



**GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARININ
BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Erhan ÇESİMAN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ
2016
Her hakkı saklıdır**

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Erhan ÇESİMAN

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı**

**ERZURUM
2016
Her hakkı saklıdır**



**T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TEZ ONAY FORMU

**GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK
ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ**

Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ danışmanlığında, Erhan ÇESİMAN tarafından hazırlanan bu çalışma 28/01/2016 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU

İmza :

Üye : Doç. Dr. Erhan DENİZ

İmza :

Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 18/01/2016 tarih ve 8/56 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ertan YILDIRIM
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Erhan ÇESİMAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ

Bu tezde, Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik, yıldızlılık, konvekslik ve konvekse yakın gibi geometrik özellikleri ele alındı. Ayrıca, Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri ile ilgili teoremler, Jack Lemması ve diferansiyel subordinasyon yöntemi kullanılarak yapılan ispatları ile birlikte verildi. Son olarak Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının bazı fonksiyonlara göre konvekse yakınlığı ile alakalı sonuçlar verildi.

2016, 67 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyonlar, Ünivalent fonksiyonlar, Yıldızıl ve Konveks fonksiyonlar, konvekse Yakın fonksiyonlar, Genelleştirilmiş Bessel fonksiyonları

ABSTRACT

Master's Thesis

The INVESTIGATION of SOME GEOMETRIC PROPERTIES of GENERALIZED BESSEL FUNCTIONS

Erhan ÇESİMAN

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Analysis and Theory of Functions

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fatma SAĞSÖZ

In this thesis, we investigate geometric properties of Generalized Bessel functions such as univalence, starlikeness, convexity and close-to-convexity. Also, we give some theorems about geometric properties of Generalized Bessel functions with their proofs involving Jack's Lemma and Differential Subordination Technique. Finally, we state some results on close-to-convexity of Generalized Bessel functions with respect to certain functions.

2016, 67 pages

Keywords: Analytic functions, Univalent functions, Starlike and Convex functions, Close-to-convex functions, Generalized Bessel functions.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, çalışmalarım ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Fatma SAĞSÖZ' e en içten dileklerimle sonsuz teşekkürlerimi arz ederim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım sayın matematik bölümü öğretim üyelerine ve değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU ve Doç. Dr. Erhan DENİZ' e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca desteklerini hiçbir zaman üzerimden esirgemeyen aileme, arkadaşlarıma ve güvenini her zaman hissettiğim değerli eşime teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK BİLİM İNSANI DESTEKLEME DAİRE BAŞKANLIĞINA teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Erhan ÇESİMAN

Ocak, 2016

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	5
2.1. Genel Kavramlar	5
2.2. Gama ve Beta Fonksiyonları	11
2.3. Yıldızıl Fonksiyonlar.....	12
2.4. Konveks Fonksiyonlar.....	15
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	18
3.1. Bessel Fonksiyonları	18
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	30
4.1. Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonlarının Ünivalentliği.....	30
4.2. Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonunun Yıldızlılığı ve Konveksliği	34
4.3. Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonunun Konvekse Yakınlığı	56
5. SONUÇLAR.....	61
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ	67

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
D	Birim Disk
A	Normalize Edilmiş Analitik Fonksiyonların Sınıfı
S	Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonların Sınıfı
P	D Birim Diskinde Caratheodory Fonksiyonların Sınıfı
$(a)_n$	Pochhammer Sembolü
$\Gamma(z)$	Kompleks Değerli Gama Fonksiyonu
B	Beta Fonksiyonu
S^*	Normalize Edilmiş Yıldızlı Fonksiyonların Sınıfı
$S^*(\alpha)$	α . Mertebeden Yıldızlı Fonksiyonların Sınıfı
C	Konveks Fonksiyonların Sınıfı
$C(\alpha)$	α . Mertebeden Konveks Fonksiyonların Sınıfı
K	Konvekse Yakın Fonksiyonların Sınıfı
J_p	p . Mertebeden Birinci Çeşit Bessel Fonksiyonu
I_p	p .Mertebeden Birinci Çeşit Modifiye Bessel Fonksiyonu
j_p	p .Mertebeden Birinci Çeşit Küresel Bessel Fonksiyonu
i_p	p .Mertebeden Birinci Çeşit Modifiye Küresel Bessel Fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu	14
Şekil 3.1. $J_0, J_{1/2}, J_{-1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri	25
Şekil 4.1. $\cos\sqrt{z}$ nin grafiği	42
Şekil 4.2. $\frac{3}{z}\left(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - \cos\sqrt{z}\right)$ fonksiyonunun grafiği	43
Şekil 4.3. $\frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ fonksiyonunun grafiği	43
Şekil 4.4. $\sqrt{z}\sin\sqrt{z}$ fonksiyonunun grafiği	44
Şekil 4.5. $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sinh z$ fonksiyonunun grafiği	45

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi 19.yüzyılda çalışılmaya başlanmış ve birçok dal ile ilişkisi kurulmuştur. Özel fonksiyonlar geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir rol oynar. Özel fonksiyonların en bilinen uygulaması L. de Branges tarafından yapılan ünlü Bieberbach tahmininin ispatıdır. Bieberbach tahmini;

$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots$ şeklinde verilen f fonksiyonu $|z| < 1$ de analitik ve ünivalent olmak üzere her $n \in \{2,3,4, \dots\}$ için $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin sağlandığını iddia eder.

Bieberbach tahmininin ispatında, L. de Branges'in genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları kullanması hipergeometrik fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine büyük ilgi yaratmıştır ve pek çok bilim adamı tarafından çalışılmıştır. Hipergeometrik fonksiyonlar ve bu alanda hala devam etmekte olan bazı araştırmalar Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerinin araştırılmasını gündeme getirmiştir. Özel fonksiyonlar matematiksel analiz, fonksiyonel analiz, fizik ve diğer uygulamalardaki öneminden dolayı çeşitli isim ve notasyonlara sahip olan bazı özel matematiksel fonksiyonlardır.

Temel fonksiyonlardan özellikle trigonometrik fonksiyonlar özel fonksiyon olarak dikkate alınmıştır. Özel fonksiyonlar teorisi Klein, Jacobi, Gauss ve birçok bilim adamının katkılarıyla 19.yüzyılda geliştirilmiştir. Özel fonksiyonlar dikkate değer özelliklerinden dolayı yüzyıllardır kullanılmaktadır. Örneğin astronomideki çeşitli uygulamalar için trigonometrik fonksiyonlarla uzun yıllar çalışılmıştır.

1732'de Bessel fonksiyonları kavramını ilk tanıtan D. Bernoulli olmasına rağmen astronom F. W. Bessel den (1784-1846) sonra Bessel fonksiyonları olarak adlandırılmıştır.

Bernoulli, bir ucundan askıya alınan zincirin salınım probleminin bir çözümü olarak sıfırıncı mertebeden Bessel fonksiyonunu; 1764 yılında ise Euler, gerilmiş bir zarın titreşiminin analizinde tam sayı mertebeli Bessel fonksiyonlarını kullanmıştır. Astronom olan Bessel 1817 ye kadar bu fonksiyonlarla işi arasındaki bağlantıyı kuramamıştır.

Bessel fonksiyonu, Kepler' in karşılıklı kütle çekimi altında hareketli üç cismin birliktaki hareketlerini belirlemek için ortaya koyduğu problemle ilgili Bessel'in yaptığı bir çalışmanın sonucudur.

1824'de Bessel, bir gök cisminin hareketinde başka bir cismin etkisi ile meydana gelen düzensizliği inceleyen çalışmasına Bessel fonksiyonlarını dahil etmiştir. Öyle ki bu çalışmada Bessel fonksiyonları bir gezegenin dolaylı düzensizliğini; yani güneşin hareketinin cisimde meydana getirdiği düzensizliği veren bir seri açılımının katsayıları olarak gözükür.

1878'de Rayleigh tarafından Bessel fonksiyonlarının Laplace fonksiyonlarının özel durumu olduğunu gösteren çalışmasıyla bu konu daha da geliştirilmiştir.

$J_{z,n}$ notasyonunu ilk olarak P. A. Hansen sonra O. X. Schömilch tarafından kullanılmıştır ve daha sonra bu notasyon G. N. Watson tarafından $J_n(2z)$ şeklinde düzenlenmiştir.

Bunu takiben, 1895'de Mathews' in Gray ile iş birliği yaparak yazdığı “A treatise on Bessel functions and their applications to physics” adlı eseri Bessel fonksiyonları ile ilgili yapılan önemli çalışmalar arasındadır. Bu kitap Bessel fonksiyonları üzerine İngilizce yapılan ilk büyük çalışmadır ve bu çalışma kırınım (ışınların kırılarak yayılması) , hidrodinamik ve elektiriğe Bessel fonksiyonlarının uygulamaları konularını kapsar.

Ancak yirminci yüzyılda özel fonksiyonlar teorisi reel analiz, fonksiyonel analiz, topoloji, cebir ve diferansiyel denklemler gibi alanların gölgesinde kalmıştır. Buna

rağmen aynı dönemde Watson'un özel fonksiyonlar teorisinde özellikle Bessel fonksiyonlarının asimtotik genişlemelerinde büyük öneme sahip olan "A treatise on the theory of Bessel functions" isimli kitabı çıkmıştır.

Günümüzde bu kitap bir klasiktir. Bessel ve hipergeometrik fonksiyonlar özel fonksiyonların çarpıcı özelliklerinden dolayı olasılık, istatistik, matematiksel fizik ve mühendislik bilimlerinde sıkça kullanılmaktadır.

Diğer taraftan Bessel fonksiyonlarının diğer uygulama alanlarından kısaca bahsedecek olursak Bessel fonksiyon teorisi nükleer fizik, atom fiziği, radyo fiziği, ses bilimi (akustik) ve hidrodinamik biliminin problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır.

Genelleştirilmiş p . mertebeden 1. çeşit Bessel fonksiyonu $w = w$ şeklinde gösterilip $z^2 \cdot w''(z) + b \cdot z \cdot w'(z) + [c \cdot z^2 - p^2 + (1 - b) \cdot p]w(z) = 0$ denkleminin özel bir çözümüdür ve $w(z) = w(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \cdot c^n}{n! \Gamma(p+n+\frac{b+1}{2})} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$ şeklindedir.

2010 yılında Baricz ve Ponnusamy genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının normalize edilmiş formlarının açık birim diskte yıldızlı ve konveks olabilmesi için yeterli şartları vermiştir. Yine Baricz ve Frasin 2010 yılında Bessel fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin açık birim diskte ünivalent olması için bazı yeterli şartlar vermişlerdir.

2011 yılında M. Arif ve M. Raza p .mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin yıldızlılık ve konveksliğini incelemişlerdir. Yine 2011 yılında E. Deniz *et. all.* genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin bazı ailelerinin ünivalentlikleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. 2012 yılında Mondal ve Sıwaminathan tarafından normalize edilmiş genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının konvekslik, yıldızlılık ve konvekse yakınlığı ile ilgili çeşitli şartlar elde edilmiştir. 2013 yılında E. Deniz genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarını içeren integral operatörlerinin konveksliği için yeterli şartlar vermiştir.

Yine güncel olarak 2015 yılında A. Baricz genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarını içeren ikinci dereceden differensiyel denklemler üzerine çalışmalar yapmıştır.

Sunulan bu tezde ilk bölümde, “Bessel Fonksiyonlarının Geometrik zellikleri” ile ilgili geçmişten günümüze kadar yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

nc bölümde çalışmamızın temelini oluşturan Bessel diferansiyel denklemleri, Bessel fonksiyonları tanıtılarak araştırma bulguları kısmındaki teoremlerin ispatında kullanacağımız önemli teorem ve lemmalara yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Bessel fonksiyonlarının Ünivalentliği, yıldıızılığı, konveksliği ve konvekse yakınlığı gibi geometrik özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise araştırma bulguları kısmında yer alan teoremlerin yalnızca ifadeleri verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

$$\overline{B(z_0, \varepsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial B(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember,

$$B^\circ(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = B(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (Açık Küme): Bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer A kümesinin her noktası A nın bir iç noktası ise A kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.3 (Kapalı Küme) : $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık ise A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.4 (Bağlantılı Küme): $A, U, V, \mathbb{C}$ 'nin boştan farklı alt kümeleri olsun.

- i. $A = U \cup V$,
- ii. $\overline{U} \cap V = \emptyset = \overline{V} \cap U$

olacak şekilde $U, V \subset \mathbb{C}$ gibi boş olmayan iki küme bulunamıyorsa A kümesine bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.6 (Eğri) : $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarında sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları adı verilir.

Tanım 2.1.7 (Kapalı Eğri) : $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.8 (Basit Kapalı Eğri) : $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eğrisi $[a, b]$ veya (a, b) aralığında bire-bir ise γ eğrisine basit eğri denir. Eğer γ , basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya basit kapalı eğri ya da Jordan eğrisi adı verilir.

Tanım 2.1.9 (Diferansiyellenebilme) : $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve bu $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.10 (Analitik Fonksiyon) : $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Tanım 2.1.11: $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse, bu noktaya fonksiyonun singüler (tekil) noktası denir.

Tanım 2.1.12: z_0 , $f(z)$ fonksiyonunun bir singüler noktası olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $B^\circ(z_0, \varepsilon)$ delinmiş komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir ayırık singüler noktası denir.

Tanım 2.1.13: z_0 kompleks düzlemde bir nokta ve a_n, b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

serisi verilsin. Bu seriye z_0 merkezli Laurent serisi denir. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$ serisine Laurent serisinin esas kısmı, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ serisine ise Laurent serisinin analitik kısmı denir.

Tanım 2.1.14 (Kaldırılabilir Singüler Nokta): z_0 , $f(z)$ fonksiyonunun ayırık singüler noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğunda Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmındaki bütün katsayılar sıfır oluyorsa, z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir kaldırılabilir singüler noktası denir.

