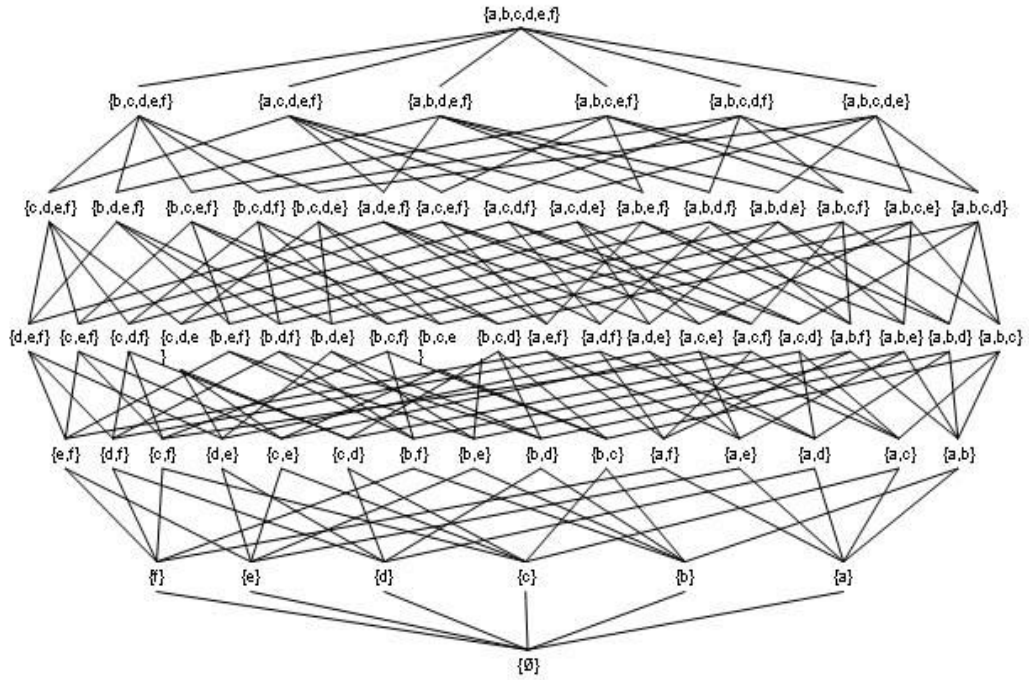
$$a \leq b \Leftrightarrow a|b$$

bölme bağıntısı ile bir sıralı kümedir. Ayrıca $a \vee b = \text{ekok}(a, b)$ ve $a \wedge b = \text{ebob}(a, b)$ olmak üzere bir dağılmalı tam latistir.



Şekil 1.4 $(\mathbb{N}, \leq, \text{ekok}, \text{ebob})$ latisi

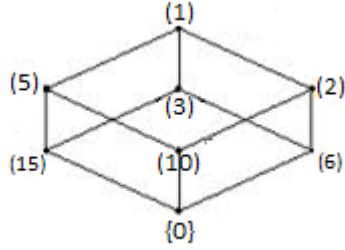
(5) Bir X kümesinin kuvvet kümesi $(P(X), \cup, \cap)$ bir dağılmalı latis oluşturur.



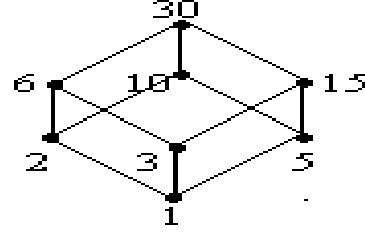
Şekil 1.5 $(P(\{a, b, c, d, e, f\}), \subseteq, \cup, \cap)$ latisi.

(6) Sonsuz devirli grup $\mathbb{Z}$ nın alt gruplarının latisi $\text{Sub}\mathbb{Z}$ yi düşünelim. Bu latis aslında $(\mathbb{N}_0, \leq, \text{ekok}, \text{ebob})$ latisine izomorftur. Örneğin Şekil 1.6 ve Şekil 1.7 de

görülebileceği gibi kapsama bağıntısına göre Z_{30} un alt gruplarının latisi ile (30 un bölenleri, $\leq$, *ekok*, *ebob*) latisi izomorftur. Dolayısıyla dağılmalı tam latistir.



Şekil 1.6 ($Sub(Z_{30}), \subseteq, \cup, \cap$) latisi



Şekil 1.7 (30 un bölenleri, $\leq$, *ekok*, *ebob*) latisi

(7) Herhangi bir G grubunun tüm normal alt gruplarının ailesi $N(G)$, $N \wedge K = N \cap K$ ve $N \vee K = NK$ işlemleriyle birlikte bir modüler latis oluşturur:

Herhangi $H, K, N \in N(G)$, $N \subseteq H$ için açıkça $(H \wedge K) \vee N = (H \cap K)N \subseteq H \cap KN = H \wedge (K \vee N)$ küme kapsamı her zaman gerçekleşir. Tersine bir $a \in H \wedge (K \vee N)$ ise $a \in H$ ve $a = kn$ olacak şekilde $k \in K$ ve $n \in N$ bulunur. Burada $N \subseteq H$ ve N bir alt grup olduğundan $k = an^{-1} \in H$ olup $a = kn \in (H \wedge K) \vee N$, yani $H \wedge (K \vee N) = (H \wedge K) \vee N$ elde edilir.

Tanım 1.3.1.7 $a \in L$ olsun. Eğer $a \leq \bigvee b_\alpha$ yı sağlayan her $\{b_\alpha: \alpha \in \Pi\}$ için $a \leq b_{\alpha_1} \vee b_{\alpha_2} \vee \dots \vee b_{\alpha_n}$ olacak şekilde sonlu $\{b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \dots, b_{\alpha_n}\}$ alt kümesi bulunabiliyorsa a ya kompakt eleman denir.

Tanım 1.3.1.8 L latisi en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 ve 1 kompakt olmak üzere bir tam latis olsun. L üzerinde değişme, birleşme ve supremumun dağılma özelliğine sahip olan ve 1 elemanını çarpımsal birim kabul eden bir çarpma işlemi tanımlı ise L ye çarpımsal latis denir.

Örnek 1.3.1.9 (Dilworth, 1962) R birimli, değişmeli bir halka olsun. R nin tüm ideallerinin ailesini $L(R)$ ile gösterelim. $L(R)$ kümesi üzerinde tanımlanan $\subseteq$ kapsama

bağıntısına göre, R nin iki ideali I ve J için $I \wedge J = I \cap J$, $I \vee J = I + J$ ve $I \cdot J = IJ$ işlemleri ile bir modüler çarpımsal latis oluşturur. R nin bir idealinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul bu idealin sonlu üretilmiş olmasıdır.

İspat

- Öncelikle $(L(R), \subseteq, \cap, +, \cdot)$ yapısının bir çarpımsal latis olduğunu gösterelim. Herhangi üç $I, J, K \in L(R)$ alalım. Burada $I \subseteq I$ her zaman geçerli olduğundan yansıma özelliği sağlanır. $I \subseteq J$ ve $J \subseteq I$ kapsamalarının aynı anda sağlanması $I = J$ olmasını gerektireceğinden ters simetri özelliği geçerlidir. Eğer $I \subseteq J$ ve $J \subseteq K$ sağlanıyor ise bu durum $I \subseteq K$ olmasını gerektirir. Böylece geçişme özelliği de sağlanmış olur. Dolayısıyla $(L(R), \subseteq)$ bir sıralı kümedir.

- Her $I, J \in L(R)$ için $I \cap J$ ve $I + J$ kümelerinden her ikisi de R nin birer ideali olduğundan $I \wedge J$ ve $I \vee J$ mevcuttur. Dolayısıyla $(L(R), \subseteq, \cap, +)$ bir latis oluşturur. Ayrıca her I ideali için $\{0\} \subseteq I \subseteq R$ sağlandığından kapsama bağıntısına göre en küçük elemanın $\{0\}$ ve en büyük elemanın R elemanı olduğu açıktır. $I \cdot J = IJ \in L(R)$ ile tanımlanan çapma işleminin kapalı olduğu görülür. Bu işlem için birim eleman $I \cdot R = I$ olduğundan $R \in L(R)$ elemanıdır. Bunun yanı sıra $I \cdot (J \cdot K) = (I \cdot J) \cdot K$ (birleşme özelliği), $I \cdot J = J \cdot I$ (değişme özelliği) ve $I \cdot (J + K) = I \cdot J + I \cdot K$ (supremum üzerine dağılma özelliği) sağlandığından $(L(R), \subseteq, \cap, +, \cdot)$ bir çarpımsal latistir.

- Şimdi $L(R)$ nin bir modüler latis olduğunu gösterelim. $I \subseteq K$ olmak üzere herhangi üç $I, J, K \in L(R)$ alalım. Burada $I \vee (J \wedge K) = I + (J \cap K) \subseteq I + J$ ve $I \vee (J \wedge K) = I + (J \cap K) \subseteq K$ birlikte sağlandığından $I \vee (J \wedge K) \subseteq (I + J) \cap K = (I \vee J) \wedge K$ bulunur. Ters kapsamayı göstermek için herhangi bir $a \in (I \vee J) \wedge K = (I + J) \cap K$ alalım. Burada $a = (b + c) \in K$ olacak şekilde $b \in I$ ve $c \in J$ vardır. $b \in I \subseteq K$ ve $a \in K$ olduğundan $c = a - b \in K$ elde edilir. Sonuç olarak $a = b + c \in I + (J \cap K) = I \vee (J \wedge K)$ bulunur. Her iki kapsamadan modüler özelliğin sağlandığı görülür.

- J , R nin bir kompakt ideali olsun. J nin sonlu üretilmiş olduğunu gösterelim. $n > 0$ vardır. Buradan $(a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n}) \subseteq J \subseteq \bigcup_{i=1}^n (a_{\alpha_i})$, yani $J = (a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_n})$ sonlu üretilmiş olarak bulunur.

Tersine, $J = (a_1, \dots, a_n)$ sonlu üretilmiş ve $J \subseteq \bigcup O_i$ olsun. O halde J nin her elemanı, birleşimi oluşturan kümelerden en az birinin içine düşer. Her $j = 1, \dots, n$ için $a_j \in O_j$ diyelim. Böylece $J = (a_1, \dots, a_n) \subseteq \bigcup_{j=1}^n O_j$ elde edilir. Yani J kompakt olarak elde edilir. Dolayısıyla $L(R)$, kompakt olarak üretilen bir latistir.

Örnek 1.3.1.10 Her $a \in L$ için, $[a, 1_L]$ aralığı $L/a = \{b \in L : a \leq b\}$ kümesi ile, bir $(c \vee a) \in L/a$ elemanı ise genellikle c/a veya $\bar{c}$ ile gösterilir. Bu aile $\bar{c} \circ \bar{d} = \overline{cd \vee a}$ işlemi ile birlikte bir çarpımsal latis oluşturur. Diğer notasyon ile bu işlem $c/a \circ d/a = \overline{cd/a}$ olarak yazılır. Bilindiği gibi bir R halkası ve $I \in L(R)$ ideali için $L(R/I)$ latisi ile $L(R)/I = [I, R]$ izomorftur. $e \in L$ bir kompakt eleman ise $e/a = \bar{e}$ elemanı da L/a latisinde kompakt bir elemandır. Gösterelim:

$e/a \leq \bigvee (b_{\alpha}/a)$ olsun. O halde $e \leq \bigvee b_{\alpha}$ olmak zorundadır. $e \in L$ kompakt olduğundan bir n doğal sayısı için $e \leq \bigvee_{i=1}^n b_{\alpha_i}$ sağlanır. Böylece $e/a \leq \bigvee_{i=1}^n (b_{\alpha_i}/a)$ olup, e/a nın L/a da kompakt olduğu gösterilmiş olur. $\square$

1.3.2 C-latis

Tanım 1.3.2.1 L (modüler olması gerekmeyen) bir tam latis ve C bir takım kompakt elemanların ailesi olsun. Eğer L latisi C deki elemanların supremumları ile üretiliyor ise L latisine C -latis adı verilir. Başka bir deyişle L bir C -latis ise L deki her eleman, C deki bir takım elemanların supremumları biçiminde yazılabilir.

Örneğin herhangi bir değişmeli birimli R halkası için $L(R)$ idealler latisi bir C -latistir. Bu tez boyunca L ile bir C -latisi, L_* ile L deki kompakt elemanların kümesini göstereceğiz.

Not 1.3.2.2 Bir C -latiste kompakt elemanların sonlu çarpımı kompaktır.

$(a : b) = \bigvee \{x \in L : xb \leq a\}$ olarak tanımlanır.

Not 1.3.2.3 (Dilworth, 1962) Çarpımsal latislerde bölüm ve çarpım işlemlerine ilişkin temel bağıntılar ve özellikler aşağıdaki gibidir:

- (1) $(a: b)b \leq a$.
- (2) $xb \leq a$ ise $x \leq (a: b)$ dir.
- (3) $b \leq a$ olması için gerek ve yeter koşul $(a: b) = 1$ olmasıdır.
- (4) $(a \wedge b): c = (a: c) \wedge (b: c)$.
- (5) $a: (bc) = (a: b): c$.
- (6) $a \leq (a: b)$.
- (7) $a \leq (ab: b)$.
- (8) $(a: c) \vee (b: c) \leq (a \vee b): c$.
- (9) $(a \wedge b)c \leq (ac) \wedge (bc)$.
- (10) $a \vee c = 1$ ise $(a \wedge b) \vee c = b \vee c$ dir.
- (11) $(a \wedge b): b = (a: b)$.
- (12) $a: (a \vee b) = (a: b)$.
- (13) $a: (b \vee c) = (a: b) \wedge (a: c)$.
- (14) $a \vee c = b \vee c = 1$ ise $(ab \vee c) = 1$ dir.
- (15) $(a_1 \vee \dots \vee a_n)^{k_1 + \dots + k_n} \leq a_1^{k_1} \vee \dots \vee a_n^{k_n}$.

Tanım 1.3.2.4 (Dilworth, 1962) Bir $e \in L$ elemanı verilsin. Her $a, b \in L$ için,

- (1) $a \wedge be = ((a: e) \wedge b)e$ ise e ye infimum esas eleman,
- (2) $a \wedge e = (a: e)e$ ise e ye zayıf infimum esas eleman,
- (3) $(ae \vee b): e = (b: e) \vee a$ ise e ye supremum esas eleman,
- (4) $ae: e = (0: e) \vee a$ ise e zayıf supremum esas eleman adı verilir.

L nin bir elemanı (1) ve (3) ü birlikte sağlıyor ise esas eleman, (2) ve (4) ü birlikte sağlıyor ise zayıf esas eleman adını alır. Burada dikkat edilecek olursa, (2) tanımı, (1) de $b = 1$ alınarak, (4) tanımı ise (3) te $b = 0$ alınarak özel hal olarak elde edilir. Dolayısıyla her esas eleman bir zayıf esas elemandır. Şayet $a \leq e$ ise $(a: e)e = a$ ve $(0: e) \leq a$ ise $(ae): e = a$ elde edilir.

Esas ve zayıf supremum/infimum esas elemanlar için aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:

Teorem 1.3.2.5 (Proposition 1.1, (Anderson, 1976)) L bir çarpımsal latis ve $x \in L$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçekleşir.

- (1) x infimum (supremum) esas eleman ise x bir zayıf infimum (supremum) esas elemandır.
- (2) x in bir zayıf infimum eleman olması için gerek ve yeter koşul $a \leq x$ iken $a = cx$ olacak şekilde bir $c \in L$ bulunmasıdır.
- (3) x in bir zayıf supremum eleman olması için gerek ve yeter koşul $ax \leq bx$ iken $a \leq b \vee (0:x)$ olmasıdır.
- (4) x bir infimum esas eleman ise her $a \in L$ için $(a:x)x = a \wedge x$ dir.
- (5) x bir supremum esas eleman ise her $a \in L$ için $(ax):x = a \vee (0:x)$ dir.
- (6) x in bir supremum eleman olması için gerek ve yeter koşul her $a \in L$ için $a \vee x$ elemanın L/a latisinde zayıf supremum esas eleman olmasıdır.
- (7) L modüler latis olsun. x bir (zayıf) infimum esas eleman ise $a \vee x$ elemanı L/a latisinde (zayıf) infimum esas elemandır.
- (8) L modüler latis olsun. x in esas eleman olması için gerek ve yeter koşul zayıf esas eleman olmasıdır.
- (9) $x \in L$ bir esas eleman ise $x/a = \bar{x}$ elemanı, L/a latisinde esas elemandır.

İspat

- (1) x bir infimum esas eleman olsun. Şu halde her $a, b \in L$ için $a \wedge be = ((a:e) \wedge b)e$ sağlanır. O halde $b = 1 \in L$ için de $a \wedge e = (a:e)e$ özdeşliği gerçekleşir. Dolayısıyla x bir zayıf infimum esas elemandır.

(2) x bir zayıf infimum eleman ve $a \leq x$ olsun. O halde $a = a \wedge x = (a:x)x$ olduğundan $c = (a:x)$ olarak bulunur. Tersine $a \wedge x \leq x$ olduğundan hipotez gereğince bir $c \in L$ için $a \wedge x = cx$ gerçekleşir. O halde $c \leq (a:x)$ olup $a \wedge x \leq (a:x)x$ olur. Dolayısıyla x bir zayıf infimum elemandır.

(3) x bir zayıf supremum eleman ve $ax \leq bx$ olsun. Buradan $(ax:x) \leq (bx:x)$ olup, x in bir zayıf supremum eleman olmasından $a \leq a \vee (0:x) = (ax:x) \leq (bx:x) \leq b \vee (0:x)$ elde edilir.

(4) x bir infimum esas eleman ise her $a, b \in L$ için $a \wedge bx = ((a:x) \wedge b)x$ geçerlidir. Bu özdeşlikte özel olarak $b = 1$ olarak alınırsa $(a:x)x = a \wedge x$ elde edilir.

(5) x bir supremum esas eleman ise her $a, b \in L$ için $(ax \vee b):x = (b:x) \vee a$ sağlanır. Burada $b = 0$ alınırsa $(ax):x = a \vee (0:x)$ bulunur.

(6) ve (7) nin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

(8) x bir zayıf esas eleman olsun. Herhangi $a, b \in L$ için

$(a \wedge bx) = x((a \wedge bx):x) = x((a:x) \wedge (bx:x)) = x((a:x) \wedge ((0:x) \vee b)) = x(0:x) \vee ((a:x) \wedge b) = x(0:x) \vee x((a:x) \wedge b) = x((a:x) \wedge b)$ olur. Burada birinci eşitlik x in zayıf infimum esas eleman olmasından, üçüncü eşitlik zayıf supremum esas eleman olmasından, ve dördüncüsü ise L nin modüler olmasından elde edilir. Şimdi de x in supremum esas eleman olduğunu yani $(xa \vee b):x \leq a \vee (b:x)$ olduğunu gösterelim: x bir zayıf supremum esas eleman olduğundan $x((xa \vee b):x) \leq x(a \vee (b:x))$ olduğunu göstermek yeterlidir: x in zayıf infimum esas eleman olduğundan

$$x((xa \vee b):x) = (xa \vee b) \wedge x$$

L modüler olduğundan $(xa \vee b) \wedge x = xa \vee (b \wedge x)$, ve yeniden x in zayıf infimum esas eleman olmasından $xa \vee x(b:x) = x(a \vee (b:x))$ elde edilir. Böylece $x((xa \vee b):x) = x(a \vee (b:x))$ bulunur.

(9) x , L nin bir esas elemanı olsun. Herhangi $\bar{c}, \bar{d} \in L/a$ alalım. O halde

$$\begin{aligned} [(\bar{c} \vee \bar{d}) \circ \bar{x}]:\bar{x} &= [(\bar{c} \vee \bar{d}) \circ (x \vee a)]:(x \vee a) = (c \vee dx \vee a):(x \vee a) \\ &= (c \vee dx \vee a):x = (\bar{c} \vee \bar{d}x):x = (\bar{c}:x) \vee \bar{d} = \bar{c}:(x \vee a) \vee \bar{d} \end{aligned}$$

olduğundan $\bar{x}$, L/d nin bir supremum esas elemanıdır. $\bar{x}$ in L/d nin bir infimum esas elemanı olduğu benzer yolla gösterilebilir. Dolayısıyla $\bar{x}$, L/d nin bir esas elemanıdır.

□

Teorem 1.3.2.6 (Theorem 1.3, (Anderson, 1976)) L bir çarpımsal latıs ise L deki her zayıf esas eleman kompakttır.

İspat $a = \bigvee a_\alpha$ olsun. a zayıf infimum esas eleman olduğundan $a_\alpha = a \wedge a_\alpha = a(a_\alpha : a)$ dır. Buradan $a = \bigvee a_\alpha = \bigvee (a(a_\alpha : a)) = a(\bigvee (a_\alpha : a))$ olur. a aynı zamanda zayıf supremum esas eleman olduğundan $1 = \bigvee (a_\alpha : a) \vee (0 : a)$ dır. 1 kompakt olduğundan $1 = \bigvee (a_{\alpha_1} : a) \vee (a_{\alpha_2} : a) \vee \dots \vee (a_{\alpha_n} : a) \vee (0 : a)$ olacak şekilde sonlu $\{0, a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_n}\}$ kümesi vardır. Böylelikle $a = a(a_{\alpha_1} : a) \vee a(a_{\alpha_2} : a) \vee \dots \vee a(a_{\alpha_n} : a) \vee a(0 : a) = a_{\alpha_1} \vee a_{\alpha_2} \vee \dots \vee a_{\alpha_n}$ elde edilir. □

Teorem 1.3.2.7 (Lemma 3.3-3.4, (Dilworth, 1962))

(1) İki infimum esas elemanın çarpımı da infimum esas elemandır.

(2) İki supremum esas elemanın çarpımı da supremum esas elemandır.

İspat (1) x ve y iki infimum esas eleman olsun. Bu takdirde

$$(a \wedge (b : xy)xy = (a \wedge (b : y) : x)xy = (ax \wedge (b : y))y = axy \wedge b,$$

yani xy bir infimum esas eleman olarak elde edilir.

(2) x ve y iki supremum esas eleman olsun. Şu halde

$$(a \vee bxy) : (xy) = (a \vee bxy) : y : x = (a : y \vee bx) : x = (a : y) : x \vee b = a : (xy) \vee b.$$

Yani xy bir supremum esas eleman olarak bulunur. □

Tanım 1.3.2.8

- (1) Bir n pozitif tam sayısı için $a^n = 0$ ise a ya nilpotent eleman,
- (2) $a = a^2$ sağlanıyorsa a ya idempotent eleman,
- (3) $a \in L$ ve $a^\omega = \bigwedge_{n=1}^{\infty} a^n$ elemanlarının her ikisi de kompakt elemanlar ise a ya kuvvetli kompakt eleman adı verilir. Kuvvetli kompakt elemanlara ilişkin ayrıntılı bilgi için bkz (Jayaram ve Johnson, 1997).

Teorem 1.3.2.9 $e \in L$ elemanın bir esas eleman olması için gerek ve yeter koşul L de tamlanabilir olmasıdır.

İspat e bir esas eleman olsun. Bu takdirde $(0:e) \wedge e \leq 0$, yani $(0:e) \wedge e = 0$ olur. Supremum için ise $(0:e) \vee e = (0 \vee (e \wedge e)):e = (e:e) = 1$ olduğundan $(0:e)$ elemanı e nin tamlayanıdır. Tersine e nin e' tamlayanı ile birlikte bir tamlanabilir eleman olduğunu varsayalım. Bu durumda $(x:e) = (x:e')$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan $(a \vee (b \wedge e)):e = a \vee (b \wedge e) \vee e' = a \vee e' \vee b = (a:e) \vee b = (a \wedge b:e) \wedge e = (a \wedge (b \vee e')) \wedge e = (a \wedge e) \wedge b$ sağlandığından e bir esas eleman olarak bulunur. $\square$

1.3.3 Örnekler (Anderson, 1974)

Örnek 1.3.3.1 Değişmeli birimli R halkasının ideallerinin latisi $L(R)$ yi göz önüne alalım. I, R nin bir esas ideali ise I, L latisinde bir esas elemandır.

İspat $I = (c)$, R nin bir esas ideali olsun. $x \in AI \cap B$ alalım. Buradan $x = ac$ olacak şekilde bir $a \in A$ vardır. Buradan $a \in (B:I)$ olup $a \in A \cap (B:I)$ ve böylece $x = ac \in (A \cap (B:I))I$ olur. Yani I nin infimum esas eleman olduğu görülür. Şimdi I nin supremum esas eleman olduğunu gösterelim. $y \in (A + BI):I$ olsun. Buradan $yc \in A + BI \Rightarrow yc = a + bc$ olacak şekilde $a \in A$ ve $b \in B$ vardır. Böylece $a = (y - b)c$ yani

$y - b \in (A:I)$ olup $y = (y - b) + b \in (A:I) + B$ sağlanır. I, L nin bir esas elemanıdır. $\square$

Böylece değişmeli halkanın her esas ideali, idealler latisinde bir esas elemandır. Ancak tersi genel olarak doğru değildir. Bu durum için aşağıdaki ters örnekler verilebilir.

Hatırlanacak olursa, tek maksimal ideale sahip olan bir latise yerel latis adı verilir.

Örnek 1.3.3.2 S , üzerinde birleşme, birim eleman 0 ve değişme özelliklerine sahip bir ikili işlem tanımlı olan bir küme (değişmeli monoid) ve $1 \in S$ olsun. Bu durumda S nin bir ideali, $JS \subseteq J$ yi gerçekleyen bir $J \subseteq S$ alt kümesi olarak tanımlanır. Aslında $1 \in S$ olduğundan $JS = J$ olur. S nin herhangi iki ideali J ve K ise $JK = \{jk : j \in J, k \in K\}$ yine bir idealdir. Bu çarpım açıkça değişmeli, birleşmeli ve supremum işlemi üzerine dağılmalı olup S yi çarpımsal birim olarak kabul eder. Bu çarpma işlemi ile birlikte S nin tüm ideallerinin kümesi $L(S)$ dağılmalı çarpımsal latis oluşturur. Bir $u \in S$ için $uv = 1$ olacak şekilde $v \in S$ bulunabiliyorsa u ya birimsel denir. Tüm birimsel elemanların kümesi bir değişmeli grup ve birimsel olmayan elemanlar ise S nin tek maksimal elemanını oluşturur. Dolayısıyla $L(S)$ bir yerel dağılmalı çarpımsal latistir. S nin esas idealleri infimum esas eleman olan ancak supremum esas olmayan elemanlardır.

S de herhangi (a) esas idealinin bir infimum esas eleman olduğunu gösterelim: Herhangi J, K idealleri için $(J \cap (K:(a)))(a) \subseteq J(a) \cap K$ sağlanır. Diğer taraftan $y \in J(a) \cap K$ alalım. Buradan $y \in K$ ve bir $j \in J$ için $y = ja$ biçimindedir. Buradan $j \in (K:(a))$ ve dolayısıyla $y = ja \in (J \cap (K:(a)))(a)$ bulunur. Bir çarpımsal latiste ters kapsama her zaman sağlanacağından $(J \cap (K:(a)))(a) = J(a) \cap K$ elde edilir.

Ancak bir halkanın esas idealinin, idealler latisinde bir zayıf supremum esas eleman olması gerekmez. Örnek 1.3.3.3 bu duruma bir örnektir:

Örnek 1.3.3.3 $S = \{0, 1, x, y\}$ kümesi üzerinde çarpma işlemi tanımlı olan bir yarıgrup ve $x = x^2$, $y = y^2$, $xy = 0$ olsun. Bu takdirde (x) ve (y) infimum esas elemanlar iken hiçbirisi zayıf supremum esas eleman değildir. Çünkü $((x^2):(x)) = S \neq (0:(x)) \vee (x)$ dır.

R tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğunda Örnek 1.3.3.1 deki ifadenin tersi de doğrudur. Başka bir deyişle, Teorem 1.3.3.4 ile ispatlanacağı gibi tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgenin idealler latisi $L(R)$ deki esas elemanlar, tam olarak R nin esas idealleridir.

Teorem 1.3.3.4 R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge ve $L = L(R)$ olsun. Bu takdirde $I \in L$ bir esas eleman ise I , R nin bir esas idealidir.

İspat $I = (a_1, \dots, a_k)$, R nin idealler latisinde bir esas eleman olsun. Şu halde $(a_i) \subseteq I$ ve dolayısıyla $(a_i) = (a_i) \cap I = ((a_i):I)I$ olur. $X_i = (a_i):I$ diyelim. Buradan $(a_i) = X_i I$ yazılabilir. O halde

$$a_i = x_{i1}a_1 + \dots + x_{ik}a_k ; i = 1, \dots, k$$

olacak şekilde $x_{i1}, \dots, x_{ik} \in X_i$ vardır.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - x_{11} & -x_{12} & \dots & -x_{1k} \\ -x_{21} & 1 - x_{22} & \dots & -x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x_{k1} & -x_{k2} & \dots & 1 - x_{kk} \end{vmatrix}$$

determinantını oluşturalım. O halde her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\Delta a_i = 0$ olup, R bir tamlık bölgesi olduğundan $\Delta = 0$ sonucuna varılır. Diğer taraftan bir $x \in X_1 + \dots + X_k$ için $\Delta = 1 - x$ yazılabilir. Böylece $x_1 + \dots + x_n = 1$ olacak şekilde $x_i \in X_i$ bulunur. $(a_i) = X_i I$ olduğundan $x_i a_i = r_{ij} a_i$ eşitliğini gerçekleyen r_{ij} elemanları mevcuttur. $ebob(a_1, \dots, a_k) = d$ diyelim. R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olduğundan $x_i, \frac{a_i}{d}$ nin bir katıdır. Buradan $dx_i = y_i a_i$ sağlanır. Bu da

$$d = dx_1 + \dots + dx_k = y_1 a_1 + \dots + y_k a_k \in I$$

demektir. Ters kapsama $I \subseteq (d)$ açıktır. Sonuç olarak $I = (d)$ esas ideal olarak elde edilir. $\square$

Sonuç 1.3.3.5 R bir tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölge olsun. $L(R)$ idealler latisinde esas elemanlar R nin esas idealleri, kompakt elemanlar R nin sonlu üretilmiş idealleri olmak üzere, $L(R)$ esas olarak üretilmiş, dolayısıyla kompakt olarak üretilmiş bir modüler latis örneğidir.

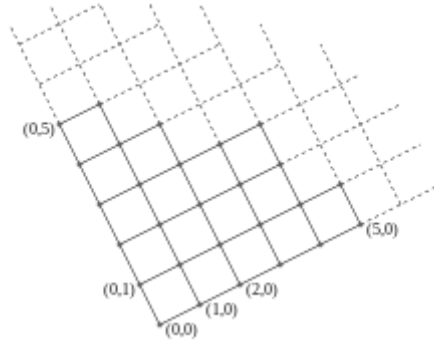
Örnek 1.3.3.6 Her A ideali için $RA = A$ koşulunu sağlayan değişmeli R halkalarının ideallerinin latisi $L(R)$, R birimli olmayan bir halka bile olsa çarpımsal bir latistir. $RA = A$ koşulu sebebiyle R , $L(R)$ için çarpımsal birim elemandır. R nin esas idealleri, $L(R)$ latisinde de esas elemandır ve $L(R)$ zayıf supremum koşulunu sağlar. Bunu gösterelim: R nin $A = (a)$ esas ideali ve herhangi B ideali için $x \in (AB:A)$ alalım. O halde $xa = ba$ olacak şekilde bir $b \in B$ vardır. Dolayısıyla $x - b \in (0:A)$, ve $x \in (0:A) + B$ olur. Ters kapsama her zaman geçerli olduğundan A nin zayıf supremum esas eleman olduğu gösterilmiş olur.

Bu halkaya örnek olarak birimli değişmeli halkaların sonsuz direkt toplamı $R = \sum R_\alpha$ verilebilir. Bu örnekte I kompakt eleman değildir.

Örnek 1.3.3.7 $L_1, \dots, L_n$ çarpımsal latisler olmak üzere $L = L_1 \times \dots \times L_n$ olsun.

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \wedge (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 \wedge b_1, \dots, a_n \wedge b_n) \\ (a_1, \dots, a_n) \vee (b_1, \dots, b_n) &= (a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n) \\ (a_1, \dots, a_n)(b_1, \dots, b_n) &= (a_1 b_1, \dots, a_n b_n) \end{aligned}$$

işlemleriyle birlikte L bir çarpımsal latistir. L latisi, tüm L_i latislerinin hepsinin aynı anda sağladığı pek çok özelliği gerçekler. Özel olarak $a = (a_1, \dots, a_n)$ elemanının (zayıf) infimum (supremum) esas eleman olması için gerek ve yeter koşul her A_i nin (zayıf) infimum (supremum) esas eleman olmasıdır.



Şekil 1.8 $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \leq)$ latisi

Örnek 1.3.3.8 R herhangi bir yarıgrup üzerinde bir derecelendirilmiş halka olsun. Bu takdirde R nin homojen ideallerinin latisi bir modüler çarpımsal latis meydana getirir.

Şimdi bu kavramları açıklayalım:

Toplama işlemine göre değişmeli, birleşmeli ve 0 elemanı ile birlikte bir monoide, kısaltma özelliğini sağladığı durumda derecelendirilmiş monoid adı verilir. Başka bir deyişle, her Γ kümesine, $x, y, z \in \Gamma$ için

$$(1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z,$$

$$(2) \quad x + 0 = x \text{ olacak şekilde tek türlü olması gerekmeyen bir } 0 \text{ elemanı vardır.}$$

$$(3) \quad x + y = y + x,$$

$$(4) \quad x + y = x + z \text{ ise } y = z,$$

aksiyomları sağlanıyorsa derecelendirilmiş monoid adı verilir. Örneğin her değişmeli toplamsal grup bir derecelendirilmiş monoidtir. Ya da negatif olmayan tamsayılar kümesi adi toplama işlemine göre yine bir derecelendirilmiş monoid oluşturur. Derecelendirilmiş monoidlere başka bir örnek için Örnek 1.3.3.7 genelleştirilirse, sabit bir p sayısı için $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ negatif olmayan tamsayılar serileri göz önüne alınabilir. Burada toplama işlemi $(a_1, a_2, \dots, a_p) + (b_1, b_2, \dots, b_p) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_p + b_p)$ ile tanımlanırsa bir derecelendirilmiş monoid elde edilir.

Γ bir derecelendirilmiş monoid ve R değişmeli birimli bir halka olsun. R nin elemanları toplama işlemine göre bir grup oluşturacağından $(R, +)$ toplamsal grubunun alt gruplarından bahsetmek anlamlıdır.

R halkasının toplamsal grubunun alt gruplarının ailesi $\{R^{(\gamma)}\}_{\gamma \in \Gamma}$ ya aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde R üzerinde Γ -derecelendirilmiş denir:

$$(1) R = \sum_{\gamma \in \Gamma} R^{(\gamma)} \text{ (direkt toplam)}$$

$$(2) \text{ Her } \gamma, \gamma' \in \Gamma \text{ için } R^{(\gamma)} R^{(\gamma')} \subseteq R^{(\gamma + \gamma')}$$

Burada $R^{(\gamma)} R^{(\gamma')}$ kümesi, $r_1^{(\gamma)} \in R^{(\gamma)}$ ve $\rho_1^{(\gamma')} \in R^{(\gamma')}$ olmak üzere $r_1^{(\gamma)} \rho_1^{(\gamma')} + r_2^{(\gamma)} \rho_2^{(\gamma')} + \dots + r_s^{(\gamma)} \rho_s^{(\gamma')}$ biçimindeki tüm elemanların kümesidir. Bu tanımdan anlaşılacağı üzere R üzerinde Γ -derecelendirilmiş varsa, her $r \in R$ elemanı $r = \sum_{\gamma} r^{(\gamma)}$ biçiminde tek türlü yazılışa sahiptir ve bu toplamdaki sıfırdan farklı terimler sonlu çokluktadır. $R^{(\gamma)}$ nin elemanlarına γ . dereceden homojen, $r^{(\gamma)}$ ya, r nin γ . dereceden homojen bileşeni adı verilir. O halde sıfır elemanı her $\gamma \in \Gamma$ için γ . dereceden homojen elemandır. (2) aksiyomu gereğince γ . dereceden homojen ve γ' . dereceden homojen olan iki elemanın çarpımı $\gamma + \gamma'$. dereceden bir homojen elemandır.

Bu tanım altında verilen herhangi bir R halkası, $R^{(0)} = R$ ve $\gamma \neq 0$ iken $R^{(\gamma)} = 0$ alınarak R üzerinde Γ -derecelendirilmiş elde edilebilir. Bu yolla elde edilen Γ -derecelendirilmiş R üzerinde aşık Γ -derecelendirilmiş adı verilir.

Eğer S kısaltmalı (cancellation) monoid ise $(a), R$ nin bir esas homojen idealidir. Şu halde R nin her A homojen ideali için

$$A \cap (a) = A((a):A)$$

$$(A(a):(a)) = A + (0:(a))$$

sağlanır ve sözü edilen tüm idealler homojendir. Dolayısıyla $L(R)$ esas olarak ve kompakt olarak üretilmiştir.

Burada S nin kısaltmalı monoid olma koşulu gereklidir. Bunu aşağıdaki örnek yardımıyla görebiliriz.

Örnek 1.3.3.9 $S = \{1, x\}$, $x = x^2$ ve K bir cisim olmak üzere, R bir S -derecelendirilmiş halka $K \oplus Kx$ olsun. Bu durumda $(0 : x) = (1 - x)$ ve böylece $(0 : x) = 0$ olur. Buradan $R = (x^2 : x) \neq (x) + (0 : x) = (x)$ bulunur. Yani (x) zayıf supremum esas eleman olmayıp supremum indirgenemez elemandır.

1.3.4 C -latislerde asal elemanlar ve yerelleştirme

Tanım 1.3.4.1 p, L latisinde bir has eleman olsun.

(1) p, L nin bir has elemanı olsun. $a, b \in L$ için $ab \leq p$ iken $a \leq p$ veya $b \leq p$ sağlanıyor ise p ye asal eleman,

(2) p, L nin bir has elemanı olsun. $a, b \in L$ için $0 \neq ab \leq p$ iken $a \leq p$ veya $b \leq p$ sağlanıyor ise p ye zayıf asal eleman,

(3) $0, L$ nin bir asal elemanı ise L ye bölge denir.

Bir C -latiste p elemanının zayıf asal olduğunu söylemek için $0 \neq ab \leq p$ yi sağlayan her kompakt $a, b \in L^*$ için $a \leq p$ veya $b \leq p$ sağlanması yeterlidir. Bu durumu Teorem 1.3.4.3 yardımıyla görebiliriz. Önce Yardımcı Teorem 1.3.4.2 yi ispatlayalım.

Yardımcı Teorem 1.3.4.2 $b \in L$ aşağıdaki (*) özelliğini sağlayan bir eleman olsun:

(*) Her $h \in L$, $h \leq b$ kompakt elemanı için $h \leq a_1$ veya $h \leq a_2$.

Bu takdirde $b \leq a_1$ veya $b \leq a_2$ gerçekleşir.

İspat $b \in L$, (*) özelliğini sağlayan bir eleman olsun. $b \not\leq a_1$ ve $b \not\leq a_2$ varsayalım. b elemanı kompakt elemanların supremumu olarak ifade edilebileceğinden $h_1 \not\leq a_1, h_2 \not\leq$

a_2 olmak üzere $h_1 \leq b$ ve $h_2 \leq b$ elemanları vardır. Şu halde $h = h_1 \vee h_2 \leq b$ kompakt fakat $h_1 \not\leq a_1, h_2 \not\leq a_2$ olduğundan bu durum (*) varsayımı ile çelişir. Böylece $b \leq a_1$ veya $b \leq a_2$ sağlanır. $\square$

Teorem 1.3.4.3 (Theorem 2, (Çallıalp ve ark., 2012)) L nin bir has p elemanının zayıf asal olması için gerek ve yeter koşul $0 \neq ab \leq p$ yi sağlayan her $a, b \in L_*$ için $a \leq p$ veya $b \leq p$ sağlanmasıdır.

