

EĞRİ VE YÜZEYLERİN KİNEMATİK GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Yasemin KEMER

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Aralık – 2015

EĞRİ VE YÜZEYLERİN KİNEMATİK GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Yasemin KEMER

DUMLUPINAR ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliği Uyarınca

Matematik Anabilim Dalında

DOKTORA TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Danışman: Prof. Dr. Erhan ATA

Aralık – 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Yasemin KEMER' in DOKTORA tezi olarak hazırladığı EĞRİ VE YÜZEYLERİN KİNEMATİK GEOMETRİSİ ÜZERİNE başlıklı bu çalışma, jürimizce Dumlupınar Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

25/12/2015

Üye : Prof. Dr. Erhan ATA

Üye : Doç. Dr. Cumali EKİCİ

Üye : Doç. Dr. Özcan GELİŞGEN

Üye : Doç. Dr. Ayşe Funda YALINIZ

Üye : Doç. Dr. Mine TURAN

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun/...../..... gün ve sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Hasan GÖÇMEZ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Bu tezin hazırlanmasında akademik kurallara riayet ettiğimizi, özgün bir çalışma olduğunu ve yapılan tez çalışmasının bilimsel etik ilke ve kurallara uygun olduğunu, çalışma kapsamında teze ait olmayan veriler için kaynak gösterildiğini ve kaynaklar dizininde belirtildiğini, Yüksek Öğretim Kurulu tarafından kullanılmak üzere önerilen ve Dumlupınar Üniversitesi tarafından kullanılan İntihal Programı ile tarandığını ve benzerlik oranının %11 çıktığını beyan ederiz. Aykırı bir durum ortaya çıktığı takdirde tüm hukuki sonuçlara razı olduğumuzu taahhüt ederiz.

Prof. Dr. Erhan ATA

Yasemin KEMER

EĞRİ VE YÜZEYLERİN KİNEMATİK GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Yasemin KEMER

Matematik Bölümü, Doktora Tezi, 2015

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Erhan ATA

ÖZET

Bu tezin giriş bölümünde literatürde konu ile ilgili yapılan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, dual sayılar, kuaterniyonlar ve dual vektörler ile ilgili temel kavramlar ve bazı önemli teoremler yer almaktadır.

Üçüncü bölümde, vida operatöründen bahsedilmiş ve ardından vida hareketinin özel durumları olan öteleme ve dönme hareketleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde, eğri ve yüzeyler teorisinde yer alan ve çalışmanın devamında kullanılacak olan temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde vida yüzeyleri tanıtılmış, vida yüzeylerine ait bazı özelliklerden bahsedilmiştir. Ardından bir yüzey üzerinde yer alan eğrilerin vida yüzeyi üzerindeki görüntülerinin Darboux ve Frenet çatıları elde edilmiştir. Bölümün son kısmında ise vida yüzeylerine ait bir örneğe yer verilmiştir.

Altıncı bölümde ise sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyleri tanıtılmıştır. Sonrasında sabit sırt uzaklıklı vida yüzeylerinin şekil operatörü hesaplanmış, bundan yararlanarak bu yüzeylerin ortalama eğrilikleri ve Gauss eğrilikleri elde edilmiştir. Son olarak sabit sırt uzaklıklı vida yüzeylerine ait bir örnek ile bölüm tamamlanmıştır.

Son bölümde yapılanlar özetlenmiş ve konu ile ilgili çalışmak isteyenlere önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Eğrilikler, Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi, Şekil operatörü, Vida yüzeyi.

ON KINEMATICAL GEOMETRY OF CURVES AND SURFACES

Yasemin KEMER

Department of Mathematics, Ph. D. Thesis, 2015

Thesis Supervisor: Prof. Dr. Erhan ATA

SUMMARY

At first part of this thesis, it is mentioned the studies in literature about this subject.

Second chapter consists of fundamental concepts and some important theorems about dual numbers, quaternions and dual vectors.

In third chapter, it is mentioned screw motion and then it is given that translation and rotation motions which are the special cases of the screw motion.

Forth chapter deals with the fundamental concepts and theorems which are situated in curve and surface theory and are needed for this study.

In fifth chapter of this thesis we define screw surface and give some characteristics of these kind of surfaces. Then, it is obtained that Darboux frame and Frenet frame of a curve's image on screw surface of the surface on which the curve lies on. At the final part of this chapter, an example of screw surfaces is given.