Tanım 2.1.15 (Ünivalent Fonksiyon) : f fonksiyonu herhangi bir $B \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. Her $z_1, z_2 \in B$ için,

$$z_1 \neq z_2 \text{ iken } f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (veya yalınkat) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f , z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

f fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir. D açık birim diskinde tanımlı ve analitik olan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n, \quad (z \in D)$$

fonksiyonuna normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını A ile gösterecek olursak;

$$A = \left\{ z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n \right\}$$

şeklinde yazılır.

D açık birim diskinde ünivalent olan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir ve bu sınıf

$$S = \left\{ f \in A : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n, f(z) \text{ fonksiyonu } D \text{ birim diskinde univalent} \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.1.16: Analitik bir f fonksiyonun bir z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeter koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Tanım 2.1.17 (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar) : D birim diskinde $\text{Re} f(z) > 0$ olmak üzere D 'de analitik olan

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

biçimindeki fonksiyonlara pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı P ile gösterilir (Goodman 1983a).

Lemma 2.1.18 (Schwarz Lemması) : f fonksiyonu D birim diskinde analitik ve

- i. $z \in D$ için $|f(z)| < 1$,
- ii. $f(0) = 0$

olsun. Bu durumda, her $z \in D$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Ayrıca, herhangi bir $z \neq 0$ noktası için $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise her $w \in D$ için $f(w) = cw$ olacak şekilde $|c| = 1$ olan bir c sabiti vardır (Conway 1973).

Teorem 2.1.19 (Maksimum Modül Teoremi) : $B \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu B bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli ise

$$\max\{|f(z)| : z \in \bar{B}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial B\}$$

olur (Conway 1973).

Teorem 2.1.20 (Minimum Modül Teoremi) : $B \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge, f fonksiyonu B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. f fonksiyonu B bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli ise

$$\min\{|f(z)| : z \in \bar{B}\} = \min\{|f(z)| : z \in \partial B\}$$

olur (Conway 1973).

Teorem 2.1.21 (Riemann Dönüşüm Teoremi) : $B \subsetneq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in B$ olsun. Bu durumda,

- i. $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$,
- ii. f bire-bir,
- iii. $f(B) = \{z: |z| < 1\}$

şartlarını sağlayan yalnız bir tane analitik $f: B \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu vardır (Conway 1973).

Tanım 2.1.22 (Subordinasyon): f ve g , D birim diskinde analitik olan iki fonksiyon olsun. $w(0) = 0$ ve $|w(z)| = 1$ olmak üzere $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde D birim diskinde analitik olan bir w fonksiyonu varsa f fonksiyonu g ye subordinatedir denir ve $f < g$ yazılır.

Eğer g ünivalent ise $f < g$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ olmasıdır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 2.1.23 (Hadamard Çarpımı) : D birim diskinde analitik olan

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve bu çarpım

$$(f * g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 2.1.24 (Konform Dönüşüm) : Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu bir, $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise f fonksiyonu B bölgesinde konformdur denir (Dönmez 1999).

Teorem 2.1.25: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonu konformdur.

Tanım 2.1.26 (Pochhammer Sembolü) : α reel ya da kompleks bir sayı, n sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi

$$(\alpha)_n = \alpha.(\alpha + 1).(\alpha + 2) \dots (\alpha + n - 1)$$

olarak tanımlanır. Bu ifade “Pochhammer Sembolü” olarak bilinir.

Burada $n = 0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ dir.

2.2. Gama ve Beta Fonksiyonları

Tanım 2.2.1 (Gama Fonksiyonu) : z pozitif reel kısma sahip kompleks bir değişken olmak üzere $\Gamma(z)$ ile gösterilen ve

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}.t^{z-1}.dt, \quad \text{Re}z > 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona gama fonksiyonu denir.

Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$$

bağıntısını sağlar. Bu bağıntı ve $\Gamma(1) = 1$ olduğu göz önünde bulundurulursa tümevarım yönteminden

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ifadesi elde edilir. Gama fonksiyonuna bazen genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu da denir.

Tanım 2.2.2 (Beta Fonksiyonu) : x ve y pozitif reel kısma sahip kompleks değişkenler olmak üzere $B(x, y)$ ile gösterilen ve

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} \cdot (1 - t)^{y-1} \cdot dt ; \quad R(x) > 0, \quad R(y) > 0$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona beta fonksiyonu denir.

Beta fonksiyonu gama fonksiyonuna bağlı olarak

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \cdot \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}$$

biçiminde de gösterilebilir (Şahin 2011).

2.3. Yıldızlı Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1 (Yıldızlı Bölge) : B kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in B$ olsun. Başlangıç noktası w_0 olan her ışın ile B bölgesinin arakesiti bir doğru parçası veya bir ışın ise B bölgesine w_0 noktasına göre yıldızlı bölge denir (Goodman 1983a).

Başka bir deyişle, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere Her $w \in B$ için $(1 - t)w_0 + tw \in B$ ise B bölgesine w_0 noktasına göre yıldızlıdır denir.

Tanım 2.3.2 (Yıldızlı Fonksiyon) : f fonksiyonu D birim diskinde analitik olsun. D 'yi w_0 noktasına göre yıldızlı olan bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna w_0 'a göre yıldızlı fonksiyon denir. $w_0 = 0$ ise f fonksiyonuna yıldızlı fonksiyon denir (Goodman 1983a).

$f \in A$ olması durumunda yıldızlı fonksiyonların sınıfı S^* sembolü ile gösterilir.

Teorem 2.3.3: $f \in A$ olsun. Bu durumda $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter şart

$$Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \quad (2.1)$$

olmasıdır.

Yukarıdaki teorem göz önünde bulundurulursa yıldızlı fonksiyonlar sınıfı

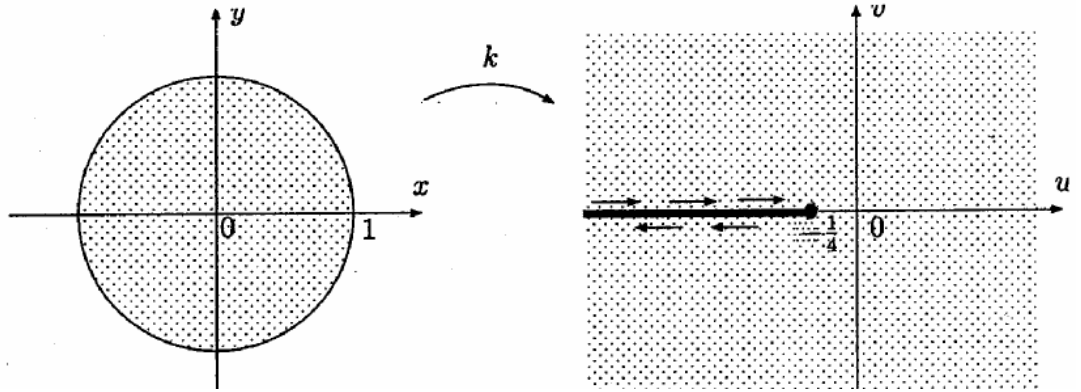
$$S^* = \left\{ f \in A: \forall z \in D \text{ için } Re \left(\frac{z \cdot f'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu sınıfa ait en önemli fonksiyonlardan biri $z \in D$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur.



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu

Tanım 2.3.4 (α . Mertebeden Yıldızıl Fonksiyon) : f , D birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

olsun. $\forall z \in D$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \quad (2.2)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna α . mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α . mertebeden yıldızıl fonksiyonlar sınıfı denir ve $S^*(\alpha)$ ile gösterilir (Miller and Mocanu 2000).

α . mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$S^*(\alpha) = \left\{ f \in A : Re \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4. Konveks Fonksiyonlar

Tanım 2.4.1 (Konveks Bölge) : Her $w_1, w_2 \in B \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2 'yi birleştiren doğru parçası B bölgesinde kalıyorsa, yani $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2 \in B$ ise B bölgesine konveks bölge denir (Goodman 1983a).

Tanım 2.4.2 (Konveks Fonksiyon) : f fonksiyonu D birim diskinde analitik olsun. D 'yi konveks bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Goodman 1983a).

$f \in A$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı C sembolü ile gösterilir.

Teorem 2.4.3: $f \in A$ olsun. Bu durumda $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart

$$Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0$$

olmasıdır.

Bu teoreme göre konveks fonksiyonlar sınıfı

$$C = \left\{ f \in A : Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.4.4 (α . Mertebeden Konveks Fonksiyon) : f , D birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot z^n$$

olsun. $\forall z \in D$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere

$$Re \left(1 + \frac{z \cdot f''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna α . mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşturduğu sınıfa da α . mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfı denir ve $C(\alpha)$ ile gösterilir (Miller and Mocanu 2000).

α . mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere,

$$C(\alpha) = \left\{ f \in A : Re \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere α . mertebeden konveks olan her fonksiyona α . mertebeden yıldızlı diyebiliriz.

Tanım 2.4.5 (Konvekse Yakın Fonksiyon) : $f \in A$ olsun. Eğer $z \in D$ için

$$Re \left(\frac{f'(z)}{g'(z)} \right) > 0$$

olacak şekilde bir $g \in \mathbb{C}$ fonksiyonu varsa f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı “K” ile gösterilir.

Yukarıdaki tanım ve teoremleri göz önüne alacak olursak;

- i. Her konveks, yıldızıl, konvekse yakın fonksiyon ve ünivalent fonksiyon analitiktir.
- ii. Her konveks ve yıldızıl fonksiyon konvekse yakın fonksiyondur.
- iii. Her konveks fonksiyon yıldızıl fonksiyondur.

Tüm bu fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkiyi kısaca

$$C \subset S^* \subset K \subset S \subset A$$

şeklinde ifade edebiliriz.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Bessel Fonksiyonları

Bessel diferansiyel denklemi çeşitli problemlerde kullanılmakla birlikte çeşitli türleri vardır.

Tanım 3.1.1 (Bessel Diferansiyel Denklemi) :

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - p^2)w(z) = 0 \quad p \in \mathbb{R} \text{ veya } p \in \mathbb{C}$$

denklemine Bessel diferansiyel denklemi, çözümlerine de Bessel fonksiyonları denir.

p .mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu $J_p(z)$ ile gösterilir ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için,

$$J_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır (Watson 1944).

Tanım 3.1.2 (Modifiye Bessel Diferansiyel Denklemi):

$$z^2 w''(z) + zw'(z) - (z^2 + p^2)w(z) = 0$$

denklemine Modifiye Bessel diferansiyel denklemi denir.

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için;

$$I_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.2)$$

biçimindeki p . mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonudur (Watson 1944).

Tanım 3.1.3 (Küresel Bessel Diferansiyel Denklemi) :

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) + [z^2 - p(p+1)]w(z) = 0$$

denklemine Küresel Bessel diferansiyel denklemi denir.

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için;

$$j_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$$

biçimindeki p . mertebeden birinci çeşit Küresel Bessel fonksiyonudur (Abramowitz and Stegun 1965).

Tanım 3.1.4 (Modifiye Küresel Bessel Diferansiyel Denklemi):

$$z^2 w''(z) + 2zw'(z) - [z^2 + p(p+1)]w(z) = 0$$

denklemine Modifiye Küresel Bessel diferansiyel denklemi denir.

Bu denklemin özel çözümü $\forall z \in \mathbb{C}$ için;

$$i_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} I_{p+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n! \Gamma(p+n+3/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}$$

şeklindeki p . mertebeden birinci tür Modifiye Küresel Bessel fonksiyonudur (Abramowitz and Stegun 1965).

$b, c \in \mathbb{C}$ ve $d = d_1 p^2 + d_2 p + d_3$ ($d_1, d_2, d_3, p \in \mathbb{C}$) olmak üzere

$$z^2 w''(z) + b z w'(z) + (c z^2 + d) w(z) = 0 \quad (3.3)$$

denklemini göz önüne alalım.

Frobenius metodunu kullanarak (3.3) denkleminin $\forall n \geq 0$ ve $a_n \in \mathbb{C}$; için

$$w(z) = z^p \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right)$$

şeklindeki çözümlerini araştırabiliriz.

$\forall n \geq 2$ için yukarıdaki sonsuz kuvvet serisinin a_n ve a_{n-2} katsayıları arasındaki ilişkinin

$$a_n n(n + 2p + b - 1) + a_n [(d_1 + 1)p^2 + (b + d_2 - 1)p + d_3] = -c a_{n-2} \quad (3.4)$$

şeklinde olduğu görülür.

Burada $d_1 = -1, d_2 = 1 - b, d_3 = 0$ değerleri (3.4) denkleminde yerine koyulursa $\forall n \geq 2$ için (3.4) denklemi;

$$a_n n(n + 2p + b - 1) = -c a_{n-2} \quad (3.5)$$

şeklini alır. O halde (3.3) denklemi

$$z^2 w''(z) + b z w'(z) + [c z^2 - p^2 + (1 - b)p] w(z) = 0 \quad (3.6)$$

denklemine dönüşür. Bu denklem Bessel, Modifiye, Küresel ve Modifiye Küresel Bessel diferansiyel denklemlerinin genelleştirilmiş halidir.

(3.5) denklemdeki ilişkiyi kullanarak (3.6) denkleminin özel bir çözümünü ifade edebiliriz. $\forall z \in \mathbb{C}$ ve $a_0(p) \neq 0$ için;

$$\begin{aligned} w(z) &= a_0(p) \sum_{n \geq 0} \frac{\left(-\frac{c}{4}\right)^n z^{2n+p}}{\prod_{m=1}^n \left(m + p + \frac{b-1}{2}\right)} \\ &= a_0(p) \sum_{n \geq 0} \frac{\left(-\frac{c}{4}\right)^n \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(n + p + \frac{b+1}{2}\right)} z^{2n+p} \end{aligned}$$

olur. Eğer $a_0(p) = \left[2^p \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right)\right]^{-1}$ eşitliğini alırsak (3.6) denkleminin özel çözümü olarak $\forall z \in \mathbb{C}$ için;

$$w_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c)^n}{n! \Gamma\left(p + n + \frac{b+1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \quad (3.7)$$

serisi elde edilir.