İspat $ab \leq p$ iken $a \not\leq p$ ve $b \not\leq p$ varsayalım. L bir C -latis olduğundan $x \leq a$ ve $y \leq b$, $x \not\leq p$ ve $y \not\leq p$ olacak şekilde kompakt x ve y elemanları bulunabilir. Herhangi $x', y' \in L_*$, $x' \leq a$ veya $y' \leq b$ olacak şekilde alalım. Buradan, $(x' \vee x)(y' \vee y) \leq ab \leq p$ olup $(x' \vee x) \not\leq p$ ve $(y' \vee y) \not\leq p$ olduğundan Yardımcı Teorem 1.3.4.2 gereğince bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $a \leq p$ veya $b \leq p$ elde edilir. $\square$

Tanım 1.3.4.4

(1) $m \in L$, $m < 1$ elemanı için $m < x \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan her $x \in L$ için $x = 1$ olması gerekiyor ise m ye maksimal eleman denir.

(2) Tek maksimal elemana sahip olan L latisine yerel latis denir.

(3) m, L de bir maksimal eleman olsun. $m^2 < a < m$ eşitsizliğini sağlayan bir $a \in L$ bulunamıyor ise m ye L nin basit (simple) elemanı denir.

Teorem 1.3.4.5 Çarpımsal bir latiste her maksimal eleman bir asal elemandır.

İspat m , bir L latisinde maksimal eleman olsun. $a, b \in L$ için $ab \leq m$ ve $a \not\leq m$ varsayalım. O halde $m \leq m \vee a$ olup, m nin maksimal olmasından $1 = m \vee a$ elde edilir. Buradan $b = (m \vee a)b = mb \vee ab \leq m$ olur. Böylece $b \leq m$ olup m bir asal eleman olarak bulunur. $\square$

Tanım 1.3.4.6

(1) Bir $q < 1$ elemanı alalım. $ab \leq q$ yı sağlayan her $a, b \in L$ için $a \leq q$ veya bir n pozitif tam sayısı için $b^n \leq q$ sağlanması gerekiyor ise q ya asalımsı eleman denir.

(2) $a \in L$ için a nın radikali $\sqrt{a} = \bigwedge \{p \in L : p \text{ asal ve } a \leq p\}$ ile tanımlanır.

(3) $\sqrt{a} = a$ ise a ya radikal eleman denir.

(4) q asalımsı ve $\sqrt{q} = p$ asal eleman ise q ya p -asalımsı eleman denir.

(5) $\sqrt{0} = 0$ ise L ye indirgenmiş latis denir.

Önerme 1.3.4.7 (Teorem 6 (3), (Thakare ve ark., 1988))

L bir C -latis ise $\sqrt{a} = \bigwedge \{p \in L : p \geq a \text{ ve } p, a \text{ üzerinde minimal asal}\} = \bigvee \{x \in L^* \mid \text{bir } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için, } x^n \leq a\}$ dır.

Teorem 1.3.4.8 $d \in L$ olsun. Bir elemanın L/d latisinde asal (asalımsı) olması için gerek ve yeter koşul L de asal (asalımsı) olmasıdır.

İspat $a, b, c \in L/d$ olsun. $b \circ c \leq a$ olması için gerek ve yeter koşul $bc \leq a$ olması olduğundan a nin açıkça L/d de asal/asalımsı olması için gerek ve yeter koşul L de asal/asalımsı olmasıdır. $\square$

Bir halkanın idealler latisinde olduğu gibi, her C -latisin bir çarpımsal kapalı kümeye göre yerelleştirmesi (localization) mevcuttur. Literatürde farklı yerelleştirme tanımları bulunmaktadır. Bu tez boyunca kabul edeceğimiz yerelleştirme tanımı (Jayaram ve Johnson, 1995) te tanımlanan Dilworth'un yerelleştirme tanımının (Dilworth, 1962) daha genel bir hali olan aşağıdaki şekildedir.

Tanım 1.3.4.9 $S \subseteq L_*$ bir çarpımsal kapalı küme olsun. Bu durumda $a \in L$ için S deki yerelleştirme

$$a_S = \vee \{x \in L_* : \text{bir } s \in S \text{ için } xs \leq a\}$$

olmak üzere

$$L_S = \{a_S : a \in L\}$$

ile tanımlanır. L_S te infimum işlemi L ile aynıdır ve supremum işlemi $a \vee b = (a \vee b)_S$ biçiminde tanımlanmak üzere L_S yerelleştirmesi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(1) $e \in L$ kompakt supremum esas eleman ise e_S , L_S de kompakt supremum esas elemandır.

(2) $a, b \in L$ için $(a:b)$, $xb \leq a$ yı sağlayan en büyük x elemanıdır. Yani $(a:b) = \vee \{x \in L : xb \leq a\}$ ile tanımlanır. b kompakt bir eleman ise $(a_S:b_S) = (a:b)_S$ gerçekleşir. Burada eşitliğin sağ tarafı L latisinde hesaplanır.

(3) $a \in L$ için $\sqrt{a_S} = (\sqrt{a})_S = (\sqrt{a_S})_S$ özdeşliği doğrudur.

(4) $a_S \circ b_S = (a_S b_S)_S$ çarpımı ile L_S , bir çarpımsal latis oluşturur.

(5) Özel olarak $p \in L$ asal elemanı için $S = \{x \in L : x \not\leq p\}$ kümesine göre L_S yerelleştirmesini L_p ile göstereceğiz. L_p tek maksimal elemanı p_p olan bir yerel latistir.

İspat (1) $e \in L$ supremum esas eleman ve kompakt olsun. Herhangi $a_S, b_S \in L_S$ alalım. e supremum esas eleman olduğundan

$$\begin{aligned} a_S \vee (b_S : e_S) &\stackrel{(2) \text{ den}}{=} a_S \vee (b : e)_S = (a \vee (b : e))_S = ((ae \vee b) : e)_S \stackrel{(2) \text{ den}}{=} (ae \vee b)_S : e_S \\ &= ((ae)_S \vee b_S) : e_S = ((a_S \circ e_S) \vee b_S) : e_S = ((a_S \circ e_S) \vee b_S) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece e_S , L_S nin bir supremum esas elemanıdır.

Şimdi e_s nin kompakt olduğunu gösterelim. $\{a_{s_\alpha} : \alpha \in \Pi\}$ için $e_s \leq V(a_s)_\alpha$ varsayalım. O halde $e_s \leq (V a_\alpha)_s$ dir. Herhangi kompakt $x \leq e_s$ alalım. Bu durumda bir $s \in S$ için $xs \leq e$ olur. e kompakt olduğundan $e \leq a_{\alpha_1} \vee a_{\alpha_2} \vee \dots \vee a_{\alpha_n}$ olacak şekilde sonlu $\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_n}\}$ alt kümesi bulunur. O zaman $x \leq (a_{\alpha_1} \vee a_{\alpha_2} \vee \dots \vee a_{\alpha_n})_s$ yani $x \leq (a_{\alpha_1})_s \vee (a_{\alpha_2})_s \vee \dots \vee (a_{\alpha_n})_s$ sonucuna varılır. Böylece $e_s \leq (a_{\alpha_1})_s \vee (a_{\alpha_2})_s \vee \dots \vee (a_{\alpha_n})_s$ olup, e_s nin L_s nin bir kompakt elemanı olduğu gösterilmiş olur.

(2) $x \leq (a:b)_s$ olsun. O halde $sx \leq (a:b)$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır. Şimdi herhangi bir kompakt $y \leq b_s$ alalım. Buradan bir $t \in S$ için $ty \leq b$ bulunur. Şu halde $(st)xy \leq a$ dır. S çarpımsal kapalı bir küme olduğundan $st \in S$ ve böylelikle $xy \leq a_s$ dir. Bu durumda $xb_s \leq a_s$, yani $x \leq (a_s:b_s)$ olur. Yani $(a:b)_s \leq (a_s:b_s)$ sıralaması geçerlidir.

Ters sıralamayı göstermek için x in L de bir kompakt eleman ve $x \leq (a_s:b_s)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $xb_s \leq a_s$ dir. b kompakt olduğundan $b = \bigvee_{k=1}^n b_k$ yazılabilir. Burada her b_k ($k = 1, \dots, n$) için $x(b_k)_s \leq a_s$ sağlanır. Dolayısıyla her $k = 1, \dots, n$ için $s_kxb_k \leq a$ olacak şekilde bir $s_k \in S$ bulunur. $s = s_1s_2 \dots s_n$ diyelim. Bu durumda her k için $sxb_k \leq a$ elde edilir. Yani $sx(\bigvee_{k=1}^n b_k) = sxb \leq a$ gerçekleşir. Buradan $sx \leq (a:b)$ olup $x \leq (a:b)_s$ anlamına gelir. Sonuç olarak $(a_s:b_s) = (a:b)_s$ bulunur.

(3) Herhangi kompakt $x \in L$ için $x \leq \sqrt{a_s}$ olsun. O halde bir $n \in \mathbb{N}$ ve $s \in S$ için $sx^n \leq a$ olur. Buradan $s^n x^n = (sx)^n \leq a$, yani $sx \leq \sqrt[n]{a}$ dir. Sonuç olarak $x \leq (\sqrt[n]{a})_s$ olur. Buradan $\sqrt{a_s} \leq (\sqrt[n]{a})_s$ sıralamasının doğru olduğu görülür. Ayrıca her $x \leq a$ için $x1 \leq a$ olduğundan $x \leq a_s$, yani $a \leq a_s$ sağlanır. O halde $(\sqrt[n]{a})_s \leq (\sqrt{a_s})_s$ de doğrudur. Böylece $\sqrt{a_s} \leq (\sqrt[n]{a})_s \leq (\sqrt{a_s})_s$ dir. Eşitlik elde etmek için $(\sqrt{a_s})_s \leq \sqrt{a_s}$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $x \leq (\sqrt{a_s})_s$ olacak şekilde herhangi kompakt x elemanını varsayalım. Bu durumda bir $s \in S$ için $sx \leq \sqrt{a_s}$ olur. Bir $n \in \mathbb{N}$ ve $t \in S$ için $t(sx)^n \leq a$ bulunur. Bu da $(ts^n)x^n \leq a$ anlamına gelir. S bir çarpımsal küme olduğundan $ts^n \in S$ olup $x^n \leq a_s$, buradan da $x \leq \sqrt[n]{a_s}$ sonucuna varılır. O halde ispat tamamlanmış olur.

(4) Her $a, b \in L$ için $a \leq b$ olması için gerek ve yeter koşulun L_s yerelleştirmesinde $a_s \leq b_s$ olduğu tanım uyarınca açıktır. Şu halde L bir tam latis olduğundan L_s de bir tam latistir. Her $a_s, b_s \in L_s$ için $a_s \circ b_s = (a_s b_s)_s = (b_s a_s)_s = b_s \circ a_s$ sağlandığından tanımlanan çarpma işlemi değişmelidir.

Bu işlemin birleşme özelliğine sahip olduğunu gösterelim: Tanım gereğince her $a_s, b_s, c_s \in L_s$ için $a_s \circ (b_s \circ c_s) = a_s \circ (b_s c_s)_s = (a_s (b_s c_s)_s)_s$ olur. $x \leq (a_s (b_s c_s)_s)_s$ olacak şekilde herhangi kompakt $x \in L$ alalım. Buradan bir $s_1 \in S$ için $s_1 x \leq a_s (b_s c_s)_s$ olur. O halde bir $a' \leq a_s$ ve $z \leq (b_s c_s)_s$ için $s_1 x = a' z \leq a_s (b_s c_s)_s$ dir. Buradan $s_2, s_3 \in S$ için $s_2 a' \leq a$ ve $s_3 z \leq b_s c_s$ dir. Yani $s_3 z = b' c'$ olacak şekilde $b' \leq b_s$ ve $c' \leq c_s$ vardır. Benzer şekilde öyle $s_4, s_5 \in S$ vardır ki $s_4 b' \leq b$ ve $s_5 c' \leq c$ dir. Burada $s = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$ diyelim. O halde $s x \leq a' b' c' \leq a_s b_s c_s$, yani $x \leq (a_s b_s c_s)_s$ olarak elde edilir. L_s deki çarpma işlemi birleşmelidir.

Çarpma işlemi supremumun dağılma özelliğine sahiptir: Herhangi $a_s, b_s, c_s \in L_s$ için $a_s \circ (b_s \vee c_s) = a_s \circ (b \vee c)_s = (a_s (b \vee c)_s)_s$ sağlanır. $x \leq a_s \circ (b_s \vee c_s)$ olacak şekilde x kompakt elemanını alalım. Buradan bir $s_1 \in S$ için $s_1 x \leq a_s (b \vee c)_s$ sağlanır. O halde $s_1 x = a' d$ olacak şekilde bir $a' \leq a_s$ ve $d \leq (b \vee c)_s$ vardır. Ayrıca bir takım $s_2, s_3 \in S$ için $s_2 a' \leq a$ ve $s_3 d \leq b \vee c$ sağlanır. $s = s_1 s_2 s_3$ diyelim. $s_3 d \leq b$ ise $s x \leq a_s b_s$ yani $x \leq (a_s b_s)_s$ iken, $s_3 d \leq c$ ise $s x \leq a_s c_s$ yani $x \leq (a_s c_s)_s$ bulunur. Şu halde $x \leq (a_s b_s)_s \vee (a_s c_s)_s = (a_s \circ b_s) \vee (a_s \circ c_s)$ dir Ters sıralama da benzer şekile kolaylıkla elde edilebileceğinden, supremum dağılma özelliğine sahip olduğu görülür.

L latisi en küçük elemanı 0, en büyük elemanı 1 ise L_s yerelleştirmesi için en küçük elemanı 0_s , en büyük elemanı ise 1_s dir. Gerçekten;

$$a_s \vee 0_s = (a \vee 0)_s = a_s, \quad a_s \wedge 0_s = (a \wedge 0)_s = 0_s$$

$$a_s \vee 1_s = (a \vee 1)_s = 1_s, \quad a_s \wedge 1_s = (a \wedge 1)_s = a_s$$

sağlanır. $a_s \circ 1_s = (a_s 1_s)_s = a_s$ olduğundan aynı zamanda 1_s çarpımsal birimdir. Ayrıca 1, L latisinde kompakt olduğundan (1) gereğince 1_s de L_s yerelleştirmesinin kompakt elemanıdır. Sonuç olarak L_s bir çarpımsal latistir.

(5) $p \in L$ asal elemanı için $S = \{x \in L: x \not\leq p\}$ kümesine göre L_p yerelleştirmesini göz önüne alalım. q , L nin bir asal eleman olsun. Şu hale $q \notin S$ olması için gerek ve yeter koşulun $q \leq p$ olduğu açıktır. Şu halde $q_p \leq p_p$ elde edilir. L_p nin maksimal elemanı p_p dir. $\square$

Önerme 1.3.4.10 $a \leq b$ olması için gerek ve yeter koşul her m maksimal elemanı için $a_m \leq b_m$ olmasıdır. Özel olarak $a = b$ olması için gerek ve yeter koşul her m maksimal elemanı için $a_m = b_m$ sağlanmasıdır.

İspat $x \leq a_m$ olmak üzere $x \in L_*$ alalım. O halde bir $s \not\leq m$ için $xs \leq a$ sağlanır. $a \leq b$ olduğundan $xs \leq b$, yani $x \leq b_m$ bulunur. Buradan $a_m \leq b_m$ elde edilir.

Tersine, her m_α maksimal elemanı için $a_{m_\alpha} \leq b_{m_\alpha}$ olsun. Bir $x \in L_*$ için $x \leq a$ ancak $x \not\leq b$ varsayalım. O halde $x \leq m_\alpha$ olacak şekilde bir m_α maksimal elemanı vardır. Her α için $a_{m_\alpha} \leq b_{m_\alpha}$ olduğundan $x \leq a \leq a_{m_\alpha} \leq b_{m_\alpha}$ dır. O halde bir $s_\alpha \not\leq m_\alpha$ için $xs_\alpha \leq b$ gerçekleşir. $t = Vs_\alpha$ diyelim. O halde $xt = x(Vs_\alpha) = Vxs_\alpha \leq b$ olur. Burada $t = 1_L$ olduğunu gösterelim. $t \neq 1_L$ olsaydı, $t = Vs_\alpha \leq m_t$ olacak şekilde bir m_t maksimal elemanı bulunurdu. O zaman $s_t \not\leq m_t$ olurdu ki, bu durum $s_t \leq Vs_\alpha = t \leq m_t$ olması ile çelişirdi. Böylece $t = 1_L$ olur. Sonuç olarak $xt = x1_L = x \leq b$, yani $a \leq b$ elde edilir. $\square$

Tanımlar 1.3.4.11

- (1) L deki her kompakt eleman bir esas eleman ise L ye Prüfer latis denir.
- (2) L nin her elemanı bir esas eleman ise L ye esas eleman latisi denir.
- (3) L deki herhangi iki eleman karşılaştırılabilir ise L ye tamamen sıralı latis denir.
- (4) L deki her kompakt eleman bir tamlanabilir eleman ise L ye regüler latis denir.
- (5) Esas ve kompakt olarak üretilen modüler çarpımsal latislere r -latis denir.

(6) Esas olarak üretilen C -latis bölgesi, L nin her elemanı L nin bir takım asal elemanlarının sonlu çarpımı biçiminde yazılabiliyor ise L ye Dedekind bölgesi denir.

(7) $L = \{0,1\}$ ise L ye cisim denir.

Esas eleman latislerine en bilinen örnek (Dilworth, 1962) deki Dedekind bölgesidir. Esas eleman latislerinin çeşitli karakterizasyonları için (Jayaram ve Johnson, 1997), (Jayaram, 2002), (Anderson ve Jayaram, 1996) ve regüler latis hakkında detaylı bilgi için (Anderson ve Jayaram, 1995) incelenebilir.

Tanım 1.3.4.12 Bir C -latis L nin boyutu

$$\text{Boy } L = \sup\{n \in \{0,1,2, \dots\} : L \text{ nin } n \text{ uzunluğunda asal eleman zinciri vardır}\}$$

ile tanımlanır. $\text{Boy } L = 0$ ise L ye sıfır boyutlu C -latis adı verilir. L nin sıfır boyutlu latis olması için gerek ve yeter koşulun her asal elemanın maksimal olduğunu görmek kolaydır. Daha geniş bilgi ve notasyon (Anderson, 1976) da bulunabilir.



BÖLÜM 2 - DEĞİŞMELİ HALKALARDA 2-YUTAN ASALIMSİ VE ZAYIF 2-YUTAN ASALIMSİ İDEALLER

Bu bölümde değişmeli ve birimli halkalarda asalımsı ve 2-yutan ideallerin bir genelleştirmesi olarak 2-yutan asalımsı idealleri tanımlayacağız. Birçok özel halkanın 2-yutan asalımsı ideallerinin genel formunu belirleyeceğiz. Ayrıca bazı değişmeli halkaları 2-yutan asalımsı idealler cinsinden karakterize edeceğiz.

2.1 Değişmeli Halkalarda 2-Yutan Asalımsı ve Zayıf 2-Yutan Asalımsı İdeallerin Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1 Q, R nin bir has ideali olsun.

- (1) $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ iken $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ sağlanıyorsa Q idealine R nin 2-yutan asalımsı ideali denir.
- (2) $a, b, c \in R$ için $0 \neq abc \in Q$ ise $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ sağlanıyorsa Q idealine R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali denir.

2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı ideallerin asal, zayıf asal, zayıf asalımsı, 2-yutan, zayıf 2-yutan idealler ile aralarındaki ilişki Teorem 2.1.2 de listelenmiştir.

Teorem 2.1.2 I, R halkasının bir has ideali olsun. Bu takdirde

- (1) I bir asal ideal $\Rightarrow I$ bir 2-yutan ideal $\Rightarrow I$ bir 2-yutan asalımsı idealdir.
- (2) I bir asal ideal $\Rightarrow I$ bir asalımsı ideal $\Rightarrow I$ bir 2-yutan asalımsı idealdir.
- (3) I bir zayıf asal ideal $\Rightarrow I$ bir zayıf 2-yutan ideal $\Rightarrow I$ bir zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.
- (4) I bir zayıf asal ideal $\Rightarrow I$ bir zayıf asalımsı ideal $\Rightarrow I$ bir zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.

(5) I bir 2-yutan asalımsı ideal $\Rightarrow I$ bir zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat. (1) I bir asal ideal olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ ve $ab \notin I$ varsayalım. I asal olduğundan $c \in I$ gerçekleşir. Şu halde $ac \in I$ ve $bc \in I$ elde edilir. Dolayısıyla I bir 2-yutan ideal olarak bulunur.

Şimdi I nin bir 2-yutan ideal olduğunu varsayalım. I nin bir 2-yutan asalımsı ideal olduğunu göreceğiz. $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ ve $ab \notin I$ olsun. Buradan $ac \in I$ veya $bc \in I$ olup, $I \subseteq \sqrt{I}$ gereğince I nin bir 2-yutan asalımsı ideal olduğu görülür.

(2) Bilindiği gibi her asal ideal bir asalımsı idealdir. I bir asalımsı ideal olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ ve $ab \notin I$ varsayalım. I nin asalımsı ideal olması gereğince $c \in \sqrt{I}$ dır. O halde $ac \in \sqrt{I}$ ve $bc \in \sqrt{I}$ sonucuna varılır. O halde I bir 2-yutan asalımsı idealdir.

(3) ve (4) ün ispatları (1) ve (2) ile benzer olarak elde edilir.

(5) Açıktır.

O halde (zayıf) asal, (zayıf) asalımsı, (zayıf) 2-yutan ve (zayıf) 2-yutan asalımsı idealler arasındaki ilişki aşağıdaki şema ile basitçe ifade edilebilir.



Şekil 2.1 İdealler arasındaki ilişkiler

Teorem 2.1.2 deki ifadelerin tersleri doğru değildir. Bu durum aşağıdaki örneklerle gösterilebilir:

Örnek 2.1.3

$R = \mathbb{Z}$ halkasının $I = (12)$ idealini düşünelim. Bu durumda $2 \cdot 2 \cdot 3 \in I$ iken $2 \cdot 2 \notin I$ ve $2 \cdot 3 \notin I$ olduğundan I, R nin bir 2-yutan ideali değildir. Her asal ideal bir 2-yutan ideal olduğundan R nin bir asalı de olamaz. Ayrıca $3 \cdot 4 \in I$ iken $3 \notin I$ ve $4 \notin \sqrt{I} = (6)$ olduğundan I nin R halkasının bir asalımsı ideali olmadığı açıktır. Oysa I, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

Teorem 2.1.4 Q bir 2-yutan asalımsı ideal ise $\sqrt{Q}$ bir 2-yutan idealdir.

İspat $a, b, c \in R$ için $abc \in \sqrt{Q}$, $ac \notin \sqrt{Q}$ ve $bc \notin \sqrt{Q}$ olsun. $abc \in \sqrt{Q}$ olduğundan bir n pozitif tamsayısı için $(abc)^n = a^n b^n c^n \in Q$ gerçekleşir. Burada $a^n c^n \notin \sqrt{Q}$ ve $b^n c^n \notin \sqrt{Q}$ olup, Q bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $a^n b^n = (ab)^n \in Q$, yani $ab \in \sqrt{Q}$ bulunur. Dolayısıyla $\sqrt{Q}$ bir 2-yutan idealdir. $\square$

Ancak Q nun bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olması durumu, $\sqrt{Q}$ nun bir zayıf 2-yutan ideal olmasını gerektirmez. Bunu aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.5 $A = \mathbb{Z}_2[X, Y, W]$ ve $I = X^2 Y^2 W^2 A$ olmak üzere, A halkasının bir idealini göz önüne alalım. $R = A/I$ olsun. Bu takdirde $I/I, R$ nin sıfır ideali olduğundan bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir. I nin R halkasındaki radikali $\sqrt{I/I} = XYWA/I$ nin R nin bir zayıf 2-yutan ideali olmadığını göstereceğiz. $I \neq XYW + I \in \sqrt{I/I}$, fakat $XY + I \notin \sqrt{I/I}$, $XW + I \notin \sqrt{I/I}$ ve $YW + I \notin \sqrt{I/I}$ olduğundan $\sqrt{I}$, R nin bir zayıf 2-yutan ideali değildir.

Teorem 2.1.6 Q, R nin bir has ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (1) $\sqrt{Q}$ nun bir 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{Q}$ nun bir 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.
- (2) $\sqrt{Q}$ nun bir zayıf 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{Q}$ nun bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.

İspat (1) $\sqrt{Q}$ bir 2-yutan ideal olsun. O halde Teorem 2.1.2 gereğince $\sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q}$ bir 2-yutan asalımsı idealdir. Tersine $I = \sqrt{Q}$ bir 2-yutan asalımsı ideal olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in I = \sqrt{Q}$ varsayalım. Buradan $ab \in I$ veya $bc \in \sqrt{I}$ veya $ac \in \sqrt{I}$ bulunur. $\sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q} = I$ olduğundan I bir 2-yutan ideal olarak elde edilir.

(2) İspat (1) ile benzerdir. $\square$

Teorem 2.1.7 Q, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. O halde aşağıdakilerden biri gerçekleşir:

(1) $\sqrt{Q} = P$ bir asal idealdir.

(2) P_1 ve P_2 , Q üzerinde iki farklı minimal asal ideal olmak üzere $\sqrt{Q} = P_1 \cap P_2$ dir.

Sonuç olarak, Q, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali ise Q üzerinde en çok iki minimal asal ideal vardır.

İspat Q, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. Bu durumda Teorem 2.1.4 gereğince $\sqrt{Q}$ bir 2-yutan idealdir. $\sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q}$ olduğundan Teorem 1.1.5 gereğince istenilen elde edilir. $\square$

Q, R nin bir has ideali olsun. Bilindiği gibi değişmeli halkalarda eğer $\sqrt{I}$, R nin bir maksimal ideali ise I , R nin bir asalımsı idealidir. Oysa bir sonraki teoremden (Teorem 2.1.8) görülebileceği gibi Q nun 2-yutan asalımsı olması için $\sqrt{Q}$ nun bir asalımsı ideal

olması yeterlidir. Ayrıca $\sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q}$ özdeşliği göz önüne alınacak olursa, $\sqrt{Q}$ nun R de bir (zayıf) asal ideal olması için gerek ve yeter koşul $\sqrt{Q}$ nun bir (zayıf) asalımsı ideal olmasıdır.

Teorem 2.1.8 Q , R nin bir has ideali olsun.

- (1) $\sqrt{Q}$, R nin bir asalımsı ideali ise Q , bir 2-yutan asalımsı idealdir. Özel olarak R nin her P asalımsı ideali ve $n > 0$ tamsayısı için P^n bir 2-yutan asalımsı idealdir.
- (2) $\sqrt{Q}$, R nin bir zayıf asalımsı ise Q bir zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat (1) $\sqrt{Q}$ bir asalımsı ideal olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ ve $ab \notin Q$ varsayalım. $(ac)(bc) = abc^2 \in Q \subseteq \sqrt{Q}$ ve $\sqrt{Q}$ bir asalımsı ideal olduğundan $bc \in \sqrt{Q}$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ gerçekleşir. Dolayısıyla Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) $a, b, c \in R$ için $0 \neq abc \in Q$ ve $ab \notin Q$ olsun. $ab \notin \sqrt{Q}$ varsayalım. $\sqrt{Q}$ bir zayıf asalımsı ideal olduğundan $c \in \sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q}$ ve böylece $ac \in \sqrt{Q}$ bulunur ki bu istenilendir. Şimdi $ab \in \sqrt{Q}$ varsayalım. $0 \neq abc \in Q$ ve $ab \in \sqrt{Q}$ olmasından $0 \neq ab \in \sqrt{Q}$ dir. $\sqrt{Q}$ bir zayıf asalımsı ideal olduğundan $a \in \sqrt{Q}$ veya $b \in \sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q}$ sağlanır. Böylece $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ dir. Sonuç olarak Q bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olarak bulunur. $\square$

Ancak Teorem 2.1.8 in tersi doğru değildir. Bunu aşağıdaki örnek ile görebiliriz:

Örnek 2.1.9 $\mathbb{Z}$ halkasında $Q = (12)$ bir 2-yutan asalımsı idealdir. Ancak $\sqrt{Q} = (6)$ için $2 \cdot 3 \in \sqrt{Q}$ iken $2 \notin \sqrt{Q}$ ve $3 \notin \sqrt{\sqrt{Q}} = \sqrt{Q}$ olduğundan $\sqrt{Q}$ bir asalımsı ideal değildir.

Tanım 2.1.10 Q bir 2-yutan asalımsı ideal olsun. Bu takdirde Teorem 2.1.4 te gösterdiğimiz gibi $P = \sqrt{Q}$ bir 2-yutan idealdir. Bu durumda Q ya R nin P -2-yutan asalımsı ideali diyeceğiz.

Yardımcı Teorem 2.1.11 (Badawi, 2007) P_1 ve P_2 , R nin asal idealleri ise $P_1 \cap P_2$ bir 2-yutan idealdir.

İspat $a, b, c \in R$ için $abc \in P_1 \cap P_2$ olsun. $abc \in P_1$ ve P_1 asal olduğundan $a \in P_1$ veya $b \in P_1$ veya $c \in P_1$ dir. Benzer olarak $abc \in P_2$ olduğundan $a \in P_2$ veya $b \in P_2$ veya $c \in P_2$ elde edilir. Şu halde tüm durumlarda $ab \in P_1 \cap P_2$ veya $bc \in P_1 \cap P_2$ veya $ac \in P_1 \cap P_2$ bulunur. $\square$

Teorem 2.1.12 P_1 ve P_2 , R nin iki asal ideali, Q_1 bir P_1 -asalımsı ideal ve Q_2 bir P_2 -asalımsı ideal olsun.

- (1) $Q_1 Q_2$ bir 2-yutan asalımsı idealdir.
- (2) $Q_1 \cap Q_2$ bir 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat (1) $a, b, c \in R$ için $abc \in Q_1 Q_2$ ve $ac \notin \sqrt{Q_1 Q_2}$, $bc \notin \sqrt{Q_1 Q_2}$ varsayalım. Bu takdirde $a, b, c \notin \sqrt{Q_1 Q_2}$ bulunur. Ayrıca P_1 ve P_2 iki asal ideal olduğundan Önerme 1.1.7 gereğince $\sqrt{Q_1 Q_2} = P_1 \cap P_2$ bir 2-yutan idealdir. Dolayısıyla $ac, bc \notin \sqrt{Q_1 Q_2}$ olduğundan $ab \in \sqrt{Q_1 Q_2}$ bulunur. $ab \in Q_1 Q_2$ olduğunu göstereceğiz. $ab \in \sqrt{Q_1 Q_2} \subseteq P_1$ olduğundan $a \in P_1$ veya $b \in P_1$ sağlanır. Genelliği kaybetmeden $a \in P_1$ varsayabiliriz. $a \notin \sqrt{Q_1 Q_2} = P_1 \cap P_2$ ve $ab \in \sqrt{Q_1 Q_2} \subseteq P_2$ olmasından $a \notin P_2$ ve $b \in P_2$ olur. $b \in P_2$ ve $b \notin \sqrt{Q_1 Q_2} = P_1 \cap P_2$ olduğundan $b \notin P_1$ dir. Şimdi $a \in Q_1$ ve $b \in Q_2$ olduğunu göstereceğiz. Genelliği kaybetmeden $a \notin Q_1$ varsayalım. Q_1 bir P_1 -asalımsı ideal, $abc \in Q_1 Q_2 \subseteq Q_1$ ve $a \notin Q_1$ olduğundan $bc \in P_1$ olur. Buradan $b \in P_2$ ve $bc \in P_1$ olduğundan $bc \in \sqrt{Q_1 Q_2}$ çelişkisine varılır. Şu halde $a \in Q_1$ dir. Benzer

şekilde $b \notin Q_2$ olsa $ac \in \sqrt{Q_1 Q_2}$ dan yine bir çelişki elde edilir. O zaman $a \in Q_1$ ve $b \in Q_2$ dir. Böylece $ab \in Q_1 Q_2$ bulunur.

(2) $Q = Q_1 \cap Q_2$ diyelim. Bu takdirde Önerme 1.1.7. gereğince $\sqrt{Q} = \sqrt{Q_1 \cap Q_2} = \sqrt{Q_1} \cap \sqrt{Q_2} = P_1 \cap P_2$ bir 2-yutan idealdir. $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ ve $ac \notin \sqrt{Q}$ ve $bc \notin \sqrt{Q}$ varsayalım. Bu takdirde $a, b, c \notin \sqrt{Q} = P_1 \cap P_2$ ve $\sqrt{Q}$ bir 2-yutan ideal olduğundan $ab \in \sqrt{Q} \subseteq P_1$ bulunur. $ab \in Q$ olduğunu göstereceğiz. $ab \in \sqrt{Q} \subseteq P_1$ ve P_1 asal olduğundan $a \in P_1$ veya $b \in P_1$ sağlanır. $a \in P_1$ olsun. $a \notin \sqrt{Q} = P_1 \cap P_2$ ve $ab \in \sqrt{Q} \subseteq P_2$ olmasından $a \notin P_2$ ve $b \in P_2$ olur. O halde $b \in P_2$ ve $b \notin \sqrt{Q}$ olduğundan $b \notin P_1$ dir.

Şimdi $a \in Q_1$ ve $b \in Q_2$ olduğunu göstereceğiz. $a \notin Q_1$ varsayalım. Q_1 bir P_1 -asalımsı ideal ve $a \notin Q_1$ olduğundan $bc \in P_1$ olur. $b \in P_2$ ve $bc \in P_1$ olmasından $bc \in \sqrt{Q}$ çelişkisine varılır. Şu halde $a \in Q_1$ dir. Benzer biçimde $b \in Q_2$ olduğu görülür. Böylece $ab \in Q$ elde edilir. Sonuç olarak $Q = Q_1 \cap Q_2$ bir 2-yutan asalımsı idealdir. $\square$

Sonuç 2.1.13 P_1 ve P_2 iki asal ideal olsun. n, m pozitif tamsayıları için P_1^n bir P_1 -asalımsı ideal P_2^m bir P_2 -asalımsı ideal ise $P_1^n P_2^m$ ve $P_1^n \cap P_2^m$ idealleri R nin 2-yutan asalımsı idealleridir. Özel olarak $P_1 P_2$ de R nin bir 2-yutan asalımsı idealdir.

Ancak, R halkasının herhangi iki P_1, P_2 asal idealleri için $P_1^n P_2^m$ tipinde her idealin bir 2-yutan asalımsı ideal olması gerekmez. Bu durumu aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.14 $R = \mathbb{Z}[Y] + 3X\mathbb{Z}[Y, X]$ alalım. Bu takdirde $P_1 = YR$ ve $P_2 = 3X\mathbb{Z}[Y, X]$, R nin asal idealleridir. $I = P_1 P_2^2$ olsun. I yı içeren asal idealler P_1 ve P_2 olduğundan, $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2$ dir. Şu halde $9X^2 Y = 3X^2 \cdot Y \cdot 3 \in I$ iken $3X^2 \cdot Y \notin I$, $3X^2 \cdot 3 = 9X^2 \notin \sqrt{I}$ ve $Y \cdot 3 = 3Y \notin \sqrt{I}$ olduğu görülür. Dolayısıyla I , R nin 2-yutan asalımsı ideali değildir.

Ayrıca I bir 2-yutan asalımsı ideal olmak üzere $\sqrt{I} = \sqrt{J}$ yi sağlayan bir $J \subset I$ idealinin 2-yutan ideal olması gerekmediğini Örnek 2.1.15 yardımıyla görebiliriz.

Örnek 2.1.15 $R = \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ olsun. O halde $P_1 = XR$ ve $P_2 = YR$, R nin asal idealleridir. $I = P_1^3 P_2^3$ olsun. O halde I , Sonuç 2.1.13 gereğince bir 2-yutan asalımsı idealdir. $J = (XYZ, X^3 Y^3)R$ alalım. Bu takdirde $I \subset J$ ve $\sqrt{I} = \sqrt{J} = P_1 \cap P_2 = (XY)R$ olur. J nin 2-yutan ideal olmadığını göstereceğiz. $X \cdot Y \cdot Z = XYZ \in J$ fakat $X \cdot Y = XY \notin J$, $X \cdot Z = XZ \notin \sqrt{J}$ ve $Y \cdot Z = YZ \notin \sqrt{J}$ olduğu görülür. O halde J bir 2-yutan asalımsı ideal değildir. Dolayısıyla J bir 2-yutan ideal değildir.

Böylece Teorem 2.1.12 nin tersinin doğru olmadığını da Örnek 2.1.16 ile görebiliriz:

Örnek 2.1.16 $R = \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ ve $J = (XYZ, X^3 Y^3)R$ alalım. Bu takdirde $\sqrt{J} = YR \cap XR$, R nn bir 2-yutan idealidir ancak Örnek 2.1.15 de gösterildiği gibi J , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali değildir.

Teorem 2.1.17 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, R nin P -2-yutan asalımsı idealleri ise $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ de P -2-yutan asalımsı idealdir.

İspat $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ olsun. $ab \notin Q$ varsayalım. Şu halde bir $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $ab \notin Q_i$ olur. Bu da $bc \in \sqrt{Q_i} = P$ veya $ac \in \sqrt{Q_i} = P$ olmasını gerektirir. $\sqrt{Q} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = P$ olduğundan ispat tamamlanır. $\square$

Genel olarak iki 2-yutan asalımsı idealin arakesiti bir 2-yutan asalımsı ideal olmayabilir:

Örnek 2.1.18 $I = 50\mathbb{Z}$ ve $J = 75\mathbb{Z}$ alalım. Sonuç 2.1.13 gereğince I ve J , $\mathbb{Z}$ nin 2-yutan asalımsı idealleridir. Burada $\sqrt{I \cap J} = 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} = 30\mathbb{Z}$ olup $2 \cdot 3 \cdot 5 \in \sqrt{I \cap J}$

iken $2 \cdot 3 \notin \sqrt{I \cap J}$ ve $3 \cdot 5 \notin \sqrt{I \cap J}$ ve $2 \cdot 5 \notin \sqrt{I \cap J}$ olduğundan $\sqrt{I \cap J}$ bir 2-yutan ideal değildir. Dolayısıyla Teorem 2.1.4 gereğince $I \cap J$ bir 2-yutan asalımsı ideal değildir.

Teorem 2.1.19 I, R nin bir asalımsı olmayan zayıf asalımsı ideali olsun. $J \subseteq I$ olmak üzere J, R nin bir ideali ise J bir zayıf 2-yutan asalımsı idealdir. Özel olarak eğer K, R nin bir ideali ise $A = I \cap K$ ve $B = IK$ da R nin zayıf 2-yutan asalımsı idealleridir.

İspat I asalımsı olmayan bir zayıf asalımsı ideal olduğundan $\sqrt{I} = \sqrt{0}$ dır. Buradan $J \subseteq I$ olduğundan $\sqrt{0} \subseteq \sqrt{J} \subseteq \sqrt{I} = \sqrt{0}$ ve böylelikle $\sqrt{J} = \sqrt{I} = \sqrt{0}$ olur. $a, b, c \in R$ için $0 \neq abc \in J$ olsun. $ab \notin J$ varsayalım. O halde $J \subseteq I$ olduğundan $0 \neq abc \in I$ elde edilir. O halde aşağıdaki iki durum söz konusudur:

I. Durum: $ab \notin I$ olsun. I bir zayıf asalımsı ideal, $0 \neq abc \in I$ ve $ab \notin I$ olduğundan $c \in \sqrt{I} = \sqrt{J} = \sqrt{0}$ ve buradan $ac \in \sqrt{J}$ bulunur.

II. Durum: $ab \in I$ olsun. $0 \neq abc \in I$ olduğundan $0 \neq ab \in I$ dir. I nin bir zayıf asalımsı ideal olmasından $a \in I = \sqrt{0}$ veya $b \in \sqrt{I} = \sqrt{\sqrt{0}} = \sqrt{0}$ elde edilir. Böylece $ac \in \sqrt{J}$ veya $bc \in \sqrt{J}$ sağlanır. Sonuç olarak J, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir. $A = I \cap K \subseteq I$ ve $B = IK \subseteq I$ olduğundan özel durum açıktır. $\square$

Tanım 2.1.20 Q, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. $abc = 0_R$, $ab \notin Q$, $bc \notin \sqrt{Q}$ ve $ac \notin \sqrt{Q}$ sağlanıyorsa (a, b, c) ye Q nun üçlü asalımsı sıfırı denir.

O halde Q, R nin 2-yutan asalımsı olmayan bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise bir takım $a, b, c \in R$ için Q nun bir (a, b, c) üçlü sıfırı vardır.

Teorem 2.1.21 Q, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ve $a, b, c \in R$ için, (a, b, c) , Q nun bir üçlü asalımsı sıfırı olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

(1) $abQ = bcQ = acQ = \{0_R\}$ dir.

(2) $aQ^2 = bQ^2 = cQ^2 = \{0_R\}$ dir.