At sixth chapter, we give the definition of screw surfaces at a constant distance from the edge of regression of a surface M . After that, we compute the shape operator screw surfaces at a constant distance from the edge of regression of a surface M and by using this we calculate Gaussian curvature and mean curvature of these surfaces. Finally, we complete this chapter with an example of screw surfaces at a constant distance from the edge of regression.

Final chapter consists of a summary of the study and some advices for authors who want to study on this subject.

Keywords: Curvatures, Screw surface, Screw surfaces at a constant distance from the edge of regression, Shape operator.

TEŞEKKÜR

Çalışmamı hazırlarken kıymetli zamanını bana ayırarak katkılarıyla beni yönlendiren danışman hocam Prof. Dr. Erhan ATA' ya, çalışmamın her aşamasında yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Cumali EKİCİ' ye teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca manevi desteklerini her an yanımda hissettiğim aileme, bu süreç boyunca yanımda olan sevgili Emrah YILDIRIM' a ve motivasyon desteklerinden dolayı değerli hocam Doç. Dr. Mine TURAN' a ve Koray YILMAZ' a teşekkürü bir borç bilirim.

Yasemin KEMER

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET.....	v
SUMMARY.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. D- MODÜL VE KUATERNİYONLAR TEORİSİ.....	2
2.1. Dual Sayılar	2
2.2. Kuaterniyonlar.....	4
2.3. Dual Vektörler ve D-Modül.....	5
2.4. Dual Kuaterniyonlar.....	9
3. VİDA HAREKETİ.....	12
3.1. Vida Operatörü.....	12
3.2. Dönme Hareketi.....	13
3.3. Öteleme Hareketi.....	14
4. EĞRİ VE YÜZEYLER TEORİSİ.....	15
4.1. $\mathbb{R}^3$ Uzayında Eğri ve Yüzeyler.....	15
4.2. Paralel Yüzeyler.....	20
4.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler.....	21
5. VİDA YÜZEYLERİ.....	24
5.1 Vida Yüzeyinin Tanımı.....	24
5.2. Vida Yüzeylerinin Bazı Özellikleri.....	27
5.3. Bir Eğrinin Vida Yüzeyi Üzerindeki Resminin Darboux Çatısı	35
5.4. Bir Eğrinin Vida Yüzeyi Üzerindeki Resminin Frenet Çatısı.....	41
5.5. Vida Yüzeylerine Ait Bir Örnek.....	46

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
6. SABİT SIRT UZAKLIKLI VİDA YÜZEYLERİ.....	51
6.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeyinin Tanımı.....	51
6.2. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerinin Şekil Operatörü.....	56
6.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerinin Ortalama Eğriliği.....	71
6.4. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerinin Gauss Eğriliği.....	75
6.5. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerine Ait Bir Örnek.....	81
7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	84
KAYNAKLAR DİZİNİ.....	85
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sekil</u>	<u>Sayfa</u>
3.1. Vida hareketi.....	13
3.2. Dönme hareketi.....	13
3.3. Öteleme hareketi.....	14
5.1. Kuaterniyonun noktaya etkisi.....	25
5.2. Katı cisim hareketinin noktaya etkisi.....	26
5.3. Sekizde bir birim küre yüzeyi ve vida yüzeyi.....	49
6.1. Sekizde bir birim küre yüzeyi ve sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi.....	82

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
E^3	Üç boyutlu Öklid uzayı
f_*	f dönüşümünün türev dönüşümü
$T_p(M)$	M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin uzayı
$\chi(M)$	M manifoldunun vektör alanlarının uzayı
S	Şekil operatörü
K	Gauss eğriliği
H	Ortalama eğrilik
M^g	Vida yüzeyi
U^g	Vida yüzeyinin birim normal vektör alanı
S^g	Vida yüzeyinin şekil operatörü
K^g	Vida yüzeyinin Gauss eğriliği
H^g	Vida yüzeyinin ortalama eğriliği
M^v	Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi
U^v	Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin birim normal vektör alanı
S^v	Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin şekil operatörü
K^v	Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin Gauss eğriliği
H^v	Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin ortalama eğriliği

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometride Blaschke (1949), Bishop (1975), Bottema ve Roth (1979), Mc Carthy (1990) gibi çalışmalar eğriler teorisi için önemli katkılar sağlamıştır.