Burada $w_p(z)$ serisinin yakınsaklık yarıçapı ∞ olduğundan $w_p(z)$ serisi $\forall b, c, p, z \in \mathbb{C}$ için yakınsaktır.

Sonuç 3.1.5 : (3.6) lineer diferansiyel denkleminin herhangi bir çözümünün p . mertebeden genelleştirilmiş bir Bessel fonksiyonu olduğunu söyleyebiliriz. Burada

(3.7) deki gibi tanımlanan w_p , p . mertebeden birinci çeşit genelleştirilmiş Bessel fonksiyonudur (Baricz 1994).

Bu sonucun doğruluğunu açık bir şekilde görebiliriz.

Burada b ve c ye çeşitli değerler vererek p . mertebeden birinci çeşit tüm Bessel fonksiyonlarını elde edebiliriz.

w_p serisinde $c = 1$ ve $b = 1$ yerine yazılırsa w_p , p . mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu olan J_p ye indirgenir.

w_p serisinde $c = -1$ ve $b = 1$ yerine yazılırsa w_p , p . mertebeden birinci çeşit Modifiye Bessel fonksiyonu olan I_p ye dönüşür.

Benzer olarak w_p serisinde $c = 1$ ve $b = 2$ yerine yazılırsa w_p , $\frac{2j_p}{\sqrt{\pi}}$ ye indirgenir.

Son olarak w_p serisinde $c = -1$ ve $b = 2$ yerine yazılırsa w_p , $\frac{2i_p}{\sqrt{\pi}}$ ye dönüşür.

Şimdi genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Bessel fonksiyonunun tanımı ile ilgili yorum yapacak olursak;

$$a_0(p) = \left[2^p \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1}$$

alalım. O halde $\forall z \in \mathbb{C}$ için $a_0(p)$ yi w_p de yerine yazarsak

$$w_p(z) = \left[2^p \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1} z^p \sum_{n \geq 0} \frac{\left(-\frac{c}{4}\right)^n \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(p + n + \frac{b+1}{2}\right)} z^{2n}$$

elde edilir. $\forall z \in \mathbb{C}$ ve $\forall n \geq 0$ olmak üzere

$$b_p = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(p + n + \frac{b+1}{2}\right)} \quad (3.8)$$

için

$$u_p(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$$

fonksiyonunu alalım. Buna göre $\forall z \in \mathbb{C}$ için,

$$w_p(z) = \left[2^p \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1} z^p u_p(z^2)$$

elde edilir. Pochhammer sembolünün özelliklerinden biri olan

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}$$

ifadesini göz önüne alacak olursak;

$$u_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-c/4)^n z^n}{(\kappa)_n n!} \quad (3.9)$$

dönüşümü elde edilir. Burada b, p, c birer kompleks sayı olup

$$\kappa = p + \frac{b+1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$$

şeklindedir. $u_p(z)$ ye genelleştirilmiş ve normalize edilmiş p . mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonu denir (Baricz 2008a).

Ayrıca, u_p fonksiyonu $\mathbb{C}$ de analitiktir ve

$$4z^2u''(z) + 4\kappa zu'(z) + czu(z) = 0 \quad (3.10)$$

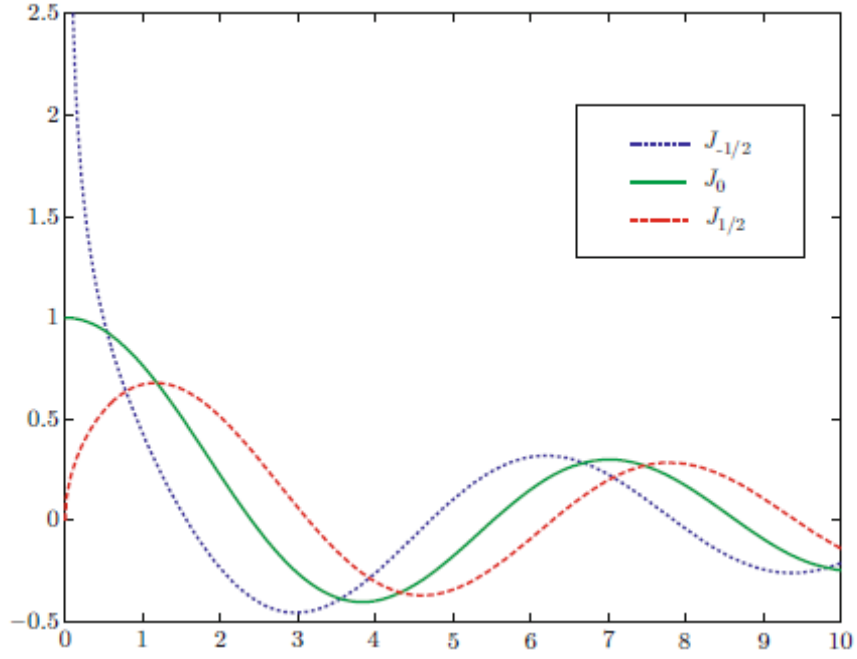
diferansiyel denklemini sağlar.

Bazı Bessel fonksiyolarına örnek olarak

$$j_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \quad j_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad j_{\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$$

$$I_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cosh z, \quad I_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sinh z, \quad I_{\frac{3}{2}}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(\frac{\sinh z}{z} - \cosh z \right)$$

fonksiyonlarını verebiliriz. Aşağıda bu fonksiyonların bir kaçının grafiği verilmiştir.



Şekil 3.1. $J_0, J_{1/2}, J_{-1/2}$ fonksiyonlarının grafikleri

Şimdide araştırma bulguları bölümünde vereceğimiz teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı önemli lemmaları verelim.

Lemma 3.1.6: Eğer $b, p, c \in \mathbb{C}$ ve $\kappa \neq 0, -1, -2, \dots$ ise u_p fonksiyonu $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$4\kappa u'_p(z) = -cu_{p+1}(z)$$

bağıntısını sağlar (Baricz 2008a).

Lemma 3.1.7: $E \subseteq \mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir küme ve $\psi: \mathbb{C}^3 \times D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ olmak üzere $z \in D$ ve $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ için $\psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; z) \notin E$ diferansiyel subordinasyon şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. $\forall z \in D$ için $\psi(h(z), zh'(z), z^2 h''(z); z) \in E$ ve $h(0) = 1$ olmak üzere h, D birim diskinde analitik ise $\forall z \in D$ için $Reh(z) > 0$ olur. Özel olarak, $\psi: \mathbb{C}^2 \times D \rightarrow \mathbb{C}$ ise diferansiyel subordinasyon şartı, $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ olmak üzere $z \in D$ ve $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ için $\psi(\rho i, \sigma; z) \notin E$ şartına indirgenebilir (Miller and Mocanu 2000).

Lemma 3.1.8 : $f \in A$ ve bazı sabit $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \beta \geq 0$ ve $\forall z \in D$ için

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right|^{1-\beta} \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|^\beta < (1-\alpha)^{1-2\beta} \left(1 - \frac{3\alpha}{2} + \alpha^2\right)^\beta$$

ise f fonksiyonu $S^*(\alpha)$ sınıfına aittir (Owa and Srivastava 1987).

Lemma 3.1.9 (Alexander Teoremi) : $f \in A$ ve $z \in D$ olmak üzere $f \in C$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in S$ olmasıdır (Duren 1983).

Lemma 3.1.10 : $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon olsun ve $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere $g: D \rightarrow \mathbb{C}, g(z) = z[f'(z)]^{\frac{1}{1-\alpha}}$ şeklinde tanımlansın. f nin α . mertebeden konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart g nin α . mertebeden yıldızlı olmasıdır. Ayrıca f nin α . mertebeden konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart zf' nin α . mertebeden yıldızlı olmasıdır (Jack 1971).

Lemma 3.1.11 : $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ yakın konveks fonksiyon ise f, D birim diskinde ünivalenttir (Kaplan 1952)(Ozaki 1935).

Lemma 3.1.12: Eğer $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} B_{2n-1} z^{2n-1}$ D de analitik ve $1 \geq 3B_3 \geq \dots \geq (2n-1)B_{2n-1} \geq \dots \geq 0$ ya da $1 \leq 3B_3 \leq \dots \leq (2n-1)B_{2n-1} \leq \dots \leq 2$ ise f, D birim diskinde ünivalenttir (Ozaki 1935).

Lemma 3.1.13: Eğer $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} A_n \cdot z^n$ D de analitik ve $1 \geq 2A_2 \geq \dots \geq nA_n \geq \dots \geq 0$ ya da $1 \leq 2A_2 \leq \dots \leq nA_n \leq \dots \leq 2$ ise $f, -\text{Log}(1-z)$ ye göre konvekse yakındır (Ozaki 1935).

Lemma 3.1.14 : w_p , p mertebeden birinci tür genelleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup $k \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere $\forall b, p, c \in \mathbb{C}$ ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki bağıntılar doğrudur (Arpad 2008a).

- a. $z \cdot w_{p-1}(z) + czw_{p+1}(z) = (2p + b - 1)w_p(z)$
- b. $z \cdot w'_p(z) + (p + b - 1)w_p(z) = zw_{p-1}(z)$
- c. $z \cdot w'_p(z) + czw_{p+1}(z) = pw_p(z)$
- d. $[z^{-p}w_p(z)]' = -cz^{-p}w_{p+1}(z)$ olmak üzere $z = 0$ iken yandaki bağıntının her iki tarafı limit değerleriyle yer değiştirir.

İspat: a. $w_{p-1}(z) + w_{p+1}(z)$ ifadesini hesaplayacak olursak;

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n c^n}{n! \Gamma(k + n - 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n c^n}{n! \Gamma(k + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p-1} + \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^n c^n}{n! \Gamma(k + n - 1)} + \frac{(-1)^{n-1} c^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(k + n)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+1} \\ &= \frac{2(k-1)}{z} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^p}{\Gamma(k)} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n c^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p}}{n! \Gamma(k + n)} + \frac{1}{k-1} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n c^{n-1} (c-1)}{n! \Gamma(k + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre,

$$\begin{aligned} w_{p-1}(z) + w_{p+1}(z) &= \frac{2(k-1)}{z} \left[w_p(z) + \frac{1}{k-1} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1} c^n (c-1)}{n! \Gamma(k + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p+2} \right] \\ &= \frac{2(k-1)}{z} \left[w_p(z) + \frac{z}{2(k-1)} (1-c) w_{p+1}(z) \right] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan da,

$$zw_{p-1}(z) + czw_{p+1}(z) = (2p + b - 1)w_p(z)$$

olduğu görülür.

b. Benzer şekilde $w_{p-1}(z) - w_{p+1}(z)$ ifadesi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} & \frac{2p + b - 1}{2\Gamma(\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p-1} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n c^n \left(\kappa + n - 1 + \frac{n}{c}\right)}{n! \Gamma(\kappa + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p-1} \\ &= \frac{p}{2\Gamma(\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p-1} + \frac{p + b - 1}{2\Gamma(\kappa)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p-1} \\ & \quad + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n c^n \left(n + \frac{p}{2}\right)}{n! \Gamma(\kappa + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p-1} \\ & \quad + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n c^n (p + b - 1)}{2n! \Gamma(\kappa + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p-1} \\ & \quad + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n c^{n-1}}{(n-1)! \Gamma(\kappa + n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p-1} \\ &= w_p'(z) - w_{p+1}(z) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu da ikinci içirme bağıntısına denktir.

c. (a) ve (b) bağıntılarını birleştirirsek

$$zw_p'(z) + (p + b - 1)w_p(z) + czw_{p+1}(z) = (2p + b - 1)w_p(z)$$

olur ve bu istenen eşitliği bize verir.

d.

$$w_p(z) = \left[2^p \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right) \right]^{-1} z^p \sum_{n \geq 0} \frac{\left(\frac{-c}{4}\right)^n \Gamma\left(p + \frac{b+1}{2}\right)}{n! \Gamma\left(p + n + \frac{b+1}{2}\right)} z^{2n}$$

olduğu göz önüne alınırsa $z = 0$ iken

$$\left[z^{-p} w_p(z) \right]' \Big|_{z=0} = \left[\sum_{n \geq 0} a_0(p) b_n(p) z^{2n} \right]' \Big|_{z=0} = \left[2 \sum_{n \geq 1} a_0(p) b_n(p) n z^{2n-1} \right] \Big|_{z=0} = 0$$

ve $\forall n \geq 0$ için $b_n(p)$ (3.8) deki gibi olmak üzere

$$\left[z^{-p} w_{p+1}(z) \right]' \Big|_{z=0} = \left[\sum_{n \geq 0} a_0(p) b_n(p+1) z^{2n+1} \right]' \Big|_{z=0} = 0$$

bulunur. Şimdi $z \neq 0$ olduğunu varsayalım. (c) şıkında verilen bağıntıyı kullanacak olursak;

$$\left[z^{-p} w_p(z) \right]' = z^{-p-1} [z w_p'(z) - p w_p(z)] = -c z^{-p} w_{p+1}(z)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.15 (Jack Lemması) : $f, f(0) = 0$ olmak üzere D birim diskinde sabit olmayan analitik fonksiyon olsun. Eğer $|f(z)|$, z_0 noktasında $|z| = r \in [0,1)$ dairesi üzerinde maksimum değer alabiliyorsa $m \geq 1$ olacak şekilde bir reel sayı vardır. Öyle ki $z_0 f'(z_0) = m f(z_0)$ dır (Jack 1971).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde yapılan araştırmalar sonucunda Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri ile ilgili önemli teoremlere ve ispatlarına yer verilmiştir.