İspat (1) (a, b, c) , Q nun bir üçlü sıfırı olsun. Buradan $abc = 0$, $ab \notin Q$, $bc \notin \sqrt{Q}$ ve $ac \notin \sqrt{Q}$ sağlanır. $abQ \neq 0$ varsayalım. O halde $abq \neq 0$ olacak şekilde bir $q \in Q$ elemanı vardır. Buradan $0 \neq ab(c + q) \in Q$ olur. $ab \notin Q$ ve Q zayıf 2-yutan asalımsı olduğundan $a(c + q) \in \sqrt{Q}$ veya $b(c + q) \in \sqrt{Q}$ dir. Dolayısıyla $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ çelişkisi elde edilir. Şu halde $abQ = 0$ bulunur. Benzer şekilde $bcQ = acQ = 0$ olduğunu göstermek kolaydır.

(2) $aQ^2 \neq 0$ varsayalım. O halde $q_1, q_2 \in Q$ için $aq_1q_2 \neq 0$ dir. Buradan (1) gereğince $0 \neq a(b + q_1)(c + q_2) \in Q$ bulunur. Bu da $a(b + q_1) \in Q$ veya $a(c + q_2) \in \sqrt{Q}$ veya $(b + q_1)(c + q_2) \in \sqrt{Q}$ olmasını gerektirir. Buradan $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ çelişkisine varılır. Dolayısıyla $aq_1q_2 = 0$ ve böylece $aQ^2 = 0$ olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde $bQ^2 = cQ^2 = 0$ özdeşliği kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Teorem 2.1.22 Q, R nin 2-yutan asalımsı olmayan bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise $Q^3 = \{0_R\}$ sağlanır.

İspat Q, R nin 2-yutan asalımsı olmayan bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. O halde Q nun bir üçlü sıfırı (a, b, c) vardır. $Q^3 \neq 0$ varsayalım. O zaman bir takım $q_1, q_2, q_3 \in Q$ elemanları için $q_1q_2q_3 \neq 0$ sağlanır. Teorem 2.1.21 gereğince $(a + q_1)(b + q_2)(c + q_3) = q_1q_2q_3 \neq 0$ olur. Q bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $(a + q_1)(b + q_2) \in Q$ veya $(a + q_1)(c + q_3) \in \sqrt{Q}$ veya $(b + q_2)(c + q_3) \in \sqrt{Q}$, yani $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ çelişkisine varılır. Böylece $Q^3 = 0$ elde edilir. $\square$

$Q^3 = \{0_R\}$ yi sağlayan bir has ideal Q nun, bir 2-yutan asalımsı ideal olması gerekmediğini aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.23 $R = \mathbb{Z}_{90}$ ve $I = \{0, 30, 60\}$ alalım. O halde açıkça $I^3 = 0$, fakat $0 \neq 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \in I$ ve $2 \cdot 3 = 6 \notin I$, $2 \cdot 5 = 10 \notin \sqrt{I} = I$, $3 \cdot 5 = 15 \notin \sqrt{I} = I$ olduğundan I bir zayıf 2-yutan (asalımsı) ideal değildir

Sonuç 2.1.24 Q , R nin 2-yutan asalımsı olmayan bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise $\sqrt{Q} = \sqrt{0_R}$ dır.

İspat Q , R nin 2-yutan asalımsı olmayan bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. Bu takdirde Teorem 2.1.22 gereğince $Q^3 = \{0_R\}$ sağlanır. Şu halde $\sqrt{Q} \subseteq \sqrt{0_R}$ dir. Diğer taraftan $0_R \in Q$ olduğundan $\sqrt{0_R} \subseteq \sqrt{Q}$ gerçekleşir. Böylece her iki kapsamadan istenilen özdeşlik elde edilir. $\square$

Teorem 2.1.25 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, R nin 2-yutan asalımsı olmayan zayıf 2-yutan asalımsı idealleri olsun. Bu takdirde $Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat Q_i idealleri 2-yutan asalımsı olmayan zayıf 2-yutan asalımsı idealler olduğundan Sonuç 2.1.24 gereğince her $1 \leq i \leq n$ için $\sqrt{Q_i} = \sqrt{0}$ sağlanır. Böylece $\sqrt{Q} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \sqrt{0}$ olur. $0 \neq abc \in Q = \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ve $ab \notin Q$ olsun. Buradan $ab \notin Q_j$ olacak şekilde bir $j = 1, 2, \dots, n$ vardır. O halde $bc \notin \sqrt{Q_i} = \sqrt{0} = \sqrt{Q}$, $ac \notin \sqrt{Q_i} = \sqrt{0} = \sqrt{Q}$ olur ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 2.1.26 $a, b, c \in R$ için 0 ın bir üçlü asalımsı sıfırı (a, b, c) ve $ab \notin Q$ olsun. R nin bir Q zayıf 2-yutan asalımsı idealinin bir 2-yutan asalımsı ideal olmaması için gerek ve yeter koşul Q idealinin nilpotent olmasıdır.

İspat Q bir 2-yutan asalımsı ideal olmasın. Bu halde Sonuç 2.1.24 gereğince $Q \subseteq \sqrt{0}$ bulunur. Böylece Q idealinin nilpotent olduğu görülür. Tersine $Q \subseteq \sqrt{0}$ varsayalım. Hipotezimiz gereği $ab \notin Q$, $ac \notin \sqrt{0}$ ve $bc \notin \sqrt{0}$ sağlanır. Dolayısıyla $ab \notin Q$,

$ac \notin \sqrt{Q}$ ve $bc \notin \sqrt{Q}$ olur. Şu halde (a, b, c) , Q nun bir üçlü asalımsı sıfırı olarak bulunur. Bu sebepten Q , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olamaz. $\square$

$\sqrt{0_R} = 0_R$ durumunda, R ye indirgenmiş halka adı verilir.

Teorem 2.1.27 R bir indirgenmiş halka ve Q , R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

- (1) Q , R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.
- (2) Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Q , R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. Q nun 2-yutan asalımsı ideal olmadığını varsayalım. Bu takdirde Sonuç 2.1.24 gereğince $\sqrt{Q} = \sqrt{0}$ bulunur. R indirgenmiş halka olduğundan $Q = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) $\Rightarrow$ (1) Teorem 2.1.2 dolayısıyla açıktır. $\square$

Teorem 2.1.28 $f: R \rightarrow R'$ bir değişmeli halka homomorfizması olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

- (1) Q' , R' nin 2-yutan asalımsı ideali ise $f^{-1}(Q')$, R nin 2-yutan asalımsı idealidir.
- (2) f bir epimorfizma ve Q , R nin *Çek* f yi içeren bir 2-yutan asalımsı ideali ise $f(Q)$, R' nin 2-yutan asalımsı idealidir.
- (3) f birebir olsun. Q' , R' nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise $f^{-1}(Q')$, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.
- (4) f bir epimorfizma ve Q , R nin *Çek* f yi içeren bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise $f(Q)$, R' nin zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat (1) $a, b, c \in R$ için $abc \in f^{-1}(Q')$ olsun. Buradan $f(abc) = f(a)f(b)f(c) \in Q'$ olup, bu da $f(a)f(b) \in Q'$ veya $f(b)f(c) \in \sqrt{Q'}$ veya $f(a)f(c) \in \sqrt{Q'}$ olmasını gerektirir. Böylece $ab \in f^{-1}(Q')$ veya $bc \in f^{-1}(\sqrt{Q'})$ veya $ac \in f^{-1}(\sqrt{Q'})$ elde edilir. $f^{-1}(\sqrt{Q'}) = \sqrt{f^{-1}(Q')}$ özdeşliği göz önünde tutulursa $f^{-1}(Q')$ nün R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olduğu görülür.

(2) $a', b', c' \in R'$ ve $a'b'c' \in f(Q)$ olsun. O halde f örten olduğundan $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$ ve $f(abc) = a'b'c' \in f(Q)$ olmak üzere $a, b, c \in R$ vardır. Çek $f \subseteq Q$ olduğundan $abc \in Q$ dır. Böylelikle $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ sağlanır. Yani $a'b' \in f(Q)$ veya $a'c' \in f(\sqrt{Q}) \subseteq \sqrt{f(Q)}$ veya $b'c' \in f(\sqrt{Q}) \subseteq \sqrt{f(Q)}$ elde edilir. Sonuç olarak $f(Q)$, R' nün 2-yutan asalımsı idealidir.

(3) f birebir olsun. $a, b, c \in R$ için $0 \neq abc \in f^{-1}(Q')$ varsayalım. f birebir olduğundan Çek $f = \{0\}$ olup $0 \neq f(abc) = f(a)f(b)f(c) \in Q'$ bulunur. Q' bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $f(a)f(b) \in Q'$ veya $f(b)f(c) \in \sqrt{Q'}$ veya $f(a)f(c) \in \sqrt{Q'}$ sağlanır. Böylece $ab \in f^{-1}(Q')$ veya $bc \in f^{-1}(\sqrt{Q'})$ veya $ac \in f^{-1}(\sqrt{Q'})$ dır. $f^{-1}(\sqrt{Q'}) = \sqrt{f^{-1}(Q')}$ olduğundan $f^{-1}(Q')$ nün R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olduğu görülür.

(4) f bir epimorfizma ve $a', b', c' \in R'$ için $0 \neq a'b'c' \in f(Q)$ olsun. O halde $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$ ve $f(abc) = a'b'c' \in f(Q)$ olmak üzere $a, b, c \in R$ vardır. Çek $f \subseteq Q$ olduğundan $0 \neq abc \in Q$ dır. Q bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ sağlanır. Buradan $a'b' \in f(Q)$ veya $a'c' \in f(\sqrt{Q}) \subseteq \sqrt{f(Q)}$ veya $b'c' \in f(\sqrt{Q}) \subseteq \sqrt{f(Q)}$ elde edilir. Sonuç olarak $f(Q)$, R' nün 2-yutan asalımsı idealidir. $\square$

Teorem 2.1.29 $I \subseteq Q$, R nin bir has ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçekleşir.

(1) Q, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise $Q/I, R/I$ nin zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) I, R nin 2-yutan asalımsı ideali ve $Q/I, R/I$ nin zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise Q, R nin 2-yutan asalımsı idealidir.

(3) I, R nin zayıf 2-yutan asalımsı ideali ve $Q/I, R/I$ nin zayıf 2-yutan asalımsı ideali ise Q, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat (1) Teorem 2.1.28 in bir sonucu olarak elde edilir.

(2) $a, b, c \in R$ ve $abc \in Q$ olsun. $abc \in I$ ise $ab \in I \subseteq Q$ veya $bc \in \sqrt{I} \subseteq \sqrt{Q}$ veya $ac \in \sqrt{I} \subseteq \sqrt{Q}$ olur. Bu durum için ispat tamamlanır. O halde $abc \notin I$ varsayalım. Bu durumda $I \neq (a + I)(b + I)(c + I) \in Q/I$ dir. Q/I zayıf 2-yutan asalımsı olduğundan $(a + I)(b + I) = ab + I \in Q/I$ veya $(a + I)(c + I) = ac + I \in \sqrt{Q/I}$ veya $(b + I)(c + I) = bc + I \in \sqrt{Q/I}$ sağlanır. $\sqrt{Q/I} = \sqrt{Q}/I$ olduğundan $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ elde edilir.

(3) $a, b, c \in R$ ve $0 \neq abc \in Q$ olsun. (2) deki benzer yaklaşımla Q bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olarak elde edilir. $\square$

I, R nin bir has ideali olsun. $Z(R/I) = \{r \in R: rs \in I, \exists s \notin I\}$ olarak tanımlayacağız.

Teorem 2.1.30 S, R nin çarpımsal kapalı bir alt kümesi olsun.

(1) Q, R nin 2-yutan asalımsı ideali ve $Q \cap S = \emptyset$ ise $S^{-1}Q, S^{-1}R$ nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) Q, R nin zayıf 2-yutan asalımsı ideali ve $Q \cap S = \emptyset$ ise $S^{-1}Q, S^{-1}R$ nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

(3) $S^{-1}Q, S^{-1}R$ nin 2-yutan asalımsı ideali ve $S \cap Z(R/Q) = \emptyset$ ise Q, R nin 2-yutan asalımsı idealidir.

(4) $S^{-1}Q$, $S^{-1}R$ nin zayıf 2-yutan asalımsı ideali $S \cap Z(R) = \emptyset$ ve $S \cap Z(R/Q) = \emptyset$ ise Q , R nin zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat (1) $a, b, c \in R$ ve $s, t, k \in S$ için $\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{t}\right)\left(\frac{c}{k}\right) \in S^{-1}Q$ olsun. Şu halde bir $u \in S$ için $(ua)bc \in Q$ sağlanır. Burada Q bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $uab \in Q$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ veya $uac \in \sqrt{Q}$ gerçekleşir. $uab \in Q$ ise S çarpımsal kapalı küme olduğundan $\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{t}\right) = \left(\frac{uab}{ust}\right) \in S^{-1}Q$ dur. $bc \in \sqrt{Q}$ ise $\left(\frac{b}{t}\right)\left(\frac{c}{k}\right) \in S^{-1}\sqrt{Q} = \sqrt{S^{-1}Q}$ dir. $uac \in \sqrt{Q}$ ise $\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{c}{k}\right) = \left(\frac{uac}{usk}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ sağlanır. Buradan $S^{-1}Q$ nun $S^{-1}R$ de bir 2-yutan asalımsı ideal olduğu görülür.

(2) $a, b, c \in R$ ve $s, t, k \in S$ için $0 \neq \left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{t}\right)\left(\frac{c}{k}\right) \in S^{-1}Q$ olsun. Bu durumda bir $u \in S$ için $0 \neq (ua)bc \in Q$ dir. Q bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $uab \in Q$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ veya $uac \in \sqrt{Q}$ olur. Burada $uab \in Q$ ise $\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{t}\right) = \left(\frac{uab}{ust}\right) \in S^{-1}Q$ bulunur. $bc \in \sqrt{Q}$ ise $\left(\frac{b}{t}\right)\left(\frac{c}{k}\right) \in S^{-1}\sqrt{Q} = \sqrt{S^{-1}Q}$ dir. $uac \in \sqrt{Q}$ ise $\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{c}{k}\right) = \left(\frac{uac}{usk}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ elde edilir.

(3) $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ olsun. Bu takdirde $\left(\frac{abc}{1}\right) = \left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in S^{-1}Q$ olup, buradan $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right) \in S^{-1}Q$ veya $\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ veya $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ dir.

I. Durum: $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right) = \left(\frac{ab}{1}\right) \in S^{-1}Q$ ise bir $u \in S$ için $uab \in Q$ dir. $u \in S$ ve $S \cap Z(R/I) = \emptyset$ olduğundan $ab \in Q$ bulunur.

II. Durum: $\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) = \left(\frac{bc}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q}$ olsun. O halde $(vbc)^n = v^n b^n c^n \in Q$ olacak şekilde bir $v \in S$ elemanı ve bir n pozitif tamsayı mevcuttur. $v \in S$ olduğundan $v^n \notin Z(R/Q)$ olur. Böylece $b^n c^n \in Q$ dir ve dolayısıyla $bc \in \sqrt{Q}$ bulunur.

III. Durum: $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q}$ olsun. O zaman $(wac)^n = w^n a^n c^n \in Q$ olacak şekilde bir $w \in S$ elemanı ve bir n pozitif tamsayı mevcuttur. $w \in S$ olduğundan $w^n \notin Z(R/Q)$ olur. Böylece $a^n c^n \in Q$ dir ve buradan $ac \in \sqrt{Q}$ elde edilir. Sonuç olarak Q , R nin 2-yutan asalımsı idealidir.

(4) $a, b, c \in R$ için $0 \neq abc \in Q$ olsun. $S \cap Z(R) = \emptyset$ olduğundan $0 \neq \left(\frac{abc}{1}\right) = \left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in S^{-1}Q$ dur. Bu da $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right) \in S^{-1}Q$ veya $\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ veya $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ olmasını gerektirir.

I. Durum: $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{b}{1}\right) = \left(\frac{ab}{1}\right) \in S^{-1}Q$ ise $uab \in Q$ olacak şekilde bir $u \in S$ vardır. $u \in S$ ve $S \cap Z(R/Q) = \emptyset$ olduğundan $ab \in Q$ bulunur.

II. Durum: $\left(\frac{b}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) = \left(\frac{bc}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q}$ ise bir $v \in S$ ve bir n pozitif tamsayısı için $(vbc)^n = v^n b^n c^n \in Q$ sağlanır. $v \in S$ olduğundan $v^n \notin Z(R/Q)$ dir. Böylece $b^n c^n \in Q$, yani $bc \in \sqrt{Q}$ dir.

III. Durum: $\left(\frac{a}{1}\right)\left(\frac{c}{1}\right) \in \sqrt{S^{-1}Q}$ ise bir $w \in S$ ve bir n pozitif tamsayısı için $(wbc)^n = w^n b^n c^n \in Q$ sağlanır. $w \in S$ olduğundan $w^n \notin Z(R/Q)$ dir. Böylece $a^n c^n \in Q$, yani $ac \in \sqrt{Q}$ dir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Yardımcı Teorem 2.1.31

(1) I , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. R nin bir J ideali ve $a, b \in R$ için $abJ \subseteq I$ olsun. $ab \notin I$ ise $aJ \subseteq \sqrt{I}$ veya $bJ \subseteq \sqrt{I}$ sağlanır.

(2) I , R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. R nin bir J ideali ve $a, b \in R$ için $abJ \subseteq I$ olsun. Her $c \in J$ için (a, b, c) , I nin bir üçlü asalımsı sıfırı olmasın. Bu takdirde $ab \notin I$ ise $aJ \subseteq \sqrt{I}$ veya $bJ \subseteq \sqrt{I}$ sağlanır.

İspat (1) $aJ \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $bJ \not\subseteq \sqrt{I}$ varsayalım. Bu takdirde $aj_1 \notin \sqrt{I}$ ve $bj_2 \notin \sqrt{I}$ olacak şekilde $j_1, j_2 \in J$ vardır. $abj_1 \in I$ ve $ab \notin I$ ve $aj_1 \notin \sqrt{I}$ olmasından $bj_1 \in \sqrt{I}$ bulunur. $abj_2 \in I$ ve $ab \notin I$ ve $bj_2 \notin \sqrt{I}$ olduğundan $aj_2 \in \sqrt{I}$ dir. Buradan $ab(j_1 + j_2) \in I$ ile $ab \notin I$ olmasından $a(j_1 + j_2) \in \sqrt{I}$ veya $b(j_1 + j_2) \in \sqrt{I}$ bulunur. $a(j_1 + j_2) = aj_1 + aj_2 \in \sqrt{I}$ varsayalım. Bu durumda $aj_2 \in \sqrt{I}$ olduğundan $aj_1 \in \sqrt{I}$ çelişkisine

varılır. $b(j_1 + j_2) = bj_1 + bj_2 \in \sqrt{I}$ ise $bj_1 \in \sqrt{I}$ olduğundan $bj_2 \in \sqrt{I}$ olup yine bir çelişki elde edilir. Bu takdirde $aJ \subseteq \sqrt{I}$ veya $bJ \subseteq \sqrt{I}$ bulunur.

(2) $aJ \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $bJ \not\subseteq \sqrt{I}$ varsayalım. Bu takdirde $aj_1 \notin \sqrt{I}$ ve $bj_2 \notin \sqrt{I}$ olacak şekilde $j_1, j_2 \in J$ vardır. (a, b, j_1) , I nin bir üçlü asalımsı sıfırı olmadığından ve $abj_1 \in I$ ve $ab \notin I$ ve $aj_1 \notin \sqrt{I}$ olmasından $bj_1 \in \sqrt{I}$ bulunur. (a, b, j_2) , I nin bir üçlü asalımsı sıfırı olmadığından $abj_2 \in I$ ve $ab \notin I$ ve $bj_2 \notin \sqrt{I}$ olduğundan $aj_2 \in \sqrt{I}$ dır.

Burada $(a, b, j_1 + j_2)$, I nin bir üçlü asalımsı sıfırı olmadığından ve $ab(j_1 + j_2) \in I$ ile $ab \notin I$ olmasından $a(j_1 + j_2) \in \sqrt{I}$ veya $b(j_1 + j_2) \in \sqrt{I}$ bulunur. $a(j_1 + j_2) = aj_1 + aj_2 \in \sqrt{I}$ varsayalım. Bu durumda $aj_2 \in \sqrt{I}$ olduğundan $aj_1 \in \sqrt{I}$ çelişkisine varılır. $b(j_1 + j_2) = bj_1 + bj_2 \in \sqrt{I}$ ise $bj_1 \in \sqrt{I}$ olduğundan $bj_2 \in \sqrt{I}$ olup yine bir çelişki elde edilir. Bu takdirde $aJ \subseteq \sqrt{I}$ veya $bJ \subseteq \sqrt{I}$ bulunur. $\square$

Teorem 2.1.32 Q , R halkasının bir has ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $abc \in Q$ yu sağlayan $a, b, c \in R$ için $ab \in Q$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ dur.

(2) $I_1 I_2 I_3 \subseteq Q$ yu sağlayan R nin her I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $I_1 I_2 \subseteq Q$ veya $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ veya $I_1 I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ dur.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Varsayalım ki (1) koşulu gerçeklensin. Başka bir deyişle Q , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. R nin I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $I_1 I_2 I_3 \subseteq Q$ olsun. $I_1 I_2 \not\subseteq Q$ varsayalım. $I_1 I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ veya $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ olduğunu göstereceğiz. Aksine $I_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $I_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $q_1 \in I_1$ ve $q_2 \in I_2$ elemanları $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olacak şekilde bulunabilir. $q_1 q_2 I_3 \subseteq Q$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $q_1 q_2 \in Q$ elde edilir.

Ayrıca $I_1 I_2 \not\subseteq Q$ olduğundan, bir takım $a \in I_1$, $b \in I_2$ için $ab \notin Q$ dır. Burada $ab I_3 \subseteq Q$ ve $ab \notin Q$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $a I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ veya $b I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ bulunur. Burada üç durum söz konusudur:

I. Durum: $a I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ ve $b I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olsun. $q_1 b I_3 \subseteq Q$, $b I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $q_1 b \in I$ dir. $(a + q_1) b I_3 \subseteq Q$ ve $a I_3 \subseteq \sqrt{Q}$, fakat $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olmasından $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ bulunur. $b I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olmasından Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $(a + q_1) b \in Q$ olur. $(a + q_1) b = ab + q_1 b \in Q$ ve $q_1 b \in Q$ sebebiyle $ab \in Q$ çelişkisine varılır.

II. Durum: $a I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $b I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ olsun. $a q_2 I_3 \subseteq Q$ ve $a I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$, $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$, olduğundan $a q_2 \in Q$ olur. $a(b + q_2) I_3 \subseteq Q$ ve $b I_3 \subseteq \sqrt{Q}$, fakat $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olmasından $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ elde edilir. $a I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $a(b + q_2) \in Q$ olur. $a(b + q_2) = ab + a q_2 \in Q$ ve $a q_2 \in Q$ olmasından yine $ab \in Q$ bir çelişkidir.

III. Durum: $a I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ ve $b I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ olsun. $b I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$, olduğundan $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ olur. $q_1(b + q_2) I_3 \subseteq Q$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$, $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$, olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $q_1(b + q_2) = q_1 b + q_1 q_2 \in Q$ dir. $q_1 q_2 \in Q$ ve $q_1 b + q_1 q_2 \in Q$ den $b q_1 \in Q$ olur. Burada $a I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ gereğince $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ elde edilir. $(a + q_1) q_2 I_3 \subseteq Q$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$, $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ sebebiyle Yardımcı Teorem 2.1.31 uyarınca $(a + q_1) q_2 = a q_2 + q_1 q_2 \in Q$ olur. $q_1 q_2 \in Q$ ve $a q_2 + q_1 q_2 \in Q$ olmasından $a q_2 \in Q$ bulunur. Şimdi $(a + q_1)(b + q_2) I_3 \subseteq Q$ iken $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ ve $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{Q}$ sağlandığından Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $(a + q_1)(b + q_2) = ab + a q_2 + b q_1 + q_1 q_2 \in Q$ elde edilir. $a q_2, b q_1, q_1 q_2 \in Q$ olduğundan $a q_2 + b q_1 + q_1 q_2 \in Q$ dur. $ab + a q_2 + b q_1 + q_1 q_2 \in Q$ ve $a q_2 + b q_1 + q_1 q_2 \in Q$ olması gereğince $ab \in Q$ çelişkisine varılır. Sonuç olarak $I_1 I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ veya $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ kapsamalarından en az biri gerçekleşir.

(1)⇒(2) R nin I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $I_1I_2I_3 \subseteq Q$ ise $I_1I_2 \subseteq Q$ veya $I_2I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ veya $I_1I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ olduğunu varsayalım. $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ olsun. Burada $I_1 = (a)$, $I_2 = (b)$, ve $I_3 = (c)$ olarak alınırsa varsayımımız gereğince açıkça $ab \in I_1I_2 \subseteq Q$ veya $bc \in I_2I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ veya $ac \in I_1I_3 \subseteq \sqrt{Q}$ elde edilir. $\square$

Şimdi serbest üçlü sıfır adını vereceğimiz yeni bir ideal tanımlayalım:

Tanım 2.1.33 I, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ve R nin bir takım I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $I_1I_2I_3 \subseteq I$ olsun. Eğer her $a \in I_1, b \in I_2$ ve $c \in I_3$ için $(a, b, c), I$ nin bir üçlü asalımsı sıfırı değil ise I ya $I_1I_2I_3$ e göre serbest üçlü sıfır denir.

Konjonktür 2.1.34 I, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali ve R nin I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $0 \neq I_1I_2I_3 \subseteq I$ sağlansın. Bu takdirde I ideali bir $I_1I_2I_3$ e göre serbest üçlü sıfırdır.

Not 2.1.35 I, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. R nin $I_1I_2I_3 \subseteq I$ kapsamasını sağlayan I_1, I_2 ve I_3 idealleri için I ideali, bir $I_1I_2I_3$ e göre serbest üçlü sıfır olsun. Bu takdirde $a \in I_1, b \in I_2$ ve $c \in I_3$ ise $ab \in I$ veya $ac \in \sqrt{I}$ veya $bc \in \sqrt{I}$ sağlanır.

İspat $a \in I_1, b \in I_2$ ve $c \in I_3$ olsun. $abc \neq 0$ ise I nin zayıf 2-yutan asalımsı olmasından $ab \in I$ veya $bc \in \sqrt{I}$ veya $ac \in \sqrt{I}$ olur. $abc = 0$ durumunda ise I serbest üçlü sıfır olduğundan yine $ab \in I$ veya $bc \in \sqrt{I}$ veya $ac \in \sqrt{I}$ elde edilir. $\square$

I, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. Yukarıdaki nottan görülebileceği üzere Konjonktür 2.1.34 ün geçerli olması için gerek ve yeter koşul $0 \neq I_1I_2I_3 \subseteq I$ kapsamasını sağlayan I_1, I_2, I_3 idealleri için $I_1I_2 \subseteq I$ veya $I_2I_3 \subseteq \sqrt{I}$ veya $I_1I_3 \subseteq \sqrt{I}$ olmasıdır.

Teorem 2.1.36 I , R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. R nin I_1 , I_2 ve I_3 idealleri için $0 \neq I_1 I_2 I_3 \subseteq I$ ve I bir $I_1 I_2 I_3$ e göre serbest üçlü sıfır olsun. Bu takdirde $I_1 I_2 \subseteq I$ veya $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{I}$ veya $I_1 I_3 \subseteq \sqrt{I}$ sağlanır.

İspat I , R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. R nin I_1 , I_2 ve I_3 idealleri için $0 \neq I_1 I_2 I_3 \subseteq I$ olsun. $I_1 I_2 \not\subseteq I$ varsayalım. $I_1 I_3 \subseteq \sqrt{I}$ veya $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{I}$ olduğunu göstereceğiz. Aksine $I_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $I_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olduğunu varsayalım. Bu takdirde $q_1 \in I_1$ ve $q_2 \in I_2$ idealleri $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olacak şekilde bulunabilir. Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $q_1 q_2 \in I$ elde edilir. $I_1 I_2 \not\subseteq I$ olduğundan, bir takım $a \in I_1, b \in I_2$ elemanları için $ab \notin I$ dir. Burada $ab I_3 \subseteq I$ ve $ab \notin I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $a I_3 \subseteq \sqrt{I}$ veya $b I_3 \subseteq \sqrt{I}$ bulunur. Burada üç durum söz konusudur:

I. Durum: $a I_3 \subseteq \sqrt{I}$ ve $b I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olsun. $q_1 b I_3 \subseteq I$, $b I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $q_1 b \in I$ dir. $(a + q_1) b I_3 \subseteq I$ ve $a I_3 \subseteq \sqrt{I}$, fakat $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olmasından $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ bulunur. $b I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olmasından Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $(a + q_1) b \in I$ olur. $(a + q_1) b = ab + q_1 b \in I$ ve $q_1 b \in I$ sebebiyle $ab \in I$ çelişmesine varılır.

II. Durum: $b I_3 \subseteq \sqrt{I}$ ve $a I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olsun. $a q_2 I_3 \subseteq I$ ve $a I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$, $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$, olduğundan $a q_2 \in I$ olur. $a(b + q_2) I_3 \subseteq I$ ve $b I_3 \subseteq \sqrt{I}$, fakat $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olmasından $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ elde edilir. $a I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $a(b + q_2) \in I$ olur. $a(b + q_2) = ab + a q_2 \in I$ ve $a q_2 \in I$ olmasından yine $ab \in I$ bir çelişkidir.

III. Durum: $a I_3 \subseteq \sqrt{I}$ ve $b I_3 \subseteq \sqrt{I}$ olsun. $b I_3 \subseteq \sqrt{I}$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$, olduğundan $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ olur. $q_1(b + q_2) I_3 \subseteq I$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$, $(b + q_2) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$, olduğundan Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $q_1(b + q_2) = q_1 b + q_1 q_2 \in I$ dir. $q_1 q_2 \in I$ ve $q_1 b + q_1 q_2 \in I$ den $b q_1 \in I$ olur. Burada $a I_3 \subseteq \sqrt{I}$ ve $q_1 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ gereğince $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ elde edilir. $(a + q_1) q_2 I_3 \subseteq I$ ve $q_2 I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$, $(a + q_1) I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ sebebiyle Yardımcı Teorem 2.1.31 uyarınca $(a + q_1) q_2 = a q_2 + q_1 q_2 \in I$ olur. $q_1 q_2 \in I$ ve $a q_2 + q_1 q_2 \in I$ olmasından $a q_2 \in I$ bulunur. Şimdi $(a + q_1)(b + q_2) I_3 \subseteq I$ iken

$(a + q_1)I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ ve $(b + q_2)I_3 \not\subseteq \sqrt{I}$ sağlandığından Yardımcı Teorem 2.1.31 gereğince $(a + q_1)(b + q_2) = ab + aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ elde edilir. $aq_2, bq_1, q_1q_2 \in I$ olduğundan $aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ dir. $ab + aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ ve $aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ olması gereğince $ab \in I$ çelişkisine varılır. Sonuç olarak $I_1I_3 \subseteq \sqrt{I}$ veya $I_2I_3 \subseteq \sqrt{I}$ kapsamalarından en az biri gerçekleşir. $\square$

2.2 Kartezyen Çarpım Halkalarının 2-Yutan Asalımsı ve Zayıf 2-Yutan Asalımsı İdealleri

Teorem 2.2.1 R_1 ve R_2 iki değişmeli birimli halka olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ olsun. Bu takdirde bir Q has idealinin 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki üç formdan birine sahip olmasıdır:

- (1) Q_1, R_1 in bir 2-yutan asalımsı ideali olmak üzere $Q = Q_1 \times R_2$ biçimindedir.
- (2) Q_2, R_2 nin bir 2-yutan asalımsı ideali olmak üzere $Q = R_1 \times Q_2$ biçimindedir.
- (3) Q_1, R_1 in ve Q_2, R_2 nin iki asalımsı ideali olmak üzere $Q = Q_1 \times Q_2$ biçimindedir.

İspat (1) Q_1, R_1 in bir 2-yutan asalımsı ideali olmak üzere $Q = Q_1 \times R_2$ olsun. $a_1, b_1, c_1 \in R_1, a_2, b_2, c_2 \in R_2$ için $(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2) \in Q$ varsayalım. Bu takdirde $a_1b_1c_1 \in Q_1$ olur ki Q_1 in bir 2-yutan asalımsı ideal olmasından $a_1b_1 \in Q_1$ veya $b_1c_1 \in \sqrt{Q_1}$ veya $a_1c_1 \in \sqrt{Q_1}$ elde edilir. Böylelikle $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \in Q$ veya $(b_1, b_2)(c_1, c_2) \in \sqrt{Q}$ veya $(a_1, a_2)(c_1, c_2) \in \sqrt{Q}$ bulunur ki bu da istenilendir.

(2) Q_2, R_2 nin bir 2-yutan asalımsı ideali olmak üzere $Q = R_1 \times Q_2$ olsun. $a_1, b_1, c_1 \in R_1, a_2, b_2, c_2 \in R_2$ için $(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2) \in Q$ varsayalım. Bu takdirde $a_2b_2c_2 \in Q_2$ dir. Q_2 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $a_2b_2 \in Q_2$ veya $b_2c_2 \in \sqrt{Q_2}$ veya $a_2c_2 \in \sqrt{Q_2}$ bulunur. Böylelikle $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \in Q$ veya $(b_1, b_2)(c_1, c_2) \in \sqrt{Q}$ veya $(a_1, a_2)(c_1, c_2) \in \sqrt{Q}$ elde edilir.

(3) Q_1, R_1 nin ve Q_2, R_2 nin asalımsı idealleri olmak üzere $Q = Q_1 \times Q_2$ varsayalım. Şu halde $Q_1' = Q_1 \times R_1$ ve $Q_2' = R_1 \times Q_2$, R nin iki asalımsı idealidir. O halde Teorem 2.1.12 gereğince $Q_1' \cap Q_2' = Q_1 \times Q_2 = Q$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

Tersine, Q, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. Bu takdirde bir Q_1, R_1 in bir ideali ve Q_2, R_2 nin bir ideali olmak üzere $Q = Q_1 \times Q_2$ biçimindedir.

I. Durum: $Q_2 = R_2$ varsayalım. Bu durumda Q bir has ideal olduğundan $Q_1 \neq R_1$ dir. $R' = R/(\{0\} \times R_2)$ diyelim. Şu halde Teorem 2.1.29 dan $Q' = Q/(\{0\} \times R_2)$, R' nun bir 2-yutan asalımsı idealidir. R', R_1 e izomorf ve J' de Q_1 e izomorf olduğundan Q_1, R_1 in 2-yutan asalımsı idealidir.

II. Durum: $Q_1 = R_1$ durumunda ise I. Durumda izlenilen benzer yolla Q_2, R_2 nin bir 2-yutan asalımsı ideali olduğu gösterilebilir.

III. Durum: $Q_1 \neq R_1$ ve $Q_2 \neq R_2$ varsayalım. Bu durumda $\sqrt{Q} = \sqrt{Q_1} \times \sqrt{Q_2}$ dir. Karşıt olarak Q_1 in R_1 halkasında bir asalımsı ideal olmadığını farz edelim. Bu durumda $ab \in Q_1$ iken $a \notin Q_1$ ve $b \notin \sqrt{Q_1}$ olacak şekilde $a, b \in R_1$ elemanları mevcuttur. $x = (a, 1)$, $y = (1, 0)$ ve $z = (b, 1)$ diyelim. Buradan $xyz = (ab, 0) \in Q$ olması ile $xy = (a, 0) \notin Q$ ve $xz = (ab, 1) \notin \sqrt{Q}$ ve $yz = (b, 0) \notin \sqrt{Q}$ bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak Q_1, R_1 in bir asalımsı idealdir. Tamamen benzer şekilde Q_2, R_2 nin bir asalımsı ideal olduğu görülebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 2.2.2 R_1 ve R_2 iki değişmeli birimli halka, Q_1, R_1 in bir has ideali ve $R = R_1 \times R_2$ ise aşağıdakiler denktir:

- (1) $Q \times R_2$, R nin zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.
- (2) $Q \times R_2$, R nin 2-yutan asalımsı idealidir.
- (3) Q, R_1 in 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat (1)⇒(2) $Q \times R_2$, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. $Q \times R_2 \notin \sqrt{0}$, olduğundan Teorem 2.1.22 gereğince $Q \times R_2$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(2)⇒(3) Q nun R_1 in bir 2-yutan asalımsı ideali olmadığını varsayalım. Bu takdirde $abc \in Q$, fakat $ab \notin Q$, $bc \notin \sqrt{Q}$, ve $ac \notin \sqrt{Q}$ sağlanmak üzere $a, b, c \in R_1$ elemanları vardır. $(a, 1_{R_2})(b, 1_{R_2})(c, 1_{R_2}) \in Q \times R_2$ olduğundan $(a, 1_{R_2})(b, 1_{R_2}) \in Q \times R_2$ veya $(b, 1_{R_2})(c, 1_{R_2}) \in \sqrt{Q \times R_2} = \sqrt{Q} \times R_2$ veya $(a, 1_{R_2})(c, 1_{R_2}) \in \sqrt{Q \times R_2} = \sqrt{Q} \times R_2$ gerçekleşir. Buradan $ab \in Q$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ çelişkisine varılır. Böylece Q , R_1 in bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(3)⇒(1) Q , R_1 in bir 2-yutan asalımsı ideali ise $Q \times R_2$, Teorem 2.2.1 gereğince R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. Dolayısıyla bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir. $\square$

Teorem 2.2.3 R_1 ve R_2 iki değişmeli birimli halka ve $R = R_1 \times R_2$ olsun. Q_1 ve Q_2 , sırasıyla R_1 ve R_2 nin sıfırdan farklı idealleri olmak üzere $Q_1 \times Q_2$, R nin bir has ideali ise aşağıdaki durumlar denktir:

(1) $Q_1 \times Q_2$, R nin zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) $Q_2 = R_2$ ve Q_1 , R_1 in 2-yutan asalımsı ideali veya $Q_1 = R_1$ ve Q_2 , R_2 nin asalımsı idealidir.

(3) $Q_1 \times Q_2$, R nin 2-yutan asalımsı idealidir.

İspat (1)⇒(2) $Q_1 \times Q_2$, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. $Q_1 = R_1$ ise Teorem 2.2.2 gereğince Q_2 , R_2 nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. Benzer şekilde $Q_2 = R_2$ ise yine Teorem 2.2.2 gereğince Q_1 , R_1 nin bir 2-yutan asalımsı ideali olarak bulunur. O zaman $Q_1 \neq R_1$ ve $Q_2 \neq R_2$ varsayalım. Q_2 nin R_2 nin bir asalımsı ideali olduğunu göstereceğiz. $a, b \in R_2$ için $ab \in Q_2$ varsayalım. Q_1 sıfırdan farklı bir ideal olduğundan bir $0 \neq x \in Q_1$ elemanı vardır. Bu takdirde $0 \neq (x, 1)(1, a)(1, b) = (x, ab) \in Q_1 \times Q_2$, olur. Burada Q_1 bir has ideal olduğundan, $(1, a)(1, b) = (1, ab) \notin \sqrt{Q_1 \times Q_2}$ dir. Böylelikle $(x, 1)(1, a) = (x, a) \leq (q_1, q_2)$ veya $(x, 1)(1, b) = (x, b) \in$

$\sqrt{Q_1 \times Q_2}$ yani $a \in Q_2$ veya $b \in \sqrt{Q_2}$ sağlanır. Bu da Q_2 nin R_2 de bir asalımsı ideal olduğunu gösterir. Benzer Q_1 in R_1 de bir asalımsı ideal olduğu gösterilebilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Teorem 2.2.2 uyarınca ispat açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) Teorem 2.1.2 gereğince açıktır. $\square$

Teorem 2.2.4 R_1 ve R_2 iki değişmeli birimli halka ve $R = R_1 \times R_2$ olsun. R nin bir sıfırdan farklı bir Q has idealinin 2-yutan asalımsı olmayan bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan birinin gerçekleşmesidir:

(1) Q_1 , R_1 in sıfırdan farklı asalımsı olmayan bir zayıf asalımsı ideali ve $Q_2 = \{0\}$, R_2 nin asalımsı ideali olmak üzere $Q = Q_1 \times Q_2$,

(2) Q_2 , R_2 nin sıfırdan farklı asalımsı olmayan bir zayıf asalımsı ideali ve $Q_1 = \{0\}$, R_1 de bir asalımsı ideal olmak üzere $Q = Q_1 \times Q_2$ biçimindedir.

