

HEMEN HEMEN DEĞME METRİK
MANİFOLDLARDA FARKLI KONEKSİYONLAR

Azime ÇETİNKAYA

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Ocak – 2016

HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLARDA
FARKLI KONEKSİYONLAR

Azime ÇETİNKAYA

Dumlupınar Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman : Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

Ocak - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

AZİME ÇETİNKAYA'nın DOKTORA tezi olarak hazırladığı “ Hemen hemen değme metrik manifoldlarda farklı koneksiyonlar ” başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

14/01/2016

Üye: Prof. Dr. Cengizhan MURATHAN

Üye: Prof. Dr. Erhan ATA

Üye: Prof. Dr. Erdal ULUALAN

Üye: Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ

Danışman Üye: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında Akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %16 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Ahmet Yıldız

Azime Çetinkaya

İmza

İmza

HEMEN HEMEN DEĞME METRİK MANİFOLDLARDA FARKLI

KONEKSİYONLAR

Azime Çetinkaya

Matematik Anabilim Dalı, Doktora Tezi, 2016

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

ÖZET

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde temel kavramlar ve üzerinde çalışacağımız değme manifoldlardan söz edilmiştir.

İkinci bölümde genel anlamda yeni bir çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon tanımı yapılarak bu koneksiyonun bazı özel durumlara göre sınıflandırılması verilmiştir.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda yarı-simetrik metrik koneksiyonu ile verilen n -boyutlu Kenmotsu Manifoldlar için bazı eğrilik şartları incelenmiştir. İkinci kısımda ise Ricci soliton ve gradyant Ricci soliton kavramlarına değinilmiştir. İlk olarak çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon ile verilen 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlar için Ricci soliton ve gradyant Ricci soliton kavramları incelenmiştir. Daha sonra ise aynı kavramlar çeyrek-simetrik metrik koneksiyon ile verilmiş 3-boyutlu normal hemen hemen değme manifoldlar için irdelenmiştir.

Son bölüm ise tezimizin orijinal kısmını oluşturmakta olup, iki kısımdan meydana gelmektedir. İlk kısımda özel olarak tanımlanan çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon ile verilen 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldlar için ilk önce bazı eğrilik şartları incelenmiş daha sonra ise soliton kavramları ele alınmıştır. İkinci kısımda ise yine aynı koneksiyon ile verilen 3-boyutlu f -Kenmotsu manifoldlarda soliton kavramlarına değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çeyrek-Simetrik Metrik Koneksiyon, Çeyrek-simetrik Metrik Olmayan Koneksiyon, Gradyant Ricci soliton, 3-boyutlu f -Kenmotsu Manifoldlar, 3-boyutlu Normal Hemen Hemen Değme Manifoldlar, 3-boyutlu Quasi-Sasakian manifoldlar, 3-boyutlu Trans-Sasakian Manifoldlar, Ricci Soliton.

DIFFERENT CONNECTIONS ON ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS

Azime ÇETİNKAYA

Mathematic Department, Ph.D. Thesis, 2016

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

SUMMARY

This thesis consists of four chapters.

In the first chapter, basis notions and contact manifolds which we worked on later are mentioned.

In the second chapter, in general meaning a new quarter symmetric non metric connection is defined and is given classification of this connection with respect to some specific conditions.

Third chapter consists of two parts. In the first part, for n -dimensional Kenmotsu manifolds given with semi-symmetric metric connection, some curvature conditions are investigated. In the second part, Ricci soliton and gradient Ricci soliton notions are referred. Firstly, for 3-dimensional trans-Sasakian manifolds given with quarter symmetric non metric connection, Ricci soliton and gradient Ricci soliton notions are surveyed. Later same notions are studied for 3-dimensional normal almost contact metric manifolds given with quarter-symmetric metric connection.

Last chapter is original part of our thesis and consists of two parts. In the first part, some curvature conditions are investigated and soliton concepts are taken for 3-dimensional quasi-Sasakian manifolds given with special defined quarter-symmetric non-metric connection. In the second part, soliton notions are dealt for 3-dimensional f -Kenmotsu manifolds with same connection.

Keywords: Quarter-Symmetric Non-Metric Connection, Quarter-Symmetric metric connection, 3-dimensional quasi-Sasakian manifolds, 3-dimensional f Kenmotsu manifolds, 3-dimensional Trans-Sasakian manifolds, 3-dimensional normal almost manifolds, Ricci soliton, Gradient Ricci soliton.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken bana destekte bulunan, danışman hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet Yıldız ile engin bilgilerinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Cengizhan Murathan'a ve her türlü maddi, manevi desteği esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

Azime ÇETİNKAYA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Temel Kavramlar	1
1.2. Değme Manifoldlar.....	9
1.3. Ricci Soliton ve Gradyant Ricci Soliton.....	15
2. KONEKSİYONLAR.....	18
2.1. (2.9) ile Tanımlı Koneksiyonun Sınıflandırılması.....	26
3. FARKLI KONEKSİYONLARLA VERİLMİŞ MANİFOLDLAR İÇİN BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI VE RİCCİ SOLİTONLAR.....	29
3.1. (M, I) Koneksiyonu İle Verilen Kenmotsu Manifoldları İçin Bazı Eğrilik Şartları	29
3.2. Ricci Solitonlar	46
3.2.1. $(M, \varphi 1)$ çeyrek simetrik metrik koneksiyonu ile verilen 3-boyutlu trans-Sasakian Manifoldlar	47
3.2.2. $(M, \varphi 2)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldlar.....	59
4. ÇEYREK SİMETRİK METRİK OLMAYAN $(M, \varphi 3, f 1)$ KONEKSİYONU İLE VERİLEN MANİFOLDLAR.....	74
4.1. $(M, \varphi 3, f 1)$ Çeyrek-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonu İle Verilen 3-Boyutlu Quasi - Sasakian Manifoldlar.....	74

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
4.2. $(M, \varphi, f, 1)$ Çeyrek-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonu İle Verilen n - Boyutlu f –Kenmotsu Manifoldlar.....	122
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	136
ÖZGEÇMİŞ	

ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>Cizelge</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Hemen hemen değme metrik manifoldlar arasındaki ilişkinin incelenmesi	17
2.1. (2.9) ile tanımlı çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonun özel hallerinin incelenmesi	28
3.1. 3-boyutlu trans- Sasakian manifoldlar ile 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldlarda üzerinde koneksiyonlara göre Ricci soliton kavramı	72
3.2. (M, I) koneksiyonu ile verilen n-boyutlu Kenmotsu manifoldlar için bazı eğrilik şartları	73
4.1. (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu quasi -Sasakian manifoldlar için bazı eğrilik şartları.....	134
4.2. Verilen koneksiyon göre 3- boyutlu quasi -Sasakian manifoldlar ve 3-boyutlu f -Sasakian manifoldlar için Soliton.....	135

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
M	Manifold
g	Metrik tensör
$[,]$	Lie operatörü
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
$\bar{\nabla}$	Çeyrek-simetrik/Yarı-simetrik metrik/metrik olmayan koneksiyon
∇	Levi-Civita koneksiyon
$\bar{T}$	Torsiyon tensörü
R	Riemann eğrilik tensörü
$\bar{R}$	$\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörü
S	Ricci tensörü
$\bar{S}$	$\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre Ricci tensörü
τ	Skaler eğrilik
$\bar{\tau}$	$\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre skaler eğrilik
C	Weyl eğrilik tensörü
$\bar{C}$	$\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre Weyl eğrilik tensörü
H	Concircular eğrilik tensörü
$\bar{H}$	$\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre concircular eğrilik tensörü
$\check{C}$	quasi konformal eğrilik tensörü
$\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$	(1,1) tipinde anti simetrik tensör alanı
η, u	1-form
f_1	Diferensiyellenebilir fonksiyon

1.GİRİŞ

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlar ve manifoldlar verilecektir.

1.1. Temel Kavramlar

Tanım 1.1.1.: M bir manifold ve M nin vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü;

$$i) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \nabla_{(X+Y)}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$iii) \nabla_{fX}Y = f \nabla_X Y$$

$$iv) \nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde **bir afin koneksiyon** denir (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.2.: M , bir manifold ve M nin vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ olmak üzere

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme M üzerinde **Riemann metriği** veya **metrik tensör** denir.

i) g dönüşümü 2-lineerdir.

ii) g dönüşümü simetriktir.

iii) g dönüşümü pozitif tanımlıdır.

($\forall X \in \chi(M)$ için $g(X, X) \geq 0$, $g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$) (Kobayashi ve Nomizu, 1996).

Tanım 1.1.3.: Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan manifoldda **Riemann manifoldu** denir (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.4.: M bir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. M

üzerindeki konneksiyon ∇ olmak üzere

$$T: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (1.1.1)$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı **torsiyon tensörü** denir (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.5.: V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve $[\cdot, \cdot]: V \times V \rightarrow K$ dönüşümü de

i) 2-lineer

ii) Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$)

iii) $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

olarak verilsin. $[\cdot, \cdot]$ dönüşümüne, V üstünde **bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü)** veya **Lie çarpımı** denir. $[X, Y]$ vektör alanı X yönünde Y nin $L_X Y$ Lie türevi olarak da adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Önerme 1.1.1.: M n-boyutlu bir C^∞ manifold ve M üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türev için, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve f, K cismi üzerinde bir fonksiyon olmak üzere

i) $L_X(Y \otimes Z) = (L_X Y) \otimes Z + Y \otimes (L_X Z)$

ii) $L_X f = X(f)$

iii) $L_X Y = [X, Y]$

iv) $L_X g(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$

özellikleri geçerlidir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 1.1.6.: M bir Riemann manifoldu ve M üzerinde afin konneksiyon ∇ olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

ii) $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

özellikleri sağlanıyorsa ∇ ya **Riemann koneksiyonu (Levi Civita koneksiyonu)** denir (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.7.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde tanımlanan Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y])$$

ile tanımlanan ifadeye Kozsul formülü adı verilir (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.8.: M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun. M üzerindeki koneksiyon ∇ olmak üzere

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

dönüşümü için $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z) &= R(X, Y)Z \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]} Z \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

biçiminde tanımlı (1,3) tipli tensör alanına **Riemann eğrilik tensörü** denir (O' Neill, 1983).

Önerme 1.1.2.: Bir Riemann manifoldunun R eğriliği aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

i) $\chi(M) \times \chi(M)$ üzerinde bilineerdir. Yani

$$R(fX + gY, Z) = fR(X, Z) + gR(Y, Z)$$

$$R(X, fY + gZ) = fR(X, Y) + gR(X, Z)$$

ii) $R(X, Y): \chi(M) \rightarrow \chi(M)$ eğrilik operatörü lineerdir (O' Neill, 1983).

Tanım 1.1.9.: M bir Riemann manifoldu ve M üzerindeki vektör alanları uzayı $\chi(M)$ olsun. ∇ , M üstünde Riemann koneksiyon olmak üzere

$$K: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y, Z, W) \rightarrow K(X, Y, Z, W) = g(X, R(Z, W)Y)$$

biçiminde tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** denir (O' Neill, 1996).

Önerme 1.1.3.: Riemann eğrilik tensörü ve Riemann-Christoffel eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar (O' Neill, 1996).

$$i) K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W) = -K(Y, X, W, Z)$$

$$ii) K(X, Y, Z, W) = -K(Z, W, X, Y)$$

$$iii) R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

$$iv) K(X, Y, Z, W) + K(X, Z, W, Y) + K(X, W, Y, Z) = 0$$

$$v) (\nabla_X R)(Y, Z)W + (\nabla_Y R)(Z, X)W + (\nabla_Z R)(X, Y)W = 0$$

$$vi) R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

Tanım 1.1.10.: M Riemann manifoldunda Riemann eğrilik tensörü R ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bir ortonormal baz olsun.

$$S: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

biçiminde tanımlı $(0,2)$ – tipli tensor alanına M üzerinde **Ricci tensör alanı** denir. Burada $S(X, Y) = S(Y, X)$ yani S simetrik bilineer formdur (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 1.1.11.: M bir Riemann manifoldu olsun. $T_p M$ tanjant uzayının iki boyutlu bir alt uzayı Π olmak üzere

$$K(V, W) = \frac{g(R(V, W)W, X)}{g(V, V)g(W, W) - g(V, W)^2}$$

ya Π nin kesitsel eğriliği denir ve $K(\Pi)$ ile gösterilir (O'Neill, 1996).

Tanım 1.1.12.: M , $n > 2$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı var ise yani M nin S Ricci tensörü, g metrik tensörünün bir katı ise M ye **bir Einstein manifoldu** adı verilir (Chen, 1973).

M üzerinde bir vektör alanı U olmak üzere, bir A 1-formunu $A(X) = g(X, U)$ biçiminde tanımlayalım. Eğer M nin Ricci tensörü, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y), \quad a, b \in C^\infty(M, \mathbb{R}) \quad (1.1.3)$$

koşulunu sağlıyorsa M ye bir **quasi-Einstein manifold** adı verilir (Chaki ve Maity, 2000). Eğer $b = 0$ ise M manifoldu bir **Einstein manifold** olur.

Tanım 1.1.13.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere;

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (1.1.4)$$

fonksiyonuna M nin **skaler eğrilik fonksiyonu** adı verilir (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 1.1.14.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer, M nin kesitsel eğrilik fonksiyonu sabit ise M ye **sabit eğrilikli uzay** denir ve $M(c)$ ile gösterilir (O'Neill, 1983).

Sonuç 1.1.1.: M n -boyutlu $c = \text{sabit eğrilikli}$ bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M nin eğrilik tensörü R olmak üzere $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için;

$$R(X, Y, Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\}$$

biçimindedir (O'Neill, 1983).

Sonuç 1.1.2.: M sabit eğrilikli bir uzay form olsun. Bu durumda, $n \geq 2$ olmak üzere eğer

$$c = 0 \text{ ise } M(c) = E^n \text{ Öklid uzayı}$$

$$c = \frac{1}{r^2} \text{ ise } M(c) = S^n(r) \text{ küresi}$$

$$c = -\frac{1}{r^2} \text{ ise } M(c) = H^n(r) \text{ hiperbolik uzay,}$$

dır (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.15.: M , n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. , $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin projektif eğrilik eğrilik tensörü P ve koncircular eğrilik tensörü H sırasıyla

$$P(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-1} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y] \quad (1.1.5)$$

ve

$$H(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{\tau}{n(n-1)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (1.1.6)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 1.1.16.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin **Weyl konformal eğrilik tensör alanı**;

$$C(X, Y)Z = R(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (1.1.7)$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörüdür. Ayrıca C nin divergensi k olmak üzere

$$k(X, Y) = (\nabla_X Q)Y - (\nabla_Y Q)X - \frac{1}{2(n-2)} [(\nabla_X r)Y - (\nabla_Y r)X]$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Teorem 1.1.1.: M bir Riemann manifoldu olsun. M nin düzlemsel konformal olması için gerek ve yeter koşul $n > 3$ için $C = 0$ ve $n = 3$ için $k = 0$ olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 1.1.17.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için M nin **quasi-konformal eğrilik tensör alanı**;

$$\check{C}(X, Y)Z = aR(X, Y)Z + b[S(Y, Z)X - S(X, Z)Y + g(Y, Z)QX - g(X, Z)QY] - \frac{\tau}{n} \left\{ \frac{a}{n-1} + 2b \right\} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] \quad (1.1.8)$$

ile tanımlanır. Burada Q Ricci operatörü ve a, b sabitlerdir (Yano ve Sawaki, 1968).

Tanım 1.1.18.: $\check{C} = 0$ veya $\text{div } \check{C} = 0$ ise M manifoldu **düzlemsel quasi-konformal** olarak adlandırılır (Chaki ve Ghosh, 1997).

Tanım 1.1.19.: M manifoldu üzerinde $(0, k)$ –tipinde ($k \geq 1$) bir T tensör alanı ve $(0, 2)$ –tipinde bir simetrik G tensör alanı verildiğinde $R.T$ ve $Q(G, T)$ tensörleri sırası ile:

$$(R.T)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y)$$

$$= -T(R(X,Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, X_2, \dots, R(X,Y)X_k) \quad (1.1.9)$$

ve

$$\begin{aligned} Q(G, T)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) \\ = -T((X \wedge_G Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots - T(X_1, X_2, \dots, (X \wedge_G Y)X_k) \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

biçiminde tanımlanır (Chaki, 1987).

Burada (1.1.9), (1.1.10) denklemlerinde T yerine R ve G yerine g alındığında

$$\begin{aligned} (R \cdot R)(X_1, X_2, X_3, X_4; X, Y) \\ = -R(R(X,Y)X_1, X_2, X_3, X_4) - \dots - R(X_1, X_2, X_3, R(X,Y)X_4) \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

$$\begin{aligned} Q(g, R)(X_1, X_2, \dots, X_k; X, Y) \\ = -R((X \wedge_g Y)X_1, X_2, \dots, X_k) - \dots - R(X_1, X_2, \dots, (X \wedge_g Y)X_k) \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

bulunur.

Eğer $R \cdot R = 0$ ise M ye yarı-simetriktir denir (Chaki ve Maity, 2000). Eğer $R \cdot S = 0$ ise M ye Ricci-semisimetriktir denir. Eğer $R \cdot C = 0$ ise M ye Weyl-semisimetriktir denir (Chaki, 1987).

$R \cdot R = 0 \Rightarrow R \cdot S = 0$ ve $R \cdot R = 0 \Rightarrow R \cdot C = 0$ gerektirmeleri sağlanır. Fakat tersleri her zaman doğru değildir (Chaki, 1987).

Tanım 1.1.20.: M , n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde (r, s) -tipinde simetrik bir tensör A olsun. Bu durumda $1 \leq a < b \leq s$ reel sayıları ve keyfi bir r değeri için

$$\begin{aligned} C_{ab} : \chi_s^r(M) \rightarrow \chi_{s-2}^r(M) \\ (C_{ab}A)_{j_1, j_2, \dots, j_{s-2}}^{i_1, i_2, \dots, i_r} = \sum_{p, q} g^{pq} A_{j_1, \dots, p, \dots, q, \dots, j_{s-2}}^{i_1, i_2, \dots, i_r} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan C_{ab} operatörüne a. ve b. Bileşenlere göre A tensörünün **metrik kontraksiyonu** adı verilir. Böylece kontraksiyon operatörü, (r, s) –tipindeki tensörü $(r - 1, s - 1)$ tipinde bir tensöre dönüştürür (O'Neill, 1983).

Tanım 1.1.21.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin S Ricci tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) = 0, \quad (1.1.13)$$

şartını sağlıyorsa manifolda **η -paralel** denir (Kon, 1975).

Tanım 1.2.22.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde Ricci tensörü S olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için eğer;

$$(\nabla_X S)(Y, Z) + (\nabla_Y S)(Z, X) + (\nabla_Z S)(X, Y) = 0, \quad (1.1.14)$$

ise M ye dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir denir (Kon, 1975).

Tanım 1.1.23.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin R eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için ;

$$\varphi^2(\nabla_X R)(Y, Z)W = 0, \quad (1.1.15)$$

koşulunu sağlıyorsa M ye **φ -simetrik** denir (Takahashi, 1977).

Tanım 1.1.24.: M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin R eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için ;

$$\varphi^2(\nabla_X C)(Y, Z)W = 0, \quad (1.1.16)$$

koşulunu sağlıyorsa M ye **φ -konformal simetrik** denir.

Tanım 1.1.25.: C , n -boyutlu M üzerinde Weyl conformal eğrilik tensörü olsun.

$$C: T_p M^n \times T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \varphi(T_p M^n) \oplus L\{\xi_p\}$$

olmak üzere,

i) $C: T_p M^n \times T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow L\{\xi_p\}$, yani C nin $\varphi(T_p M^n)$ üzerine görüntüsünün projeksiyonu sıfırdır.

ii) $C: T_p M^n \times T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \varphi(T_p M^n)$ yani C nin $L\{\xi_p\}$ üzerine görüntüsünün projeksiyonu sıfırdır.

iii) $C: \varphi(T_p M^n) \times \varphi(T_p M^n) \times \varphi(T_p M^n) \rightarrow L\{\xi_p\}$, yani $C \subset \varphi(T_p M^n) \times \varphi(T_p M^n) \times \varphi(T_p M^n)$ ye kısıtlandığında, C nın $\varphi(T_p M^n)$ in üzerine görüntüsünün projeksiyonu sıfırdır. Bu koşul da

$$\varphi^2 C(\varphi X, \varphi Y) \varphi Z = 0 \quad (1.1.17)$$

eşitliğine denktir. Bir $n > 3$ boyutlu M manifoldunu ele alalım. (1.1.17) şartını sağlarsa düzlemsel φ -konformal olarak adlandırılır (Zhen, 1992).

1.2. Değme Manifoldlar

1959 yılında Gray'in hemen hemen değme yapıyı tanımlamasıyla beraber değme manifoldlarla ilgili aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

M , $2m + 1$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. φ , (1,1) tipinde bir tensör alanı; $\xi \in \chi(M)$ ve η bir 1-form olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \quad (1.2.1)$$

$$\eta(\xi) = 1, \quad (1.2.2)$$

şartını sağlayan (φ, ξ, η) yapısına hemen hemen değme yapı, (M, φ, ξ, η) manifolduna ise hemen hemen değme manifold denir. ξ M nin reeb vektör alanı veya temel vektör alanı olarak da adlandırılır.

Ayrıca M bir hemen hemen değme manifold olmak üzere (φ, ξ, η) değme yapısı ; $\forall X \in \chi(M)$ için aşağıdaki şartları sağlar (Yano ve Kon, 1984):

$$\varphi \xi = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\eta(\varphi X) = 0, \quad (1.2.4)$$

$$\text{rank} \varphi = n - 1, \quad (1.2.5)$$

M hemen hemen değme manifoldu $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (1.2.6)$$

olacak şekilde bir g metrik tensör alanı içerir (Yano ve Kon, 1984).

$2m + 1$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifoldu M ile hemen hemen değme metrik yapısı $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ verilsin. Böylece,

$$g(X, \varphi Y) = -g(\varphi X, Y) \quad (1.2.7)$$

dir (Yano ve Kon, 1984). Bu bize φ nin g metriğine bağlı skew-simetrik olduğunu gösterir. (1.2.5) ve (1.2.6) şartlarını sağlayan g metrik tensor alanı ile birlikte (M, φ, ξ, η) hemen hemen değme manifolduna hemen hemen değme metrik manifold denir (Yano ve Kon, 1984).

M bir hemen hemen değme metrik manifold olmak üzere η 1-formu, M üzerinde her yerde,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

ise, M ye değme manifold η yada değme bir form denir (Yano ve Kon, 1984).

M , $2m + 1$ –boyutlu değme metrik manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(X, \varphi Y) = d\eta(X, Y) \quad (1.2.8)$$

olacak şekilde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen değme yapısı vardır (Yano ve Kon, 1984).

η değme formu tarafından inşaa edilen hemen hemen değme metrik yapısı, η ya bağlı değme yapı olarak adlandırılır ve bu yapıyla verilmiş manifolda değme metrik manifold denir. Sonuçta $\Phi = d\eta$ yapısıyla birlikte hemen hemen değme yapısı

$$\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y) \quad (1.2.9)$$

değme metrik manifolddur.

M bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $M \times R$ çarpım manifoldu gozönünde bulundurulduğunda, $\tilde{M} \times R$ üzerinde bir vektör alanı; $(X, f \frac{d}{dt})$ şeklindedir. (Burada $X \in \chi(M)$; t, R nin koordinatı ve f , $M \times R$ üzerinde bir fonksiyon). $M \times R$ nin tanjant uzayı üzerinde tanımlı bir lineer J dönüşümü

$$J \left(X, f \frac{d}{dt} \right) = \left(\varphi X - f \xi, \eta(X) \frac{d}{dt} \right) \quad (1.2.10)$$

şeklinde tanımlanırsa $J^2 = -I$ olup $J, M \times R$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

J hemen hemen kompleks yapısı eğer;

$$N_J(X, Y) = J^2[X, Y] - J[JX, Y] - J[X, JY] + [JX, JY] \quad (1.2.11)$$

ile tanımlanan Nijenhuis tensorü sıfıra eşitse integrallenebilirdir denir (Yano ve Kon, 1984).

Eğer $M \times R$ üzerindeki bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ, ξ, η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir (Yano ve Kon, 1984).

M hemen hemen değme manifoldu normaldir gerek ve yeter şart

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \quad (1.2.12)$$

olmasıdır (Yano ve Kon, 1984).

3- boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M için aşağıdaki özellikler sağlanır (Olszak, 1986):

$$\begin{aligned} (\nabla_X \varphi)Y &= g(\varphi \nabla_X \xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi \nabla_X \xi \\ &= \alpha\{g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\} + \beta\{g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\}, \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

$$\nabla_X \xi = \alpha\{X - \eta(X)\xi\} - \beta\varphi X, \quad (1.2.14)$$

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= \{(Y\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\}\varphi^2 X - \{(X\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)\}\varphi^2 Y \\ &\quad + \{(Y\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y)\}\varphi X - \{(X\beta) + 2\alpha\beta\eta(X)\}\varphi Y, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} S(X, Y) &= \left[\frac{\tau}{2} + (\xi\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2) \right] g(X, Y) - \left[\frac{\tau}{2} + (\xi\alpha) + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(X)\eta(Y) \\ &\quad - \{(X\alpha)\eta(Y) + (Y\alpha)\eta(X)\} - \{(\varphi X\beta)\eta(Y) + (\varphi Y\beta)\eta(X)\}, \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

$$(\xi\beta) + 2\alpha\beta = 0, \quad (1.2.17)$$

M , değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) olan n -boyutlu bir değme metrik manifoldu olsun. Eğer M nin değme metrik yapısı normal ise, **M Sasakian yapıya sahiptir** denir. Bazen Sasakian manifold **normal değme metrik manifold** olarak da adlandırılır (Yano ve Kon, 1984)

M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (φ, ξ, η, g) bir Sasakian yapıdır $\Leftrightarrow \forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(X, Y)\xi - \eta(Y)X \quad (1.2.18)$$

dir (Yano ve Kon, 1984). Buna denk olarak diyebiliriz ki değme metrik manifoldlar Sasakian'dır ancak ve ancak Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere;

$$R(X, Y)\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

Kenmotsu 1972 yılında değme manifoldların önemli bir sınıfı olan bu tür yapıları içeren manifoldları (Kenmotsu manifoldları) şu şekilde tanımladı (Kenmotsu, 1972):

M $2m + 1$ -boyutlu (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapısına sahip hemen hemen değme metrik manifold olsun.

$$(\nabla_X \varphi)Y = g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \quad (1.2.19)$$

şartını sağlayan bu manifoldda Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Olszak ve Rosca tarafından 1991 yılında normal lokal olarak konformal hemen hemen kosimplektik yapı ortaya atıldı (Olszak ve Rosca, 1991). Aslında bu yaptıkları çalışmada f -Kenmotsu manifoldunun geometrik bir yorumlamasını getirerek Kenmotsu manifoldları genelleştirdiler.

Ayrıca $2m + 1$ - boyutlu Kenmotsu manifoldu M olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi \quad (1.2.20)$$

$$R(X, Y)\xi = \eta(X)Y - \eta(Y)X \quad (1.2.21)$$

$$S(Y, \xi) = (1 - n)\eta(Y) \quad (1.2.22)$$

$2m + 1$ - boyutlu (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapısına sahip hemen hemen değme metrik manifold M olsun. $df \wedge \eta = 0$ olacak şekilde pozitif f fonksiyonu için

$$(\nabla_X \varphi)Y = f[g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X] \quad (1.2.23)$$

şartını sağlayan manifoldda f -Kenmotsu manifold denir. Ayrıca f -Kenmotsu manifoldlar için

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır (Olszak ve Rosca, 1991):

$$\nabla_X \xi = f\{X - \eta(X)\xi\}, \quad (1.2.24)$$

$$R(X, Y)\xi = f^2(\eta(X)Y - \eta(Y)X) + Y(f)\varphi^2 X - X(f)\varphi^2 Y, \quad (1.2.25)$$

$$S(Y, \xi) = f^2(1 - n)\eta(Y) + Y(f)(2 - n) - (\xi f)\eta(Y), \quad (1.2.26)$$

(1.2.23) ile tanımlı f -Kenmotsu manifoldunda $f = \alpha = \text{sabit}$ ve sıfırdan farklı ise verilen manifold α -Kenmotsu manifoldda , $f = 1$ olması durumunda manifold Kenmotsu

manifoldta dönüşür (Kenmotsu, 1972). M n -boyutlu f –Kenmotsu manifold olmak üzere $f = 0$ özel durumunda manifold kosimplektik manifold olarak adlandırılır.

Quasi-Sasakian yapı fikri D.E.Blair tarafından Sasakian ve kosimplektik yapıları birleştirmek amacıyla ortaya atıldı (Blair, 1967). Yaptığı çalışmada Blair, quasi-Sasakian manifoldların varlığını, Kahlerian manifold ile Sasakian manifoldun Riemann çarpımının quasi-Sasakian manifold olduğunu göstererek kanıtladı. S. Tanno da quasi-Sasakian yapı üzerine önemli çıkarımlarını ekledi (Tanno, 1971).

$2m + 1$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu M olmak üzere, normal ve temel 2-formu kapalı yani $d\varphi = 0$ ise manifoldta **quasi-Sasakian manifold** denir (Blair, 1967).

Bu yapılan tanımlamalardan sonra, 1977 yılında S. Kanemaki hemen hemen değme metrik manifoldunun quasi- Sasakian olması için gerek ve yeter koşulu aşağıdaki gibi verdi:

$2m + 1$ -boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu M quasi-Sasakian manifolddur ancak ve ancak ∇ , M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = \eta(Y)FX - g(FX, Y)\xi$$

$$\varphi FX = F\varphi X$$

denklemlerini sağlayacak şekilde $(1,1)$ tipinde F simetrik tensör alanı vardır (Kanemaki, 1977).

Diğer taraftan Olszak 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldunda yapı fonksiyonu olarak β yı alarak aşağıdaki tanımlamayı verdi (Olszak, 1986):

M 3-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu 3-boyutlu quasi-Sasakian manifolddur ancak ve ancak M üzerinde

$$(\xi\beta) = 0 \tag{1.2.27}$$

özellikliğini sağlayan β fonksiyonu $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\beta\varphi X \tag{1.2.28}$$

dır. Burada $\beta = 0$ olursa manifold kosimplektik olur. Yukarıdaki denklem yardımıyla

$$(\nabla_X \varphi)Y = \beta(g(X, Y)\xi - \eta(Y)X) \tag{1.2.29}$$

dır (Olszak, 1986).

Ayrıca 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldların özellikleri birçok yazar tarafından çalışılmış olup aşağıdaki eğrilik özelliklerini elde edildi (Olszak, 1996; De, vd., 2012; De, vd., 2008):

$$R(X, Y)\xi = \beta^2(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + (Y\beta)\varphi X - (X\beta)\varphi Y, \quad (1.2.30)$$

$$S(Y, Z) = \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)g(Y, Z) + \left(3\beta^2 - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\eta(Z) - \eta(Y)d\beta(\varphi Z) - \eta(Z)d\beta(\varphi Y), \quad (1.2.31)$$

$$QY = \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)Y + \left(3\beta^2 - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\xi + \eta(Y)\varphi \text{grad}\beta - d\beta(\varphi Y)\xi, \quad (1.2.32)$$

$$S(Y, \xi) = 2\beta^2\eta(Y) - d\beta(\varphi Y), \quad (1.2.33)$$

J.A. Oubina 1985 yılında değme manifoldlarda Sasakian ve Kenmotsu yapıları genelleştiren trans-Sasakian yapıları tanımladı (Oubina, 1985).

M $2m + 1$ -boyutlu (φ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik yapısına sahip hemen hemen değme metrik manifold olsun $\alpha, \beta \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \varphi)Y = \alpha\{g(X, Y)\xi - \eta(Y)X\} + \beta\{g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X\} \quad (1.2.34)$$

şartını sağlayan manifoldda trans-Sasakian manifold olarak adlandırılır. (1,0) tipindeki trans-Sasakian manifoldlar Sasakian manifoldlara, (0,1) tipindeki trans-Sasakian manifoldlar Kenmotsu manifoldlara ve son olarak (0,0) tipindeki trans-Sasakian manifoldlar kosimplektik manifoldlara dönüşürler.

Ayrıca (1.2.34) ve (1.2.1) denklemleri yardımıyla $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = -\alpha\varphi X + \beta\{X - \eta(X)\xi\} \quad (1.2.35)$$

elde edilir.

3- boyutlu trans-sasakian manifold M olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır (De ve Tripathi, 2003):

$$\begin{aligned} R(X, Y)\xi &= (\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + 2\alpha\beta(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y) + Y(\beta)\varphi^2 X \\ &\quad - X(\beta)\varphi^2 Y + (Y\alpha)\varphi X - (X\alpha)\varphi Y, \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

$$2\beta\alpha + (\xi\alpha) = 0, \quad (1.2.37)$$

$$S(X, \xi) = (2(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta))\{\eta(X)\} - X\beta - (\varphi X)\beta, \quad (1.2.38)$$

$$S(X, Y) = \left[\frac{\tau}{2} + (\xi\beta) - (\alpha^2 - \beta^2) \right] g(X, Y) - \left[\frac{\tau}{2} + (\xi\beta) - 3(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(X)\eta(Y) \\ - \{(X\beta)\eta(Y) + (Y\beta)\eta(X)\} - \{(\varphi X\alpha)\eta(Y) + (\varphi Y\alpha)\eta(X)\}. \quad (1.2.39)$$

Tanım 1.2.1.: M $2m + 1$ -boyutlu değme metrik manifold olmak üzere, eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$C(X, Y)\xi = 0$$

eşitliği sağlanırsa, manifold düzlemsel ξ -konformal olarak adlandırılır (Zhen vd., 1997).

Tanım 1.2.2.: M $2m + 1$ -boyutlu değme metrik manifold olmak üzere, eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\check{C}(X, Y)\xi = 0$$

eşitliği sağlanırsa, manifold düzlemsel ξ -quasi konformal olarak adlandırılır (Zhen vd., 1997).

1.3. Ricci Soliton ve Gradyant Ricci Soliton

Einstein metriğinin genelleştirilmiş hali olarak da bilinen Ricci soliton kavramı n -boyutlu Riemann manifoldu üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

Bir M n -boyutlu Riemann manifoldu üzerinde L lie operatörü, S Ricci tensörü, V M üzerinde düzgün vektör alanı (potansiyel vektör alanı) ve λ da sabit olmak üzere

$$L_V g + 2S + 2\lambda g = 0 \quad (1.3.1)$$

şartını sağlayan g metriğine **Ricci soliton** adı verilir (Hamilton, 1988). Ricci soliton λ nın negatif, pozitif veya sıfır olması durumunda sırasıyla daralan (shrinking), genişleyen (expanding) veya değişmeyen (steady) olarak adlandırılır. Ayrıca burada $L_V g = 0$ olduğunda (1.3.1) denklemimiz Einstein denklemine dönüşür.

Ayrıca M, n boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere, S Ricci tensörü ve g de Riemann metriği olmak üzere V vektör alanı $-f$ potansiyel fonksiyonunun gradyanı ise, g metriğimiz gradyant Ricci soliton olarak adlandırılır ve (1.3.1) denklemi

$$\nabla \nabla f = S + \lambda g \quad (1.3.2)$$

formuna dönüşür.

Teorem 1.3.1.: M , β sabit olacak şekilde 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu olsun. M üzerindeki b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold Ricci soliton olma şartını sağlasın. Bu takdirde sabit skaler eğriliklidir (Turan vd., 2012).

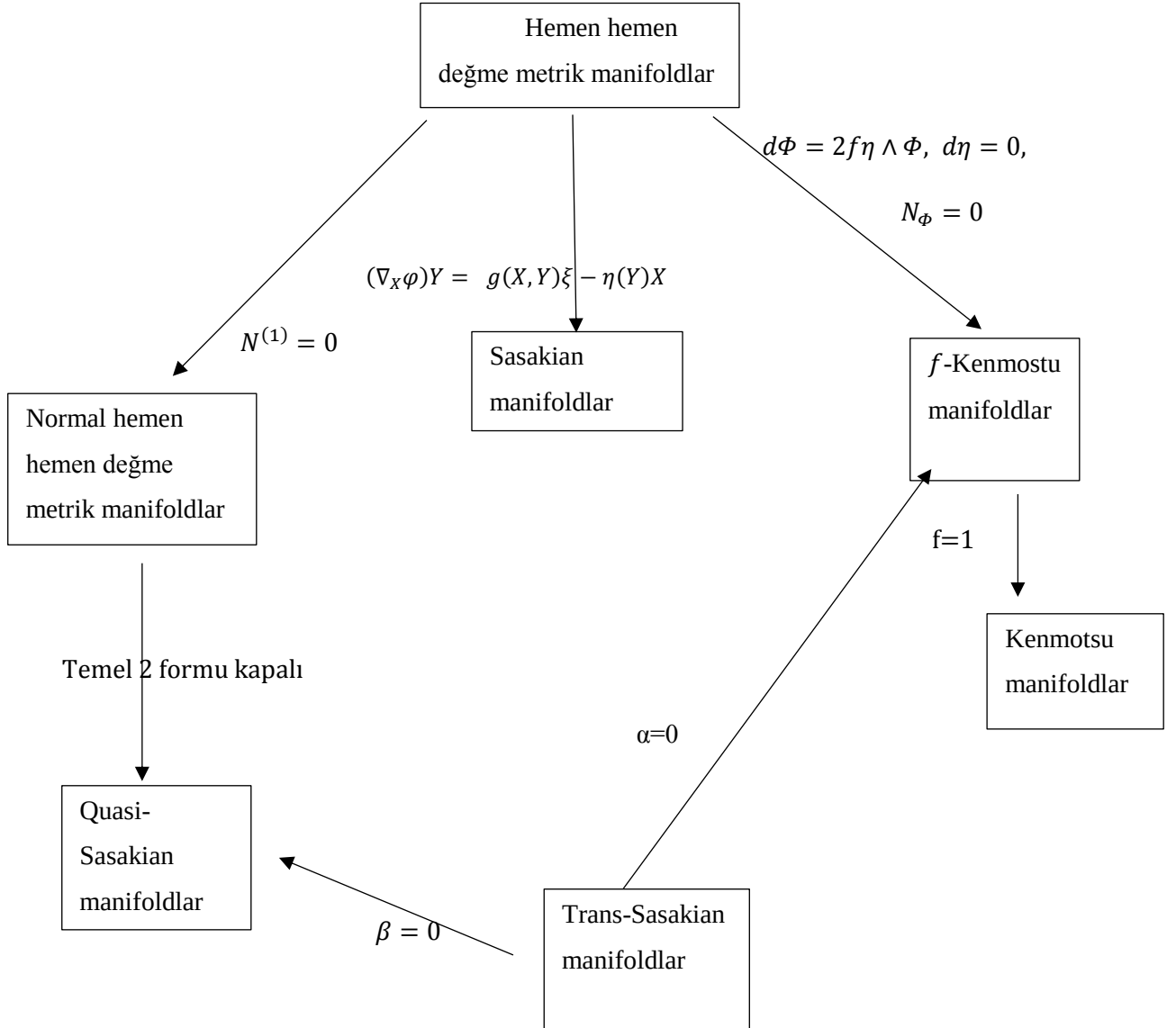
Teorem 1.3.2.: M 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu Ricci soliton olma şartını sağlıyor ise, genişleyendir (Turan vd., 2012).

Teorem 1.3.3.: M 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu $\alpha, \beta = sbt$ olmak şartıyla gradyant Ricci soliton olma şartını sağlıyor ise, ya β -Kenmostu manifold yada Einstein manifolddur (Turan vd., 2012).