4.1. Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonlarının Ünivalentliği

Teorem 4.1.1 : $\forall n \geq 0$ b_n (3.8) şeklinde tanımlanmak üzere $u_p(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ genelleştirilmiş ve normalize edilmiş Bessel fonksiyonu olsun. $b_1 > 0$, $\forall z \in D$ ve bazı sabit $\beta \geq 0$ için u_p nin

$$|u'_p(z) - b_1|^{1-\beta} \left| \frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right|^\beta < (b_1)^{1-\beta} \left(\frac{1}{2} \right)^\beta \quad (4.1)$$

şartını sağladığını kabul edelim. O halde u_p D birim diskinde ünivalenttir (Arpad Baricz 2008b).

İspat : $h: D \rightarrow \mathbb{C}$, $h(z) = (u_p(z) - 1)/b_1$ fonksiyonu için (4.1) şartından

$$|h'(z) - 1|^{1-\beta} \left| \frac{zh''(z)}{h'(z)} \right|^\beta < \left(\frac{1}{2} \right)^\beta \quad (4.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, $h \in A$ olduğu açıktır. Şimdi $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = h'(z) - 1$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre, $f(0) = 0$ olmak üzere f, D birim diskinde analitiktir. Kaldırılabilir singülerliklerle ilgili yorum tıpkı (2.1) ve (2.2) deki gibi uygulanmak üzere (4.2) den $\forall z \in D$ için

$$|f(z)|^{1-\beta} \left| \frac{zf'(z)}{1+f(z)} \right|^\beta < \left(\frac{1}{2}\right)^\beta \quad (4.3)$$

veya buna denk olarak

$$|f(z)| \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \frac{1}{1+f(z)} \right|^\beta < \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$$

ifadeleri elde edilir.

$$\max\{|f(z)|: |z| \leq |z_0|\} = |f(z_0)| = 1$$

olacak şekilde bir $z_0 \in D$ noktası olduğunu kabul edelim. Jack Lemmasından yararlanarak $z_0 f'(z_0)/f(z_0) = m \geq 1$ yazarsak (4.2) ve (4.3) eşitsizlikleri ile çelişen

$$|f(z_0)| \left| \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} + \frac{1}{1+f(z_0)} \right|^\beta \geq \left(\frac{m}{2}\right)^\beta \geq \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$$

eşitsizliği elde edilir. Bu, $|f(z)| = |h'(z) - 1| < 1$ olduğunu gösterir ki buradan da $\forall z \in D$ için $Re h'(z) > 0$ olduğu görülür. Yani, bu $\forall z \in D$ için $Re \left(\frac{u'_p(z)}{b_1} \right) > 0$ olduğu anlamına gelir. $\varphi(z) = b_1 z$ nin D birim diskinde konveks olduğuna dikkat edin. Bu φ için u_p fonksiyonu

$$Re \left(\frac{u'_p(z)}{\varphi'(z)} \right) > 0$$

şartını sağlar. Sonuç olarak Lemma 3.1.11 den $u_p(z)$ fonksiyonu D birim diskinde ünivalenttir.

Teorem 4.1.1 de $\beta = 0$ ve $\beta = 1$ olarak alınırsa aşağıdaki sonuçları elde ederiz:

Sonuç 4.1.2: Eğer $b_1 > 0$ olmak üzere $u_p(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ fonksiyonu $\forall z \in D$ için

$$|u'_p(z) - b_1| < b_1$$

şartını sağlıyorsa u_p, D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2008b).

Sonuç 4.1.3: Eğer $b_1 > 0$ olmak üzere $u_p(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n$ fonksiyonu $\forall z \in D$ için

$$\left| \frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa u_p, D birim diskinde ünivalenttir (Arpad Baricz 2008b).

Teorem 4.1.4: $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + 1$ olmak üzere $b, p, c \in \mathbb{R}$ ise $\forall z \in D$ için $Reu_p(z) > 0$ olur.

Ayrıca, $\kappa \geq \frac{|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ ise u_p, D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2002).

İspat: $c = 0$ iken $u_p(z) \equiv 1$ olup $\forall z \in D$ için $Reu_p(z) > 0$ olur. $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim ve $h = u_p$ alalım. Bu durumda, h fonksiyonu

$$4z^2 h''(z) + 4\kappa z h'(z) + cz h(z) = 0 \quad (4.4)$$

denklemini sağlar. $\psi(r, s, t; z) = 4t + 4\kappa s + czr$ ve $E = \{0\}$ olduğu göz önünde bulundurulursa (4.4) denkleminde $\forall z \in D$ için $\psi(h(z), zh'(z), z^2 h''(z); z) \in E$

olduğu anlaşılr. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = x + iy$ yazılırsa $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ için $Re\psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) = 4(\mu + \sigma) + 4(\kappa - 1)\sigma + c\rho y$ olur.

$\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$, $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ eşitsizliklerini sağlasın. $\kappa > 1$ olduğundan

$$Re\psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) \leq -2(\kappa - 1)\rho^2 - c\rho y - 2(\kappa - 1)$$

elde edilir.

$Q_1(\rho) = -2(\kappa - 1)\rho^2 - c\rho y - 2(\kappa - 1)$ olarak alınsın. Bu değer her reel ρ için kesinlikle negatif olacaktır; çünkü $Q_1(\rho)$ nin diskriminantı Δ , $y \in (-1, 1)$ için

$$\Delta = c^2 y^2 - 16(\kappa - 1)^2 < c^2 - 16(\kappa - 1)^2 \leq 0$$

olur. Sonuç olarak, ψ Lemma 3.1.7 den dolayı kabul edilebilirlik şartını sağlar. Dolayısıyla, Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için $Reh(z) = Reu_p(z) > 0$ sonucuna varılır.

$\kappa \geq \frac{|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ iken yukarıdaki sonuç $\forall z \in D$ için $Reu_{p+1}(z) > 0$ olmasını gerektirir. Lemma 3.1.6 kullanılarak $\forall z \in D$ için

$$Re \left[-\frac{4\kappa}{c} u'_p(z) \right] = Reu_{p+1}(z) > 0$$

yazılır. Bu u_p nin, $\varphi(z) = -(cz)/4\kappa$ şeklinde tanımlanan $\varphi: D \rightarrow \mathbb{C}$ konveks fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğu anlamına gelir. Lemma 3.1.11 den u_p nin D birim diskinde ünivalent olduğu anlaşılr.

Teorem 4.1.4 kompleks parametreler için genişletilirse aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 4.1.5: $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + 1$ olmak üzere $b, p, c \in \mathbb{C}$ ise $\forall z \in D$ için $Re u_p(z) > 0$ olur.

Ayrıca, $Re \kappa \geq \frac{|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ ise u_p, D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2006a).

4.2. Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonunun Yıldızlılığı ve Konveksliği

Teorem 4.2.1: (3.9) biçiminde tanımlanan u_p fonksiyonu $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $z \in D$ olmak üzere

$$\left| \frac{zu_p'(z)}{u_p(z)} \right| < 1 - \alpha$$

şartını sağlıyorsa $zu_p \in S^*(\alpha)$ dır (Arpad Baricz 2008b).

İspat: $\forall z \in D$ için $g(z) = zu_p(z)$ kuralı ile g fonksiyonu tanımlansın. Verilen şart $z \in D$ olmak üzere

$$\left| \frac{zg'(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1 - \alpha$$

eşitsizliği haline gelir. Lemma 3.1.8 de $\beta = 0$ alınırsa önceki eşitsizlikten $g \in S^*(\alpha)$ olduğu görülür. Buda Teorem 4.2.1 i ispatlar.

Burada dikkat edilecek olursa, $S^*(\alpha) \subseteq S^* \subset S$ olduğundan Teorem 4.2.1 deki hipotez altında zu_p fonksiyonu D birim diskinde ünivalenttir.

Teorem 4.2.2 : (3.9) biçiminde tanımlanan $u_p(z)$ fonksiyonu $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $z \in D$ olmak üzere

$$\left| \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right| < \frac{1 - \frac{3\alpha}{2} + \alpha^2}{1 - \alpha}$$

şartını sağlıyorsa u_p fonksiyonu 1 e göre α . mertebeden yıldızıl bir fonksiyondur (Baricz 2008b).

İspat : $h: D \rightarrow \mathbb{C}, h(z) = [u_p(z) - b_0]/b_1$ fonksiyonunu tanımlayalım. Buna göre $h \in A$ ve $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, $z \in D$ olmak üzere

$$\left| \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right| < \frac{1 - 3\alpha/2 + \alpha^2}{1 - \alpha}$$

olur. Sonuç olarak, Lemma 3.1.8 den ($\beta = 1$ seçilirse) $h \in S^*(\alpha)$ olduğu sonucuna varılır; yani h fonksiyonu $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ için orijine göre α . mertebeden yıldızıldır. Şimdi h fonksiyonunun tanımından Teorem 4.2.2 ye ulaşılır; çünkü $b_0 = 1$ dir.

$S^*(\alpha) \subseteq S^* \subset S$ olduğundan Teorem 4.2.2'deki hipotez altında $z \rightarrow [u_p(z) - b_0]/b_1$ fonksiyonu D birim diskinde ünivalenttir.

Teorem 4.2.1 e bağlı olarak genelleştirilmiş Bessel fonksiyonlarının konveksliğiyle ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.3: $\alpha \in [0, 1/2]$, $c \neq 0$ ve $\forall z \in D$ için;

$$\left| \frac{zu_{p+1}'(z)}{u_{p+1}(z)} \right| < 1 - \alpha$$

şartını sağlıyorsa $u_p \in C(\alpha)$ olur (Baricz 2008b).

İspat: Teorem 4.2.1 den $zu_{p+1}(z) \in S^*(\alpha)$ olduğu anlaşılır. Diğer taraftan, Lemma 3.1.6 dan $b_1 = -c/(4\kappa) \neq 0$ olmak üzere $b_1 zu_{p+1}(z) = zu'_p(z)$ yazılır. Sonuç olarak $zu'_p(z) \in S^*(\alpha)$ ve bu nedenle $u_p \in C(\alpha)$ olur.

Diferansiyel subordinasyon tekniğini yani Lemma 3.1.7'yi kullanarak zu_p fonksiyonunun yıldızıl ve u_p fonksiyonunun konveks olması için yeter şartlar verelim.

Teorem 4.2.4: $b, p, c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0$ olsun. Sırasıyla, (3.7) ve (3.9) daki gibi tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (a) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{1}{2}$ ise u_p fonksiyonu konvektir.
- (b) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{3}{2}$ ise zu_p fonksiyonu yıldızıldır.
- (c) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{2} + 1$ ise zu_p fonksiyonu $1/2$.mertebeden yıldızıldır.
- (d) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{2} + 1$ ise $z^{1-p}w_p$ fonksiyonu yıldızıldır (Baricz 2002).

İspat: a. $\kappa > \frac{|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ olduğundan Teorem 4.1.4 den $\forall z \in D$ için $Reu_{p+1}(z) > 0$ olduğu anlaşılır. Lemma 3.1.6 ya göre $\forall z \in D$ için $u'_p(z) \neq 0$ dir. $q: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$q(z) = 1 + \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)}$$

fonksiyonu tanımlansın. q fonksiyonu D de analitiktir ve $q(0) = 1$ dir. $z \neq 0$ olduğunu kabul edelim. u_p (3.10) diferansiyel denklemini sağladığından

$$4zu_p''(z) + 4\kappa u_p'(z) + cu_p(z) = 0$$

elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$4zu_p'''(z) + 4(\kappa + 1)u_p''(z) + cu_p'(z) = 0$$

olur. $u_p'(z) \neq 0$ olduğundan her iki tarafı $u_p'(z)$ ye bölüp z ile çarparsak

$$4 \left[\frac{zu_p'''(z)}{u_p''(z)} \right] \left[\frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right] + 4(\kappa + 1) \left[\frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right] + cz = 0 \quad (4.5)$$

yazılır. $q(z) - 1 = \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)}$ eşitliğinin her iki tarafının logaritmik olarak türevini alıp z

ile çarpalım. Böylece,

$$\frac{zq'(z)}{q(z) - 1} = 1 + \frac{zu_p'''(z)}{u_p''(z)} - [q(z) - 1]$$

elde edilir ve

$$\frac{zu_p'''(z)}{u_p''(z)} = \frac{zq'(z) + q^2(z) - 3q(z) + 2}{q(z) - 1}$$

dır. (4.5) e göre bu sonuç q nun

$$4zq'(z) + 4q^2(z) + 4(\kappa - 2)q(z) + cz - 4(\kappa - 1) = 0 \quad (4.6)$$

diferansiyel denklemini sağladığını gösterir. Bu denklem $z = 0$ için de geçerlidir. $\psi(r, s; z) = 4s + 4r^2 + 4(\kappa - 2)r + cz - 4(\kappa - 1)$ ve $E = \{0\}$ olduğunu kullanırsak (4.6) dan $\forall z \in D$ için $\psi(q(z), zq'(z); z) \in E$ olduğu görülür. Şimdi $\forall z \in D$ için $Re q(z) > 0$ eşitsizliğini ispatlamak için Lemma 3.1.7 i kullanalım. $z = x + iy \in D$ $(x, y) \in \mathbb{R}$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartını sağlayan $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ için

$$Re \psi(\rho i, \sigma; x + iy) = 4\sigma + 4\rho^2 + cx - 4(\kappa - 1)$$

$$\begin{aligned} &\leq -6\rho^2 + cx - 2(2\kappa - 1) \\ &< |c| - 2(2\kappa - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. u_p nin D de konveks olduğunu göstermek üzere Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için $Re q(z) > 0$ sonucuna varılır.

b. (a) ya göre u_{p-1} fonksiyonu konvektir. Lemma 3.1.9 dan $zu'_{p-1} \in S^*$ olur. Diğer taraftan Lemma 3.1.6 dan

$$czu_p(z) = -4(\kappa - 1)zu'_{p-1}(z)$$

bulunur. Bu nedenle $zu_p \in S^*$ dır.

c. Teorem 4.1.4 e göre $\forall z \in D$ için $Re u_p(z) > 0$ olduğundan $\forall z \in D$ için $u_p(z) \neq 0$ dır. $q: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$q(z) = 1 + 2 \frac{zu'_p(z)}{u_p(z)}$$

fonksiyonu tanımlansın. q fonksiyonu D de analitiktir ve $q(0) = 1$ dir. $z \neq 0$ olduğunu kabul edelim. u_p (3.10) diferansiyel denklemini sağladığından

$$4 \left[\frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right] \left[\frac{zu'_p(z)}{u_p(z)} \right] + 4\kappa \left[\frac{zu'_p(z)}{u_p(z)} \right] + cz = 0 \quad (4.7)$$

denklemini de sağlar.