İspat $Q = Q_1 \times Q_2$, R nin bir sıfırdan farklı bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. Q nun R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olmadığını varsayalım. $Q_1 \neq 0$ ve $Q_2 \neq 0$ varsayalım. Bu durumda Teorem 2.2.3 gereğince Q , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olarak bulunur ki bu varsayımımız ile çelişir. O halde $Q_1 = \{0\}$ veya $Q_2 = \{0\}$ dir. Genelliği kaybetmeden $Q_2 = \{0\}$ varsayalım. Bu takdirde, Q sıfırdan farklı olduğundan $Q_1 \neq \{0\}$ elde edilir. İspatı üç adımda yapacağız:

I. Adım: $Q_2 = \{0\}$ nin R_2 nin bir asalımsı ideali olduğunu göstereceğiz. $a, b \in R_2$ için $ab \in Q_2$ olsun. $Q_1 \neq \{0\}$ olduğundan bir $0 \neq q_1 \in Q_1$ elemanı vardır. O halde $0 \neq (q_1, 1)(1, a)(1, b) = (q_1, ab) \in Q$ ve $(1, a)(1, b) = (1, ab) \notin \sqrt{Q}$ olduğundan $(q_1, a) = (q_1, 1)(1, a) \in Q$ veya $(q_1, b) = (q_1, 1)(1, b) \in \sqrt{Q}$ dir. Yani $a \in Q_2$ veya $b \in \sqrt{Q_2}$ sağlanır. Buradan $Q_2 = \{0\}$, R_2 nin bir asalımsı idealidir.

II. Adım: Q_1 in R_1 de bir zayıf asalımsı ideal olduğunu gösterelim. $a, b \in R_1$ için $0 \neq ab \in Q_1$ olsun. $0 \neq (a, 1)(b, 1)(1, 0) \in Q_1 \times 0$ ve $(a, 1)(b, 1) = (ab, 1) \notin Q_1 \times 0$

olması gereğince $(a, 0) = (a, 1)(1, 0) \in \sqrt{Q_1 \times 0} = \sqrt{Q}$ veya $(b, 0) = (b, 1)(1, 0) \in \sqrt{Q_1 \times 0} = \sqrt{Q}$ olur. Buradan $a \in Q_1$ veya $b \in \sqrt{Q_1}$ dır. Böylece Q_1, R_1 in bir zayıf asalımsı idealidir.

III. Adım: Q_1 in bir asalımsı ideal olmadığını gösterelim. Farz edelim ki Q_1, R_1 in bir asalımsı ideali olsun. $Q_2 = 0, R_2$ nin bir asalımsı ideali olduğundan Teorem 2.2.3 gereğince $Q = Q_1 \times Q_2, R$ nin bir 2-yutan asalımsı ideali olarak bulunur ki bu bir çelişkidir. O halde Q_1, R_1 in bir asalımsı olmayan bir zayıf asalımsı idealidir.

Tersine, (1) in sağlandığını kabul edelim. $(0, 0) \neq (a, a')(b, b')(c, c') \in Q = Q_1 \times 0$ olsun. $a'b'c' = 0$ ve $(0, 0) \neq (a, a')(b, b')(c, c') \in Q_1 \times 0$ olduğundan $abc \neq 0$ dır. $(a, a')(b, b') \notin Q$ olsun. Burada üç durum söz konusudur:

I. Durum: $ab \notin Q_1$ ve $a'b' = 0$ ise Q_1, R_1 in bir zayıf asalımsı ideali olduğundan $c \in \sqrt{Q_1}$ dir. $Q_2 = 0, R_2$ nin bir asalımsı ideali olduğundan $a' = 0$ veya $b' \in \sqrt{Q_2}$ olur. Buradan $(a, a')(c, c') \in \sqrt{Q}$ veya $(b, b')(c, c') \in \sqrt{Q}$ elde edilir.

II. Durum: $ab \notin Q_1$ ve $a'b' \neq 0$ ise $(c, c') \in \sqrt{Q_1 \times 0} = \sqrt{Q}$ olur. Yani $(a, a')(c, c') \in \sqrt{Q}$ veya $(b, b')(c, c') \in \sqrt{Q}$ bulunur.

III. Durum: $ab \in Q_1$ ve $a'b' \neq 0$ ise $0 \neq ab \in Q_1$ ve Q_1, R_1 in bir zayıf asalımsı ideali olduğundan $a \in Q_1$ veya $b \in \sqrt{Q_1}$ bulunur. $a'b' \neq 0$ ve $Q_2 = 0, R_2$ nin bir asalımsı ideali olduğundan $c' \in \sqrt{Q_2}$ dir. Buradan $(a, a')(c, c') \in \sqrt{Q}$ veya $(b, b')(c, c') \in \sqrt{Q}$ elde edilir. Buradan Q, R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir. Q_1, R_1 in bir asalımsı ideali olmadığından, Teorem 2.2.1 gereğince Q, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali değildir. $\square$

Teorem 2.2.5 R_1, R_2 ve R_3 değişmeli birimli halkalar olmak üzere $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ olsun. Q, R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu takdirde Q nun R nin zayıf 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul Q nun R nin 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.

İspat $Q = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \neq \{0_R\}$, R nin zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. Şu halde bir $0_R \neq (a, b, c) \in Q$ elemanı vardır. Buradan $(a, 1, 1)(1, b, 1)(1, 1, c) \in Q$ olduğundan $(a, b, 1) = (a, 1, 1)(1, b, 1) \in Q$ veya $(1, b, c) = (1, b, 1)(1, 1, c) \in \sqrt{Q}$ veya $(a, 1, c) = (a, 1, 1)(1, 1, c) \in \sqrt{Q}$ sağlanır. $(a, b, 1) \in Q$ ise $Q_3 = R_3$ ve dolayısıyla $Q = Q_1 \times Q_2 \times R_3$ bulunur. $(1, b, c) \in \sqrt{Q}$ ise $Q_1 = R_1$ ve buradan $Q = R_1 \times Q_2 \times Q_3$ elde edilir. Eğer $(a, 1, c) \in \sqrt{Q}$ ise $\sqrt{Q_2} = R_2$ olup, böylece $Q_2 = R_2$ dir. Dolayısıyla $Q = Q_1 \times R_2 \times Q_3$ elde edilir. O halde her koşulda $Q \not\subseteq \sqrt{0_R}$ bulunur. Sonuç 2.1.24 gereğince Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. Ters taraf ise açıktır. $\square$

Teorem 2.2.6 $R_1, R_2, \dots, R_n$ ($2 < n < \infty$) değişmeli birimli halkalar olmak üzere $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ olsun. Q , R nin bir has ideali ise aşağıdakiler denktir:

- (1) Q , R nin bir zayıf 2-yutan asalımsı idealidir.
- (2) Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.
- (3) $Q = (Q_t)_{t=1}^n$ için aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

(i) Bir $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için Q_k, R_k nin bir 2-yutan asalımsı ideali ve her $t \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\}$ için $Q_t = R_t$ dir.

(ii) İki $k, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ için Q_k, R_k nin asalımsı ideali, Q_m, R_m nin asalımsı ideali ve her $t \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k, m\}$ için $Q_t = R_t$ olmak üzere $Q = (Q_t)_{t=1}^n$ biçimindedir.

İspat (1) $\Leftrightarrow$ (2) Q , R nin bir ideali olduğundan her Q_i sırasıyla R_i nin ideali olmak üzere $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n$ şeklindedir. Q bir has ideal olduğundan bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $Q_j \neq R_j$ sağlanır. $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_n$ in bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğunu varsayalım. Q sıfırdan farklı bir ideal olduğundan bir $0 \neq (a_1, a_2, \dots, a_n) \in Q$ vardır. Buradan $0 \neq (a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, 1, 1, \dots, 1)(1, a_2, 1, \dots, 1) \dots (1, 1, \dots, 1, a_n) \in Q$ olması gereğince bir $j \in \{1, \dots, n\}$ için $Q_j = R_j$ bulunur. O halde $\sqrt{Q} \neq \sqrt{0}$ olup Sonuç 2.1.24 gereğince Q bir 2-yutan asalımsı idealidir. Ters taraf ise aşikârdır.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) İspatı n üzerinden tümevarım ile yapalım. $n = 2$ ise Teorem 2.2.1 gereğince iddia doğrudur. $3 \leq n < \infty$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. $S = R_1 \times \cdots \times R_{n-1}$ diyelim. Bu durumda $R = S \times R_n$ olur. Teorem 2.2.1 gereğince Q nun R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul S nin bir 2-yutan asalımsı ideali I için $Q = I \times R_n$ veya bir R_n nin bir J , 2-yutan asalımsı ideali için $Q = S \times J$ veya S nin I ve R_n nin J asalımsı idealleri için $Q = I \times J$ biçiminde olmasıdır. S nin bir has I idealinin bir asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul bir $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ için Q_k, R_k nin bir asalımsı ideali ve her $t \in \{1, 2, \dots, n-1\} \setminus \{k\}$ için $Q_t = R_t$ olmak üzere $I = (Q_k)_{k=1}^{n-1}$ şeklinde olmasıdır. Şu halde ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.2.7 R_1, R_2 ve R_3 değişmeli birimli halkalar ve $R = R_1 \times R_2 \times R_3$ olsun. Bu takdirde R nin her has idealinin zayıf 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul R_1, R_2 ve R_3 halkalarının birer cisim olmasıdır.

İspat R nin her has idealinin bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğunu varsayalım. Genelliği kaybetmeden R_1 in bir cisim olmadığını farz edelim. Bu takdirde R_1 in sıfırdan farklı bir has ideali Q vardır. Buradan $Q \times 0 \times 0, R$ halkasında bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olur ki bu durum Teorem 2.2.6 ile çelişir.

Tersine, R_1, R_2, R_3 birer cisim olsun. O halde Teorem 2.2.6 gereğince R nin sıfırdan farklı has idealleri, $R_1 \times R_2 \times 0, R_1 \times 0 \times R_3, 0 \times R_2 \times R_3, R_1 \times 0 \times 0, 0 \times R_2 \times 0, 0 \times 0 \times R_3$ olup her biri R halkasının açıkça 2-yutan idealidir. Sıfır ideal her zaman zayıf 2-yutan asalımsı ideal olduğundan ispat tamamlanır. $\square$

2.3 Bazı Özel Halkalarda 2-Yutan Asalımsı ve Zayıf 2-Yutan Asalımsı İdealler

Teorem 2.3.1 $\sqrt{0}, R$ nin bir asal (asalımsı) ideali ve Q, R nin bir has ideali olsun. Bu takdirde Q nun bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul Q nun bir 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.

İspat Q bir zayıf 2-yutan asalımsı ideali olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in Q$ varsayalım. $0 \neq abc \in Q$ ise $ab \in Q$ veya $ac \in \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{Q}$ bulunur ki bu da gösterilmek istenilendir. Şimdi $abc = 0$ ve $ab \notin Q$ varsayalım. $abc = 0 \in \sqrt{0}$ ve $\sqrt{0}$ bir asal ideal olduğundan $a \in \sqrt{0}$ veya $b \in \sqrt{0}$ veya $c \in \sqrt{0}$ elde edilir. $\sqrt{0} \subseteq \sqrt{Q}$ olması gereğince $ac \in \sqrt{0} \subseteq \sqrt{Q}$ veya $bc \in \sqrt{0} \subseteq \sqrt{Q}$ sağlanır. Böylece Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. Ters taraf açıktır. $\square$

Teorem 2.3.2 R , $\sqrt{0}$ maksimal ideali ile birlikte bir sözde yerel (quasi local) halka ise aşağıdakiler sağlanır:

(1) R nin her has ideali bir zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.

(2) R nin bir has Q idealinin zayıf 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul Q nun bir 2-yutan asalımsı ideal olmasıdır.

İspat (1) Q , R nin her has ideali olsun. O halde $0 \in Q$ olduğundan her zaman $\sqrt{0} \subseteq \sqrt{Q}$ sağlanır. $\sqrt{0}$ maksimal ideal olduğundan $\sqrt{Q} = \sqrt{0}$ bulunur. $\sqrt{0}$ maksimal olduğundan $\sqrt{Q}$ asalıdır. Buradan Teorem 2.1.8 gereğince Q bir 2-yutan asalımsı, dolayısıyla zayıf 2-yutan asalımsı idealdir.

(2) Teorem 2.3.1 den ispat açıktır. $\square$

Teorem 2.3.3 R nin her has ideali bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal ise R de en çok üç tane karşılaştırılamayan asal ideal vardır. Sonuç olarak R nin en çok üç tane maksimal ideali vardır.

İspat P_1, P_2, P_3 ve P_4 ideallerinin R nin karşılaştırılamayan asal idealleri olduğunu varsayalım. $Q = P_1 \cap P_2 \cap P_3$ diyelim. Buradan $\sqrt{Q} = \sqrt{P_1} \cap \sqrt{P_2} \cap \sqrt{P_3}$ olur. Teorem 2.1.7 gereğince $\sqrt{Q}$, R nin bir 2-yutan ideali değildir. Dolayısıyla Teorem 2.1.2 uyarınca Q , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali değildir. Teorem 2.1.22 gereğince $Q^3 = 0$ dir.

Buradan $Q^3 = P_1^3 P_2^3 P_3^3 = 0 \in P_4$ olduğundan $P_1 \subset P_4$ veya $P_2 \subset P_4$ veya $P_3 \subset P_4$ çelişkisine varılır. Sonuç olarak R de en çok üç tane karşılaştırılamayan asal ideal vardır. Maksimal idealler karşılaştırılamadığından, en çok üç tane maksimal ideali vardır. $\square$

R bir tamlık bölgesi ve K , R nin kesir cismi olsun Eğer R nin sıfırdan farklı has her I ideali için $I^{-1} = \{x \in K : xI \in R\}$ olmak üzere $II^{-1} = R$ ise R ye bir Dedekind bölgesi adı verilir. Dedekind bölgelerindeki tüm 2-yutan asalımsı idealleri Teorem 2.3.4 yardımıyla belirleyebiliriz:

Teorem 2.3.4 R cisim olmayan bir Noetherian bölge olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

(1) R bir Dedekind bölgesidir.

(2) R nin bir sıfırdan farklı has ideali Q nun bir 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul bir maksimal M ideali ve bir pozitif tamsayı n için $Q = M^n$ veya iki maksimal ideal M_1, M_2 veya iki pozitif tamsayı n, m için $Q = M_1^n M_2^m$ tipinde olmasıdır.

(3) Q, R nin bir 2-yutan asalımsı sıfırdan farklı has ideali ise bir maksimal M ideali ve bir pozitif tamsayı n için $Q = M^n$ veya iki maksimal ideal M_1, M_2 ve iki pozitif tamsayı n, m için $Q = M_1^n M_2^m$ tipindedir.

(4) R nin bir Q sıfırdan farklı has idealinin 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul bir asal P ideali ve bir pozitif tamsayı n için $Q = P^n$ veya iki asal ideal P_1, P_2 veya iki pozitif tamsayı n, m için $Q = P_1^n P_2^m$ tipinde olmasıdır.

(5) Q, R nin bir 2-yutan asalımsı sıfırdan farklı has ideali ise bir asal P ideali ve bir pozitif tamsayı n için $Q = P^n$ veya iki asal ideal P_1, P_2 ve iki pozitif tamsayı n, m için $Q = P_1^n P_2^m$ tipindedir.

İspat (1)⇒(2) R cisim olmayan bir Noetherian bölge olsun. Bu takdirde sıfırdan farklı her asal ideali maksimal idealdir. Q , R nin bir sıfırdan farklı has ideali olsun. Bu takdirde $M_1, M_2, \dots, M_k$ maksimal idealler ve $n_1, n_2, \dots, n_k$ pozitif tamsayılar olmak üzere olmak üzere $Q = M_1^{n_1} M_2^{n_2} \dots M_k^{n_k}$ yazılabilir. Q , R nin 2-yutan asalımsı ideali olsun. R halkasının sıfırdan farklı her asal ideali maksimal olduğundan ve Teorem 2.1.7 gereğince $\sqrt{Q}$ maksimal veya R nin iki maksimal ideali I_1, I_2 için $I_1 \cap I_2$ biçimindedir. O zaman bir pozitif n tamsayısı ve bir maksimal M ideali için $Q = M^n$ veya iki maksimal ideal M_1, M_2 ve iki pozitif n, m tamsayısı için $Q = M_1^n M_2^m$ tipindedir.

Tersine, bir maksimal ideal M ve bir pozitif tamsayı n için $Q = M^n$ veya iki maksimal ideal M_1 ve M_2 ve iki pozitif tamsayı n, m için $Q = M_1^n M_2^m$ formunda ise Teorem ve Sonuç 2.1.13 gereğince Q , R nin bir 2-yutan asalımsı idealdir.

(2)⇒(3) Aşıkardır.

(2)⇒(4) Aşıkardır.

(4)⇒(5) Aşıkardır.

(3)⇒(5) Aşıkardır.

(5)⇒(1) R nin bir Dedekind bölgesi olduğunu göstermek için bir M maksimal idealini alalım. $M^2 \subset I \subset M$ olmak üzere R nin bir I idealinin bulunduğunu varsayalım. Buradan I , bir M -asalımsı idealdir. O halde R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. (5) teki hipotez gereğince böyle bir I ideali bulunamaz. Böylece R bir Dedekind bölgesidir. $\square$

Her esas ideal bölgesi bir Dedekind bölgesi olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.3.5 R bir esas ideal bölgesi ve Q , R nin sıfırdan farklı bir has ideali olsun. Bu takdirde Q nun 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul p_1 ve p_2 , R halkasının iki asal elemanı ve n, m iki tamsayı olmak üzere $(p_1^n p_2^m)$ biçiminde olmasıdır.

İspat $Q = (x)$, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali olsun. x in R deki üç farklı asal ideal ile bölünebildiğini varsayalım. Buradan p_1, p_2, p_3 , R nin farklı asal elemanları olmak üzere $x = p_1^n p_2^m p_3^t$, $n, m, t > 0$. Böylece $p_1^n p_2^m p_3^t \in Q$, iken $p_1^n p_2^m \notin Q$ ve $p_1^n p_3^t \notin \sqrt{Q}$ ve $p_2^m p_3^t \notin \sqrt{Q}$ bulunur. Ancak bu durum Q nun 2-yutan asalımsı ideal olması ile çelişir. Buradan x , R nin en çok iki farklı asal elemanının kuvvetlerinin çarpımı biçiminde yazılabilir. Diğer taraf Teorem 2.3.4 dolayısıyla açıktır. $\square$

Örnek 2.3.6

- (1) $\mathbb{Z}$ nin her sıfırdan farklı 2-yutan asalımsı ideali, bir takım p_1, p_2 asal tamsayıları ve $k_1, k_2 \geq 0$ için $I = (p_1^{k_1} p_2^{k_2})$ biçimindedir.
- (2) F bir cisim olmak üzere $R = F[X]$ ise bir I idealinin R nin 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $p(x) \in R$ indirgenemez polinomu için $I = p(x)^k R$ veya $p(x), q(x) \in R$ indirgenemez polinomları ve $k_1, k_2 \geq 0$ için $I = p(x)^{k_1} q(x)^{k_2} R$ biçiminde olmasıdır.

Aşağıdaki örnek, bir R tek türlü çarpanlarına ayrılabilen bölgenin herhangi bir 2-yutan asalımsı idealinin bu tipte olmasının gerekmediğini gösterir:

Örnek 2.3.7 K bir cisim olmak üzere $R = K[X, Y, Z]$ olsun. R nin $Q = (X, Y^2, Z^3)$ idealini göz önüne alalım. Şu halde Q bir 2-yutan asalımsı ideal olduğu halde P_1, P_2 iki asal ideal ve $k, t \geq 0$ olmak üzere $P_1^k P_2^t$ formunda değildir.

İspat $M = (X, Y, Z)$, R nin bir maksimal ideali ve $M^3 \subseteq (X, Y^2, Z^3) \subseteq M$ olduğundan $M = \sqrt{M^3} \subseteq \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{M} = M$ dir. Buradan $\sqrt{Q} = M$ ve Teorem 2.1.8 gereğince Q , R nin 2-yutan asalımsı idealidir. P_1, P_2 iki asal ideal ve $k, t \geq 0$ olmak üzere $Q = P_1^k P_2^t$ varsayalım. Bu takdirde, $X, Y^2, Z^3 \in P_1^k P_2^t \subseteq P_1 \cap P_2$ olmasından $P_1 = P_2 = M$ olur. Fakat bir $n > 0$ için $M^n = (X, Y, Z)^n = (X, Y^2, Z^3)$ özdeşliğinin sağlanması imkansızdır. $\square$

Tanım 2.3.8 R halkasında her $x, y \in R$ için $x \mid y$ veya $y \mid x$ sağlanıyorsa R ye bir zincir (chanied) halkası adı verilir. Açıkça her zincir halkası bir bölüm halkasıdır.

Teorem 2.3.9 Bir bölüm halkasının her has ideali 2-yutan asalımsı idealdir. Özel olarak bir zincir halkasının her ideali 2-yutan asalımsı idealdir.

İspat I, R nin bir has ideali olsun. Bölüm halkalarının asal idealleri tamamen sıralı olduğundan I yı içeren asal ideallerin arakesiti $\sqrt{I}$ bir asal idealdir. O halde Teorem 2.1.8 gereğince I, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. $\square$

Not 2.3.10 R nir Noetherian halka olsun. R nin her idealinin bir tek türlü asalımsı parçalanışa sahip olduğunu biliyoruz. Her asalımsı ideal aynı zamanda 2-yutan asalımsı ideal olduğundan, Noetherian halkalarda her idealin aynı zamanda 2-yutan asalımsı parçalanışı mevcuttur. Fakat bu 2-yutan asalımsı ideallere parçalanış tek türlü değildir.

Örnek 2.3.11

(1) $\mathbb{Z}$ halkasında (60) ideali için dört farklı 2-yutan asalımsı ideallere parçalanış vardır:

$$(60) = (3) \cap (4) \cap (5) = (3) \cap (20) = (4) \cap (15) = (4) \cap (12).$$

(2) $\mathbb{Z}$ halkasında (210) idealinin ise aşağıdaki gibi on farklı 2-yutan asalımsı ideallere parçalanışı vardır:

$$(210) = (2) \cap (3) \cap (5) \cap (7) = (6) \cap (5) \cap (7) = (10) \cap (3) \cap (7)$$

$$= (14) \cap (3) \cap (5) = (15) \cap (2) \cap (7) = (21) \cap (2) \cap (5)$$

$$= (15) \cap (14) = (21) \cap (10) = (35) \cap (2) \cap (3) = (35) \cap (6).$$

2.4 Zayıf Asal ve Zayıf 2-Yutan İdeallerin Bazı Özellikleri

Tanım 2.4.1 I , R nin bir zayıf asal ideali olsun. Eğer $a \notin I$ ve $b \notin I$ için $ab = 0$ ise (a, b) ye I nin bir ikili sıfırı diyeceğiz. Dikkat edilecek olursa, I , R nin asal olmayan bir zayıf asal ideali ise $a, b \in R$ için I nin bir (a, b) ikili sıfırı vardır.

Bu bölümde ikili sıfır kavramını kullanarak, (Anderson ve Smith, 2003) deki bir takım sonuçlar için farklı ispatlar verilecektir.

Teorem 2.4.2 I , R nin bir zayıf asal ideali ve (a, b) , I nin bir ikili sıfırı olsun. Bu takdirde $aI = bI = \{0\}$ dır.

İspat $aI \neq \{0\}$ varsayalım. Bu takdirde bir $i \in I$ için $ai \neq 0$ olur. Buradan $a(b + i) \neq 0$ dır. $a \notin I$ ve I zayıf asal olduğundan $b + i \in I$ olur ve böylece $b \in I$ çelişkisi elde edilir. Böylece $aI = 0$ dır. Benzer şekilde $bI = 0$ olduğunu göstermek kolaydır. $\square$

Teorem 2.4.3 I , R nin bir zayıf asal ideali olsun. I asal değil ise $I^2 = \{0\}$ dır.

İspat I , R nin asal olmayan bir zayıf asal ideali olsun. Şu halde I nin bir (a, b) ikili sıfırı vardır. $i_1, i_2 \in I$ için $i_1 i_2 \neq 0$ varsayalım. Bu takdirde Teorem 2.4.2 uyarınca $(a + i_1)(b + i_2) = i_1 i_2 \neq 0$ olur. Böylelikle I bir zayıf asal ideal olduğundan $(a + i_1) \in I$ veya $(b + i_2) \in I$, yani $a \in I$ veya $b \in I$ çelişkisine varılır. O halde $I^2 = \{0\}$ bulunur. $\square$

Teorem 2.4.4 I , R nin bir zayıf asal ideali olsun. I asal ideal değil ise $I \subseteq \sqrt{0}$ ve

$I\sqrt{0} = \{0\}$ sağlanır.

İspat I bir asal ideal olmayan bir zayıf asal ideal olsun. O halde Teorem 2.4.3 gereğince $I \subseteq \sqrt{0}$ dır. Bir $w \in \sqrt{0}$ alalım. $w \in I$ ise Teorem 2.4.3 den $wI = \{0\}$ bulunur. O

halde $w \notin I$ ve $wI \neq 0$ varsayalım. Buradan bir $i \in I$ için $wi \neq 0$ olur. $w^m = 0$ özdeşliğini gerçekleyen en küçük pozitif tamsayıya m diyelim. O halde $w(w^{m-1} + i) = wi \neq 0$ ve $w \notin I$ olduğundan $w^{m-1} + i \in I$ dir. Böylece $w^{m-1} \in I$ elde edilir. $0 \neq w^{m-1} \in I$ ve I bir zayıf asal olduğundan $w \in I$ çelişmesine varılır. Böylelikle $wI = \{0\}$, dolayısıyla $I\sqrt{0} = \{0\}$ elde edilir. $\square$

Teorem 2.4.5 I, R nin bir zayıf asal ideali ve $(a, b), I$ nin bir ikili sıfırı olsun. Bir $r \in R$ için $ar \in I$ ise $ar = 0$ dir.

İspat Bir $r \in R$ için $0 \neq ar \in I$ olsun. Bu takdirde $r \in I$ dir. Dolayısıyla Teorem 2.4.2 gereğince $ar = 0$ çelişmesine varılır. $\square$

Teorem 2.4.6 I, R nin bir zayıf asal ideali ve R nin bir takım A, B idealleri için $AB \subseteq I$ olsun. O halde $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $(a, b), I$ nin bir ikili sıfırı ise $AB = \{0\}$ dir.

İspat $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere $(a, b), I$ nin bir ikili sıfırı olsun. $c \in A$ ve $d \in B$ için $cd \neq 0$ olduğunu varsayalım. Buradan $c \in I$ veya $d \in I$ dir. Genelliği kaybetmeden $c \in I$ varsayabiliriz. Teorem 2.4.3 gereğince $I^2 = 0$ bulunur. $0 \neq cd \in I$ olduğundan $d \notin I$ elde edilir. Diğer taraftan $ad \in I$ olduğundan Teorem 2.4.5 gereğince $ad = 0$ olur. $(a + c)d = cd \neq 0$ ve $d \in I$ olmasından $a + c \in I$ elde edilir. Dolayısıyla $a \in I$ çelişmesine varılır. Şu halde $AB = 0$ dir. $\square$

Teorem 2.4.7 I, R nin bir zayıf asal ideali ve R nin iki A, B ideali için $0 \neq AB \subseteq I$ olsun. Bu takdirde $A \subseteq I$ veya $B \subseteq I$ sağlanır.

İspat $\{0\} \neq AB \subseteq I$ olduğundan Teorem 2.4.6 gereğince her $a \in A$ ve $b \in B$ için $a \in I$ veya $b \in I$ elde edilir. Genelliği kaybetmeden $B \not\subseteq I$ varsayalım. Buradan bir

$b \in B$ için $b \notin I$ dir. Herhangi bir $a \in A$ alalım. $ab \in I$ ve $b \notin I$ olduğundan $a \in I$ olup, $A \subseteq I$ elde edilir. $\square$

Şimdi zayıf 2-yutan ideallere ilişkin bir takım sonuçlardan bahsedebiliriz. Öncelikle üçlü sıfır tanımını hatırlayalım:

Tanım 2.4.8 (Badawi ve Darani, 2011) I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali ve $a, b, c \in R$ olsun. Eğer $abc = 0$ iken $ab \notin I, bc \notin I$ ve $ac \notin I$ ise (a, b, c) ye I nin üçlü sıfırı adı verilir.

Şimdi serbest üçlü sıfır kavramını aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

Tanım 2.4.9 I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali ve R nin bir takım I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $I_1 I_2 I_3 \subseteq I$ olsun. Eğer hiçbir $a \in I_1, b \in I_2$ ve $c \in I_3$ için $(a, b, c), I$ nin bir üçlü sıfırı değilse I bir $I_1 I_2 I_3$ ya göre serbest üçlü sıfırdır diyeceğiz.

Konjonktür 2.4.10 I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali ve R nin bir takım I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $0 \neq I_1 I_2 I_3 \subseteq I$ olsun. Bu takdirde I ideali, bir $I_1 I_2 I_3$ ya göre serbest üçlü sıfırdır.

Yardımcı Teorem 2.4.11 I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali ve $a, b \in R$ ve bir J ideali için $abJ \subseteq I$ olsun. Şayet her $c \in J$ için $(a, b, c), I$ nin bir üçlü sıfırı değil ve $ab \notin I$ sağlanıyorsa $aJ \subseteq I$ veya $bJ \subseteq I$ dir.

İspat $aJ \not\subseteq I$ ve $bJ \not\subseteq I$ varsayalım. Bu takdirde $aj_1 \notin I$ ve $bj_2 \notin I$ olacak şekilde $j_1, j_2 \in J$ elemanları vardır. $abj_1 \in I, ab \notin I, aj_1 \notin I$ ve $(a, b, j_1), I$ nin bir üçlü sıfırı olmadığından $bj_1 \in I$ bulunur. $abj_2 \in I, ab \notin I, bj_2 \notin I$ ve $(a, b, j_2), I$ nin bir üçlü sıfırı olmadığından $aj_2 \in I$ dir. Ayrıca $ab(j_1 + j_2) \in I, ab \notin I$ ve $(a, b, j_1 + j_2), I$

nin bir üçlü sıfırı olmadığından, $a(j_1 + j_2) \in I$ veya $b(j_1 + j_2) \in I$ elde edilir. $a(j_1 + j_2) = aj_1 + aj_2 \in I$ varsayalım. $aj_2 \in I$ olduğundan $aj_1 \in I$ çelişmesine varılır. Şimdi de $b(j_1 + j_2) = bj_1 + bj_2 \in I$ varsayalım. $bj_1 \in I$ olmasından $bj_2 \in I$ yine bir çelişkidir. O halde $aJ \subseteq I$ veya $bJ \subseteq I$ dir. $\square$

Not 2.4.12 I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali ve R nin I_1, I_2 ve I_3 idealleri için $I_1I_2I_3 \subseteq I$ olmak üzere $I, I_1I_2I_3$ e göre bir serbest üçlü sıfır olsun. Bu takdirde $a \in I_1, b \in I_2$ ve $c \in I_3$ ise $ab \in I$ veya $ac \in I$ veya $bc \in I$ dir.

Teorem 2.4.13 I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali olsun. R nin I_1, I_2, I_3 idealleri için sağlansın. I ideali, $I_1I_2I_3$ e göre bir serbest üçlü sıfır ise $0 \neq I_1I_2I_3 \subseteq I$ ise $I_1I_2 \subseteq I$ veya $I_2I_3 \subseteq I$ veya $I_1I_3 \subseteq I$ dir.

İspat I, R nin bir zayıf 2-yutan ideali ve I ideali, $I_1I_2I_3$ e göre bir serbest üçlü sıfır olsun. R nin I_1, I_2, I_3 idealleri için $0 \neq I_1I_2I_3 \subseteq I$ ve $I_1I_2 \not\subseteq I$ varsayalım. $I_1I_3 \subseteq I$ veya $I_2I_3 \subseteq I$ sağlandığını göstereceğiz. Aksine $I_1I_3 \not\subseteq I$ ve $I_2I_3 \not\subseteq I$ varsayalım. O halde $q_1 \in I_1$ ve $q_2 \in I_2$ elemanları, $q_1I_3 \not\subseteq I$ ve $q_2I_3 \not\subseteq I$ sağlanacak şekilde vardır. $q_1q_2I_3 \subseteq I$, $q_1I_3 \not\subseteq I$ ve $q_2I_3 \not\subseteq I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.11 gereğince $q_1q_2 \in I$ bulunur. Diğer taraftan, $I_1I_2 \not\subseteq I$ olduğundan $ab \notin I$ olacak şekilde $a \in I_1, b \in I_2$ elemanları mevcuttur. $abI_3 \subseteq I$ ve $ab \notin I$ den, Yardımcı Teorem 2.4.11 gereğince $aI_3 \subseteq I$ veya $bI_3 \subseteq I$ elde edilir. Bu durumda aşağıdaki üç hal göz önüne alınmalıdır:

I. Durum: $aI_3 \subseteq I$ ve $bI_3 \not\subseteq I$ olsun. $q_1bI_3 \subseteq I$, $bI_3 \not\subseteq I$ ve $q_1I_3 \not\subseteq I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.11 gereğince $q_1b \in I$ olur. $(a + q_1)bI_3 \subseteq I$ ve $aI_3 \subseteq I$, ancak $q_1I_3 \not\subseteq I$ olması $(a + q_1)I_3 \not\subseteq I$ olmasını gerektirir. $bI_3 \not\subseteq I$ ve $(a + q_1)I_3 \not\subseteq I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.11 gereğince $(a + q_1)b \in I$ bulunur. $(a + q_1)b = ab + q_1b \in I$ ve $q_1b \in I$ den $ab \in I$ çelişmesine varılır.

II. Durum: $aI_3 \not\subseteq I$ ve $bI_3 \subseteq I$ olsun. $aq_2I_3 \subseteq I$, $aI_3 \not\subseteq I$ ve $q_2I_3 \not\subseteq I$ olduğundan $aq_2 \in I$ dir. $a(b + q_2)I_3 \subseteq I$ ve $bI_3 \subseteq I$ fakat $q_2I_3 \not\subseteq I$ olmasından $(b + q_2)I_3 \not\subseteq I$ elde

edilir. $aI_3 \not\subseteq I$ ve $(b + q_2)I_3 \not\subseteq I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.11 gereğince $a(b + q_2) \in I$ olur. Burada $a(b + q_2) = ab + aq_2 \in I$ ve $aq_2 \in I$ olduğundan $ab \in I$ çelişkisine varılır.

III. Durum: $aI_3 \subseteq I$ ve $bI_3 \subseteq I$ olsun. $bI_3 \subseteq I$ ve $q_2I_3 \not\subseteq I$ olduğundan $(b + q_2)I_3 \not\subseteq I$ olur. $q_1(b + q_2)I_3 \subseteq I$ iken $q_1I_3 \not\subseteq I$ ve $(b + q_2)I_3 \not\subseteq I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.11 gereğince $q_1(b + q_2) = q_1b + q_1q_2 \in I$ elde edilir. $q_1q_2 \in I$ ve $q_1b + q_1q_2 \in I$ olduğundan $bq_1 \in I$ dir. $aI_3 \subseteq I$ ve $q_1I_3 \not\subseteq I$ olmasından $(a + q_1)I_3 \subseteq I$ bulunur. $(a + q_1)q_2I_3 \not\subseteq I$ ve $q_2I_3 \not\subseteq I$ ve $(a + q_1)I_3 \not\subseteq I$ gereğince Yardımcı Teorem 2.4.11 den $(a + q_1)q_2 = aq_2 + q_1q_2 \in I$ bulunur. $q_1q_2 \in I$ ve $aq_2 + q_1q_2 \in I$ olduğundan $aq_2 \in I$ dir. Burada $(a + q_1)(b + q_2)I_3 \subseteq I$ iken $(a + q_1)I_3 \not\subseteq I$ ve $(b + q_2)I_3 \not\subseteq I$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.11 uyarınca $(a + q_1)(b + q_2) = ab + aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ sağlanır. Burada $aq_2, bq_1, q_1q_2 \in I$ olduğundan $aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ dir. $ab + aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ ve $aq_2 + bq_1 + q_1q_2 \in I$ gereğince $ab \in I$ çelişkisine varılır. Sonuç olarak $I_1I_3 \subseteq I$ veya $I_2I_3 \subseteq I$ gerçekleşir. $\square$



BÖLÜM 3- ÇARPIMSAL MODÜLLERİN 2-YUTAN ASALIMSİ ALT MODÜLLERİ

Bu bölümünde değişmeli halkalarda Bölüm 2 de tanımladığımız 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı ideal kavramlarını, çarpımsal modüllerde 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı alt modülleri tanımlayarak genelleştireceğiz. Bu bölüm boyunca, tüm halkaları değişmeli ve birimli halka, tüm modülleri ise birimsel modül olarak kabul edeceğiz.

3.1 Çarpımsal Modüllerin 2-Yutan Asalımsı Alt Modüllerinin Temel Özellikleri

Bu bölümde, çarpımsal modüllerde 2-yutan asalımsı alt modül kavramını tanımlayacağız. Bu yeni alt modüller sınıfının bir takım temel özelliklerini araştıracağız. Ayrıca 2-yutan idealler, 2-yutan alt modüller, 2-yutan asalımsı idealler ile 2-yutan asalımsı alt modüller arasındaki ilişkileri irdelleyeceğiz.

Tanım 3.1.1 M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. $a, b \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere

(1) $abm \in N$ iken $am \in M - \text{rad}(N)$ veya $bm \in M - \text{rad}(N)$ veya $ab \in (N :_R M)$ sağlanıyorsa N ye M nin 2-yutan asalımsı alt modülü,

(2) $0 \neq abm \in N$ iken $am \in M - \text{rad}(N)$ veya $bm \in M - \text{rad}(N)$ veya $ab \in (N :_R M)$ sağlanıyorsa N ye M nin zayıf 2-yutan asalımsı alt modülü diyeceğiz.

Her 2-yutan alt modül açıkça bir 2-yutan asalımsı alt modüldür. Oysa bu gerektirmenin tersi doğru değildir. Her alt modülü 2-yutan asalımsı alt modül iken hiç biri 2-yutan alt modül olmayan çarpımsal modüller mevcuttur. Örnek 3.1.2, bu duruma iyi bir örnektir.

Örnek 3.1.2 p bir asal tamsayı ve $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. $\mathbb{Z}(p^\infty)$ nin her has $\mathbb{Z}$ -alt modülü $G_t = \langle 1/p^t + \mathbb{Z} \rangle$, $(t \in N_0)$ tipindedir. Her bir $t \in N_0$ için $(G_t :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)) = 0$ elde edilir.

Burada $p^2(1/p^{t+2} + \mathbb{Z}) = 1/p^t + \mathbb{Z} \in G_t$ iken $p^2 \notin (G_t :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}(p^\infty)) = 0$ ve $p(1/p^{t+2} + \mathbb{Z}) \notin G_t$ olduğundan $\mathbb{Z}(p^\infty)$ nin 2-yutan alt modülü yoktur. Her asal alt modül, bir 2-yutan alt modül olduğundan $\mathbb{Z}(p^\infty)$ nin asal alt modülü de yoktur. Böylelikle $\mathbb{Z}(p^\infty) - \text{rad}(G_t) = \mathbb{Z}(p^\infty)$ bulunur. O halde her $t \in N_0$ için $G_t, \mathbb{Z}(p^\infty)$ nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

Teorem 3.1.3 N, M bin bir has alt modülü ise aşağıdaki durumlar denktir:

(1) N, M nin 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) $ab \notin (N :_R M)$ yi sağlayan her $a, b \in R$ için $(N :_M ab) \subseteq (M - \text{rad}(N) :_M a) \cup (M - \text{rad}(N) :_M b)$ dir.