Aşağıdaki çizelgede hemen hemen değme metrik manifoldlar arasındaki bağıntılar verilmiştir:

Aşağıdaki tabloda hemen hemen değme metrik manifoldlar arasındaki bağıntılar verilmiştir:

Çizelge 1.1. Hemen hemen değme metrik manifoldlar arasındaki ilişkinin incelenmesi



2. KONEKSİYONLAR

Bu bölümde genel anlamda yeni bir koneksiyon tanımlayacak ve özel şartlarını inceleyeceğiz. Öncelikle kullanacağımız tanımları verelim:

Tanım 2.1.: M , $\bar{\nabla}$ lineer koneksiyonu ile verilmiş bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M nin $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna ait

$$\bar{T}(X, Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X, Y] \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlı torsiyon tensörü $\bar{T}$, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için;

$$\bar{T}(X, Y) = u(Y)X - u(X)Y, \quad (2.2)$$

şartını sağlıyor ise $\bar{\nabla}$ ya yarı-simetrik koneksiyon,

$$\bar{T}(X, Y) = u(Y)\phi X - u(X)\phi Y, \quad (2.3)$$

şartını sağlıyorsa $\bar{\nabla}$ ya çeyrek-simetrik koneksiyon adı verilir. Burada u diferensiyellenebilir bir 1- form , ϕ (1, 1)-tipinde bir tensör alanıdır (Friedmann ve Schouten 1924; Golab 1975). Eğer M Riemann manifoldu üzerinde, g Riemann metriğine göre $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) \neq 0, \quad (2.4)$$

koşulu sağlanıyor ise (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan $\bar{\nabla}$ koneksiyonu sırasıyla yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyon ve çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde eğer M Riemann manifoldu üzerinde g Riemann metriğine göre $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$(\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) = 0, \quad (2.5)$$

koşulu sağlanıyor ise (2.2) ve (2.3) şartlarını sağlayan $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna sırasıyla yarı-simetrik metrik koneksiyon ve çeyrek-simetrik metrik koneksiyon adı verilir.

Verilen tanımlamalar kullanılarak hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir koneksiyon tanımlayacağız:

Teorem 2.1.: M , Levi-civita koneksiyonu ∇ ile verilmiş hemen hemen değme metrik manifold olmak üzere $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi$ (1,1) tipinde anti simetrik tensör alanları, η 1-form ve ξ bir vektör alanı

$$\begin{aligned} g(\varphi X, Y) &= \Phi(X, Y) = g(\varphi_1 X, Y) + g(\varphi_2 X, Y) + g(\varphi_3 X, Y) \\ &= \Phi_1(X, Y) + \Phi_2(X, Y) + \Phi_3(X, Y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

ve

$$\eta(X) = g(X, \xi), \quad \varphi\xi = 0$$

özelliklerini sağlasın. M üzerinde

$$\bar{T}(X, Y) = \eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y \quad (2.7)$$

ve

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) &= -\frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi_3 X, Z) - \frac{1}{2}\eta(Z)g(\varphi_3 X, Y) + f_1 g(X, Y)\eta(Z) + f_1 g(X, Z)\eta(Y) - \\ &\quad \eta(Y)g(\varphi_2 X, Z) - \eta(Z)g(Y, \varphi_2 X) = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

şartlarını sağlayacak şekilde

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X)\varphi_1 Y + \eta(Y)\varphi_2 X + \frac{1}{2}(\eta(Y)\varphi_3 X - \eta(X)\varphi_3 Y) - f_1 g(X, Y)\xi, \quad (2.9)$$

ile tanımlı çeyrek-simetrik metrik olmayan bir koneksiyon vardır. Burada f_1 manifold üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyondur.

İspat: M manifoldu üzerinde $B(X, Y)$, $(1,1)$ tipinde tensör alanı olmak üzere

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y), \quad (2.10)$$

ile tanımlı $\bar{\nabla}$ lineer koneksiyonu verilsin.

Kabul edelim ki (2.10) denklemi ile tanımlı koneksiyonumuz çeyrek-simetrik olma ve non-metriklik şartlarını sağlasın. Bu durumda (2.7) ve (2.8) şartlarını sağlayacak şekilde bir $B(X, Y)$ tensörünü bulmaya çalışalım. (2.9) denklemi (2.1) de kullanılırsa

$$\bar{T}(X, Y) = B(X, Y) - B(Y, X) \quad (2.11)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$G(X, Y, Z) = (\bar{\nabla}_X g)(Y, Z) \quad (2.12)$$

olmak üzere. (2.9) denklemi (2.12) da kullanılırsa

$$G(X, Y, Z) = -g(B(X, Y), Z) - g(Y, B(X, Z)) \quad (2.13)$$

dir. $B(X, Y)$ ifadesini elde edebilmek için öncelikle (2.11) yardımıyla $g(\bar{T}(X, Y), Z)$, $g(\bar{T}(Z, X), Y)$ ve $g(\bar{T}(Z, Y), X)$ denklemlerini bulalım:

$$g(\bar{T}(X, Y), Z) = g(B(X, Y), Z) - g(B(Y, X), Z), \quad (2.14)$$

$$g(\bar{T}(Z, X), Y) = g(B(Z, X), Y) - g(B(X, Z), Y), \quad (2.15)$$

$$g(\bar{T}(Z, Y), X) = g(B(Z, Y), X) - g(B(Y, Z), X) \quad (2.16)$$

(2.14), (2.15) ve (2.16) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &g(\bar{T}(X, Y), Z) + g(\bar{T}(Z, X), Y) + g(\bar{T}(Z, Y), X) \\ &= g(B(X, Y), Z) - g(B(Y, X), Z) + g(B(Z, X), Y) - g(B(X, Z), Y) \\ &\quad + g(B(Z, Y), X) - g(B(Y, Z), X) \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki denklemde (2.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned} &g(\bar{T}(X, Y), Z) + g(\bar{T}(Z, X), Y) + g(\bar{T}(Z, Y), X) \\ &= g(B(X, Y), Z) + G(Y, X, Z) - G(Z, X, Y) - g(B(X, Z), Y) \\ &= 2g(B(X, Y), Z) + G(X, Y, Z) + G(Y, X, Z) - G(Z, X, Y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

olur. (2.17) de (2.9) denkleminde yerine konulursa

$$\begin{aligned} &g(\bar{T}(X, Y), Z) + g(\bar{T}(Z, X), Y) + g(\bar{T}(Z, Y), X) \\ &= 2g(B(X, Y), Z) - \frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi_3 X, Z) - \frac{1}{2}\eta(Z)g(\varphi_3 X, Y) + f_1 g(X, Y)\eta(Z) \\ &\quad + f_1 g(X, Z)\eta(Y) - \eta(Y)g(\varphi_2 X, Z) + \eta(Y)g(\varphi_2 Z, X) - \frac{1}{2}\eta(X)g(\varphi_3 Y, Z) \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta(Z)g(\varphi_3 Y, X) + f_1 g(Y, Z)\eta(X) + f_1 g(X, Y)\eta(Z) - \eta(X)g(\varphi_2 Y, Z) \\ &\quad - \eta(Z)g(X, \varphi_2 Y) + \frac{1}{2}\eta(X)g(\varphi_3 Z, Y) + \frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi_3 X, Z) - f_1 g(Z, X)\eta(Y) \\ &\quad - f_1 g(Z, Y)\eta(X) + \eta(X)g(\varphi_2 Z, Y) + \eta(Y)g(X, \varphi_2 Z) \end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} &g(\bar{T}(X, Y), Z) + g(\bar{T}(Z, X), Y) + g(\bar{T}(Z, Y), X) \\ &= 2g(B(X, Y), Z) + 2f_1 g(X, Y)\eta(Z) + \frac{1}{2}[\eta(X)g(Y, \varphi_3 Z) - \eta(X)g(\varphi_3 Y, Z) \\ &\quad + \eta(Y)g(\varphi_3 Z, X) - \eta(Z)g(\varphi_3 Y, X) - \eta(Z)g(\varphi_3 X, Y) - \eta(Y)g(\varphi_3 X, Z)] \\ &\quad - 2\eta(Y)g(\varphi_2 X, Z) - 2\eta(X)g(\varphi_2 Y, Z) \end{aligned}$$

bulunur ki yukarıda $g(B(X, Y), Z)$ ifadesini çekersek,

$$\begin{aligned} g(B(X, Y), Z) &= \frac{1}{2} [g(\bar{T}(X, Y), Z) + g(\bar{T}(Z, X), Y) + g(\bar{T}(Z, Y), X)] - f_1 g(X, Y) \eta(Z) \\ &\quad - \frac{1}{4} [\eta(X) g(Y, \varphi_3 Z) - \eta(X) g(\varphi_3 Y, Z) + \eta(Y) g(\varphi_3 Z, X) - \eta(Z) g(\varphi_3 Y, X) \\ &\quad - \eta(Z) g(\varphi_3 X, Y) - \eta(Y) g(\varphi_3 X, Z)] + \eta(Y) g(\varphi_2 X, Z) + \eta(X) g(\varphi_2 Y, Z) \end{aligned}$$

dır. Ayrıca son denklemde (2.7) ifadesi kullanılarak elde edilen

$$g(\bar{T}(X, Y), Z) = \eta(Y) g(\varphi X, Z) - \eta(X) g(\varphi Y, Z) = \eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i X, Z) - \eta(X) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Y, Z),$$

$$g(\bar{T}(Z, X), Y) = \eta(X) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Z, Y) - \eta(Z) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Y, X),$$

ve

$$g(\bar{T}(Z, Y), X) = \eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Z, X) - \eta(Z) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Y, X),$$

denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &g(B(X, Y), Z) \\ &= \frac{1}{2} \left[\eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i X, Z) \right. \\ &\quad - \eta(X) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Y, Z) + \eta(X) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Z, Y) \\ &\quad - \eta(Z) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Y, X) + \eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Z, X) - \eta(Z) \sum_{i=1}^3 g(\varphi_i Y, X) \left. \right] - f_1 g(X, Y) \eta(Z) \\ &\quad - \frac{1}{4} [\eta(X) g(Y, \varphi_3 Z) - \eta(X) g(\varphi_3 Y, Z) + \eta(Y) g(\varphi_3 Z, X) - \eta(Z) g(\varphi_3 Y, X) - \eta(Z) g(\varphi_3 X, Y) \\ &\quad - \eta(Y) g(\varphi_3 X, Z)] + \eta(Y) g(\varphi_2 X, Z) \\ &\quad + \eta(X) g(\varphi_2 Y, Z), \end{aligned} \tag{2.18}$$

halini alır. (2.18) de gerekli sadeleştirmeler yapıldığında $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$B(X, Y) = -\eta(X) \varphi_1 Y + \eta(Y) \varphi_2 X + \frac{1}{2} (\eta(Y) \varphi_3 X - \eta(X) \varphi_3 Y) - f_1 g(X, Y) \xi$$

sonucu ortaya çıkar.

Önerme 2.1.: Bir n-boyutlu hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (2.9) ile tanımlı çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ya göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, R ile $\bar{R}$ arasındaki bağıntı $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z = & R(X, Y)Z - g(\nabla_X \xi, Y)\varphi_1 Z - \eta(Y)(\nabla_X \varphi_1)Z + \eta(Y)f_1 g(X, \varphi_1 Z)\xi \\
& + g(\nabla_X \xi, Z)\varphi_2 Y + \eta(Z)(\nabla_X \varphi_2)Y - \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_2 Y - \eta(X)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_2 Y \\
& - \eta(Z)f_1 g(X, \varphi_2 Y)\xi + \frac{1}{2}g(\nabla_X \xi, Z)\varphi_3 Y + \frac{1}{2}\eta(Z)(\nabla_X \varphi_3)Y \\
& - \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_3 Y - \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_3 Y - \frac{1}{2}f_1 \eta(Z)g(X, \varphi_3 Y)\xi \\
& - \frac{1}{2}g(\nabla_X \xi, Y)\varphi_3 Z - \frac{1}{2}\eta(Y)(\nabla_X \varphi_3)Z + \frac{1}{2}f_1 \eta(Y)g(X, \varphi_3 Z)\xi - (Xf_1)g(Y, Z)\xi \\
& - f_1 g(Y, Z)\nabla_X \xi - \frac{1}{2}f_1 g(Y, Z)\varphi_3 X - f_1 g(Y, Z)\varphi_2 X + f_1^2 g(Y, Z)\eta(X)\xi \\
& + g(\nabla_Y \xi, X)\varphi_1 Z + \eta(X)(\nabla_Y \varphi_1)Z - \eta(X)f_1 g(Y, \varphi_1 Z)\xi - g(\nabla_Y \xi, Z)\varphi_2 X \\
& - \eta(Z)(\nabla_Y \varphi_2)X + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_2 X + \eta(Y)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_2 X \\
& + \eta(Z)f_1 g(Y, \varphi_2 X)\xi - \frac{1}{2}g(\nabla_Y \xi, Z)\varphi_3 X - \frac{1}{2}\eta(Z)(\nabla_Y \varphi_3)X \\
& + \frac{1}{4}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_3 X + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_3 X + \frac{1}{2}\eta(Z)f_1 g(Y, \varphi_3 X)\xi \\
& + \frac{1}{2}g(\nabla_Y \xi, X)\varphi_3 Z + \frac{1}{2}\eta(X)(\nabla_Y \varphi_3)Z - \eta(X)\frac{1}{2}f_1 g(Y, \varphi_3 Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z) \\
& + f_1 g(X, Z)\nabla_Y \xi + \frac{1}{2}f_1 g(X, Z)\varphi_3 Y + f_1 g(X, Z)\varphi_2 Y \\
& - f_1^2 g(Y, Z)\eta(X)\xi
\end{aligned} \tag{2.19}$$

dir.

İspat: Çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon $\bar{\nabla}$ ya göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için ;

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadede (2.9) denklemini kullandığımızda

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \left(\nabla_Y Z - \eta(Y)\varphi_1 Z + \eta(Z)\varphi_2 Y + \frac{1}{2}(\eta(Z)\varphi_3 Y - \eta(Y)\varphi_3 Z) - f_1 g(Y, Z)\xi \right)$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\nabla}_Y \left(\nabla_X Z - \eta(X)\varphi_1 Z + \eta(Z)\varphi_2 X + \frac{1}{2}(\eta(Z)\varphi_3 X - \eta(X)\varphi_3 Z) - f_1 g(X, Z)\xi \right) \\
& - \left(\nabla_{[X, Y]} Z - \eta([X, Y])\varphi_1 Z + \eta(Z)\varphi_2 [X, Y] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2}\{\eta(Z)\varphi_3 [X, Y] - \eta([X, Y])\varphi_3 Z\} - f_1 g([X, Y], Z)\xi \right)
\end{aligned}$$

olup burada $\bar{\nabla}$ koneksiyonunun lineer olma özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \bar{\nabla}_X \eta(Y)\varphi_1 Z + \bar{\nabla}_X \eta(Z)\varphi_2 Y + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_X \eta(Z)\varphi_3 Y - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_X \eta(Y)\varphi_3 Z - \\
& \bar{\nabla}_X f_1 g(Y, Z)\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\bar{\nabla}_Y \nabla_X Z + \bar{\nabla}_Y \eta(X)\varphi_1 Z - \bar{\nabla}_Y \eta(Z)\varphi_2 X - \frac{1}{2}\bar{\nabla}_Y \eta(Z)\varphi_3 X + \frac{1}{2}\bar{\nabla}_Y \eta(X)\varphi_3 Z + \bar{\nabla}_Y f_1 g(X, Z)\xi \\
& - \nabla_{[X, Y]} Z + \eta([X, Y])\varphi_1 Z - \eta(Z)\varphi_2 [X, Y] \\
& - \frac{1}{2}\{\eta(Z)\varphi_3 [X, Y] - \eta([X, Y])\varphi_3 Z\} + f_1 g([X, Y], Z)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada tekrar (2.9) denklemi yardımıyla yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + \frac{1}{2}\eta(\nabla_Y Z)\varphi_3 X - \frac{1}{2}\eta(X)\varphi_3 \nabla_Y Z + \eta(\nabla_Y Z)\varphi_2 X - \eta(X)\varphi_1 \nabla_Y Z - \\
& f_1 g(X, \nabla_Y Z)\xi - \nabla_X \eta(Y)\varphi_1 Z - \frac{1}{2}\eta(\eta(Y)\varphi_1 Z)\varphi_3 X + \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Y)\varphi_1 \varphi_3 Z - \eta(\eta(Y)\varphi_1 Z)\varphi_2 X + \\
& \eta(X)\eta(Y)\varphi_1 \varphi_1 Z + f_1 g(X, \eta(Y)\varphi_1 Z)\xi + \nabla_X \eta(Z)\varphi_2 Y + \frac{1}{2}\eta(\eta(Z)\varphi_2 Y)\varphi_3 X - \\
& \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_2 Y - \eta(X)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_2 Y + \eta(\eta(Z)\varphi_2 Y)\varphi_2 X - f_1 g(X, \eta(Z)\varphi_2 Y)\xi + \\
& \frac{1}{2}\nabla_X \eta(Z)\varphi_3 Y + \frac{1}{4}\eta(\eta(Z)\varphi_3 Y)\varphi_3 X - \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_3 Y + \frac{1}{2}\eta(\eta(Z)\varphi_3 Y)\varphi_2 X - \\
& \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_3 Y - \frac{1}{2}f_1 g(X, \eta(Z)\varphi_3 Y)\xi - \frac{1}{2}\nabla_X \eta(Y)\varphi_3 Z - \frac{1}{4}\eta(\eta(Y)\varphi_3 Z)\varphi_3 X + \\
& \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Y)\varphi_3 \varphi_3 Z - \frac{1}{2}\eta(\eta(Y)\varphi_3 Z)\varphi_2 X + \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Y)\varphi_1 \varphi_3 Z + \frac{1}{2}f_1 g(X, \eta(Y)\varphi_3 Z)\xi - \\
& \nabla_X f_1 g(Y, Z)\xi - \frac{1}{2}\eta(f_1 g(Y, Z)\xi)\varphi_3 X + \frac{1}{2}\eta(X)f_1 g(Y, Z)\varphi_3 \xi - \eta(f_1 g(Y, Z)\xi)\varphi_2 X + \\
& \eta(X)f_1 g(Y, Z)\varphi_1 \xi + f_1^2 g(Y, Z)\eta(X)\xi - \nabla_Y \nabla_X Z - \frac{1}{2}\eta(\nabla_X Z)\varphi_3 Y + \frac{1}{2}\eta(Y)\varphi_3 \nabla_X Z - \\
& \eta(\nabla_X Z)\varphi_2 Y + \eta(Y)\varphi_1 \nabla_X Z + f_1 g(Y, \nabla_X Z)\xi + \nabla_Y \eta(X)\varphi_1 Z + \frac{1}{2}\eta(\eta(X)\varphi_1 Z)\varphi_3 Y - \\
& \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(X)\varphi_1 \varphi_3 Z + \eta(\eta(X)\varphi_1 Z)\varphi_2 Y - \eta(Y)\eta(X)\varphi_1 \varphi_1 Z - f_1 g(Y, \eta(X)\varphi_1 Z)\xi - \\
& \nabla_Y \eta(Z)\varphi_2 X - \frac{1}{2}\eta(\eta(Z)\varphi_2 X)\varphi_3 Y + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_2 X + \eta(Y)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_2 X - \\
& \eta(\eta(Z)\varphi_2 X)\varphi_2 Y + f_1 g(Y, \eta(Z)\varphi_2 X)\xi - \frac{1}{2}\nabla_Y \eta(Z)\varphi_3 X - \frac{1}{4}\eta(\eta(Z)\varphi_3 X)\varphi_3 Y + \\
& \frac{1}{4}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_3 X - \frac{1}{2}\eta(\eta(Z)\varphi_3 X)\varphi_2 Y + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_3 X + \frac{1}{2}f_1 g(Y, \eta(Z)\varphi_3 X)\xi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\nabla_Y\eta(X)\varphi_3Z + \frac{1}{4}\eta(\eta(X)\varphi_3Z)\varphi_3Y - \frac{1}{4}\eta(Y)\eta(X)\varphi_3\varphi_3Z + \frac{1}{2}\eta(\eta(X)\varphi_3Z)\varphi_2Y - \\
& \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(X)\varphi_1\varphi_3Z - \frac{1}{2}f_1g(Y, \eta(X)\varphi_3Z)\xi + \nabla_Yf_1g(X, Z)\xi + \frac{1}{2}\eta(f_1g(X, Z)\xi)\varphi_3Y - \\
& \frac{1}{2}\eta(Y)f_1g(X, Z)\varphi_3\xi + \eta(f_1g(X, Z)\xi)\varphi_2Y - \eta(Y)f_1g(X, Z)\varphi_1\xi - f_1^2g(Y, Z)\eta(X)\xi - \\
& \nabla_{[X, Y]}Z + \eta(\nabla_XY - \nabla_YX)\varphi_1Z - \eta(Z)\varphi_2\nabla_XY + \eta(Z)\varphi_2\nabla_YX - \frac{1}{2}\{\eta(Z)\varphi_3\nabla_XY - \eta(Z)\varphi_3\nabla_YX - \\
& \eta(\nabla_XY - \nabla_YX)\varphi_3Z\} + f_1g(\nabla_XY - \nabla_YX, Z)\xi
\end{aligned}$$

halini alır. (1.2.3), (1.2.4) denklemleri ve Levi-Civita koneksiyonu özellikleri kullanıldığında son denkleminiz

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z = & R(X, Y)Z + \frac{1}{2}\eta(\nabla_Y Z)\varphi_3 X - \frac{1}{2}\eta(X)\varphi_3 \nabla_Y Z + \eta(\nabla_Y Z)\varphi_2 X - \eta(X)\varphi_1 \nabla_Y Z \\
& - f_1 g(X, \nabla_Y Z)\xi - \eta(\nabla_X Y)\varphi_1 Z - g(\nabla_X \xi, Y)\varphi_1 Z - \eta(Y)(\nabla_X \varphi_1)Z \\
& - \eta(Y)\varphi_1 \nabla_X Z + \eta(Y)f_1 g(X, \varphi_1 Z)\xi + g(\nabla_X \xi, Z)\varphi_2 Y + \eta(\nabla_X Z)\varphi_2 Y \\
& + \eta(Z)(\nabla_X \varphi_2)Y + \eta(Z)\varphi_2 \nabla_X Y - \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_2 Y - \eta(X)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_2 Y \\
& - \eta(Z)f_1 g(X, \varphi_2 Y)\xi + \frac{1}{2}\eta(\nabla_X Z)\varphi_3 Y + \frac{1}{2}g(\nabla_X \xi, Z)\varphi_3 Y + \frac{1}{2}\eta(Z)(\nabla_X \varphi_3)Y \\
& + \frac{1}{2}\eta(Z)\varphi_3 \nabla_X Y - \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_3 Y \\
& - \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_3 Y - \frac{1}{2}f_1 \eta(Z)g(X, \varphi_3 Y)\xi - \frac{1}{2}g(\nabla_X \xi, Y)\varphi_3 Z \\
& - \frac{1}{2}\eta(\nabla_X Y)\varphi_3 Z - \frac{1}{2}\eta(Y)(\nabla_X \varphi_3)Z - \frac{1}{2}\eta(Y)\varphi_3 \nabla_X Z + \frac{1}{2}f_1 \eta(Y)g(X, \varphi_3 Z)\xi \\
& - (Xf_1)g(Y, Z)\xi - f_1 g(\nabla_X Y, Z)\xi - f_1 g(Y, \nabla_X Z)\xi - f_1 g(Y, Z)\nabla_X \xi \\
& - \frac{1}{2}f_1 g(Y, Z)\varphi_3 X - f_1 g(Y, Z)\varphi_2 X + f_1^2 g(Y, Z)\eta(X)\xi - \frac{1}{2}\eta(\nabla_X Z)\varphi_3 Y \\
& + \frac{1}{2}\eta(Y)\varphi_3 \nabla_X Z - \eta(\nabla_X Z)\varphi_2 Y + \eta(Y)\varphi_1 \nabla_X Z + f_1 g(Y, \nabla_X Z)\xi + g(\nabla_Y \xi, X)\varphi_1 Z \\
& + \eta(\nabla_Y X)\varphi_1 Z + \eta(X)(\nabla_Y \varphi_1)Z + \eta(X)\varphi_1 \nabla_Y Z - \eta(X)f_1 g(Y, \varphi_1 Z)\xi \\
& - g(\nabla_Y \xi, Z)\varphi_2 X - \eta(\nabla_Y Z)\varphi_2 X - \eta(Z)(\nabla_Y \varphi_2)X - \eta(Z)\varphi_2 \nabla_Y X \\
& + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_2 X + \eta(Y)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_2 X + \eta(Z)f_1 g(Y, \varphi_2 X)\xi \\
& - \frac{1}{2}\eta(\nabla_Y Z)\varphi_3 X - \frac{1}{2}g(\nabla_Y \xi, Z)\varphi_3 X - \frac{1}{2}\eta(Z)(\nabla_Y \varphi_3)X - \frac{1}{2}\eta(Z)\varphi_3 \nabla_Y X \\
& + \frac{1}{4}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_3 \varphi_3 X + \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)\varphi_1 \varphi_3 X + \frac{1}{2}\eta(Z)f_1 g(Y, \varphi_3 X)\xi \\
& + \frac{1}{2}\eta(\nabla_Y X)\varphi_3 Z + \frac{1}{2}g(\nabla_Y \xi, X)\varphi_3 Z + \frac{1}{2}\eta(X)(\nabla_Y \varphi_3)Z \\
& + \frac{1}{2}\eta(X)\varphi_3 \nabla_Y Z - \eta(X)\frac{1}{2}f_1 g(Y, \varphi_3 Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + f_1 g(\nabla_Y X, Z)\xi \\
& + f_1 g(X, \nabla_Y Z)\xi + f_1 g(X, Z)\nabla_Y \xi + \frac{1}{2}f_1 g(X, Z)\varphi_3 Y + f_1 g(X, Z)\varphi_2 Y \\
& - f_1^2 g(Y, Z)\eta(X)\xi + \eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\varphi_1 Z - \eta(Z)\varphi_2 \nabla_X Y + \eta(Z)\varphi_2 \nabla_Y X \\
& - \frac{1}{2}\{\eta(Z)\varphi_3 \nabla_X Y - \eta(Z)\varphi_3 \nabla_Y X - \eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\varphi_3 Z\} + f_1 g(\nabla_X Y \\
& - \nabla_Y X, Z)\xi
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Son olarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında (2.19) bulunur.

Buradan itibaren (2.9) ile tanımlı koneksiyonumuz sınıflandırılarak özel türlerini inceleyeceğiz:

2.1. (2.9) ile Tanımlı Koneksiyonun Sınıflandırılması

Bu bölümde (2.9) ile tanımlı koneksiyona bağlı bazı özel koneksiyon türleri vereceğiz:

i) (2.9) denkleminde $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ alınırsa koneksiyonumuz

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y) - f_1 g(X, Y)\xi \quad (2.1.1)$$

haline dönüşür. (2.1.1) ile tanımlı bu koneksiyonumuz (2.3) ve (2.4) ifadelerini sağladığından, hemen hemen değme metrik manifold üzerinde **çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon** olarak adlandırılır. İleride karışıklık yaşamamak için (2.1.1) ile verilen bu koneksiyona (M, φ_3, f_1) koneksiyonu olarak adlandıracacağız.

Bu koneksiyona bağlı eğrilik tensörü $\bar{R}$ yi bulabilmek için, (2.19) denkleminde özel olarak $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ alındığında

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \frac{1}{2}g(\nabla_X \xi, Z)\varphi Y + \frac{1}{2}\eta(Z)(\nabla_X \varphi)Y \\ &\quad - \frac{1}{4}\eta(X)\eta(Z)\varphi^2 Y - \frac{1}{2}f_1\eta(Z)g(X, \varphi Y)\xi - \frac{1}{2}g(\nabla_X \xi, Y)\varphi Z \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta(Y)(\nabla_X \varphi)Z + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(X, \varphi Z)\xi - (Xf_1)g(Y, Z)\xi - f_1g(Y, Z)\nabla_X \xi \\ &\quad - \frac{1}{2}f_1g(Y, Z)\varphi X + f_1^2g(Y, Z)\eta(X)\xi - \frac{1}{2}g(\nabla_Y \xi, Z)\varphi X - \frac{1}{2}\eta(Z)(\nabla_Y \varphi)X \\ &\quad + \frac{1}{4}\eta(Y)\eta(Z)\varphi^2 X + \frac{1}{2}\eta(Z)f_1g(Y, \varphi X)\xi + \frac{1}{2}g(\nabla_Y \xi, X)\varphi Z \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta(X)(\nabla_Y \varphi)Z - \eta(X)\frac{1}{2}f_1g(Y, \varphi Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + f_1g(X, Z)\nabla_Y \xi \\ &\quad + \frac{1}{2}f_1g(X, Z)\varphi Y \\ &\quad - f_1^2g(Y, Z)\eta(X)\xi \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

bulunur.

ii) Şimdi (2.9) ile tanımlı koneksiyonumuzda $\varphi_2 = 0$ $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$ alalım. Bu durumda

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X)\varphi Y \quad (2.1.3)$$

koneksiyonu elde edilir. O halde (2.1.3) koneksiyonu (2.3) ve (2.5) gereği **çeyrek simetrik metrik koneksiyon** olarak adlandırılır. Bu koneksiyona bundan sonra kısaca (M, φ_1) koneksiyonu olarak adlandıracağız (Yano ve Imai, 1982). Ayrıca bu koneksiyona bağlı eğrilik tensörü $\bar{R}$ yi vermek istersek, (2.21) denkleminde $\varphi_2 = 0$, $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$ yazalım.

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(\nabla_X \xi, Y)\varphi Z - \eta(Y)(\nabla_X \varphi)Z + g(\nabla_Y \xi, X)\varphi Z + \eta(X)(\nabla_Y \varphi)Z \quad (2.1.4)$$

olduğu kolayca görülebilir.

iii) Özel olarak (2.9) denkleminde $\varphi_1 = 0$, $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$ alınırsa koneksiyonumuz

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)\varphi X \quad (2.1.5)$$

haline dönüşür. Bu denklem (2.3) ve (2.5) ifadelerini sağladığından **çeyrek simetrik metrik olmayan** adı verilir (Sengupta ve Biswas, 2003). Bu koneksiyona (M, φ_2) koneksiyonu olarak adlandıracağız.

Ayrıca bu koneksiyona bağlı eğrilik tensörü $\bar{R}$ yi bulabilmek için, (2.21) denkleminde

$\varphi_1 = 0$, $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$ alındığında denklem

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(\nabla_X \xi, Z)\varphi Y + \eta(Z)(\nabla_X \varphi)Y - g(\nabla_Y \xi, Z)\varphi X - \eta(Z)(\nabla_Y \varphi)X \quad (2.1.6)$$

halini alır.

iv) Son olarak (2.9) denkleminde $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 X = X$, $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$ alınırsa koneksiyonumuz

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)X \quad (2.1.7)$$

haline dönüşür. Bu denkleme **yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyon** adı verilir (Agashe ve Chafle, 1992). Bu koneksiyona (M, I) koneksiyonu olarak adlandıracağız. Ayrıca bu koneksiyona bağlı eğrilik tensörü $\bar{R}$ için (2.21) denkleminde $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 X = X$, $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$ alalım. Buradan

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + g(Z, \nabla_X \xi)Y - g(Z, \nabla_Y \xi)X \quad (2.1.8)$$

elde edilir.

Verilen koneksiyonları tek bir çizelgede gösterelim:

Çizelge 2.1. (2.9) ile tanımlı çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonun özel hallerinin incelenmesi

$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(X)\varphi_1 Y + \eta(Y)\varphi_2 X + \frac{1}{2}(\eta(Y)\varphi_3 X - \eta(X)\varphi_3 Y) - f_1 g(X, Y)\xi$ ile tanımlı çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyon			
(M, φ_3, f_1) ile tanımlı çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyon	(M, φ_1) ile tanımlı çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyon	(M, φ_2) ile tanımlı çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyon	(M, I) ile tanımlı yarı simetrik metrik koneksiyon
$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$	$\varphi_2 = 0$ $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$	$\varphi_1 = 0,$ $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$	$\varphi_1 = 0, \varphi_2 X = X,$ $\varphi_3 = 0$ ve $f_1 = 0$
$\bar{\nabla}_X Y$ $= \nabla_X Y + \frac{1}{2}\eta(Y)\varphi X$ $-\frac{1}{2}\eta(X)\varphi Y$ $- f_1 g(X, Y)\xi$	$\bar{\nabla}_X Y$ $= \nabla_X Y - \eta(X)\varphi Y$	$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)\varphi X$	$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)X$

3. FARKLI KONEKSİYONLARLA VERİLMİŞ MANİFOLDLAR İÇİN BAZI EĞRİLİK ŞARTLARI VE RİCCİ SOLİTONLAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısmında (M, I) koneksiyonu ile verilen n -boyutlu Kenmotsu manifoldlar üzerinde bazı eğrilik şartları incelenecektir. İkinci kısımda ise (M, φ_1) koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlar ve (M, φ_2) koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldlar için Ricci soliton kavramı ele alınacaktır. Ancak bunlara değinmeden önce Tanım 1.2.1 ve Tanım 1.2.2 yardımıyla Kenmotsu manifoldları için şu tanımlamaları verelim:

Tanım 3.1.: $M, 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere, eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$C(X, Y)\xi = 0, \quad (3.1)$$

eşitliği sağlanırsa, manifold düzlemsel ξ -konformal olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.: $M, 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifold olmak üzere, eğer $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\check{C}(X, Y)\xi = 0, \quad (3.2)$$

eşitliği sağlanırsa, manifold düzlemsel ξ -quasi konformal olarak adlandırılır.

3.1. (M, I) Koneksiyonu İle Verilen Kenmotsu Manifoldları İçin Bazı Eğrilik Şartları

Önerme 3.1.1.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için R ile $\bar{R}$ arasındaki bağıntı

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y + 2\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\}, \quad (3.1.1)$$

dir (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: Yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyon $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için hemen hemen değme metrik manifoldlarda (2.1.8) denklemini bulmuştuk. M bir n -boyutlu Kenmotsu manifoldu olduğundan (2.1.8) denkleminde (1.2.20) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + g(X, Z)Y - \eta(X)\eta(Z)Y + \eta(Y)\eta(Z)X - g(Y, Z)X + \eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad - \eta(X)\eta(Z)Y,\end{aligned}$$

elde edilir ki burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\bar{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y + 2\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\},$$

dir.

Önerme 3.1.2.: Bir $2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{R}(\xi, Y)Z = 2\{-g(Y, Z)\xi + \eta(Y)\eta(Z)\xi\}, \quad (3.1.2)$$

biçimindedir (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: (3.1.1) denkleminde $X = \xi$ alındığında

$$\bar{R}(\xi, Y)Z = R(\xi, Y)Z - g(Y, Z)\xi + \eta(Z)Y + 2\{\eta(Y)\eta(Z)\xi - \eta(Z)Y\},$$

elde edilir. M bir Kenmotsu manifoldu olduğundan (1.2.21) denklemi yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\bar{R}(\xi, Y)Z = 2\{-g(Y, Z)\xi + \eta(Y)\eta(Z)\xi\},$$

halini alır.

Ayrıca (3.1.1) denkleminde sırasıyla ilk önce $X=Y$, $Y=Z$ ve $Z=X$ olarak alındığında

$$\bar{R}(Y, Z)X = R(Y, Z)X - g(Z, X)Y + g(Y, X)Z + 2\{\eta(Z)\eta(X)Y - \eta(Y)\eta(X)Z\}, \quad (3.1.3)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.1.3) denkleminde sırasıyla $Y=Z$, $Z=X$ ve $X=Y$ yazıldığında

$$\bar{R}(Z, X)Y = R(Z, X)Y - g(X, Y)Z + g(Z, Y)X + 2\{\eta(X)\eta(Y)Z - \eta(Z)\eta(Y)X\}, \quad (3.1.4)$$

elde edilir. Son olarak (3.1.1), (3.1.3) ve (3.1.4) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y = 0, \quad (3.1.5)$$

sonucu ortaya çıkar. Buradan aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.1.1.: Bir $2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan

koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (3.1.5) gereği bu koneksiyona bağlı I. Bianchi özdeşliği sağlanır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

Önerme 3.1.3.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyon $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skaler eğriliği sırasıyla $\bar{S}$, $\bar{Q}$ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) - (n - 1)g(Y, Z) + 2(n - 1)\eta(Y)\eta(Z), \quad (3.1.6)$$

$$\bar{Q}Y = QY - (n - 1)Y + 2(n - 1)\eta(Y)\xi, \quad (3.1.7)$$

$$\bar{\tau} = \tau - (n - 1)(n - 2), \quad (3.1.8)$$

biçimindedir (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat : (3.1.1) denkleminin her iki yanını $U \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Z, U) &= g(R(X, Y)Z, U) + g(X, Z)g(Y, U) - g(Y, Z)g(X, U) \\ &\quad + 2\{\eta(Y)\eta(Z)g(X, U) - \eta(X)\eta(Z)g(Y, U)\}, \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da X ve U vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) - (n - 1)g(Y, Z) + 2(n - 1)\eta(Y)\eta(Z),$$

elde edilir. (3.1.6) denklemi $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{Q}Y = QY - (n - 1)Y + 2(n - 1)\eta(Y)\xi,$$

haline dönüşür. Son olarak (3.1.6) denkleminde Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{\tau} = \tau - (n - 1)n + 2(n - 1) = \tau - (n - 1)(n - 2),$$

bulunur.

Önerme 3.1.4.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde (M, I) ile tanımlı yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Weyl konformal eğrilik tensörü ve quasi-konformal eğrilik tensörü sırasıyla $\bar{C}$ ve $\bar{\check{C}}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{C}(X, Y)Z &= C(X, Y)Z + \frac{2}{n-2} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
&\quad - \frac{2(n-1)}{(n-2)} \{g(Y, Z)\eta(X)\xi \\
&\quad - g(X, Z)\eta(Y)\xi\}
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\bar{\check{C}}(X, Y)Z \\
&= \check{C}(X, Y)Z \\
&+ \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - a - 2(n-1)b \right\} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \\
&+ 2(n-1)b \{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi\} + 2\{a + 2(n-1)b\}(\eta(Y)\eta(Z)X \\
&- \eta(X)\eta(Z)Y),
\end{aligned} \tag{3.1.10}$$

yazılabilir (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: İlk önce (1.1.7) denklemi ile verilen Weyl konformal eğrilik tensörünü ele alalım. M üzerinde (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Weyl konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
\bar{C}(X, Y)Z &= \bar{R}(X, Y)Z - \frac{1}{n-2} [\bar{S}(Y, Z)X - \bar{S}(X, Z)Y + g(Y, Z)\bar{Q}X - g(X, Z)\bar{Q}Y] \\
&\quad + \frac{\bar{\tau}}{(n-1)(n-2)} [g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem (3.1.1), (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\bar{C}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y + 2\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
&\quad - \frac{1}{n-2} \{S(Y, Z)X - (n-1)g(Y, Z)X + 2(n-1)\eta(Y)\eta(Z)X - S(X, Z)Y \\
&\quad + (n-1)g(X, Z)Y - 2(n-1)\eta(X)\eta(Z)Y + g(Y, Z)QX - (n-1)g(Y, Z)X \\
&\quad + 2(n-1)g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)QY + (n-1)g(X, Z)Y \\
&\quad - 2(n-1)g(X, Z)\eta(Y)\xi\} + \frac{\tau - (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} \{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}
\end{aligned}$$

halini alır. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}\bar{C}(X, Y)Z &= C(X, Y)Z + \frac{2}{n-2}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y + \eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\ &\quad - \frac{2(n-1)}{(n-2)}\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi\}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (1.1.8) denklemi göz önünde bulunduruluğunda $\bar{\nabla}$ ye göre quasi-konformal eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}\bar{\check{C}}(X, Y)Z &= a\bar{R}(X, Y)Z + b[\bar{S}(Y, Z)X - \bar{S}(X, Z)Y + g(Y, Z)\bar{Q}X - g(X, Z)\bar{Q}Y] \\ &\quad - \frac{\bar{\tau}}{n}\left\{\frac{a}{n-1} + 2b\right\}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]\end{aligned}$$

biçimindedir. (3.1.1), (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri kullanılarak bu denklem

$$\begin{aligned}\bar{\check{C}}(X, Y)Z &= a\{R(X, Y)Z - g(Y, Z)X + g(X, Z)Y + 2\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\}\} \\ &\quad + b[S(Y, Z)X - (n-1)g(Y, Z)X + 2(n-1)\eta(Y)\eta(Z)X - S(X, Z)Y \\ &\quad + (n-1)g(X, Z)Y - 2(n-1)\eta(X)\eta(Z)Y + g(Y, Z)QX - (n-1)g(Y, Z)X \\ &\quad + 2(n-1)g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)QY + (n-1)g(X, Z)Y \\ &\quad - 2(n-1)g(X, Z)\eta(Y)\xi] \\ &\quad - \frac{\tau - (n-1)(n-2)}{n}\left\{\frac{a}{n-1} + 2b\right\}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y],\end{aligned}$$

olarak yazılır. Son olarak gerekli sadeleştirmeler yapıldığında (3.1.10) denklemi elde edilir.