$\frac{q(z)-1}{2} = \frac{zu'_p(z)}{u_p(z)}$ nin logaritmik olarak türevi alınıp z ile çarpılırsa

$$\frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} = \frac{2zq'(z) + q^2(z) - 4q(z) + 3}{2(q(z) - 1)} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.7) ye göre bu sonuç q nun

$$2zq'(z) + q^2(z) + 2(\kappa - 2)q(z) + cz - 2(\kappa - 3/2) = 0 \quad (4.9)$$

diferansiyel denklemini sağladığını gösterir. Bu denklem $z = 0$ için de geçerlidir.

$\psi(r, s; z) = 2s + r^2 + 2(\kappa - 2)r + cz - 2(\kappa - 3/2)$ ve $E = \{0\}$ ise (4.9) dan $\forall z \in D$ için $\psi(q(z), zq'(z); z) \in E$ olduğu görülür. $\forall z \in D$ için $Re q(z) > 0$ eşitsizliğini ispatlamak için Lemma 3.1.7 i kullanalım. $z = x + iy \in D$ $(x, y) \in \mathbb{R}$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartını sağlayan $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} Re\psi(\rho i, \sigma; x + iy) &= 2\sigma - \rho^2 + cx - 2(\kappa - 3/2) \\ &\leq -2\rho^2 + cx - 2(\kappa - 1) \\ &< |c| - 2(\kappa - 1) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için $Re q(z) > 0$ sonucuna varılır. Şimdi $g_p: D \rightarrow \mathbb{C}$, $g_p(z) = zu_p(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\frac{zg_p'(z)}{g_p(z)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q(z)$$

olduğundan

$$Re \left[\frac{zg_p'(z)}{g_p(z)} \right] > \frac{1}{2}, \forall z \in D$$

olur. Buda g_p nin $1/2$. mertebeden yıldızıl olduğunu gösterir.

d. $h_p: D \rightarrow \mathbb{C}$, $h_p(z) = z^{1-p}w_p(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım. $a_0(p) = [2^p\Gamma(\kappa)]^{-1}$ olmak üzere $h_p(z) = a_0(p)zu_p(z^2)$ olduğundan

$$\frac{zh'_p(z)}{h_p(z)} = 2 \left[\frac{z^2 g'_p(z^2)}{g_p(z^2)} - \frac{1}{2} \right]$$

eşitliği elde edilir. (c) şikkından dolayı g_p nin $1/2$. mertebeden yıldızıl olduğunu biliyoruz. Bu nedenle $\forall z \in D$ için

$$\operatorname{Re} \left[\frac{zh'_p(z)}{h_p(z)} \right] > 0$$

dır ve dolayısıyla h_p yıldızıldır.

Teorem 4.1.4 ve 4.2.4 de $b = c = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.5: $p \in \mathbb{R}$ olsun. J_p (3.1) deki gibi tanımlanmak üzere

$$z \rightarrow \mathfrak{I}_p \left(z^{\frac{1}{2}} \right) = 2^p \Gamma(p+1) z^{-\frac{p}{2}} J_p \left(z^{\frac{1}{2}} \right)$$

fonksiyonu için aşağıdaki özellikler doğrudur:

- a.** Eğer $p \geq \frac{1}{4}$ ise $\forall z \in D$ için $\operatorname{Re} \mathfrak{I}_p \left(z^{\frac{1}{2}} \right) > 0$ dır.
- b.** Eğer $p \geq -\frac{3}{4}$ ise $z \rightarrow \mathfrak{I}_p \left(z^{\frac{1}{2}} \right)$ fonksiyonu D de ünivalenttir.
- c.** Eğer $p \geq -\frac{1}{4}$ ise $z \rightarrow \mathfrak{I}_p \left(z^{\frac{1}{2}} \right)$ fonksiyonu D de konvektir.

- d. Eğer $p \geq \frac{3}{4}$ ise $z \rightarrow z\mathfrak{S}_p\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$ fonksiyonu D de yıldızlıdır.
- e. Eğer $p \geq \frac{1}{2}$ ise $z \rightarrow z\mathfrak{S}_p\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$ fonksiyonu D de $1/2$. mertebeden yıldızlıdır.
- f. Eğer $p \geq \frac{1}{2}$ ise $z \rightarrow z^{1-p}J_p(z)$ fonksiyonu D de yıldızlıdır (Selinger 1995).

Teorem 4.1.4 ve 4.2.4 de $b = 2$ ve $c = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.6: $p \in \mathbb{R}$ olsun. J_p (3.1) deki gibi tanımlanmak üzere

$$z \rightarrow \mathfrak{S}_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = 2^{p+\frac{1}{2}}\Gamma\left(p + \frac{3}{2}\right)z^{-\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)}J_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$$

fonksiyonu için aşağıdaki iddialar doğrudur:

- a. Eğer $p \geq -\frac{1}{4}$ ise $\forall z \in D$ için $Re\mathfrak{S}_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) > 0$ dır.
- b. Eğer $p \geq -\frac{5}{4}$ ise $z \rightarrow \mathfrak{S}_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$ fonksiyonu D de ünivalenttir.
- c. Eğer $p \geq -\frac{3}{4}$ ise $z \rightarrow \mathfrak{S}_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$ fonksiyonu D de konvektir.
- d. Eğer $p \geq \frac{1}{4}$ ise $z \rightarrow z\mathfrak{S}_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$ fonksiyonu D de yıldızlıdır.
- e. Eğer $p \geq 0$ ise $z \rightarrow z\mathfrak{S}_{p+\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)$ fonksiyonu D de $1/2$. mertebeden yıldızlıdır.
- f. Eğer $p \geq 0$ ise $z \rightarrow z^{1-p}j_p(z)$ fonksiyonu D de yıldızlıdır (Baricz 2002).

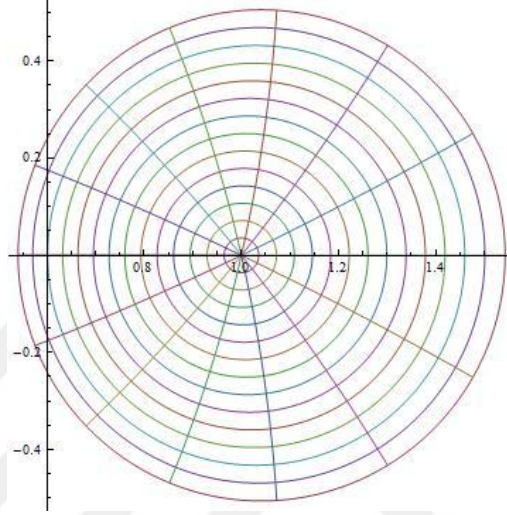
Örnek 4.2.7: a. $\cos\sqrt{z}$, $\cosh\sqrt{z}$ ve $(\sin\sqrt{z})/\sqrt{z}$ fonksiyonları D de ünivalenttir; çünkü

$$\mathfrak{S}_{-\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}z^{\frac{1}{4}}J_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) = \cos\sqrt{z},$$

$$\mathfrak{S}_{-\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}z^{\frac{1}{4}}I_{-\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) = \cosh\sqrt{z},$$

$$\mathfrak{I}_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-\frac{1}{4}} J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{z})=\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

fonksiyonları Teorem 4.1.4 deki şartları sağlar.



Şekil 4.1. $\cos\sqrt{z}$ nin grafiği

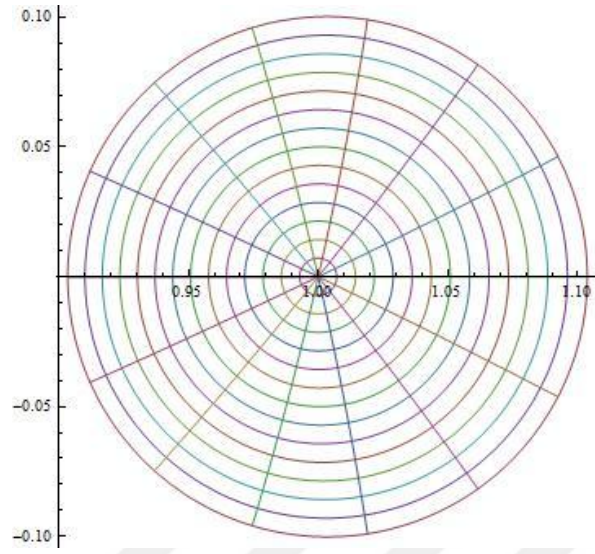
b. $(\sin\sqrt{z} - \sqrt{z}\cos\sqrt{z})/(z\sqrt{z})$, $(\sinh\sqrt{z})/\sqrt{z}$ ve $(\sin\sqrt{z})/\sqrt{z}$ fonksiyonları D de konvektir; çünkü

$$\mathfrak{I}_{\frac{3}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{3}{z}\left(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}-\cos\sqrt{z}\right),$$

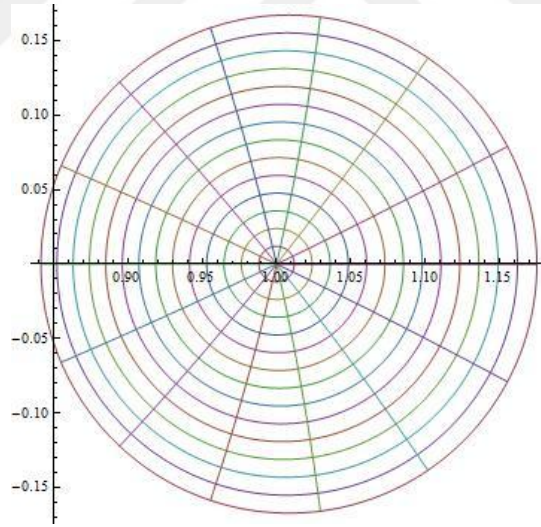
$$\mathfrak{I}_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-\frac{1}{4}} I_{\frac{1}{2}}(\sqrt{z})=\frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}},$$

$$\mathfrak{I}_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

fonksiyonları Teorem 4.1.4 deki şartları sağlar.



Şekil 4.2. $\frac{3}{z} \left(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} - \cos\sqrt{z} \right)$ fonksiyonunun grafiği



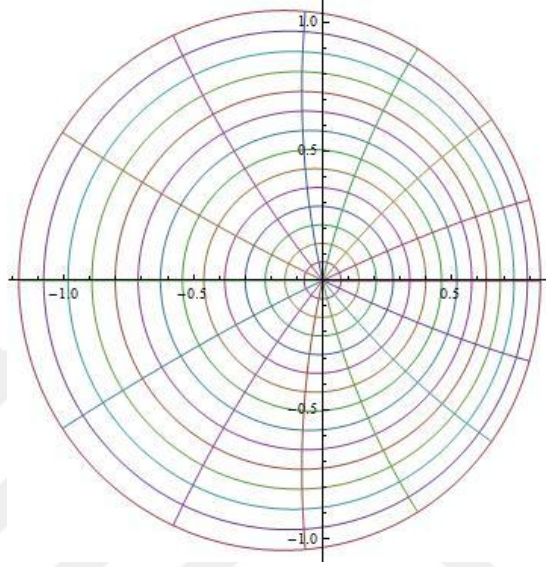
Şekil 4.3. $\frac{\sinh\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ fonksiyonunun grafiği

c. $\sqrt{z}\sin\sqrt{z}$ ve $\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}$ fonksiyonları $1/2$. mertebeden yıldızlıdır; çünkü

$$z\mathfrak{I}_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{\frac{3}{4}} J_{\frac{1}{2}}(\sqrt{z}) = \sqrt{z}\sin\sqrt{z},$$

$$z\mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}z^{\frac{3}{4}}I_{\frac{1}{2}}(\sqrt{z})=\sqrt{z}\sinh\sqrt{z},$$

fonksiyonları Teorem 4.1.4 deki şartları sağlar.



Şekil 4.4. $\sqrt{z}\sin\sqrt{z}$ fonksiyonunun grafiği

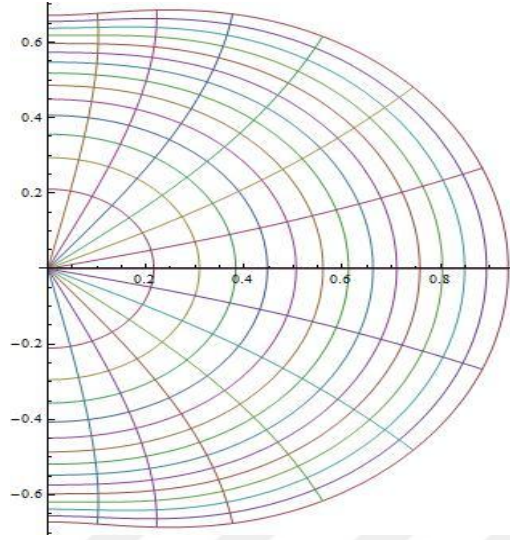
d. $\sin z, \sinh z$ ve $\frac{(\sin\sqrt{z})}{\sqrt{z}-\cos\sqrt{z}}$ fonksiyonları D de yıldızlıdır; çünkü

$$z^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin z,$$

$$z^{\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sinh z,$$

$$z\mathfrak{S}_{\frac{3}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right)=3\left(\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}-\cos\sqrt{z}\right)$$

fonksiyonları Teorem 4.1.4 deki şartları sağlar.