(3) $ab \notin (N :_R M)$ yi sağlayan her $a, b \in R$ için $(N :_M ab) \subseteq (M - \text{rad}(N) :_M a)$ veya $(N :_M ab) \subseteq (M - \text{rad}(N) :_M b)$ dir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) $a, b \in R$ için $ab \notin (N :_R M)$ olsun. Bir $m \in (N :_M ab)$ alalım. Buradan $abm \in N$ olup, $am \in M - \text{rad}(N)$ veya $bm \in M - \text{rad}(N)$ bulunur. Dolayısıyla $m \in (M - \text{rad}(N) :_M a)$ veya $m \in (M - \text{rad}(N) :_M b)$, ve böylelikle $(N :_M ab) \subseteq (M - \text{rad}(N) :_M a) \cup (M - \text{rad}(N) :_M b)$ elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Bilindiği gibi, eğer bir alt modül (bir alt grup), iki alt modülün (alt grubun) birleşimi tarafından içeriliyorsa, en az birisi tarafından kapsanır. Bu bilgi yardımıyla $(N :_M ab) \subseteq (M - \text{rad}(N) :_M a)$ veya $(N :_M ab) \subseteq (M - \text{rad}(N) :_M b)$ içermesinin sağlandığı görülmüş olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ olsun. $ab \notin (N :_R M)$ varsayalım. Şu halde $m \in (N :_M ab)$ olup, (3) hipotezi gereğince $m \in (M - \text{rad}(N) :_M a)$ veya $m \in (M - \text{rad}(N) :_M b)$ dir. Yani $am \in M - \text{rad}(N)$ veya $bm \in M - \text{rad}(N)$ bulunur ki bu da istenilendir. $\square$

Yardımcı Teorem 3.1.4 M bir sonlu üretilmiş çarpımsal R -modül olsun. Bu takdirde M nin her N alt modülü için $\sqrt{(N:_R M)} = (M - \text{rad}(N):_R M)$ sağlanır.

İspat Yardımcı Teorem 1.2.11. gereğince $(M - \text{rad}(N):_R M) \subseteq \sqrt{(N:_R M)}$ dir. Şimdi ters kapsamayı, M üzerinde herhangi bir koşul olmadan ispatlayacağız. K , M nin N yi kapsayan bir asal alt modülü olsun. O halde $(K:M)$, $(N:_R M)$ yi içeren bir asal idealdir. Böylece $\sqrt{(N:_R M)} \subseteq (K:M)$ olup, $\sqrt{(N:_R M)} \subseteq (M - \text{rad}(N):_R M)$ elde edilir. $\square$

Önerme 3.1.5 M bir sonlu üretilmiş çarpımsal R -modül ve N , M nin bir alt modülü olsun. Bu takdirde $M - \text{rad}(N)$ nin M nin asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul $M - \text{rad}(N)$ nin M nin asal alt modülü olmasıdır.

İspat $M - \text{rad}(N)$, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. $a \in R$ ve $m \in M$ için $am \in M - \text{rad}(N)$ ve $m \notin M - \text{rad}(N)$ varsayalım. $M - \text{rad}(N)$ asalımsı olduğundan, Yardımcı Teorem 3.1.4 gereğince

$$a \in \sqrt{(M - \text{rad}(N):_R M)} = \sqrt{(\sqrt{(N:_R M)})} = \sqrt{(N:_R M)} = (M - \text{rad}(N):_R M)$$

elde edilir. Böylelikle $M - \text{rad}(N)$ nin M nin asal alt modülü olduğu gösterilmiş olur. Ters tarafın ispatı açıktır. $\square$

Teorem 3.1.6 M bir sonlu üretilmiş çarpımsal R -modül olsun. N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ise aşağıdakiler gerçekleşir:

(1) $(N:_R M)$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) $M - \text{rad}(N)$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat (1) $a, b, c \in R$ için $abc \in (N:_R M)$, $ac \notin \sqrt{(N:_R M)}$ ve $bc \notin \sqrt{(N:_R M)}$ olsun. Yardımcı Teorem 3.1.4 ten $\sqrt{(N:_R M)} = (M - \text{rad}(N):_R M)$ olduğundan $acm_1 \notin M - \text{rad}(N)$ ve $bcm_2 \notin M - \text{rad}(N)$ olacak şekilde $m_1, m_2 \in M$ vardır. Ancak

$abc \in (N:_R M)$ olduğundan $ab(cm_1 + cm_2) \in N$ elde edilir. N , 2-yutan asalımsı alt modül olduğundan $a(cm_1 + cm_2) \in M - rad(N)$ veya $b(cm_1 + cm_2) \in M - rad(N)$ veya $ab \in (N:_R M)$ sağlanır. $ab \in (N:_R M)$ ise ispat tamamlanır. O halde $a(cm_1 + cm_2) \in M - rad(N)$ varsayalım. Buradan $acm_1 \notin M - rad(N)$ olmasından $acm_2 \notin M - rad(N)$ bulunur. N , 2-yutan asalımsı alt modül ve $abcm_2 \in N$ olduğundan $ab \in (N:_R M)$ olur. Benzer şekilde $b(cm_1 + cm_2) \in M - rad(N)$ ise $ab \in (N:_R M)$ elde edilir. Sonuç olarak $(N:_R M)$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir.

(2) Teorem 2.1.7 gereğince iki durum söz konusudur:

I. Durum: $\sqrt{(N:_R M)} = P$, R nin bir asal ideali olması durumunda, M bir çarpımsal modül ise Teorem 1.2.5 gereğince, $M - rad(N) = \sqrt{(N:_R M)}M = PM$ ve PM , M nin bir asal alt modülü olacağından $M - rad(N)$, M nin bir asal alt modülüdür. Şu halde bu durumda $M - rad(N)$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olarak elde edilir.

II. Durum: P_1 ve P_2 , $(N:_R M)$ üzerinde minimal olan R nin farklı iki asal ideali olmak üzere $\sqrt{(N:_R M)} = P_1 \cap P_2$ olsun. Bu durumda ise Teorem 1.2.5 gereğince, P_1M ve P_2M , M nin asal alt modülleri olmak üzere $M - rad(N) = \sqrt{(N:_R M)}M = (P_1 \cap P_2)M = ([P_1 + annM] \cap [P_2 + annM])M = P_1M \cap P_2M$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 1.2.14 gereğince $M - rad(N)$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. $\square$

Teorem 3.1.7 M bir R -modül ve N , M nin bir alt modülü olsun.

(1) $M - rad(N)$, M nin bir asal alt modülü ise N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) M bir sonlu üretilmiş çarpımsal modül olsun. $M - rad(N)$, M nin bir asalımsı alt modülü ise N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat (1) $M - rad(N)$, M nin bir asal alt modülü olsun. $a, b \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere $abm \in N$ iken $am \notin M - rad(N)$ varsayalım. $M - rad(N)$ bir asal alt modül ve $abm \in M - rad(N)$ olduğundan $b \in (M - rad(N):_R M)$ elde edilir. Buradan $bm \in M - rad(N)$ olur. Sonuç olarak N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. Şimdi M

nin sonlu üretilmiş bir çarpımsal modül ve $M - rad(N)$, M nin bir asalımsı alt modülü olsun. Önerme 3.1.5 uyarınca $M - rad(N)$, M nin bir asal alt modülü olacağından N bir 2-yutan asalımsı alt modüldür.

(2) Önerme 3.1.5 gereğince $M - rad(N)$ nin M nin asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul $M - rad(N)$ nin M nin asal alt modülü olmasıdır. O halde (1) gereğince istenilen açıkça sağlanır. $\square$

Yardımcı Teorem 3.1.8 (Theorem 1 (3), (Ali, 2009)) M sonlu üretilmiş olması şart olmayan herhangi bir sadık çarpımsal R -modül olsun. Bu takdirde I , R nin bir ideali ise $M - rad(IM) = \sqrt{I} M$ dır.

İspat

$$\sqrt{I}M = \left(\bigcap_{I \subseteq Q, Q \text{ asal}} Q \right) M = \bigcap_{IM \subseteq QM} QM \supseteq M - rad(IM)$$

ve diğer taraftan

$$M - rad(IM) = \bigcap_{IM \subseteq Q', Q' \text{ asal}} Q' = \bigcap_{IM \subseteq Q'} (Q' : M)M = \left(\bigcap_{IM \subseteq Q'} (Q' : M) \right) M \supseteq \sqrt{I}M$$

olur. Her iki kapsamadan $M - rad(IM) = \sqrt{I} M$ olarak elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.9 M bir sadık çarpımsal R –modül olsun.

- (1) $M - rad(N)$, M nin bir asal alt modülü ise her pozitif n tamsayısı için N^n , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.
- (2) M bir sonlu üretilmiş olsun. $M - rad(N)$, M nin bir asalımsı alt modülü ise her pozitif n tamsayısı için N^n , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat (1) M bir (sonlu üretilmiş sadık çarpımsal) sadık çarpımsal modül ve $M - rad(N)$, M nin bir (asalımsı) asal alt modülü olsun. O halde bir I ideali için $N = IM$ biçimindedir. O halde

$$M - rad(N^n) = \sqrt{I^n} M = M - rad(N),$$

M nin bir (asalımsı) asal alt modülüdür. O halde Teorem 3.1.7 gereğince her n pozitif tamsayısı için, N^n , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) M bir sonlu üretilmiş sadık çarpımsal R -modül ve $M - rad(N)$ asalımsı alt modülü olsun. Bu takdirde Önerme 3.1.5 gereğince $M - rad(N)$ nin M nin asal alt modülü olur. Dolayısıyla (1) den, N^n , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. $\square$

Not 3.1.10 $I = (0:_R M)$ ve $R' = R/I$ olsun. N nin bir 2-yutan asalımsı R -alt modül olması için gerek ve yeter şartın N nin bir 2-yutan asalımsı R' -alt modül olduğunu kolayca görebiliriz. Ayrıca $(N:_R M)$ nin R nin bir 2-yutan asalımsı ideal olması için gerek ve yeter koşul $(N:_{R'} M)$ nin R' nün bir 2-yutan asalımsı ideali olmasıdır.

Teorem 3.1.11 S , R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. O halde N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ve $S^{-1}N \neq S^{-1}M$ ise $S^{-1}N$, $S^{-1}M$ nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat $\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{a_2}{s_2}\right)\left(\frac{m}{s}\right) \in S^{-1}N$ ise bir $u \in S$ için $ua_1a_2m \in N$ sağlanır. Buradan $ua_1m \in M - rad(N)$ veya $ua_2m \in M - rad(N)$ veya $a_1a_2 \in (N:_R M)$ bulunur. O halde $\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{m}{s}\right) = \left(\frac{ua_1m}{us_1s}\right) \in S^{-1}(M - rad(N)) \subseteq S^{-1}M - rad(S^{-1}N)$ veya $\left(\frac{a_2}{s_2}\right)\left(\frac{m}{s}\right) = \left(\frac{ua_2m}{us_2s}\right) \in S^{-1}(M - rad(N)) \subseteq S^{-1}M - rad(S^{-1}N)$ veya $\left(\frac{a_1}{s_1}\right)\left(\frac{a_2}{s_2}\right) = \left(\frac{a_1a_2}{s_1s_2}\right) \in S^{-1}(N:_R M) \subseteq (S^{-1}N:_{S^{-1}R} S^{-1}M)$ sağlanır. Böylece istenilen gösterilmiş olur. $\square$

Teorem 3.1.12 M bir çarpımsal R -modül ve K ile N , M nin iki alt modülü olsun. Bu takdirde aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir.

$$(1) \sqrt{(KN:_R M)} = \sqrt{(K:_R M)} \cap \sqrt{(N:_R M)} \text{ dir.}$$

$$(2) M - \text{rad}(KN) = M - \text{rad}(K) \cap M - \text{rad}(N) \text{ dir.}$$

$$(3) M - \text{rad}(K \cap N) = M - \text{rad}(K) \cap M - \text{rad}(N) \text{ dir.}$$

İspat (1) Hipotez gereğince, $K = IM$ ve $N = JM$ özdeşliklerini sağlayan R nin iki I, J ideali vardır. Şimdi $r \in \sqrt{(K:_R M)} \cap \sqrt{(N:_R M)}$ alalım. Bu halde bir takım pozitif m, n pozitif tamsayıları için $r^m M \subseteq IM$ ve $r^n M \subseteq JM$ gerçekleşir. Buradan $r^{m+n} M \subseteq r^m JM \subseteq IJM = KN$ olup $r \in \sqrt{(KN:_R M)}$ elde edilir. Sonuç olarak $\sqrt{(K:_R M)} \cap \sqrt{(N:_R M)} \subseteq \sqrt{(KN:_R M)}$ bulunur. Ters kapsamanın geçerli olduğu açıktır.

(2) Teorem 1.2.7 ve (1) den açıkça,

$$\begin{aligned} M - \text{rad}(KN) &= \sqrt{(KN:_R M)} M = \left(\sqrt{(K:_R M)} \cap \sqrt{(N:_R M)} \right) M \\ &= \left(\left[\sqrt{(K:_R M)} + \text{ann} M \right] \cap \left[\sqrt{(N:_R M)} + \text{ann} M \right] \right) M \\ &= \sqrt{(K:_R M)} M \cap \sqrt{(N:_R M)} M = M - \text{rad}(K) \cap M - \text{rad}(N) \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) M bir çarpımsal modül olsun. Buradan

$$\begin{aligned} M - \text{rad}(K \cap N) &= \sqrt{(K \cap N:_R M)} M = \left(\sqrt{(K:_R M)} \cap \sqrt{(N:_R M)} \right) M \\ &= \left(\left[\sqrt{(K:_R M)} + \text{ann} M \right] \cap \left[\sqrt{(N:_R M)} + \text{ann} M \right] \right) M \\ &= \sqrt{(K:_R M)} M \cap \sqrt{(N:_R M)} M = M - \text{rad}(K) \cap M - \text{rad}(N) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $\square$

Teorem 3.1.13 M bir çarpımsal R -modül ve $N_1, N_2, \dots, N_n$, aynı radikale sahip olan M nin 2-yutan asalımsı alt modülleri ise $N = \bigcap_{i=1}^n N_i$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat Teorem 3.1.12 gereğince $M - \text{rad}(N) = \bigcap_{i=1}^n M - \text{rad}(N_i)$ sağlanır. $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ ve $ab \notin (N :_R M)$ olsun. Bu takdirde bir $1 \leq i \leq n$ için $ab \notin (N_i :_R M)$ dır. Buradan $am \in M - \text{rad}(N_i)$ veya $bm \in M - \text{rad}(N_i)$ elde edilir. $\square$

Yardımcı Teorem 3.1.14 M bir R -modül ve N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olsun. $a, b \in R$ ve M nin bir K alt modülü için $abK \subseteq N$ olsun. Eğer $ab \notin (N :_R M)$ ise $aK \subseteq M - \text{rad}(N)$ veya $bK \subseteq M - \text{rad}(N)$ sağlanır.

İspat $aK \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $bK \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ varsayalım. Bu takdirde bazı $k_1, k_2 \in K$ için $ak_1 \notin M - \text{rad}(N)$ ve $bk_2 \notin M - \text{rad}(N)$ sağlanır. $abk_1 \in N, ab \notin (N :_R M)$ ve $ak_1 \notin M - \text{rad}(N)$ olduğundan $bk_1 \in M - \text{rad}(N)$ bulunur. $abk_2 \in N$ ve $ab \notin (N :_R M)$ ve $bk_2 \notin M - \text{rad}(N)$ gereğince $ak_2 \in M - \text{rad}(N)$ elde edilir. Şimdi $ab(k_1 + k_2) \in N$ ve $ab \notin (N :_R M)$ olacağından $a(k_1 + k_2) \in M - \text{rad}(N)$ veya $b(k_1 + k_2) \in M - \text{rad}(N)$ geçerlidir. Burada $a(k_1 + k_2) = ak_1 + ak_2 \in M - \text{rad}(N)$ varsayalım. $ak_2 \in M - \text{rad}(N)$ olduğundan $ak_1 \in M - \text{rad}(N)$ çelişkisine varılır. $b(k_1 + k_2) = bk_1 + bk_2 \in M - \text{rad}(N)$ varsayalım. $bk_1 \in M - \text{rad}(N)$ olduğundan $bk_2 \in M - \text{rad}(N)$ çelişkisi elde edilir. Böylece $aK \subseteq M - \text{rad}(N)$ veya $bK \subseteq M - \text{rad}(N)$ sağlanır. $\square$

Aşağıdaki teorem (Teorem 3.1.15) ise 2-yutan asalımsı alt modüllerin bir karakterizasyonunu sunar.

Teorem 3.1.15 M bir R -modül ve N , M nin bir has alt modülü olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) N, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) $I_1 I_2 K \subseteq N$ kapsamasını sağlayan R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin bir K alt modülü için $I_1 I_2 \subseteq (N :_R M)$ veya $I_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ veya $I_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ sağlanır.

(3) $N_1 N_2 N_3 \subseteq N$ kapsamasını sağlayan R nin N_1, N_2 ve N_3 alt modülleri için $N_1 N_2 \subseteq (N :_R M)$ veya $N_1 N_3 \subseteq M - \text{rad}(N)$ veya $N_2 N_3 \subseteq M - \text{rad}(N)$ sağlanır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) N, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ve R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin bir K alt modülü için $I_1 I_2 K \subseteq N$ ve $I_1 I_2 \not\subseteq (N :_R M)$ olsun. $I_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ veya $I_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ nın sağlandığını göstereceğiz. Aksine $I_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $I_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ varsayalım. Şu halde $a_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $a_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olacak şekilde $a_1 \in I_1$ ve $a_2 \in I_2$ elemanları vardır. $a_1 a_2 K \subseteq N$ ve $a_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $a_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince $a_1 a_2 \in (N :_R M)$ sağlanır.

$I_1 I_2 \not\subseteq (N :_R M)$ olduğundan $b_1 \in I_1$ ve $b_2 \in I_2$ için $b_1 b_2 \notin (N :_R M)$ dir. $b_1 b_2 K \subseteq N$ ve $b_1 b_2 \notin (N :_R M)$ olmasından $b_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ veya $b_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ elde edilir. O halde Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince üç durum söz konusudur:

I. Durum: $b_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $b_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olsun. $a_1 b_2 K \subseteq N$ ve $b_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$, $a_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince $a_1 b_2 \in (N :_R M)$ bulunur. $b_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ fakat $a_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olduğundan $(a_1 + b_1) K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ dir. $(a_1 + b_1) b_2 K \subseteq N$ ve $b_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $(a_1 + b_1) K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince $(a_1 + b_1) b_2 \in (N :_R M)$ sonucuna varılır. $(a_1 + b_1) b_2 = a_1 b_2 + b_1 b_2 \in (N :_R M)$ ve $a_1 b_2 \in (N :_R M)$ olmasından $b_1 b_2 \in (N :_R M)$ çelişmesine varılır.

II. Durum: $b_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $b_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olsun. Bu durumda da I. Duruma benzer yol izlenerek çelişki elde edilir.

III. Durum: $b_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $b_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ durumunda, $b_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $a_2 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olduğundan $(a_2 + b_2) K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ dir. $a_1(a_2 + b_2) K \subseteq N$ iken $a_1 K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $(a_2 + b_2) K \not\subseteq M - \text{rad}(N)$ olmasından Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince $a_1(a_2 + b_2) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \in (N :_R M)$ elde edilir. $a_1 a_2 \in (N :_R M)$ olduğundan $a_1 b_2 \in (N :_R M)$ olur. $b_1 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ ve $a_1 K \not\subseteq M -$

$rad(N)$ olduğundan $(a_1 + b_1)K \not\subseteq M - rad(N)$ sonucuna varılır. $(a_1 + b_1)a_2K \subseteq N$ iken $a_2K \not\subseteq M - rad(N)$ ve $(a_1 + b_1)K \not\subseteq M - rad(N)$ olmasından Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince $(a_1 + b_1)a_2 = a_1a_2 + b_1a_2 \in (N:_R M)$ bulunur. $a_1a_2 \in (N:_R M)$ ve $a_1a_2 + b_1a_2 \in (N:_R M)$ olduğundan $b_1a_2 \in (N:_R M)$ elde edilir. Şimdi $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)K \subseteq N$ iken $(a_1 + b_1)K \not\subseteq M - rad(N)$ ve $(a_2 + b_2)K \not\subseteq M - rad(N)$ olduğundan Yardımcı Teorem 3.1.14 gereğince $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2 \in (N:_R M)$ sonucuna varılır. $a_1a_2, a_1b_2, b_1a_2 \in (N:_R M)$ olduğundan $b_1b_2 \in (N:_R M)$ çelişkisine varılır. O halde $I_1K \subseteq M - rad(N)$ veya $I_2K \subseteq M - rad(N)$ sağlanır.

(2)⇒(1) $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in N$ olsun. (2) hipotezinde R nin $I_1 = (a)$, $I_2 = (b)$ idealleri ve M nin $K = Rm$ alt modülü olarak alınırsa, istenilen açıkça elde edilir.

(2)⇒(3) M nin bir takım alt modülleri N_1, N_2, N_3 için $N_1N_2N_3 \subseteq N$ sağlansın. $N_1N_2 \not\subseteq (N:_R M)$ varsayalım. M bir çarpımsal modül olduğundan $N_1 = I_1M$ ve $N_2 = I_2M$ olacak şekilde I_1 ve I_2 idealleri vardır. Böylece $I_1I_2N_3 \subseteq N$ ve $I_1I_2 \not\subseteq (N:_R M)$ olur. Şu halde $I_1N_3 \subseteq M - rad(N)$ veya $I_2N_3 \subseteq M - rad(N)$, yani $N_1N_3 \subseteq M - rad(N)$ veya $N_2N_3 \subseteq M - rad(N)$ sağlanır.

(3)⇒(2) R nin I_1, I_2 idealleri ve M nin bir K alt modülü için $I_1I_2K \subseteq N$ olsun. $N_1 = I_1M$ ve $N_2 = I_2M$ ve $N_3 = K$ alınırsa, (3) hipotezi gereğince $I_1K \subseteq M - rad(N)$ veya $I_2K \subseteq M - rad(N)$ gerçekleşir. $\square$

Teorem 3.1.16 M bir çarpımsal R -modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. $(N:_R M)$, R nin bir 2-yutan asalımsı ideali ise N, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat R nin iki I_1, I_2 ideali ve M nin bir K alt modülü için $I_1I_2K \subseteq N$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğundan $K = I_3M$ olacak şekilde R nin bir I_3 ideali vardır. Buradan $I_1I_2I_3 \subseteq (N:_R M)$ olması, $I_1I_2 \subseteq (N:_R M)$ veya $I_2I_3 \subseteq \sqrt{(N:_R M)}$ veya $I_1I_3 \subseteq \sqrt{(N:_R M)}$ olmasını gerektirir. Eğer $I_1I_2 \subseteq (N:_R M)$ ise ispat tamamlanır. O halde $I_1I_3 \subseteq \sqrt{(N:_R M)}$ varsayalım. Bu takdirde $I_1I_3M \subseteq I_1K \subseteq \sqrt{(N:_R M)}M = M - rad(N)$

olur. Benzer şekilde, eğer $I_2 I_3 \subseteq \sqrt{(N:R M)}$ ise $I_2 I_3 M \subseteq I_2 K \subseteq \sqrt{(N:R M)} M = M - \text{rad}(N)$ den $I_2 K \subseteq M - \text{rad}(N)$ elde edilir. O halde Teorem 3.1.15 ten ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.1.16 daki M modülünün çarpımsal modül olması koşulunun gerekli olduğunu aşağıdaki örnek yardımıyla görebiliriz.

Örnek 3.1.17 $\mathbb{Z}$ -modül $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ yi göz önüne alalım ve M nin $N = 6\mathbb{Z} \times 0$ alt modülünü düşünelim. Şu halde $\mathbb{Z} \times 0$, $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ve $3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, M nin N yi içeren alt modülleridir. Böylece $(N:_{\mathbb{Z}} M) = 0$, $\mathbb{Z}$ nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. Diğer taraftan $2 \cdot 3 \cdot (1,0) = (6,0) \in N$ iken $2 \cdot 3 \notin (N:_{\mathbb{Z}} M)$, $2 \cdot (1,0) = (2,0) \notin M - \text{rad}(N) \subseteq (\mathbb{Z} \times 0) \cap (2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cap (3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = 6\mathbb{Z} \times 0 = N$ ve $3 \cdot (1,0) = (3,0) \notin M - \text{rad}(N) = N$ olduğundan N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü değildir.

Teorem 3.1.18 M bir çarpımsal R -modül ve N_1 ile N_2 , M nin asalımsı alt modülleri olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar gerçekleşir.

(1) $N_1 \cap N_2$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) M sonlu üretilmiş ve sadık çarpımsal modül ise $N_1 N_2$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat (1) N_1 ve N_2 , M nin asalımsı alt modülleri olduğundan $(N_1:R M)$ ve $(N_2:R M)$, R nin asalımsı idealleri olur. Burada Teorem 2.1.12 gereğince, $(N_1:R M)(N_2:R M)$ ve $(N_1 \cap N_2:R M) = (N_1:R M) \cap (N_2:R M)$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. Teorem 3.1.16 gereğince $N_1 \cap N_2$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) M sonlu üretilmiş ve sadık çarpımsal R -modül olsun. Bu durumda $(N_1 N_2:R M) = (N_1:R M)(N_2:R M)$ olur. Böylece yine Teorem 3.1.16 nın sonucu olarak $N_1 N_2$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. $\square$

M bir çarpımsal R -modül ve N , M nin asalımsı alt modülü ise $\sqrt{(N:M)}$ nin R nin bir asal ideali olduğunu biliyoruz. Şu halde $P = M - \text{rad}(N) = \sqrt{(N:M)}M$, M nin asal alt modülü olur. Bu durumda N ye, M nin P -asalımsı alt modülü adı verilir.

Sonuç 3.1.19 M bir çarpımsal modül P_1 ve P_2 , M nin iki asal alt modülleri olsun. P_1^n ($n \in \mathbb{Z}$) bir P_1 -asalımsı alt modül ve P_2^m ($m \in \mathbb{Z}$) bir P_2 -asalımsı alt modül ise aşağıdakiler geçerlidir:

(1) $P_1^n \cap P_2^m$ bir 2-yutan asalımsı alt modüldür.

(2) M sonlu üretilmiş ve sadık çarpımsal modül ise $P_1^n P_2^m$ bir 2-yutan asalımsı alt modüldür.

Teorem 3.1.20 N , M nin asalımsı ayrışımaya sahip bir alt modülü olsun. M_1 ve M_2 , M nin iki maksimal alt modülü olmak üzere $M - \text{rad}(N) = M_1 \cap M_2$ ise N , M nin 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat N_i ($i = 1, 2, \dots, n$), M nin asalımsı alt modülü olmak üzere $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_n$ asalımsı ayrışımı olsun. Önerme 3.1.12 (3) gereğince

$M - \text{rad}(N) = (M - \text{rad}(N_1)) \cap (M - \text{rad}(N_2)) \cap \dots \cap (M - \text{rad}(N_n)) = M_1 \cap M_2$ elde edilir. $M - \text{rad}(N_i)$ lerin her biri asal alt modül olduğundan (Teorem 3.16 (Ameri, 2003)) gereğince $\{M - \text{rad}(N_1), M - \text{rad}(N_2), \dots, M - \text{rad}(N_n)\} = \{M_1, M_2\}$ bulunur. Genelliği kaybetmeden bir $1 \leq t \leq n$ için $\{M - \text{rad}(N_1), M - \text{rad}(N_2), \dots, M - \text{rad}(N_t)\} = \{M_1\}$ ve $\{M - \text{rad}(N_{t+1}), M - \text{rad}(N_{t+2}), \dots, M - \text{rad}(N_n)\} = \{M_2\}$ varsayalım. $K_1 := N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_t$ ve $K_2 := N_{t+1} \cap N_{t+2} \cap \dots \cap N_n$ diyelim. O halde (Lemma 1.2.2, (Ash, 2006)) gereğince K_1 bir M_1 -asalımsı alt modül ve K_2 bir M_2 -asalımsı alt modüldür. Sonuç olarak Teorem 3.1.18 gereğince N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. $\square$

Yardımcı Teorem 3.1.21 (Corollary 1.3, (McCasland ve Moore, 1991)) M ve M' iki R -modül ve $f: M \rightarrow M'$ bir R -modül epimorfizması olsun. Bu takdirde, N , M nin $\text{Çek}(f)$ yi içeren bir alt modülü ise $f(M - \text{rad}(N)) = M' - \text{rad}(f(N))$ dir.

Teorem 3.1.22 $f: M \rightarrow M'$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu takdirde,

(1) N' , M' nün bir 2-yutan asalımsı alt modülü ise $f^{-1}(N')$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) f bir epimorfizma ve N , M nin $\text{Çek}f$ yi içeren bir 2-yutan asalımsı alt modülü ise $f(N)$, M' nün bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat (1) $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in f^{-1}(N')$ olsun. Buradan $abf(m) \in N'$ dir. Buradan $ab \in (N':_R M')$ veya $af(m) \in M' - \text{rad}(N')$ veya $bf(m) \in M' - \text{rad}(N')$ elde edilir. Böylece $ab \in (f^{-1}(N'):_R M)$ veya $am \in f^{-1}(M' - \text{rad}(N'))$ veya $bm \in f^{-1}(M' - \text{rad}(N'))$ olur. $f^{-1}(M' - \text{rad}(N')) \subseteq M - \text{rad}(f^{-1}(N'))$ kapsamasından $f^{-1}(N')$ nin M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olduğu görülür.

(2) $a, b \in R$, $m' \in M'$ için $abm' \in f(N)$ olsun. f örten olduğundan bir $m \in M$ için $m' = f(m)$ olup $f(abm) \in f(N)$ bulunur. $\text{Çek}f \subseteq N$ olmasından $abm \in N$ elde edilir. N , 2-yutan asalımsı olduğundan $ab \in (N:_R M)$ veya $am \in M - \text{rad}(N)$ veya $bm \in M - \text{rad}(N)$ sağlanır. Buradan $ab \in (f(N):_R M')$ veya $am' \in f(M - \text{rad}(N)) = M' - \text{rad}(f(N))$ veya $bm' \in f(M - \text{rad}(N)) = M' - \text{rad}(f(N))$ elde edilir. Sonuç olarak $f(N)$, M' nün bir 2-yutan asalımsı alt modülü olarak bulunur. $\square$

Teorem 3.1.22 (2) nin doğrudan bir sonucu olarak Sonuç 3.1.23 ü elde ederiz.

Sonuç 3.1.23 M bir R -modül ve $L \subseteq N$, M nin alt modülleri olsun. N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ise N/L de M/L nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

Teorem 3.1.24 K ve N, M nin alt modülleri ve $K \subset N \subset M$ olsun. K, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ve $N/K, M/K$ nin bir zayıf 2-yutan asalımsı alt modülü ise N, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat $a, b \in R, m \in M$ için $abm \in N$ olsun. $abm \in K$ ise $am \in M - rad(K) \subseteq M - rad(N)$ veya $bm \in M - rad(K) \subseteq M - rad(N)$ veya $ab \in (K :_R M) \subseteq (N :_R M)$ olur ki bu da ispatı tamamlar. O halde $abm \notin K$ varsayalım. Bu durumda $0 \neq ab(m + K) \in N/K$ olması gereğince $a(m + K) \in M/K - rad(N/K)$ veya $b(m + K) \in M/K - rad(N/K)$ veya $ab \in (N/K :_R M/K)$ gerçekleşir. $M/K - rad(N/K) = (M - rad(N))/K$ eşitliği gereğince $am \in M - rad(N)$ veya $bm \in M - rad(N)$ veya $ab \in (N :_R M)$ elde edilir. O halde N, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. $\square$

Not 3.1.25 R_1 ve R_2 iki değişmeli birimli halka ve M_1 ve M_2 ise sırasıyla R_1 -modül ve R_2 -modül olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ olsun. Bu durumda $M = M_1 \times M_2$ bir R -modüldür ve M nin her alt modülü, N_1, M_1 in bir alt modülü ve N_2, M_2 nin alt modülü olmak üzere $N = N_1 \times N_2$ formundadır. Buna ek olarak, eğer M_i bir çarpımsal R_i -modül ($i = 1, 2$) ise M bir çarpımsal R -modüldür. Bu durumda M nin her $N = N_1 \times N_2$ alt modülü için $M - rad(N) = (M_1 - rad(N_1)) \times (M_2 - rad(N_2))$ olur.

Teorem 3.1.26 $R = R_1 \times R_2$ ve M_1 bir çarpımsal R_1 -modül, M_2 bir çarpımsal R_2 -modül olmak üzere $M = M_1 \times M_2$ olsun. K_1 ve K_2 , sırasıyla M_1 ve M_2 nin has alt modülü olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- (1) K_1 in bir 2-yutan asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul $N = K_1 \times M_2$ nin M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olmasıdır.
- (2) K_2 nin bir 2-yutan asalımsı alt modül olması için gerek ve yeter koşul $N = M_1 \times K_2$ nin M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olmasıdır.
- (3) K_1, M_1 nin bir asalımsı alt modülü ve K_2, M_2 nin bir asalımsı alt modülü ise $N = K_1 \times K_2, M$ nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

İspat (1) $N = K_1 \times M_2$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olsun. Hipotez gereğince N bir has alt modül olduğundan $K_1 \neq M_1$ dir. $M' = (M/(\{0\} \times M_2))$ diyelim. Sonuç 3.1.23 uyarınca $N' = \left(\frac{N}{\{0\} \times M_2}\right)$, M' nün bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. Burada $M' \cong M_1$ ve $N' \cong K_1$ izomorfizmaları kolaylıkla görülür. Şu halde K_1 , M_1 nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. Tersine, K_1 , M_1 nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü ise açıkça $N = K_1 \times M_2$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür.

(2) İspat (1) ile benzer olarak kolaylıkla elde edilir.

(3) K_1 ve K_2 , sırasıyla M_1 ve M_2 nin asalımsı alt modülleri olmak üzere $N = K_1 \times K_2$ olsun. Buradan (1), (2) ve Teorem 3.1.18 gereğince, $(K_1 \times M_2) \cap (M_1 \times K_2) = K_1 \times K_2 = N$, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. $\square$

3.2 Bazı Özel Çarpımsal Modüllerin 2-Yutan Asalımsı Alt modülleri

Tanım 3.2.1 R halkasında her P ideali için $P \subseteq xR$ kapsaması her $x \in R \setminus P$ için sağlanıyorsa R ye bölüm halkası adı verilir. Bu düşüncüyü modüllere genelleştirecek olursak, bir R -modül M nin her N asal alt modülü için $N \subseteq Rm$ kapsaması her $m \in M \setminus N$ için sağlanıyorsa M ye bölüm modülü deriz.

Teorem 3.2.2 M bir bölüm R -modülü olsun Bu takdirde M nin her has alt modülü bir 2-yutan asalımsı alt modüldür. Özel olarak, bir zincir (chained) modülün her alt modülü bir 2-yutan asalımsı alt modüldür.

İspat N , M nin bir has alt modülü olsun. Bir bölüm modülün asal alt modülleri sıralı olduğundan $M - rad(N)$, M nin bir asal alt modülüdür. Böylece Teorem 3.1.7 uyarınca N , M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olarak elde edilir. $\square$

Tanım 3.2.3 M bir R -modül olsun. P, R nin bir maksimal ideali ise

$$T_P(M) = \{m \in M : \text{bir } p \in P \text{ için } (1 - p)m = 0\}$$

kümesi açıkça M nin bir alt modülüdür. Ayrıca M alt modülüne, şayet bir $q \in P$ ve $m \in M$ için $(1 - q)M \subseteq Rm$ sağlanıyorsa P -devirli denir.

Bu iki kavram arasındaki ilişkiyi aşağıdaki Yardımcı Teorem 3.2.4 yardımıyla görebiliriz:

Yardımcı Teorem 3.2.4 (Theorem 1.2, (El-Bast ve Smith, 1988)) Bir R -modül M nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul R nin her maksimal P ideali için M modülünün P -devirli veya $M = T_P(M)$ olmasıdır.

Teorem 3.2.5 I , R nin bir 2-yutan asalımsı ideali ve M sadık çarpımsal R -modülü için $Ass_R(M/\sqrt{I}M)$ bir tamamen sıralı küme olsun. Bu takdirde $a, b \in R$ ve $m \in M$ için $abm \in IM$ iken $am \in \sqrt{I}M$ veya $bm \in \sqrt{I}M$ veya $ab \in I$ sağlanır.

İspat $a, b \in R$, $m \in M$ için $abm \in IM$ olsun. $(\sqrt{I}M :_R am) = R$ veya $(\sqrt{I}M :_R bm) = R$ ise ispat tamamlanır. Şu halde $(\sqrt{I}M :_R am)$ ve $(\sqrt{I}M :_R bm)$ nin R nin has idealleri olduğunu varsayalım. $Ass_R(M/\sqrt{I}M)$ bir tamamen sıralı küme olduğundan $(\sqrt{I}M :_R am) \cup (\sqrt{I}M :_R bm)$, R nin bir idealidir. Buradan $(\sqrt{I}M :_R am) \cup (\sqrt{I}M :_R bm) \subseteq W$ olacak şekilde R nin bir maksimal W ideali vardır. Böylece $am \notin T_W(M) := \{m' \in M : (1 - x)m' = 0, x \in W\}$ bulunur. Çünkü $am \in T_W(M)$ olması bir $x \in W$ için $(1 - x)am = 0$ olmasını gerektirir. Bu ise $(1 - x)am \in \sqrt{I}M$, yani $1 - x \in (\sqrt{I}M :_R am) \subseteq W$ çelişkisini doğurur. Yardımcı Teorem 3.2.4.gereğince $(1 - x)M \subseteq Rm'$ olacak şekilde bir $x \in W$ ve $m' \in M$ vardır. Buradan bir $r \in R$ için $(1 - x)m = rm'$ elde edilir. Ayrıca, $abm \in IM$ olduğundan bir $s \in I$ için $(1 - x)abm = sm'$ olur. Şu halde $(abr - s)m' = 0$ ve böylelikle $(1 - x)(abr - s)M \subseteq (abr - s)Rm' = 0$ bulunur. M bir sadık modül olduğundan $(1 - x)(abr - s) = 0$ dır. Yani $(1 - x)abr = (1 - x)s \in I$ olur. I bir 2-yutan asalımsı ideal olduğundan $(1 - x)ar \in \sqrt{I}$ veya $(1 - x)b \in \sqrt{I}$ veya $abr \in I$ sonucuna varılır.

I. Durum: Eğer $(1 - x)ar \in \sqrt{I}$ ise Teorem 2.1.4 gereğince $\sqrt{I}$, R nin bir 2-yutan ideali olduğundan, $(1 - x)a \in \sqrt{I}$ veya $(1 - x)r \in \sqrt{I}$ veya $ar \in \sqrt{I}$ sağlanır $(1 - x)a \in \sqrt{I}$ durumunda $(1 - x)am \in \sqrt{I}M$ olup, buradan $1 - x \in (\sqrt{I}M :_R am) \subseteq W$ çelişmesine varılır. Eğer $(1 - x)r \in \sqrt{I}$ ise $(1 - x)^2m = (1 - x)rm' \in \sqrt{I}M$ olup, $(1 - x)^2 \in (\sqrt{I}M :_R m) \subseteq (\sqrt{I}M :_R am) \subseteq W$ kapsamı ile yine bir çelişki elde edilir. Böylece $(1 - x)a \notin \sqrt{I}$ ve $(1 - x)r \notin \sqrt{I}$ dır.

II. Durum: İlk duruma benzer şekilde $(1 - x)b \notin \sqrt{I}$ olduğu görülür.

III. Durum: $arb \in I$ ise $ar \in \sqrt{I}$ veya $br \in \sqrt{I}$ veya $ab \in I$ olur. $ar \in \sqrt{I}$ varsayalım. Bu durum $(1 - x)am = arm' \in \sqrt{I}M$ olmasını gerektirir. Buradan $(1 - x) \in (\sqrt{I}M :_R am) \subseteq W$ olarak çelişkiye varılır. Böylece $ar \notin \sqrt{I}$ ve benzer şekilde $br \notin \sqrt{I}$ sonucuna varılır. Sonuç olarak $ab \in I$ elde edilir. $\square$

Tanım 3.2.6 R , bir K tam bölüm halkası (total quotient halkası) ile birlikte bir halka olsun. R nin bir sıfırdan farklı I idealine, $I^{-1} = \{x \in K \mid xI \subseteq R\}$ olmak üzere $II^{-1} = R$ özdeşliğini sağladığı takdirde tersinir denir. Tersinir alt modül kavramı ise (Naoum ve Al-Alwan, 1996) da tanımlanan tersinir ideallerin genelleştirmesi olarak tanımlanmıştır. M bir R -modül ve $S = R \setminus \{0\}$ olsun. Bu takdirde $T = \{t \in S \mid tm = 0 \text{ olacak şekilde bir } m \in M \text{ vardır}\}$, R nin bir çarpımsal kapalı alt kümesi olur. N, M nin bir alt modülü ve $N' = \{x \in R_T \mid xN \subseteq M\}$ dir. Bir N alt modülü için $N'N = M$ sağlanıyorsa, N ye M içinde tersinir alt modül denir.