Teorem 3.1.1.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Weyl konformal eğrilik tensörü $\bar{C}$ olmak üzere, manifold bu koneksiyona bağlı düzlemsel konformal ise, Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: Kabul edelim ki (M, I) koneksiyonu ile verilen Kenmotsu manifoldu düzlemsel konformal olsun, yani Teorem 1.1.1 gereği

$$\bar{C}(X, Y)Z = 0,$$

dır. Bu takdirde (3.1.9) denklemi bir $W \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
& g(C(X, Y)Z, W) \\
& + \frac{2}{n-2} [g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W) + g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\
& - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)] + \frac{2(n-1)}{n-2} \{g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $W = \xi$ için son denklem

$$\eta(C(X, Y)Z) = 2[g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)], \quad (3.1.11)$$

halini alır. (3.1.11) denkleminde (1.1.7) ifadesi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& \eta(R(X, Y)Z) - \frac{1}{n-2} \{S(Y, Z)\eta(X) - S(X, Z)\eta(Y)\} \\
& + \left(\frac{\tau}{(n-1)(n-2)} + \frac{(n-1)}{n-2} - 2 \right) [g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)] = 0,
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde $X = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \eta(R(\xi, Y)Z) - \frac{1}{n-2} \{S(Y, Z) - S(\xi, Z)\eta(Y)\} \\
& + \left(\frac{\tau}{(n-1)(n-2)} + \frac{(n-1)}{n-2} - 2 \right) [g(Y, Z) - \eta(Z)\eta(Y)] = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (1.2.21) ve (1.2.22) ifadeleri kullanılırsa

$$S(Y, Z) = \left\{ 3 - 2(n-1) + \frac{\tau}{n-1} \right\} g(Y, Z) + \left\{ n - 1 - \frac{\tau}{n-1} - 3 \right\} \eta(Z)\eta(Y),$$

bulunur, ki bu da manifoldun η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.2.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M aynı zamanda Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre düzlemsel ξ -konformal şartını sağlar (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: C ve $\bar{C}$, bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu üzerinde sırasıyla Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Weyl konformal eğrilik tensörleri olsun. (3.1.9) denkleminde Z yerine ξ konulduğunda,

$$\begin{aligned}
\bar{C}(X, Y)\xi &= C(X, Y)\xi + \frac{2}{n-2} \{\eta(Y)X - \eta(X)Y + \eta(X)Y - \eta(Y)X\} - \frac{2(n-1)}{(n-2)} \{\eta(Y)\eta(X)\xi \\
&- \eta(X)\eta(Y)\xi\},
\end{aligned}$$

bulunur. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\bar{C}(X, Y)\xi = C(X, Y)\xi = 0,$$

elde edilir ki buradan (3.1) gereği manifoldumuzun hem ∇ hem de $\bar{\nabla}$ koneksiyonlarına göre düzlemsel $\check{C}$ -konformal olduğu görülür.

Teorem 3.1.3.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre quasi-konformal eğrilik tensörü $\check{C}$ olmak üzere, manifold bu koneksiyona bağlı düzlemsel quasi-konformal ise, Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: Kabul edelim ki (M, I) koneksiyonu ile verilen bir Kenmotsu manifoldu düzlemsel quasi-konformal olsun, yani Tanım 1.1.18 gereği

$$\check{C}(X, Y)Z = 0,$$

şartı sağlansın.

Öncelikle (3.1.10) denkleminin her iki tarafını bir $W \in \chi(M)$ vektör alanı ile iç çarpımını alalım:

$$\begin{aligned} g(\check{C}(X, Y)Z, W) &= g(\check{C}(X, Y)Z, W) + 2(n-1)b\{g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\} \\ &+ 2[a + 2(n-1)b\{g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\} \\ &+ \left\{\frac{(n-1)(n-2)}{n}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right) - a - 2(n-1)b\right\}[g(Y, Z)g(X, W) \\ &- g(X, Z)g(Y, W)], \end{aligned}$$

Yukarıdaki denklemde $W = \xi$ alındığında ve $\bar{\nabla}$ ye göre düzlemsel quasi-konformal olma şartı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \eta(\check{C}(X, Y)Z) &= -2(n-1)b\{g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)\} \\ &- \left\{\frac{(n-1)(n-2)}{n}\left(\frac{a}{n-1} + 2b\right) - a - 2(n-1)b\right\}[g(Y, Z)\eta(X) \\ &- g(X, Z)\eta(Y)], \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemde X yerine ξ konulursa

$$\begin{aligned}
& \eta(\dot{C}(\xi, Y)Z) \\
&= -2(n-1)b\{g(Y, Z) - \eta(X)\eta(Y)\} \\
&- \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - a - 2(n-1)b \right\} \{g(Y, Z) \\
&- g(X, Z)\eta(Y)\}, \tag{3.1.12}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.12) eşitliği (1.1.11), (1.2.28) ve (1.2.29) ifadeleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
& bS(Y, Z) + \left\{ \frac{(n-1)(n-2) - \tau}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2a - (n-1)b \right\} g(Y, Z) \\
& - \left\{ \frac{(n-1)(n-2) - \tau}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2a - 2(n-1)b \right\} \eta(Z)\eta(Y) = 0
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Son olarak yukarıdaki denklemin her iki tarafı da b ile bölünüp $S(Y, Z)$ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}
S(Y, Z) &= -\frac{1}{b} \left\{ \frac{(n-1)(n-2) - \tau}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2a - (n-1)b \right\} g(Y, Z) \\
&+ \frac{1}{b} \left\{ \frac{(n-1)(n-2) - \tau}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - 2a - 2(n-1)b \right\} \eta(Z)\eta(Y),
\end{aligned}$$

bulunur, ki bu da manifoldun ∇ koneksiyonuna göre η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.4.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M aynı zamanda Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre düzlemsel ξ -quasi konformaldır gerek ve yeter şart $a = 2(1-n)b$ dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: M , n -boyutlu Kenmotsu manifoldu aynı zamanda Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya ve (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre düzlemsel ξ -quasi konformal olsun, yani Tanım 3.2 gereği

$$\bar{\check{C}}(X, Y)\xi = \check{C}(X, Y)\xi = 0, \tag{3.1.13}$$

sağlansın. (3.1.10) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{C}(X, Y)\xi &= \check{C}(X, Y)\xi \\
&+ \left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{n} \left(\frac{a}{n-1} + 2b \right) - a - 2(n-1)b \right\} \{ \eta(Y)X \\
&- \eta(X)Y \} + 2(n-1)b \{ \eta(Y)\eta(X)\xi - \eta(Y)\eta(Y)\xi \} + 2\{a \\
&+ 2(n-1)b\}(\eta(Y)X \\
&- \eta(X)Y),
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (3.1.13) ifadesi gereğince ve gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$2 \frac{(n-1)}{n} (a + 2(n-1)b)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) = 0,$$

bulunur. Böylece kolayca $a = 2(1-n)b$ sağlandığı görülür. Tersi de benzer şekilde bulunabilir.

Teorem 3.1.5.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\bar{R}(X, Y) \cdot \bar{R} = 0$ şartını sağlar ise, $H^n(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: M n -boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. $(\bar{R} \cdot \bar{R}) = 0$ eşitliği $X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
&(\bar{R}(X, Y) \cdot \bar{R})(Z, U)W \\
&= \bar{R}(X, Y) \cdot \bar{R}(Z, U)W - \bar{R}(\bar{R}(X, Y)Z, U)W - \bar{R}(Z, \bar{R}(X, Y)U)W \\
&- \bar{R}(Z, U)\bar{R}(X, Y)W = 0,
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemde $X = \xi$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
&(\bar{R}(\xi, Y) \cdot \bar{R})(Z, U)W \\
&= \bar{R}(\xi, Y) \cdot \bar{R}(Z, U)W - \bar{R}(\bar{R}(\xi, Y)Z, U)W - \bar{R}(Z, \bar{R}(\xi, Y)U)W \\
&- \bar{R}(Z, U)\bar{R}(\xi, Y)W = 0,
\end{aligned}$$

olur. Yukarıda (3.1.2) eşitliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&g(Y, \bar{R}(Z, U)W) - \eta(\bar{R}(Z, U)W)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(\bar{R}(\xi, U)W) + \eta(Y)\eta(Z)\eta(\bar{R}(\xi, U)W) \\
&+ g(Y, U)\eta(\bar{R}(Z, \xi)W) - \eta(Y)\eta(U)\eta(\bar{R}(Z, \xi)W) = 0,
\end{aligned}$$

bulunur ki tekrardan (3.1.2) denklemi son denklemde yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
& g(Y, \bar{R}(Z, U)W) - \eta(\bar{R}(Z, U)W)\eta(Y) + 2g(Y, Z)g(U, W) - 2g(Y, Z)\eta(U)\eta(W) \\
& - 2g(U, W)\eta(Y)\eta(Z) - 2g(Y, U)g(Z, W) + 2g(Y, U)\eta(W)\eta(Z) \\
& + 2g(Z, W)\eta(U)\eta(Y) \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{3.1.14}$$

elde edilir. Son olarak (3.1.14) denkleminde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$g(Y, R(Z, U)W) = g(Z, W)g(U, Y) - g(U, W)g(Z, Y), \tag{3.1.15}$$

sonucuna ulaşılır. (3.1.15) denklemi de bize manifoldun -1 sabit eğrilikli olduğunu gösterir. Böylece M manifoldu $H^n(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir.

Teorem 3.1.6.: $n = 2m + 1$ -boyutlu bir Kenmotsu manifoldu M üzerinde (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre $\bar{R}(X, Y).R = 0$ şartını sağlar ise, manifold η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat : M n -boyutlu Kenmotsu manifoldu olsun. $(\bar{R}.R) = 0$ eşitliği $X, Y, Z, U, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
& (\bar{R}(X, Y).R)(Z, U)W \\
& = \bar{R}(X, Y).R(Z, U)W - R(\bar{R}(X, Y)Z, U)W - R(Z, \bar{R}(X, Y)U)W \\
& - R(Z, U)\bar{R}(X, Y)W = 0,
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu denklemde $X = \xi$ alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& (\bar{R}(\xi, Y).R)(Z, U)W \\
& = \bar{R}(\xi, Y).R(Z, U)W - R(\bar{R}(\xi, Y)Z, U)W - R(Z, \bar{R}(\xi, Y)U)W \\
& - R(Z, U)\bar{R}(\xi, Y)W = 0,
\end{aligned}$$

olur. Burada (3.1.2) denklemi kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& R(\xi, Y)R(Z, U)W - \eta(R(Z, U)W)Y - g(Y, R(Z, U)W)\xi + 2\eta(R(Z, U)W)\xi \\
& - R(R(\xi, Y)Z, U)W + \eta(Z)R(Y, U)W + \{g(Y, Z) - 2\eta(Y)\eta(Z)\}R(\xi, U)W \\
& - R(Z, R(\xi, Y)U)W + \eta(U)R(Z, Y)W - \{g(Y, U) - 2\eta(Y)\eta(U)\}R(\xi, Z)W \\
& - R(Z, U)R(\xi, Y)W + \eta(W)R(Z, U)Y + \{g(Y, W) - 2\eta(Y)\eta(W)\}R(Z, U)\xi \\
& = 0,
\end{aligned}$$

yazılabilir. (1.2.21) denklemi yardımıyla yukarıda denklem

$$\begin{aligned}
& -g(Y, R(Z, U)W) - g(Y, Z)g(U, W) + g(Y, Z)\eta(U)\eta(W) + g(Y, U)g(Z, W) \\
& - g(Y, U)\eta(Z)\eta(W) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

halini alır. (3.1.16) da $U = W = e_i$ alınır

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \{g(Y, R(Z, e_i)e_i) - g(Y, Z)g(e_i, e_i) + g(Y, Z)\eta(e_i)\eta(e_i) + g(Y, e_i)g(Z, e_i) \\
& - g(Y, e_i)\eta(Z)\eta(e_i)\} = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$S(Y, Z) = (2 - n)g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)$$

bulunur ki, bu da manifoldun ∇ koneksiyonuna göre η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.7.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M , (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre φ -simetrik manifold ise, manifold η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: M $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu olmak üzere $\bar{\nabla}$ ye bağlı φ -simetrik olarak verildiğinden Tanım 1.1.23 gereği

$$\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{R})(X, Y)Z) = 0,$$

şartını sağlayacaktır. (1.2.1) yardımıyla yukarıdaki denklem yerine

$$\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{R})(X, Y)Z) = -(\bar{\nabla}_W \bar{R})(X, Y)Z + \eta((\bar{\nabla}_W \bar{R})(X, Y)Z)\xi = 0,$$

yazılabilir. Ayrıca verilen koneksiyon özellikleri gereği

$$(\bar{\nabla}_W \bar{R})(X, Y)Z = \bar{\nabla}_W \bar{R}(X, Y)Z - \bar{R}(\bar{\nabla}_W X, Y)Z - \bar{R}(X, \bar{\nabla}_W Y)Z - \bar{R}(X, Y)\bar{\nabla}_W Z, \tag{3.1.17}$$

olacağı aşikardır. Şimdi yukarıdaki denklemin teker teker terimlerini (1.3.1) denklemi ve (M, I) koneksiyonu yardımıyla bulalım.

$$\begin{aligned}
\nabla_W \bar{R}(X, Y)Z &= \nabla_W R(X, Y)Z + g(\nabla_W X, Z)Y + g(X, \nabla_W Z)Y + g(X, Z)\nabla_W Y - g(\nabla_W Y, Z)X \\
&\quad - g(Y, \nabla_W Z)X - g(Y, Z)\nabla_W X + 2g(Y, W)\eta(Z)X - 4\eta(Y)\eta(Z)\eta(W)X \\
&\quad + 2\eta(\nabla_W Y)\eta(Z)X + 2g(W, Z)\eta(Y)X + 2\eta(\nabla_W Z)\eta(Y)X + 2\eta(Z)\eta(Y)\nabla_W X \\
&\quad - 2g(W, X)\eta(Z)Y + 4\eta(X)\eta(Z)\eta(W)Y - 2\eta(\nabla_W Z)\eta(X)Y - 2g(W, Z)\eta(X)Y \\
&\quad - 2\eta(\nabla_W Z)\eta(X)Y \\
&\quad - 2\eta(Z)\eta(X)\nabla_W Y,
\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{R}(\nabla_W X, Y)Z \\
&= R(\nabla_W X, Y)Z + g(\nabla_W X, Z)Y - g(Y, Z)\nabla_W X + 2\eta(Z)\eta(Y)\nabla_W X - 2\eta(\nabla_W X)\eta(Z)Y \\
&\quad + \eta(X)R(W, Y)Z + g(W, Z)\eta(X)Y - g(Y, Z)\eta(X)W + 2\eta(X)\eta(Z)\eta(Y)W \\
&\quad - 2\eta(X)\eta(W)\eta(Z)Y,
\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{R}(X, \nabla_W Y)Z \\
&= R(X, \nabla_W Y)Z + g(X, Z)\nabla_W Y - g(\nabla_W Y, Z)X + 2\eta(\nabla_W Y)\eta(Z)X + 2\eta(Z)\eta(X)\nabla_W Y \\
&\quad + \eta(Y)R(X, W)Z + g(Z, X)\eta(Y)W - g(W, Z)\eta(Y)X + 2\eta(W)\eta(Y)\eta(Z)X \\
&\quad - 2\eta(X)\eta(Z)\eta(Y)W,
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{R}(X, Y)\nabla_W Z \\
&= R(X, Y)\nabla_W Z + g(X, \nabla_W Z)Y - g(Y, \nabla_W Z)X + 2\eta(Y)\eta(\nabla_W Z)X + 2\eta(\nabla_W Z)\eta(X)Y \\
&\quad + \eta(Z)R(X, Y)W + g(W, X)\eta(Z)Y - g(W, Y)\eta(Z)X + 2\eta(W)\eta(Y)\eta(Z)X \\
&\quad - 2\eta(X)\eta(Z)\eta(W)Y,
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

(3.1.18)-(3.1.21) denklemleri (3.1.17) de kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&(\nabla_W R)(X, Y)Z + 3g(Y, W)\eta(Z)X - 8\eta(Y)\eta(Z)\eta(W)X + 3g(W, Z)\eta(Y)X - 3g(W, X)\eta(Z)Y \\
&\quad + 8\eta(X)\eta(Z)\eta(W)Y - 3g(W, Z)\eta(X)Y + \eta(R(X, Y)Z)W - \eta(X)R(W, Y)Z \\
&\quad - \eta(Y)R(X, W)Z - \eta(Z)R(X, Y)W \\
&= \eta((\nabla_W R)(X, Y)Z)\xi + 3g(Y, W)\eta(Z)\eta(X)\xi - 3g(W, X)\eta(Z)\eta(Y)\xi \\
&\quad + \eta(R(X, Y)Z)\eta(W)\xi - \eta(X)\eta(R(W, Y)Z)\xi - \eta(Y)\eta(R(X, W)Z)\xi \\
&\quad - \eta(Z)\eta(R(X, Y)W)\xi,
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki yanını bir U vektör alanı ile iç çarpalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& g((\nabla_W R)(X, Y)Z, U) + 3g(Y, W)\eta(Z)g(X, U) - 8\eta(Y)\eta(Z)\eta(W)g(X, U) \\
& + 3g(W, Z)\eta(Y)g(X, U) - 3g(W, X)\eta(Z)g(Y, U) + 8\eta(X)\eta(Z)\eta(W)g(Y, U) \\
& - 3g(W, Z)\eta(X)g(Y, U) + \eta(R(X, Y)Z)g(W, U) - \eta(X)g(R(W, Y)Z, U) \\
& - \eta(Y)g(R(X, W)Z, U) - \eta(Z)g(R(X, Y)W, U) \\
& = \eta((\nabla_W R)(X, Y)Z)\eta(U) + 3g(Y, W)\eta(Z)\eta(X)\eta(U) \\
& - 3g(W, X)\eta(Z)\eta(Y)\eta(U) + \eta(R(X, Y)Z)\eta(W)\eta(U) \\
& - \eta(X)\eta(R(W, Y)Z)\eta(U) - \eta(Y)\eta(R(X, W)Z)\eta(U) \\
& - \eta(Z)\eta(R(X, Y)W)\eta(U),
\end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde X ve U ya göre kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned}
& (\nabla_W S)(Y, Z) + 3ng(Y, W)\eta(Z) - 8n\eta(Y)\eta(Z)\eta(W) + 3ng(W, Z)\eta(Y) - 3g(W, Y)\eta(Z) \\
& + 8\eta(Y)\eta(Z)\eta(W) - 3g(W, Z)\eta(Y) + \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, Y)Z)g(W, e_i) \\
& - \eta(R(W, Y)Z) - \eta(Y)S(W, Z) - \eta(Z)S(Y, W)) \\
& = \sum_{i=1}^n \eta((\nabla_W R)(e_i, Y)Z)\eta(e_i) + 3g(Y, W)\eta(Z) - 3\eta(Z)\eta(Y)\eta(W) \\
& + \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, Y)Z)\eta(W)\eta(e_i) - \eta(R(W, Y)Z) - \eta(Y) \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, W)Z)\eta(e_i) \\
& - \eta(Z) \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, Y)W)\eta(e_i),
\end{aligned}$$

yazılabilir. $Z = \xi$ için yukarıdaki denklem

$$(\nabla_W S)(Y, \xi) + 3ng(Y, W) - 8n\eta(Y)\eta(W) + 3n\eta(W)\eta(Y) + (3n - 3)g(W, Y)$$

$$\begin{aligned}
& + (8 - 8n)\eta(Y)\eta(W) + \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, Y)\xi)g(W, e_i) - \eta(R(W, Y)\xi) \\
& - \eta(Y)S(W, \xi)S(Y, W) \\
& = \sum_{i=1}^n \eta((\nabla_W R)(e_i, Y)\xi)\eta(e_i) + 3g(Y, W) - 3\eta(Y)\eta(W) \\
& + \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, Y)\xi)\eta(W)\eta(e_i) - \eta(R(W, Y)\xi) - \eta(Y) \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, W)\xi)\eta(e_i) \\
& - \sum_{i=1}^n \eta(R(e_i, Y)W)\eta(e_i),
\end{aligned}$$

halinir alır ki gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$S(Y, W) = \frac{3n-5}{2}g(Y, W) + \frac{7-5n}{2}\eta(Y)\eta(W),$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize manifoldun ∇ koneksiyonuna göre η -Einstein manifold olduğunu gösterir.

Theorem 3.1.8.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. M , (M, I) yarı-simetrik metrik olmayan $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre düzlemsel φ -konformal ise, manifold η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2013).

İspat: (M, I) koneksiyonu ile verilen bir Kenmotsu manifoldu düzlemsel φ -konformal olsun, yani Tanım 1.1.25 gereği

$$g(\bar{C}(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) = 0,$$

sağlansın. Bu durumda (3.1.9) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& g(\bar{C}(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) \\
& = g(\bar{R}(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) \\
& - \frac{1}{n-2} \{ \bar{S}(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) - \bar{S}(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W) \\
& + \bar{S}(\varphi X, \varphi W)g(\varphi Y, \varphi Z) - \bar{S}(\varphi Y, \varphi W)g(\varphi X, \varphi Z) \} \\
& + \frac{\bar{\tau}}{(n-2)(n-1)} \{ g(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) - g(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W) \} = 0
\end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned}
& g(R(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) - g(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) + g(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W) \\
&= \frac{1}{n-2} \{S(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) - S(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W) \\
&+ S(\varphi X, \varphi W)g(\varphi Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, \varphi W)g(\varphi X, \varphi Z)\} \\
&+ \left\{ \frac{\tau}{(n-2)(n-1)} + \frac{4n}{n-2} \right\} \{g(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) \\
&- g(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W)\},
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son denklemde $X \rightarrow \varphi X, Y \rightarrow \varphi Y, Z \rightarrow \varphi Z, W \rightarrow \varphi W$ alınır

$$\begin{aligned}
& g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)\xi, Z)\eta(W) - g(R(X, Y)\xi, W)\eta(Z) + g(R(\xi, X)Z, W)\eta(Y) \\
&- g(R(\xi, X)\xi, W)\eta(Y)\eta(Z) - g(R(\xi, X)Z, \xi)\eta(Y)\eta(W) \\
&- g(R(\xi, Y)Z, W)\eta(X) + g(R(\xi, Y)Z, \xi)\eta(X)\eta(W) \\
&- g(R(\xi, Y)\xi, W)\eta(X)\eta(Z) - g(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) + g(X, Z)g(Y, W) \\
&- g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) - g(Y, Z)g(X, W) \\
&+ g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) + g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\
&= \frac{1}{n-2} \{S(Y, Z)g(X, W) - S(X, Z)g(Y, W) + S(X, W)g(Y, Z) \\
&- S(Y, W)g(X, Z) + S(Y, W)g - S(X, W)g(Y, Z) - S(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W) \\
&+ S(\varphi X, \varphi W)g(\varphi Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, \varphi W)g(\varphi X, \varphi Z)\} \\
&+ \frac{n-1}{n-2} \{3g(X, W)\eta(Y)\eta(Z) - 2g(X, W)g(Y, Z) + 3g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) \\
&- 3g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) - 2g(Y, W)g(X, Z) + 3g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\} \\
&+ \left\{ \frac{\tau}{(n-2)(n-1)} \right\} \{g(X, W)g(Y, Z) \\
&- g(X, W)\eta(Y)\eta(Z)g(\varphi Y, \varphi Z)g(\varphi X, \varphi W) - g(\varphi X, \varphi Z)g(\varphi Y, \varphi W)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Burada X ve W ye göre kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned}
S(Y, Z) &= \left\{ (n-1)(5-2n) + \tau + (n-1)(n-2) + \bar{\tau} \frac{n-2}{n-1} \right\} g(Y, Z) \\
&+ \left\{ (n-1)(-8+3n) - \tau - 2(n-1)(n-2) - \bar{\tau} \frac{n-2}{n-1} \right\} \eta(Y)\eta(Z),
\end{aligned}$$

yazılabilir. Manifold η -Einstein manifolddur.

Theorem 3.1.9.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu M olsun. $M, (M, I)$ yarı-simetrik metrik olmayan $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre φ -konformal simetrik manifold ise, manifold η -Einstein manifolddur.

İspat: M $n = 2m + 1$ -boyutlu Kenmotsu manifoldu olmak üzere $\bar{\nabla}$ ye bağlı φ -konformal simetrik olarak verildiğinden Tanım 1.1.24 gereği

$$\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z) = 0,$$

şartını sağlayacaktır. (1.2.1) yardımıyla yukarıdaki denklem yerine

$$\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z) = -(\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z + \eta((\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z)\xi = 0,$$

yazılabilir. Ayrıca

$$(\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z = \bar{\nabla}_W \bar{C}(X, Y)Z - \bar{C}(\bar{\nabla}_W X, Y)Z - \bar{C}(X, \bar{\nabla}_W Y)Z - \bar{C}(X, Y)\bar{\nabla}_W Z,$$

olacağı aşıkardır. Buradan (M, I) koneksiyonu ve (3.1.9) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} \varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z) &= -\nabla_W C(X, Y)Z + C(\nabla_W X, Y)Z + C(X, \nabla_W Y)Z + C(X, Y)\nabla_W Z \\ &+ \eta(Z)C(X, Y)W + \eta(\nabla_W C(X, Y)Z)\xi - \eta(C(\nabla_W X, Y)Z)\xi - \eta(C(X, \nabla_W Y)Z)\xi \\ &- \eta(C(X, Y)\nabla_W Z)\xi \\ &- \frac{2}{n-2} [4\eta(Y)\eta(Z)\eta(W)X - 4\eta(X)\eta(Z)\eta(W)Y - 2g(Y, W)\eta(Z)X \\ &+ 2g(W, X)\eta(Z)Y - 2g(W, Z)\eta(Y)X + 2g(W, Z)\eta(X)Y \\ &- 2g(W, X)\eta(Z)\eta(Y)\xi + 2g(W, Y)\eta(Y)\eta(X)\xi] \\ &+ \frac{2(1-n)}{n-2} \{3g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\xi - 3g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\xi + 2g(X, Z)\eta(Y)W \\ &- 2g(Y, Z)\eta(X)W - g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\xi + g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\xi\} \\ &+ \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\xi - (n-1)g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\xi \\ &- S(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\xi + (n-1)g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\xi + S(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\xi \\ &- S(X, W)\eta(Y)\eta(Z)\xi - (n-1)g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\xi \\ &+ (n-1)g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\xi] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [-g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\xi \\ &+ g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\xi - g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\xi + g(X, W)\eta(Y)\eta(Z)\xi \\ &+ g(Y, Z)\eta(X)\eta(W)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)\xi + g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)\xi \\ &- g(X, W)\eta(Y)\eta(Z)\xi] \end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafını bir U vektörü ile iç çarpımı alındığında ve X ve U ya bağlı kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n g(\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{C})(e_i, Y)Z, e_i)) \\
&= - \sum_{i=1}^n g(\nabla_W C(e_i, Y)Z, e_i) + \sum_{i=1}^n g(C(\nabla_W e_i, Y)Z, e_i) \\
&+ \sum_{i=1}^n g(C(e_i, \nabla_W Y)Z, e_i) + \sum_{i=1}^n g(C(e_i, Y)\nabla_W Z, e_i) \\
&+ \sum_{i=1}^n \eta(Z)g(C(e_i, Y)W, e_i) + \sum_{i=1}^n \eta(\nabla_W C(e_i, Y)Z)\eta(e_i) \\
&- \sum_{i=1}^n \eta(C(\nabla_W e_i, Y)Z)\eta(e_i) - \sum_{i=1}^n \eta(C(e_i, \nabla_W Y)Z)\eta(e_i) \\
&- \sum_{i=1}^n \eta(C(e_i, Y)\nabla_W Z)\eta(e_i) \\
&- \frac{2}{n-2} [4n\eta(Y)\eta(Z)\eta(W) - 4\eta(Y)\eta(Z)\eta(W) - 2ng(Y, W)\eta(Z) \\
&+ 2g(W, Y)\eta(Z) - 2ng(W, Z)\eta(Y) + 2g(W, Z)\eta(Y) - 2\eta(W)\eta(Z)\eta(Y) \\
&+ 2g(W, Y)\eta(Y)] \\
&+ \frac{2(1-n)}{n-2} \{3g(Y, Z)\eta(W) - 3\eta(Z)\eta(Y)\eta(W) + 2g(W, Z)\eta(Y) \\
&- 2g(Y, Z)\eta(W) - g(Y, Z)\eta(W) + \eta(Z)\eta(Y)\eta(W)\} \\
&+ \frac{1}{n-2} [S(Y, Z)\eta(W) - (n-1)g(Y, Z)\eta(W) - S(X, Z)\eta(Y)\eta(W) \\
&+ (n-1)g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) + S(Y, W)\eta(X)\eta(Z) - S(X, W)\eta(Y)\eta(Z) \\
&- (n-1)g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) + (n-1)g(Y, W)\eta(X)\eta(Z)] \\
&+ \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} [-g(Y, Z)\eta(W) + \eta(Z)\eta(Y)\eta(W)\eta(X) \\
&- g(Y, W)\eta(X)\eta(Z) + g(X, W)\eta(Y)\eta(Z)] + g(Y, Z)\eta(W) \\
&- g(X, Z)\eta(Y)\eta(W) + g(Y, W)\eta(Z) - \eta(X)\eta(Y)\eta(Z),
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Z=\xi$ için

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n g(\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{C})(e_i, Y)\xi, e_i)) \\
&= - \sum_{i=1}^n g(\nabla_W C(e_i, Y), e_i) + \sum_{i=1}^n g(C(\nabla_W e_i, Y), e_i) + \sum_{i=1}^n g(C(e_i, \nabla_W Y), e_i) \\
&+ \sum_{i=1}^n g(C(e_i, Y)\nabla_W \xi, e_i) + \sum_{i=1}^n g(C(e_i, Y)W, e_i) + \sum_{i=1}^n \eta(\nabla_W C(e_i, Y)\xi)\eta(e_i) \\
&- \sum_{i=1}^n \eta(C(\nabla_W e_i, Y)\xi)\eta(e_i) - \sum_{i=1}^n \eta(C(e_i, \nabla_W Y)\xi)\eta(e_i) \\
&- \sum_{i=1}^n \eta(C(e_i, Y)\nabla_W \xi)\eta(e_i) \\
&- \frac{2}{n-2} \{4n\eta(Y)\eta(W) - 4\eta(Y)\eta(W) - 2ng(Y, W) + 2g(W, Y) \\
&- 2n\eta(W)\eta(Y) + 2\eta(W)\eta(Y)\} + \frac{1}{n-2} \{S(Y, \xi)\eta(W) + 2(n-1)\eta(Y)\eta(W) \\
&- (n-1)g(Y, W)\eta(X)\} + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)} \{-g(Y, W) + \eta(Y)\eta(W)\} \\
&+ g(Y, W) - \eta(Y)\eta(W),
\end{aligned}$$

olup, yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
S(Y, W) &= \frac{n-2}{2} \left[\frac{\tau}{(n-1)(n-2)} + \frac{2n-3}{n-2} - 6 \right] g(Y, W) \\
&- \frac{n-2}{2} \left[\frac{\tau}{(n-1)(n-2)} + \frac{4n-5}{n-2} - 6 \right] \eta(Y)\eta(W),
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

3.2. Ricci Solitonlar

M n -boyutlu Riemann manifoldu üzerinde L lie operatörü, S Ricci tensörü, V , M üzerinde düzgün vektör alanı (potansiyel vektör alanı) ve λ da sabit olmak üzere

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

şartını sağlayan g metriğine Ricci soliton dendiği biliyoruz. Bu kısımda (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu ile verilen 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldlar ve (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilen 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldlar için temel bazı özellikler verilecek daha sonra ise Ricci solitonlar irdelenecektir.

3.2.1. (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu ile verilen 3-boyutlu trans-Sasakian

Manifoldlar

Önerme 3.2.1.1.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_1) çeyrek-simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için R ile $\bar{R}$ arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + 2\alpha g(\varphi X, Y)\varphi Z + \alpha\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &\quad + \beta\{\eta(Y)\eta(Z)\varphi X - \eta(X)\eta(Z)\varphi Y\} + \alpha\{\eta(X)g(Y, Z)\xi - \eta(Y)g(X, Z)\xi\} \\ &\quad - \beta\{\eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi \\ &\quad - \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi\}\end{aligned}\quad (3.2.1.1)$$

dir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: Çeyrek-simetrik metrik koneksiyon $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için hemen hemen değme metrik manifoldlarda (2.1.4) denklemini bulmuştuk. M bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifold olduğundan (2.1.4) denkleminde (1.2.34) ve (1.2.35) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \eta(Y)[\alpha\{g(X, Z)\xi - \eta(Z)X\} + \beta\{g(\varphi X, Z)\xi - \eta(Z)\varphi X\}] \\ &\quad + \eta(X)[\alpha\{g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y\} + \beta\{g(\varphi Y, Z)\xi - \eta(Z)\varphi Y\}] \\ &\quad - g(Y, -\alpha\varphi X + \beta\{X - \eta(X)\xi\})\varphi Z + g(X, -\alpha\varphi Y + \beta\{Y - \eta(Y)\xi\})\varphi Z\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + 2\alpha g(\varphi X, Y)\varphi Z + \alpha\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &\quad + \beta\{\eta(Y)\eta(Z)\varphi X - \eta(X)\eta(Z)\varphi Y\} + \alpha\{\eta(X)g(Y, Z)\xi - \eta(Y)g(X, Z)\xi\} \\ &\quad - \beta\{\eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi - \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi\}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.2.1.2.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_1) çeyrek-simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + (2\alpha\beta + \beta)(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y) + (Y\alpha)\varphi X \\ &\quad - (X\alpha)\varphi Y + (Y\beta)\varphi^2 X \\ &\quad - (X\beta)\varphi^2 Y\end{aligned}\quad (3.2.1.2)$$

dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: İlk olarak (3.2.1.1) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= R(X, Y)\xi + 2\alpha g(\varphi X, Y)\varphi\xi + \alpha\{\eta(Y)\eta(\xi)X - \eta(X)\eta(\xi)Y\} \\ &\quad + \beta\{\eta(Y)\eta(\xi)\varphi X - \eta(X)\eta(\xi)\varphi Y\} + \alpha\{\eta(X)g(Y, \xi)\xi - \eta(Y)g(X, \xi)\xi\} \\ &\quad - \beta\{\eta(Y)g(\varphi X, \xi)\xi - \eta(X)g(\varphi Y, \xi)\xi\},\end{aligned}$$

bulunur. M bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu olduğundan (1.2.2), (1.2.3) ve (1.2.36) denklemleri yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= (\alpha^2 - \beta^2)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + 2\alpha\beta(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y) + (Y\alpha)\varphi X - (X\alpha)\varphi Y \\ &\quad + (Y\beta)\varphi^2 X - (X\beta)\varphi^2 Y + \alpha\{\eta(Y)X - \eta(X)Y\} + \beta\{\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y\}\end{aligned}$$

halini alır. Son olarak burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + (2\alpha\beta + \beta)(\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y) + (Y\alpha)\varphi X \\ &\quad - (X\alpha)\varphi Y + (Y\beta)\varphi^2 X - (X\beta)\varphi^2 Y\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.1.3.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_1) çeyrek-simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

sağlanır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: (3.2.1.1) denkleminde sırasıyla $Y = X$ ve $X = Y$ alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y, X)Z &= R(Y, X)Z + 2\alpha g(\varphi Y, X)\varphi Z + \alpha\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\ &\quad + \beta\{\eta(X)\eta(Z)\varphi Y - \eta(Y)\eta(Z)\varphi X\} + \alpha\{\eta(Y)g(X, Z)\xi - \eta(X)g(Y, Z)\xi\} \\ &\quad - \beta\{\eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi \\ &\quad - \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi\}\end{aligned}\tag{3.2.1.3}$$

elde edilir. (3.2.1.3) ile (3.2.1.1) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, X)Z &= R(X, Y)Z + 2\alpha g(\varphi X, Y)\varphi Z + \alpha\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
&+ \beta\{\eta(Y)\eta(Z)\varphi X - \eta(X)\eta(Z)\varphi Y\} + \alpha\{\eta(X)g(Y, Z)\xi - \eta(Y)g(X, Z)\xi\} \\
&- \beta\{\eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi - \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi\} + R(Y, X)Z + 2\alpha g(\varphi Y, X)\varphi Z \\
&+ \alpha\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} + \beta\{\eta(X)\eta(Z)\varphi Y - \eta(Y)\eta(Z)\varphi X\} \\
&+ \alpha\{\eta(Y)g(X, Z)\xi - \eta(X)g(Y, Z)\xi\} - \beta\{\eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi - \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

bulunur.

Ayrıca (3.2.1.1) denkleminde sırasıyla ilk önce $X = Y$, $Y = Z$ ve $Z = X$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Y, Z)X &= R(Y, Z)X + 2\alpha g(\varphi Y, Z)\varphi X + \alpha\{\eta(Z)\eta(X)Y - \eta(Y)\eta(X)Z\} \\
&+ \beta\{\eta(Z)\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\eta(X)\varphi Z\} + \alpha\{\eta(Y)g(Z, X)\xi - \eta(Z)g(Y, X)\xi\} \\
&- \beta\{\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi \\
&- \eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi\}
\end{aligned} \tag{3.2.1.4}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.2.1.4) denkleminde sırasıyla $Y = Z$, $Z = X$ ve $X = Y$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Z, X)Y &= R(Z, X)Y + 2\alpha g(\varphi Z, X)\varphi Y + \alpha\{\eta(X)\eta(Y)Z - \eta(Z)\eta(Y)X\} \\
&+ \beta\{\eta(X)\eta(Y)\varphi Z - \eta(Z)\eta(Y)\varphi X\} + \alpha\{\eta(Z)g(X, Y)\xi - \eta(X)g(Z, Y)\xi\} \\
&- \beta\{\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi \\
&- \eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi\}
\end{aligned} \tag{3.2.1.5}$$

elde edilir. Son olarak (3.2.1.1), (3.2.1.4) ve (3.2.1.5) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y &= 2\alpha[g(\varphi X, Y)\varphi Z + g(\varphi Y, Z)\varphi X + g(\varphi Z, X)\varphi Y] + \\
2\beta[\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi - \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi]
\end{aligned} \tag{3.2.1.6}$$

bulunur. Buradan aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 3.2.1.4.: Bir 3- boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_1)$ çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (3.2.1.6) gereği bu koneksiyona bağlı I. Bianchi özdeşliğini sağlar ancak ve ancak $\beta = 0$ ve $\alpha=0$ dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

Sonuç 3.2.1.1.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_1)$ çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (3.2.1.6) gereği bu koneksiyona bağlı 1. Bianchi özdeşliği sağlar ancak ve ancak manifold kosimplektiktir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

Önerme 3.2.1.5.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ya göre Ricci tensörü ve skaler eğriliği sırasıyla $\bar{S}$ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) - \alpha g(Y, Z) + 3\alpha\eta(Y)\eta(Z) + \beta g(\varphi Y, Z) \quad (3.2.1.7)$$

ve

$$\bar{\tau} = \tau \quad (3.2.1.8)$$

dir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a) .