Şekil 4.5. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sinh z$ fonksiyonunun grafiği

Teorem 4.2.7: $b, p, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0$ olsun. Sırasıyla, (3.7) ve (3.9) daki gibi tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- a. Eğer $Re \kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{(Im \kappa)^2}{6} + \frac{1}{2}$ ise u_p fonksiyonu konvektir.
- b. Eğer $Re \kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{(Im \kappa)^2}{6} + \frac{3}{2}$ ise zu_p fonksiyonu yıldızlıdır.
- c. Eğer $Re \kappa \geq \frac{|c|}{2} + \frac{(Im \kappa)^2}{4} + 1$ ise zu_p fonksiyonu $1/2$. mertebeden yıldızlıdır.
- d. Eğer $Re \kappa \geq \frac{|c|}{2} + \frac{(Im \kappa)^2}{4} + 1$ ise $z^{1-p}w_p$ fonksiyonu yıldızlıdır (Baricz 2006a).

İspat: a. $Re(\kappa + 1) \geq \frac{|c|}{4} + \frac{(Im \kappa)^2}{6} + \frac{1}{2}$ ve $c \neq 0$ olduğundan Teorem 4.1.5 den $\forall z \in D$ için $Re u_{p+1}(z) > 0$ olduğu anlaşılır. Lemma 3.1.6 ya göre $\forall z \in D$ için $u_p'(z) \neq 0$ dır.
 $h: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$h(z) = 1 + \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)}$$

fonksiyonu tanımlansın. h fonksiyonu D de analitiktir ve $h(0) = 1$ dir. Teorem 4.2.4 ün (a) şıkkının ispatındaki gibi h fonksiyonunun

$$4zh'(z) + 4h^2(z) + 4(\kappa - 2)h(z) + cz - 4(\kappa - 1) = 0 \quad (4.10)$$

denklemini sağladığı gösterilir.

$\psi(r, s; z) = 4s + 4r^2 + 4(\kappa - 2)r + cz - 4(\kappa - 1)$ ve $E = \{0\}$ olduğunu kullanırsak (4.10) dan $\forall z \in D$ için $\psi(h(z), zh'(z); z) \in E$ olduğu görülür. $\forall z \in D$ için $Reh(z) > 0$ eşitsizliğini ispatlamak için Lemma 3.1.7 i kullanalım. $z = x + iy \in D$ ve $c = c_1 + ic_2$ ($x, y, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) olsun. $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartını sağlayan her $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} Re\psi(\rho i, \sigma; x + iy) &= 4\sigma - 4\rho^2 - 4\rho(Im\kappa) + c_1x - c_2y - 4(Re\kappa - 1) \\ &\leq -6\rho^2 - 4(Im\kappa)\rho + c_1x - c_2y - 2(2Re\kappa - 1) = Q_1(p) \end{aligned}$$

elde edilir. $Q_1(p)$ nin kuadratik formunun diskriminantı Δ_1

$$\Delta_1 = 4[4(Im\kappa)^2 + 6(c_1x - c_2y) - 12(2Re\kappa - 1)]$$

dir. Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Eşitsizliğinden

$$c_1x - c_2y \leq |c_1x - c_2y| \leq \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \sqrt{x^2 + y^2} < |c|$$

yazılır. Bu nedenle

$$\frac{\Delta_1}{4} < 4(Im\kappa)^2 + 6|c| - 12(2Re\kappa - 1) \leq 0$$

olur. Dolayısıyla, $Q_1(p)$ nin kuadratik formu kesinlikle negatiftir ve sonuç olarak $Re\psi(\rho i, \sigma; x + iy) < 0$ dır. Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için $Reh(z) > 0$ olup u_p , D birim diskinde konvektir.

b. $Re(\kappa - 1) \geq \frac{|c|}{4} + \frac{(Im \kappa)^2}{6} + \frac{1}{2} = \frac{|c|}{4} + \frac{[Im(\kappa-1)]^2}{6} + \frac{1}{2}$ olduğundan (a) şıkkına göre u_{p-1} in konveks olduğu görülür. Lemma 3.1.9 dan $zu'_{p-1} \in S^*$ dır. Diğer taraftan, Lemma 3.1.6 dan $czu_p(z) = -4(\kappa - 1)zu'_{p-1}(z)$ eşitliği elde edilir. Buna göre, $zu_p \in S^*$ sonucuna ulaşılır.

c. Teorem 4.1.5 in birinci kısmındaki şart geçerli olduğundan, yani $Re\kappa > \frac{|c|}{4} + 1$ elde edildiğinden $\forall z \in D$ için $u_p(z) \neq 0$ olduğu anlaşılır. $h: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$h(z) = 1 + 2 \frac{zu_p'(z)}{u_p(z)}$$

fonksiyonu tanımlansın. h fonksiyonu D de analitiktir ve $h(0) = 1$ dir. Teorem 4.2.4 ün (c) şıkkının ispatındaki gibi h fonksiyonunun

$$2zh'(z) + h^2(z) + 2(\kappa - 2)h(z) + cz - (2\kappa - 3) = 0 \quad (4.11)$$

denklemini sağladığı gösterilir.

$\psi(r, s; z) = 2s + r^2 + 2(\kappa - 2)r + cz - (2\kappa - 3)$ ve $E = \{0\}$ ise (4.11) den $\forall z \in D$ için $\psi(h(z), zh'(z); z) \in E$ olduğu görülür. $\forall z \in D$ için $Reh(z) > 0$ eşitsizliğini ispatlamak için Lemma 3.1.7 yi kullanalım. $z = x + iy \in D$ ve $c = c_1 + ic_2$ ($x, y, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) olsun. $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartını sağlayan her $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} Re\psi(\rho i, \sigma; x + iy) &= 2\sigma - \rho^2 - 2\rho(Im\kappa) + c_1x - c_2y - (2Re\kappa - 3) \\ &\leq -2\rho^2 - 2(Im\kappa)\rho + c_1x - c_2y - (2Re\kappa - 2) = Q_2(p) \end{aligned}$$

elde edilir. $Q_2(p)$ nin kuadratik formunun diskriminantı Δ_2

$$\Delta_2 = 4(Im\kappa)^2 + 8(c_1x - c_2y) - 8(2Re\kappa - 2)$$

olur. Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz Eşitsizliğinden $c_1x - c_2y < |c|$ olduğunu biliyoruz. Bu nedenle, $\Delta_2 < 4(Im\kappa)^2 + 8|c| - 8(2Re\kappa - 2) \leq 0$ dır. Dolayısıyla, $Q_2(p) < 0$ ve sonuç olarak $Re\psi(\rho i, \sigma; x + iy) < 0$ dır. Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için $Reh(z) > 0$ bu eşitsizlik $g_p(z) = zu_p(z)$ şeklinde tanımlanan $g_p: D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun $1/2$. mertebeden yıldızlı olduğunu gösterir.

d. Bu iddianın ispatı Teorem 4.2.4 ün (d) şikkının ispatıyla çakışır.

Reel parametreler için Teorem 4.2.4 ün bir başka genelleştirmesi yapılırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.8: $c \neq 0$ ve $4\alpha^2 + (|c| - 6)\alpha + 2 \geq 0$ olmak üzere b, p, c reel sayılar ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Buna göre, sırasıyla, (3.7) ve (3.9) daki gibi tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

a. Eğer $\kappa \geq \frac{|c|+2(1-\alpha)(1-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ise u_p fonksiyonu α . mertebeden konvektir. Ayrıca,

$\forall z \in D$ için $Re[u_p'(z)]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ elde edilir.

b. Eğer $\kappa \geq \frac{|c|+2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ise zu_p ve $z\left[-\frac{c}{4(\kappa-1)}u_p(z)\right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$ fonksiyonu α . mertebeden yıldızlıdır.

c. Eğer $\kappa \geq \frac{|c|+2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ve $\alpha \neq 0$ ise $z^{\frac{2(1-\alpha)-p}{2\alpha}}w_p\left(z^{\frac{1}{2\alpha}}\right)$ fonksiyonu yıldızlıdır (Baricz 2008a).

İspat: a.

$$\frac{|c| + 2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)}{4(1 - \alpha)} = \frac{|c|}{4} + \frac{4\alpha^2 + (|c| - 6)\alpha + 2}{4(1 - \alpha)}$$

eşitliğinden $\kappa \geq \frac{|c|}{4}$ olduğu anlaşılır. Teorem 4.1.4 uygulanarak $\forall z \in D$ için $Reu_{p+1}(z) > 0$ eşitsizliği elde edilir. Lemma 3.1.6 ye göre $\forall z \in D$ için $zu_p'(z) \neq 0$ olur. $q: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$q(z) = 1 + \frac{zu_p''(z)}{(1 - \alpha)u_p'(z)}$$

fonksiyonu tanımlansın. q fonksiyonu D de analitiktir ve $q(0) = 1$ dir. u_p fonksiyonu (4.4) diferansiyel denklemini sağladığından Teorem 4.2.4 ün ispatında olduğu gibi, $e_1 = 2\kappa + 4(\alpha - 1)$ ve $e_2 = 2\kappa + 2(\alpha - 1)$ olmak üzere q fonksiyonunun

$$4(1 - \alpha)zq'(z) + 4(1 - \alpha)^2q^2(z) + 2(1 - \alpha)e_1q(z) + cz - 2(1 - \alpha)e_2 = 0 \quad (4.12)$$

denklemini sağladığı gösterilir.

$\psi(r, s; z) = 4(1 - \alpha)s + 4(1 - \alpha)^2r^2 + 2(1 - \alpha)e_1r + cz - 2(1 - \alpha)e_2$ ve $E = \{0\}$ ise (4.12) den $\forall z \in D$ için $\psi(q(z), zq'(z); z) \in E$ olduğu görülür. $\forall z \in D$ için $Req(z) > 0$ eşitsizliğini ispatlamak için Lemma 3.1.7 i kullanalım. $z = x + iy \in D$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ şartını sağlayan $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} Re\psi(\rho i, \sigma; x + iy) &= 4(1 - \alpha)\sigma - 4(1 - \alpha)^2\rho^2 + cx - 2(1 - \alpha)e_2 \\ &\leq -2(1 - \alpha)(3 - 2\alpha)\rho^2 + cx - 2(1 - \alpha)e_2 \\ &< |c| + 2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha) - 4(1 - \alpha)\kappa \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için $Req(z) > 0$ olur. Bu sonuç $\forall z \in D$ için

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right] = (1 - \alpha) \operatorname{Re} q(z) + \alpha > \alpha$$

olduğu anlamına gelir. Bu da u_p fonksiyonunun D de α . mertebeden konvektir olduğunu gösterir. Diğer taraftan, $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ ise $\forall z \in D$ için

$$\operatorname{Re}[f'(z)]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}} > \frac{1}{2}$$

dir.

b.

$$\kappa - 1 \geq \frac{|c| + 2(1 - \alpha)(3 - 2\alpha)}{4(1 - \alpha)} - 1 = \frac{|c| + 2(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)}{4(1 - \alpha)}$$

olduğundan teoremin (a) şıkkına göre u_{p-1} fonksiyonu α . mertebeden konvektir.

Lemma 3.1.10 dan $zu'_{p-1} \in S^*(\alpha)$ ve $z[u'_{p-1}]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \in S^*(\alpha)$ sonucuna ulaşılır. Lemma 3.1.6 ya göre bu

$$-\frac{c}{4(\kappa - 1)} zu_p(z) \in S^*(\alpha)$$

ve

$$z \left[-\frac{c}{4(\kappa - 1)} u_p(z) \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \in S^*(\alpha)$$

anlamına gelir.

c. $g_p: D \rightarrow \mathbb{C}$ ve $h_p: D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonları, sırasıyla,

$$g_p(z) = zu_p(z) \text{ ve } h_p(z) = z^{\frac{2(1-\alpha)-p}{2\alpha}} w_p\left(z^{\frac{1}{2\alpha}}\right)$$

şeklinde tanımlansın. $a_0(p) = [2^p \Gamma(\kappa)]^{-1}$ olmak üzere $h_p(z) = a_0(p) z^{\frac{(1-\alpha)}{\alpha}} u_p\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ olduğundan

$$\frac{zh_p'(z)}{h_p(z)} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{z^{\frac{1}{\alpha}} g_p'\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{g_p\left(z^{\frac{1}{\alpha}}\right)} - \alpha \right]$$

eşitliği yazılır. Son olarak, $g_p \in S^*(\alpha)$ olduğundan $h_p \in S^*$ sonucu çıkarılır.

Yukarıda verilen sonuçlar aşağıdaki gibi geliştirilerek genelleştirilebilir.

Aşağıda vereceğimiz sonuçların ispatını yaparken kullanacağımız bazı notasyonlar:

$$c_0 = \frac{|c|}{4} - 1$$

$$c_1 = \frac{1}{8} \left[3|c| - 12 + \sqrt{7|c|^2 + 8|c| + 16} \right]$$

$$c_2 = \frac{1}{8} \left[4|c| - 4 + \sqrt{14|c|^2 + 16|c| + 16} \right]$$

şeklindedir.

Lemma 4.2.9: $\kappa > \max\{0, c_0\}$ olacak şekilde $p, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise (3.9) daki şekilde tanımlanan $u_p: D \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu her $z \in D$ için

$$\frac{4\kappa(\kappa+1) - (2\kappa+1)|c| + |c|^2/8}{\kappa[4(\kappa+1) - |c|]} \leq |u_p(z)| \leq \frac{32\kappa^2 - |c|^2}{8\kappa[4\kappa - |c|]} \quad (4.13)$$

eşitsizliklerini sağlar (Baricz *et al.* 2010)

İspat: $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ ve $\forall n \geq 2$ için sağlanan $(\kappa + 1)_{n-1}n! \geq 2(\kappa + 1)^{n-1}$ eşitsizlikleri kullanılarak her $z \in D$ için

$$\begin{aligned} |u_p(z)| &\leq \left| 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-c/4)^n}{(\kappa)_n n!} z^n \right| \\ &\geq 1 - \frac{|c|}{4\kappa} \left[1 + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{|c|}{4(\kappa + 1)} \right)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $32\kappa(\kappa + 1) - 8(2\kappa + 1)|c| + |c|^2 > 0$ ise pozitiftir.