Hareket geometrisinde, E-Study (1903), dual birim küre üzerindeki noktalar ile $\mathbb{R}^3$ teki yönlü doğruların birebir eşlenebileceğini göstermiştir. Hanson (1994), reel kuaterniyonlar yardımı ile Serret-Frenet ve Paralel dönüşüm çatılarını ortaya koymuştur. Öztürk vd. (2010), Andrew J. Hanson' un yukarıda bahsedilen çalışmasından esinlenerek dual kuaterniyonlar üzerinde benzer uygulamaları yapmıştır. Diğer taraftan, Baky (2003), bir regle yüzey üzerinde Blaschke yaklaşımını kullanarak birim küre üzerinde bir eğri gibi çalışılabileceğini göstermiştir. Bu yaklaşım yardımıyla Yaylı ve Saraçoğlu (2012), birim dual küre üzerindeki bir α eğrisinin T, N, B Frenet vektörleri ile üretilen regle yüzeylerini ve bu regle yüzeylere karşılık gelen dual eğri gösterimlerini elde etmişlerdir.

Paralel yüzeyler de diferensiyel geometride ilgi çeken konulardan biridir. Eisenhart (1909) kitabında paralel yüzeylere bir bölüm ayırmıştır. Savcı (2011), bir yüzey üzerindeki eğrinin yüzeyin paralel yüzeyi üzerindeki görüntüsünün Darboux ve Frenet çatıları ile bazı eğriliklerini hesaplamıştır. Ayrıca regle Weingarten yüzeyler üzerinde çalışmıştır. Dede vd. (2012) Galile uzayında paralel yüzeylerin eğrilikleri arasındaki bağlantıları incelemiştir. Ünlütürk ve Özsağlam (2013) ise Minkowski 3-uzayında paralel yüzeylerin bazı geometrik özellikleri üzerinde çalışmışlardır. Kızıltuğ vd. (2013) çalışması paralel yüzeyler üzerinde yer alan eğrileri incelemektedir.

Tarakçı ve Hacısalıhoğlu (2004) sabit sırt uzaklıklı yüzeyleri tanıtmış ve bu yüzeylerin şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği gibi kavramlarını hesaplamıştır. Aktan vd. (2006) da bu yüzeylerle ilgilenmiş ve bu yüzeyler için Euler Teoremi, Dupin göstergesi, konjuge tanjant vektörleri incelemişlerdir. Sağlam ve Kalkan (2010) ise Minkowski 3-uzayında sabit sırt uzaklıklı yüzeyler üzerinde çalışmışlardır. Yine Sağlam ve Kalkan (2013) bu kez Minkowski 3-uzayında sabit sırt uzaklıklı yüzeylerin Dupin göstergesini ve bu yüzeyler için Euler Teoremini vermişlerdir.

2. D-MODÜL VE KUATERNİYONLAR TEORİSİ

Bu bölümde ilk kez Clifford (1873) tarafından tanımlanan dual sayılar, Hamilton (1843) tarafından tanıtılan kuaterniyonlar, dual vektörler ve dual kuaterniyonlar ile ilgili temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Dual Sayılar

Reel sayılar kümesi $(+)$ toplama ve $(\cdot)$ çarpma işlemlerine göre bir cisimdir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.1. Herhangi $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir $A = (a, a^*)$ ikilisine bir sıralı ikili denir. Bu şekilde tanımlanan sıralı ikililerin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi D ile gösterilsin.

$$D = \{(a, a^*) : a, a^* \in \mathbb{R}\}$$

üzerinde iki iç işlem aşağıdaki şekilde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983):

Tanım 2.1.2. $A = (a, a^*)$ ve $B = (b, b^*)$ olmak üzere $\oplus: D \times D \rightarrow D$ iç işlemi

$$A \oplus B = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$$

biçiminde tanımlanır ve D deki toplama olarak adlandırılır.

$\odot: D \times D \rightarrow D$ iç işlemi ise

$$A \odot B = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (a \cdot b, ab^* + a^*b)$$

biçiminde tanımlanır ve D deki çarpma olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.3. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere

$$D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

kümesi üzerinde toplama ve çarpma işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise D kümesine dual sayılar sistemi ve herhangi bir $(a, a^*) \in D$ elemanına bir dual sayı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.1.1. $(D, \oplus, \odot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bu halkanın toplamaya göre birim elemanı $(0, 0)$, çarpmaya göre birim elemanı ise $(1, 0)$ dir.