İspat : (3.2.1.1) denkleminin her iki yanının $U \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Z, U) &= g(R(X, Y)Z, U) + 2\alpha g(\varphi X, Y)g(\varphi Z, U) + \alpha\eta(Y)\eta(Z)g(X, U) \\ &\quad - \alpha\eta(X)\eta(Z)g(Y, U) + \beta\{\eta(Y)\eta(Z)g(\varphi X, U) - \eta(X)\eta(Z)g(\varphi Y, U)\} \\ &\quad + \alpha\{\eta(X)g(Y, Z)\eta(U) - \eta(Y)g(X, Z)\eta(U)\} - \beta\eta(Y)g(\varphi X, Z)\eta(U) \\ &\quad + \beta\eta(X)g(\varphi Y, Z)\eta(U) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da X ve U vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, Z) &= S(Y, Z) - \alpha g(Y, Z) + 3\alpha\eta(Y)\eta(Z) \\ &\quad + \beta g(\varphi Y, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde de Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{\tau} = \tau$$

bulunur.

Önerme 3.2.2.6.: Bir 3- boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere, $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, \xi) = \{2(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha) - (\xi\beta)\}\eta(Y) - (Y\beta) - (\varphi Y\beta) \quad (3.2.1.9)$$

ve

$$\bar{S}(\xi, \xi) = 2(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha - (\xi\beta)) \quad (3.2.1.10)$$

dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: (3.2.1.7) ifadesinde $Z = \xi$ alınırsa

$$\bar{S}(Y, \xi) = S(Y, \xi) - \alpha g(Y, \xi) + 3\alpha\eta(Y)\eta(\xi) + \beta g(\varphi Y, \xi)$$

bulunur. Yukarıda (1.2.2), (1.2.3) ve (1.2.38) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, \xi) &= [2(\alpha^2 - \beta^2) - (\xi\beta)]\eta(Y) - (Y\beta) - (\varphi Y\beta) - \alpha\eta(Y) \\ &\quad + 3\alpha\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında (3.2.1.9) elde edileceği açıktır.

Ayrıca (3.2.1.9) denkleminde $Y = \xi$ alınırsa

$$\bar{S}(\xi, \xi) = \{2(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha) - (\xi\beta)\} - (\xi\beta) = 2(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha - (\xi\beta))$$

olur.

Teorem 3.2.1.1.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_1)$ çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü simetriktir ancak ve ancak manifold α -Sasakian(quasi-Sasakian)dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: Kabul edelim ki 3-boyutlu bir M trans-Sasakian manifoldu üzerinde (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ya göre Ricci tensörü simetrik olsun, yani $\forall Z, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$$

sağlansın. Öncelikle $\bar{S}(Z, Y)$ ifadesini bulabilmek için (3.2.1.7) denkleminde Y yerine Z, Z yerine Y yazalım. Bu durumda

$$\bar{S}(Z, Y) = S(Z, Y) - \alpha g(Z, Y) + 3\alpha\eta(Z)\eta(Y) + \beta g(\varphi Z, Y) \quad (3.2.1.11)$$

ifadesi elde edilir.(3.2.1.9) ve (3.2.1.11) denklemleri $\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$ gereği

$$\begin{aligned} S(Y, Z) - \alpha g(Y, Z) + 3\alpha\eta(Y)\eta(Z) + \beta g(\varphi Y, Z) \\ = S(Z, Y) - \alpha g(Z, Y) + 3\alpha\eta(Z)\eta(Y) + \beta g(\varphi Z, Y) \end{aligned}$$

halini alır. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\beta g(\varphi Y, Z) = \beta g(\varphi Z, Y)$$

yada

$$2\beta g(\varphi Y, Z) = 0$$

bulunur. Buradan da $\beta = 0$ olduğu açıktır.

Tersine 3-boyutlu bir M trans-Sasakian manifoldu için $\beta = 0$ olsun. (3.2.1.7) denkleminde $\beta = 0$ alınırsa

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) - \alpha g(Y, Z) + 3\alpha \eta(Y)\eta(Z)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde S Ricci tensörü ve g Riemann metriğinin simetrik olma özelliklerinden yararlanılarak

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Z, Y) - \alpha g(Z, Y) + 3\alpha \eta(Z)\eta(Y) = \bar{S}(Z, Y)$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.1.2.: M , α, β sabit olacak şekilde 3- boyutlu trans -Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlıyor ise $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: α, β sabit olacak şekilde 3-boyutlu trans -Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlasın. O halde (1.3.1) ile verilen,

$$\left(\frac{1}{2}\bar{L}_V g + \bar{S} + \lambda g\right)(X, Y) = 0$$

denklemini,

$$(\bar{L}_V g)(X, Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (3.2.1.12)$$

haline dönüşür. (3.2.1.12) de Lie türevi özellikleri kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_X V, Y) + g(\bar{\nabla}_Y V, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

elde edilir. Burada $V = b\xi$ alınırsa ve (2.1.3) denklemini gereği

$$g(\nabla_X b\xi, Y) - \eta(X)g(\varphi b\xi, Y) + g(\nabla_Y b\xi, X) - \eta(Y)g(\varphi b\xi, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

yani

$$(Xb)\eta(Y) + bg(\nabla_X \xi, Y) + (Yb)\eta(X) + bg(\nabla_Y \xi, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (3.2.1.13)$$

bulunur. (3.2.1.13) de (1.2.35) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} (Xb)\eta(Y) - b\alpha g(\varphi X, Y) + b\beta g(X, Y) - b\beta \eta(X)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) - b\alpha g(\varphi Y, X) \\ + b\beta g(Y, X) - b\beta \eta(Y)\eta(X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \end{aligned}$$

şekline dönüşür. Bu denklemi düzenlersek

$$(Xb)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) + (2b\beta + 2\lambda)g(Y, X) - 2b\beta \eta(Y)\eta(X) + 2\bar{S}(X, Y) = 0 \quad (3.2.1.14)$$

elde edilir. (3.2.1.14) de her Y gördüğümüz yere ξ yazılıp ve (3.2.1.9) denklemini kullandığımızda

$$(Xb) + (\xi b)\eta(X) + (2(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha) + 2\lambda)\eta(X) = 0 \quad (3.2.1.15)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde bu defa her X gördüğümüz yere ξ alalım:

$$2(\xi b) + (4(\alpha^2 - \beta^2) + 2\lambda + 4\alpha) = 0 \quad (3.2.1.16)$$

yani

$$(\xi b) = -(2\alpha^2 - 2\beta^2 + \lambda + 2\alpha) \quad (3.2.1.17)$$

sonucu ortaya çıkar. Bu denklemi (3.2.1.15) de kullanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(db) = -(2\alpha^2 - 2\beta^2 + \lambda + 2\alpha)\eta \quad (3.2.1.18)$$

elde edilir. (3.2.1.18) denkleminin her iki yanına d operatörü uygulanırsa

$$(2\alpha^2 - 2\beta^2 + \lambda + 2\alpha)d\eta = 0$$

bulunur. Burada $d\eta \neq 0$ olacağından

$$(2\alpha^2 - 2\beta^2 + \lambda + 2\alpha) = 0 \quad (3.2.1.19)$$

olur. Bu ifade (3.2.1.18) denkleminde yazılırsa b sabit olur. Böylece (3.2.1.13) denklemi gereği

$$\bar{S}(X, Y) = b\beta \eta(Y)\eta(X) - (b\beta + \lambda)g(Y, X) \quad (3.2.1.20)$$

elde edilir ki bu da bize manifoldun $\bar{V}$ ya bağlı η -Einstein olduğunu gösterir.

Ayrıca elde edilen (3.2.1.20) denkleminde X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = b\beta - 3(b\beta + \lambda) = -3\lambda - 2b\beta$$

denklemini ortaya çıkar. Böylece yukarıdaki denklem gereği aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.2.1.2.: M , α, β sabit olacak şekilde 3- boyutlu trans -Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton özelliğini sağlıyor ise

- i) $\bar{\tau} + 2b\beta < 0$ için genişleyen (expanding),
- ii) $\bar{\tau} + 2b\beta = 0$ için değişmeyen (steady),
- iii) $\bar{\tau} + 2b\beta > 0$ için daralan (shrinking),

olur (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

Teorem 3.2.1.3.: M , α, β sabit olmak üzere 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu olsun. M üzerindeki (M, φ_1) koneksiyonuna göre (1.3.2) ile tanımlı gradyant Ricci soliton özelliğini sağlasın. Bu takdirde

- i) $\alpha, \beta = 0$ veya $\alpha = -1$ ve $\beta = 0$ dır. Dolayısıyla manifold kosimplektik veya verilen koneksiyona bağlı η -Einstein manifold olur.
- ii) (M, φ_1) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.
- iii) $\lambda = 0$, dolayısıyla metriğimiz değişmeyendir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012a).

İspat: (M, φ_1) çeyrek simetrik metrik koneksiyonu ile verilen 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu üzerinde

$$\bar{\nabla} \nabla f = \bar{S} + \lambda g \quad (3.2.1.21)$$

ile tanımlı gradyant Ricci solitonu gözönüne alalım. D , g metriğinin gradyant operatörü olmak üzere (3.2.1.21) denklemini

$$\bar{\nabla}_Y Df = \bar{Q}Y + \lambda Y \quad (3.2.1.22)$$

veya

$$g(\bar{\nabla}_Y Df, X) = g(\bar{Q}Y, X) + \lambda g(Y, X) \quad (3.2.1.23)$$

olarak yazılabilir. (3.2.1.22) denkleminden yararlanılarak $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesini bulalım:

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\ &= \bar{\nabla}_X(\bar{Q}Y + \lambda Y) - \bar{\nabla}_Y(\bar{Q}X + \lambda X) - (\bar{Q}[X, Y] \\ &\quad + \lambda[X, Y]) \end{aligned}$$

Burada (M, φ_1) koneksiyonu yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \nabla_X \bar{Q}Y - \eta(X)\varphi \bar{Q}Y + \nabla_X \lambda Y - \lambda \eta(X)\varphi Y - \nabla_Y \bar{Q}X - \eta(Y)\varphi \bar{Q}X - \nabla_Y \lambda X \\ &\quad + \lambda \eta(Y)\varphi X - \bar{Q}\nabla_X Y + \bar{Q}\nabla_Y X - \lambda \nabla_X Y \\ &\quad + \lambda \nabla_Y X \end{aligned} \quad (3.2.1.24)$$

halini alır. λ değerinin sabit olduğu gözönünde bulundurularak (3.2.1.24) denkleminin her iki tarafının bir U vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Df, U) &= g(\nabla_X \bar{Q}Y, U) - \eta(X)g(\varphi \bar{Q}Y, U) + \lambda g(\nabla_X Y, U) - \lambda \eta(X)g(\varphi Y, U) \\ &\quad - g(\nabla_Y \bar{Q}X, U) - \eta(Y)g(\varphi \bar{Q}X, U) - \lambda g(\nabla_Y X, U) + \lambda \eta(Y)g(\varphi X, U) \\ &\quad - g(\bar{Q}\nabla_X Y, U) + g(\bar{Q}\nabla_Y X, U) - \lambda g(\nabla_X Y, U) \\ &\quad + \lambda g(\nabla_Y X, U) \end{aligned} \quad (3.2.1.25)$$

bulunur. Son denklemde gerekli sadeleştirmeler yapıp $X = U = \xi$ kullanıldığında

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) &= g(\nabla_\xi \bar{Q}Y, \xi) - g(\varphi \bar{Q}Y, \xi) - \lambda \eta(X)g(\varphi Y, \xi) - g(\nabla_Y \bar{Q}\xi, U) \\ &\quad - \eta(Y)g(\varphi \bar{Q}\xi, \xi) + \lambda \eta(Y)g(\varphi \xi, \xi) - g(\bar{Q}\nabla_\xi Y, \xi) \\ &\quad + g(\bar{Q}\nabla_Y \xi, \xi) \end{aligned} \quad (3.2.1.26)$$

elde edilir. α, β sabit olmak üzere (3.2.1.26) da (1.2.35) ve (1.2.38) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) \\
&= g\left(\nabla_{\xi}\left\{\left(\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)Y\right\}, \xi\right) - g\left(\nabla_{\xi}\left\{\left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(Y)\xi\right\}, \xi\right) - g(\nabla_{\xi}\{\alpha Y\}, \xi) \\
&+ g(\nabla_{\xi}\{3\alpha\eta(Y)\xi\}, \xi) + g(\nabla_{\xi}\{\beta\varphi Y\}, \xi) - g(\nabla_Y\{2(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)\xi\}, \xi) \\
&- g\left(\left(\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)\nabla_{\xi}Y, \xi\right) + g\left(\left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(\nabla_{\xi}Y)\xi, \xi\right) + g(\alpha\nabla_{\xi}Y, \xi) \\
&- g(3\alpha\eta(\nabla_{\xi}Y)\xi, \xi) - g(\beta\varphi\nabla_{\xi}Y, \xi) + g\left(\left(\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right)\nabla_Y\xi, \xi\right) \\
&- g\left(\left(\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(\nabla_Y\xi)\xi, \xi\right) - g(\alpha\nabla_Y\xi, \xi) + g(3\alpha\eta(\nabla_Y\xi)\xi, \xi) \\
&+ g(\beta\varphi\nabla_Y\xi, \xi)
\end{aligned} \tag{3.2.1.27}$$

bulunur. Burada sadeleştirmeler yapıp Levi-Civita koneksiyonu özellikleri kullanılırsa yukarıdaki denklem

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = 0 \tag{3.2.1.28}$$

halini alır. Burada ayrıca (3.2.1.1) ve (1.2.36) denklemleri gereği $g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi)$ ifadesi

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = -\beta g(\varphi Y, Df) + (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} = 0 \tag{3.2.1.29}$$

olarak yazılabilir. (3.2.1.29) da Y yerine φY alınırsa

$$\beta\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} + (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)g(\varphi Y, Df) = 0 \tag{3.2.1.30}$$

bulunur. (3.2.1.29) ve (3.2.1.30) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapıp düzenlendiğinde

$$\{(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)^2 + \beta^2\}\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} = 0 \tag{3.2.1.31}$$

olur, Burada üç durum söz konusudur:

$$\text{Durum i) } (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)^2 + \beta^2 = 0:$$

$(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$ olsun. Bu durum ancak $\alpha, \beta=0$ veya $\alpha=-1$ ve $\beta=0$ olursa gerçekleşir. Dolayısıyla manifold kosimplektik veya verilen koneksiyona bağlı η -Einstein manifold bulunur.

$$\text{Durum ii) } g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0:$$

$$g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0 \text{ ifadesi her } Y \text{ vektör alanı için}$$

$$Df = (\xi f)\xi \quad (3.2.1.32)$$

haline dönüşür. (3.2.1.32) ifadesi (3.2.1.23) de yerine yazılırsa

$$g(\bar{\nabla}_Y((\xi f)\xi), X) = g(\bar{Q}Y, X) + \lambda g(Y, X)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem (2.1.3), (3.2.1.7) ve (1.2.39) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} X((\xi f))\eta(Y) + (\xi f)\{\beta\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\} - \alpha g(\varphi Y, X)\} \\ = g(QY, X) - \alpha g(Y, X) + 3\alpha\eta(Y)\eta(X) + \beta g(\varphi Y, X) \\ + \lambda g(Y, X) \end{aligned} \quad (3.2.1.33)$$

olarak yazılabilir. Burada (1.2.39) denklemini kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} X((\xi f))\eta(Y) + (\xi f)\{\beta\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\} - \alpha g(\varphi Y, X)\} \\ = \left[\frac{\tau}{2} - (\alpha^2 - \beta^2)\right]g(X, Y) - \left[\frac{\tau}{2} - 3(\alpha^2 - \beta^2)\right]\eta(X)\eta(Y) - \alpha g(Y, X) \\ + 3\alpha\eta(Y)\eta(X) + \beta g(\varphi Y, X) \\ + \lambda g(Y, X) \end{aligned} \quad (3.2.1.34)$$

bulunur. (3.2.1.34) de $Y = \xi$ alınırsa

$$X((\xi f)) = \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda\}\eta(X) \quad (3.2.1.35)$$

sonucu ortaya çıkar. (3.2.1.35) denkleminde X yerine Y , Y yerine X yazalım:

$$\begin{aligned} Y((\xi f))\eta(X) + (\xi f)\{\beta\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\} - \alpha g(\varphi X, Y)\} \\ = g(QX, Y) - \alpha g(X, Y) + 3\alpha\eta(X)\eta(Y) + \beta g(\varphi X, Y) \\ + \lambda g(X, Y) \end{aligned} \quad (3.2.1.36)$$

(3.2.1.34) ile (3.2.1.36) denklemleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} Y((\xi f))\eta(X) + (\xi f)\{\beta\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\} - \alpha g(\varphi X, Y)\} + X((\xi f))\eta(Y) \\ + (\xi f)\{\beta\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\} - \alpha g(\varphi Y, X)\} \\ = g(QY, X) - \alpha g(Y, X) + 3\alpha\eta(Y)\eta(X) + \beta g(\varphi Y, X) + \lambda g(Y, X) + g(QX, Y) \\ - \alpha g(X, Y) + 3\alpha\eta(X)\eta(Y) + \beta g(\varphi X, Y) + \lambda g(X, Y) \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
& Y((\xi f))\eta(X) + (\xi f)\{\beta\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\}\} + X((\xi f))\eta(Y) \\
& + (\xi f)\{\beta\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\}\} \\
& = g(QY, X) - 2\alpha g(Y, X) + 6\alpha\eta(Y)\eta(X) + 2\lambda g(Y, X) + g(QX, Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem (3.2.1.35) denklemi gereği

$$\begin{aligned}
& 2\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda\}\eta(X)\eta(Y) + 2(\xi f)\{\beta\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\}\} + 2\beta g(\varphi Y, X) \\
& = 2g(\bar{\nabla}_Y Df, X)
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Buradan

$$\bar{\nabla}_Y Df = \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}\eta(Y)\xi + (\xi f)\beta Y + \beta\varphi Y \quad (3.2.1.37)$$

yazılabilir. (3.2.1.36) yardımıyla $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesini tekrardan hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\
&= \bar{\nabla}_X [\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}\eta(Y)\xi + (\xi f)\beta Y + \beta\varphi Y] - \\
&\bar{\nabla}_Y [\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}\eta(X)\xi + (\xi f)\beta X + \beta\varphi X] - [\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - \\
&(\xi f)\beta\}\eta([X, Y])\xi + (\xi f)\beta[X, Y] + \beta\varphi[X, Y]] \\
&= \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}[\eta(\nabla_X Y)\xi + g(Y, \nabla_X \xi)\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi] \\
&- X(\xi f)\beta\eta(Y)\xi + X(\xi f)\beta Y + (\xi f)\beta\nabla_X Y + \beta(\nabla_X \varphi)Y + \beta\varphi\nabla_X Y \\
&- (\xi f)\beta\eta(X)\varphi Y - \beta\eta(X)\varphi^2 Y \\
&- \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}[\eta(\nabla_Y X)\xi + g(X, \nabla_Y \xi)\xi + \eta(X)\nabla_Y \xi] \\
&+ Y(\xi f)\beta\eta(X)\xi - (\xi f)\beta\nabla_Y X - Y(\xi f)\beta X - \beta(\nabla_Y \varphi)X - \beta\varphi\nabla_Y X \\
&+ (\xi f)\beta\eta(Y)\varphi X \\
&- [\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}\eta([X, Y])\xi + (\xi f)\beta[X, Y] + \beta\varphi[X, Y]].
\end{aligned}$$

Son denklemde sadeleştirmeler yapıp elde edilen denklemin her iyi yanının ξ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(X, Y)Df, \xi) &= \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}g(Y, \nabla_X \xi) - X(\xi f)\beta\eta(Y) + \\
&X(\xi f)\beta\eta(Y) + \beta g((\nabla_X \varphi)Y, \xi) - \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}g(X, \nabla_Y \xi) + \\
&Y(\xi f)\beta\eta(X) - Y(\xi f)\beta\eta(X) - \\
&\beta g((\nabla_Y \varphi)X, \xi)
\end{aligned} \quad (3.2.1.38)$$

bulunur. (1.2.34) ve (1.2.35) denklemleri (3.2.1.36) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(X,Y)Df,\xi) = & \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}[-\alpha g(Y, \varphi X) + \beta g(Y, X) - \\
& \beta \eta(Y)\eta(X)] + \beta[\alpha g(X, Y) - \alpha \eta(Y)\eta(X) + \beta g(\varphi X, Y)] - \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - \\
& (\xi f)\beta\}[-\alpha g(X, \varphi Y) + \beta g(Y, X) - \beta \eta(Y)\eta(X)] - \beta[\alpha g(X, Y) - \alpha \eta(Y)\eta(X) + \\
& \beta g(\varphi Y, X)]
\end{aligned} \tag{3.2.1.39}$$

elde edilir. Yukarıda (3.2.1.36) ve (3.2.1.1) denklemleri gözönünde bulundurulduğunda

$$[2\beta^2 - 2\alpha\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\}]g(\varphi X, Y) = 0,$$

sonucu ortaya çıkar. Burada $g(Y, \varphi X)$ sıfır olamayacağından

$$2\beta^2 - 2\alpha\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\alpha + \lambda - (\xi f)\beta\} = 0, \tag{3.2.1.40}$$

olma durumu kalır. Burada α, β nın sabit olması göz önünde bulundurulduğunda λ değerinin sabit olabilmesi için $(\xi f) = \text{sabit} = c$ olması gerekir. Bu da (3.2.1.31) gereği

$$Df = c\xi \tag{3.2.1.41}$$

demektir. Dolayısıyla (3.2.1.23) denklemi (3.2.1.41) yardımıyla

$$\bar{S}(Y, X) = -\lambda g(Y, X) + g(\bar{\nabla}_Y c\xi, X) = -\lambda g(Y, X) - c\alpha g(\varphi Y, X) + c\beta g(Y, X) - c\beta \eta(Y)\eta(X)$$

olarak yazılabilir. Burada X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = -3\lambda + 2\beta c$$

elde edilir. Sonuçta manifold (M, φ_1) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.

$$\text{Durum iii) } (\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)^2 + \beta^2 = 0 \text{ ve } g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0 :$$

$(\alpha^2 - \beta^2 + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$ eşitliği gereği $\alpha, \beta=0$ veya $\alpha=-1$ ve $\beta=0$ olduğunu biliyoruz. $g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0$ durumunda da (3.2.1.40) olabileceğini gördük. Bu denklemde ilk önce $\alpha, \beta=0$ koyduğumuzda eşitlik sağlanır. $\alpha = -1$ ve $\beta = 0$ değerleri için

$$\lambda = 0$$

elde edilir ki bu da metriğin değişmeyen(steady) olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

3.2.2. (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldlar

Önerme 3.2.2.1.: Bir 3- boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_2) çeyrek-

simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için R ile $\bar{R}$ arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \alpha g(Y, Z)\varphi X + \alpha g(X, Z)\varphi Y - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &\quad + \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X - \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y \\ &\quad + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi\end{aligned}\tag{3.2.2.1}$$

dir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat: Çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için hemen hemen değme metrik manifoldlarda (2.1.6) denklemini bulmuştuk. M bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifold olduğundan (2.1.6) denkleminde (1.2.13) ve (1.2.14) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \alpha g(X, Z)\varphi Y - \alpha\eta(X)\eta(Z)\varphi Y - \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y \\ &\quad + \alpha[\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Z)\eta(Y)\varphi X] + \beta[\eta(Z)g(X, Y)\xi - \eta(Z)\eta(Y)X] \\ &\quad - \alpha g(Y, Z)\varphi X + \alpha\eta(X)\eta(Z)\varphi Y + \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X \\ &\quad - \alpha[\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi - \eta(Z)\eta(X)\varphi Y] - \beta[\eta(Z)g(X, Y)\xi - \eta(Z)\eta(X)Y],\end{aligned}$$

elde edilir ki burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - \alpha g(Y, Z)\varphi X + \alpha g(X, Z)\varphi Y - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &\quad + \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X - \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi,\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Önerme 3.2.2.2.: Bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_2) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= \{(Y\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\}\varphi^2 X - \{(X\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)\}\varphi^2 Y \\ &\quad + \{(Y\beta) + 2\alpha\beta\eta(Y) - \alpha\eta(Y)\}\varphi X - \{(X\beta) + 2\alpha\beta\eta(X) - \alpha\eta(X)\}\varphi Y \\ &\quad - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\ &\quad + 2\alpha g(\varphi X, Y)\xi,\end{aligned}\tag{3.2.2.2}$$

dir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat: İlk olarak (3.2.2.1) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(X, Y)\xi \\
& = R(X, Y)\xi - \alpha\eta(Y)\varphi X + \alpha\eta(X)\varphi Y - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
& + 2\alpha g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned} \tag{3.2.2.3}$$

bulunur. M bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu olduğundan (1.2.15) denklemi yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi & = \{(Y\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\}\varphi^2 X - \{(X\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)\}\varphi^2 Y + \{(Y\beta) \\
& + 2\alpha\beta\eta(Y)\}\varphi X - \{(X\beta) + 2\alpha\beta\eta(X)\}\varphi Y - \alpha\eta(Y)\varphi X + \alpha\eta(X)\varphi Y \\
& - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} + 2\alpha g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned}$$

halini alır. Son olarak burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi & = \{(Y\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(Y)\}\varphi^2 X - \{(X\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2)\eta(X)\}\varphi^2 Y + \{(Y\beta) \\
& + 2\alpha\beta\eta(Y) - \alpha\eta(Y)\}\varphi X - \{(X\beta) + 2\alpha\beta\eta(X) - \alpha\eta(X)\}\varphi Y \\
& - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} + 2\alpha g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2.3.: Bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_2) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

sağlanır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat: (3.2.2.1) denkleminde sırasıyla $Y = X$ ve $X = Y$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Y, X)Z & = R(Y, X)Z - \alpha g(X, Z)\varphi Y + \alpha g(Y, Z)\varphi X - \beta\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
& + \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y - \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X \\
& + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi
\end{aligned} \tag{3.2.2.4}$$

elde edilir. (3.2.2.4) ile (3.2.2.1) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, X)Z \\
& = R(X, Y)Z - \alpha g(Y, Z)\varphi X + \alpha g(X, Z)\varphi Y - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
& + \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X - \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi + R(Y, X)Z \\
& - \alpha g(X, Z)\varphi Y + \alpha g(Y, Z)\varphi X - \beta\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
& + \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y - \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

bulunur.

Ayrıca (3.2.2.1) denkleminde sırasıyla ilk önce $X = Y$, $Y = Z$ ve $Z = X$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y, Z)X &= R(Y, Z)X - \alpha g(Z, X)\varphi Y + \alpha g(Y, X)\varphi Z - \beta\{\eta(Z)\eta(X)Y - \eta(Y)\eta(X)Z\} \\ &\quad + \beta g(\varphi Z, X)\varphi Y - \beta g(\varphi Y, X)\varphi Z \\ &\quad + 2\alpha\eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi\end{aligned}\tag{3.2.2.5}$$

bulunur. Benzer şekilde (3.2.2.5) denkleminde sırasıyla $Y = Z$, $Z = X$ ve $X = Y$ yazıldığında

$$\begin{aligned}\bar{R}(Z, X)Y &= R(Z, X)Y - \alpha g(X, Y)\varphi Z + \alpha g(Z, Y)\varphi X - \beta\{\eta(X)\eta(Y)Z - \eta(Z)\eta(Y)X\} \\ &\quad + \beta g(\varphi X, Y)\varphi Z - \beta g(\varphi Z, Y)\varphi X \\ &\quad + 2\alpha\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi\end{aligned}\tag{3.2.2.6}$$

elde edilir. Son olarak (3.2.2.1), (3.2.2.5) ve (3.2.2.6) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y &= \\ 2\beta g(\varphi Y, Z)\varphi X - 2\beta g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - 2\beta g(\varphi Y, X)\varphi Z + \\ 2\alpha\eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi + 2\alpha\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi\end{aligned}\tag{3.2.2.7}$$

bulunur. Buradan aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 3.2.2.4.: Bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_2)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (3.2.2.7) gereği bu koneksiyona bağlı 1. Bianchi özdeşliğini sağlar ancak ve ancak $\beta = 0, \alpha = 0$ dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

Sonuç 3.2.2.1.: Bir 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_2)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (3.2.2.7) gereği bu koneksiyona bağlı I. Bianchi özdeşliğini sağlar ancak ve ancak manifold kosimplektiktir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012).

Önerme 3.2.2.5.: Bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_2)$ çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü ve skaler eğriliği sırasıyla $\bar{S}$ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + \beta g(Y, Z) - 3\beta\eta(Y)\eta(Z) + \alpha g(\varphi Y, Z) \quad (3.2.2.8)$$

$$\bar{Q}Y = QY + \beta Y - 3\beta\eta(Y)\xi + \alpha\varphi Y \quad (3.2.2.9)$$

$$\bar{\tau} = \tau \quad (3.2.2.10)$$

biçimindedir (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat : (3.2.2.1) denkleminin her iki yanının $U \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Z, U) &= g(R(X, Y)Z, U) - \alpha g(Y, Z)g(\varphi X, U) + \alpha g(X, Z)g(\varphi Y, U) \\ &\quad - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)g(X, U) - \eta(X)\eta(Z)g(Y, U)\} + \beta g(\varphi Y, Z)g(\varphi X, U) \\ &\quad - \beta g(\varphi X, Z)g(\varphi Y, U) + 2\alpha\eta(Z)g(\varphi X, Y)\eta(U) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da X ve U vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + \alpha g(\varphi Y, Z) - \beta\{\eta(Y)\eta(Z)3 - \eta(Y)\eta(Z)\} + \beta\{g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\}$$

elde edilir. Son denklem her Z vektör alanı için

$$\bar{Q}Y = QY + \beta Y - 3\beta\eta(Y)\xi + \alpha\varphi Y$$

haline dönüşür.

Son olarak (3.2.2.8) denkleminde Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{\tau} = \tau$$

bulunur.

Önerme 3.2.2.6.: Bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_2) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere, $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, \xi) = -[2\beta + (\xi\alpha) + 2(\alpha^2 - \beta^2)]\eta(Y) - (Y\alpha) - (\varphi Y\beta) \quad (3.2.2.11)$$

dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat: (3.2.2.8) ifadesinde $Z = \xi$ alınırsa

$$\bar{S}(Y, \xi) = S(Y, \xi) + \beta g(Y, \xi) - 3\beta\eta(Y)\eta(\xi) + \alpha g(\varphi Y, \xi)$$

bulunur. Yukarıda (1.2.17) , (1.2.2) ve (1.2.4) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}\bar{S}(Y, \xi) &= \left[\frac{\tau}{2} + (\xi\alpha) + (\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(Y) - \left[\frac{\tau}{2} + (\xi\alpha) + 3(\alpha^2 - \beta^2) \right] \eta(Y) \\ &\quad - \{(Y\alpha) + (\xi\alpha)\eta(Y)\} - (\varphi Y\beta) - 2\beta\eta(Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında (3.2.2.11) elde edileceği açıktır.

Teorem 3.2.2.1.: Bir 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_2)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü simetriktir ancak ve ancak manifold β -Sasakiandır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat: Kabul edelim ki n -boyutlu bir M 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu üzerinde (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü simetrik olsun, yani $\forall Z, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$$

sağlansın. Öncelikle $\bar{S}(Z, Y)$ ifadesini bulabilmek için (3.2.2.8) denkleminde Y yerine Z, Z yerine Y yazalım. Bu durumda

$$\bar{S}(Z, Y) = S(Z, Y) + \beta g(Z, Y) - 3\beta\eta(Z)\eta(Y) + \alpha g(\varphi Z, Y) \quad (3.2.2.12)$$

ifadesi elde edilir. (3.2.2.8) ve (3.2.2.11) denklemleri $\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$ gereği

$$\begin{aligned}S(Y, Z) + \beta g(Y, Z) - 3\beta\eta(Y)\eta(Z) + \alpha g(\varphi Y, Z) \\ = S(Z, Y) + \beta g(Z, Y) - 3\beta\eta(Z)\eta(Y) + \alpha g(\varphi Z, Y)\end{aligned}$$

halini alır. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\alpha g(\varphi Y, Z) = \alpha g(\varphi Z, Y)$$

yada

$$2\alpha g(\varphi Y, Z) = 0$$

bulunur. Buradan da $\alpha = 0$ olduğu açıktır.

Tersine 3-boyutlu bir M normal hemen hemen değme metrik manifoldu için $\alpha = 0$ olsun. (3.2.2.8) denkleminde $\alpha = 0$ alınırsa

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) + \beta g(Y, Z) - 3\beta\eta(Y)\eta(Z)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde S Ricci tensörü ve g Riemann metriğinin simetrik olma özelliklerinden yararlanılarak

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Z, Y) + \beta g(Z, Y) - 3\beta \eta(Z)\eta(Y) = \bar{S}(Z, Y)$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2.2.: M , α, β sabit olmak şartıyla 3- boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma özelliğini sağlıyor ise manifold $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur (Yıldız ve Çetinkaya, 2012b).

İspat: M , α ve β sabit olmak şartıyla 3- boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlasın. O halde (1.3.1) ile verilen,

$$\left(\frac{1}{2}\bar{L}_V g + \bar{S} + \lambda g\right)(X, Y) = 0,$$

denklemini,

$$(\bar{L}_V g)(X, Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (3.2.2.13)$$

haline dönüşür. (3.2.2.13) de Lie türevi özellikleri kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_X V, Y) + g(\bar{\nabla}_Y V, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

elde edilir. Burada $V = b\xi$ alınıp (2.1.3) denklemi kullanıldığında

$$g(\bar{\nabla}_X b\xi, Y) + bg(\varphi X, Y) + g(\bar{\nabla}_Y b\xi, X) + bg(\varphi Y, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

yani

$$(Xb)\eta(Y) + bg(\bar{\nabla}_X \xi, Y) + (Yb)\eta(X) + bg(\bar{\nabla}_Y \xi, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (3.2.2.14)$$

bulunur. (3.2.2.14) ifadesi (1.2.14) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} & (Xb)\eta(Y) + b\alpha g(X, Y) - b\alpha \eta(X)\eta(Y) - \beta bg(\varphi X, Y) + (Yb)\eta(X) + b\alpha g(Y, X) \\ & - b\alpha \eta(Y)\eta(X) - \beta bg(\varphi Y, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.2.2.15)$$

şekline dönüşür. (3.2.2.15) de $Y=\xi$ alınır ve burada (3.2.2.11) ve (1.2.17) denklemleri kullanıldığında

$$(Xb) + (\xi b)\eta(X) - 2[2\beta + 2(\alpha^2 - \beta^2)]\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0 \quad (3.2.2.16)$$

olur. Son denklemde bu defa her X gördüğümüz yere ξ alınır

$$2(\xi b) + 2(-2(\alpha^2 - \beta^2) + \lambda - 2\beta) = 0 \quad (3.2.2.17)$$

yani

$$(\xi b) = (2\alpha^2 - 2\beta^2 - \lambda + 2\beta) \quad (3.2.1.18)$$

sonucu ortaya çıkar. Bu denklemi (3.2.1.16) de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(db) = (2\alpha^2 - 2\beta^2 - \lambda + 2\beta)\eta \quad (3.2.1.19)$$

elde edilir. (3.2.1.19) denkleminin her iki yanına d uygulanırsa

$$(2\alpha^2 - 2\beta^2 - \lambda + 2\beta)d\eta = 0$$

bulunur. Burada $d\eta \neq 0$ olacağından

$$(2\alpha^2 - 2\beta^2 - \lambda + 2\beta) = 0 \quad (3.2.1.20)$$

olur. Bu ifade (3.2.1.19) de kullanırsa b sabit olur. Böylece (3.2.1.15) denklemi gereği

$$\bar{S}(X, Y) = b\alpha\eta(Y)\eta(X) - (b\alpha + \lambda)g(Y, X), \quad (3.2.1.21)$$

elde edilir ki bu da bize manifoldun $\bar{V}$ ya bağlı η -Einstein olduğunu gösterir.

Son olarak elde edilen (3.2.1.21) denkleminde X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = b\alpha - 3(b\alpha + \lambda) = -3\lambda - 2b\alpha,$$

denklemi ortaya çıkar. Böylece yukarıdaki denklem gereği aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.2.2.2.: M , α, β sabit olacak şekilde 3- boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{V}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlıyor ise

i) $\bar{\tau} + 2b\alpha < 0$ için genişleyen (expanding),

ii) $\bar{\tau} + 2b\alpha = 0$ için değişmeyen (steady),

iii) $\bar{\tau} + 2b\alpha > 0$ için daralan (shrinking),

dır (Yıldız ve Çetinkaya, 2012).

Teorem 3.2.2.3.: M, α, β sabit olmak üzere 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu olsun. M üzerindeki (M, φ_2) koneksiyonuna göre (1.3.2) ile tanımlı gradyant Ricci soliton özelliğini sağlasın. Bu durumda

i) $\alpha, \beta = 0$ dolayısıyla manifold kosimplektiktir.

ii) (M, φ_2) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.