Benzer olarak, $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ve her $n \geq 2$ için sağlanan $(\kappa)_n n! \geq 2\kappa^n$ eşitsizlikleri kullanılarak her $z \in D$ için

$$\begin{aligned} |u_p(z)| &\leq 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(|c|/4)^n}{(\kappa)_n n!} \\ &\leq 1 + \frac{|c|}{4\kappa} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \left(\frac{|c|}{4\kappa} \right)^n \\ &= \frac{32\kappa^2 - |c|^2}{8\kappa[4\kappa - |c|]}, \quad (\kappa > |c|/4) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.10: $\kappa \geq c_1$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere $p, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{C}$ olsun. Buna göre, u_p fonksiyonu D birim diskinde konveks ve 1'e göre $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızıldır. Ayrıca, $z \rightarrow zu_{p+1}$ fonksiyonu D de yıldızıldır (Baricz *et al.* 2010).

İspat: $u = u_p$ ve $f = u_{p+1}$ olarak alınsın. (3.9) dan

$$u_p'(z) = -\frac{c}{4\kappa} u_{p+1}(z)$$

formülü elde edilir. Buradan,

$$zu_p'(z) = -\frac{c}{4\kappa} f(z) u_p''(z) = \frac{c^2}{16\kappa(\kappa+1)} u_{p+2}(z)$$

ve

$$1 + \frac{zu''(z)}{u'(z)} = \frac{zf'(z)}{f(z)}$$

olur. Dolayısıyla, u nun konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart f nin D birim diskinde yıldızlı olmasıdır. Buna göre, u fonksiyonunun D birim diskinde konveks ve 1 e göre $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızlı olduğunu ispatlamak için her $z \in D$ için

$$\left| \frac{zu_p''(z)}{u_p'(z)} \right| = \left| \frac{zu_{p+1}'(z)}{u_{p+1}(z)} \right| = \left| -\frac{c}{4(\kappa+1)} \frac{zu_{p+2}(z)}{u_{p+1}(z)} \right| < 1$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.13) deki $\kappa, \kappa+1$ ve sonra $\kappa+2$ ile değiştirilerek ve ilgili sınırlar kullanılarak

$$32(\kappa+1)(\kappa+2) - 8(2\kappa+3)|c| + |c|^2 > 0$$

olmak üzere her $z \in D$ için

$$\left| \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1 \right| = \left| \frac{zu_{p+1}'(z)}{u_{p+1}(z)} \right| < \frac{|c|}{32(\kappa+2)} \frac{32(\kappa+2)^2 - |c|^2}{4(\kappa+1)(\kappa+2) - (2\kappa+3)|c| + |c|^2/8}$$

elde edilir. f in yıldızlı olabilmesi için yukarıdaki sınırın 1 e eşit veya birden az olması

$$32(\kappa+2) \left[4(\kappa+1)(\kappa+2) - (3\kappa+5)|c| + \frac{|c|^2}{8} \right] + |c|^3 \geq 0$$

veya buna denk olarak $X = \kappa - 1$ olmak üzere

$$128X^3 + 32[32 - 3|c|]X^2 + 4[672 - 136|c| + |c|^2]X + 2304 - 12|c|[64 - |c|] + |c|^3 \geq 0$$

şartını verir. κ nın alt tahminini ispatlamak için $\kappa \geq c_1$ olduğundan

$$4\kappa^2 + [12 - 3|c|]\kappa + \frac{|c|^2}{8} - 5|c| + 8 \geq 0$$

olduğunu görmek yeterlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teorem $z \rightarrow zu_p(z)$ fonksiyonunun D de $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızlı olması için yeter şartlar verir.

Teorem 4.2.11: $\kappa \geq c_2$ olmak üzere $p, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in$ olsun. Buna göre, $z \rightarrow zu_p$ fonksiyonu D de $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızlıdır ve sonuç olarak $z \rightarrow z^{1-p}w_p$ fonksiyonu D de yıldızlıdır (Baricz *et al.* 2010).

İspat: $g(z) = zu_p(z)$ ve $h(z) = zu_p(z^2)$ olarak alınırsa her $z \in D$ için

$$\left| \frac{zh'(z)}{h(z)} - 1 \right| < 1$$

olmak üzere

$$h(z) = \frac{g(z^2)}{z} = 2^p \Gamma(\kappa) z^{1-p} w_p(z)$$

ve

$$\frac{zh'(z)}{h(z)} - 1 = 2 \left[\frac{z^2 g'(z^2)}{g(z^2)} - 1 \right] = 2 \frac{z^2 u_p'(z^2)}{u_p(z^2)}$$

olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in D$ için

$$\left| \frac{z^2 u_p'(z^2)}{u_p(z^2)} \right| < \frac{1}{2} \quad (4.14)$$

olmasıdır. (4.14) eşitsizliğinin geçerli olması durumunda $z \rightarrow zu_p(z)$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızlı olduğu anlaşılır. Teorem 4.2.10 un ispatından

$$4\kappa(\kappa + 1) - (2\kappa + 1)|c| + \frac{|c|^2}{8}$$

olmak üzere

$$\left| \frac{z^2 u_p'(z^2)}{u_p(z^2)} \right| < \frac{|c|}{32(\kappa + 1)} \frac{32(\kappa + 1)^2 - |c|^2}{4\kappa(\kappa + 1) - (2\kappa + 1)|c| + |c|^2/8}$$

elde edilir. Üst sınırın $\frac{1}{2}$ ye eşit veya $\frac{1}{2}$ den az olması için gerek ve yeter şart

$$16(\kappa + 1)[4\kappa(\kappa + 1) - (4\kappa + 3)|c| + |c|^2/8] + |c|^3 \geq 0$$

olmasıdır. Yani, $\kappa \geq c_2$ ve

$$4\kappa^2 + 4[1 - |c|]\kappa - 3|c| + \frac{|c|^2}{8} \geq 0$$

dır. Burada $\max\{0, c_0, c_2\} = c_2$ olduğu kullanılırsa ispat tamamlanmış olur.

4.3. Genelleştirilmiş Bessel Fonksiyonunun Konvekse Yakınlığı

Teorem 4.3.1: b, p, c reel sayılar ve $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ olsun. Eğer $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4} + 1$ ve $c \neq 0$ ise $\forall z \in D$ için $Reu_p(z) > \alpha$ olur. Ayrıca, $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ ise u_p fonksiyonu D birim diskinde konvekse yakındır (Baricz 2008a).

İspat: İlk olarak $c = 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $u_p(z) \equiv 1$ ve bu nedenle $\forall z \in D$ için $Reu_p(z) > \alpha$ olur. Şimdi $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4} + 1$ ve $c \neq 0$ olduğunu varsayalım. $h: D \rightarrow \mathbb{C}$,

$$h(z) = \frac{u_p(z) - \alpha}{(1 - \alpha)}$$

fonksiyonu tanımlansın. u_p fonksiyonu (3.10) denklemini sağladığından h fonksiyonu

$$4z^2 h''(z) + 4\kappa z h'(z) + cz \left[h(z) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right] = 0 \quad (4.15)$$

diferansiyel denklemini sağlar. $\psi(r, s, t; z) = 4t + 4\kappa s + cz \left[r + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right]$ ve $E = \{0\}$ olduğunu kullanırsak (4.15) denkleminde $\forall z \in D$ için $\psi(h(z), zh'(z); z) \in E$ olduğu görülür. $\forall z \in D$ için $Reh(z) > 0$ eşitsizliğini ispatlamak için Lemma 3.1.7 i kullanalım. $x, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere $z = x + iy \in D$ ve $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$ için

$$Re\psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) = 4(\mu + \sigma) + 4(\kappa - 1)\sigma - c\rho y + \alpha c x / (1 - \alpha)$$

elde edilir. $\rho, \sigma, \mu, v \in \mathbb{R}$, $\mu + \sigma \leq 0$ ve $\sigma \leq -(1 + \rho^2)/2$ eşitsizliklerini sağlasın.

$$(\kappa - 1) \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4} > 0 \text{ olduğundan}$$

$$\operatorname{Re}\psi(\rho i, \sigma, \mu + vi; x + iy) \leq -2(\kappa - 1)\rho^2 - cyp - 2(\kappa - 1) + \alpha cx/(1 - \alpha)$$

eşitsizliği yazılır. $Q_1(p) = -2(\kappa - 1)\rho^2 - cyp - 2(\kappa - 1) + \alpha cx/(1 - \alpha)$ olarak alalım. Bu değer her ρ reel sayısı için kesin negatiftir; çünkü $Q_1(p)$ nin diskriminantı Δ_1 , $x^2 + y^2 < 1$ (z birim diske ait bir nokta olduğundan) ve $Q_2(x)$ nin diskriminantı Δ_2 negatif olmak üzere

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= c^2 y^2 - 16(\kappa - 1)^2 + 8\alpha cx(\kappa - 1)/(1 - \alpha) \\ &< c^2(1 - x^2) - 16(\kappa - 1)^2 + \frac{8\alpha cx(\kappa - 1)}{(1 - \alpha)} = Q_2(x) \leq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada Δ_2 ,

$$\Delta_2 = 4c^2 \left[-16 \frac{1 - 2\alpha}{(1 - \alpha)^2} (\kappa - 1)^2 + c^2 \right]$$

şeklindedir. Δ_2 nin negatif olması için gerek ve yeter şart $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4} + 1$ olmasıdır. Bundan dolayı, Lemma 3.1.7 den $\forall z \in D$ için

$$\operatorname{Re}h(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - \alpha} (u_p(z) - \alpha) \right] > 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu $\forall z \in D$ için $\operatorname{Re}u_p(z) > \alpha$ olduğu anlamına gelir.

Şimdi, $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ olduğunu varsayalım. Yukarıdaki sonuç $\forall z \in D$ için $\operatorname{Re}u_{p+1}(z) > \alpha$ olacağı anlamına gelir. Tekrar Lemma 3.1.6 kullanılarak $\forall z \in D$ için

$$\operatorname{Re} \left[\left(-\frac{4\kappa}{c} \right) u'_p(z) \right] = \operatorname{Re}u_{p+1}(z) > \alpha$$

sonucuna varılır. Bu u_p nin $\varphi(z) = -\frac{cz}{4\kappa}$ fonksiyonuna göre D birim diskinde konvekse yakını olduğu anlamına gelir.

$$-Log(1-z) \text{ ve } \frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonlarına göre konvekse yakınlığı garantileyen bazı yeter şartları verelim.

Teorem 4.3.2: $c < 0$ ve $b, p \in \mathbb{R}$ ise (3.9) deki gibi tanımlanan u_p fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sahiptir:

- a. Eğer $\kappa \geq -c/2$ ise $z \rightarrow zu_p(z)$, $-Log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve dolayısıyla D birim diskinde ünivalenttir.
- b. Eğer $\kappa \geq -3c/4$ ise $z \rightarrow zu_p(z^2)$, $\frac{1}{2}Log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve dolayısıyla D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2008a).

İspat: a.

$$f(z) = zu_p(z) = z + \sum_{n \geq 2} b_{n-1}z^n$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $n \geq 2$ için $b_{n-1} > 0$ ve $2b_1 = -c/2\kappa \leq 1$ dir. $(\kappa)_n = (\kappa + n - 1)(\kappa)_{n-1}$ formülünden her $n \geq 2$ için

$$b_n = -\frac{c}{4n(\kappa + n - 1)}b_{n-1}$$

olduğu görülür. f nin $-Log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakını olduğunu ispatlamak için Lemma 3.1.13 ü kullanalım. Bunun için $\{nb_{n-1}\}_{n \geq 2}$ nin azalan bir dizi

olduğunu gösterelim. Hesaplamalar sonucunda $U_1(n) = 4n^3 + 4(\kappa - 1)n^2 + cn + c$ olmak üzere

$$nb_{n-1} - (n+1)b_n = b_{n-1} \left[n + \frac{c(n+1)}{4n(\kappa + n - 1)} \right] = \frac{b_{n-1}U_1(n)}{4n(\kappa + n - 1)}$$

bulunur. $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$, $n^2 \geq 2n - 1$ ve $8\kappa + c + 4 > 0$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} U_1(n) &\geq 4(\kappa + 2)n^2 + (c - 12)n + c + 4 \\ &\geq (8\kappa + c + 4)n - 4(\kappa + 2) + c + 4 \\ &\geq 2(2\kappa + c) \geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $n \geq 2$ için $nb_{n-1} - (n+1)b_n \geq 0$ dır. Dolayısıyla, $\{nb_{n-1}\}_{n \geq 2}$ azalan bir dizidir. Lemma 3.1.13 den f nin $-\text{Log}(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakın olduğu anlaşılır. Sonuç olarak f, D birim diskinde ünivalenttir.

b. Her $n \geq 2$ için $b_{n-1} = B_{2n-1}$ olmak üzere

$$f(z) = zu_p(z^2) = z + \sum_{n \geq 2} B_{2n-1} z^{2n-1}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Her $n \geq 2$ için $B_{2n-1} > 0$ ve $3B_3 = 3b_1 = -\frac{3c}{4\kappa} \leq 1$ elde edilir. Biz $\{(2n-1)B_{2n-1}\}_{n \geq 2}$ nin bir azalan dizi olduğunu göstermek istiyoruz. $n \geq 2$ şartını sağlayan belli bir n sayısı alalım. Buna göre, $U_2(n) = 8n^3 + 8\left(\kappa - \frac{3}{2}\right)n^2 - 4\left(\kappa - \frac{c}{2} - 1\right)n + c$ olmak üzere

$$(2n-1)B_{2n-1} - (2n+1)B_{2n+1} = \frac{B_{2n-1}U_2(n)}{4n(\kappa + n - 1)}$$

bulunur. $n^3 \geq 3n^2 - 3n + 1$ ve $n^2 \geq 2n - 1$ eşitsizlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
U_2(n) &\geq 8\left(\kappa + \frac{3}{2}\right)n^2 - 4\left(\kappa - \frac{c}{2} + 5\right)n + c + 8 \\
&\geq 12\left(\kappa - \frac{c}{6} + \frac{1}{3}\right)n - 8\left(\kappa + \frac{3}{2}\right) + c + 8 \\
&\geq 4\left(\kappa + \frac{3c}{4}\right) \geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\{(2n-1)B_{2n-1}\}_{n \geq 2}$ azalan bir dizidir. Yani $z \rightarrow \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ D de konvekstir. Bu yüzden Lemma 3.1.11 uygulanarak istenen sonuca ulaşılır.