Teorem 2.1.2. $(D, \oplus, \odot)$ üçlüsü bir cisim değildir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.4. $A \neq (0, a^*)$ ve $X = (x, x^*)$ olmak üzere

$$A \odot X = B$$

denkleminin bir tek çözümü vardır. Gerçekten Tanım 2.1.2. den

$$(ax, ax^* + a^*x) = (b, b^*)$$

bulunur. Buradan

$$X = \left(\frac{b}{a}, \frac{ab^* - a^*b}{a^2} \right)$$

ve dolayısıyla $X \in D$ elde edilir. X dual sayısına, B nin A ya bölümü denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.1.3. Dual sayılar halkası, $\mathbb{R}$ reel sayılar cismine izomorf bir alt kümeyi, alt cisim olarak kapsar (Hacısalıhoğlu, 1983).

Bu teoremin bir sonucu olarak, reel sayılar kümesine izomorf olan,

$$\{(a, 0) : a, 0 \in \mathbb{R}\}$$

dual sayılar kümesinin her bir elemanı, izomorf olan reel sayı ile gösterilebilir.

Kısaca,

$$(a, 0) \cong a, \quad (1, 0) \cong 1$$

olarak alınabilir. Genel olarak bu notasyonu kullanacağız ve ayrıca " $\oplus$ " ve " $\odot$ " işlemleri yerine "+" ve "." işaretlerini tercih edeceğiz.

D halkasında, $(0, 1)$ dual sayısı dual birim olarak adlandırılır ve

$$\varepsilon = (0, 1)$$

ile gösterilir. Çarpma işleminin tanımına göre,

$$\varepsilon \odot \varepsilon = \varepsilon^2 = (0, 0) \cong 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 2.1.4. Her $A = (a, a^*)$ dual sayısı,

$$A = a + \varepsilon a^*, \quad \varepsilon = (0, 1)$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.5. Bir $A = a + \varepsilon a^* \in D$ dual sayısındaki a reel sayısına A nın reel kısmı, a^* reel sayısına da A nın dual kısmı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.6. $(0, 1) = 1$ dual sayısına D deki çarpma işleminin birim elemanı veya D deki reel birim denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.1.5. İki dual sayının çarpımı sıfır ise, çarpanlardan biri sıfır olmak zorunda değildir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.1.7. Herhangi $X = x + \varepsilon x^*$ dual sayısının modül değeri diye $|x|$ reel sayısına denir

ve

$$\begin{aligned} |X| &= |x + \varepsilon x^*| \\ &= |x| \end{aligned}$$

ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.2 Kuaterniyonlar

Bu bölümde kuaterniyonlar ve kuaterniyonlar üzerinde işlemler yer almaktadır.

Tanım 2.2.1. Bir kuaterniyon $q = a + bi + cj + dk$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ biçiminde ifade edilir. Burada $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ dir. Tüm kuaterniyonların kümesi H ile gösterilir.

q kuaterniyonu reel (skalar) ve imajiner (vektörel) olmak üzere iki kısımdan oluşur. q kuaterniyonunun reel kısmı $\text{Re } q = a$ ve vektörel kısmı ise $\text{Im } q = bi + cj + dk$ dir. Buna göre $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu $q = \text{Re } q + \text{Im } q$ biçiminde de yazılabilir.

Tanım 2.2.2. Bir q kuaterniyonu için $\text{Re } q = 0$ ise $q = bi + cj + dk$ olur. Bu durumda q kuaterniyonuna vektör veya kuaterniyonik vektör adı verilir (Parker, 2009).

Tanım 2.2.3. Bir $q = a + bi + cj + dk = \text{Re } q + \text{Im } q$ kuaterniyonunun eşleniği diye

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk = \text{Re } q - \text{Im } q$$

kuaterniyonuna denir (Parker, 2009).

Tanım 2.2.4. Herhangi iki $q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ kuaterniyonlarının toplam ve farkı

$$\begin{aligned} p + q &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \\ &= \text{Re}(p + q) + \text{Im}(p + q) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} q - p &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i + (c_1 - c_2)j + (d_1 - d_2)k \\ &= \text{Re}(q - p) + \text{Im}(q - p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.2.5. Bir $q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonunun bir $\lambda \in \mathbb{R}$ skaları ile çarpımı

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times H &\rightarrow H \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda.q = \lambda(a + bi + cj + dk) \\ &= \lambda a + \lambda bi + \lambda cj + \lambda dk \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $\lambda.q = q.\lambda$ dir.