Bir sıfırdan farklı R -modül M nin sıfırdan farklı her alt modülü tersinir ise M ye Dedekind modül adı verilir.

Not 3.2.7 R bir tamlık bölgesi ise, sonlu üretilmiş serbest torsion çarpımsal R -modül M nin bir Dedekind modül olması için gerek ve yeter koşul R nin bir Dedekind bölgesi olmasıdır. (Khoramdel ve Hesari, 2011). Dahası, sonlu üretilmiş serbest burulmalı

Dedekind çarpımsal R -modül M nin her asal alt modülü maksimaldir. O halde aşağıdaki sonucu yazabiliriz:

Teorem 3.2.8 R bir Noetherian bölge, M bir serbest burulmalı çarpımsal R -modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

(1) M bir Dedekind modüldür.

(2) N nin M nin bir sıfırdan farklı 2-yutan asalımsı alt modülü olması için gerek ve yeter koşul bir maksimal alt modül m ve bir pozitif tamsayı n için $N = m^n$ veya iki maksimal alt modül m_1 ve m_2 ve iki pozitif tamsayı n, k için $N = m_1^n m_2^k$ tipinde olmasıdır.

(3) N, M nin bir sıfırdan farklı 2-yutan asalımsı alt modülü ise bir asal alt modül P ve bir pozitif tamsayı n için $N = P^n$ veya iki asal alt modül P_1 ve P_2 ve iki pozitif tamsayı n, k için $N = P_1^n P_2^k$ tipinde olmasıdır.

İspat Bir Noetherian halka üzerindeki her çarpımsal modül bir Noetherian modül olduğundan, M Noetherian ve dolayısıyla sonlu üretilmiştir.

(1) $\Rightarrow$ (2) N, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülü olsun. Şu halde $N = IM$ olacak şekilde bir R nin I ideali mevcuttur. Buradan Teorem 3.1.6 gereğince $(N:_R M) = I$, R nin bir 2-yutan asalımsı idealidir. R bir Dedekind bölgesi olduğundan (Teorem 2.11 (Badawi, 2007)) gereğince m_1, m_2 ve iki pozitif n, k tamsayısı için $I = m_1^n m_2^k$ tipindedir. Buradan $N = m^n M = (mM)^n$ veya $N = (m_1 M)^n (m_2 M)^k$ olur ki, bu da istenilendir.

(2) $\Rightarrow$ (3) Aşıkardır.

(3) $\Rightarrow$ (1) R nin bir Dedekind bölgesi olduğunu göstermek için bir m maksimal idealini alalım. $m^2 \subset I \subset m$ olmak üzere R nin bir I idealinin bulunduğunu varsayalım. Buradan $\sqrt{I} = m$ ve dolayısıyla M bir sadık çarpımsal R -modül olduğundan $M - rad(IM) = mM$ dir. Bu takdirde Teorem 3.1.7 den IM, M nin bir 2-yutan asalımsı alt modülüdür. Varsayımımızdan M nin bir P asal alt modülü ve bir n pozitif tamsayısı için

$IM = P^n$ veya iki asal alt modül P_1 ve P_2 ve iki pozitif tamsayı n, k için $N = IM = P_1^n P_2^k$ dir. M kısaltmalı olduğundan, bir asal ideal P ve bir pozitif tamsayı n için $I = P^n$ veya iki asal ideal P_1 ve P_2 ve iki pozitif tamsayı n, k için $I = P_1^n P_2^k$ dır. Her iki durumda da çelişki elde edilir. O halde m^2 ve m arasında böyle bir I ideali bulunamaz. Sonuç olarak R bir Dedekind bölgesidir. $\square$





BÖLÜM 4 - ÇARPIMSAL LATİSLERDE 2-YUTAN VE ZAYIF 2-YUTAN ELEMANLAR

Bu bölüm boyunca L ile bir C -latisi göstereceğiz. 2-yutan ve zayıf 2-yutan ideallerin çarpımsal latislere genelleştirmesi veya çarpımsal latislerdeki asal ve zayıf asal elemanların bir genelleştirmesi gözüyle bakabileceğimiz 2-yutan ve zayıf 2-yutan eleman kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlayacağız.

4.1 Çarpımsal Latislerde 2-Yutan ve Zayıf 2-Yutan Elemanların Temel Özellikleri

Tanım 4.1.1 q, L latisinde bir has eleman olsun.

(1) $abc \leq q$ eşitsizliğini sağlayan her $a, b, c \in L$ için $ab \leq q$ veya $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ olması gerekiyor ise q elemanına 2-yutan eleman,

(2) $0 \neq abc \leq q$ eşitsizliğini sağlayan her $a, b, c \in L$ için $ab \leq q$ veya $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ olması gerekiyor ise q elemanına zayıf 2-yutan eleman diyeceğiz.

L latisini özel olarak, herhangi değişmeli birimli R halkası için $L(R)$ idealler latisi olarak alalım. Bu durumda $L(R)$ latisinin elemanlarının, R halkasının birer ideali olduğu göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem gereğince, bir $I \in L(R)$ elemanının $L(R)$ latisinde bir 2-yutan eleman olması durumu, R nin bir I idealinin, R nin 2-yutan ideali olmasına denktir.

Teorem 4.1.2 (Theorem 2.13, (Badawi, 2007)) I, R halkasının bir has ideali olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ ise $ab \in I$ veya $bc \in I$ veya $ac \in I$ dir.

(2) R nin A, B, C idealleri için $ABC \subseteq I$ ise $AB \subseteq I$ veya $BC \subseteq I$ veya $AC \subseteq I$ dir.

O halde Tanım 1.1.4 ve Tanım 1.1.6 da verilen 2-yutan ideal (Badawi, 2007) ve zayıf 2-yutan ideal (Badawi ve Darani, 2011) tanımları, L latis olarak $L(R)$ idealler latisi alındığında oluşan Tanım 4.1.1 in özel bir hali olarak düşünülebilir. O halde (Badawi, 2007) ve (Badawi ve Darani, 2011) deki tüm sonuçlar, $L = L(R)$ latisi olarak alındığında, bu bölümde yer alan teoremlerin özel bir hali olarak elde edilir.

Her 2-yutan elemanı, Tanım 4.1.1 gereğince açıkça bir zayıf 2-yutan elemandır. Fakat bir zayıf 2-yutan elemanın 2-yutan olması gerekmez. Gerçekten, aşağıdaki örnekler bu durumu gösterir.

Örnek 4.1.3 Bir L latisinde sıfır eleman her zaman zayıf 2-yutan elemandır. Fakat genel olarak bir 2-yutan eleman değildir. Örneğin $I = \{0\}$, $L(\mathbb{Z}_8)$ latisinde bir zayıf 2-yutan elemandır. Oysa $(2) \cdot (2) \cdot (2) \subseteq I$ iken $(2) \cdot (2) \not\subseteq I$ olduğundan I , $L(\mathbb{Z}_8)$ de bir 2-yutan eleman değildir.

$L(R)$ latisinde 2-yutan olmayan sıfırdan farklı bir zayıf 2-yutan eleman ideal örneği aşağıdaki gibidir:

Örnek 4.1.4 (Example 2.1, (Badawi ve Darani, 2011)) $M = \{0,4\}$ alalım. Bu takdirde M , açıkça $\mathbb{Z}_8$ in bir idealidir. $R = \mathbb{Z}_8 \times M$ ve $I = \{(0,0), (0,4)\}$ olsun. $a, b, c \in R \setminus I$ elemanları için $abc \neq (0,4)$ olduğundan $abc \in I$ sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $abc = (0,0)$ olduğu görülür. Buradan I , R nin bir zayıf 2-yutan idealidir. Öte yandan $(2,0) \cdot (2,0) \cdot (2,0) = (0,0) \in I$ iken $(2,0) \cdot (2,0) = (4,0) \notin I$ olduğundan I bir 2-yutan ideal değildir.

2-yutan olmayan bir zayıf 2-yutan idealine sonlu olmayan örnek için Örnek 4.1.5 verilebilir.

Örnek 4.1.5 (Example 2.1, (Badawi ve Darani, 2011)) $M = \{0,4\}$ ve $K = M[X]$ olsun. Bu durumda $K, \mathbb{Z}_8[X]$ in sonlu olmayan bir idealidir. $R = \mathbb{Z}_8 \times K$ ve $I = \{0\} \times K$ olsun. Şu halde I, R nin bir sonlu olmayan bir idealidir. Yine $a, b, c \in R \setminus I$ elemanları için $abc \in I$ sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $abc = (0,0)$ olduğu görülür. Buradan I, R nin bir zayıf 2-yutan idealidir.

Aşağıdaki teoremden görülebileceği gibi, bir C -latiste bir elemanın (zayıf) 2-yutan eleman olması için tanımdaki şartın sadece kompakt elemanlar tarafından gerçekleşmesi yeterlidir. L_* ile L latisindeki kompakt elemanların kümesini göstereceğiz.

Teorem 4.1.6 q, L nin bir has elemanı olsun. Bu takdirde

(1) q elemanının zayıf 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul $0 \neq abc \leq q$ eşitsizliğini sağlayan her $a, b, c \in L_*$ için $ab \leq q$ veya $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ sağlanmasıdır.

(2) q elemanının 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul $abc \leq q$ eşitsizliğini sağlayan her $a, b, c \in L_*$ için $ab \leq q$ veya $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ sağlanmasıdır.

İspat (1) $0 \neq abc \leq q$ sağlayan her $a, b, c \in L_*$ için $ab \leq q$ veya $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ olsun. q nun bir zayıf 2-yutan eleman olduğunu göstereceğiz. $a, b, c \in L$ için $0 \neq abc \leq q$, $ab \not\leq q$ ve $bc \not\leq q$ varsayalım. $0 \neq abc$ olduğundan $0 \neq a'b'c' \leq q$ olacak şekilde $a' \leq a$, $b' \leq b$ ve $c' \leq c$ kompakt elemanları vardır. Ayrıca $ab \not\leq q$ ve $bc \not\leq q$ olduğundan $a_1b_1 \not\leq q$ ve $b_2c_1 \not\leq q$ eşitsizliklerini gerçekleyen $a_1 \leq a$, $b_1 \leq b$, $b_2 \leq b$ ve $c_1 \leq c$ kompakt elemanları vardır. Şimdi $b_3 = b_1 \vee b_2 \vee b'$, $a_2 = a_1 \vee a'$ ve $c_2 = c_1 \vee c'$ diyelim. $ac \leq q$ olduğunu gösterelim: $a_\alpha \leq a$ ve $c_\alpha \leq c$ olacak şekilde $a_\alpha, c_\alpha \in L_*$ seçelim. Buradan $0 \neq (a_2 \vee a_\alpha)b_3(c_2 \vee c_\alpha) \leq q$ ve $(a_2 \vee a_\alpha)b_3 \not\leq q, b_3(c_2 \vee c_\alpha) \not\leq q$ olur. O halde hipotez gereğince $(a_2 \vee a_\alpha)(c_2 \vee c_\alpha) \leq q$ bulunur. Dolayısıyla $a_\alpha c_\alpha \leq q$ dur. Böylece $ac \leq q$ elde edilir. O halde q, L nin zayıf 2-yutan elemanıdır. İfadenin tersi açıktır.

(2) İspat, (1) ile benzer şekilde elde edilir. $\square$

Önerme 4.1.7

(1) p_1 ve p_2 , L latisinde iki zayıf asal eleman ise $p_1 \wedge p_2$ bir zayıf 2-yutan elemandır.

(2) p_1 ve p_2 , L latisinde iki asal eleman ise $p_1 \wedge p_2$ bir 2-yutan elemandır.

(3) q , L latisinde bir 2-yutan eleman ise her $a \leq q$ için q , L/a latisinde bir zayıf 2-yutan elemandır.

İspat (1) p_1 ve p_2 iki zayıf asal eleman ve $0 \neq abc \leq p_1 \wedge p_2$ olsun. O halde $0 \neq abc \leq p_1$ ve $0 \neq abc \leq p_2$ olması gereğince $a \leq p_1$ veya $b \leq p_1$ veya $c \leq p_1$ ve $a \leq p_2$ veya $b \leq p_2$ veya $c \leq p_2$ sağlanır. Genelliği kaybetmeden $a \leq p_1$ ve $b \leq p_2$ sağlandığını varsayalım. Şu halde $ab \leq p_1 \wedge p_2$ dir. Böylece $p_1 \wedge p_2$ bir zayıf 2-yutan elemandır.

(2) İspat (1) ile benzer olarak kolayca elde edilebilir.

(3) $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in L/a$ için $a \neq \bar{x}\bar{y}\bar{z} \leq q$ olsun. Bu takdirde $(x \vee a)(y \vee a)(z \vee a) \leq q$ olmasından $xyz \vee a \leq q$ olup, $xyz \leq q$ elde edilir. q bir 2-yutan eleman olduğundan $xy \leq q$ veya $yz \leq q$ veya $xz \leq q$ bulunur. Böylece $a \leq q$ olduğundan $xy \vee a = (x \vee a)(y \vee a) = \bar{x}\bar{y} \leq q$ veya $yz \vee a = (y \vee a)(z \vee a) = \bar{y}\bar{z} \leq q$ veya $xz \vee a = (x \vee a)(z \vee a) = \bar{x}\bar{z} \leq q$ ile istenilen gösterilmiş olur. $\square$

Hatırlanacak olursa, L bir C -latis ise Önerme 1.3.4.7 gereğince $\sqrt{a} = \vee \{x \in L^* \mid \text{bir } n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için, } x^n \leq a\}$ idi. Bir 2-yutan elemanın radikali için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

Teorem 4.1.8 q , L nin bir 2-yutan elemanı olsun.

(1) $x \leq \sqrt{q}$ ise $x^2 \leq q$ dir.

(2) $x, y \leq \sqrt{q}$ ise $xy \leq q$ dir.

(3) $(\sqrt{q})^2 \leq q$ dir.

(4) $\sqrt{q}$, L nin 2-yutan elemanıdır.

İspat (1) $a \leq \sqrt{q}$ bir kompakt eleman olsun. O halde $a^n \leq q$ yi gerçekleyen bir n pozitif tam sayısı vardır. Burada q bir 2-yutan eleman olduğundan $a^2 \leq q$ elde edilir. $x \leq \sqrt{q}$ olacak şekilde herhangi bir $x \in L$ alalım. $a \leq x$ ve $b \leq x$ olacak şekilde $a, b \in L_*$ alalım. $a \leq \sqrt{q}$, $b \leq \sqrt{q}$ ve a, b kompakt elemanlar olduğundan $a^2 \leq q$, $b^2 \leq q$ olur. Böylelikle $a(a \vee b)b \leq q$ sağlanır. q nun 2-yutan eleman olduğundan $a(a \vee b) \leq q$ veya $(a \vee b)b \leq q$ veya $ab \leq q$ sağlanır. Yani her durumda $ab \leq q$ bulunur. $x^2 = \vee \{ab \mid a, b \in L_*, a \leq x, b \leq x\}$ olduğundan $x^2 \leq q$ elde edilir.

(2) $x, y \leq \sqrt{q}$ olsun. (1) gereğince $x^2 \leq q$ ve $y^2 \leq q$ dur. Dolayısıyla $x(x \vee y)y \leq q$ elde edilir. q , L nin bir 2-yutan elemanı olduğundan $x(x \vee y) \leq q$ veya $(x \vee y)y \leq q$ veya $xy \leq q$ olup, sonuç olarak her durumda $xy \leq q$ bulunur.

(3) $(\sqrt{q})^2 = \vee \{ab \mid a, b \in L_*, a \leq \sqrt{q}, b \leq \sqrt{q}\}$ olmasından istenilen sonuç, (2) den elde edilir.

(4) $abc \leq \sqrt{q}$ olacak şekilde $a, b, c \in L_*$ alalım. (1) gereğince $(abc)^2 = a^2b^2c^2 \leq q$ bulunur. q bir 2-yutan eleman olduğundan $a^2b^2 \leq q$ veya $a^2c^2 \leq q$ veya $b^2c^2 \leq q$ sağlanır. Genelliği kaybetmeden $a^2b^2 \leq q$ varsayalım. Bu durumda $(ab)^2 \leq q$, olduğundan $ab \leq \sqrt{q}$ olur. O halde $\sqrt{q}$, L nin bir 2-yutan elemanıdır. $\square$

Tanım 4.1.9 q , L nin bir zayıf 2-yutan elemanı ve $a, b, c \in L$ olsun. Şayet $abc = 0$ olacak $ab \not\leq q$, $bc \not\leq q$ ve $ac \not\leq q$ ise (a, b, c) ye q nun üçlü sıfırı diyeceğiz.

Not 4.1.10 q , L nin zayıf 2-yutan elemanı ancak 2-yutan elemanı değil ise q nun bir üçlü sıfırı vardır.

Yardımcı Teorem 4.1.11 q , L nin bir zayıf 2-yutan elemanı ve (a, b, c) , q nun üçlü sıfırı olsun. Bu takdirde aşağıdaki özdeşlikler geçerlidir:

$$(1) \ abq = bcq = acq = 0 \text{ dir.}$$

$$(2) \ aq^2 = bq^2 = cq^2 = 0 \text{ dir.}$$

İspat (1) $x \leq q$ olacak şekilde L nin bir x kompakt elemanını alalım. $abx \neq 0$ varsayalım. Buradan $0 \neq ab(c \vee x) \leq q$ olur. q bir zayıf 2-yutan eleman ve $ab \not\leq q$ olduğundan $a(c \vee x) \leq q$ veya $b(c \vee x) \leq q$ bulunur. Böylece $ac \leq q$ veya $bc \leq q$ elde edilir ki bu durum (a, b, c) nin üçlü sıfır oluşu ile çelişir. O halde her kompakt eleman $x \leq q$ için $abx = 0$ ve dolayısıyla $abq = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $bcq = 0$ özdeşliği kolaylıkla gösterilebilir.

(2) $aq^2 \neq 0$ varsayalım. O halde (a, b, c) , q nun üçlü sıfırı olduğundan $abc = 0$ dir. Ayrıca (1) gereğince $abq = bcq = acq = 0$ olduğundan $0 \neq a(b \vee q)(c \vee q) = aq^2 \leq q$ dur. $q \in L$ bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan $a(b \vee q) \leq q$ veya $a(c \vee q) \leq q$ veya $(b \vee q)(c \vee q) \leq q$ elde edilir. Böylece $ab \leq q$ veya $ac \leq q$ veya $bc \leq q$ çelişkisine varılır. Şu halde $aq^2 = 0$ dir. Benzer biçimde $bq^2 = cq^2 = 0$ eşitliğini göstermek kolaydır. $\square$

Bir zayıf 2-yutan elemanın, 2-yutan eleman olması için yeter koşul aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.1.12 q , L nin bir zayıf 2-yutan elemanı olsun. q bir 2-yutan eleman değil ise $q^3 = 0$ dir.

İspat $q \in L$, 2-yutan olmayan bir zayıf 2-yutan eleman olsun. O halde Not 4.1.10 gereğince bazı $a, b, c \in L$ için q nun bir üçlü sıfırı (a, b, c) bulunur. $q^3 \neq 0$ varsayalım. Yardımcı Teorem 4.1.11 gereğince $abq = bcq = acq = aq^2 = bq^2 = cq^2 = 0$ sağlandığından, $0 \neq (a \vee q)(b \vee q)(c \vee q) = q^3 \leq q$ olur. q bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan bu da $(a \vee q)(b \vee q) \leq q$ veya $(a \vee q)(c \vee q) \leq q$ veya $(b \vee q)(c \vee q) \leq q$

q sağlanmasını gerektirir. Dolayısıyla $ab \leq q$ veya $ac \leq q$ veya $bc \leq q$ olur. Oysa bu durum (a, b, c) nin q nun üçlü sıfır oluşu ile çelişir. Sonuç olarak $q^3 = 0$ elde edilir. $\square$

Sonuç 4.1.13 q , L latisinde zayıf 2-yutan eleman olsun. $q \not\leq \sqrt{0}$ ise q bir 2-yutan elemandır.

Önerme 4.1.14 L bir indirgenmiş latis ve $q \neq 0$, L nin bir zayıf 2-yutan elemanı olması için gerek ve yeter koşul q nun bir 2-yutan elemanı olmasıdır.

İspat $q \neq 0$, L nin bir zayıf 2-yutan elemanı olsun. q nun 2-yutan olmadığını varsayalım. Şu halde Sonuç 4.1.13 gereğince $q \leq \sqrt{0}$ dır. L indirgenmiş olduğundan $\sqrt{0} = 0$, yani $q = 0$ çelişmesine varılır. Tersisi aşıkardır. $\square$

$L(R)$ idealler latisinde $I^3 = 0$ ı sağlayan her elemanın bir zayıf 2-yutan eleman olması gerekmez. Bunu aşağıdaki örnek yardımıyla görebiliriz.

Örnek 4.1.15 (Example 2.6, Badawi ve Darani, 2011) $R = \mathbb{Z}_{16}$ olmak üzere $L(R)$ idealler latisini düşünelim. $I = \{0, 8\}$ elemanını göz önüne alalım. Bu durumda $I^3 = 0$ ancak, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ iken $2 \cdot 2 = 4 \notin I$ dır. Yani I , $L(R)$ nin bir zayıf 2-yutan elemanı değildir.

Teorem 4.1.16 q , L nin 2-yutan olmayan bir zayıf 2-yutan elemanı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler geçerlidir:

(1) x bir nilpotent eleman ise $x^2 \leq q$ veya $x^2q = xq^2 = 0$ dır.

(2) $q^2(\sqrt{0})^2 = 0$ dır.

İspat (1) x bir nilpotent eleman olsun. Önce $x^2q \neq 0$ varsayalım. $x^2 \leq q$ olduğunu gösterelim: $x^n = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tamsayı n olsun. Burada $x^2q \neq 0$ varsayımımız gereğince $n \geq 3$ ve $x^2x' \neq 0$ eşitsizliğini sağlayan bir $x' \leq q$ kompakt elemanı vardır. Şu halde $0 \neq x^2x' \leq x^2(x' \vee x^{n-2}) \leq q$ olup, q nun bir zayıf 2-yutan eleman olması gereğince $x^2 \leq q$ veya $(xx' \vee x^{n-1}) \leq q$ elde edilir. $x^2 \leq q$ gösterilmek istenendir. O halde $(xx' \vee x^{n-1}) \leq q$ varsayalım. Buradan $0 \neq x^{n-1} \leq q$ ve q bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan $x^2 \leq q$ sonucuna varılır.

Şimdi bir nilpotent x elemanı için $x^2 \not\leq q$ varsayalım. O zaman $x^2q = 0$ dir. $xq^2 = 0$ olduğunu gösterelim: Aksine $xq^2 \neq 0$ varsayalım. $x^m = 0$ eşitliğini sağlayan en küçük pozitif tam sayı m olsun. $x^2 \not\leq q$ olması gereğince $m \geq 3$ dir. Böylece $0 \neq x(x \vee q)(x^{m-2} \vee q) = xq^2 \leq q$ sağlanır. q bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan $x(x \vee q) \leq q$ veya $x(x^{m-2} \vee q) \leq q$ veya $(x \vee q)(x^{m-2} \vee q) \leq q$ dir. Dolayısıyla $x^2 \leq q$ veya $0 \neq x^{m-1} \leq q$ sağlanır. Her iki durumda da $x^2 \leq q$ çelişmesine varılır. Sonuç olarak $xq^2 = 0$ elde edilir.

(2) $a, b \leq \sqrt{0}$ olacak şekilde $a, b \in L_*$ alalım. Eğer $a^2 \not\leq q$ veya $b^2 \not\leq q$ ise (1) gereğince $abq^2 = 0$ elde edilir ki bu istenilendir. $a^2 \leq q$ ve $b^2 \leq q$ varsayalım. Bu takdirde $ab(a \vee b) \leq q$ olur. Şayet $(a, b, a \vee b)$ bir q nun üçlü sıfırı ise Yardımcı Teorem 4.1.11 gereğince $abq = 0$ ve dolayısıyla $abq^2 = 0$ bulunur.

Şimdi $(a, b, a \vee b)$ nin q nun üçlü sıfırı olmadığını varsayalım.

I. Durum: $ab(a \vee b) = 0$ olsun. $(a, b, a \vee b)$ üçlü sıfır olmadığından $ab \leq q$ veya $a(a \vee b) \leq q$ veya $b(a \vee b) \leq q$ gerçekleşir. Her durumda $ab \leq q$ bulunur. Böylelikle Teorem 4.1.12 den $abq^2 \leq q^3 = 0$ dir.

II. Durum: $ab(a \vee b) \neq 0$ varsayalım. $0 \neq ab(a \vee b) \leq q$ ve q bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan $a(a \vee b) \leq q$ veya $b(a \vee b) \leq q$ veya $ab \leq q$ bulunur. O halde tüm durumlarda $ab \leq q$ olur. Teorem 4.1.12 den ise $abq^2 \leq q^3 = 0$ sonucuna varılır. Böylece her $a, b \leq \sqrt{0}$ kompakt elemanları için $abq^2 = 0$ olur. Sonuç olarak, $q^2(\sqrt{0})^2 = 0$ elde edilir. $\square$

Theorem 4.1.17 p, q ve r, L nin 2-yutan olmayan zayıf 2-yutan elemanları olsun. Şu halde $p^2qr = pq^2r = pqr^2 = p^2q^2 = p^2r^2 = q^2r^2 = 0$ dir.

İspat p, q ve r, L nin 2-yutan olmayan zayıf 2-yutan elemanları olsun. O halde Teorem 4.1.12 den $p, q, r \in \sqrt{0}$ dir. Dolayısıyla Teorem 4.1.16 gereğince $p^2qr = pq^2r = pqr^2 = p^2q^2 = p^2r^2 = q^2r^2 = 0$ istenilen elde edilir. $\square$

Theorem 4.1.18 q, L nin bir 2-yutan elemanı ve p, p', L nin iki asal elemanı olmak üzere $\sqrt{q} = p \wedge p'$ olsun. Bu takdirde her $x \not\leq p \vee p'$ için aşağıdakiler gerçekleşir:

(1) $(q: x), L$ nin bir 2-yutan elemanıdır.

(2) $\sqrt{(q: x)} = p \wedge p'$ dir.

İspat (1) $x \not\leq p \vee p'$ olsun. $abc \leq (q: x)$ olmak üzere $a, b, c \in L$ alalım. Buradan $a(bc)x \leq q$ ve dolayısıyla $ax \leq q$ veya $bcx \leq q$ veya $abc \leq q$ bulunur. $ax \leq q$ veya $bcx \leq q$ ise ispat tamamlanır. O halde $abc \leq q$ varsayalım. Buradan $ab \leq q$ veya $ac \leq q$ veya $bc \leq q$ dir. Böylece $ab \leq (q: x)$ veya $ac \leq (q: x)$ veya $bcx \leq (q: x)$ olup $(q: x)$ nin L de bir 2-yutan eleman olduğu gösterilmiş olur.

(2) $p \wedge p' = \sqrt{q} \leq \sqrt{(q: x)} \leq p \wedge p'$ olduğundan $\sqrt{(q: x)} = p \wedge p'$ sonucuna varılır. $\square$

Theorem 4.1.19 q, L nin p -asalımsı elemanı olsun. Bu takdirde q nun 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul $p^2 \leq q$ olmasıdır. Özel olarak L nin her maksimal m elemanı için m^2, L nin bir 2-yutan elemanıdır.

İspat q, L nin bir 2-yutan elemanı olsun. Bu takdirde Teorem 4.1.8 den $p^2 \leq q$ dur. Tersine, $p^2 \leq q$ ve $xyz \leq q$ olduğunu varsayalım. Şayet $x \leq q$ veya $yz \leq q$ ise istenilen elde edilir. O halde $x \not\leq q$ ve $yz \not\leq q$ varsayalım. q, L nin p -asalımsı elemanı olduğundan, $yz \leq p$ ve $x \leq p$ bulunur. Dolayısı ile $x, y \leq p$ veya $x, z \leq p$ olup, $p^2 \leq q$ olması gereğince $xy \leq q$ veya $xz \leq q$ dir. Yani q bir 2-yutan elemandır. Özel olarak m

maksimal eleman ise m bir m -asalımsı eleman ve açıkça $m^2 \leq m^2$ olduğundan m^2 bir 2-yutan elemandır. $\square$

Yardımcı Teorem 4.1.20 (Alarcon ve ark., 1995) $a \in L$ ve $p \in L$ asal elemanı için $a \leq p$ olsun. Bu takdirde $x \leq p$ yi sağlayan her $x \in L$ kompakt elemanı için $x^n y \leq a$ olacak şekilde bir $y \not\leq p$ kompakt elemanı ve n pozitif tamsayısı mevcuttur.

Yardımcı Teorem 4.1.21 q, L nin bir 2-yutan elemanı ve p_1, p_2 ise q üzerinde iki farklı minimal asal eleman olsun. $x_1, x_2 \in L_*$ için $x_1 \leq p_1, x_1 \not\leq p_2, x_2 \leq p_2, x_2 \not\leq p_1$ ise $x_1 x_2 \leq q$ dir.

İspat $x_1, x_2 \in L_*$ için $x_1 \leq p_1, x_1 \not\leq p_2, x_2 \leq p_2, x_2 \not\leq p_1$ olsun. Yardımcı Teorem 4.1.20 gereğince $c_2 x_1^n \leq q$ ve $c_1 x_2^m \leq q$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in L_*, c_2 \not\leq p_1$ ve $c_1 \not\leq p_2$ ve n, m pozitif tam sayıları vardır. q bir 2-yutan eleman olduğundan, $c_2 x_1 \leq q$ veya $x_1^2 \leq q$ elde edilir. $x_1^2 \leq q \leq p_2$ durumunda $x_1 \leq p_2$ çelişkisine varılır. Böylece $c_2 x_1 \leq q$ dir. Benzer yaklaşım ile $c_1 x_2 \leq q$ olduğu gösterilebilir.

Diğer taraftan, $(c_1 \vee c_2) x_1 x_2 \leq q$ olduğu açıktır. Ayrıca $c_1 \vee c_2 \not\leq p_1$ ve $c_1 \vee c_2 \not\leq p_2$ olduğundan $(c_1 \vee c_2) x_1 \not\leq p_2$ ve $(c_1 \vee c_2) x_2 \not\leq p_1$ olur. Buradan $(c_1 \vee c_2) x_1 \not\leq q$ ve $(c_1 \vee c_2) x_2 \not\leq q$ gerçekleşir. q, L nin 2-yutan elemanı olduğundan $x_1 x_2 \leq q$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.1.22

(1) q bir 2-yutan eleman ise q üzerinde en çok iki minimal asal eleman vardır.

(2) Her elemanı zayıf 2-yutan eleman olan bir latisin en çok üç maksimal elemanı vardır.

İspat (1) $A = \{p_i : p_i, q \text{ üzerinde minimal asal eleman}\}$ kümesinin en az üç elemana sahip olduğunu varsayalım. $p_1, p_2 \in A$ iki farklı asal eleman olsun. Şu halde $x_1 \leq p_1$, $x_1 \not\leq p_2$ ve $x_2 \leq p_2$, $x_2 \not\leq p_1$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in L_*$ vardır. Yardımcı Teorem 4.1.21 den, $x_1 x_2 \leq q$ bulunur. Şimdi p_1 ve p_2 den farklı bir $p_3 \in A$ bulunduğunu varsayalım. Buradan $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ için $y_i \leq p_i$ ve $y_i \not\leq p_j$ olacak şekilde bir $y_i \in L_*$ vardır. Yardımcı Teorem 4.1.21 den $y_1 y_2 \leq q \leq p_3$ çelişkisine varılır. Böylece A en çok iki elemana sahiptir.

(2) m_1, m_2, m_3 ve m_4 , L nin farklı maksimal elemanları olsun. $a = m_1 \wedge m_2 \wedge m_3$ diyelim. L de a nın ikiden fazla minimal asal elemanı olduğundan (1) gereğince, a , L nin bir 2-yutan elemanı değildir. a , 2-yutan olmayan bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan Teorem 4.1.12 uyarınca, $a^3 = 0$ bulunur. Buradan $a^3 = m_1^3 m_2^3 m_3^3 = 0 < m_4$ olur. Buradan $m_1 < m_4$ veya $m_2 < m_4$ veya $m_3 < m_4$ çelişkisine varılır. Sonuç olarak L nin en çok üç maksimal elemanı vardır. $\square$

Teorem 4.1.23 q , L nin bir 2-yutan elemanı olsun. Bu takdirde aşağıdaki iki durumdan biri gerçekleşir:

(1) $\sqrt{q} = p$, L nin bir asal elemanı ve $p^2 \leq q$ dur.

(2) $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ ve p_1, p_2 , q nun farklı minimal asal elemanları olmak üzere $p_1 p_2 \leq q$ dur.

İspat q , L nin bir 2-yutan elemanı olsun. Bu halde, Teorem 4.1.22 den $\sqrt{q} = p$, L nin bir asal elemanıdır veya p_1 ile p_2 , q üzerinde farklı minimal asal elemanlar olmak üzere $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ biçimindedir. Eğer $\sqrt{q} = p$ asal ise Teorem 4.1.8 gereğince $p^2 \leq q$ olur. Yani (1) gerçekleşir. Şimdi p_1 ve p_2 , q nun farklı iki minimal asal elemanı olmak üzere $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ varsayalım. $p_1 p_2 \leq q$ olduğunu göstereceğiz. $p_1 p_2 = \vee \{xy \mid x, y \in L_*, x \leq p_1, y \leq p_2\}$ olup, burada üç durum vardır:

I. Durum $x, y \leq p_1 \wedge p_2 = \sqrt{q}$ ise Teorem 4.1.8 den $xy \leq q$ dir.

II. Durum $x \leq p_1$, $x \not\leq p_2$ ve $y \leq p_2$, $y \not\leq p_1$ olacak şekilde $x, y \in L_*$ olsun. O halde Yardımcı Teorem 4.1.21 den $xy \leq q$ olur.

III. Durum $x \leq \sqrt{q}$, $y \leq p_2$ ve $y \not\leq p_1$ olacak şekilde $x, y \in L_*$ olsun. $y_1 \leq p_1$ ve $y_1 \not\leq p_2$ olmak üzere $y_1 \in L_*$ alalım. Şu halde Yardımcı Teorem 4.1.21 den, $y_1 y \leq q$ dir. Burada $x \vee y_1 \leq p_1$ ve $x \vee y_1 \not\leq p_2$, olacağından Yardımcı Teorem 4.1.21 gereğince, $(x \vee y_1)y \leq q$ ve dolayısıyla $xy \leq q$ bulunur.

IV. Durum $y \leq \sqrt{q}$, $x \leq p_1$ ve $x \not\leq p_2$ ise olacak şekilde $x, y \in L_*$ olsun. $x_1 \leq p_1$ ve $x_1 \not\leq p_2$ olmak üzere $x_1 \in L_*$ alalım. Yardımcı Teorem 4.1.21 den, $x_1 x \leq q$ dir. Burada $y \vee x_1 \leq p_1$ ve $y \vee x_1 \not\leq p_2$, olacağından Yardımcı Teorem 4.1.21 gereğince, $(y \vee x_1)x \leq q$ ve dolayısıyla $xy \leq q$ bulunur.

Sonuç olarak $p_1 p_2 \leq q$ olup (2) nin sağlandığı gösterilmiş olur. $\square$

Teorem 4.1.24 q , L nin 2-yutan elemanı ve $\sqrt{q} = p$ asal eleman ve $q \neq p$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar sağlanır:

(1) Her $x \leq p$ ve $x \not\leq q$ için $(q: x)$, L nin bir asal elemanı ve $p \leq (q: x)$ dir.

(2) Her $x, y \leq p$ ve $x, y \not\leq q$ için $(q: x) \leq (q: y)$ veya $(q: y) \leq (q: x)$ dır.

İspat (1) $x \leq p$ ve $x \not\leq q$ olsun. Teorem 4.1.8 gereğince $p^2 \leq q$ olduğundan, $p \leq (q: x)$ bulunur. $p = (q: x)$ ise ispat tamamlanır. $p < (q: x)$ varsayalım. $y, z \in L$, $yz \leq (q: x)$ eşitsizliğini sağlayan iki eleman alalım. Bu iki eleman için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

I. Durum: $y \leq p$ veya $z \leq p$ olsun. Şu halde $y \leq (q: x)$ veya $z \leq (q: x)$ olur.

II. Durum: $y \not\leq p$ ve $z \not\leq p$ varsayalım. Böylece $yz \not\leq p = \sqrt{q}$ olmasından $yz \not\leq q$ bulunur. O halde $xyz \leq q$ ve q bir 2-yutan eleman eleman olduğundan $xy \leq q$ veya $xz \leq q$ sağlanır. Şu halde $y \leq (q: x)$ veya $z \leq (q: x)$ elde edilir.

Sonuç olarak $(q: x)$, L nin bir asal elemanıdır.

(2) $x, y \leq p$ ve $x, y \not\leq q$ olsun. $z \leq (q:x)$ ve $z \leq (q:y)$ olacak şekilde bir $z \in L_*$ seçelim. (1) den $p \leq (q:y)$ olup, buradan $z \not\leq p$ dir. $(q:y) < (q:x)$ olduğunu göstereceğiz. $w \leq (q:y)$ olacak şekilde herhangi bir $w \in L_*$ alalım. Eğer $w \leq p$ ise $p \leq (q:x)$ olduğundan $w \leq (q:x)$ bulunur. O halde $w \not\leq p$ varsayalım. Burada $z(x \vee y)w \leq q$, $zw \not\leq q$ ve $zy \not\leq q$ olduğundan $(x \vee y)w \leq q$ dir. Böylece $wx \leq q$, yani $w \leq (q:x)$ olduğu ispatlanmış olur. $\square$

Teorem 4.1.25 q , L nin bir 2-yutan elemanı ve p_1 ile p_2 , L de q nun iki farklı minimal asal elemanı olmak üzere $q \neq \sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ olsun. Bu takdirde

(1) Her $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ için $(q:x)$ asal elemandır ve $p_1 \leq (q:x)$ ve $p_2 \leq (q:x)$ sağlanır.

(2) Her $x, y \leq \sqrt{q}$, $x, y \not\leq q$ için $(q:y) \leq (q:x)$ veya $(q:x) \leq (q:y)$ dir.

İspat (1) $x \leq \sqrt{q}$ ve $x \not\leq q$ olsun. O halde Teorem 4.1.23 (2) gereğince $p_1 p_2 \leq q$ dir. Buradan $x p_1 \leq q$ ve $x p_2 \leq q$ bulunur. Böylece $p_1 \leq (q:x)$ ve $p_2 \leq (q:x)$ olur. Şimdi $(q:x)$ in asal eleman olduğunu gösterelim. $y, z \in L$ için $yz \leq (q:x)$ olsun. Buradan $xyz \leq q$ olur. q , bir 2-yutan eleman olduğundan $xy \leq q$ veya $xz \leq q$ veya $yz \leq q$ elde edilir.

I. Durum: $y \leq p_1$ veya $y \leq p_2$ veya $z \leq p_1$ veya $z \leq p_2$ sağlansın. O halde $y \leq (q:x)$ veya $z \leq (q:x)$ olacağından $(q:x)$ in asal olduğu gösterilmiş olur.

II. Durum: $y, z \not\leq p_1$ ve $y, z \not\leq p_2$ kabul edelim. Böylece $yz \not\leq q$ dir. Sonuç olarak $xy \leq q$ veya $xz \leq q$ ve dolayısıyla $y \leq (q:x)$ veya $z \leq (q:x)$ elde edilir. Yani $(q:x)$ bir asal elemandır.

(2) İspat, Teorem 4.1.24 (2) nin ispatı ile tamamen benzerdir. $\square$

Aşağıdaki iki teorem ile L nin radikal olmayan 2-yutan elemanlarını karakterize edeceğiz.

Teorem 4.1.26 q, L nin bir has elemanı ve $q \neq \sqrt{q}$ olmak üzere $\sqrt{q}$ bir asal eleman olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) q, L nin bir 2-yutan elemanıdır.

(2) Her $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ için $(q:x)$, L nin bir asal elemanıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) q, L nin bir 2-yutan elemanı olsun. $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ için Teorem 4.1.25 gereğince $(q:x)$ bir asal elemandır.