İspat: (M, φ_2) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilen 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu üzerinde

$$\bar{\nabla} \nabla f = \bar{S} + \lambda g \quad (3.2.2.22)$$

ile tanımlı gradyant Ricci solitonu gözönüne alalım. D g metriğinin gradyant operatörü olmak üzere (3.2.2.22) denklemi

$$\bar{\nabla}_Y Df = \bar{Q}Y + \lambda Y \quad (3.2.2.23)$$

veya

$$g(\bar{\nabla}_Y Df, X) = g(\bar{Q}Y, X) + \lambda g(Y, X) \quad (3.2.2.24)$$

olarak yazılabilir. (3.2.2.23) eşitliğinden yararlanılarak $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesi

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\ &= \bar{\nabla}_X (\bar{Q}Y + \lambda Y) - \bar{\nabla}_Y (\bar{Q}X + \lambda X) - (\bar{Q}[X, Y] + \lambda[X, Y]) \end{aligned}$$

halini alır. Burada (M, φ_2) koneksiyonu gereği yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \nabla_X \bar{Q}Y + \eta(\bar{Q}Y)\varphi X + \nabla_X \lambda Y + \lambda \eta(Y)\varphi X - \nabla_Y \bar{Q}X - \eta(\bar{Q}X)\varphi Y - \nabla_Y \lambda X \\ &\quad - \lambda \eta(X)\varphi Y - \bar{Q}\nabla_X Y + \bar{Q}\nabla_Y X - \lambda \nabla_X Y \\ &\quad + \lambda \nabla_Y X \end{aligned} \quad (3.2.2.25)$$

halini alır. λ değerinin sabit olduğu gözönünde bulundurularak (3.2.2.25) denkleminin her iki tarafını bir U vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Df, U) &= g(\nabla_X \bar{Q}Y, U) + \eta(\bar{Q}Y)g(\varphi X, U) + \lambda \eta(Y)g(\varphi X, U) - g(\nabla_Y \bar{Q}X, U) \\ &\quad - \eta(\bar{Q}X)g(\varphi Y, U) - \lambda \eta(X)g(\varphi Y, U) - g(\bar{Q}\nabla_X Y, U) + g(\bar{Q}\nabla_Y X, U) \end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde $X = Y = \xi$ kullanıldığında

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) &= g(\nabla_{\xi}\bar{Q}Y, \xi) + \eta(\bar{Q}Y)g(\varphi\xi, \xi) + \lambda\eta(Y)g(\varphi\xi, \xi) - g(\nabla_Y\bar{Q}\xi, \xi) \\
&- \eta(\bar{Q}\xi)g(\varphi Y, \xi) - \lambda\eta(\xi)g(\varphi Y, \xi) - g(\bar{Q}\nabla_{\xi}Y, \xi) \\
&+ g(\bar{Q}\nabla_Y\xi, \xi)
\end{aligned} \tag{3.2.2.26}$$

elde edilir. α, β sabit olmak üzere (3.2.2.26) denkleminde (3.2.2.8) ve (1.2.17) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) &= g\left(\nabla_{\xi}\left\{\left(\frac{\tau}{2} + (\alpha^2 - \beta^2)\right)Y\right\}, \xi\right) - g\left(\nabla_{\xi}\left\{\left(\frac{\tau}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(Y)\xi\right\}, \xi\right) + g(\nabla_{\xi}\{\beta Y\}, \xi) \\
&- g(\nabla_{\xi}\{3\beta\eta(Y)\xi\}, \xi) + g(\nabla_{\xi}\{\alpha\varphi Y\}, \xi) - g(\nabla_Y\{2(\alpha^2 - \beta^2 + \beta)\xi\}, \xi) \\
&- g\left(\left(\frac{\tau}{2} + (\alpha^2 - \beta^2)\right)\nabla_{\xi}Y, \xi\right) + g\left(\left(\frac{\tau}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(\nabla_{\xi}Y)\xi, \xi\right) - g(\beta\nabla_{\xi}Y, \xi) \\
&+ g(3\beta\eta(\nabla_{\xi}Y)\xi, \xi) - g(\alpha\varphi\nabla_{\xi}Y, \xi) + g\left(\left(\frac{\tau}{2} + (\alpha^2 - \beta^2)\right)\nabla_Y\xi, \xi\right) \\
&- g\left(\left(\frac{\tau}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2)\right)\eta(\nabla_Y\xi)\xi, \xi\right) + g(\beta\nabla_Y\xi, \xi) - g(3\beta\eta(\nabla_Y\xi)\xi, \xi) \\
&+ g(\alpha\varphi\nabla_Y\xi, \xi)
\end{aligned} \tag{3.2.2.27}$$

bulunur. Koneksiyon özellikleri gereği yukarıdaki denklem

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = 0 \tag{3.2.2.28}$$

halini alır. Burada ayrıca (3.2.2.1) ve (1.2.15) denklemleri gereği $g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi)$ ifadesi

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = 2\alpha\beta g(\varphi Y, Df) - (\alpha^2 - \beta^2)\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} = 0 \tag{3.2.2.29}$$

olarak yazılabilir. (3.2.2.29) de Y yerine φY alınırsa

$$-2\alpha\beta\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} - (\alpha^2 - \beta^2)g(\varphi Y, Df) = 0 \tag{3.2.2.30}$$

bulunur. (3.2.2.29) ve (3.2.2.30) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapıp düzenlendiğinde

$$\{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\}\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} = 0 \tag{3.2.2.31}$$

olur, Burada iki durum söz konusudur:

Durum i) $\{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2\} = 0 :$

$(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 = 0$ olsun. Bu durum ancak $\alpha, \beta = 0$ olursa gerçekleşir. Dolayısıyla manifold kosimplektik veya verilen koneksiyona bağlı η -Einstein manifold bulunur.

Durum ii) $g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0 :$

$g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0$ ifadesi her Y vektör alanı için

$$Df = (\xi f)\xi, \quad (3.2.2.32)$$

haline dönüşür. (3.2.2.32) ifadesi (3.2.2.23) de yerine yazılırsa

$$g(\bar{\nabla}_Y((\xi f)\xi), X) = g(\bar{Q}Y, X) + \lambda g(Y, X)$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem (2.1.5), (3.2.2.8) ve (1.2.14) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned} X((\xi f))\eta(Y) + (\xi f)\{\alpha\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\} - \beta g(\varphi Y, X)\} + (\xi f)g(\varphi Y, X) \\ = g(QY, X) + \beta g(Y, X) - 3\beta\eta(Y)\eta(X) + \alpha g(\varphi Y, X) \\ + \lambda g(Y, X) \end{aligned} \quad (3.2.2.33)$$

olarak yazılabilir. Burada (1.2.17) denklemi kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} X((\xi f))\eta(Y) + (\xi f)\{\alpha\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\} - \beta g(\varphi Y, X)\} + (\xi f)g(\varphi Y, X) \\ = \left[\frac{\tau}{2} + (\alpha^2 - \beta^2)\right]g(X, Y) - \left[\frac{\tau}{2} + 3(\alpha^2 - \beta^2)\right]\eta(X)\eta(Y) + \beta g(Y, X) \\ - 3\beta\eta(Y)\eta(X) + \alpha g(\varphi Y, X) \\ + \lambda g(Y, X), \end{aligned} \quad (3.2.2.34)$$

bulunur. (3.2.2.34) de $Y = \xi$ alınır

$$X((\xi f)) = -\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda\}\eta(X) \quad (3.2.2.35)$$

sonucu ortaya çıkar. (3.2.2.34) denkleminde X yerine Y , Y yerine X yazalım:

$$\begin{aligned} Y((\xi f))\eta(X) + (\xi f)\{\alpha\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\} - \beta g(\varphi X, Y)\} + (\xi f)g(\varphi X, Y) \\ = g(QX, Y) + \beta g(X, Y) - 3\beta\eta(X)\eta(Y) + \alpha g(\varphi X, Y) \\ + \lambda g(X, Y) \end{aligned} \quad (3.2.2.36)$$

(3.2.2.34) ile (3.2.2.36) denklemleri taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned}
& Y((\xi f))\eta(X) + (\xi f)\{\alpha\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\} - \beta g(\varphi X, Y)\} + (\xi f)g(\varphi X, Y) + X((\xi f))\eta(Y) \\
& + (\xi f)\{\alpha\{g(Y, X) - \eta(X)\eta(Y)\} - \beta g(\varphi Y, X)\} + (\xi f)g(\varphi Y, X) \\
& = g(QY, X) + \beta g(Y, X) - 3\beta\eta(Y)\eta(X) + \alpha g(\varphi Y, X) + \lambda g(Y, X) + g(QX, Y) \\
& + \beta g(X, Y) - 3\beta\eta(X)\eta(Y) + \alpha g(\varphi X, Y) + \lambda g(X, Y)
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
& Y((\xi f))\eta(X) + 2(\xi f)\{\alpha\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\}\} + X((\xi f))\eta(Y) \\
& = 2g(QY, X) + 2\beta g(Y, X) - 6\beta\eta(Y)\eta(X) + 2\lambda g(X, Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu denklem (3.2.2.23) ve (3.2.2.35) denklemleri gereği

$$\begin{aligned}
& -\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda\}\eta(X)\eta(Y) + (\xi f)\{\alpha\{g(X, Y) - \eta(Y)\eta(X)\}\} + \alpha g(\varphi Y, X) \\
& = g(\bar{\nabla}_Y Df, X)
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Buradan

$$\bar{\nabla}_Y Df = -\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}\eta(Y)\xi + (\xi f)\alpha Y + \alpha\varphi Y \quad (3.2.2.37)$$

yazılabilir.

(3.2.2.37) yardımıyla $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesini tekrardan hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\
&= \bar{\nabla}_X [-\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}\eta(Y)\xi + (\xi f)\alpha Y + \alpha\varphi Y] - \\
&\bar{\nabla}_Y [-\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}\eta(X)\xi + (\xi f)\alpha X + \alpha\varphi X] - [-\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \\
&\lambda + (\xi f)\alpha\}\eta([X, Y])\xi + (\xi f)\alpha[X, Y] + \alpha\varphi[X, Y]] \\
&= -\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}[\eta(\nabla_X Y)\xi + g(Y, \nabla_X \xi)\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi] \\
&+ X(\xi f)\alpha\eta(Y)\xi + X(\xi f)\alpha Y + (\xi f)\alpha\nabla_X Y + \alpha(\nabla_X \varphi)Y + \alpha\varphi\nabla_X Y \\
&- \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}\eta(Y)\varphi X + (\xi f)\alpha\eta(Y)\varphi X \\
&+ \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}[\eta(\nabla_Y X)\xi + g(X, \nabla_Y \xi)\xi + \eta(X)\nabla_Y \xi] \\
&- Y(\xi f)\alpha\eta(X)\xi - (\xi f)\alpha\nabla_Y X - Y(\xi f)\alpha X - \alpha(\nabla_Y \varphi)X - \alpha\varphi\nabla_Y X \\
&+ \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}\eta(X)\varphi Y - (\xi f)\alpha\eta(X)\varphi Y \\
&- [-\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}\eta([X, Y])\xi + (\xi f)\alpha[X, Y] + \alpha\varphi[X, Y]]
\end{aligned}$$

Son denklemde sadeleştirmeler yapılip elde edilen denklemin her iyi yanının ξ ile iç çarpımı alındığında

$$g(\bar{R}(X, Y)Df, \xi) = -\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}g(Y, \nabla_X \xi) + X(\xi f)\alpha\eta(Y) + X(\xi f)\alpha\eta(Y) + ((\nabla_X \varphi)Y, \xi) + \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}g(X, \nabla_Y \xi) - Y(\xi f)\alpha\eta(X) - Y(\xi f)\alpha\eta(X) - \alpha g((\nabla_Y \varphi)X, \xi) \quad (3.2.2.38)$$

bulunur. (1.2.1.13), (1.2.14) ve (3.2.2.35) denklemleri (3.2.2.38) da yerine yazılırsa

$$g(\bar{R}(X, Y)Df, \xi) = -\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}[\alpha g(Y, X) - \alpha\eta(Y)\eta(X) - \beta g(Y, \varphi X)] - 2\alpha\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda\}\eta(X)\eta(Y) + \alpha[\alpha g(\varphi X, Y) + \beta g(X, Y) - \beta\eta(Y)\eta(X)] + \{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}[\alpha g(X, Y) - \alpha\eta(Y)\eta(X) - \beta g(X, \varphi Y)] + 2\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda\}\eta(Y)\alpha\eta(X) - \alpha[\alpha g(\varphi Y, X) + \beta g(X, Y) - \beta\eta(Y)\eta(X)] \quad (3.2.2.39)$$

Yukarıda (3.2.2.31) ve (3.2.2.1) denklemleri gözönünde bulundurulduğunda

$$2\alpha(\xi f)g(Y, \varphi X) = 2\beta\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\}g(Y, \varphi X) + 2\alpha^2 g(\varphi X, Y)$$

yani

$$[2\beta\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\} - 2\alpha(\xi f) + 2\alpha^2]g(Y, \varphi X) = 0,$$

sonucu ortaya çıkar. Burada $g(Y, \varphi X)$ sıfır olamayacağından

$$[2\beta\{2(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta - \lambda + (\xi f)\alpha\} - 2\alpha(\xi f) + 2\alpha^2] = 0,$$

olma durumu kalır. Burada α, β nın sabit olması göz önünde bulundurulduğunda λ değerinin sabit olabilmesi için $(\xi f) = \text{sabit} = c$ olması gerekir. Bu da (3.2.2.32) gereği

$$Df = c\xi \quad (3.2.2.40)$$

demektir. Dolayısıyla (3.2.2.23) denklemi (3.2.2.40) yardımıyla

$$\bar{S}(Y, X) = -\lambda g(Y, X) + g(\bar{\nabla}_Y c\xi, X) = -\lambda g(Y, X) - c\beta g(\varphi Y, X) + c\alpha g(Y, X) - c\alpha\eta(Y)\eta(X)$$

olarak yazılabilir. Burada X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = -3\lambda + 2\alpha c$$

elde edilir. Sonuçta manifold (M, φ_2) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.

3. bölümün özeti aşağıdaki çizelgelerde verilmiştir.

Çizelge 3.1. 3-boyutlu trans- Sasakian manifoldlar ile 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldlarda üzerinde koneksiyonlara göre Ricci soliton kavramı

(M, φ_1) çeyrek-simetrik metrik koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu trans-Sasakian manifoldu için	(M, φ_2) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu normal hemen hemen değme metrik manifoldu için
$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$ sağlanır.	$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$ sağlanır.
koneksiyona bağlı 1. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak manifold kosimplektiktir.	koneksiyona bağlı 1. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak manifold kosimplektiktir.
$\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y) \Leftrightarrow$ manifold α -Sasakiandır.	$\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y) \Leftrightarrow$ manifold β -Sasakiandır.
verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma özelliği sağlanıyor ise (M, φ_1) koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur.	verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma özelliği sağlanıyor ise (M, φ_2) koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur.
verilen koneksiyona bağlı gradyant Ricci soliton özelliği sağlanıyor ise i) manifold kosimplektik veya verilen koneksiyona bağlı η -Einstein manifold olur. ii) (M, φ_1) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir. iii) $\lambda = 0$, dolayısıyla metriğimiz değişmeyendir.	verilen koneksiyona bağlı gradyant Ricci soliton özelliği sağlanıyor ise i) manifold kosimplektiktir. ii) (M, φ_2) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.

Çizelge 3.2. (M, I) koneksiyonu ile verilen n-boyutlu Kenmotsu manifoldlar için bazı eğrilik şartları

(M, I) koneksiyonu ile verilen n-boyutlu Kenmotsu manifoldlar için	
$\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y = 0$ dir. ((M, I) koneksiyonuna göre I. Bianchi özdeşliği sağlanır.)	
$\bar{C}(X, Y)Z = 0 \Rightarrow$ ((M, I) ya göre düzlemsel konformal)	Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifolddur.
$\bar{C}(X, Y)\xi = C(X, Y)\xi = 0$ sağlanır. (∇ ya ve (M, I) ya göre düzlemsel ξ -konformaldır.)	
$\bar{R}(X, Y) \cdot \bar{R} = 0 \Rightarrow$	$H^n(-1)$ hiperbolik uzayına lokal olarak izometriktir.
$\bar{R}(X, Y) \cdot R = 0 \Rightarrow$	Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifolddur.
$\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{R})(X, Y)Z) = 0 \Rightarrow$ ((M, I) ya göre φ -simetrik manifold)	Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifold olur.
$g(\bar{C}(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z, \varphi W) = 0 \Rightarrow$ ((M, I) koneksiyonuna göre düzlemsel φ -konformal)	Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifold olur.
$\varphi^2((\bar{\nabla}_W \bar{C})(X, Y)Z) = 0 \Rightarrow$ ((M, I) koneksiyonuna göre φ -konformal simetrik manifold)	Levi-Civita koneksiyonuna göre η -Einstein manifolddur.
$\check{C}(X, Y)\xi = \check{C}(X, Y)\xi = 0 \Leftrightarrow$ (∇ ya ve (M, I) ya göre düzlemsel ξ -quasi konformal)	$a = 2(1 - n)b$ dir.

4. ÇEYREK SİMETRİK METRİK OLMAYAN (M, φ_3, f_1) KONEKSİYONUyla

VERİLEN MANİFOLDLAR

Bu bölümde (M, φ_3, f_1) koneksiyonuyla verilen 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldlar ve n -boyutlu f -Kenmotsu manifoldlar incelenecektir.

4.1. (M, φ_3, f_1) Çeyrek-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonu İle Verilen 3-Boyutlu

Quasi-Sasakian Manifoldlar

Önerme 4.1.1.: Bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_3, f_1) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için R ile $\bar{R}$ arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)[g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi] \\ &+ \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)[g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y] + \frac{\beta}{2}[2g(\varphi X, Y)\varphi Z + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y] \\ &+ \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi \\ &+ \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

dir .

İspat : (M, φ_3, f_1) koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için hemen hemen değme metrik manifoldlarda (2.1.2) denklemini bulmuştuk. M 3-boyutlu quasi-Sasakian manifold olduğundan (2.1.2) denkleminde (1.2.28) ve (1.2.29) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi \\
&\quad + f_1^2[g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi] + f_1\beta g(Y, Z)\varphi X - f_1\beta g(X, Z)\varphi X \\
&\quad + \frac{1}{2}[\beta\eta(Z)g(X, Y)\xi - \beta\eta(Z)\eta(Y)X - \beta\eta(Y)g(X, Z)\xi + \beta\eta(Z)\eta(Y)X \\
&\quad + \beta\eta(X)g(Y, Z)\xi - \beta\eta(X)\eta(Z)Y + \beta\eta(X)g(Y, Z)\xi - \beta\eta(X)\eta(Z)Y \\
&\quad - \beta\eta(Z)g(Y, X)\xi + \beta\eta(Z)\eta(X)Y + \beta g(\varphi X, Y)\varphi Z - \beta g(\varphi Y, X)\varphi Z \\
&\quad + \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X - \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi \\
&\quad + f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi - f_1g(Y, Z)\varphi X + f_1g(X, Z)\varphi Y + \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)Y \\
&\quad - \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)X]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi \\
&\quad + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)[g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi] \\
&\quad + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)[g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y] + \frac{\beta}{2}[2g(\varphi X, Y)\varphi Z + g(\varphi Y, Z)\varphi X \\
&\quad - g(\varphi X, Z)\varphi Y] + \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi \\
&\quad - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi
\end{aligned}$$

sonucu ortaya çıkar.

Önerme 4.1.2.: Bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_3, f_1) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi &= -(X\beta)\varphi Y + (Y\beta)\varphi X - (Xf_1)\eta(Y)\xi + (Yf_1)\eta(X)\xi \\
&\quad + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)[\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y] + \left(\frac{1}{4} - \beta^2\right)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\
&\quad + f_1g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(X, \xi)Z \\
&= -(Z\beta)\varphi X - g(X, \varphi Z)grad\beta - \frac{f_1}{2}g(\varphi X, Z)\xi + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\eta(Z)\varphi X - (Xf_1)\eta(Z)\xi \\
&+ \left((\xi f_1) - \beta^2 - f_1^2 - \frac{\beta}{2}\right)g(X, Z)\xi + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\eta(Z)X \\
&+ \left(\frac{\beta}{2} + f_1^2 + \frac{1}{4}\right)\eta(X)\eta(Z)\xi
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

dır.

İspat: İlk olarak (4.1.1) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi &= R(X, Y)\xi - (Xf_1)\eta(Y)\xi + (Yf_1)\eta(X)\xi + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)[\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y] \\
&+ \frac{1}{4}[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + f_1g(\varphi X, Y)\xi,
\end{aligned}$$

bulunur. M bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olduğundan (1.2.30) denklemi yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi &= \beta^2(\eta(Y)X - \eta(X)Y) + (Y\beta)\varphi X - (X\beta)\varphi Y - (Xf_1)\eta(Y)\xi + (Yf_1)\eta(X)\xi \\
&+ \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)[\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y] + \frac{1}{4}[\eta(X)Y - \eta(Y)X] + f_1g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned}$$

halini alır. Son olarak burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi &= -(X\beta)\varphi Y + (Y\beta)\varphi X - (Xf_1)\eta(Y)\xi + (Yf_1)\eta(X)\xi \\
&+ \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)[\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y] + \left(\frac{1}{4} - \beta^2\right)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\
&+ f_1g(\varphi X, Y)\xi,
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (1.2.3) denklemi yardımıyla (4.1.1) denklemi $Y = \xi$ için

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, \xi)Z &= R(X, \xi)Z - (Xf_1)\eta(Z)\xi + (\xi f_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)[\eta(Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\xi] \\
&+ \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\eta(Z)\varphi X + \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)\xi - \eta(Z)X] \\
&+ \frac{1}{2}f_1g(\varphi Z, X)\xi,
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

olarak yazılabilir. (1.2.30) denklemi (4.1.4) eşitliğinde kullanıldığında, ifademiz

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, \xi)Z &= \beta^2(\eta(Z)X - g(X, Z)\xi) - g(X, \varphi Z)\text{grad}\beta - (Z\beta)\varphi X - (Xf_1)\eta(Z)\xi \\
&\quad + (\xi f_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)[\eta(Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\xi] + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\eta(Z)\varphi X \\
&\quad + \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)\xi - \eta(Z)X] + \frac{1}{2}f_1g(\varphi Z, X)\xi,
\end{aligned}$$

halini alır ki buradan (4.1.3) denklemi elde edilir.

Önerme 4.1.3. : M bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

dır.

İspat: (4.1.1) denkleminde sırasıyla $Y = X$ ve $X = Y$ alınır

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Y, X)Z &= R(Y, X)Z - (Yf_1)g(X, Z)\xi + (Xf_1)g(Y, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(X, Z)\eta(X)\xi \\
&\quad - g(Y, Z)\eta(Y)\xi\} + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(X, Z)\varphi Y - g(Y, Z)\varphi X\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi Y, X)\varphi Z \\
&\quad + g(\varphi X, Z)\varphi Y - g(\varphi Y, Z)\varphi X\} + \frac{1}{4}\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} \\
&\quad + f_1\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi \\
&\quad + \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. (4.1.4) ile (4.1.5) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, X)Z \\
&= R(X, Y)Z + R(Y, X)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi - (Yf_1)g(X, Z)\xi \\
&+ (Xf_1)g(Y, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi \\
&+ g(X, Z)\eta(X)\xi - g(Y, Z)\eta(Y)\xi\} + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(X, Z)\varphi Y - g(Y, Z)\varphi X \\
&+ g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi Y, X)\varphi Z + g(\varphi X, Z)\varphi Y - g(\varphi Y, Z)\varphi X \\
&+ 2g(\varphi X, Y)\varphi Z + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y\} + \frac{1}{4}\{2g(\varphi Y, X)\varphi Z \\
&+ g(\varphi X, Z)\varphi Y - g(\varphi Y, Z)\varphi X + 2g(\varphi X, Y)\varphi Z + g(\varphi Y, Z)\varphi X \\
&- g(\varphi X, Z)\varphi Y\} + f_1\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi \\
&+ \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi \\
&+ f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

bulunur.

Ayrıca (4.1.1) denkleminde sırasıyla ilk önce $X = Y$, $Y = Z$ ve $Z = X$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}
& \bar{R}(Y, Z)X \\
&= R(Y, Z)X - (Yf_1)g(Z, X)\xi + (Zf_1)g(Y, X)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Z, X)\eta(Y)\xi - g(Y, X)\eta(Z)\xi\} \\
&+ \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(Z, X)\varphi Y - g(Y, X)\varphi Z\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi Y, Z)\varphi X + g(\varphi Z, X)\varphi Y - g(\varphi Y, X)\varphi Z\} \\
&+ \frac{1}{4}\{\eta(Y)\eta(X)Z - \eta(Z)\eta(X)Y\} + f_1\eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi \\
&+ \frac{1}{2}f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1.6) denkleminde sırasıyla $Y = Z$, $Z = X$ ve $X = Y$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Z, X)Y &= R(Z, X)Y - (Zf_1)g(X, Y)\xi + (Xf_1)g(Z, Y)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(X, Y)\eta(Z)\xi \\
&\quad - g(Z, Y)\eta(X)\xi\} + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(X, Y)\varphi Z - g(Z, Y)\varphi X\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi Z, X)\varphi Y \\
&\quad + g(\varphi X, Y)\varphi Z - g(\varphi Z, Y)\varphi X\} + \frac{1}{4}\{\eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)Z\} \\
&\quad + f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi \\
&\quad + \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. Son olarak (4.1.1), (4.1.6) ve (4.1.7) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y &= \frac{\beta}{2}\{4g(\varphi X, Y)\varphi Z + 4g(\varphi Y, Z)\varphi X \\
&\quad + 4g(\varphi Z, X)\varphi Y\} + 2f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi
\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

bulunur. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 4.1.4.: Bir 3- boyutlu quasi -Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_3, f_1)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (4.1.8) gereği bu koneksiyona bağlı 1. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak ve ancak $\beta = 0, f_1 = 0$ dır.

Sonuç 4.1.1.: Bir 3- boyutlu quasi -Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_3, f_1)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (4.1.8) gereği bu koneksiyona bağlı I. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak ve ancak $f_1 = 0$ ve manifold kosimplektiktir.

Önerme 4.1.5.: Bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_3, f_1)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skaler eğriliği sırasıyla $\bar{S}, \bar{Q}$ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{S}(Y, Z) &= S(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z) - \left[\frac{1}{2} + f_1^2\right]\eta(Y)\eta(Z) \\
&\quad + [f_1^2 - (\xi f_1)]g(Y, Z),
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

$$\bar{Q}Y = QY + (Yf_1)\xi - f_1(\beta - 1)\varphi Y - \left[\frac{1}{2} + f_1^2\right]\eta(Y)\xi + [f_1^2 - (\xi f_1)]Y, \tag{4.1.10}$$

$$\bar{\tau} = \tau + 2 \left(f_1^2 - (\xi f_1) \right) - \frac{1}{2}, \quad (4.1.11)$$

dir.

İspat : (4.1.1.) denkleminin her iki yanının W vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned} g(\bar{R}(X, Y)Z, W) &= g(R(X, Y)Z, W) - (Xf_1)g(Y, Z)\eta(W) + (Yf_1)g(X, Z)\eta(W) \\ &+ \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2} \right) [g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)] \\ &+ \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2} \right) [g(Y, Z)g(\varphi X, W) - g(X, Z)g(\varphi Y, W)] \\ &+ \frac{\beta}{2} [2g(\varphi X, Y)g(\varphi Z, W) + g(\varphi Y, Z)g(\varphi X, W) - g(\varphi X, Z)g(\varphi Y, W)] \\ &+ \frac{1}{4} [\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X, W)] + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\eta(W) \\ &- \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\eta(W) + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\eta(W) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, Z) &= S(Y, Z) - (\xi f_1)g(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2} \right) [g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] \\ &- \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2} \right) g(\varphi Y, Z) - \frac{\beta}{2} [2g(\varphi Y, \varphi Z) - g(\varphi Y, \varphi Z)] + \frac{1}{4} [\eta(Y)\eta(Z) \\ &- \eta(Y)\eta(Z)3] - \frac{1}{2}f_1g(\varphi Z, Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, Z) &= S(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z) - \left[\frac{1}{2} + f_1^2 \right] \eta(Y)\eta(Z) \\ &+ [f_1^2 - (\xi f_1)]g(Y, Z) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu da bize (4.1.9) ifadesini verir. Ayrıca (4.1.9) denklemini $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \bar{Q}Y &= QY + (Yf_1)\xi - f_1(\beta - 1)\varphi Y - \left[\frac{1}{2} + f_1^2 \right] \eta(Y)\xi \\ &+ [f_1^2 - (\xi f_1)]Y \end{aligned}$$

dır.

Son olarak (4.1.9) denkleminde Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{\tau} = \tau + 2(f_1^2 - (\xi f_1)) - \frac{1}{2}$$

dır.

Önerme 4.1.6: Bir 3- boyutlu quazi Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_3, f_1)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere, $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, \xi) = (Y f_1) - (\varphi Y \beta) + \left[2\beta^2 - \frac{1}{2} - (\xi f_1) \right] \eta(Y) \quad (4.1.12)$$

dır.

İspat: (4.1.9) denklemi $Z = \xi$ için

$$\bar{S}(Y, \xi) = S(Y, \xi) + (Y f_1) - \left[\frac{1}{2} + f_1^2 \right] \eta(Y) + [f_1^2 - (\xi f_1)] \eta(Y)$$

halini alır. Son denklemde (1.2.25) kullanılırsa

$$\bar{S}(Y, \xi) = (Y f_1) - (\varphi Y \beta) + \left[2\beta^2 - \frac{1}{2} - (\xi f_1) \right] \eta(Y) \eta(Z)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.1.1: Bir 3- boyutlu quazi -Sasakian manifoldu M olsun. $M, (M, \varphi_3, f_1)$ çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü simetriktir ancak ve ancak f_1 sabit ve $\beta = 1$ dir.

İspat: Kabul edelim ki 3-boyutlu bir M quazi-Sasakian manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$ (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre Ricci tensörü simetrik olsun, yani $\forall Z, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$$

sağlansın. Öncelikle $\bar{S}(Z, Y)$ ifadesini bulabilmek için (4.1.9) denkleminde Y yerine Z, Z yerine Y yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{S}(Z, Y) &= S(Z, Y) + (Z f_1) \eta(Y) + f_1(\beta - 1) g(Z, \varphi Y) + \left[-\frac{1}{2} - f_1^2 \right] \eta(Y) \eta(Z) \\ &\quad + [f_1^2 - (\xi f_1)] g(Y, Z) \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

ifadesi elde edilir.(4.1.9) ve (4.1.13) denklemleri $\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$ gereği

$$\begin{aligned} S(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z) + \left[-\frac{1}{2} - f_1^2\right]\eta(Y)\eta(Z) + [f_1^2 - (\xi f_1)]g(Y, Z) \\ = S(Z, Y) + (Zf_1)\eta(Y) + f_1(\beta - 1)g(Z, \varphi Y) + \left[-\frac{1}{2} - f_1^2\right]\eta(Y)\eta(Z) \\ + [f_1^2 - (\xi f_1)]g(Y, Z) \end{aligned}$$

halini alır. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$(Yf_1)\eta(Z) + f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z) = (Zf_1)\eta(Y) + f_1(\beta - 1)g(Z, \varphi Y)$$

yada

$$(Yf_1)\eta(Z) - (Zf_1)\eta(Y) + 2f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z) = 0$$

bulunur. Buradan da $f_1 = sbt$ ve $\beta = 1$ olduğu açıktır.

Tersine 3-boyutlu bir M quasi-Sasakian manifoldu için $f_1 = sbt$ ve $\beta = 1$ olsun. (4.1.9) denklemi

$$f_1 = sbt \text{ ve } \beta = 1 \text{ için}$$

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) - \left[\frac{1}{2} + f_1^2\right]\eta(Y)\eta(Z) + f_1^2 g(Y, Z)$$

haline dönüşür. Yukarıdaki denklemde S Ricci tensörü ve g Riemann metriğinin simetrik olma özelliklerinden yararlanılarak

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Z, Y) - \left[\frac{1}{2} + f_1^2\right]\eta(Z)\eta(Y) + f_1^2 g(Z, Y) = \bar{S}(Z, Y)$$

sonucu ortaya çıkar. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.1.7.: Bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre projektif eğrilik tensörü ve koncircular eğrilik tensörü sırasıyla $\bar{P}$ ve $\bar{H}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{P}(X, Y)Z &= P(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Y, Z)\eta(X)\xi \\
&\quad - g(X, Z)\eta(Y)\xi\} + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi X, Y)\varphi Z \\
&\quad + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y\} + f_1^2\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
&\quad + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi \\
&\quad - \frac{1}{2}\{(Yf_1)\eta(Z)X - (Xf_1)\eta(Z)Y\} - \frac{1}{2}\{f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z)X \\
&\quad - f_1(\beta - 1)g(X, \varphi Z)Y\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\{[f_1^2 - (\xi f_1)]g(Y, Z)X \\
&\quad - [f_1^2 \\
&\quad - (\xi f_1)]g(X, Z)Y\}
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{H}(X, Y)Z &= H(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi\} \\
&\quad + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi X, Y)\varphi Z + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y\} \\
&\quad + \frac{1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi \\
&\quad + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi - \frac{2(f_1^2 - (\xi f_1)) - \frac{1}{2}}{6}\{g(Y, Z)X \\
&\quad - g(X, Z)Y\}
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

dır.

İspat: İlk önce (1.1.5) denklemi ile verilen projektif eğrilik tensörünü ele alalım. (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre projektif eğrilik tensörü için

$$\bar{P}(X, Y)Z = \bar{R}(X, Y)Z - \frac{1}{n-1}[\bar{S}(Y, Z)X - \bar{S}(X, Z)Y]$$

yazılabilir. Bu denklem (4.1.1) ve (4.1.9) denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}
\bar{P}(X, Y)Z = & R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Y, Z)\eta(X)\xi \\
& - g(X, Z)\eta(Y)\xi\} + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi X, Y)\varphi Z \\
& + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y\} + \frac{1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
& + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi \\
& - \frac{1}{2}\{S(Y, Z)X + (Yf_1)\eta(Z)X + f_1(\beta - 1)g(Y, \varphi Z)X - \left[\frac{1}{2} + f_1^2\right]\eta(Y)\eta(Z)X \\
& + [f_1^2 - (\xi f_1)]g(Y, Z)X - S(X, Z)Y - (Xf_1)\eta(Z)Y - f_1(\beta - 1)g(X, \varphi Z)Y \\
& + \left(\frac{1}{2} + f_1^2\right)\eta(X)\eta(Z)Y - (f_1^2 - (\xi f_1))g(X, Z)Y\}
\end{aligned}$$

halini alır. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında (4.1.14) denklemi elde edilir.

Benzer şekilde (1.1.6) denklemi göz önünde bulundurulduğunda $\bar{\nabla}$ ye göre koncircular eğrilik tensörü

$$\bar{H}(X, Y)Z = \bar{R}(X, Y)Z - \frac{\bar{\tau}}{n(n-1)}[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y]$$

biçimindedir. Bu denklemde (4.1.1) ve (4.1.10) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\bar{H}(X, Y)Z = & R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + \left(f_1^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Y, Z)\eta(X)\xi \\
& - g(X, Z)\eta(Y)\xi\} + \left(f_1\beta - \frac{f_1}{2}\right)\{g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y\} + \frac{\beta}{2}\{2g(\varphi X, Y)\varphi Z \\
& + g(\varphi Y, Z)\varphi X - g(\varphi X, Z)\varphi Y\} + \frac{1}{4}\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X\} \\
& + f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - \frac{1}{2}f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi + \frac{1}{2}f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi \\
& - \frac{\tau + 2(f_1^2 - (\xi f_1)) - \frac{1}{2}}{6}\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\}
\end{aligned}$$

bulunur ki, buradan (4.1.15) denkleminde ulaşılır.

Buradan itibaren işlemlerin kolaylığı için $f_1 = \beta$ kabul edeceğiz.

Teorem 4.1.2: 3-boyutlu bir quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu ∇ ve (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ için η -paralel olma şartı denk ise

i) $\beta = 0$, yani ya manifold kosimplektik yada manifold $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre η -Einstein olmasıdır.

ii) $\beta =$ sabit dolayısıyla manifold ∇ ya göre η -Einsteinidir.

İspat: M 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldunu ele alalım. (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere koneksiyon özellikleri gereği

$$(\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) = \bar{\nabla}_X \bar{S}(\varphi Y, \varphi Z) - \bar{S}(\bar{\nabla}_X \varphi Y, \varphi Z) - \bar{S}(\varphi Y, \bar{\nabla}_X \varphi Z)$$

yazılabilir. Burada (2.2.1) denklemini yardımıyla

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) &= \nabla_X \bar{S}(\varphi Y, \varphi Z) - \bar{S}(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) + \frac{1}{2} \eta(X) \bar{S}(\varphi^2 Y, \varphi Z) + \beta g(X, \varphi Y) \bar{S}(\xi, \varphi Z) \\ &\quad - \bar{S}(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) + \frac{1}{2} \eta(X) \bar{S}(\varphi Y, \varphi^2 Z) + \beta g(X, \varphi Z) \bar{S}(\varphi Y, \xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (4.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) &= \nabla_X S(\varphi Y, \varphi Z) + \nabla_X [(\beta - \beta^2)g(\varphi Y, Z)] + \nabla_X [\beta^2 g(Y, Z) - \beta^2 \eta(Y)\eta(Z)] \\ &\quad - S(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) - \beta^2 g(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) - (\beta - \beta^2)g(\varphi \nabla_X \varphi Y, \varphi Z) \\ &\quad + \beta g(X, \varphi Y)(Z\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(\varphi Y\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(Y\beta) - S(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) \\ &\quad - (\varphi Y\beta)\eta(\nabla_X \varphi Z) - \beta^2 g(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) \\ &\quad - (\beta - \beta^2)g(\varphi^2 Y, \nabla_X \varphi Z), \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

bulunur. Burada ∇ koneksiyonunun özellikleri yardımıyla (4.1.16) denklemini

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) &= (\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) + [(X\beta) - 2\beta(X\beta)]g(\varphi Y, Z) \\ &\quad + (\beta - \beta^2)\{g((\nabla_X \varphi)Y, Z) + g(\varphi \nabla_X Y, Z) + g(\varphi Y, \nabla_X Z)\} \\ &\quad + 2\beta(X\beta)[g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] \\ &\quad + \beta^2\{g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - \eta(\nabla_X Y)\eta(Z) - \eta(Y)\eta(\nabla_X Z) - g(Y, \nabla_X \xi)\eta(Z) \\ &\quad - \eta(Y)g(Z, \nabla_X \xi)\} - \beta^2 g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) - \beta^2 g(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) \\ &\quad - (\beta - \beta^2)\{g((\nabla_X \varphi)Y, Z) + g(\varphi \nabla_X Y, Z) - \eta(\nabla_X Y)\eta(Z)\} + \beta g(X, \varphi Y)(Z\beta) \\ &\quad + \beta g(X, \varphi Z)(\varphi Y\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(Y\beta) - (\varphi Y\beta)\eta(\nabla_X \varphi Z) \\ &\quad - \beta^2 g(\varphi Y, (\nabla_X \varphi)Z) - \beta^2 g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z) - (\beta - \beta^2)g(\varphi^2 Y, (\nabla_X \varphi)Z) \\ &\quad - (\beta - \beta^2)g(\varphi Y, \nabla_X Z), \end{aligned}$$

haline dönüşür. Burada (1.2.28) ve (1.2.29) denklemleri kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) &= (\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) + [(X\beta) - 2\beta(X\beta)]g(\varphi Y, Z) \\
&\quad + 2\beta(X\beta)[g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] + \beta^3\{g(Y, \varphi X)\eta(Z) + \eta(Y)g(Z, \varphi X)\} \\
&\quad + \beta^3\{\eta(Y)g(X, \varphi Z)\} - (\beta - \beta^2)\beta\{g(X, Y)\eta(Z) - \eta(Y)g(X, Z)\} \\
&\quad + \beta g(X, \varphi Y)(Z\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(\varphi Y\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(Y\beta) \\
&\quad - \beta(\varphi Y\beta)\{g(X, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} + \beta^3\eta(Z)g(\varphi Y, X) \\
&\quad + \beta(\beta - \beta^2)\eta(Z)\{-g(Y, X) \\
&\quad + \eta(Y)\eta(X)\}, \tag{4.1.17}
\end{aligned}$$

bulunur. M üzerindeki $\bar{\nabla}$ ve ∇ koneksiyonları için η -paralel olma şartı denk olduğundan yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
&[(X\beta) - 2\beta(X\beta)]g(\varphi Y, Z) + 2\beta(X\beta)[g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] \\
&\quad + \beta^3\{g(Y, \varphi X)\eta(Z) + \eta(Y)g(Z, \varphi X)\} + \beta^3\{\eta(Y)g(X, \varphi Z)\} \\
&\quad - (\beta - \beta^2)\beta\{g(X, Y)\eta(Z) - \eta(Y)g(X, Z)\} + \beta g(X, \varphi Y)(Z\beta) \\
&\quad + \beta g(X, \varphi Z)(\varphi Y\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(Y\beta) - \beta(\varphi Y\beta)\{g(X, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} \\
&\quad + \beta^3\eta(Z)g(\varphi Y, X) + \beta(\beta - \beta^2)\eta(Z)\{-g(Y, X) + \eta(Y)\eta(X)\} = 0,
\end{aligned}$$

halini alır. Son olarak Y ve Z ye bağlı kontraksiyon yapıldığında

$$4\beta(X\beta) - \beta g(\varphi X\beta) + \beta(X\beta) - \beta g(\varphi X\beta) - \beta(\varphi X\beta) = 0,$$

yani,

$$5\beta(X\beta) - 3\beta(\varphi X\beta) = 0,$$

yazılabilir. Burada iki durum söz konusudur:

Durum i) $\beta = 0$:

Kabul edelim ki $\beta = 0$ olsun. Bu durumda 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu kosimplektik olur. Ayrıca (1.2.33) ve (4.1.9) denklemlerinde $\beta = 0$ alınırsa,

$$\bar{S}(Y, Z) = S(Y, Z) - \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z) = \frac{\tau}{2}g(Y, Z) - \left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)\eta(Y)\eta(Z)$$

elde edilir. Bu da manifoldun $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre η –Einstein olduğunu gösterir.