Tanım 2.2.6. Herhangi iki $q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ ve $p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ kuaterniyonlarının kuaterniyon çarpımı

$$\cdot: H \times H \rightarrow H$$

$$\begin{aligned} (q, p) \rightarrow q \cdot p &= (a_1 + b_1 \mathbf{i} + c_1 \mathbf{j} + d_1 \mathbf{k})(a_2 + b_2 \mathbf{i} + c_2 \mathbf{j} + d_2 \mathbf{k}) \\ &= a_1 a_2 - (b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2) \mathbf{i} \\ &\quad + (a_1 c_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2 - b_1 d_2) \mathbf{j} + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2) \mathbf{k} \\ &= \operatorname{Re} q \operatorname{Re} p - \langle \operatorname{Im} q, \operatorname{Im} p \rangle + \operatorname{Re} q \operatorname{Im} p + \operatorname{Re} p \operatorname{Im} q + \operatorname{Im} q \wedge \operatorname{Im} p \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Hacısalihoglu, 1983).

2.3 Dual Vektörler ve D-Modül

D dual sayılar kümesi olmak üzere

$$D \times D \times D = D^3 = \{(A_1, A_2, A_3) : A_1, A_2, A_3 \in D\}$$

kümesinin her bir elemanı bir büyük harf ile gösterilirse, $A \in D^3$ için $A = (A_1, A_2, A_3)$ veya $A = (A_i); (1 \leq i \leq 3)$ notasyonlarından birisi kullanılabilir.

Tanım 2.3.1. Her $A = (A_i), B = (B_i) \in D^3$ için, $(i = 1, 2, 3)$,

$$+ : D^3 \times D^3 \rightarrow D^3$$

iç işlemi

$$A + B = (A_i + B_i)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $A + B$ ye D^3 de A ile B nin toplamı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.2. Herhangi $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $A \in D^3$ elemanları için,

$$\cdot: \mathbb{R} \times D^3 \rightarrow D^3$$

dış işlemi

$$\lambda \cdot A = (\lambda A_i), \quad (i = 1, 2, 3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada λA ya A nın λ skaları ile çarpımı denir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.3.1. $(D^3, +, \cdot)$ sistemi D halkası üzerinde bir modüldür (Hacısalihoglu, 1983).

Tanım 2.3.3. $(D^3, +, \cdot)$ üçlüsüne D -Modül ve bunun elemanları olan sıralı dual üçlülere, dual vektörler denir ve $\vec{A} = (A_i)$ şeklinde gösterilir (Hacısalihoglu, 1983).

Teorem 2.3.2. $\mathbb{R}^3$ üç boyutlu reel vektör uzayı olmak üzere herhangi $\vec{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ için D –Modül de her bir $\vec{A}$ dual vektörü

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \quad , \quad \varepsilon = (0,1) \in D$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 2.1.3 ile eş anlamlı olarak; $\mathbb{R}^3$ vektör uzayı, D –modülün elemanları $(\vec{a}, 0) = \vec{a} + \varepsilon \vec{0}$ şeklinde olan alt kümesine izomorftur.

D –modülün toplamaya göre birim elemanı,

$$\vec{0} = \vec{0} + \varepsilon \vec{0}$$

şeklinde gösterilir. Buna sıfır dual vektörü denir.

$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^*$ dual vektörlerinin eşitliği,

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} \text{ ve } \vec{a}^* = \vec{b}^*$$

ile verilir.

Tanım 2.3.4. Herhangi $\vec{A}, \vec{B} \in D$ –modül için,

$$\begin{aligned} \langle, \rangle : D^3 \times D^3 &\rightarrow D \\ (\vec{A}, \vec{B}) &\rightarrow \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle) \end{aligned}$$

ile tanımlanan $\langle, \rangle$ fonksiyonuna D –modülde bir iç çarpım fonksiyonu denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.5. Bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörünün normu diye

$$\|\vec{A}\| = \left(\langle \vec{A}, \vec{A} \rangle \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\|\vec{a}\|, \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|} \right), \vec{a} \neq \vec{0}$$

dual sayısına denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.6. Normu reel birime karşılık gelen (yani normu $(1,0)$ dual sayısı olan) dual vektöre birim dual vektör denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.3. Herhangi bir $\vec{A} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}^* \right) \in D$ –modül olmak üzere,

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

bir birim dual vektördür (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.7. Herhangi bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^* \in D$ -modül olmak üzere,

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$$

birim dual vektörüne, $\vec{A}$ dual vektörünün eksenini denir.

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{a} \neq \vec{0} \text{ dual vektörünün eksenini, } k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2} \text{ olmak üzere,}$$

$$\vec{A}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \varepsilon \frac{\vec{a}^* - k\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$

şeklinde yazılabilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.8. D -Modülde bir $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$ dual vektörü için,

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

sayısına, $\vec{A}$ dual vektörünün adımı veya yükselişi denir.