(2) $\Rightarrow$ (1) $x, y, z \in L$ için $xyz \leq q$ olsun. $\sqrt{q}$, L nin bir asal elemanı olduğundan, $x \leq \sqrt{q}$ veya $y \leq \sqrt{q}$ veya $z \leq \sqrt{q}$ gerçekleşir. Genelliği bozmadan $x \leq \sqrt{q}$ varsayalım. Eğer $x \leq q$ ise q nun 2-yutan eleman olarak elde edilir. $x \not\leq q$ varsayalım. Şu halde (2) den, $(q:x)$ asal elemandır. Böylece $yz \leq (q:x)$ den $y \leq (q:x)$ veya $z \leq (q:x)$ bulunur, buradan da $xy \leq q$ veya $xz \leq q$ elde edilir. Sonuç olarak q bir 2-yutan elemandır. $\square$

Teorem 4.1.27 $q \in L$ ve q üzerinde tam olarak iki farklı p_1 ve p_2 minimal asal elemanları olmak üzere $q \neq \sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) q, L nin bir 2-yutan elemanıdır.

(2) Her $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ için $p_1 p_2 \leq q$ dir ve $(q:x), L$ nin asal elemanıdır.

(3) $(q:x)$ bir has eleman olmak üzere $x \leq p_1$ veya $x \leq p_2$ sağlanıyor ise $(q:x)$, L nin asal elemanıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Teorem 4.1.23 ve Teorem 4.1.25 in sonucu olarak elde edilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $x \leq \sqrt{q}$ olsun. (2) nin sağlandığını kabul edelim.

I. Durum: $x \leq p_1$ ve $x \not\leq p_2$ olsun. $p_1 p_2 \leq q$ olduğundan $x p_2 \leq q$ dir. O halde $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2 \leq p_2 \leq (q:x)$ ve p_2, q nun minimal asal elemanı olduğundan $(q:x) = p_2$ bulunur. Yani $(q:x)$ bir asal eleman olarak elde edilir.

II. Durum: $x \leq p_2$ ve $x \not\leq p_1$ olsun. O zaman $p_1 p_2 \leq q$ olduğundan $p_1 x \leq q$ dir. Buradan $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2 \leq p_1 \leq (q: x)$ ve p_1, q nun minimal asal elemanı olduğundan $(q: x) = p_1$ asal eleman olarak bulunur.

III. Durum: $x \leq p_1$ ve $x \leq p_2$ ve $x \not\leq q$, ise (2) koşulu gereğince, $(q: x)$, L nin bir asal elemanıdır.

(3)⇒(1) $xyz \leq q$ olacak şekilde $x, y, z \in L$ alalım. (3) ün sağlandığını varsayalım. Şu halde $xyz \leq q \leq p_1 \wedge p_2$ olduğundan, genelliği kaybetmeden $x \leq p_1$ varsayabiliriz. Eğer $x \leq q$ ise ispat tamamlanır. Şu halde $x \not\leq q$ varsayalım. Buradan $yz \leq (q: x)$ ve (3) uyarınca $y \leq (q: x)$ veya $z \leq (q: x)$ olur. Sonuç olarak $xy \leq q$ veya $xz \leq q$ elde edilir. Böylece q , L nin bir 2-yutan elemanıdır. $\square$

Teorem 4.1.28 q , L nin 2-yutan elemanı ve $q \neq \sqrt{q}$ olsun.

(1) $y \in L$, $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ ve $xy \not\leq q$ ise $(q: xy) = (q: x)$ dir.

(2) $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ ve $(q: x) < (q: y)$ ise $ab \not\leq (q: x)$ olacak şekilde her $a, b, y \in L$ için $(q: ax \vee by) = (q: x)$ dir. Özel olarak $(q: x \vee y) = (q: x)$ sağlanır.

İspat (1) $y \in L$, $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ ve $xy \not\leq q$ varsayalım. Açıkça, $(q: x) \leq (q: xy)$ gerçekleşir. Herhangi kompakt $z \in L_*$ için $z \leq (q: xy)$ olsun. O halde $xyz \leq q$ dir. Teorem 4.1.24 ve Teorem 4.1.25 gereğince $(q: x)$ bir asal elemandır. $xy \not\leq q$ olduğundan $z \leq (q: x)$ bulunur. Dolayısıyla $(q: xy) = (q: x)$ sonucuna varılır.

(2) $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ ve $(q: x) < (q: y)$ olsun. $ab \not\leq (q: x)$ olacak şekilde $a, b, y \in L$ alalım. Açıkça, $(q: x) \leq (q: ax \vee by)$ dir. Şimdi $(q: x) \neq (q: ax \vee by)$ varsayalım. Buradan $z \not\leq (q: x)$ olacak şekilde bir $z \leq (q: ax \vee by)$ vardır. Böylece $zax \leq q$, yani $za \leq (q: x)$ olur. $(q: x)$ bir asal eleman olduğundan $z \leq (q: x)$ veya $a \leq (q: x)$ olup bu durum bir çelişkidir. Böylece $(q: ax \vee by) = (q: x)$ olur. Özel olarak $a = b = 1$ alınırsa, $(q: x \vee y) = (q: x)$ bulunmuş olur. $\square$

Örnek 4.1.29 (Example 2.11, (Badawi, 2007)) $R = \mathbb{Z}[x, y]$ verilsin. $P_1 = (x, 2)R$, $P_2 = (y, 2)R$, R nin iki asal ideali olmak üzere $I = P_1 P_2 = (4, 2x, 2y, xy)R$ olsun. Bu takdirde $\sqrt{I} = P_1 \cap P_2 = (2, xy)R$ olur. $(I: 2) = \{z \in R: 2z \in I\} = (2, x, y)R$, R nin maksimal (asal) ideali olduğundan her $d \in \sqrt{I} \setminus I$ için $(I: d) = (I: 2)$ olduğunu görmek kolaydır. O halde Teorem 4.1.27 den I , $L(R)$ latisinin bir 2-yutan elemanıdır.

Örnek 4.1.30 (Example 2.12, (Badawi, 2007)) $R = \mathbb{Z}[x, y, z]$ alalım. Şu halde $P = (2, x)R$ asal idealini ve $I = (4, 2x, 2y, xy, xz, x^2)R$ idealini düşünelim. Bu takdirde $P^2 \subset I$ ve $\sqrt{I} = P$ olur. Burada $(I: 2) = (2, x, y)R$, R nin bir asal ideali ve $(I: x) = (2, x, y)R$ bir (asal) maksimal idealidir ve $(I: 2 + x) = (I: 2)$ dir. Her $d \in P \setminus I$ için $(I: d) = (I: 2)$ veya $(I: d) = (I: x)$ olduğu kolayca görülür. O halde Teorem 4.1.27 gereğince I , $L(R)$ idealler latisinin bir 2-yutan elemanıdır. Burada I , $L(R)$ latisinin bir asalımsı elemanı değildir.

4.2. Kartezyen Çarpım Latislerinde 2-Yutan ve Zayıf 2-Yutan Elemanlar

Teorem 4.2.1 L_1 ve L_2 iki çarpımsal latis ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

(1) $(q, 1)$, L nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır.

(2) $(q, 1)$, L nin bir 2-yutan elemanıdır.

(3) q , L_1 in bir 2-yutan elemanıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) $(q, 1)^3 \neq (0, 0)$ olduğundan Teorem 4.1.12 gereğince $(q, 1)$, L nin bir 2-yutan elemanıdır.

(2) $\Rightarrow$ (3) q nun L_1 in bir 2-yutan elemanı olmadığını varsayalım. Şu halde $abc \leq q$ iken $ab \not\leq q$, $bc \not\leq q$ ve $ac \not\leq q$ olacak şekilde bazı $a, b, c \in L_1$ elemanları vardır. Buradan $(a, 1)(b, 1)(c, 1) \leq (q, 1)$ olup, $(q, 1)$, L nin bir 2-yutan elemanı olduğundan $(a, 1)(b, 1) \leq (q, 1)$ veya $(a, 1)(c, 1) \leq (q, 1)$ veya $(b, 1)(c, 1) \leq (q, 1)$ elde edilir.

Böylece $ab \leq q$ veya $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ bulunur ki bu durum varsayımımız ile çelişir. O halde q , L_1 in bir 2-yutan elemanıdır.

(3) $\Rightarrow$ (1) q nun L_1 in bir 2-yutan elemanı olduğunu varsayalım. $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in L$ için $(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2) \leq (q, 1)$ olsun. Buradan $a_1b_1c_1 \leq q$ olur. Bu da $a_1b_1 \leq q$ veya $b_1c_1 \leq q$ veya $a_1c_1 \leq q$ nin sağlanmasını gerektirir. Böylece $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \leq (q, 1)$ veya $(b_1, b_2)(c_1, c_2) \leq (q, 1)$ veya $(a_1, a_2)(c_1, c_2) \leq (q, 1)$ bulunur. Dolayısıyla $(q, 1)$, L nin bir 2-yutan elemanı, dolayısıyla L nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır. $\square$

Teorem 4.2.2 L_1 ve L_2 iki çarpımsal latis ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. q_1, L_1 in sıfırdan farklı bir has elemanı, q_2 de L_2 nin bir sıfırdan farklı elemanı olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

(1) (q_1, q_2) , L nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır.

(2) $q_2 = 1$ ve q_1, L_1 nin bir 2-yutan elemanıdır veya q_1, q_2 elemanları sırasıyla L_1, L_2 , nin asal elemanlarıdır.

(3) (q_1, q_2) , L nin bir 2-yutan elemanıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) (q_1, q_2) , L nin bir zayıf 2-yutan elemanı olsun. Eğer $q_2 = 1$ ise Theorem 4.2.1 den q_1, L_1 in bir 2-yutan elemanıdır. Şu halde $q_2 \neq 1$ varsayalım. $a, b \in L_2$ için $ab \leq q_2$ olsun. Bu takdirde $(0, 0) \neq (q_1, 1)(1, a)(1, b) = (q_1, ab) \leq (q_1, q_2)$. Burada q_1 bir has eleman olduğundan Böylelikle $(q_1, a) = (q_1, 1)(1, a) \leq (q_1, q_2)$ veya $(q_1, b) = (q_1, 1)(1, b) \leq (q_1, q_2)$ sağlanır. Yani $a \leq q_2$ veya $b \leq q_2$ bulunur ki, bu da q_2 nin L_2 . de bir asal eleman olduğunu gösterir. Benzer şekilde q_1 in L_1 .de asal eleman olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $q_2 = 1$ ve q_1, L_1 in zayıf 2-yutan elemanı ise Theorem 4.2.1 gereğince (q_1, q_2) , L nin bir 2-yutan elemanıdır. Şimdi q_1 ve q_2 nin sırasıyla L_1 ve L_2 nin asal elemanları olduğunu varsayalım. $(a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2) \leq (q_1, q_2)$ olacak şekilde L nin $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ elemanlarını alalım. Buradan $a_1b_1c_1 \leq q_1$ ve $a_2b_2c_2 \leq q_2$ dır. O halde

$a_1 \leq q_1$ veya $b_1 \leq q_1$ veya $c_1 \leq q_1$ den en az biri sağlanır ve $a_2 \leq q_2$ veya $b_2 \leq q_2$ veya $c_2 \leq q_2$ den de en az biri sağlanır. Genelliği kaybetmeden $a_1 \leq q_1$ ve $b_2 \leq q_2$ varsayalım. Şu halde $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \leq (q_1, q_2)$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) Açıktır. $\square$

Teorem 4.2.3 L_1 ve L_2 iki çarpımsal latis ve $L = L_1 \times L_2$ olsun. q_1, L_1 in bir sıfırdan farklı has elemanı ve q_2, L_2 nin bir elemanı olsun Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

(1) $(q_1, q_2), L$ nin bir 2-yutan eleman olmayan zayıf 2-yutan elemanıdır.

(2) q_1, L_1 nin bir asal eleman olmayan zayıf asal elemanıdır ve $q_2 = 0, L_2$ nin bir asal elemanıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) Kabul edelim ki (1) sağlansın ve $q_2 \neq 0$ varsayalım. Bu takdirde Teorem 4.2.2 gereğince $(q_1, q_2), L$ nin bir 2-yutan elemanı olarak bulunur ki bu durum (1) hipotezi ile çelişir. O halde $q_2 = 0$ dir.

$q_2 = 0$ in L_2 nin bir asal elemanı olduğunu göstereceğiz. Böylece L_2 nin bir bölge (domain) olduğunu göstermiş olacağız: $ab \leq q_2 = 0$ olacak şekilde $a, b \in L_2$ olsun. Buradan q_1 sıfırdan farklı has bir eleman olduğundan $(0,0) \neq (q_1, 1)(1, a)(1, b) = (q_1, ab) \leq (q_1, q_2)$ ve $(1, a)(1, b) \not\leq (q_1, q_2)$ sağlanır. Bu da $(q_1, a) = (q_1, 1)(1, a) \leq (q_1, q_2)$ veya $(q_1, b) = (q_1, 1)(1, b) \leq (q_1, q_2)$ olmasını gerektirir. Şu halde $a \leq q_2$ veya $b \leq q_2$ gerçekleşir. Yani $q_2 = 0$ asaldır.

Şimdi q_1 in L_1 de zayıf asal eleman olduğunu gösterelim. $a, b \in L_1$ için $0 \neq ab \leq q_1$ olsun. O halde $q_1 \neq 0$ olduğundan $(0,0) \neq (a, 1)(b, 1)(1,0) = (ab, 0) \leq (q_1, 0)$ dır. (1) hipotezimiz gereğince $(q_1, q_2) = (q_1, 0)$, L bir zayıf 2-yutan elemanı ve $(a, 1)(b, 1) = (ab, 1) \not\leq (q_1, 0)$ olduğundan $(a, 1)(1,0) = (a, 0) \leq (q_1, 0)$ veya $(b, 1)(1,0) = (b, 0) \leq (q_1, 0)$ gerçekleşir. Böylece $a \leq q_1$ veya $b \leq q_1$ bulunur. Böylece q_1 in L_1 de bir zayıf asal eleman olduğu ispatlanmış olur.

Son olarak q_1 in L_1 de asal eleman olamayacağını gösterelim. Eğer q_1 , L_1 in asal elemanı olsaydı $q_2 = 0$ in da asal olduğunu gösterdiğimizden Teorem 4.2.2 gereğince $(q_1, 0)$, L nin bir 2-yutan eleman elemanı olarak bulunur. Bu da (2) varsayımı ile çelişir. Sonuç olarak q_1 , L_1 in asal eleman olmayan bir zayıf asal elemandır.

(2)⇒(1) q_1 in L_1 de asal olmayan bir zayıf asal eleman ve $q_2 = 0$ in L_2 nin asal elemanı olduğunu varsayalım. $(q_1, 0)$ in L nin bir zayıf 2-yutan elemanı olduğunu göstereceğiz. $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in L$ için $(0,0) \neq (a_1, a_2)(b_1, b_2)(c_1, c_2) = (a_1b_1c_1, a_2b_2c_2) \leq (q_1, 0)$ olsun. Buradan $a_1b_1c_1 \leq q_1$ olur. q_1 , L_1 in zayıf asal elemanı olduğundan $a_1 \leq q_1$ veya $b_1 \leq q_1$ veya $c_1 \leq q_1$ sağlanır. Diğer taraftan, 0 , L_2 nin asal elemanı ve $a_2b_2c_2 \leq 0$ olduğundan $a_2 = 0$ veya $b_2 = 0$ veya $c_2 = 0$ sağlanır. Genelliği kaybetmeden $a_1 \leq q_1$ ve $b_2 = 0$ kabul edelim. O halde $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, 0) \leq (q_1, 0)$ bulunur Böylelikle $(q_1, 0)$ in bir zayıf 2-yutan eleman olduğu gösterilmiş olur. Şimdi $(q_1, 0)$ in L nin bir 2-yutan eleman olmadığını göstereceğiz: q_1 , L_1 in asal olmayan bir zayıf asal elemanı olduğundan $ab = 0$ iken $a \not\leq q_1$ ve $b \not\leq q_1$ yı gerçekleyen $a, b \in L_1$ elemanları vardır. Böylece $(a, 1)(b, 1)(1, 0) = (0, 0)$ iken $(a, 1)(b, 1) = (ab, 1) \not\leq (q_1, 0)$, $(a, 1)(1, 0) = (a, 0) \not\leq (q_1, 0)$ ve $(b, 1)(1, 0) = (b, 0) \not\leq (q_1, 0)$ aynı anda sağlandığından $(q_1, 0)$, L nin bir 2-yutan elemanı değildir. $\square$

Teorem 4.2.4 L_1 , L_2 ve L_3 çarpımsal latisler ve $L = L_1 \times L_2 \times L_3$ olsun. q , L nin sıfırdan farklı her zayıf 2-yutan elemanı bir 2-yutan elemandır.

İspat $(0,0,0) \neq q = (q_1, q_2, q_3)$, L nin bir zayıf 2-yutan elemanı olsun. $(q_1, 1, 1)(1, q_2, 1)(1, 1, q_3) = (q_1, q_2, q_3)$ bir zayıf 2-yutan eleman olduğundan $(q_1, q_2, 1) \leq q$ veya $(q_1, 1, q_3) \leq q$ veya $(1, q_2, q_3) \leq q$ dır. Böylece $q_3 = 1$ veya $q_2 = 1$ veya $q_1 = 1$ bulunur. Dolayısıyla $q = (q_1, q_2, 1)$ veya $q = (q_1, 1, q_3)$ veya $q = (1, q_2, q_3)$. elde edilir. Sonuç olarak $q^3 \neq 0$ olduğundan Theorem 4.1.12 uyarınca, q , L nin bir 2-yutan elemanıdır. $\square$

Teorem 4.2.5 L_1, L_2 ve L_3 birer çarpımsal latıs ve $L = L_1 \times L_2 \times L_3$ olsun. q_1, L_1 in bir has elemanı ve q_2, q_3 sırasıyla L_2, L_3 ün elemanları olmak üzere $(0,0,0) \neq q = (q_1, q_2, q_3) \in L$ ise aşağıdaki durumlar denktir:

(1) q, L nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır.

(2) q, L nin bir 2-yutan elemanıdır.

(3) $q = (q_1, 1, 1)$ ve q_1, L_1 nin bir 2-yutan elemanıdır veya $q = (q_1, q_2, 1)$ ve q_1, q_2 , sırasıyla L_1 ve L_2 nin asal elemanlarıdır veya $q = (q_1, 1, q_3)$ ve q_1, q_3 , sırasıyla L_1 ve L_3 nin asal elemanlarıdır.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) q sıfırdan farklı bir zayıf 2-yutan eleman olsun. O halde Teorem 4.2.4 gereğince q bir 2-yutan elemandır.

(2) $\Rightarrow$ (3) q, L nin bir 2-yutan elemanı olduğundan q_1 in L_1 de bir 2-yutan eleman olmak zorunda olduğu açıktır. Ayrıca $(q_1, 1, 1)(1, q_2, 1)(1, 1, q_3) = q$ olduğundan $(q_1, 1, 1)(1, q_2, 1) = (q_1, q_2, 1) \leq q$ veya $(q_1, 1, 1)(1, 1, q_3) = (q_1, 1, q_3) \leq q$ veya $(1, q_2, 1)(1, 1, q_3) = (1, q_2, q_3) \leq q$ sağlanır. q_1, L_1 in bir has elemanı olduğundan $q_2 = 1$ veya $q_3 = 1$ sağlanır.

I. Durum: $q_2 = 1$ ve $q_3 = 1$ aynı anda sağlanıyorsa (3) deki ilk durum gerçekleşmiş olur.

II Durum: $q_2 \neq 1$ ve $q_3 = 1$ varsayalım. q_1 ve q_2 nin sırasıyla L_1 ve L_2 latıslerinde asal eleman olduklarını gösterelim. $ab \leq q_1$ ve $cd \leq q_2$ olacak şekilde $a, b \in L_1$ ve $c, d \in L_2$ alalım. Bu takdirde $(0,0,0) \neq (a, 1, 1)(1, cd, 1)(b, 1, 1) = (ab, cd, 1) \leq q$ olur. Burada $(a, 1, 1)(b, 1, 1) = (ab, 1, 1) \not\leq q$ olduğundan $(a, 1, 1)(1, cd, 1) = (a, cd, 1) \leq q$ veya $(1, cd, 1)(b, 1, 1) = (b, cd, 1) \leq q$ dır. Yani $a \leq q_1$ veya $b \leq q_1$ elde edilir. Böylece q_1 in L_1 de bir asal eleman olduğu gösterilmiş olur. Benzer şekilde q_2 nin L_2 de asal eleman olduğu kolaylıkla görülür.

III. Durum: $q_2 = 1$ ve $q_3 \neq 1$ ise II. Durumdakine benzer yol izlenerek q_1 ve q_3 ün sırasıyla L_1 ve L_3 de asal elemanlar olduğu kolaylıkla elde edilir.

(3)⇒(1) q_1, L_1 nin bir 2-yutan elemanı olmak üzere $q = (q_1, 1, 1)$ olsun. Buradan q nun bir 2-yutan eleman olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla q, L nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır.

Şimdi q_1, q_2 , sırasıyla L_1 ve L_2 nin asal elemanları olmak üzere $q = (q_1, q_2, 1)$ varsayalım. $(a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3)(c_1, c_2, c_3) \leq q$ olacak şekilde $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) \in L$ alalım. Bu takdirde q_1 ve q_2 asal elemanlar olduğundan $a_i \leq q_i$ ve $b_j \leq q_j$ ve $c_k \leq q_k$ bağıntıları en az bir $i = 1, 2, j = 1, 2$ ve $k = 1, 2$ için doğrudur. Tüm durumlarda $(a_1 b_1, a_2 b_2, 1) \leq q$ veya $(a_1 c_1, a_2 c_2, 1) \leq q$ veya $(b_1 c_1, b_2 c_2, 1) \leq q$ olur ki, bu da q nun bir 2-yutan eleman olduğunu gösterir.

Eğer q_1 ve q_3, L_1 ve L_3 de asal elemanlar olmak üzere $q = (q_1, 1, q_3)$ ise benzer şekilde q bir 2-yutan eleman olarak bulunur. Sonuç olarak q, L nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır.

□

Teorem 4.2.6 L_1, L_2 ve L_3 birer C -latis ve $L = L_1 \times L_2 \times L_3$ olsun. L nin her has elemanının zayıf 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul L_1, L_2 ve L_3 ün birer cisim olmasıdır.

İspat L_1, L_2 ve L_3 birer cisim olsun. O zaman L latisinin has elemanları $(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ olup Teorem 4.2.5 gereğince bu elemanların her biri birer zayıf 2-yutan elemandır.

Tersine L nin her has elemanının zayıf 2-yutan eleman olduğunu ve L_1 in bir cisim olmadığını varsayalım. O halde sıfırdan farklı bir has $x \in L_1$ elemanı vardır. Buradan $(x, 0, 0), L$ nin bir zayıf 2-yutan elemanıdır. $0 \neq a \leq x$ olacak şekilde bir $a \in L_*$ alalım. Böylece $(0, 0, 0) \neq (a, 1, 1)(1, 0, 1)(1, 1, 0) = (a, 0, 0) \leq (x, 0, 0)$ olması gereğince $(a, 1, 1)(1, 0, 1) = (a, 0, 1) \leq (x, 0, 0)$ veya $(a, 1, 1)(1, 1, 0) = (a, 1, 0) \leq (x, 0, 0)$ veya $(1, 0, 1)(1, 1, 0) = (1, 0, 0) \leq (x, 0, 0)$ çelişkisine varılır. Sonuç olarak L_1 bir cisimdir. Benzer şekilde L_2 ve L_3 de birer cisim olarak elde edilir. □

4.3. Bazı Özel Latislerde 2-Yutan ve Zayıf 2-Yutan Elemanlar

Bu bölümde, her has elemanı bir zayıf 2-yutan eleman olan supremum esas olarak üretilmiş C -latisler ile her sıfırdan farklı her elemanı 2-yutan eleman olan supremum esas olarak üretilmiş C -latisleri karakterize edeceğiz. Daha sonra esas eleman bölgeleri için 2-yutan elemanlar cinsinden yeni bir karakterizasyon geliştireceğiz.

Teorem 4.3.1 L supremum esas olarak üretilen bir C -latis olsun. L nin sıfırdan farklı her has elemanı bir zayıf 2-yutan eleman ise $\text{Boy } L = 0$ dır. Başka bir deyişle, L latisinde asal ve maksimal elemanlar çakışır.

İspat p ve m iki asal eleman ve $p < m$ olsun. Bu takdirde $x \not\leq p$ olacak şekilde bir $x \leq m$ supremum esas eleman vardır. Burada $x \not\leq p$ olduğundan, x sıfırdan farklı ve nilpotent olmayan bir elemandır. Çünkü x nilpotent olsaydı, bir n pozitif tamsayısı için $x^n = 0 < p$ olup $x \leq p$ çelişmesine varılırdı. Diğer taraftan $0 \neq x^3 \leq x^4$ ve x^4 bir sıfırdan farklı zayıf 2-yutan eleman olduğundan $x^2 \leq x^4$ elde edilir. x^2 nin bir supremum esas eleman olmasından $1 = x^2 \vee (0 : x^2)$ özdeşliği sağlanır. Burada $(0 : x^2) \leq p$ olduğunu gösterelim: $(0 : x^2) \not\leq p$ varsayalım. Bu takdirde bir $y \leq (0 : x^2)$ için $y \not\leq p$ olacak şekilde bir $y \in L_*$ vardır. Buradan $yx^2 = 0 \leq p$ olup $x \leq p$ çelişmesine varılır. Böylece $(0 : x^2) \leq p \leq m$ dir. Ayrıca $x \leq m$ olduğundan $1 = x^2 \vee (0 : x^2) \leq m$ çelişmesine varılır. O halde $\text{Boy } L = 0$ dir. $\square$

Yardımcı Teorem 4.3.2 (Lemma 6, (Anderson ve Jayaram, 1995))

Her tamlanabilir eleman bir kompakt elemandır.

İspat $a \in L$ bir tamlanabilir eleman olsun. $a \leq \bigvee x$ varsayalım. Buradan $1 = a \vee a' \leq \bigvee x \vee a'$ olacak şekilde $a' \in L$ vardır. 1 kompakt olduğundan $a \vee a' = 1 \leq (a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \vee a'$ olacak şekilde $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ mevcuttur. O halde $a = a1 = a((a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n) \vee a') = a(a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \vee a') = a(\bigvee_{i=1}^n a_i) \leq \bigvee_{i=1}^n a_i$ olduğundan a nın kompakt olduğu görülür. $\square$

Yardımcı Teorem 4.3.3 (Lemma 9, (Anderson ve Jayaram, 1995))

Bir regüler latisin her elemanı idempotenttir.

İspat L bir regüler latis ve $a \in L$ olsun. L kompakt olarak üretilmiş olduğundan a_α tamlanabilir elemanlar olmak üzere $a = \bigvee_\alpha a_\alpha$ yazılabilir. Burada her α için $aa_\alpha = a$ olduğundan $a^2 = a(\bigvee_\alpha a_\alpha) = \bigvee_\alpha aa_\alpha = \bigvee_\alpha a_\alpha = a$ elde edilir. $\square$

Yardımcı Teorem 4.3.4 (Lemma 2, (Jayaram ve Johnson, 1995))

L bir C -latis olsun. e kompakt ve idempotent ise esas elemandır.

Aşağıdaki teoremler, regüler latisleri doğru anlamak bakımından önemlidir:

Teorem 4.3.5 (Theorem 3, (Anderson ve Jayaram, 1995)) Bir r -latis L nin regüler olması için gerek ve yeter koşul her idempotent elemanın esas eleman olmasıdır.

Teorem 4.3.6 (Theorem 4, (Anderson ve Jayaram, 1995)) L bir r -latis olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

- (1) L bir regüler latistir.
- (2) L nin her elemanı idempotenttir.
- (3) Her $a, b \in L$ için $a \wedge b = ab$ dır.
- (4) Her $a \in L$ için $a = axa$ yı gerçekleyen bir $x \in L$ vardır.
- (5) Her $a \in L$ için $a = \sqrt{a}$ dır.

Not 4.3.7 Yardımcı Teorem 4.3.2 gereğince, her tamlanabilir eleman kompakt ve Yardımcı Teorem 4.3.3 ün ispatında görüldüğü üzere bir C -latiste tamlanabilir her eleman idempotenttir. Şu halde Yardımcı Teorem 4.3.4 gereğince L nin her kompakt ve

idempotent elemanı esas eleman olduğundan, L nin her tamlanabilir elemanı idempotent ve esas elemandır. Tersine, L nin idempotent ve esas elemanı bir tamlanabilir elemandır. Böylece Teorem 4.3.5 ve Teorem 4.3.6, L yi r -latis kabul etmek yerine sadece C -latis olduğu durumda da geçerlidir. Bu açıklama ışığında aşağıdaki iki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.8 L bir C -latis olsun. L nin regüler olması için gerek ve yeter koşul her idempotent elemanın esas eleman olmasıdır.

Teorem 4.3.9 L bir C -latis ise aşağıdaki durumlar denktir:

- (1) L bir regüler latistir.
- (2) L nin her elemanı idempotenttir.
- (3) Her $a, b \in L$ için $a \wedge b = ab$ dır.
- (4) Her $a \in L$ için $a = axa$ yı gerçekleyen bir $x \in L$ vardır.
- (5) Her $a \in L$ için $a = \sqrt{a}$ dır. (a radikal elemandır.)

Yardımcı Teorem 4.3.10 (Theorem 5, (Anderson ve Jayaram, 1995)) Bir C -latis L nin regüler olması için gerek ve yeter koşul L nin her asal elemanı bir maksimal eleman olan bir indirgenmiş latis, başka bir deyişle $\text{Boy } L = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.3.11 L bir supremum esas olarak üretilmiş sıfır boyutlu, tam olarak iki farklı maksimal eleman içeren ve $\sqrt{0} \neq 0$, $(\sqrt{0})^2 = 0$ ve her sıfırdan farklı eleman $x \leq \sqrt{0}$ için $\sqrt{0} = x$ özdeşliklerini sağlayan bir C -latis olsun. Bu takdirde L nin sıfırdan farklı her has elemanı bir 2-yutan elemandır.

İspat m_1 ve m_2 , L nin iki farklı maksimal elemanı olsun. $\sqrt{0} = m_1 m_2$ ve $(\sqrt{0})^2 = 0$ eşitliklerinden $m_1^2 m_2^2 = 0$ dır. Dolayısıyla m_1^2 ve m_2^2 elemanları tamlanabilir

elemanlardır. $\sqrt{0} \neq 0$ olması gereğince, $m_1^2 \neq m_1$ veya $m_2^2 \neq m_2$ sağlanır. Genelliği kaybetmeden, $m_1^2 \neq m_1$ varsayalım. $m_2^2 = m_2$ olduğunu gösterelim. $m_2^2 < m_2$ olsun. Buradan $b \not\leq m_2^2$ ve $b \leq m_2$ olacak şekilde bir b supremum esas elemanı vardır. $a \not\leq m_1^2$ olacak şekilde bir supremum esas eleman $a \leq m_1$ seçelim. Böylece $a^2 m_2^2 \leq m_1^2 m_2^2 = 0$ ve $b^2 m_1^2 \leq m_1^2 m_2^2 = 0$ olur. m_1^2 ve m_2^2 nin tamlanabilir elemanlar olduğundan Not 4.3.7 gereğince, bu elemanlar idempotent ve esas elemanlardır. e ve f , L latisinde idempotent ve esas elemanlar olmak üzere $m_1^2 = e$ ve $m_2^2 = f$ diyelim. Burada $a^2 f = 0 = b^2 e$ olduğundan hipotez gereğince, $af = be$ bulunur. Böylece

$$a = a.1 = a(e \vee f) = ae \vee af = ae \vee be = (a \vee b)e \leq e = m_1^2$$

çelişkisine varılır. Buradan $m_2^2 = m_2$ dir. Açıkça, m_1 , m_2 ve $\sqrt{0}$ elemanları 2-yutan elemanlardır. x bir maksimal olmayan sıfırdan farklı has eleman olsun. O halde $x \leq m_1$ veya $x \leq m_2$ veya $x \leq \sqrt{0}$ dir. O halde aşağıdaki üç hal söz konusudur:

I. Durum: $x \leq m_2$ ve $x \not\leq m_1$ olsun. Şu halde $m_1^2 \vee x = 1$, dolayısıyla $m_2 = m_2 m_1^2 \vee m_2 x \leq x$ bulunur. Bu da x in maksimal olmayan bir has eleman olması ile çelişir. Böylece $x \leq m_1$ ve $x \not\leq m_2$ veya $x \leq \sqrt{0}$ olmak zorundadır.

II. Durum: $x \leq m_1$ ve $x \not\leq m_2$ varsayalım. Şu halde $m_2 \vee x = 1$, dolayısıyla $m_1^2 = m_1^2 m_2 \vee m_1^2 x = m_1^2 x \leq x$ dir. $m_1^2 \leq x \leq m_1$ olduğundan x , m_1 -asalımsı olup Teorem 4.1.19 dan x bir 2-yutan elemandır.

III. Durum: $x \leq \sqrt{0}$ olsun. Hipotez gereğince, $x = \sqrt{0}$ olur ve buradan x bir 2-yutan eleman olarak bulunur.

Böylelikle her sıfırdan farklı has elemanın bir 2-yutan eleman olduğu gösterilmiş olur.

□

Teorem 4.3.12 L , iki veya üç farklı maksimal elemana sahip bir regüler latis olsun. Bu takdirde L nin her sıfırdan farklı has elemanı bir 2-yutan elemandır.

İspat L nin tam olarak iki farklı maksimal elemanı m_1 ve m_2 olduğunu kabul edelim. L bir regüler latis olduğundan Not 4.3.7 ve Teorem 4.3.9 gereğince, her sıfırdan farklı eleman $a \in L$ için $a = \sqrt{a} = m_1$ veya $a = \sqrt{a} = m_2$ bulunur. Buradan her sıfırdan farklı has eleman bir 2-yutan elemandır. Eğer L tam olarak üç maksimal elemene sahip ise her sıfırdan farklı has eleman ya maksimaldir ya da iki maksimal elemanın infimumuna eşittir. Böylece Önerme 4.1.7 gereğince her sıfırdan farklı has eleman bir 2-yutan elemandır. $\square$

$J(L) = \bigwedge \{m \in L \mid m, L \text{ nin bir maksimal elemanı}\}$ olarak tanımlayalım.

Teorem 4.3.13 L bir supremum esas olarak üretilmiş C -latis olsun. Bu takdirde her supremum esas eleman $a, b, c \leq J(L)$ için abc nin bir zayıf 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul $abc = 0$ olmasıdır.

İspat $a, b, c \in L$ supremum esas elemanları için $a, b, c \leq J(L)$ ve abc bir zayıf 2-yutan eleman olsun. $abc \neq 0$ varsayalım. Burada $0 \neq abc \leq abc$ ve abc is a zayıf 2-yutan eleman olduğundan $ab \leq abc$ veya $bc \leq abc$ veya $ac \leq abc$ sağlanır. Genelliği kaybetmeden, $ab \leq abc$ kabul edelim. ab bir supremum esas eleman olduğundan $1 = c \vee (0:ab)$ olur. $(0:ab) \neq 0$ olduğu açıktır. Böylece $c \leq J(L)$ ve $1 = c \vee (0:ab)$ olmasından $(0:ab) = 1$ elde edilir ki, bu da $ab = 0$ demektir. Dolayısıyla $abc = 0$ bulunur. Diğer durumlarda da $abc = 0$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir. Ters taraf ise açıktır. $\square$

Teorem 4.3.14 L bir supremum esas olarak üretilmiş, m maksimal elemanı ile birlikte sözde-yerel latis olsun. Bu takdirde L nin her has elemanının bir zayıf 2-yutan elemanı olması için gerek ve yeter koşul $m^3 = 0$ olmasıdır.

İspat L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan eleman ise Teorem 4.1.12 den $m^3 = 0$ dır. Tersine $m^3 = 0$ olsun. x , L nin bir sıfırdan farklı has elemanı ve $0 \neq abc \leq x$ olsun. $0 \neq abc$ ve $m^3 = 0$ olduğundan $a \not\leq m$ veya $b \not\leq m$ veya $c \not\leq m$ dır. L bir sözde-yerel

latis olduğundan $a = 1$ veya $b = 1$ veya $c = 1$ dir. Buradan $bc \leq q$ veya $ac \leq q$ veya $ab \leq q$ elde edilir. Yani x bir zayıf 2-yutan elemandır. $\square$

Teorem 4.3.15 L , tam olarak iki farklı m_1 ve m_2 maksimal elemanı olan, supremum esas olarak üretilen bir C -latis olsun. L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan eleman ise $m_1^2 m_2 = 0$ veya $m_1 m_2^2 = 0$ sağlanır.

İspat Teorem 4.3.13 gereğince $(J(L))^3 = 0$, dolayısıyla $m_1^3 m_2^3 = 0$ dir. Böylece m_1^3 ve m_2^3 elemanları tamlanabilir elemanlardır. Böylece $m_1^3 = e$ ve $m_2^3 = f$ dersek, e ve f , L nin idempotent ve esas elemanlarıdır. Şimdi $m_1^2 = m_1^3$ ve $m_2^2 = m_2^3$ olduğunu gösterelim. $m_1^2 \not\leq m_1^3 = e$ varsayalım. $ab \not\leq e$ olacak şekilde herhangi iki supremum esas eleman $a \leq m_1$ ve $b \leq m_1$ seçelim. Şu halde $(a \vee e)(b \vee e)f = abf$ sağlanır. Ayrıca $ab \not\leq e$ olduğundan $abf \neq 0$ olur. abf nin bir zayıf 2-yutan eleman olması gereğince $(a \vee e)(b \vee e) \leq abf$ veya $af \leq abf$ veya $bf \leq abf$ gerçekleşir.

I. Durum: $af \leq abf$ olsun. af bir supremum esas eleman olduğundan $1 = b \vee (0:af)$ elde edilir. $e \leq (0:af)$ ve $(0:af)$ nin L de bir sıfırdan farklı has eleman olduğunu görmek kolaydır. Böylece $(0:af) \leq m_1$ ve dolayısıyla $1 = b \vee (0:af) \leq m_1$ çelişkisine varılır. O halde $af \not\leq abf$ dir.

II. Durum: $bf \leq abf$ varsayalım. I. Duruma benzer şekilde $bf \not\leq abf$ olduğunu göstermek kolaydır.

III. Durum: Eğer $(a \vee e)(b \vee e) \leq abf$ ise $e \leq f$ çelişkisi bulunur. Şu halde $m_1^2 = m_1^3$ dir. Benzer yaklaşımla $m_2^2 = m_2^3$ gösterilebilir.

Şimdi $m_1 = m_1^2$ veya $m_2 = m_2^2$ olduğunu gösterelim. $m_1 \neq m_1^2 = e$ ve $m_2 \neq m_2^2 = f$ varsayalım. $a \not\leq e$ ve $b \not\leq f$ olacak şekilde iki supremum esas eleman $a \leq m_1$ ve $b \leq m_2$ seçelim. Buradan $(a \vee e)(b \vee f)(b \vee f) = ab^2 \vee af \vee b^2e \leq m_1 \wedge f = m_1 f$ sağlanır. $af \neq 0$ olmasından $(a \vee e)(b \vee f)(b \vee f) \neq 0$ dir. $m_1 f$ nin bir zayıf 2-yutan eleman olmasından ise $(a \vee e)(b \vee f) \leq m_1 f$ veya $(b \vee f)(b \vee f) \leq m_1 f$ sonucuna varılır. Eğer $(a \vee e)(b \vee f) \leq m_1 f$ ise $be \leq m_1 f$ dir. Dolayısıyla $be \leq m_1 f e = 0$ olup

$b \leq (0:e) = f$ çelişkisi elde edilir. Eğer $(b \vee f)(b \vee f) \leq m_1 f$ ise $f \leq m_1 f \leq m_1$ olup, bu durum yine bir çelişkidir. Böylece $m_1 = m_1^2$ veya $m_2 = m_2^2$ sağlanır. Sonuç olarak $m_1^2 m_2 = 0$ veya $m_1 m_2^2 = 0$ bulunur. $\square$

Her $a, b \in L$ için $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ olarak tanımlayalım.

Teorem 4.3.16 L tam olarak iki farklı m_1 ve m_2 maksimal elemanlarına sahip bir supremum esas olarak üretilen C -latis olsun. $m_1^2 m_2 = 0$ veya $m_1 m_2^2 = 0$ ise L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan elemandır.