Durum ii) $5(X\beta) - 3(\varphi X\beta) = 0$:

$5(X\beta) - 3(\varphi X\beta) = 0$ olduğunu gözönünde bulundurursak, bu denklem $\forall X \in \chi(M)$ için

$$5grad\beta + 3\varphi grad\beta = 0 \quad (4.1.18)$$

haline dönüşür. (4.1.18) denkleminin her iki tarafına φ uygulayalım:

$$5\varphi grad\beta - 3grad\beta = 0 \quad (4.1.19)$$

(4.1.18) ve (4.1.19) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$34grad\beta = 0$$

elde edilir. Yani $\beta =$ sabit dolayısıyla (1.2.33) denklemi gereği manifold ∇ ya göre η –Einsteinidir.

Teorem 4.1.3.: 3-boyutlu bir quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerindeki (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere manifold bu koneksiyona göre η -paralel ise τ sabit olmak şartıyla

i) $\beta = 0$, yani ∇ ya manifold kosimplektik yada manifold $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre η –Einsteinidir.

ii) $\beta =$ sabit dolayısıyla manifold ∇ ya göre η –Einstein manifolddur.

İspat: İlk önce işlem kolaylığı için $(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z)$ ifadesini bulalım. Levi-civita koneksiyonunun özellikleri gereği

$$(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) = \nabla_X S(\varphi Y, \varphi Z) - S(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) - S(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z)$$

yazılabilir. Burada (1.2.33) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} (\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) &= \nabla_X \left\{ \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) g(\varphi Y, \varphi Z) \right\} - \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \{ g(\nabla_X \varphi Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, \nabla_X \varphi Z) \} \\ &\quad + \eta(\nabla_X \varphi Z)(\varphi^2 Y \beta) + \eta(\nabla_X \varphi Y)(\varphi^2 Z \beta) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem koneksiyon özellikleri gereği

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) &= \left(\frac{(X\tau)}{2} - 2\beta(X\beta) \right) g(\varphi Y, \varphi Z) \\
&+ \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \{g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - \eta(\nabla_X Y)\eta(Z) - \eta(Y)\eta(\nabla_X Z) \\
&- g(Y, \nabla_X \xi)\eta(Z) - \eta(Y)g(Z, \nabla_X \xi)\} \\
&- \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \{g((\nabla_X \varphi)Y, \varphi Z) + g(\varphi \nabla_X Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, (\nabla_X \varphi)Z) \\
&+ g(\varphi Y, \varphi \nabla_X Z)\} + \eta((\nabla_X \varphi)Z)(\varphi^2 Y \beta) + \eta((\nabla_X \varphi)Y)(\varphi^2 Z \beta),
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (1.2.28) ve (1.2.29) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
(\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z) &= \left(\frac{(X\tau)}{2} - 2\beta(X\beta) \right) g(\varphi Y, \varphi Z) \\
&+ \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \beta \{g(Y, \varphi X)\eta(Z) + \eta(Y)g(Z, \varphi X)\} \\
&+ \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \beta \{\eta(Y)g(X, \varphi Z) + \eta(Z)g(\varphi Y, X)\} \\
&- \beta \{g(X, Z) - \eta(X)\eta(Z)\}(Y\beta) \\
&- \beta \{g(X, Y) \\
&- \eta(X)\eta(Y)\}(Z\beta),
\end{aligned} \tag{4.1.20}$$

bulunur. (4.1.20) denklemi (4.1.17) da yerine konulduğunda

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) &= \left(\frac{(X\tau)}{2} - 2\beta(X\beta) \right) g(\varphi Y, \varphi Z) \\
&+ \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \beta \{g(Y, \varphi X)\eta(Z) + \eta(Y)g(Z, \varphi X)\} \\
&+ \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \beta \{\eta(Y)g(X, \varphi Z) + \eta(Z)g(\varphi Y, X)\} \\
&- \beta \{g(X, Z) - \eta(X)\eta(Z)\}(Y\beta) - \beta \{g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)\}(Z\beta) \\
&+ [(X\beta) - 2\beta(X\beta)]g(\varphi Y, Z) + 2\beta(X\beta)[g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] \\
&+ \beta^3 \{g(Y, \varphi X)\eta(Z) + \eta(Y)g(Z, \varphi X)\} + \beta^3 \{\eta(Y)g(X, \varphi Z)\} \\
&- (\beta - \beta^2)\beta \{g(X, Y)\eta(Z) - \eta(Y)g(X, Z)\} + \beta g(X, \varphi Y)(Z\beta) \\
&+ \beta g(X, \varphi Z)(\varphi Y\beta) + \beta g(X, \varphi Z)(Y\beta) - \beta(\varphi Y\beta)\{g(X, Z) - \eta(Y)\eta(Z)\} \\
&+ \beta^3 \eta(Z)g(\varphi Y, X) + \beta(\beta - \beta^2)\eta(Z)\{-g(Y, X) + \eta(Y)\eta(X)\},
\end{aligned}$$

bulunur. Manifold (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre η -paralel olduğundan tanım gereği yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(X\tau)}{2} - 2\beta(X\beta) \right) g(\varphi Y, \varphi Z) + \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \beta \{ g(Y, \varphi X) \eta(Z) + \eta(Y) g(Z, \varphi X) \} \\
& + \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2 \right) \beta \{ \eta(Y) g(X, \varphi Z) + \eta(Z) g(\varphi Y, X) \} \\
& - \beta \{ g(X, Z) - \eta(X) \eta(Z) \} (Y\beta) - \beta \{ g(X, Y) - \eta(X) \eta(Y) \} (Z\beta) \\
& + [(X\beta) - 2\beta(X\beta)] g(\varphi Y, Z) + 2\beta(X\beta) [g(Y, Z) - \eta(Y) \eta(Z)] \\
& + \beta^3 \{ g(Y, \varphi X) \eta(Z) + \eta(Y) g(Z, \varphi X) \} + \beta^3 \{ \eta(Y) g(X, \varphi Z) \} \\
& - (\beta - \beta^2) \beta \{ g(X, Y) \eta(Z) - \eta(Y) g(X, Z) \} + \beta g(X, \varphi Y) (Z\beta) \\
& + \beta g(X, \varphi Z) (\varphi Y\beta) + \beta g(X, \varphi Z) (Y\beta) - \beta (\varphi Y\beta) \{ g(X, Z) - \eta(Y) \eta(Z) \} \\
& + \beta^3 \eta(Z) g(\varphi Y, X) + \beta (\beta - \beta^2) \eta(Z) \{ -g(Y, X) + \eta(Y) \eta(X) \} = 0,
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Son olarak Y ve Z ye bağlı kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{(X\tau)}{2} - 2\beta(X\beta) \right) 2 - \beta(X\beta) - \beta(X\beta) + 4\beta(X\beta) - \beta g(\varphi X\beta) + \beta(X\beta) - \beta g(\varphi X\beta) \\
& - \beta(\varphi X\beta) = 0,
\end{aligned}$$

yani,

$$(X\tau) - \beta(X\beta) - 3\beta(\varphi X\beta) = 0,$$

elde edilir. τ sabit olduğu kabul edildiğinden son denklem yerine

$$\beta(X\beta) + 3\beta(\varphi X\beta) = 0,$$

yazılabilir. Burada iki durum mevcuttur:

Durum i) $\beta = 0$:

$\beta = 0$ için Teorem 4.1.2. i) durumu şartları sağlanır. Yani manifold kosimplektiktir.

Durum ii) $(X\beta) + 3(\varphi X\beta) = 0$:

$(X\beta) + 3(\varphi X\beta) = 0$ ifadesi sağlansın. Bu denklem $\forall X \in \chi(M)$ için

$$grad\beta - 3\varphi grad\beta = 0 \quad (4.1.21)$$

haline dönüşür. (4.1.21) denkleminin her iki yanına φ uygulayalım.

$$\varphi grad\beta + 3grad\beta = 0 \quad (4.1.22)$$

(4.1.21) ve (4.1.22) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$10grad\beta = 0$$

elde edilir. Bu durumda $\beta =$ sabit dolayısıyla manifold ∇ ya göre η –Einstein'dir.

Teorem 4.1.4.: 3-boyutlu bir quasi-Sasakian manifoldu M olsun. β sabit olmak şartıyla M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre dairesel paralel Ricci tensöre sahip ise

i) $\beta = 0$, yani ∇ manifold kosimplektik yada manifold $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre η –Einstein'dir,

ii) $\beta = \pm \frac{1}{2}$ e karşılık gelir.

İspat: M 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna bağlı olarak dairesel paralel Ricci tensöre sahip olsun, yani

$$(\bar{\nabla}_X \bar{S})(Y, Z) + (\bar{\nabla}_Y \bar{S})(Z, X) + (\bar{\nabla}_Z \bar{S})(X, Y) = 0,$$

sağlansın. Yukarıda $Y = Z = \xi$ alalım.

$$(\bar{\nabla}_X \bar{S})(\xi, \xi) + (\bar{\nabla}_\xi \bar{S})(\xi, X) + (\bar{\nabla}_\xi \bar{S})(X, \xi) = 0,$$

Burada (2.2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X \bar{S}(\xi, \xi) - \bar{S}(\nabla_X \xi, \xi) - \frac{1}{2} \bar{S}(\varphi X, \xi) + \beta \eta(X) \bar{S}(\xi, \xi) - \bar{S}(\xi, \nabla_X \xi) - \frac{1}{2} \bar{S}(\xi, \varphi X) + \beta \eta(X) \bar{S}(\xi, \xi) \\ + \nabla_\xi \bar{S}(\xi, X) - \bar{S}(\nabla_\xi \xi, X) + \beta \bar{S}(\xi, X) - \bar{S}(\xi, \nabla_\xi X) + \frac{1}{2} \bar{S}(\xi, \varphi X) \\ + \beta \eta(X) \bar{S}(\xi, \xi) + \nabla_\xi \bar{S}(X, \xi) - \bar{S}(\nabla_\xi X, \xi) + \frac{1}{2} \bar{S}(\varphi X, \xi) + \beta \eta(X) \bar{S}(\xi, \xi) \\ - \bar{S}(X, \nabla_\xi \xi) + \beta \bar{S}(X, \xi) = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Son denklem, β nın sabit olmasını göz önünde bulundurursak, (4.1.9) yardımıyla

$$6\beta \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} \right) \eta(X) = 0,$$

haline dönüşür. Burada $\eta(X) = 0$ olamayacağından ancak

$$6\beta \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} \right) = 0$$

olabilir. Sonuç olarak β ya sıfır ya $-\frac{1}{2}$ yada $\frac{1}{2}$ sabit değerlerine karşılık olur. β nın sıfır olması manifoldun kosimplektik ayrıca $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna bağlı η -Einstein olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5.: 3-boyutlu bir quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ ve Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere $(\bar{R}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = 0$ ise M manifoldu $\bar{\nabla}$ ya bağlı η -Einstein manifolddur.

İspat: Kabul edelim ki

$$(\bar{R}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = 0 \quad (4.1.23)$$

sağlansın. Ayrıca $\forall Y, X, Z \in \chi(M)$ olmak üzere $(\bar{R}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z)$

$$(\bar{R}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = -\bar{S}(\bar{R}(X, \xi)Y, Z) - \bar{S}(Y, \bar{R}(X, \xi)Z)$$

olarak da yazılabilir. Bu durumda (4.1.23) denklemi

$$-\bar{S}(\bar{R}(X, \xi)Y, Z) - \bar{S}(Y, \bar{R}(X, \xi)Z) = 0$$

yada

$$\bar{S}(\bar{R}(X, \xi)Y, Z) + \bar{S}(Y, \bar{R}(X, \xi)Z) = 0, \quad (4.1.24)$$

olur. (4.1.24) de (4.1.3) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -(Y\beta)\bar{S}(\varphi X, Z) - g(X, \varphi Y)\bar{S}(\text{grad}\beta, Z) - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Y)\bar{S}(\xi, Z) + \left\{\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right\}\eta(Y)\bar{S}(\varphi X, Z) \\ & - (X\beta)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) - \left\{2\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}\right\}g(X, Y)\bar{S}(\xi, Z) + \left\{\beta^2 - \frac{1}{4}\right\}\eta(Y)\bar{S}(X, Z) \\ & + \left\{\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right\}\eta(X)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) - (Z\beta)\bar{S}(Y, \varphi X) - g(X, \varphi Z)\bar{S}(Y, \text{grad}\beta) \\ & - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Z)\bar{S}(Y, \xi) + \left\{\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right\}\eta(Z)\bar{S}(Y, \varphi X) - (X\beta)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi) \\ & - \left\{2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right\}g(X, Z)\bar{S}(Y, \xi) + \left\{\beta^2 - \frac{1}{4}\right\}\eta(Z)\bar{S}(Y, X) + \left\{\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\right\}\eta(X)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi) = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem (4.1.9) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& -(Y\beta)\{(\varphi X\beta)\eta(Z) + \eta(Z)(X\beta) + \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Z) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Z)\} \\
& - g(X, \varphi Y)\{\|\text{grad}\beta\|^2 \eta(Z) + \frac{\tau}{2}(Z\beta) + \beta(\beta - 1)(\varphi Z\beta)\} \\
& - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y)\{(\varphi X\beta)\eta(Z) \\
& + \eta(Z)(X\beta) + \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Z) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Z)\} - (X\beta)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) \\
& + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - \left[2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right]g(X, Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\eta(Y)\{(X\beta)\eta(Z) - (\varphi Z\beta)\eta(X) - (\varphi X\beta)\eta(Z) \\
& + \beta(1 - \beta)g(\varphi X, Z) + \frac{\tau}{2}g(X, Z) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Z)\eta(X)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\eta(X)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - (Z\beta)\{\eta(Y)(X\beta) \\
& - \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Y) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Y)\} - g(X, \varphi Z)\{\frac{\tau}{2}(Y\beta) - \beta(\beta - 1)(\varphi Y\beta)\} \\
& - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Z)\{\eta(Y)(X\beta) - \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Y) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Y)\} \\
& - (X\beta)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)g(X, Z)\{(Y\beta) \\
& - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\eta(Z)\{(Y\beta)\eta(X) - (\varphi X\beta)\eta(Y) \\
& - (\varphi Y\beta)\eta(X) + \beta(1 - \beta)g(\varphi Y, X) + \frac{\tau}{2}g(X, Y) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\eta(X)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\eta(X)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} = 0
\end{aligned}$$

halini alır. Burada X ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -2\beta(\beta-1)(Y\beta) - \frac{\tau}{2}(\varphi Y\beta) - \beta(\beta-1)(Y\beta) + \frac{\beta}{2}(Y\beta) + 2\beta(\beta-1)\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) \\
& - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{-(\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\eta(Y)\{3\frac{\tau}{2} \\
& + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\} + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)(2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y) - \{\eta(Y) \parallel grad\beta \parallel^2 \\
& - \beta(\beta-1)(Y\beta) - \frac{\tau}{2}(\varphi Y\beta)\} - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)3\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 \\
& - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + \frac{\tau}{2}\eta(Y) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)(\tau - 2\beta - 8\beta^2) + 2\beta^2(\beta - 1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\eta(Y) + \left\{-4\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right\}(Y\beta) \\
& + \left\{6\beta^2 + 3\frac{\beta}{2}\right\}(\varphi Y\beta) = 0,
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki denklem her Y vektör alanı için

$$\begin{aligned}
& \left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)(\tau - 2\beta - 8\beta^2) + 2\beta^2(\beta - 1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\xi + \left\{-4\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right\}grad\beta \\
& - \left\{6\beta^2 + 3\frac{\beta}{2}\right\}\varphi grad\beta \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

haline dönüşür ki, (4.1.23) denkleminin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$\left\{-4\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right\}\varphi grad\beta + \left\{6\beta^2 + 3\frac{\beta}{2}\right\}grad\beta = 0 \tag{4.1.26}$$

bulunur. (4.1.25) ile (4.1.26) arasında gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left\{(-4\beta^2 - \frac{\beta}{2})^2 + (6\beta^2 + 3\frac{\beta}{2})^2\right\}grad\beta \\
& = -\left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)(\tau - 2\beta - 8\beta^2) + 2\beta^2(\beta - 1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\left\{-4\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right\}\xi \\
& - \frac{\beta}{2}\xi
\end{aligned}$$

yani,

$$(X\beta) = - \frac{\left\{ \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) (\tau - 2\beta - 8\beta^2) + 2\beta^2 (\beta - 1) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) - \| \text{grad}\beta \|^2 \right\} \left\{ -4\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right\}}{\left\{ \left(-4\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right)^2 + \left(6\beta^2 + 3\frac{\beta}{2} \right)^2 \right\}} \eta(X)$$

elde edilir. Son denklem (1.2.23) de yerine yazılırsa manifoldun ∇ ya bağılı η -Einstein olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.5.: 3-boyutlu bir quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ya göre koncircular eğrilik tensörü $\bar{H}$ ve Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere $(\bar{H}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = 0$ ise M manifoldu ∇ ya bağılı η -Einstein manifolddur.

İspat: Kabul edelim ki

$$(\bar{H}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = 0 \quad (4.1.27)$$

sağlansın. Burada $\forall Y, X, Z \in \chi(M)$ için

$$(\bar{H}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = -\bar{S}(\bar{H}(X, \xi)Y, Z) - \bar{S}(Y, \bar{H}(X, \xi)Z)$$

yazılabilir. Bu takdirde

$$-\bar{S}(\bar{H}(X, \xi)Y, Z) - \bar{S}(Y, \bar{H}(X, \xi)Z) = 0$$

yada

$$\bar{S}(\bar{H}(X, \xi)Y, Z) + \bar{S}(Y, \bar{H}(X, \xi)Z) = 0 \quad (4.1.28)$$

olur. (4.1.28) de (4.1.14) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -(Y\beta)\bar{S}(\varphi X, Z) - g(X, \varphi Y)\bar{S}(\text{grad}\beta, Z) - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Y)\bar{S}(\xi, Z) + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \{ \eta(Y)\bar{S}(\varphi X, Z) \\ & + \eta(Z)\bar{S}(Y, \varphi X) \} - (X\beta)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) \{ g(X, Y)\bar{S}(\xi, Z) \\ & + g(X, Z)\bar{S}(Y, \xi) \} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) \{ \eta(Y)\bar{S}(X, Z) + \eta(Z)\bar{S}(Y, X) \} \\ & + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} \right) [\eta(X)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) + \eta(X)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi)] - (Z\beta)\bar{S}(Y, \varphi X) \\ & - g(X, \varphi Z)\bar{S}(Y, \text{grad}\beta) - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Z)\bar{S}(Y, \xi) - (X\beta)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi) = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemi (4.1.9) gereği

$$\begin{aligned}
& -(Y\beta)\{(\varphi X\beta)\eta(Z) + \eta(Z)(X\beta) + \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Z) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Z)\} \\
& - g(X, \varphi Y)\{\| \text{grad}\beta \|^2 \eta(Z) + \frac{\tau}{2}(Z\beta) + \beta(\beta - 1)(\varphi Z\beta)\} \\
& - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y)\{(\varphi X\beta)\eta(Z) \\
& + \eta(Z)(X\beta) + \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Z) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Z)\} - (X\beta)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) \\
& + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)g(X, Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\eta(Y)\{(X\beta)\eta(Z) - (\varphi Z\beta)\eta(X) - (\varphi X\beta)\eta(Z) \\
& + \beta(1 - \beta)g(\varphi X, Z) + \frac{\tau}{2}g(X, Z) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Z)\eta(X)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\eta(X)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - (Z\beta)\{\eta(Y)(X\beta) \\
& - \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Y) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Y)\} - g(X, \varphi Z)\{\frac{\tau}{2}(Y\beta) - \beta(\beta - 1)(\varphi Y\beta)\} \\
& - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Z)\{\eta(Y)(X\beta) \\
& - \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Y) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Y)\} \\
& -(X\beta)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)g(X, Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) \\
& + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\eta(Z)\{(Y\beta)\eta(X) - (\varphi X\beta)\eta(Y) \\
& - (\varphi Y\beta)\eta(X) + \beta(1 - \beta)g(\varphi Y, X) + \frac{\tau}{2}g(X, Y) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\eta(X)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\eta(X)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada X ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -2\beta(\beta-1)(Y\beta) - \frac{\tau}{2}(\varphi Y\beta) - \beta(\beta-1)(Y\beta) + \frac{\beta}{2}(Y\beta) + 2\beta(\beta-1)\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) \\
& - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\{-(\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\eta(Y)\{3\frac{\tau}{2} \\
& + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\} + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)(2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y) - \{\eta(Y) \parallel grad\beta \parallel^2 \\
& - \beta(\beta-1)(Y\beta) - \frac{\tau}{2}(\varphi Y\beta)\} - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)3\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 \\
& - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + \frac{\tau}{2}\eta(Y) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\tau - 2\beta^2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\eta(Y) + \left\{-6\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}(Y\beta) \\
& + 3\left\{2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}(\varphi Y\beta) = 0
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki denklem her Y vektör alanı için

$$\begin{aligned}
& \left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\tau - 2\beta^2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\xi + \left\{-6\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}grad\beta \\
& - 3\left\{2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}\varphi grad\beta = 0
\end{aligned} \tag{4.1.29}$$

olur ki, (4.1.29) de her iki tarafa φ uygulanırsa

$$\left\{-6\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}\varphi grad\beta + 3\left\{2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}grad\beta = 0 \tag{4.1.30}$$

bulunur. (4.1.30) ile (4.1.29) arasında gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left\{\left\{-6\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}^2 + (3\left\{2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\})^2\right\}grad\beta \\
& = -\left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\tau - 2\beta^2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\left\{-6\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\} \\
& - \frac{\bar{\tau}}{6}\xi
\end{aligned}$$

yani,

$$(X\beta) = \frac{-\left\{\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\tau - 2\beta^2(\beta - 1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \|grad\beta\|^2\right\}\left\{-6\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right\}}{\left\{\left(-4\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(6\beta^2 + 3\frac{\beta}{2}\right)^2\right\}}\eta(X)$$

elde edilir. (1.2.33) denklemini gereği manifoldun ∇ ya bağlı η -Einstein olduğu görülür.

Teorem 4.1.7.: Bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre projektif eğrilik tensörü $\bar{P}$ ve Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere $(\bar{P}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = 0$ sağlanır ise manifold ∇ ya bağlı η -Einstein olur.

İspat: $\forall Y, X, Z \in \chi(M)$ için

$$(\bar{P}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = -\bar{S}(\bar{P}(X, \xi)Y, Z) - \bar{S}(Y, \bar{P}(X, \xi)Z)$$

yazılabilir. Burada $(\bar{P}(X, \xi)\bar{S})(Y, Z) = 0$ olarak kabul edildiğinden yukarıdaki ifade

$$\bar{S}(\bar{P}(X, \xi)Y, Z) + \bar{S}(Y, \bar{P}(X, \xi)Z) = 0 \quad (4.1.31)$$

halini alır. (4.1.31 de (4.1.14) ifadesi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & -(Y\beta)\bar{S}(\varphi X, Z) - g(X, \varphi Y)\bar{S}(grad\beta, Z) - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Y)\bar{S}(\xi, Z) + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(Y)\bar{S}(\varphi X, Z) \\ & + \eta(Z)\bar{S}(Y, \varphi X)\} - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) + \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\bar{S}(X, Z) \\ & - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\eta(X)\bar{S}(\xi, Z) - (2\beta^2 + \frac{\beta}{2} \\ & - \frac{\tau}{4})\{g(X, Y)\bar{S}(\xi, Z) + g(X, Z)\bar{S}(Y, \xi) - \eta(X)\eta(Y)\bar{S}(\xi, Z) \\ & - \eta(X)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi)\} - (Z\beta)\bar{S}(Y, \varphi X) - g(X, \varphi Z)\bar{S}(Y, grad\beta) \\ & - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Z)\bar{S}(Y, \xi) - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi) + \frac{1}{2}(\varphi Z\beta)\bar{S}(Y, X) \\ & - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi) - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Z)\bar{S}(Y, \xi) - \frac{1}{2}(\varphi Z\beta)\eta(X)\bar{S}(Y, \xi) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (4.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -(Y\beta)\{(\varphi X\beta)\eta(Z) + \eta(Z)(X\beta) + \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Z) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Z)\} \\
& - g(X, \varphi Y)\{\|grad\beta\|^2 \eta(Z) + \frac{\tau}{2}(Z\beta) + \beta(\beta - 1)(\varphi Z\beta)\} \\
& - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y)\{(\varphi X\beta)\eta(Z) \\
& + \eta(Z)(X\beta) + \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Z) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Z)\} - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) \\
& + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} \\
& - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\eta(X)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)(X, Y)\{-(\varphi Z\beta) \\
& + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} + \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\{(X\beta)\eta(Z) - (\varphi Z\beta)\eta(X) - (\varphi X\beta)\eta(Z) \\
& + \beta(1 - \beta)g(\varphi X, Z) + \frac{\tau}{2}g(X, Z) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Z)\eta(X)\} \\
& + \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\eta(X)\eta(Y)\{-(\varphi Z\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Z)\} - (Z\beta)\{\eta(Y)(X\beta) \\
& - \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Y) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Y)\} - g(X, \varphi Z)\{\frac{\tau}{2}(Y\beta) - \beta(\beta - 1)(\varphi Y\beta)\} \\
& - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Z)\{\eta(Y)(X\beta) \\
& - \beta(\beta - 1)g(\varphi X, \varphi Y) + \frac{\tau}{2}g(\varphi X, Y)\} - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 \\
& - \frac{1}{2})\eta(Y)\} - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} \\
& - \frac{1}{2}(\varphi Z\beta)\eta(X)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} \\
& - \left[2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right]g(X, Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} + \frac{1}{2}(\varphi Z\beta)\{(Y\beta)\eta(X) \\
& - (\varphi X\beta)\eta(Y) - (\varphi Y\beta)\eta(X) + \beta(1 - \beta)g(\varphi Y, X) + \frac{\tau}{2}g(X, Y) \\
& + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\eta(X)\} + \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\eta(X)\eta(Z)\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) \\
& + (2\beta^2 - \frac{1}{2})\eta(Y)\} = 0
\end{aligned}$$

halini alır. Burada X ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -2\beta(\beta-1)(Y\beta) - \frac{\tau}{2}(\varphi Y\beta) + \beta(\beta-1)(Y\beta) + \frac{\beta}{2}(Y\beta) + 2\beta(\beta-1)\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) \\
& - \frac{1}{2}\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)(\varphi Y\beta) + \left[2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right](\varphi Y\beta) + \frac{\beta^2}{2}(Y\beta) + \frac{3\tau}{4}(\varphi Y\beta) \\
& + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} - \frac{\tau}{2}\right)\frac{3}{2}(\varphi Y\beta) - \{\eta(Y) \parallel grad\beta \parallel^2 + \beta(\beta-1)(Y\beta) \\
& - 2\left[2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right]\left\{(Y\beta) - (\varphi Y\beta) + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\eta(Y)\right\} + \frac{\tau}{4}(\varphi Y\beta) + \left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta}{2}\right)(Y\beta) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left\{-2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{\tau}{4}\right) + 2\beta^2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\eta(Y) \\
& + \left\{-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right\}(Y\beta) + \left\{8\beta^2 + 3\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right\}(\varphi Y\beta) = 0
\end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki denklem her Y vektör alanı için

$$\begin{aligned}
& \left\{-2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{\tau}{4}\right) + 2\beta^2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\xi \\
& + \left\{-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right\}grad\beta - \left\{8\beta^2 + 3\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right\}\varphi grad\beta = 0
\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

olur ki, (4.1.30) da her iki tarafa φ uygulanırsa

$$\left\{-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right\}\varphi grad\beta + \left\{8\beta^2 + 3\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right\}grad\beta = 0 \tag{4.1.33}$$

bulunur. (4.1.32) ve (4.1.33) arasında gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \left\{\left(-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right)^2 + \left(8\beta^2 + 3\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right)^2\right\}grad\beta \\
& = -\left\{-2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{\tau}{4}\right) + 2\beta^2(\beta-1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \parallel grad\beta \parallel^2\right\}\left\{-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right\}\xi
\end{aligned}$$

yani,

$$(X\beta) = \frac{-\left\{-2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{\tau}{4}\right) + 2\beta^2(\beta - 1)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) - \|\text{grad}\beta\|^2\right\}\left\{-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right\}}{\left\{-3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\tau}{2}\right\}^2 + \left\{8\beta^2 + 3\frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}\right\}^2} \eta(X)$$

elde edilir. Sonuçta manifold ∇ ya bağlı η -Einstein manifolddur.

Teorem 4.1.8.: M bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ ve projektif eğrilik tensörü $\bar{P}$ olmak üzere $(\bar{P}(X, \xi)\bar{R})(Y, V)W = 0$ ise M manifoldu ∇ ya bağlı η -Einstein manifolddur.

İspat: Kabul edelim ki verilen manifold için

$$(\bar{P}(X, \xi)\bar{R})(Y, V)W = 0 \quad (4.1.34)$$

sağlansın. Burada $\forall Y, X, V, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} & (\bar{P}(X, \xi)\bar{R})(Y, V)W \\ &= \bar{P}(X, \xi)\bar{R}(Y, V)W - \bar{R}(\bar{P}(X, \xi)Y, V)W - \bar{R}(Y, \bar{P}(X, \xi)V)W \\ & \quad - \bar{R}(Y, V)\bar{P}(X, \xi)W \end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki denklem (4.1.34) yardımıyla

$$\bar{P}(X, \xi)\bar{R}(Y, V)W - \bar{R}(\bar{P}(X, \xi)Y, V)W - \bar{R}(Y, \bar{P}(X, \xi)V)W - \bar{R}(Y, V)\bar{P}(X, \xi)W = 0 \quad (4.1.35)$$

olur. (4.1.35) denkleminde $V = W = \xi$ alalım:

$$\bar{P}(X, \xi)\bar{R}(Y, \xi)\xi - \bar{R}(\bar{P}(X, \xi)Y, \xi)\xi - \bar{R}(Y, \bar{P}(X, \xi)\xi)\xi - \bar{R}(Y, \xi)\bar{P}(X, \xi)\xi = 0 \quad (4.1.36)$$

bulunur. (4.1.36) da (4.1.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -(\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)\varphi X - g(X, \varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi)grad\beta - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\varphi X - \eta(Y)\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi - \bar{R}(Y, \varphi X)\xi - \bar{R}(Y, \xi)\varphi X\} \\
& - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)X - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& - \frac{1}{2}(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)\eta(X)\xi - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\{g(X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& - \eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\xi - g(X, Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi\} + (Y\beta)\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi \\
& + g(X, \varphi Y)\bar{R}(grad\beta, \xi)\xi + \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi + \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi \\
& - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\bar{R}(X, \xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\eta(X)\bar{R}(\xi, \xi)\xi \\
& + \frac{1}{2}(X\beta)\bar{R}(Y, \xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\bar{R}(Y, \xi)\xi + \frac{1}{2}(X\beta)\bar{R}(Y, \xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\bar{R}(Y, \xi)\xi \\
& = 0
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Yukarıdaki denklemin her iki tarafını bir $U \in \chi(M)$ vektörü ile iç çarpalım:

$$\begin{aligned}
& -(\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)g(\varphi X, U) - g(X, \varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi)g(grad\beta, U) - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)g(\varphi X, U) - \eta(Y)g(\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& - g(\bar{R}(Y, \varphi X)\xi, U) - g(\bar{R}(Y, \xi)\varphi X, U)\} - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& + \frac{1}{2}(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)g(X, U) - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& - \frac{1}{2}(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)\eta(X)\eta(U) - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\{g(X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& - \eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\eta(U) - g(X, Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U)\} + (Y\beta)g(\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& + g(X, \varphi Y)g(\bar{R}(grad\beta, \xi)\xi, U) + \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U) - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)g(\bar{R}(X, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\eta(X)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(X\beta)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(X\beta)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemde $\bar{R}(\xi, \xi)\xi = 0$ olduğu gözönünde bulundurularak X ve Z ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -g(\text{grad}\beta, \varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi) + \frac{3}{2}(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta) - \frac{1}{2}(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta) + (Y\beta)g(\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& + g(\bar{R}(\text{grad}\beta, \xi)\xi, \varphi Y) - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta) \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(e_i, \xi)\xi, e_i) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(Y, \varphi e_i)\xi, e_i) + g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, \text{grad}\beta) + g(\varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi, \text{grad}\beta) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(Y, \xi)\varphi e_i, e_i) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.1.37}$$

elde edilir. (4.1.37) denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapıp, (4.1.3) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (Y\beta) \left\{ -2 \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \right\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) (Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) (\varphi Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) (\varphi Y\beta) \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) (Y\beta) - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) (Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} \right) (\varphi Y\beta) - \frac{1}{2} \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} \right) (\varphi Y\beta) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \left\{ 2(Y\beta) - (Y\beta) + 2 \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \eta(Y) - 2 \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \eta(Y) \right\} = 0
\end{aligned}$$

yani,

$$\begin{aligned}
& \left(-2\beta^2 + \frac{3\beta}{2} - \frac{1}{4} \right) (Y\beta) + \left(2\beta^2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} \right) (\varphi Y\beta) \\
& = -2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \left(\beta - \frac{1}{2} \right) (Y\beta) + 2 \left(\beta - \frac{1}{2} \right) \left(\beta + \frac{1}{4} \right) (\varphi Y\beta) = 0
\end{aligned}$$

olur. Buradan ya

$$\beta - \frac{1}{2} = 0 \tag{4.1.38}$$

yani, $\beta = \frac{1}{2}$ dir. Manifold bu sabit için ∇ ya göre η -Einsteinidir. Yada

$$\left(\beta - \frac{1}{2} \right) (Y\beta) - \left(\beta + \frac{1}{4} \right) (\varphi Y\beta) = 0 \tag{4.1.39}$$

sağlanır. (4.1.39) denklemini her Y vektör alanı için

$$\left(\beta - \frac{1}{2}\right)grad\beta + \left(\beta + \frac{1}{4}\right)\varphi grad\beta = 0 \quad (4.1.40)$$

halini alır. (4.1.38) denkleminin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$\left(\beta - \frac{1}{2}\right)\varphi grad\beta - \left(\beta + \frac{1}{4}\right)grad\beta = 0 \quad (4.1.41)$$

olur. (4.1.38) ile (4.1.39) denklemleri arasında gerekli işlemler sonucu

$$[\left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\beta + \frac{1}{4}\right)^2]grad\beta = 0$$

olur ki, β nın sabit olduğuna karşılık getirir. Böylece manifold ∇ ya bağlı η -Einstein'dir.

Teorem 4.1.9.: M bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre projektif eğrilik tensörü $\bar{P}$ ve koncircular eğrilik tensörü $\bar{H}$ olmak üzere $(\bar{P}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W = 0$ şartı sağlanır ancak ve ancak M manifoldu ∇ ya bağlı η -Einstein manifolddur.

İspat: Kabul edelim ki M manifoldu için

$$(\bar{P}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W = 0 \quad (4.1.42)$$

sağlansın. Böylece $\forall Y, X, V, W \in \chi(M)$ için (4.1.40) yardımıyla

$$\bar{P}(X, \xi)\bar{H}(Y, V)W - \bar{H}(\bar{P}(X, \xi)Y, V)W - \bar{H}(Y, \bar{P}(X, \xi)V)W - \bar{H}(Y, V)\bar{P}(X, \xi)W = 0 \quad (4.1.43)$$

dır. (4.1.43) denkleminde $V = W = \xi$ alırsak

$$\bar{P}(X, \xi)\bar{H}(Y, \xi)\xi - \bar{H}(\bar{P}(X, \xi)Y, \xi)\xi - \bar{H}(Y, \bar{P}(X, \xi)\xi)\xi - \bar{H}(Y, \xi)\bar{P}(X, \xi)\xi = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde (4.1.4) kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& -(\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)\varphi X - g(X, \varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi)grad\beta - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\varphi X - \eta(Y)\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi - \bar{H}(Y, \varphi X)\xi - \bar{H}(Y, \xi)\varphi X\} \\
& - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)X - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& - \frac{1}{2}(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)\eta(X)\xi - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\{g(X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& - \eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\xi - g(X, Y)\bar{H}(\xi, \xi)\xi + \eta(Y)\eta(X)\bar{H}(\xi, \xi)\xi\} \\
& + (Y\beta)\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi + g(X, \varphi Y)\bar{H}(grad\beta, \xi)\xi + \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Y)\bar{H}(\xi, \xi)\xi \\
& + \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Y)\bar{H}(\xi, \xi)\xi - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\bar{H}(X, \xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Y)\bar{H}(\xi, \xi)\xi \\
& + \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\eta(X)\bar{H}(\xi, \xi)\xi - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\bar{H}(X, \xi) + \frac{1}{2}(X\beta)\bar{H}(Y, \xi)\xi \\
& + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\bar{H}(Y, \xi)\xi + \frac{1}{2}(X\beta)\bar{H}(Y, \xi)\xi + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\bar{H}(Y, \xi)\xi = 0,
\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin her iki tarafının bir U vektör alanı ile iç çarpımını alalım.

$$\begin{aligned}
& -(\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)g(\varphi X, U) - g(X, \varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi)g(grad\beta, U) - \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)g(\varphi X, U) - \eta(Y)g(\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& - g(\bar{H}(Y, \varphi X)\xi, U) - g(\bar{H}(Y, \xi)\varphi X, U)\} - \frac{1}{2}(X\beta)\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& + \frac{1}{2}(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)X - \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi - \frac{1}{2}(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)\eta(X)\eta(U) \\
& - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau}{4}\right)\{g(X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(U) - \eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\eta(U) \\
& - g(X, Y)g(\bar{H}(\xi, \xi)\xi, U) + \eta(Y)\eta(X)g(\bar{H}(\xi, \xi)\xi, U)\} + (Y\beta)g(\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& + g(X, \varphi Y)g(\bar{H}(grad\beta, \xi)\xi, U) + \frac{\beta^2}{2}g(\varphi X, Y)g(\bar{H}(\xi, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(X\beta)\eta(Y)g(\bar{H}(\xi, \xi)\xi, U) - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)g(\bar{H}(X, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)\eta(Y)g(\bar{H}(\xi, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)\eta(X)g(\bar{H}(\xi, \xi)\xi, U) \\
& - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta)g(\bar{H}(X, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(X\beta)g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{1}{2}(X\beta)g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, U) + \frac{1}{2}(\varphi X\beta)g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, U) = 0,
\end{aligned}$$

Son denklemde X ve Z ye göre kontraksiyon uygulanıp gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -g(grad\beta, \varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi) + \frac{3}{2}(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta) - \frac{1}{2}(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta) + (Y\beta) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) \\
& + g(\bar{H}(grad\beta, \xi)\xi, \varphi Y) + \frac{\beta^2}{2} g(\varphi\bar{H}(\xi, \xi)\xi, Y) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) - \frac{1}{2}(\varphi Y\beta) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(e_i, \xi)\xi, e_i) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(Y, \varphi e_i)\xi, e_i) + \frac{1}{2} g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, grad\beta) \\
& + \frac{1}{2} g(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi, grad\beta) - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(Y, \xi)\varphi e_i, e_i) \\
& + \frac{1}{2} g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, grad\beta) + \frac{1}{2} g(\varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi, grad\beta) \\
& = 0
\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

elde edilir. (4.1.44) de (4.1.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (Y\beta) \left\{ -2 \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \right\} + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) (Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) (\varphi Y\beta) + 2 \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \eta(Y) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \left[(Y\beta) + (Y\beta) + 2(Y\beta) - (Y\beta) + 2 \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) \eta(Y) \right] \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) (\varphi Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) (Y\beta) - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2} \right) (Y\beta) \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) (\varphi Y\beta) = 0
\end{aligned}$$

yani,

$$\left(-4\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) (Y\beta) + \left(2\beta^2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) (\varphi Y\beta) = 0 \tag{4.1.45}$$

olur. (4.1.45) denklemi her Y vektör alanı için

$$\left(-4\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) grad\beta - \left(2\beta^2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) \varphi grad\beta = 0 \tag{4.1.46}$$

halini alır. (4.1.46) denkleminin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$\left(-4\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) \varphi grad\beta + \left(2\beta^2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6} \right) grad\beta = 0 \tag{4.1.47}$$

olur. (4.1.46) ile (4.1.47) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$[(-4\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6})^2 + (2\beta^2 - \frac{\beta}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6})^2]grad\beta = 0$$

olur ki, β nın sabit olduğuna karşılık getirir. Böylece manifold ∇ ya bağlı η -Einstein'dir.