Özel olarak $c = -1$ ve $b = 1$ ise p . mertebeden birinci çeşit normalize edilmiş modifiye Bessel fonksiyonlarının konvekse yakınlığı için aşağıdaki yeter şartlar elde edilir.

Sonuç 4.3.3: Eğer $p \geq -1/2$ ise $z \rightarrow z\mathfrak{S}_p(\sqrt{z})$ fonksiyonu $-\text{Log}(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve dolayısıyla D birim diskinde ünivalenttir. Ayrıca, $p \geq -1/4$ ise $z \rightarrow z\mathfrak{S}_p(z)$ fonksiyonu $\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve sonuç olarak D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2008a).

$\cosh$ ve $\sinh$ gibi temel fonksiyonlar ile ifade edilebilen Bessel fonksiyonları göz önüne alınırsa aşağıdaki yakın konveks fonksiyon örnekleri elde edilebilir.

Örnek 4.3.4: a. $\sqrt{z}\sinh\sqrt{z}$ ve $z\cosh\sqrt{z}$ fonksiyonları $-\text{Log}(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır; çünkü $z\mathfrak{S}_{-\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}z^{\frac{5}{4}}I_{-\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = z\cosh\sqrt{z}$ ve $z\mathfrak{S}_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}z^{\frac{3}{4}}I_{\frac{1}{2}}\left(z^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{z}\sinh\sqrt{z}$ fonksiyonları Teorem 4.3.2 nin birinci kısmındaki şartı sağlar.

b. $zJ_0(iz)$ fonksiyonu $\frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır; çünkü $zJ_0(iz) = zI_0(z) = z\mathfrak{S}_0(z)$ fonksiyonu Teorem 4.3.2 nin ikinci kısmındaki şartı sağlar.

5. SONUÇLAR

Bu bölümde araştırma bulgularında yer alan teoremlerin ifadelerine yer verilmiştir.

Teorem 5.1 : $\forall n \geq 0$ b_n (3.8) şeklinde tanımlanmak üzere $u_p(z) = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot z^n$ genelleştirilmiş ve normalize edilmiş bessel fonksiyonu olsun. $b_1 > 0$, $\forall z \in D$ ve bazı sabit $\beta \geq 0$ için u_p nin

$$|u'_p(z) - b_1|^{1-\beta} \left| \frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right| < (b_1)^{1-\beta} \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$$

şartını sağladığını kabul edelim. O halde u_p D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2008b).

Teorem 5.2: $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + 1$ olmak üzere $b, p, c \in \mathbb{R}$ ise $\forall z \in D$ için $Re u_p(z) > 0$ olur. Ayrıca, $\kappa \geq \frac{|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ ise u_p , D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2002).

Teorem 5.3: $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + 1$ olmak üzere $b, p, c \in \mathbb{C}$ ise $\forall z \in D$ için $Re u_p(z) > 0$ olur. Ayrıca, $\kappa \geq \frac{|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ ise u_p , D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2006a).

Teorem 5.4: $u_p(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-\frac{c}{4})^n}{(k)_n} \frac{z^n}{n!}$ şeklinde tanımlı u_p fonksiyon $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $z \in D$ olmak üzere

$$\left| \frac{zu'_p(z)}{u_p(z)} \right| < 1 - \alpha$$

şartını sağlıyorsa $zu_p \in S^*(\alpha)$ dır (Baricz 2008b).

Teorem 5.5 : (3.9) şeklinde tanımlı $u_p(z)$ fonksiyonu $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $z \in D$ olmak üzere

$$\left| \frac{zu''_p(z)}{u'_p(z)} \right| < \frac{1 - \frac{3\alpha}{2} + \alpha^2}{1 - \alpha}$$

şartını sağlıyorsa u_p fonksiyonu 1 e göre α .mertebeden yıldızl bir fonksiyondur (Baricz 2008b).

Teorem 5.6: $\alpha \in [0, 1/2], c \neq 0$ ve $\forall z \in D$ için ;

$$\left| \frac{zu'_{p+1}(z)}{u_{+1p}(z)} \right| < 1 - \alpha$$

şartını sağlıyorsa $u_p \in C(\alpha)$ olur (Baricz 2008b).

Teorem 5.7: $b, p, c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0$ olsun. Sırasıyla, (3.7) ve (3.9) daki gibi tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (a) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{1}{2}$ ise u_p fonksiyonu konvektir.
- (b) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{3}{2}$ ise zu_p fonksiyonu yıldızlıdır.
- (c) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{2} + 1$ ise zu_p fonksiyonu 1/2.mertebeden yıldızlıdır.
- (d) Eğer $\kappa \geq \frac{|c|}{2} + 1$ ise $z^{1-p}w_p$ fonksiyonu yıldızlıdır (Baricz 2002).

Teorem 5.8: $b, p, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0$ olsun. Sırasıyla, (3.7) ve (3.9) daki gibi tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- a. Eğer $Re\kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{(Im\kappa)^2}{6} + \frac{1}{2}$ ise u_p fonksiyonu konvektir.

- b. Eğer $Re\kappa \geq \frac{|c|}{4} + \frac{(Im\kappa)^2}{6} + \frac{3}{2}$ ise zu_p fonksiyonu yıldızlıdır.
- c. Eğer $Re\kappa \geq \frac{|c|}{2} + \frac{(Im\kappa)^2}{4} + 1$ ise zu_p fonksiyonu $1/2$. mertebeden yıldızlıdır.
- d. Eğer $Re\kappa \geq \frac{|c|}{2} + \frac{(Im\kappa)^2}{4} + 1$ ise $z^{1-p}w_p$ fonksiyonu yıldızlıdır (Baricz 2006a).

Teorem 5.9: $c \neq 0$ ve $4\alpha^2 + (|c| - 6)\alpha + 2 \geq 0$ olmak üzere b, p, c reel sayılar ve $\alpha \in [0, 1)$ olsun. Buna göre, sırasıyla, (3.7) ve (3.9) daki gibi tanımlanan w_p ve u_p fonksiyonları aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- a. Eğer $\kappa \geq \frac{|c|+2(1-\alpha)(1-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ise u_p fonksiyonu α . mertebeden konvektir. Ayrıca, $\forall z \in D$ için $Re[u'_p(z)]^{\frac{1}{2(1-\alpha)}}$ elde edilir.
- b. Eğer $\kappa \geq \frac{|c|+2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ise zu_p ve $z \left[-\frac{c}{4(\kappa-1)} u_p(z) \right]^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$ fonksiyonu α . mertebeden yıldızlıdır.
- c. Eğer $\kappa \geq \frac{|c|+2(1-\alpha)(3-2\alpha)}{4(1-\alpha)}$ ve $\alpha \neq 0$ ise $z^{\frac{2(1-\alpha)-p}{2\alpha}} w_p \left(z^{\frac{1}{2\alpha}} \right)$ fonksiyonu yıldızlıdır (Baricz 2008a).

Teorem 5.10: b, p, c reel sayılar ve $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ olsun. Eğer $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4} + 1$ ve $c \neq 0$ ise $\forall z \in D$ için $Reu_p(z) > \alpha$ olur. Ayrıca, $\kappa \geq \frac{(1-\alpha)(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}|c|}{4}$ ve $c \neq 0$ ise u_p fonksiyonu D birim diskinde konvekse yakındır (Baricz 2008a) .

Teorem 5.11: $c < 0$ ve $b, p \in \mathbb{R}$ ise (3.9) deki gibi tanımlanan u_p fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sahiptir:

- a. Eğer $\kappa \geq -c/2$ ise $z \rightarrow zu_p(z)$, $-Log(1-z)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve dolayısıyla D birim diskinde ünivalenttir.

b. Eğer $\kappa \geq -3c/4$ ise $z \rightarrow zu_p(z^2)$, $\frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ fonksiyonuna göre konvekse yakındır ve dolayısıyla D birim diskinde ünivalenttir (Baricz 2008a).

Teorem 5.12: $\kappa \geq c_1$ ve $\kappa \neq 0$ olmak üzere $p, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in$ olsun. Buna göre, u_p fonksiyonu D birim diskinde konveks ve 1'e göre $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızlıdır. Ayrıca, $z \rightarrow zu_{p+1}$ fonksiyonu D de yıldızlıdır (Baricz et al. 2010).

Teorem 5.13: $\kappa \geq c_2$ olmak üzere $p, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in$ olsun. Buna göre, $z \rightarrow zu_p$ fonksiyonu D de $\frac{1}{2}$ inci mertebeden yıldızlıdır ve sonuç olarak $z \rightarrow z^{1-p}w_p$ fonksiyonu D de yıldızlıdır (Baricz et al. 2010).

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A., 1965. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables. Dover publications, New York.
- Arif, M. and Raza, M., 2011. Some properties of an integral operator defined by Bessel functions, *Acta universitatis apulensis*, No.26 ,pp.69-74.
- Baricz, A. and Ponnusamy S., 2010. Starlikeness and convexity of generalized Bessel functions, *Int. Trans. Spec. Func.*, vol. 21, no. 9, 641-653.
- Baricz, A., 1994. Generalized Bessel functions of the first kind. 203, Romania.
- Baricz, A., 2006a. Geometric properties of generalized Bessel functions of complex order. *Mathematica* 48(71) (1), 13-18.
- Baricz, A., 2006b. Bessel transforms and Hardy space of generalized Bessel functions. *Mathematica* 48(71) (2), 127-136.
- Baricz, A., 2008a. Geometric properties of generalized Bessel functions. *Publ. Math. Debrecen* 73, 155-178.
- Baricz, A., 2008b. Generalized Bessel Functions of the First Kind. Ph. D. Thesis, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca.
- Baricz, A., 2002. Applications of the admissible functions method for some differential equations. *Pure Math. Appl.* 13(4), 433-440.
- Baricz, A., Kupon, P.A. and Szasz, R., 2012. The Radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first of kind. *Proc.Amer.Soc.*142, no.6, 2019-2025.
- Baricz, A., Deniz, E., Çağlar, M., Orhan, H.,2015. Differential subordinations involving generalized Bessel functions. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 38, no: 3, 1255-128
- Conway, J.B., 1973. Functions of one complex variable AMS Subject Classification. Springer-Verlag, 313 p, New York.
- Dönmez, A., 1999. Karmaşık Fonksiyonlar Kuramı. İkinci Baskı, Beta yayınları, İstanbul.
- Duren, P., 1983. Univalent Functions, Springer, New York.
- Deniz, E., Orhan, H. and Srivastava, H.M., 2011. Some sufficient conditions for univalence of certain families of integral operators involving generalized Bessel functions, *Taiwanese J. Math.*, vol.15, no: 2, 883-917.
- Deniz, E., 2013. Convexity of integral operators involving generalized Bessel functions, *Int. Trans. Spec. Func.* 24, no: 3, 201-216.
- Frasin, B.A., 2010. Sufficient conditions for integral operator defined By Bessel functions, *Journal of mathematical inequalities*, vol. 4, Number 2, 301-306.
- Goodman, A.W., 1983a. Univalent Functions. Mariner Publ. Co., Tampa, FI, vol. I, 246p, Florida, USA.
- Goodman, A.W., 1983b. Univalent Functions. Mariner Publ. Co., Tampa, FI, vol, II, 311p, Florida, USA.
- Alexander, J.W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions. *Ann. of Math.* 17, 12-29.
- Jack, I.S., 1971. Functions starlike and convex of order α . *J. London. Math. Soc.* 3(2), 469-474.
- Kaplan, W., 1952. Close to convex schlicht functions., *Michigan Math. J.*, 2 (1), 169-185.

- Mondal, S.R. and Swaminathan A., 2012. Geometric properties of generalized Bessel functions. *Bull.Malays.Math.Sci.Soc.*(2) 35(1), 179-194.
- Owa, S. and Altintas, O., 1988. On subclasses of univalent functions with negative coefficients, *Pusan Kyongnam Math. J.* 4, 41-56.
- Owa, S. and Srivastava, H.M., 1987. Univalent and starlike generalized hypergeometric functions. *Canad. J. Math.* 39(5), 1057-1077.
- Ozaki, S., 1935. On the theory of multivalent functions. *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A* 40(2), 167-188.
- Palka, D., 1991. *An introduction to complex function theory.* Springer, New York.
- Ponnusamy, S., and Silverman, H., 2006. *Complex variables with applications,* Birkhauser . Boston.
- S.S. Miller and P.T. Mocanu, 1987. Differential subordinations and inequalities in the complex plane. *J. Differential Equations* 67, 199-211.
- S.S. Miller and P.T. Mocanu, 2000. *Differential subordinations. Theory and applications.* M. Dekker Inc., New York –Basel.
- Selinger, V., 1995. Geometric properties of normalized Bessel functions., *Pure Math. Appl.* 6, 273-277.
- Silverman, H., 1975. Univalent functions with negative coefficients, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 51, 109-116.
- Şahin, R., 2011. Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar. Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara Üniversitesi.
- Watson, G.N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılı Erzurum doğumlu olan Erhan ÇESİMAN, ilk, orta ve lise öğrenimini Erzurum'da tamamladı. 2008 yılında kayıt yaptırdığı Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2012 yılında iyi bir derece yaparak mezun oldu. 2013 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitime başladı ve halen yüksek lisans eğitime devam etmektedir. 2014 yılında Milli Eğitim Bakanlığında Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığında görevine devam etmekte olup, evlidir.