İspat $m_1^2 m_2 = 0$ olsun. Maksimal elemanlar açıkça birer 2-yutan elemandır. x , L nin sıfırdan farklı has bir maksimal olmayan elemanı olsun. Eğer $x \in [m_1^2, m_1]$ ise Teorem 4.1.19 gereğince x bir 2-yutan elemandır. $x \notin [m_1^2, m_1]$ varsayalım. Eğer $x \not\leq m_1$ olsa $m_1^2 \vee x = 1$, dolayısıyla $m_2 = m_1^2 m_2 \vee x m_2 = x m_2 \leq x$ çelişkisine varılır. Böylelikle $x \leq m_1$ dir. Şayet $x \not\leq m_2$ olsa $m^2 \vee x = 1$ olup, dolayısıyla $m_1^2 = m_1^2 m_2 \vee x m_1^2 \leq x$ olması $x \notin [m_1^2, m_1]$ varsayımı ile çelişir. Böylece $x \leq m_1 \wedge m_2$ bulunur.

Şimdi $0 \neq abc \leq x$ olacak şekilde $a, b, c \in L$ alalım. $abc \leq m_1$ olduğundan $a \leq m_1$ veya $b \leq m_1$ veya $c \leq m_1$ olur. Genelliği kaybetmeden $a \leq m_1$ varsayalım. $0 \neq abc$ ve $m_1^2 m_2 = 0$ olduğundan $b \not\leq m_1$ ve $c \not\leq m_1$ sağlanır. Böylece $1 = m_1^2 \vee bc$, dolayısıyla $m_2 = m_1^2 m_2 \vee b c m_2 = b c m_2 \leq bc$ dır. Eğer $b = 1$ veya $c = 1$ ise $ab \leq x$ veya $ac \leq x$ bulunur. Eğer $b \neq 1$ ve $c \neq 1$ ise m_2 bir idempotent eleman olduğundan $m_2 = b = c = bc$ olur. Buradan $ab \leq x$ ve böylelikle x in bir zayıf 2-yutan eleman olduğu görülür. Benzer şekilde $m_2^2 m_1 = 0$ durumunda da L nin her has elemanının bir zayıf 2-yutan eleman olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\square$

Şimdi her has elemanı zayıf 2-yutan elemanlar olan supremum esas olarak üretilen C -latisler için aşağıdaki teorem yardımıyla bir karakterizasyon verebiliriz.

Teorem 4.3.17 L bir supremum esas olarak üretilen C -latis olsun. Bu takdirde L nin her has elemanının bir zayıf 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki durumlardan birinin sağlanmasıdır.

(1) L tek maksimal eleman m ye sahip sözde-yerel latis ve $m^3 = 0$ dir.

(2) L tam olarak m_1 ve m_2 iki farklı maksimal elemana sahiptir ve $m_1^2 m_2 = 0$ veya $m_1 m_2^2 = 0$ gerçekleşir.

(3) L tam olarak üç farklı maksimal elemana sahip olan bir regüler latistir.

İspat L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan eleman olsun. Şu halde Teorem 4.1.22 gereğince L nin en çok üç maksimal elemanı vardır. Eğer (L, m) bir sözde-yerel latis ise Teorem 4.3.14 ten, $m^3 = 0$ dir, yani (1) gerçekleşir.

L nin tam olarak iki farklı maksimal m_1 ve m_2 elemanı olsun. Şu halde Teorem 4.3.15 ten $m_1^2 m_2 = 0$ veya $m_1 m_2^2 = 0$ olup, (2) sağlanmış olur.

Şimdi L nin tam olarak üç farklı maksimal elemanı m_1, m_2 ve m_3 olduğunu varsayalım. Hipotez ve Teorem 4.3.1 gereğince, $\text{Boy } L = 0$ olur. O halde $\sqrt{0} = m_1 m_2 m_3$ dir. Şayet $0 \neq m_1 m_2 m_3$ ise $m_1 m_2 \leq m_1 m_2 m_3 \leq m_3$ veya $m_2 m_3 \leq m_1 m_2 m_3 \leq m_1$ veya $m_1 m_3 \leq m_1 m_2 m_3 \leq m_2$ çelişkisine varılır. Böylece $\sqrt{0} = 0$ dır. L bir indirgenmiş latis ve $\text{Boy } L = 0$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.3.10 gereğince L bir regüler latistir.

Tersine, (1), koşulu sağlanıyor ise Teorem 4.3.14 uyarınca L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan elemandır. Eğer L , (2) koşulunu sağlıyor ise Teorem 4.3.16 dan L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan elemandır. Eğer L , (3) koşulunu gerçekleştiriyor ise Teorem 4.3.12 den L nin her has elemanı bir zayıf 2-yutan elemandır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Örnek 4.3.18 n bir pozitif tamsayı olsun. $R = \mathbb{Z}_n$ nin her has idealinin zayıf 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul bir p asal tamsayısı için $n = p^3$ veya farklı asal

tamsayılar p, q olmak üzere $n = p^2q$ veya p_1, p_2, p_3 farklı pozitif asal tamsayılar olmak üzere $n = p_1p_2p_3$ olmasıdır.

Hatırlanacak olursa, R halkasının her a elemanı için $a = axa$ olacak şekilde bir $a \in R$ bulunuyorsa R ye regüler halka adı verilir. R nin bir Noetherian regüler halka olması için gerek ve yeter koşul ise R nin cisimlerin bir sonlu direkt toplamı olmasıdır. Ayrıca R nin regüler halka olması için gerek ve yeter koşul $L(R)$ nin bir regüler latis olmasıdır.

Teorem 4.3.19 L bir supremum esas olarak üretilen bir C -latis olsun. Bu takdirde L nin sıfırdan farklı her has elemanının bir 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşul $Boy L = 0$ olması ve aşağıdaki durumlardan birinin gerçekleşmesidir:

- (1) L , sıfırdan farklı m maksimal elemanı bir sözde-yerel latis olmak üzere her sıfırdan farklı $x \in L$ için $m^2 \leq x$ sağlanır.
- (2) L tam olarak iki farklı maksimal elemana sahip olmak üzere indirgenmiş bir latistir veya sıfırdan farklı her $x \leq \sqrt{0}$ elemanı için $(\sqrt{0})^2 = 0$ ve $\sqrt{0} = x$ şartını sağlar.
- (3) L , tam olarak üç farklı maksimal eleman içeren bir indirgenmiş latistir.

İspat $Boy L = 0$ olsun. L nin (1) koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu takdirde L nin her sıfırdan farklı has elemanı $x \in L$ bir m -asalımsı eleman ve $m^2 \leq x$ olur. Böylece Teorem 4.1.19 dan, x bir 2-yutan elemandır. $Boy L = 0$ ve L nin (2) koşulunu sağladığını varsayalım. Buradan Teorem 4.3.11 gereğince L nin her sıfırdan farklı has elemanı bir 2-yutan elemandır. Şayet $Boy L = 0$ ve (3) koşulu sağlanıyor ise Yardımcı Teorem 4.3.10 ve Teorem 4.3.12 gereğince L nin her sıfırdan farklı has elemanı bir 2-yutan elemandır.

Tersine, L nin her sıfırdan farklı has elemanının bir 2-yutan eleman olduğunu varsayalım. Şu halde Teorem 4.3.1 den, $Boy L = 0$ bulunur. Ayrıca Teorem 4.1.22 den en çok üç maksimal elemana sahiptir.

L nin bu üç farklı maksimal elemanına m_1 , m_2 ve m_3 diyelim. Bu takdirde $\sqrt{0} = m_1 m_2 m_3$ olur. Teorem 4.1.22 uyarınca, $\sqrt{0} = 0$, dolayısıyla L , tam olarak üç farklı maksimal eleman içeren bir indirgenmiş latistir.

Şimdi L nin tam olarak iki farklı maksimal elemanı m_1 ve m_2 olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\sqrt{0} = m_1 m_2$ dir. Eğer $\sqrt{0} = 0$ ise L is indirgenmiş latis olur. L nin indirgenmiş olmadığını kabul edelim. $(\sqrt{0})^2 = 0$ olduğunu göstereceğiz. $(\sqrt{0})^2 \neq 0$ varsayalım. O halde $xy \neq 0$ olacak şekilde $x, y \leq \sqrt{0}$ supremum esas elemanları vardır. Teorem 4.1.23 gereğince $m_1 m_2 \leq xy$ bulunur. $x \leq m_1 m_2 \leq xy$ ve x bir supremum esas eleman olduğundan $1 = y \vee (0: x)$ elde edilir. $x \neq 0$ ve $y \neq 1$ olmasından $(0: x)$, L nin bir sıfırdan farklı has elemanıdır. Fakat bu durum $y \leq m_1 \wedge m_2$ olması ile çelişir. Böylece $(\sqrt{0})^2 = 0$ dir. Yeniden Teorem 4.1.23 gereğince her bir sıfırdan farklı eleman $x \leq \sqrt{0}$ için $\sqrt{0} = x$ sağlanır.

Eğer (L, m) bir sözde-yerel latis ise Teorem 4.1.23 gereğince, L nin her sıfırdan farklı has elemanı $x \in L$ için $m^2 \leq x$ eşitsizliği sağlanır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

□

Örnek 4.3.20 (Example 3.5 (a), (Badawi, 2007)) $R = \mathbb{Z}_8$ ve p bir asal tamsayı, F bir cisim olmak üzere $D = \mathbb{Z}_{p^2}(+)F$ olsun. Bu durumda R nin sıfırdan farklı her has ideali bir 2-yutan idealdir ve D nin her sıfırdan farklı has ideali ise bir 2-yutan idealdir.

Örnek 4.3.21 (Example 3.5 (b), (Badawi, 2007)) $\mathbb{R}$ reel sayılar halkası ve X, Y bilinmeyenler olmak üzere $R = \mathbb{R}[(X, Y)]/(XY, X^2 - Y^2, X^3, Y^3)$ halkasının sıfırdan farklı her has ideali bir 2-yutan idealdir.

Yardımcı Teorem 4.3.22 (Theorem 2, (Jayaram ve E.W. Johnson, 1997))

L esas olarak üretilmiş bir latis olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir:

(1) L bir esas eleman latisidir.

(2) Her maksimal eleman kuvvetli kompakt ve zayıf infimum esas elemandır.

(3) Her maksimal eleman $m \in L$ için m kuvvetli kompakt ve basittir.

Teorem 4.3.23 L , cisim olmayan bir esas olarak üretilmiş bölge olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) L bir esas eleman bölgesidir.

(2) Her maksimal eleman kuvvetli kompakt ve q , sıfırdan farklı 2-yutan eleman ise q maksimal elemandır veya m_1, m_2, L nin maksimal elemanları olmak üzere $q = m_1 m_2$ biçimindedir.

(3) Her maksimal eleman kuvvetli kompakt ve q , sıfırdan farklı 2-yutan eleman ise q asal elemandır veya p_1, p_2, L nin asal elemanları olmak üzere $q = p_1 p_2$ biçimindedir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) L bir esas eleman bölgesi olsun. Bu takdirde Yardımcı Teorem 4.3.22 gereğince her maksimal eleman kuvvetli kompakttır. q, L nin maksimal olmayan sıfırdan farklı 2-yutan elemanı olsun. Bu durumda $q < m_2$ olmak üzere bir m_2 maksimal elemanı mevcuttur. m_2 bir esas eleman olduğundan, bir $1 \neq m_1 \in L$ için $q = m_1 m_2$ elde ederiz. Buradaki m_1 elemanının L de maksimal eleman olduğunu göstereceğiz. m_1 in maksimal eleman olmadığını varsayalım. Bu takdirde $m_1 < a$ yı sağlayan bir $1 \neq a \in L$ vardır. a bir esas eleman olduğundan, L nin bir b has elemanı için $m_1 = ab$ sağlanır. $ab m_2 \leq q$ olması gereğince $ab \leq q$ veya $am_2 \leq q$ veya $bm_2 \leq q$ bulunur. q maksimal olmadığından $ab \not\leq q$ olacağı açıktır. $am_2 \leq q$ varsayalım. Buradan $am_2 = ab m_2$ ve dolayısıyla $b \vee (0: am_2) = 1$ bulunur. Böylece $b = 1$ çelişkisine varılır. Benzer biçimde, $bm_2 \leq q$ ise $a = 1$ çelişkisi elde edilir. Böylece m_1, L de maksimal elemandır.

(2) $\Rightarrow$ (3) Aşıkardır.

(3) $\Rightarrow$ (1) m nin L de maksimal eleman ve (3) koşulunun gerçekleştiğini varsayalım. $m^2 \leq q \leq m$ olacak şekilde bir $q \in L$ alalım. Bu takdirde q bir m -asalımsı elemandır. O halde Teorem 4.1.19 uyarınca q bir 2-yutan elemandır. (3) hipotezinden $q = m$ veya $q = m^2$, yani L de $m^2 < a < m$ yi sağlayan hiçbir $a \in L$ elemanı yoktur. Bu durum m nin basit olduğunu söyler. Böylece (Theorem 2 Jayaram ve Johnson, 1997)) gereğince, L bir esas eleman bölgesidir. $\square$

Yardımcı Teorem 4.3.24 (Lemma 4, (Jayaram, 2002))

L tamamen sıralı latıs ve p idempotent olmayan asal eleman olsun. q , p -asalımsı eleman ve $q < p$ ise bir k pozitif tamsayısı için $q = p^k$ dır.

Teorem 4.3.25 L bir esas olarak üretilmiş tamamen sıralı bölge, q, L nin bir sıfırdan farklı has elemanı ve $p = \sqrt{q}$ olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) q bir 2-yutan elemandır.

(2) q bir p -asalımsı eleman ve $p^2 \leq q$ dır.

(3) $q = p$ veya $p = \sqrt{q}$, L nin bir asal elemanı olmak üzere $q = p^2$ dir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) q , L nin bir 2-yutan elemanı olsun. Bu durumda L nin tamamen sıralı olması ve Teorem 4.1.23 gereğince, $p = \sqrt{q}$ bir asal eleman ve $p^2 \leq q$ sağlanır. $x, y \in L_*$ için $xy \leq q$ ve $y \not\leq p$ olsun. $x \leq q$ olduğunu göstereceğiz. p asal ve $xy \leq p$ olduğundan $x \leq p$ bulunur. L tamamen sıralı bölge olduğundan $x \leq p < y$ ve L nin her kompakt elemanı bir esas elemandır. Böylece $x = yk$ olmak üzere bir $k \in L$ has elemanı vardır. Böylelikle $xy = y^2k \leq q$ dir. q nun bir 2-yutan eleman ve $y^2 \not\leq q$ olması gereğince $x = yk \leq q$ sonucuna varılır. Böylece q , L nin bir p -asalımsı elemanı olarak bulunmuş olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) q, L de $p^2 \leq q$ yi sağlayan bir p -asalımsı eleman olsun. $q \neq p$ varsayalım. Yardımcı Teorem 4.3.24 uyarınca gereğince $q = p^2$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (1) (3) koşulunun sağlandığını varsayalım. Eğer $q = p$ ise açıkça q bir 2-yutan elemandır. řu halde $p = \sqrt{q}$ bir asal eleman olmak üzere $q = p^2$ varsayalım. Bu takdirde q bir p -asalımsı elemandır. Teorem 4.1.19 gereğince q bir 2-yutan elemandır. $\square$

Ancak herhangi bir tamlık bölgesinde her asal P ideali için P^2 nin bir 2-yutan ideal olması gerekmez. Bu durumu aşağdaki örnek yardımıyla görebiliriz.

Örnek 4.3.26 $R = \mathbb{Z} + 6x\mathbb{Z}[x]$ ve $P = 6x\mathbb{Z}[x]$ düşünelim. Bu takdirde P, R nin bir asal idealidir. $6x^2 \in P \setminus P^2$ iken $(P^2 : 6x^2) = \{y \in R : 6x^2 y \in P^2\} = 6\mathbb{Z} + 6x\mathbb{Z}[x]$ asal ideal olmadığından Teorem 4.1.26 gereğince P^2, R nin bir asal ideali değildir.

Halbuki, aşağdaki örnekten görülebileceği gibi, bir R tamlık bölgesinde P asal ideali için P^2 nin bir 2-yutan ideal olması, P^2 nin bir P -asalımsı ideal olmasını gerektirmez.

Örnek 4.3.27 $R = \mathbb{Z} + 3x\mathbb{Z}[x]$ ve $P = 3x\mathbb{Z}[x]$ olsun. řu halde P, R nin bir asal idealidir. $3(3x^2) \in P^2$ olduğundan P^2 bir P -asalımsı ideal değildir. Öte yandan herhangi bir $d \in P \setminus P^2$ için $(I : d) = P$ veya $(I : d) = 3\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}[x]$, R nin bir asal idealidir. Böylelikle Teorem 4.1.26 gereğince P^2 bir 2-yutan idealdir.

Teorem 4.3.28 q bir 2-yutan eleman ve $q \neq \sqrt{q}$ olsun. Bu takdirde $a = \vee \{(q : x) \mid x \leq \sqrt{q}, x \not\leq q\}$ elemanı L de bir asal elemandır ve her $c \not\leq q$ elemanı için $(q : c) \leq a$ sağlanır.

İspat q bir 2-yutan eleman olsun. $\sqrt{q}$ elemanı Teorem 4.1.23 gereğince $\sqrt{q} = p$ asal veya p_1 ve p_2 , q üzerinde minimal iki asal olmak üzere $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ biçimindedir. O

halde Teorem 4.1.26 ve Teorem 4.1.27 gereğince her $x \leq \sqrt{q}$, $x \not\leq q$ için $(q: x)$ asaldır. $(q: x)$ elemanları Teorem 4.1.24 ve Teorem 4.1.25 gereğince tamamen sıralı olduklarından $a = \vee \{(q: x) \mid x \leq \sqrt{q}, x \not\leq q\}$ nın asal eleman olduğu elde edilir.

$d \leq (q: c)$ ve $c \not\leq q$ olsun. $d \leq a$ olduğunu göstereceğiz. $\sqrt{q} = p$ asal eleman olsun. $d \leq p$ ise Teorem 4.1.24 gereğince $d \leq a$ olur. Eğer $d \not\leq p$ ise $c \leq p$ dir. Dolayısıyla $d \leq (q: c) \leq a$ dir. Böylece her $c \not\leq q$ elemanı için $(q: c) \leq a$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi p_1 ve p_2 , q üzerinde minimal olan tek farklı asal elemanlar olmak üzere $\sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ varsayalım. $d \leq p_1$ veya $d \leq p_2$ durumunda Teorem 4.1.25 den $d \leq a$ olur. $d \not\leq p_1$ ve $d \not\leq p_2$ durumunda ise $c \leq \sqrt{q}$, dolayısıyla hipotez gereğince, $d \leq (q: c) \leq a$ elde edilir. Böylece her $c \not\leq q$ eleman için $(q: c) \leq a$ sağlanır. $\square$

Teorem 4.3.29 $p \in L$ bir asal eleman ve $q \leq p$ bir (zayıf) 2-yutan eleman olsun. Bu takdirde $q_p = \vee \{x \in L_* : xy \leq q \text{ olacak şekilde bir } y \not\leq p, y \in L_* \text{ vardır}\}$ elemanı L_p latisinde bir (zayıf) 2-yutan elemandır.

İspat. Açıktır. $\square$

Aşağıdaki teorem ile Prüfer bölgelerindeki tüm 2-yutan elemanların genel formunu belirleyebiliriz.

Teorem 4.3.30 L bir Prüfer bölge ve q , L nin bir sıfırdan farklı elemanı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

(1) q , L nin bir 2-yutan elemandır.

(2) q , L nin asal elemanıdır veya $q = p^2$, L bir p -asalımsı elemanıdır veya p_1, p_2 iki sıfırdan farklı asal eleman olmak üzere $q = p_1 \wedge p_2$ biçimindedir.

İspat (1) $\Rightarrow$ (2) q bir sıfırdan farklı 2-yutan eleman olsun. Şu halde Teorem 4.1.23 gereğince $\sqrt{q} = p$ asal veya p_1, p_2 elemanları q üzerinde iki sıfırdan farklı minimal asal eleman olmak üzere $q = p_1 \wedge p_2$ biçimindedir. $\sqrt{q} = p$ nin asal ve $q \neq p$ olduğunu varsayalım. Teorem 4.3.28 den $a = \vee \{(q:x) \mid x \leq \sqrt{q}, x \not\leq q\}$ bir asal eleman ve Teorem 4.1.24 den $p \leq a$ olarak bulunur. q_a, L_a da 2-yutan eleman ve L_a bir tamamen sıralı bölge olduğundan Teorem 4.3.29 gereğince q_a, L_a latisinde bir p_a -asalımsı elemandır. Bunun yanında Teorem 4.3.28 gereğince $q_a = q$ ve $p_a = p$ dir. Buradan q bir p -asalımsı elemandır. Ayrıca L nin regüler latis olması için gerek ve yeter koşul L nin indirgenmiş ve her asal elemanın maksimal eleman olmasıdır. (Theorem 5, (Anderson ve Jayaram,1995)) O halde Teorem 4.1.19 gereğince $q = p^2$ elde edilir.

Şimdi p_1, p_2 elemanları q üzerinde iki sıfırdan farklı minimal asal eleman olmak üzere $q = p_1 \wedge p_2$ varsayalım. $q \neq \sqrt{q}$ olsun. Teorem 4.1.25 ve Teorem 4.3.28 gereğince, $p_1 < a$ ve $p_2 < a$, ve L_a nin bir tamamen sıralı bölge olması gereğince $p_{1_a} \leq p_{2_a}$ veya $p_{2_a} \leq p_{1_a}$, dolayısıyla $p_1 \leq p_2$ veya $p_2 \leq p_1$ çelişkisine varılır. Böylece $q = \sqrt{q} = p_1 \wedge p_2$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (1) $q = p$ asal ise q açıkça bir 2-yutan elemandır. Eğer $q = p^2$ bir p -asalımsı eleman ise Teorem 4.1.19 dan q bir 2-yutan eleman olur. Eğer p_1, p_2 sıfırdan farklı asal elemanlar olmak üzere $q = p_1 \wedge p_2$ ise q açıkça bir 2-yutan elemandır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

BÖLÜM 5 - SONUÇLAR

Tezin bulgular ve tartışmalar bölümü, ikinci, üçüncü ve dördüncü bölümler olarak planlanmıştır.

İkinci bölümde, değişmeli ve birimli halkalardaki asalımsı ve 2-yutan ideal kavramları geliştirilerek 2-yutan asalımsı idealler ve zayıf 2-yutan asalımsı idealler tanımlanmıştır. Bu ideallerin temel özellikleri detaylarıyla çalışılmıştır. Bir takım değişmeli halkalarda 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı ideallerin genel formu karakterize edilmiştir. Her has ideali bir zayıf 2-yutan asalımsı ideal olan halkalar incelenmiştir. Bu bölüme ek olarak, değişmeli halkalarda ikili sıfır kavramı tanımlanarak zayıf asal ideallerin özellikleri için, üçlü sıfır kavramı tanımlanarak ise zayıf 2-yutan ideallerin özellikleri için farklı ispatlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, değişmeli halkalar üzerindeki çarpımsal modüllerin 2-yutan asalımsı alt modülü kavramı tanımlanarak, detaylarıyla çalışılmıştır. Bu ideallerin farklı halkalardaki genel formlarını belirlemek, bazı özel halkaları 2-yutan asalımsı ve zayıf 2-yutan asalımsı idealler cinsinden karakterize etmek, tezin bu bölümde amaçlanmıştır. Her has elemanı zayıf 2-yutan asalımsı olan halkalar, sözde yerel halkalar, esas ideal bölgeleri, Dedekind bölgeleri gibi bir takım özel halkalardaki 2-yutan asalımsı idealler çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde ise A. Badawi (Badawi, 2007) tarafından tanımlanan değişmeli halkalardaki 2-yutan ve zayıf 2-yutan ideal kavramları, modüler olmayan çarpımsal latislerde 2-yutan ve zayıf 2-yutan elemanlara geliştirilmiştir. Bu yapı aynı zamanda çarpımsal latislerde asal elemanların bir geliştirmesi olarak da elde edilmiştir. Esas eleman bölgeleri için 2-yutan elemanlar cinsinden bir karakterizasyon verilmiştir. 2-yutan idealler ve özellikleri, L latisi özel olarak $L(R)$ idealler latisi olarak alındığında çarpımsal latislerdeki 2-yutan elemanların özelliklerinin sonuçları olarak elde edildiği gösterilmiştir. Prüfer bölgelerinde, sözde yerel latislerde, tamamen sıralı bölgelerde 2-yutan elemanların genel formları tespit edilmiştir. Esas eleman bölgeleri, Dedekind bölgeleri ve hemen hemen Dedekind bölgeleri gibi birtakım özel çarpımsal latisler için 2-yutan elemanlar cinsinden yeni karakterizasyonlar elde edilmiştir. Bunların yanı sıra,

bir supremum esas olarak üretilmiş C -latisin her elemanın bir zayıf 2-yutan eleman olması için gerek ve yeter koşullar bulunmuştur.

Bu çalışmada ele alınan konunun devamı niteliğinde, 2-yutan eleman ve 2-yutan asalımsı ideal yapılarını da farklı yaklaşımlarla genelleştirmek mümkündür. Örneğin n -yutan asalımsı elemanlar veya ϕ -yutan asalımsı idealler tanımlanarak çalışılabilir.



KAYNAKLAR

(Alarcon ve Anderson, 1994) Alarcon, F., Anderson D.D. (1994) Commutative semirings and their lattices of ideals. Houston Journal of Mathematics, 20, 571-590.

(Alarcon ve ark., 1995) Alarcon, F., Anderson, D.D., Jayaram, C. (1995) Some results on abstract commutative ideal theory. Periodica Mathematica Hungarica, 30, 1-26.

(Ali, 2008) Ali, M. M. (2008) Idempotent and nilpotent submodules of multiplication modules. Communications in Algebra, 36, 4620-4642.

(Ali, 2009) Ali, M. M. (2009) Invertibility of Multiplication Modules III. New Zeland Journal of Mathematics, 39, 193-213.

(Ameri, 2003) Ameri, R. (2003) On the prime submodules of multiplication modules. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27, 1715-1724.

(Anderson, 1974) Anderson, D.D. (1974) Multiplicative Lattices. Ph.D. Thesis, Chicago University.

(Anderson ve Smith, 2003) Anderson D.D., Smith, E. (2003) Weakly prime ideals. Houston Journal of Mathematics., 29, 831-840.

(Anderson ve Fuller, 1992) Anderson F., Fuller, K. (1992) Rings and categories of modules. New-York: Springer-Verlag.

(Anderson, 1976) Anderson, D.D. (1976) Abstract commutative ideal theory without chain condition. Algebra Universalis, 6, 131-145.

(Anderson ve Jayaram, 1995) Anderson, D.D., Jayaram, C. (1995) Regular lattices. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 30, 379-388.

(Anderson ve Jayaram, 1996) Anderson, D.D., Jayaram, C. (1996) Principal element lattices. Czechoslovak Mathematical Journal, 46, 99-109.

(Anderson ve Johnson,1996) Anderson, D.D., Johnson, W. (1996) Dilworth's principal elements. Algebra Universalis, 36, 392-404.

- (Anderson ve Bataineh, 2008) Anderson, D.D., Bataineh, M. (2008) Generalizations of prime ideals. *Communications in Algebra*, 36, 686-696.
- (Anderson ve Badawi, 2011) Anderson, D.F., Badawi, A. (2011) On n -absorbing ideals of commutative rings. *Communications in Algebra*. 39, 1646-1672.
- (Atani ve Farzalipour, 2005) Atani, S.E. and Farzalipour, F. (2005) On weakly primary ideals. *Georgian Mathematical Journal*, 12, 423-429.
- (Atani ve ark., 2007) Atani, E. S., Çallıalp F., Tekir, U. (2007) A Short note on the primary submodules of multiplication modules. *International Journal of Algebra*, 8 (1), 381-384.
- (Atani ve Farzalipour, 2007) Atani E.S., Farzalipour, F. (2007) On weakly prime submodules. *Tamkang Journal of Mathematics*. 38 (3), 247-252.
- (Badawi ve Darani, 2011) Badawi, A., Darani, A.Y. On weakly 2-absorbing ideals of commutative rings. *Houston Journal of Mathematics*, 39, 441-452
- (Badawi, 2007) Badawi, A. (2007) On 2-absorbing ideals of commutative rings. *Bulletin of Australian Mathematical Society*, 75, 417-429
- (Badawi ve ark., 2015) Badawi, A., Tekir, U. and Yetkin, E., On 2-absorbing primary ideals in commutative rings. *Bulletin of Korean Mathematical Society*, 51 (4), 1163-1173.
- (Barnard, 1981) Barnard, A. (1981) Multiplication modules. *Journal of Algebra*, 71, 174-178.
- (Behboodi ve ark., 2004) Behboodi, M., Koohi, H., Weakly prime modules, *Vietnam Journal of Mathematics*, 32 (2) 2004, 185-195.
- (Bhatwadekar ve Sharma, 2005) Bhatwadekar, S. M., Sharma, P. K. (2005) Unique factorization and birth of almost primes. *Communications in Algebra*, 33, 43-49.
- (Çallıalp ve ark., 2012) Çallıalp, F., Jayaram C., Tekir, Ü. (2012) Weakly prime elements in multiplicative lattices. *Communications in Algebra*, 40, 2825-2840.

(Darani ve Puczyłowski, 2013) Darani, A.Y., Puczyłowski, E.R. (2013) On 2-absorbing commutative semigroups and their applications to rings. *Semigroup Forum*, 86, 83-91.

(Darani ve Soheilnia, 2011) Darani A.Y., Soheilnia, F. (2011) On 2-absorbing and weakly 2-absorbing submodules. *Thai Journal of Mathematics*. 9, 577-584

(Darani ve Soheilnia, 2012) Darani A.Y., Soheilnia, F. (2012) On n -absorbing submodules. *Mathematical Communications*, 17, 547-557.

(Dilworth, 1962) Dilworth, R.P. (1962) Abstract commutative ideal theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 12, 481-498.

(Ebrahimpour ve Nekooei, 2012) Ebrahimpour, E., Nekooei, M., R. (2012) On generalizations of prime ideals. *Communications in Algebra*, 40, 1268-279

(El-Bast ve Smith, 1988) El-Bast Z. A., Smith, P. F. (1988) Multiplication modules. *Communications in Algebra*, 16, 755-779.

(Faith, 1973) Faith, C. (1973) *Algebra: Rings, modules and categories I*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.

(Gilmer, 1992) Gilmer, R. (1992) *Multiplicative Ideal Theory*. Queen's Papers Pure and Applied Mathematics, 90, Queen's University, Kingston.

(Huckaba, 1988) Huckaba, H.J. (1988) *Commutative rings with zero-divisors*. Marcel Dekker, New York/Basil.

(Jayaram ve Johnson, 1995) Jayaram, C., Johnson, E.W. (1995) s -prime elements in multiplicative lattices. *Periodica Mathematica Hungarica*, 31, 201-208.

(Jayaram ve Johnson, 1997) Jayaram, C., Johnson, E.W. (1997) Strong compact elements in multiplicative lattices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 47 (122), 105-112.

(Jayaram, 2002) Jayaram, C. (2002) Primary elements in Prufer lattices. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 52 (127), 585-593.

(Johnson ve Sherette, 1986) Johnson, J.A., Sherette, G.R. (1986) Structural properties of a new class of CM-lattices. *Canadian Journal of Mathematics*, 38, 552-562.

(Khoramdel ve Hesari, 2011) Khoramdel M., Hesari, S.D.P. (2011) Some notes on Dedekind modules, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.*, 40, 627-634.

(McCasland ve Moore, 1991) McCasland, R. L., Moore, M. E. (1991) Radicals of submodules. *Communications in Algebra*, 19, 1327-1341.

(McCasland ve Moore, 1986) McCasland R. L., Moore, M. E. (1986) On radicals of submodules of finitely generated modules. *Canadian Mathematical Bulletin.*, 29, 37-39.

(Naoum ve Al-Alwan, 1996) Naoum, A. G., Al-Alwan, F. H. (1996) Dedekind modules. *Communications in Algebra*, 24 (2), 397-412.

(Payrovi ve Babaei, 2012a) Payrovi, S., Babaei, S. (2012) On the 2-absorbing ideals. *International Mathematical Forum*, 7, 265-271.

(Payrovi ve Babaei, 2012b) Payrovi, S., Babaei, S. (2012) On 2-absorbing submodules, *Algebra Colloquium*, 19, 913-920.

(Smith, 1988) Smith, P.F. (1988) Some remarks on multiplication modules. *Archiv Der Mathematik*, 50, 223-235.

(Smith, 1969) Smith, W. W. (1969) Projective ideals of finite type. *Canadian Journal of Mathematics*, 21, 1057-1061.

(Thakare ve Manjarekar, 1988) Thakare, N.K., Manjarekar, C.S., Maeda, S. (1988) Abstract spectral theory II, Minimal characters and minimal spectrums of multiplicative lattices. *Acta Scientiarum Mathematicarum*, (Szeged), 52,53-67.

(Ward and Dilworth, 1939) Ward, M., Dilworth, R.P. (1939) Residuated lattices, *Transactions of the American Mathematical Society*, 45, 335-354.

ÖZGEÇMİŞ

Ece YETKİN ÇELİKEL

Doğum Tarihi ve Yeri: 02.06.1987 Gaziantep

e-posta: yetkinece@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Lise: 2001-2004 Gaziantep Anadolu Lisesi

Lisans: 2004-2008 Mimar Sinan Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Böl.

Yüksek Lisans: 2008-2011 Gaziantep Üniversitesi

AKADEMİK DENEYİM

2015- ...	Araştırma Görevlisi	Gaziantep Üniversitesi
2012-2015	Araştırma Görevlisi	Marmara Üniversitesi
2011-2012	Öğretim Asistanı	İstanbul Bilgi Üniversitesi
2009-2011	Araştırma Görevlisi	Gaziantep Üniversitesi

Proje

2014-2015: Çarpımsal Latislerin 2-yutan Elemanları ve Değişmeli Halkaların 2-yutan Asalımsı Idealleri, Marmara Üniversitesi BAPKO.

YAYINLAR

Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan makaleler (SCI / SCI-Expanded)

- MOSTAFANASAB, H., YETKİN, E., TEKİR, Ü., DARANI, A. Y. (2016). On 2-absorbing Primary Submodules of Modules over Commutative Rings. Analele Univ. Ovidius din Constanta, Math. Series (In press).
- BADAWI, A., TEKİR, U. , YETKİN, E. (2015). On weakly 2-absorbing primary ideals of commutative rings. Journal of the Korean Mathematical Society, 52 (1) 97-111.
- JAYARAM, C., TEKİR, Ü., YETKİN, E. (2014). 2-Absorbing and Weakly 2-Absorbing Elements in Multiplicative Lattices. Communications in Algebra, 42, 6, 2338- 2353.
- BADAWI, A., TEKİR, Ü. , YETKİN, E. (2014). On 2-Absorbing Primary Ideals in Commutative Rings. Bulletin Korean Mathematical Society, 4. 51, 1163-1173.
- YETKİN, E., OLGUN, N. (2014). A New Type of Fuzzy Modules over Fuzzy Rings. The Scientific World Journal, 2014, 2014, 1-7.

Uluslararası diğer hakemli dergilerde yayınlanan makaleler

- ÇALLIALP, F., YETKİN, E., TEKİR, Ü, (2015) On 2-absorbing primary and weakly 2-absorbing primary elements in multiplicative lattices, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 34, 263-27.
- YETKİN, E. (2014). A Note on Direct Product of Fuzzy Modules over Fuzzy Rings. International Journal of Algebra, 3, 8, 129-134.
- YETKİN, E., OLGUN, N. (2011). Direct Product of Fuzzy Groups and Fuzzy Rings. International Mathematical Forum, 21, 6, 1005–1015.

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

- YETKİN CELİKEL E, CALIALP F, TEKİR, U (2015) 2-absorbing Primary Elements in Multiplicative Lattices, International Conference on Mathematics and Statistics, Sharjah, UAE.
- YETKİN, E., TEKİR, U, (2015) On Quasi n -absorbing Elements of Multiplicative Lattices, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2015), İstanbul Türkiye.
- YETKİN, E., BADAWEI, A., TEKİR, U. (2014). A Note on 2-absorbing Primary Ideals in Commutative Rings 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2014). Viyana, Avusturya.

YETKİN, E., MOSTAFANASAB, H., TEKİR, U. , DARANI, A. (2014). A Talk on 2-absorbing Primary Submodules of Multiplication Modules International Conference on Algebra and Number Theory. Samsun, Türkiye.

YETKİN, E., MOSTAFANASAB, H., TEKİR, U. , DARANI, A. Y. (2014). On 2-absorbing Primary Submodules of Modules over Commutative Rings The V Congress of the Mathematicians of Macedonia. Ohrid, Makedonya.

○YETKİN, E., JAYARAM, C, , TEKİR, Ü. (2013). On 2-absorbing Elements in Multiplicative Lattices The First International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences (IWBCMS). Elbasan, Arnavutluk.

○YETKİN, E., JAYARAM, C., TEKİR, Ü. (2013). A Study on 2-Absorbing Elements of C-lattices International Conference on Algebra in Honour of Patrick Smith and John Clark's 70th Birthdays. Balıkesir, Türkiye.

○YETKİN, E., KILIÇ, Z., TEKİR, Ü. (2012). On Almost Prime Elements in Lattice Modules International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA). Pristina, Kosova.

○YETKİN, E. (2012). A Note on Direct Product of Fuzzy Modules over Fuzzy Rings International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA). Pristina, Kosova.

- o YETKİN, E. (2011). On Direct Product of Fuzzy Modules over Fuzzy Rings International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA11). İstanbul, Türkiye.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

- o YETKİN, E. (2014). Oyun Teorisi ve Karar Verme Uygulamaları Biyoistatistik Sempozyumu: "Teorik ve Pratik Interaktif Tartışmalar". Gülhane Askeri Tıp Akademisi GATA, İstanbul, Türkiye.
- o YETKİN, E., Badawi, A., Tekir, Ü. (2014). Generalizations of Primary Ideals in Commutative Rings I. Kadın Matematikçiler Derneği Çalıştayı (TKMD). Kocaeli, Türkiye.
- o YETKİN, E., OLGUN, N. (2010). Bulanık Modüller Üzerine XXIII. Ulusal Matematik Sempozyumu (UMG), Erciyes Üniversitesi. Kayseri, Türkiye.

Katıldığım Diğer Çalıştaylar, Bilimsel Toplantılar

- o V. Workshop on Graph Theory and its Applications, 27 - 28 November 2015, İstanbul Matematiksel Bilimler Merkezi (IMBM), Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.
- o 4. Ankara Matematik Günleri (AMG), 4-5 Haziran 2009, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- o Cebir ve Topoloji Çalıştayı (Prof. Dr. Yusuf Ünlü Adına), 16-17 Haziran 2011, Çukurova Üniversitesi, Adana.
- o International Conference on Applied Analysis and Algebra (ICAAA12), 20-24 Haziran 2012, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul
- o Cemal Koç Cebir Seminer Günleri, 20 Nisan 2013, Doğu Üniversitesi, İstanbul.
- o Wiley Yazar Çalıştayı, Writing great papers in international journals, 14 Mayıs 2013, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- o Matematikte Yeni Proje Tasarımları Çalıştayı, 18 Haziran 2013, İstanbul Medeniyet Üniversitesi, İstanbul.
- o Marmara Bilim ve Kültür Günleri, 2013, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- o Felsefe ve Matematik Ortak Sempozyumu, 27-28 Şubat 2014, Yeditepe Üniversitesi, İstanbul.

- EndNote Kaynakça Programı Eğitimi, 13 Mayıs 2014, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Marmara Matematik Günleri (MMG2014), 29-30 Eylül 2014, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Tübitak Ardeb 1000 Projesi Başarı Hikayeleri Günü-I, 21 Ekim 2014, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Yazarlık Çalıştayı, Enago, 16 Ekim 2014, Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Marmara Bilim ve Kültür Günleri, 2014, Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Yabancı Dil

ÜDS (2009) 92,5

Sertifika

Eğitim Sertifikası, Marmara Üniversitesi Sürekli Eğitim Merkezi (MÜSEM), Genel İngilizce Dil Eğitim Programı, 2008, İstanbul.

Ödül / Burs

2011-2015: Yurt içi Doktora Burs Programı, TÜBİTAK

Üye Olunan Dernekler ve Meslek Kuruluşları

Türk Matematik Derneği (TMD), Kadın Matematikçiler Derneği (TKMD)