Teorem 4.1.10.: M bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ya göre Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ ve koncircular eğrilik tensörü $\bar{H}$ olmak üzere $(\bar{R}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W = 0$ şartı sağlanır ise M manifoldu ∇ ya bağlı η -Einstein manifolddur.

İspat: Kabul edelim ki verilen M manifold için

$$(\bar{R}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W = 0 \quad (4.1.48)$$

şartı sağlansın. Ayrıca $\forall Y, X, V, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} &(\bar{R}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W \\ &= \bar{R}(X, \xi)\bar{H}(Y, V)W - \bar{H}(\bar{R}(X, \xi)Y, V)W - \bar{H}(Y, \bar{R}(X, \xi)V)W \\ &\quad - \bar{H}(Y, V)\bar{R}(X, \xi)W \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.1.46) yardımıyla

$$\begin{aligned} &\bar{R}(X, \xi)\bar{H}(Y, V)W - \bar{H}(\bar{R}(X, \xi)Y, V)W - \bar{H}(Y, \bar{R}(X, \xi)V)W - \bar{H}(Y, V)\bar{R}(X, \xi)W \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.1.49)$$

dır. (4.1.49) denkleminde $Y = W = \xi$ alınırsa

$$\bar{R}(X, \xi)\bar{H}(\xi, V)\xi - \bar{H}(\bar{R}(X, \xi)\xi, V)\xi - \bar{H}(\xi, \bar{R}(X, \xi)V)\xi - \bar{H}(\xi, V)\bar{R}(X, \xi)\xi = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklem (4.1.4) denklemini gereğince

$$\begin{aligned}
& -(\bar{H}(\xi, V)\xi\beta)\varphi X - g(X, \varphi\bar{H}(\xi, V)\xi)grad\beta - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, \bar{H}(\xi, V)\xi)\xi \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi)\varphi X - \eta(V)\bar{H}(\xi, \varphi X)\xi - \bar{H}(\xi, V)\varphi X - \bar{H}(\varphi X, V)\xi\} \\
& - (X\beta)\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi)\xi + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\{\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi)X - \bar{H}(X, V)\xi + \eta(X)\bar{H}(\xi, V)\xi \\
& - \eta(V)\bar{H}(\xi, X)\xi - \bar{H}(\xi, V)X + \eta(X)\bar{H}(\xi, V)\xi\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\{\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi)\eta(X)\xi - \eta(V)\eta(X)\bar{H}(\xi, \xi)\xi\} + (X\beta)\bar{H}(\xi, V)\xi \\
& + (V\beta)\bar{H}(\xi, \varphi X)\xi + g(X, \varphi V)\bar{H}(\xi, grad\beta)\xi + \frac{\beta}{2}g(\varphi X, V)\bar{H}(\xi, \xi)\xi \\
& + (X\beta)\eta(V)\bar{H}(\xi, \xi)\xi + \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(X, V)\bar{H}(\xi, \xi)\xi - g(X, \bar{H}(\xi, V)\xi)\xi\} \\
& + (X\beta)\bar{H}(\xi, V)\xi = 0
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Son denklemin her iki tarafını bir U vektörü ile iç çarpımı alınıp X ve U ye göre kontraksiyon yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -g(grad\beta, \varphi\bar{H}(\xi, V)\xi) - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)g(\xi, \bar{H}(\xi, V)\xi) + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi) \\
& + (V\beta)\sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\xi, \varphi e_i)\xi, e_i) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\left\{\sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\varphi e_i, V)\xi, e_i) + \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\xi, V)\varphi e_i, e_i)\right. \\
& + \eta(V)\sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\xi, \varphi e_i)\xi, e_i)\} + 2(\bar{H}(\xi, V)\xi\beta) \\
& - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\left\{\sum_{i=1}^3 \eta(V)g(\bar{H}(\xi, e_i)\xi, e_i) + \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(e_i, V)\xi, e_i)\right. \\
& + \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\xi, V)e_i, e_i) - 5\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi)\} + g(\bar{H}(\xi, grad\beta)\xi, \varphi V) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki gerekli düzenlemeler yapıp, (4.1.14) kullanılırsa

$$\left(3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\bar{\tau}}{3}\right)(V\beta) + \left(-\beta^2 + \beta - \frac{1}{4}\right)(\varphi V\beta) = 0, \quad (4.1.50)$$

olur. (4.1.50) denklemini her V vektör alanı için

$$\left(3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\bar{\tau}}{3}\right) grad\beta - \left(-\beta^2 + \beta - \frac{1}{4}\right) \phi grad\beta = 0, \quad (4.1.51)$$

bulunur. (4.1.51) denkleminin her iki tarafına ϕ uygulanırsa

$$\left(3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\bar{\tau}}{3}\right) \phi grad\beta + \left(-\beta^2 + \beta - \frac{1}{4}\right) grad\beta = 0 \quad (4.1.52)$$

olur. (4.1.51) ile (4.1.52) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapılsa

$$[\left(3\beta^2 - \frac{3\beta}{2} + \frac{\bar{\tau}}{3}\right)^2 + \left(-\beta^2 + \beta - \frac{1}{4}\right)^2] grad\beta = 0$$

olur ki, β nın sabit olduğuna karşılık getirir. Böylece manifold ∇ ya bağlı η -Einstein'dir.

Teorem 4.1.11.: Bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu M olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre conccircular eğrilik tensörü $\bar{H}$ olmak üzere $(\bar{H}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W = 0$ şartı sağlanır ise M manifoldu ∇ ya bağlı η -Einstein manifoldddur.

İspat: Kabul edelim ki verilen manifold için

$$(\bar{H}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W = 0 \quad (4.1.53)$$

sağlansın. Burada $\forall Y, X, W, V \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\bar{H}(X, \xi)\bar{H})(Y, V)W &= \bar{H}(X, \xi)\bar{H}(Y, V)W - \bar{H}(\bar{H}(X, \xi)Y, V)W - \bar{H}(Y, \bar{H}(X, \xi)V)W \\ &\quad - \bar{H}(Y, V)\bar{H}(X, \xi)W \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (4.1.53) gereği

$$\begin{aligned} \bar{H}(X, \xi)\bar{H}(Y, V)W - \bar{H}(\bar{H}(X, \xi)Y, V)W - \bar{H}(Y, \bar{H}(X, \xi)V)W - \bar{H}(Y, V)\bar{H}(X, \xi)W \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.1.54)$$

olur. (4.1.54) denkleminde $V = W = \xi$ alalım.

$$\bar{H}(X, \xi)\bar{H}(Y, \xi)\xi - \bar{H}(\bar{H}(X, \xi)Y, \xi)\xi - \bar{H}(Y, \bar{H}(X, \xi)\xi)\xi - \bar{H}(Y, \xi)\bar{H}(X, \xi)\xi = 0.$$

Yukarıdaki denklem (4.1.4) yardımıyla

$$\begin{aligned}
& -(\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)\varphi X - g(X, \varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi)grad\beta - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi - (X\beta)\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\varphi X - \eta(Y)\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi - \bar{H}(Y, \varphi X)\xi - \bar{H}(Y, \xi)\varphi X\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\{\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)X - \eta(Y)\bar{H}(X, \xi)\xi + 2\eta(X)\bar{H}(Y, \xi)\xi \\
& - 2\bar{H}(Y, \xi)X\} + \left[\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right]\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\xi + (Y\beta)\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi \\
& + g(X, \varphi Y)\bar{H}(grad\beta, \xi)\xi - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)g(X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& + 2(X\beta)\bar{H}(Y, \xi)\xi = 0
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Yukarıdaki denklemin her iki tarafını bir U vektörü ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned}
& -(\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta)g(\varphi X, U) - g(X, \varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi)g(grad\beta, U) - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& - (X\beta)\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(U) + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)g(\varphi X, U) \\
& - \eta(Y)g(\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi, U) - g(\bar{H}(Y, \varphi X)\xi, U) - g(\bar{H}(Y, \xi)\varphi X, U)\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\{\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)g(X, U) - \eta(Y)g(\bar{H}(X, \xi)\xi, U) \\
& + 2\eta(X)g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, U) - 2g(\bar{H}(Y, \xi)X, U)\} \\
& + \left[\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right]\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\eta(U) + (Y\beta)g(\bar{H}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& + g(X, \varphi Y)g(\bar{H}(grad\beta, \xi)\xi, U) - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)g(X, \bar{H}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& + 2(X\beta)g(\bar{H}(Y, \xi)\xi, U) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. X ve U ye göre kontraksiyon uygulanıp gerekli düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -g(\text{grad}\beta, \varphi\bar{H}(Y, \xi)\xi) - \left[2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right]g(\xi, \bar{H}(\xi, V)\xi) + \left\{3\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right) + \beta^2\right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2} - 3\frac{\bar{\tau}}{6} + \left(-2\beta^2 - \frac{\beta}{2} + \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\right\}\eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi) + \left[\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right]\eta(\bar{H}(\xi, V)\xi) \\
& \quad + (Y\beta) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(Y, \varphi e_i)\xi, e_i) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) + 2(\bar{H}(Y, \xi)\xi\beta) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right) \sum_{i=1}^3 \eta(Y)g(\bar{H}(e_i, \xi)\xi, e_i) - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(Y, e_i)\xi, e_i) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(Y, \xi)e_i, e_i) + g(\bar{H}(\text{grad}\beta, \xi)\xi, \varphi Y) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \sum_{i=1}^3 g(\bar{H}(Y, \xi)\varphi e_i, e_i) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde (4.1.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)(Y\beta) - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)(\varphi Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)(Y\beta) + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)(\varphi Y\beta) \\
& \quad - (Y\beta)\left\{4\beta^2 - 1 - 4\frac{\bar{\tau}}{6}\right\} + 2\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)(\varphi Y\beta) + 2\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)(Y\beta) \\
& \quad - 2\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)(Y\beta) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\left\{3\left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\eta(Y) - \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\eta(Y) + (\varphi Y\beta) - (Y\beta)\right\} \\
& \quad + \left(\beta^2 - \frac{1}{4} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)(\eta(Y) - 3\eta(Y)) - (\varphi Y\beta) + (\varphi Y\beta) - (Y\beta) \\
& \quad - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2} - \frac{\bar{\tau}}{6}\right)\eta(Y) + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\eta(Y) + \left(\beta^2 + \frac{1}{4} + \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y)\left\{ \right. \\
& \quad \left. - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\left\{-2\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) + 2(Y\beta) - (Y\beta) + 2\left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\eta(Y) + (Y\beta)\right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (Y\beta)\right\} = 0
\end{aligned}$$

yani,

$$\left(\beta^2 - \beta + \frac{\bar{\tau}}{6} + \frac{1}{4}\right)(\varphi Y\beta) + \left(-3\beta^2 + \frac{3\beta}{2}\right)(Y\beta) = 0, \quad (4.1.55)$$

dır. (4.1.55) denklemi her Y vektör alanı için

$$-\left(\beta^2 - \beta + \frac{\bar{\tau}}{6} + \frac{1}{4}\right)\varphi grad\beta + \left(-3\beta^2 + \frac{3\beta}{2}\right)grad\beta = 0 \quad (4.1.56)$$

olur. (4.1.56) denkleminin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$\left(\beta^2 - \beta + \frac{\bar{\tau}}{6} + \frac{1}{4}\right)grad\beta + \left(-3\beta^2 + \frac{3\beta}{2}\right)\varphi grad\beta = 0 \quad (4.1.57)$$

elde edilir. (4.1.57) ile (4.1.56) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapılsa

$$[(-3\beta^2 + \frac{3\beta}{2})^2 + (\beta^2 - \beta + \frac{\bar{\tau}}{6} + \frac{1}{4})^2]grad\beta = 0$$

olur ki, β nın sabit olduğuna karşılık getirir. Böylece manifold ∇ ya bağlı η -Einstein manifold olur.

Teorem 4.1.12.: M bir 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere $(\bar{R}(X, \xi)\bar{R})(Y, V)W = 0$ ise M manifoldu ∇ ya bağlı η -Einstein manifolddur.

İspat: Kabul edelim ki verilen manifold için

$$(\bar{R}(X, \xi)\bar{R})(Y, V)W = 0 \quad (4.1.58)$$

sağlansın. Burada $\forall Y, X, V, W \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} &(\bar{R}(X, \xi)\bar{R})(Y, V)W \\ &= \bar{R}(X, \xi)\bar{R}(Y, V)W - \bar{R}(\bar{R}(X, \xi)Y, V)W - \bar{R}(Y, \bar{R}(X, \xi)V)W \\ &\quad - \bar{R}(Y, V)\bar{R}(X, \xi)W \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.1.58) yardımıyla

$$\bar{R}(X, \xi)\bar{R}(Y, V)W - \bar{R}(\bar{R}(X, \xi)Y, V)W - \bar{R}(Y, \bar{R}(X, \xi)V)W - \bar{R}(Y, V)\bar{R}(X, \xi)W = 0 \quad (4.1.59)$$

olur. (4.1.59) denkleminde $V = W = \xi$ alınırsa

$$\bar{R}(X, \xi)\bar{R}(Y, \xi)\xi - \bar{R}(\bar{R}(X, \xi)Y, \xi)\xi - \bar{R}(Y, \bar{R}(X, \xi)\xi)\xi - \bar{R}(Y, \xi)\bar{R}(X, \xi)\xi = 0$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde (4.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& -(\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)\varphi X - g(X, \varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi)grad\beta - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\varphi X - \eta(Y)\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi - \bar{R}(Y, \varphi X)\xi - \bar{R}(Y, \xi)\varphi X\} \\
& - (X\beta)\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\xi - g(X, Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)X - \eta(Y)\bar{R}(X, \xi)\xi + \eta(X)\bar{R}(Y, \xi)\xi - \bar{R}(Y, X)\xi \\
& - \bar{R}(Y, \xi)X + \eta(X)\bar{R}(Y, \xi)\xi\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\xi - \eta(Y)\eta(X)\bar{R}(\xi, \xi)\xi\} + (Y\beta)\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi \\
& + g(X, \varphi Y)\bar{R}(grad\beta, \xi)\xi + \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi + (X\beta)\eta(Y)\bar{R}(\xi, \xi)\xi \\
& + 2(X\beta)\bar{R}(Y, \xi)\xi = 0
\end{aligned}$$

haline dönüşür. Yukarıdaki denklemin her iki tarafını bir U vektör alanı ile iç çarpım uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& -(\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta)g(\varphi X, U) - g(X, \varphi\bar{R}(Y, \xi)\xi)g(grad\beta, U) - \frac{\beta}{2}g(\varphi X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& + \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)g(\varphi X, U) - \eta(Y)g(\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi, U) \\
& - g(\bar{R}(Y, \varphi X)\xi, U) - g(\bar{R}(Y, \xi)\varphi X, U)\} - (X\beta)\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) \\
& - \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(X, \bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(U) - g(X, Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U)\} \\
& + \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)g(X, U) - \eta(Y)g(\bar{R}(X, \xi)\xi, U) \\
& + \eta(X)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U) - g(\bar{R}(Y, X)\xi, U) - g(\bar{R}(Y, \xi)X, U) \\
& + \eta(X)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U)\} \\
& + \left(\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right)\{\eta(\bar{R}(Y, \xi)\xi)\eta(X)\eta(U) - \eta(Y)\eta(X)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U)\} \\
& + (Y\beta)g(\bar{R}(\varphi X, \xi)\xi, U) + g(X, \varphi Y)g(\bar{R}(grad\beta, \xi)\xi, U) \\
& + \frac{\beta}{2}g(\varphi X, Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U) + (X\beta)\eta(Y)g(\bar{R}(\xi, \xi)\xi, U) \\
& + 2(X\beta)g(\bar{R}(Y, \xi)\xi, U) = 0
\end{aligned}$$

bulunur. X ve U ye göre kontraksiyon uygulanıp biraz düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
& -g(grad\beta, \varphi \bar{R}(Y, \xi)\xi) - \left[2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right] g(\xi, \bar{R}(Y, \xi)\xi) + \left\{3\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right) + 2\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right) + \beta^2 + \frac{1}{4}\right. \\
& \quad \left. + \frac{\beta}{2}\right\} \eta(\bar{H}(Y, \xi)\xi) + \left[\beta^2 + \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4}\right] \eta(\bar{H}(\xi, V)\xi) + (Y\beta) \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{\beta}{2}\right) \left\{\sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(Y, \varphi e_i)\xi, e_i)\right. \\
& \quad \left. + \eta(Y) \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(\varphi e_i, \xi)\xi, e_i) + \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(Y, \xi)\varphi e_i, e_i)\right\} + 2(\bar{R}(Y, \xi)\xi\beta) \\
& \quad - \left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right) \left\{\sum_{i=1}^3 \eta(Y) g(\bar{R}(e_i, \xi)\xi, e_i) + \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(Y, e_i)\xi, e_i)\right. \\
& \quad \left. + \sum_{i=1}^3 g(\bar{R}(Y, \xi)e_i, e_i)\right\} + g(\bar{R}(grad\beta, \xi)\xi, \varphi Y) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem, (4.1.4) yardımıyla

$$\left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{4}\right)(\varphi Y\beta) + \left(3\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - 2\right)(Y\beta) = 0 \quad (4.1.60)$$

olur. (4.1.60) denklemi her Y vektör alanı için

$$-\left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{4}\right)\varphi grad\beta + \left(3\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - 2\right)grad\beta = 0 \quad (4.1.61)$$

bulunur. (4.1.61) denkleminin her iki tarafına φ uygulanırsa

$$\left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{4}\right)grad\beta + \left(3\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - 2\right)\varphi grad\beta = 0 \quad (4.1.62)$$

elde edilir. (4.1.61) ile (4.1.62) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapılrısa

$$\left[\left(3\beta^2 + \frac{5\beta}{2} - 2\right)^2 + \left(\beta^2 + \beta + \frac{1}{4}\right)^2\right]grad\beta = 0$$

bulunur, buda β nın sabit olduğuna karşılık getirir. Böylece manifold ∇ ya bağlı η -Einstein manifold olur.

Teorem 4.1.13.: M manifoldu β sabit olacak şekilde 3- boyutlu bir quasi -Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, M manifoldu verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton özelliğini sağlıyor ise manifold $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur.

İspat: M manifoldu, β sabit olacak şekilde 3- boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlasın. O halde (1.3.1) ile verilen,

$$\left(\frac{1}{2}\bar{L}_V g + \bar{S} + \lambda g\right)(X, Y) = 0,$$

denklemini,

$$(\bar{L}_V g)(X, Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (4.1.63)$$

haline dönüşür. (4.1.63) te Lie türevi özellikleri kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_X V, Y) + g(\bar{\nabla}_Y V, V) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

elde edilir. Burada $V = b\xi$ alınırsa ve (2.1.3) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} & g(\nabla_X b\xi, Y) - \frac{1}{2}\eta(X)g(\varphi b\xi, Y) + \frac{1}{2}bg(\varphi X, Y) - b\beta\eta(X)\eta(Y) + g(\nabla_Y b\xi, X) \\ & - \frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi b\xi, X) + \frac{1}{2}bg(\varphi Y, X) - b\beta\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) \\ & = 0 \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & (Xb)\eta(Y) + bg(\nabla_X \xi, Y) + (Yb)\eta(X) + bg(\nabla_Y \xi, X) - 2b\beta\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) \\ & + 2\lambda g(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.64)$$

bulunur. (4.1.64) ifadesinde (1.2.28) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} & (Xb)\eta(Y) - b\beta g(\varphi X, Y) + (Yb)\eta(X) - b\beta g(\varphi Y, X) - 2b\beta\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) \\ & + 2\lambda g(X, Y) \\ & = 0, \end{aligned}$$

dır. Bu denklemi düzenlersek

$$(Xb)\eta(Y) + (Yb)\eta(X) - 2b\beta\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0, \quad (4.1.65)$$

elde edilir. (4.1.65) de $Y=\xi$ yazıp ve (3.2.2.9) denklemini kullandığımızda

$$(Xb) + (\xi b)\eta(X) - 2b\beta\eta(X) + 2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0, \quad (4.1.66)$$

elde edilir. (4.1.66) denkleminde bu defa $X=\xi$ alalım.

$$2(\xi b) + 2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2}\right) + 2\lambda - 2b\beta = 0, \quad (4.1.67)$$

yani

$$(\xi b) = -\lambda + b\beta - 2\beta^2 + \frac{1}{2}, \quad (4.1.68)$$

sonucu ortaya çıkar. Bu denklemi (4.1.68) de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(db) = \left(-\lambda + b\beta - 2\beta^2 + \frac{1}{2}\right)\eta, \quad (4.1.69)$$

elde edilir. (4.1.69) denkleminin her iki yanına d uygulanırsa

$$(-\lambda + b\beta - 2\beta^2 + \frac{1}{2})d\eta = 0,$$

bulunur. Burada $d\eta = 0$ olamayacağından ancak

$$(-\lambda + b\beta - 2\beta^2 + \frac{1}{2}) = 0,$$

olmak zorundadır. Bu ifade (4.1.67) de kullanırsa b sabit olur. Böylece (4.1.63) denklemini gereği

$$\bar{S}(X, Y) = b\beta\eta(Y)\eta(X) - \lambda g(Y, X), \quad (4.1.70)$$

elde edilir ki bu da bize manifoldun $\bar{V}$ ye bağlı η -Einstein olduğunu gösterir.

Ayrıca elde edilen (4.1.70) denkleminde X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = b\beta - 3\lambda,$$

denklemini ortaya çıkar. Böylece yukarıdaki denklem gereği aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.1.2.: M manifoldu β sabit olacak şekilde 3- boyutlu quasi-Sasakian manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{V}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlıyor ise

i) $\bar{\tau} - b\beta < 0$ için genişleyen (expanding),

ii) $\bar{\tau} - b\beta = 0$ için değişmeyen (steady),

iii) $\bar{\tau} - b\beta > 0$ için daralan (shrinking),

dır .

Teorem 4.1.14.: (M, φ_3, f_1) koneksiyonu ile verilmiş 3-boyutlu quasi Sasakian manifoldu β sabit olmak üzere (1.3.2) ile tanımlı gradyant Ricci soliton özelliğini sağlasın. Bu takdirde manifold

i) kosimplektiktir yada (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre η -Einstein dir.

ii) (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.

İspat: 3-boyutlu quasi-Sasakian manifoldu üzerinde

$$\bar{\nabla} \nabla f = \bar{S} + \lambda g \quad (4.1.71)$$

ile tanımlı gradyant Ricci soliton eşitliğini ele alalım. g metriğinin gradyant operatörü D olmak üzere (4.1.71) denklemi

$$\bar{\nabla}_Y Df = \bar{Q}Y + \lambda Y \quad (4.1.72)$$

dır. (4.1.72) eşitliği yardımıyla $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesi

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\ &= \bar{\nabla}_X (\bar{Q}Y + \lambda Y) - \bar{\nabla}_Y (\bar{Q}X + \lambda X) - (\bar{Q}[X, Y] \\ &\quad + \lambda[X, Y]) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada (M, φ_3, f_1) koneksiyonunu kullanırsak son denklem

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \nabla_X \bar{Q}Y + \frac{1}{2} \eta(\bar{Q}Y) \varphi X - \frac{1}{2} \eta(X) \varphi \bar{Q}Y - \beta g(X, \bar{Q}Y) \xi + \nabla_X \lambda Y + \frac{1}{2} \lambda \eta(Y) \varphi X \\ &\quad - \frac{1}{2} \lambda \eta(X) \varphi Y - \beta \lambda g(X, Y) \xi - \nabla_Y \bar{Q}X - \frac{1}{2} \eta(\bar{Q}X) \varphi Y + \frac{1}{2} \eta(Y) \varphi \bar{Q}X \\ &\quad + \beta g(Y, \bar{Q}X) \xi - \nabla_Y \lambda X - \frac{1}{2} \lambda \eta(X) \varphi Y + \frac{1}{2} \lambda \eta(Y) \varphi X + \beta \lambda g(X, Y) \xi - \bar{Q} \nabla_X Y \\ &\quad + \bar{Q} \nabla_Y X - \lambda \nabla_X Y \\ &\quad + \lambda \nabla_Y X \end{aligned} \quad (4.1.73)$$

halini alır. (4.1.73) denkleminin her iki tarafının bir U vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(X, Y)Df, U) \\
&= g(\nabla_X \bar{Q}Y, U) + \frac{1}{2}\eta(\bar{Q}Y)g(\varphi X, U) - \frac{1}{2}\eta(X)g(\varphi \bar{Q}Y, U) - \beta g(X, \bar{Q}Y)\eta(U) \\
&+ g(\nabla_X \lambda Y, U) + \frac{1}{2}\lambda\eta(Y)g(\varphi X, U) - \frac{1}{2}\lambda\eta(X)g(\varphi Y, U) - g(\nabla_Y \bar{Q}X, U) \\
&- \frac{1}{2}\eta(\bar{Q}X)g(\varphi Y, U) + \frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi \bar{Q}X, U) + \beta g(Y, \bar{Q}X)\eta(U) - g(\nabla_Y \lambda X, U) \\
&- \frac{1}{2}\lambda\eta(X)g(\varphi Y, U) + \frac{1}{2}\lambda\eta(Y)g(\varphi X, U) - g(\bar{Q}\nabla_X Y, U) + g(\bar{Q}\nabla_Y X, U) \\
&- \lambda g(\nabla_X Y, U) + \lambda g(\nabla_Y X, U)
\end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde $X = Y = \xi$ kullanıldığında

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) \\
&= g(\nabla_\xi \bar{Q}Y, \xi) - \beta g(\xi, \bar{Q}Y) + g(\nabla_\xi \lambda Y, \xi) - g(\nabla_Y \bar{Q}\xi, \xi) + \beta g(Y, \bar{Q}\xi) \\
&- g(\bar{Q}\nabla_\xi Y, \xi) \\
&+ g(\bar{Q}\nabla_Y \xi, \xi)
\end{aligned} \tag{4.1.74}$$

elde edilir. β sabit olmak üzere (4.1.72) de (4.1.10) ve (1.2.32) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) \\
&= g\left(\nabla_\xi \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)Y, \xi\right) + g\left(\nabla_\xi \left(3\beta^2 - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\xi, \xi\right) - \beta(\beta - 1)g(\nabla_\xi \varphi Y, \xi) \\
&- \left(\frac{1}{2} + \beta^2\right)g(\nabla_\xi \eta(Y)\xi, \xi) + \beta^2 g(\nabla_\xi Y, \xi) \\
&- \beta \left\{g(\xi, QY) - \left(\frac{1}{2} + \beta^2\right)\eta(Y) + \beta^2 \eta(Y)\right\} - 2\beta^2 g(\nabla_Y \xi, \xi) \\
&+ \left(\frac{1}{2} + \beta^2\right)g(\nabla_Y \xi, \xi) + \beta^2 g(\nabla_Y \xi, \xi) \\
&+ \beta \left\{g(Y, Q\xi) - \left(\frac{1}{2} + \beta^2\right)\eta(Y) + \beta^2 \eta(Y)\right\} - \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)g(\nabla_\xi Y, \xi) \\
&- \left(3\beta^2 - \frac{\tau}{2}\right)\eta(\nabla_\xi Y) + \frac{1}{2}\eta(\nabla_\xi Y) + \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)g(\nabla_Y \xi, \xi) + \\
&\quad (3\beta^2 \\
&\quad - \frac{\tau}{2})g(\nabla_Y \xi, \xi)
\end{aligned} \tag{4.1.75}$$

bulunur. Koneksiyon özellikleri gereği yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) \\
&= \frac{(\xi\tau)}{2}g(Y, \xi) + \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)g(\nabla_\xi Y, \xi) - \frac{(\xi\tau)}{2}g(Y, \xi) + (3\beta^2 \\
&- \frac{\tau}{2})g(\eta(\nabla_\xi Y)\xi, \xi) - \beta(\beta - 1)g((\nabla_\xi \varphi)Y, \xi) - \left(\frac{1}{2} + \beta^2\right)g(\eta(\nabla_\xi Y)\xi, \xi) \\
&+ \beta^2g(\nabla_\xi Y, \xi) - \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)g(\nabla_\xi Y, \xi) - \left(3\beta^2 - \frac{\tau}{2}\right)\eta(\nabla_\xi Y) \\
&+ \frac{1}{2}\eta(\nabla_\xi Y)
\end{aligned}$$

halini alır. Burada (1.2.29) denklemi kullanılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = 0 \quad (4.1.76)$$

sonucu ortaya çıkar. Ayrıca (4.1.3) ve (4.1.74) denklemleri gereği $g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi)$ ifadesi

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = \frac{\beta}{2}g(\varphi Y, Df) + \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} = 0 \quad (4.1.77)$$

olarak yazılabilir. (4.1.77) de Y yerine φY alınırsa

$$\frac{\beta}{2}g(-Y, Df) + \frac{\beta}{2}\eta(Y)\eta(Df) + \left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)g(\varphi Y, Df) = 0 \quad (4.1.78)$$

bulunur. (4.1.77) ve (4.1.78) denklemleri arasında gerekli sadeleştirmeler yapıp düzenlendiğinde

$$\left\{\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4}\right\}\{g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df)\} = 0 \quad (4.1.79)$$

olur, burada iki durum mevcuttur.

Durum i) $\left\{\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4}\right\} = 0$:

$\left\{\left(2\beta^2 + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{\beta^2}{4}\right\} = 0$ olsun. Bu durum ancak $\beta = 0$ olursa gerçekleşir. Dolayısıyla

M manifold kosimplektik veya verilen koneksiyona bağlı η -Einstein manifold bulunur.

Durum ii) $g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0$:

$g(Y, Df) - \eta(Y)\eta(Df) = 0$ ifadesi her Y vektör alanı için

$$Df = (\xi f)\xi \quad (4.1.80)$$

haline dönüşür. (4.1.80) ifadesi (4.1.72) de yerine yazılırsa

$$\bar{\nabla}_Y((\xi f)\xi) = \bar{Q}Y + \lambda Y \quad (4.1.81)$$

elde edilir. (4.1.81) denkleminin her iki yanını bir X vektör alanı ile iç çarpalım. Bu durumda

$$g(\bar{\nabla}_Y((\xi f)\xi), X) = g(\bar{Q}Y, X) + \lambda g(Y, X) \quad (4.1.82)$$

dır. Yukarıdaki denklemde (1.2.28), (4.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} X((\xi f))\eta(Y) - \beta(\xi f)g(\varphi Y, X) + \frac{1}{2}(\xi f)g(\varphi Y, X) - \beta(\xi f)\eta(Y)\eta(X) \\ = g(QY, X) + \beta(\beta - 1)g(Y, \varphi X) - \left[\frac{1}{2} + \beta^2\right]\eta(Y)\eta(X) + \beta^2 g(Y, X) \\ + \lambda g(Y, X) \end{aligned} \quad (4.1.83)$$

olarak yazılabilir. Burada (1.2.32) denklemi kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} X((\xi f))\eta(Y) - \beta(\xi f)g(\varphi Y, X) + \frac{1}{2}(\xi f)g(\varphi Y, X) - \beta(\xi f)\eta(Y)\eta(X) \\ = \left(\frac{\tau}{2} - \beta^2\right)g(Y, X) + \left(3\beta^2 - \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\eta(X) + \beta(\beta - 1)g(Y, \varphi X) \\ - \left[\frac{1}{2} + \beta^2\right]\eta(Y)\eta(X) + \beta^2 g(Y, X) + \lambda g(Y, X) \end{aligned} \quad (4.1.84)$$

bulunur. (4.1.84) da $Y = \xi$ alınırsa

$$X((\xi f)) - \beta(\xi f)\eta(X) = \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda\right)\eta(X) \quad (4.1.85)$$

sonucu ortaya çıkar. (4.1.85) denkleminde X yerine Y , Y yerine X yazalım:

$$\begin{aligned} Y((\xi f))\eta(X) - \beta(\xi f)g(\varphi X, Y) + \frac{1}{2}(\xi f)g(\varphi X, Y) - \beta(\xi f)\eta(X)\eta(Y) \\ = g(QX, Y) + \beta(\beta - 1)g(X, \varphi Y) - \left[\frac{1}{2} + \beta^2\right]\eta(Y)\eta(X) + \beta^2 g(Y, X) \\ + \lambda g(Y, X) \end{aligned} \quad (4.1.86)$$

(4.1.84) ile (4.1.86) denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
& Y((\xi f))\eta(X) - \beta(\xi f)g(\varphi X, Y) + \frac{1}{2}(\xi f)g(\varphi X, Y) - \beta(\xi f)\eta(X)\eta(Y) + X((\xi f))\eta(Y) \\
& - \beta(\xi f)g(\varphi Y, X) + \frac{1}{2}(\xi f)g(\varphi Y, X) - \beta(\xi f)\eta(Y)\eta(X) \\
& = g(QY, X) + \beta(\beta - 1)g(Y, \varphi X) - \left[\frac{1}{2} + \beta^2\right]\eta(Y)\eta(X) + \beta^2 g(Y, X) \\
& + \lambda g(Y, X) + g(QX, Y) + \beta(\beta - 1)g(X, \varphi Y) - \left[\frac{1}{2} + \beta^2\right]\eta(Y)\eta(X) \\
& + \beta^2 g(Y, X) + \lambda g(Y, X)
\end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned}
& Y((\xi f))\eta(X) - 2\beta(\xi f)\eta(X)\eta(Y) + X((\xi f))\eta(Y) \\
& = 2g(QY, X) - 2\left[\frac{1}{2} + \beta^2\right]\eta(Y)\eta(X) + 2\beta^2 g(Y, X) + 2\lambda g(Y, X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem (4.1.72) denklemini gereği

$$2\left\{\left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda\right)\right\}\eta(X)\eta(Y) - \beta(\beta - 1)g(Y, \varphi X) = 2g(\bar{\nabla}_Y Df, X)$$

dır. Buradan

$$\bar{\nabla}_Y Df = 2\left\{\left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda\right)\right\}\eta(Y)\xi + \beta(\beta - 1)\varphi Y \quad (4.1.87)$$

yazılabilir. (4.1.87) yardımıyla $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesini tekrardan hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\
&= \bar{\nabla}_X \left[2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda\right)\eta(Y)\xi + \beta(\beta - 1)\varphi Y \right] - \bar{\nabla}_Y \left[2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda\right)\eta(X)\xi \right. \\
&\quad \left. + \beta(\beta - 1)\varphi X \right] - \left[2\left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda\right)\eta([X, Y])\xi + \beta(\beta - 1)\varphi[X, Y] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) [\eta(\nabla_X Y)\xi + g(Y, \nabla_X \xi)\xi + \eta(Y)\nabla_X \xi] + \beta(\beta - 1)(\nabla_X \varphi)Y \\
&\quad + \beta(\beta - 1)\varphi\nabla_X Y + \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) \eta(Y)\varphi X - 2\beta \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) \eta(Y)\eta(X)\xi \\
&\quad - \frac{1}{2}\beta(\beta - 1)\eta(X)\varphi^2 Y - \beta^2(\beta - 1)g(X, \varphi Y)\xi \\
&\quad - 2 \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) [\eta(\nabla_Y X)\xi + g(X, \nabla_Y \xi)\xi + \eta(X)\nabla_Y \xi] - \beta(\beta - 1)(\nabla_Y \varphi)X \\
&\quad - \beta(\beta - 1)\varphi\nabla_Y X - \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) \eta(X)\varphi Y + 2\beta \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) \eta(X)\eta(Y)\xi \\
&\quad + \frac{1}{2}\beta(\beta - 1)\eta(Y)\varphi^2 X + \beta^2(\beta - 1)g(Y, \varphi X)\xi \\
&\quad - \left[2 \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) \eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X)\xi + \beta(\beta - 1)\varphi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \right]
\end{aligned}$$

Son denklemde sadeleştirmeler yapıp elde edilen denklemin her iyi yanını ξ ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(X, Y)Df, \xi) &= 2 \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) g(Y, \nabla_X \xi) + \beta(\beta - 1)g((\nabla_X \varphi)Y, \xi) - \beta^2(\beta - 1)g(X, \varphi Y) \\
&\quad - 2 \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) g(X, \nabla_Y \xi) - \beta(\beta - 1)g((\nabla_Y \varphi)X, \xi) + \beta^2(\beta - 1)g(Y, \varphi X) \quad (4.1.88)
\end{aligned}$$

bulunur. (1.2.28), (1.2.29) denklemleri (4.1.86) da yerine yazılırsa

$$g(\bar{R}(X, Y)Df, \xi) = -4\beta \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) g(Y, \varphi X) - 2\beta^2(\beta - 1)g(X, \varphi Y)$$

Yukarıda (4.1.1) denklemi gözönünde bulundurulduğunda

$$[-4\beta \left(2\beta^2 - \frac{1}{2} + \lambda \right) + 2\beta^2(\beta - 1)]g(\varphi X, Y) = (\xi f)\beta g(\varphi X, Y)$$

yani

$$\beta(-6\beta^2 + 2 - 4\lambda - 2\beta - (\xi f))g(\varphi X, Y) = 0$$

sonucu ortaya çıkar. Burada $g(Y, \varphi X)$ sıfır olamayacağından

$$\beta(-6\beta^2 + 2 - 4\lambda - 2\beta - (\xi f)) = 0$$

olma durumu kalır. Burada iki durum söz konusudur:

Durum i) $\beta = 0$:

Bu durumda manifold kosimplektik manifolddur.

Durum ii) $-6\beta^2 + 2 - 4\lambda - 2\beta - (\xi f) = 0$:

Burada β nın sabit olması göz önünde bulundurulduğunda λ değerinin sabit olabilmesi için $(\xi f) = \text{sabit} = c$ olması gerekir. Bu da (4.1.75) gereği

$$Df = c\xi \quad (4.1.89)$$

demektir. Dolayısıyla (4.1.72) denklemini (4.1.89) yardımıyla

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, X) &= -\lambda g(Y, X) + g(\bar{\nabla}_Y c\xi, X) \\ &= -\lambda g(Y, X) - c\beta g(\varphi Y, X) + \frac{1}{2}cg(\varphi Y, X) - \beta c\eta(Y)\eta(X) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = -3\lambda - \beta c$$

elde edilir. Sonuçta manifold (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.

4.2. (M, φ_3, f_1) Çeyrek-Simetrik Metrik Olmayan Koneksiyonu İle Verilen n -Boyutlu

f –Kenmotsu Manifoldlar

Önerme 4.2.1.: Bir $n = 2m + 1$ -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu M olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_3, f_1) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için R ile $\bar{R}$ arasındaki bağıntı

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + f_1(f_1 + f)[g(Y, Z)\eta(X)\xi - \\ &\quad g(X, Z)\eta(Y)\xi] + f_1f[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] + \frac{f+f_1}{2}[g(X, Z)\varphi Y - g(Y, Z)\varphi X - \\ &\quad \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi] + \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] + \\ &\quad \frac{1}{2}f\{\eta(Y)\eta(Z)\varphi X - \eta(X)\eta(Z)\varphi Y\} + (f + f_1)\eta(Z)g(Y, \varphi X)\xi \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

dir .

İspat : Çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyon $\bar{\nabla}$ ye göre Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için hemen hemen değme metrik manifoldlarda (2.1.2)

denklemini bulmuştuk. M bir n -boyutlu f – Kenmotsu manifold olduğundan bu denklemde (1.2.23) ve (1.2.24) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi \\ &\quad + f_1^2[g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi] + f_1\beta g(Y, Z)\varphi X - f_1\beta g(X, Z)\varphi X \\ &\quad + \frac{1}{2}[\beta\eta(Z)g(X, Y)\xi - \beta\eta(Z)\eta(Y)X - \beta\eta(Y)g(X, Z)\xi + \beta\eta(Z)\eta(Y)X \\ &\quad + \beta\eta(X)g(Y, Z)\xi - \beta\eta(X)\eta(Z)Y + \beta\eta(X)g(Y, Z)\xi - \beta\eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad - \beta\eta(Z)g(Y, X)\xi + \beta\eta(Z)\eta(X)Y + \beta g(\varphi X, Y)\varphi Z - \beta g(\varphi Y, X)\varphi Z \\ &\quad + \beta g(\varphi Y, Z)\varphi X - \beta g(\varphi X, Z)\varphi Y + 2f_1\eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi - f_1\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi \\ &\quad + f_1\eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi - f_1g(Y, Z)\varphi X + f_1g(X, Z)\varphi Y + \frac{1}{2}\eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta(Y)\eta(Z)X],\end{aligned}$$

dır. Burada gerekli sadeleştirmeler (4.2.1) denkleminin elde edileceği açıktır.

Önerme 4.2.2.: M bir $n = 2m + 1$ –boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde Levi-Civita koneksiyonu ∇ ya göre eğrilik tensörü R ve (M, φ_3, f_1) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= \left(f^2 + \frac{1}{4} + f_1f\right)\{\eta(X)Y - \eta(Y)X\} - (Yf)X + (Xf)Y - ((Xf) + \\ &\quad (Xf_1))\eta(Y)\xi + ((Yf) + (Yf_1))\eta(X)\xi + \frac{f_1}{2}\{\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X\} + \\ &\quad (f + f_1)g(Y, \varphi X)\xi\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

dır.

İspat: İlk olarak (4.2.1) denkleminde $Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)\xi &= R(X, Y)\xi - (Xf_1)\eta(Y)\xi + (Yf_1)\eta(X)\xi + f_1f\{\eta(X)Y - \eta(Y)X\} + \frac{f + f_1}{2}\{\eta(X)\varphi Y \\ &\quad - \eta(Y)\varphi X\} + \frac{1}{4}\{\eta(X)Y - \eta(Y)X\} + \frac{1}{2}f\{\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y\} \\ &\quad + (f + f_1)g(Y, \varphi X)\xi,\end{aligned}$$

bulunur. M bir n -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olduğundan (1.2.25) denklemini yardımıyla yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi &= f^2[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - (Yf)X + (Xf)Y - (Xf)\eta(Y)\xi + (Yf)\eta(X)\xi \\
&\quad - (Xf_1)\eta(Y)\xi + (Yf_1)\eta(X)\xi + f_1f[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\
&\quad + \frac{f+f_1}{2}[\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X] + \frac{1}{4}[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \\
&\quad + \frac{1}{2}f\{\eta(Y)\varphi X - \eta(X)\varphi Y\} + (f+f_1)g(Y, \varphi X)\xi,
\end{aligned}$$

halini alır. Son olarak burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)\xi &= \left(f^2 + \frac{1}{4} + f_1f\right)[\eta(X)Y - \eta(Y)X] - (Yf)X + (Xf)Y - [(Xf) + (Xf_1)]\eta(Y)\xi \\
&\quad + [(Yf) + (Yf_1)]\eta(X)\xi + \frac{f_1}{2}[\eta(X)\varphi Y - \eta(Y)\varphi X] + (f+f_1)g(Y, \varphi X)\xi,
\end{aligned}$$

sonucu ortaya çıkar.

Önerme 4.2.3.: M bir $n = 2m + 1$ -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek-simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için;

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

sağlanır.

İspat: (4.2.1) denkleminde $Y = X$ ve $X = Y$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Y, X)Z &= R(Y, X)Z - (Yf_1)g(X, Z)\xi + (Xf_1)g(Y, Z)\xi + f_1(f_1 + f)[g(X, Z)\eta(Y)\xi - \\
&\quad g(Y, Z)\eta(X)\xi] + f_1f[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] + \frac{f+f_1}{2}[g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y - \\
&\quad \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi + \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi] + \frac{1}{4}\{\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y\} + \\
&\quad \frac{1}{2}f\{\eta(X)\eta(Z)\varphi Y - \eta(Y)\eta(Z)\varphi X\} + \{f + f_1\}\eta(Z)g(X, \varphi Y)\xi \quad (4.2.3)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.1) ile (4.2.3) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, X)Z &= R(X, Y)Z + R(Y, X)Z - (Xf_1)g(Y, Z)\xi + (Yf_1)g(X, Z)\xi + \\
&\quad f_1(f_1 + f)[g(Y, Z)\eta(X)\xi - g(X, Z)\eta(Y)\xi] + f_1f[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] + \frac{f+f_1}{2}[g(X, Z)\varphi Y - \\
&\quad g(Y, Z)\varphi X - \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi] + \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X] + \\
&\quad \frac{1}{2}f\{\eta(Y)\eta(Z)\varphi X - \eta(X)\eta(Z)\varphi Y\} + (f+f_1)\eta(Z)g(Y, \varphi X)\xi - (Yf_1)g(X, Z)\xi + \\
&\quad (Xf_1)g(Y, Z)\xi + f_1(f_1 + f)[g(X, Z)\eta(Y)\xi - g(Y, Z)\eta(X)\xi] + f_1f[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y] +
\end{aligned}$$

$$\frac{f+f_1}{2} [g(Y, Z)\varphi X - g(X, Z)\varphi Y - \eta(X)g(\varphi Y, Z)\xi + \eta(Y)g(\varphi X, Z)\xi] + \frac{1}{4} [\eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y] + \frac{1}{2} f\{\eta(X)\eta(Z)\varphi Y - \eta(Y)\eta(Z)\varphi X\} + (f + f_1)\eta(Z)g(X, \varphi Y)\xi$$

yazılabilir. Burada sadeleştirmeler yapılırsa

$$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$$

bulunur.

Ayrıca (4.2.1) denkleminde sırasıyla ilk önce $X = Y$, $Y = Z$ ve $Z = X$ olarak alındığında

$$\begin{aligned} \bar{R}(Y, Z)X &= R(Y, Z)X - (Yf_1)g(Z, X)\xi + (Zf_1)g(Y, X)\xi + f_1(f_1 + f)[g(Z, X)\eta(Y)\xi - \\ &g(Y, X)\eta(Z)\xi] + f_1f[g(Y, X)Z - g(Z, X)Y] + \frac{f+f_1}{2} [g(Y, X)\varphi Z - g(Z, X)\varphi Y - \\ &\eta(Z)g(\varphi Y, X)\xi + \eta(Y)g(\varphi Z, X)\xi] + \frac{1}{4} [\eta(Y)\eta(X)Z - \eta(Z)\eta(X)Y] + \frac{1}{2} f\{\eta(Z)\eta(X)\varphi Y - \\ &\eta(Y)\eta(X)\varphi Z\} + (f + f_1)\eta(X)g(Z, \varphi Y)\xi \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2.4) denkleminde sırasıyla $Y = Z$, $Z = X$ ve $X = Y$ yazıldığında

$$\begin{aligned} \bar{R}(Z, X)Y &= R(Z, X)Y - (Zf_1)g(X, Y)\xi + (Xf_1)g(Z, Y)\xi + f_1(f_1 + f)[g(X, Y)\eta(Z)\xi - \\ &g(Z, Y)\eta(X)\xi] + f_1f[g(Z, Y)X - g(X, Y)Z] + \frac{f+f_1}{2} [g(Z, Y)\varphi X - g(X, Y)\varphi Z - \\ &\eta(X)g(\varphi Z, Y)\xi + \eta(Z)g(\varphi X, Y)\xi] + \frac{1}{4} [\eta(Z)\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)Z] + \frac{1}{2} f\{\eta(X)\eta(Y)\varphi Z - \\ &\eta(Z)\eta(Y)\varphi X\} + (f + f_1)\eta(Y)g(X, \varphi Z)\xi \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Son olarak (4.2.1), (4.2.4) ve (4.2.5) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z + \bar{R}(Y, Z)X + \bar{R}(Z, X)Y &= 2(f + f_1)\eta(Z)g(Y, \varphi X)\xi + 2(f + f_1)\eta(X)g(Z, \varphi Y)\xi + \\ &2(f + f_1)\eta(Y)g(X, \varphi Z)\xi \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.2.1.: M bir $n = 2m + 1$ -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olsun. M manifoldunun (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere, $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (4.2.6) gereği bu koneksiyona bağlı 1. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak ve ancak $f_1 + f = 0$ dir.

Önerme 4.2.4.: M bir $n = 2m + 1$ -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olsun. M , (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü, Ricci operatörü ve skaler eğriliği sırasıyla $\bar{S}$, $\bar{Q}$ ve $\bar{\tau}$ olmak üzere, $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\bar{S}(Y, Z) = & S(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + (f_1 + f)g(\varphi Y, Z) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n - 1) \right] \eta(Y)\eta(Z) + \\ & [f_1(f_1 + f) + (1 - n)f_1f - (\xi f_1)]g(Y, Z),\end{aligned}\quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}Y = QY + (Yf_1)\xi + (f_1 + f)\varphi Y - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n - 1) \right] \eta(Y)\xi + [f_1(f_1 + f) + \\ (1 - n)f_1f - (\xi f_1)]Y,\end{aligned}\quad (4.2.8)$$

$$\bar{\tau} = \tau + (n - 1) \left\{ f_1(f_1 + f) - (\xi f_1) - f_1f - \frac{1}{4} \right\}, \quad (4.2.9)$$

dir.

İspat : (4.1.1) denkleminin her iki yanının W vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}g(\bar{R}(X, Y)Z, W) = & g(R(X, Y)Z, W) - (Xf_1)g(Y, Z)\eta(W) + (Yf_1)g(X, Z)\eta(W) + \\ & f_1(f_1 + f)[g(Y, Z)\eta(X)\eta(W) - g(X, Z)\eta(Y)\eta(W)] + \\ & f_1f[g(X, Z)g(Y, W) - g(Y, Z)g(X, W)] + \frac{f+f_1}{2}[g(X, Z)g(\varphi Y, W) - g(Y, Z)g(\varphi X, W) - \\ & \eta(Y)g(\varphi X, Z)\eta(W) + \eta(X)g(\varphi Y, Z)\eta(W)] + \frac{1}{4}[\eta(X)\eta(Z)g(Y, W) - \eta(Y)\eta(Z)g(X, W)] + \\ & \frac{1}{2}f\{\eta(Y)\eta(Z)g(\varphi X, W) - \eta(X)\eta(Z)g(\varphi Y, W)\} + (f + f_1)\eta(Z)g(Y, \varphi X)\eta(W)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da X ve W vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\begin{aligned}\bar{S}(Y, Z) = & S(Y, Z) - (\xi f_1)g(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + f_1(f_1 + f)[g(Y, Z) - \eta(Y)\eta(Z)] + \\ & f_1f[g(Y, Z) - n g(Y, Z)] + \frac{f+f_1}{2}[g(\varphi Y, Z) + g(\varphi Y, Z)] + \frac{1}{4}[\eta(Y)\eta(Z) - \eta(Y)\eta(Z)n]\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}\bar{S}(Y, Z) = & S(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + (f_1 + f)g(\varphi Y, Z) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n - 1) \right] \eta(Y)\eta(Z) \\ & + [f_1(f_1 + f) + (1 - n)f_1f - (\xi f_1)]g(Y, Z)\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. (4.2.7) denklemini $\forall Z \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}\bar{Q}Y = QY + (Yf_1)\xi + (f_1 + f)\varphi Y - \left\{ f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n - 1) \right\} \eta(Y)\xi + \{f_1(f_1 + f) + (1 \\ - n)f_1f - (\xi f_1)\}Y\end{aligned}$$

haline dönüşür.

(4.2.7) denkleminde Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon yapıldığında

$$\bar{\tau} = \tau + (\xi f_1) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n-1) \right] + [f_1(f_1 + f) + (1-n)f_1f - (\xi f_1)]n$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\bar{\tau} = \tau + (n-1)\{f_1(f_1 + f) - (\xi f_1) - f_1f - \frac{1}{4}\}$$

dır.

Önerme 4.2.5.: M bir $n = 2m + 1$ -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olsun. M , (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü $\bar{S}$ olmak üzere, $\forall Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, \xi) &= (2-n)(Yf) + (Yf_1) \\ &+ \left\{ f^2(1-n) - (\xi f) - \frac{1}{4}(n-1) + (1-n)f_1f - (\xi f_1) \right\} \eta(Y), \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

İspat: (4.2.7) denklemi $Z = \xi$ için

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, \xi) &= S(Y, \xi) + (Yf_1) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n-1) \right] \eta(Y) \\ &+ [f_1(f_1 + f) + (1-n)f_1f - (\xi f_1)]\eta(Y) \end{aligned}$$

halini alır. Son denklemde (1.2.33) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{S}(Y, \xi) &= (2-n)(Yf) + \{f^2(1-n) - (\xi f)\}\eta(Y) + (Yf_1) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n-1) \right] \eta(Y) \\ &+ [f_1(f_1 + f) + (1-n)f_1f - (\xi f_1)]\eta(Y) \\ &= (2-n)(Yf) + (Yf_1) \\ &+ \left\{ f^2(1-n) - (\xi f) - \frac{1}{4}(n-1) + (1-n)f_1f - (\xi f_1) \right\} \eta(Y) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.2.1.: M bir $n = 2m + 1$ -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu olsun. M , (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre Ricci tensörü simetriktir ancak ve ancak $-f = f_1 = sbt$ dir.

İspat: Kabul edelim ki bir n -boyutlu f -Kenmotsu manifoldu üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ ye göre göre Ricci tensörü simetrik olsun yani $\forall Z, Y \in \chi(M)$ için

$$\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y),$$

sağlansın. Öncelikle $\bar{S}(Z, Y)$ ifadesini bulabilmek için (4.2.7) denkleminde Y yerine Z, Z yerine Y yazalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \bar{S}(Z, Y) = S(Z, Y) + (Zf_1)\eta(Y) + (f_1 + f)g(\varphi Z, Y) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n-1) \right] \eta(Z)\eta(Y) + \\ [f_1(f_1 + f) + (1-n)f_1f - (\xi f_1)]g(Z, Y) \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

ifadesi elde edilir. (4.2.7) ve (4.2.11) denklemleri $\bar{S}(Y, Z) = \bar{S}(Z, Y)$ gereği

$$\begin{aligned} S(Y, Z) + (Yf_1)\eta(Z) + (f_1 + f)g(\varphi Y, Z) - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n-1) \right] \eta(Y)\eta(Z) \\ + [f_1(f_1 + f) + (1-n)f_1f - (\xi f_1)]g(Y, Z) \\ = S(Z, Y) + (Zf_1)\eta(Y) + (f_1 + f)g(\varphi Z, Y) \\ - \left[f_1(f_1 + f) + \frac{1}{4}(n-1) \right] \eta(Z)\eta(Y) \\ + [f_1(f_1 + f) + (1-n)f_1f - (\xi f_1)]g(Z, Y) \end{aligned}$$

halini alır. Burada gerekli sadeleştirmeler yapıldığında

$$(Yf_1)\eta(Z) + (f_1 + f)g(\varphi Y, Z) = (Zf_1)\eta(Y) + (f_1 + f)g(\varphi Z, Y)$$

yada

$$(Yf_1)\eta(Z) - (Zf_1)\eta(Y) + 2(f_1 + f)g(\varphi Y, Z) = 0$$

bulunur. Buradan da $-f = f_1 = sbt$ olduğu açıktır. Tersisi de kolayca gösterilebilir.

Bundan sonraki teoremlerde karışıklık yaşamamak ve işlem kolaylığı için $f = f_1$ alacağız.

Teorem 4.2.2.: M, f_1 sabit olacak şekilde 3-boyutlu f_1 -Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerindeki (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold Ricci soliton olma şartını sağlasın. Bu takdirde $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna bağlı η -Einsteinir.

İspat: M, f_1 sabit olacak şekilde 3- boyutlu $f_1=f$ Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerindeki (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, b

fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton olma şartını sağlasın. O halde (1.3.1) ile verilen,

$$(\frac{1}{2}\bar{L}_V g + \bar{S} + \lambda g)(X, Y) = 0, \quad (4.2.12)$$

denklemini,

$$(\bar{L}_V g)(X, Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0$$

haline dönüşür. (4.2.12) de Lie türevi özellikleri kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_X V, Y) + g(\bar{\nabla}_Y V, X) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0,$$

elde edilir. Burada $V = b\xi$ alınırsa ve (2.1.3) denklemi yardımıyla

$$\begin{aligned} g(\nabla_X b\xi, Y) - \frac{1}{2}\eta(X)g(\varphi b\xi, Y) + \frac{1}{2}bg(\varphi X, Y) - f_1 b\eta(X)\eta(Y) + g(\nabla_Y b\xi, X) \\ - \frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi b\xi, X) + \frac{1}{2}bg(\varphi Y, X) - f_1 b\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) \\ = 0, \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} (Xb)\eta(Y) + bg(\nabla_X \xi, Y) + (Yb)\eta(X) + bg(\nabla_Y \xi, X) - 2f_1 b\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) \\ + 2\lambda g(X, Y) = 0 \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

dır. (4.2.13) ifadesinde (1.2.24) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} (Xb)\eta(Y) + 2f_1 bg(X, Y) + (Yb)\eta(X) - 4f_1 b\eta(X)\eta(Y) + 2\bar{S}(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) \\ = 0 \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

şekline dönüşür. (4.2.14) denkleminde her Y gördüğümüz yere ξ yazılıp ve burada (3.2.2.9) denklemini kullandığımızda

$$(\xi b)\eta(X) + (Xb) - 2f_1 b\eta(X) + 2\left(-4f_1^2 - \frac{1}{2}\right)\eta(X) + 2\lambda\eta(X) = 0 \quad (4.2.15)$$

bulunur. (4.2.15) denkleminde bu defa $X = \xi$ alınırsa

$$2(\xi b) - 2f_1 b + 2\left(-4f_1^2 - \frac{1}{2}\right) + 2\lambda = 0 \quad (4.2.16)$$

yani

$$(\xi b) = -\lambda + f_1 b + 4f_1^2 + \frac{1}{2} \quad (4.2.17)$$

sonucu ortaya çıkar. Bu denklem (4.2.15) de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(db) = (-\lambda + f_1 b + 4f_1^2 + \frac{1}{2})\eta \quad (4.2.18)$$

elde edilir. (4.2.18) denkleminin her iki yanına d uygulanırsa

$$(-\lambda + f_1 b + 4f_1^2 + \frac{1}{2})d\eta = 0$$

bulunur. Burada $d\eta \neq 0$ olacağından

$$(-\lambda + f_1 b + 4f_1^2 + \frac{1}{2}) = 0$$

olur. Bu ifade (4.2.18) de kullanırsa b sabit olur. Böylece (4.2.14) denklemi gereği

$$\bar{S}(X, Y) = 2f_1 b \eta(Y) \eta(X) - (\lambda + f_1 b) g(Y, X) \quad (4.2.19)$$

elde edilir ki bu da bize manifoldun $\bar{V}$ ye bağlı η -Einstein olduğunu gösterir.

Ayrıca elde edilen (4.2.19) denkleminde X ve Y vektör alanlarına göre kontraksiyon yapılırsa

$$\bar{\tau} = -bf_1 - 3\lambda$$

denklemi ortaya çıkar. Böylece yukarıdaki denklem gereği aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 4.2.2.: M, f_1 sabit olacak şekilde 3- boyutlu f_1 – Kenmotsu manifoldu olsun. M üzerinde (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu $\bar{V}$ olmak üzere, b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold verilen koneksiyona bağlı Ricci soliton özelliği şartını sağlıyor ise

i) $\bar{\tau} + bf_1 < 0$ için genişleyen (expanding),

ii) $\bar{\tau} + bf_1 = 0$ için değişmeyen (steady),

iii) $\bar{\tau} + bf_1 > 0$ için daralan (shrinking),

olur .

Teorem 4.2.3.: (M, φ_3, f_1) koneksiyonu ile verilmiş n -boyutlu f_1 -Kenmotsu manifoldu f_1 sabit olmak üzere (1.3.2) ile tanımlı gradyant Ricci soliton özelliğini sağlasın. Bu takdirde manifold kosimplektiktir.

İspat: 3-boyutlu f_1 -Kenmotsu manifoldu üzerinde

$$\bar{\nabla} \nabla f = \bar{S} + \lambda g, \quad (4.2.20)$$

ile tanımlı gradyant Ricci solitonu, g metriğinin gradyant operatörü D olmak üzere

$$\bar{\nabla}_Y Df = \bar{Q}Y + \lambda Y, \quad (4.2.21)$$

olarak yazılabilir. (4.2.21) eşitliğinden yararlanılarak $\bar{R}(X, Y)Df$ ifadesini bulalım:

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Df - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Df - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Df \\ &= \bar{\nabla}_X (\bar{Q}Y + \lambda Y) - \bar{\nabla}_Y (\bar{Q}X + \lambda X) \\ &\quad - (\bar{Q}[X, Y] + \lambda[X, Y]), \end{aligned}$$

Burada (M, φ_3, f_1) koneksiyonu gereği yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Df &= \nabla_X \bar{Q}Y + \frac{1}{2} \eta(\bar{Q}Y) \varphi X - \frac{1}{2} \eta(X) \varphi \bar{Q}Y - f_1 g(X, \bar{Q}Y) \xi + \nabla_X \lambda Y + \frac{1}{2} \lambda \eta(Y) \varphi X - \\ &\quad \frac{1}{2} \lambda \eta(X) \varphi Y - f_1 \lambda g(X, Y) \xi - \nabla_Y \bar{Q}X - \frac{1}{2} \eta(\bar{Q}X) \varphi Y + \frac{1}{2} \eta(Y) \varphi \bar{Q}X + \\ &\quad f_1 g(Y, \bar{Q}X) \xi - \nabla_Y \lambda X - \frac{1}{2} \lambda \eta(X) \varphi Y + \frac{1}{2} \lambda \eta(Y) \varphi X + f_1 \lambda g(X, Y) \xi - \bar{Q} \nabla_X Y + \\ &\quad \bar{Q} \nabla_Y X - \lambda \nabla_X Y + \lambda \nabla_Y X \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

halini alır. (4.2.22) denkleminin her iki tarafını bir U vektör alanı ile iç çarpımı alındığında

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(X, Y)Df, U) \\
&= g(\nabla_X \bar{Q}Y, U) + \frac{1}{2}\eta(\bar{Q}Y)g(\varphi X, U) - \frac{1}{2}\eta(X)g(\varphi \bar{Q}Y, U) - f_1 g(X, \bar{Q}Y)\eta(U) \\
&+ g(\nabla_X \lambda Y, U) + \frac{1}{2}\lambda\eta(Y)g(\varphi X, U) - \frac{1}{2}\lambda\eta(X)g(\varphi Y, U) - f_1 \lambda g(X, Y)\eta(U) \\
&- g(\nabla_Y \bar{Q}X, U) - \frac{1}{2}\eta(\bar{Q}X)g(\varphi Y, U) + \frac{1}{2}\eta(Y)g(\varphi \bar{Q}X, U) + f_1 g(Y, \bar{Q}X)\eta(U) \\
&- g(\nabla_Y \lambda X, U) - \frac{1}{2}\lambda\eta(X)g(\varphi Y, U) + \frac{1}{2}\lambda\eta(Y)g(\varphi X, U) + f_1 \lambda g(X, Y)\eta(U) \\
&- g(\bar{Q}\nabla_X Y, U) + g(\bar{Q}\nabla_Y X, U) - \lambda g(\nabla_X Y, U) + \lambda g(\nabla_Y X, U),
\end{aligned}$$

bulunur. Son denklemde $X = U = \xi$ kullanıldığında

$$\begin{aligned}
g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) &= g(\nabla_\xi \bar{Q}Y, \xi) - f_1 g(\xi, \bar{Q}Y) - g(\nabla_Y \bar{Q}\xi, \xi) + f_1 g(Y, \bar{Q}\xi) - g(\bar{Q}\nabla_\xi Y, \xi) + \\
&g(\bar{Q}\nabla_Y \xi, \xi), \tag{4.2.23}
\end{aligned}$$

elde edilir. f_1 sabit olmak üzere (4.2.23) de (4.2.7) denklemi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) \\
&= g\left(\nabla_\xi \left(\frac{\tau}{2} + f_1^2\right)Y, \xi\right) - g\left(\nabla_\xi \left(3f_1^2 + \frac{\tau}{2}\right)\eta(Y)\xi, \xi\right) + 2f_1 g(\nabla_\xi \varphi Y, \xi) \\
&- \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)g(\nabla_\xi \eta(Y)\xi, \xi) - f_1 \left\{g(\xi, QY) - \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)\eta(Y)\right\} \\
&- \left(\frac{1}{2} + 4f_1^2\right)g(\nabla_Y \xi, \xi) + f_1 \left\{g(Y, Q\xi) - \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)\eta(Y)\right\} \\
&- \left(\frac{\tau}{2} + f_1^2\right)g(\nabla_\xi Y, \xi) + \left(3f_1^2 + \frac{\tau}{2}\right)\eta(\nabla_\xi Y) + \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)\eta(\nabla_\xi Y) \\
&+ \left(\frac{\tau}{2} + f_1^2\right)g(\nabla_Y \xi, \xi) - \left(3f_1^2 + \frac{\tau}{2}\right)g(\nabla_Y \xi, \xi) + 2f_1 g(\varphi \nabla_Y \xi, \xi) \\
&- \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)g(\nabla_Y \xi, \xi)
\end{aligned}$$

bulunur. Koneksiyon özellikleri kullanılarak yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned}
& g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) \\
&= \left(\frac{\tau}{2} + f_1^2\right)g(\nabla_\xi Y, \xi) + \frac{(\xi\tau)}{2}\eta(Y) - \left(3f_1^2 + \frac{\tau}{2}\right)\eta(\nabla_\xi Y) - \frac{(\xi\tau)}{2}\eta(Y) \\
&- \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)\eta(\nabla_\xi Y) - \left(\frac{\tau}{2} + f_1^2\right)g(\nabla_\xi Y, \xi) + \left(3f_1^2 + \frac{\tau}{2}\right)\eta(\nabla_\xi Y) \\
&+ \left(\frac{1}{2} + 2f_1^2\right)\eta(\nabla_\xi Y)
\end{aligned}$$

halini alır. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = 0 \quad (4.2.24)$$

sonucu ortaya çıkar. Ayrıca (4.2.1) ve (4.2.24) denklemleri gereği $g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi)$ ifadesi

$$g(\bar{R}(\xi, Y)Df, \xi) = f_1 g(\varphi Y, Df) = 0 \quad (4.2.25)$$

olarak yazılabilir. (4.2.25) de $g(\varphi Y, Df)$ sıfır olamayacağından

$$f_1 = 0$$

olur. Bu da manifoldu kosimplektik yapar. Böylece ispat tamamlanır.

Çizelge 4.1. (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3- boyutlu quasi -Sasakian manifoldlar için bazı eğrilik şartlar

(M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3- boyutlu quasi -Sasakian manifoldlar için ($f_1 = \beta$ için)	
∇ ve (M, φ_3, f_1) koneksiyonu için η -paralel olma şartı denk ise $[(\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) = (\nabla_X S)(\varphi Y, \varphi Z)]$	i) $\beta = 0$, yani ya manifold kosimplektik yada manifold $\bar{\nabla}$ koneksiyonuna göre η -Einstein olmasıdır. ii) $\beta =$ sabit dolayısıyla manifold ∇ ya göre η -Einstein'dır.
(M, φ_3, f_1) koneksiyonu için η -paralel ise $[(\bar{\nabla}_X \bar{S})(\varphi Y, \varphi Z) = 0]$	i) $\beta = 0$, yani ya manifold kosimplektik yada manifold (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre η -Einstein olmasıdır. ii) $\beta =$ sabit dolayısıyla manifold ∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
β sabit olmak şartıyla M üzerindeki (M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonuna göre dairesel paralel Ricci tensöre sahiptir $\Leftrightarrow$	i) $\beta = 0$, yani ya manifold kosimplektik yada manifold (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre η -Einstein olmasıdır, ii) $\beta = \pm \frac{1}{2}$ e karşılık gelir.
$(\bar{R}(X, \xi) \bar{S})(Y, Z) = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{H}(X, \xi) \bar{S})(Y, Z) = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{P}(X, \xi) \bar{S})(Y, Z) = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{P}(X, \xi) \bar{R})(Y, V) W = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{P}(X, \xi) \bar{H})(Y, V) W = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{R}(X, \xi) \bar{H})(Y, V) W = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{H}(X, \xi) \bar{H})(Y, V) W = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.
$(\bar{R}(X, \xi) \bar{R})(Y, V) W = 0 \Rightarrow$	∇ ya göre η -Einstein manifolddur.

Çizelge 4.2. Verilen koneksiyon göre 3- boyutlu quasi -Sasakian manifoldlar ve 3- boyutlu f - Sasakian manifoldlar için Soliton Kavramı

(M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3- boyutlu quasi - Sasakian manifoldlar için	(M, φ_3, f_1) çeyrek simetrik metrik olmayan koneksiyonu ile verilmiş 3- boyutlu f -Sasakian manifoldlar için
$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$ sağlanır.	$\bar{R}(X, Y)Z = -\bar{R}(Y, X)Z$ sağlanır.
1. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak ve ancak $f_1 = 0$ ve manifold kosimplektiktir.	1. Bianchi özdeşliği sağlanır ancak ve ancak $f_1 + f = 0$ dır.
verilen koneksiyona göre Ricci tensörü simetriktir ancak ve ancak $f_1 = sbt$ ve $\beta = 1$ dir.	verilen koneksiyona göre Ricci tensörü simetriktir ancak ve ancak $-f = f_1 = sbt$ dir.
b fonksiyon olmak üzere $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold Ricci soliton olma şartını sağlar ise, (M, φ_3, β) koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur.	b fonksiyonu için $V = b\xi$ olmak şartıyla, manifold Ricci soliton olma şartını sağlar ise, (M, φ_3, f) koneksiyonuna bağlı η -Einstein manifolddur.
$f_1 = \beta$ sabit olmak üzere gradyant Ricci soliton özelliğini sağlıyor ise manifold i) kosimplektiktir yada (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre η -Einstein dir. ii) (M, φ_3, f_1) koneksiyonuna göre sabit eğriliklidir.	f_1 sabit olmak üzere gradyant Ricci soliton özelliğini sağlıyor ise manifold kosimplektiktir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Agashe, N.S. ve Chafle, M. R., (1992), A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannian manifold, *Indian J. Pure apl. Math.*, 23(6), s. 399-409.
- Blair, D.E., (1967), The theory of quasi-Sasakian structures, *J. Differential Geometry*, 1, s. 331-345.
- Carmo, M.P.D., Flaherty, F., (1993), Riemann geometry (Çev.), Department of Mathematics Oregon State University, 300s.
- Chaki, M.C., (1987), On pseudo symmetric manifolds, *An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat.*, 33(1), s. 53-58.
- Chaki M.C. ve Ghosh M.I., (1997), On quasi conformally flat and quasi conformally conservative Riemannian Manifolds, *Analele Ştiinţifice Ale Universitatii Iaşi Tomul XLIII, s.l.a., Matematica*.
- Chaki, M.C. ve Maity, R. K., (2000), On quasi Einstein manifolds, *Publ. Math. Debrecen*, 57(3-4), s. 297-306.
- Chen, B.Y., (1973), Geometry of submanifolds, Pure and Applied Mathematics Marcel Dekker, 22, Inc. New York.
- Calin C. ve Crasmareanu M., (2010), From the Einshart problem to Ricci soliton in f-Kenmotsu manifolds, *Bulletin of Malaysian Mathematical Science Society*, 33, s. 361-368.
- De, U.C. ve Pathak, G., (2004), On 3-dimensional Kenmotsu manifolds, *Indian J. Pure Applied Math.*, 35, s. 159-165.
- De, U.C., Yıldız A. ve Sarkar A., (2008), Isometric immersion of three-dimensional quasi-Sasakian manifolds, *Mathematica Balkanica*, 22(3-4), s. 297-306.
- De, U.C., Yıldız A., Turan M. ve Acet B.E., (2012), 3-dimensional quasi-Sasakian manifolds with semi-symmetric non-metric connection, *Haceteppe Journal of mathematics and statics*, 41(1), s. 127-137.
- De U.C. ve Tripathi M.M., (2003), Ricci tensor in 3-dimensional trans-Sasakian manifolds, *Kyungpook Math. J.*, 43 (2), s. 247 – 255.
- De, U.C., Turan M., Yıldız A. ve Acet B.E., (2012), Ricci solitons and gradient Ricci solitons on 3-dimensional normal almost contact metric manifolds, *Publicationes Mathematicae*, 80(1).
- Friedmann, A. ve Schouten J.A., (1924), Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragung, *Math. Zeitschr.*, 21, s. 211-223.
- Golab, S., (1975), On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections, *Tensor N.S.*, 29, s. 249-254.
- Jun, J.B., De, U.C. ve Pathak, G., (2005), On Kenmotsu manifolds, *J. Korean Math. Soc.*, 42, s. 435-445.
- Hamilton R.S., (1986), The Ricci flow on surfaces, *Mathematics and general relativity* (Santa Cruz, CA), s. 237-262.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hamilton R.S., (1982), Three-manifolds with positive Ricci curvature, Journal of Differential Geometry, 17(2), s. 255–306.
- Kanemaki, S., (1997), Quasi-Sasakian manifolds, Tohoku Math. Journal, 29, s. 227-233.
- Kenmotsu K., (1972), A class of almost contact Riemannian manifolds, Tohoku Math. J., 24, s. 93-103.
- Kobayashi, S., ve Nomizu K., (1996), Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Kon, M., (1975), Invariant submanifolds in Sasakian manifolds, Mathematische Annalen 219, s. 277-290.
- Kuo K., (1970), On almost contact 3-structure, Tohoku Math. J., 22, s. 325-332.
- Olszak, Z., (1986), Normal almost contact metric manifolds of dimension three, Ann. Polon. Math., 47, s. 41-50.
- Olszak, Z., (1996), On three dimensional conformally flat quasi-Sasakian manifold, Period Math. Hungar., 33 (2), s. 105–113.
- Olszak Z., ve Rosca R., (1991), Normal locally conformal almost cosymplectic manifolds, Publ. Math. Debrecen, 39(3-4), s. 315-323.
- Oubina J.A., (1985), New Classes of almost Contact metric structures, Publ.Math.Debrecen, 32, s. 187-193.
- O'Neill B., (1983), Semi Riemannian geometry, A. Press, London.
- O'Neill B., (1996), Elementary differential geometry, Academic Press, New York-London.
- Özgür, C. ve De, U.C., (2006), On the quasi-conformal curvature tensor of a Kenmotsu manifold, Mathematica Pannonica, 17(2), s. 221-228.
- Sasaki S., (1960), On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure, Tohoku Math. J., 2, s. 459-476.
- Sengupta J. ve Biswas B., (2003), Quarter-symmetric non-metric connection on a Sasakian manifold, Bull. Cal. Math. Soc., 95(2), s. 169–176.
- Tanno, S., (1969), The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 21, s. 21–38.
- Tanno, S., (1971), Quasi-Sasakian structure of rank $2p + 1$, J. Differential Geom., 5, s. 317-324.
- Turan M., De, U.C. ve Yıldız A., (2012), Ricci soliton and gradient Ricci soliton in three dimensional trans-Sasakian manifolds, Faculty of Science and Mathematics, University of Nish, Serbia, 26(2), s. 363-370.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Udrişte C., (1969), Structures presque coquaternioniennes, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de Roumanie 12, s. 487-507.
- Yano K. ve Imai T., (1982), Quarter-symmetric metric connections and their curvature tensors, Tensor N. S., 38, s. 13–18.
- Yano K. ve Sawaki S., (1968), Riemannian manifolds admitting a conformal transformation group, J. Differential Geometry 2, s. 161–184.
- Yano K. ve Kon M., (1984), Structures on manifolds, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Corp., Singapore.
- Yıldız A. ve Çetinkaya A., (2012a) A class of trans-Sasakian manifolds, Balıkesir Geometri Sempozyumu.
- Yıldız A. ve Çetinkaya A., (2012b), 3 dimensional normal almost contact metric manifolds with Ricci soliton, Ankara Matematik Günleri.
- Yıldız A. ve Çetinkaya A., (2013), Kenmotsu manifolds with the semi-symmetric non-metric connection, Kosova Sempozyumu.
- Zhen G., (1992), On conformal symmetric K – contact manifolds, Chinese Quarter J. of Math., 7, s. 5-10.
- Zhen G., Cabrerizo J.L., Fernandez L.M. ve Fernandez M., (1997), On ξ -conformally flat contact metric manifolds, Indian J. Pure Appl. Math., 28(6), 725–734.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyadı: Azime ÇETİNKAYA

Doğum Yeri : Kütahya

Doğum Tarihi: 16.06.1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Kütahya Atatürk Lisesi, 2003.

Lisans : Dumlupınar Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, 2007.

Yüksek Lisans : Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı, 2010.

Çalıştığı Kurum/ Kurumlar ve Yıllar

Piri Reis Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Birimi, 2012-devam ediyor.

Yayınları (SCI ve diğer)

1. De U.C., Yıldız, A. ve Çetinkaya, A., (2015), Certain results on a type of contact metric manifold, Afrika Matematika, 26(7), s. 1229-1236.
2. Yıldız, A., De U.C. ve Çetinkaya, A., (2013), N(k)-Quasi Einstein Manifolds Satisfying Certain Curvature Conditions, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 36(4), s. 1139-1149.
3. Yıldız, A., De U.C. ve Çetinkaya, A., (2013), On Some Classes of N(k)-Quasi Einstein Manifolds, Proceedings of the National Academy of Sciences India, 83(3), s. 239-245.
4. Yıldız, A., De U.C. ve Çetinkaya, A., (2015), On some classes of 3-dimensional generalized (k, μ) –contact metric manifolds, Turkish Journal of Mathematics, 39(3), s. 356-368.