Bu tanımlamalardan sonra, bir $\vec{A}$ dual vektörü

$$\vec{A} = \|\vec{A}\| (1 + \varepsilon k) \vec{A}_0$$

şeklinde yazılabilir. Reel kısmı sıfırdan farklı olan dual vektörlere has dual vektörler adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.9. $K = \left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^* : \|\vec{X}\| = (1, 0); \vec{x}, \vec{x}^* \in \mathbb{R}^3 \right\}$ kümesine D -modülde birim dual küre denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.4. (E. Study): Herhangi $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*, \vec{a} \neq \vec{0}$ dual vektörü için D -modülde denklemi,

$$\|\vec{A}\| = (1, 0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.

Birim dual küre üzerindeki bir A dual noktasını merkeze birleştiren birim dual yer vektörü,

$$\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a}^*$$

ise Teorem 2.3.4 den dolayı, çizgiler uzayında bir tek yönlü doğruya karşılık gelir. Burada

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ vektörü, bu yönlü doğrunun doğrultman vektörü, $\vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ vektörü ise, X bu doğrunun üzerinde bir nokta ve O bir başlangıç noktası olmak üzere,

$$\vec{a}^* = \overrightarrow{OX} \wedge \vec{a}$$

ile belirlenen bir moment vektörüdür. Bu vektöre, çizgiler uzayındaki doğrunun başlangıca göre vektörel momenti denir ve bu vektör orijine göre doğrunun yerini belirler (Hacısalıhoğlu, 1983).

Tanım 2.3.10. (Taylor Açılımı): D dual sayılar halkası olmak üzere $X = x + \varepsilon x^* \in D$ için

$$f(X) = f(X_0) + \frac{X-X_0}{1!} f'(X_0) + \frac{(X-X_0)^2}{2!} f''(X_0) + \dots + \frac{(X-X_0)^n}{n!} f^{(n)}(X_0) + \dots$$

serisine f dual fonksiyonunun $X_0 \in D$ noktasındaki Taylor açılımı denir.

Bu tanım gereğince, f dual fonksiyonunun $X_0 = 0$ noktasındaki Taylor açılımı,

$$f(x + \varepsilon x^*) = f(x) + \varepsilon x^* f'(x)$$

şeklini alır. O halde, $\cos(x + \varepsilon x^*)$, $\sin(x + \varepsilon x^*)$, $\sinh(x + \varepsilon x^*)$ ve $\cosh(x + \varepsilon x^*)$ dual fonksiyonlarının $0 = (0, 0)$ dual noktasındaki Taylor açılımları:

$$\cos(x + \varepsilon x^*) = \cos x - \varepsilon x^* \sin x$$

$$\sin(x + \varepsilon x^*) = \sin x + \varepsilon x^* \cos x$$

$$\sinh(x + \varepsilon x^*) = \sinh x + \varepsilon x^* \cosh x$$

$$\cosh(x + \varepsilon x^*) = \cosh x + \varepsilon x^* \sinh x$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.3.11. $D - \text{Modül}'$ de aç, $\vec{A}, \vec{B}$ birer birim dual vektör olmak üzere,

$$\cos \Phi = \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle$$

ifadesi ile verilir. $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir (Hacısalıhoğlu, 1983).

İki birim dual vektör arasındaki dual açının, $\mathbb{R}^3$ uzayındaki yönlü doğruların uzayı olan çizgiler uzayındaki anlamını araştırmak gerekirse bunun için $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin

$$\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \varepsilon (\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle)$$

iş çarpımından hareket edilsin. (E. Study) teoremi gereğince $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri $\mathbb{R}^3$ uzayında d_1 ve d_2 gibi iki yönlü doğruya karşılık gelir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon \varphi^*$ dual açısı, bunların $\mathbb{R}^3$ de temsil ettikleri d_1 ve d_2 yönlü doğrularının arasındaki φ açısı ve en kısa uzaklığı gösteren φ^* reel çiftinden oluşur.

$\overrightarrow{OA} = \vec{A}$ ve $\overrightarrow{OB} = \vec{B}$ birim dual vektörlerinin uçları D -Modül'de O merkezli birim dual kürenin A ve B dual noktalarını belirteceğinden $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ arasındaki $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi^*$ dual açısı A ve B dual noktalarından geçen dual büyük dairenin AB dual yay uzunluğu olarak düşünülebilir.

Tanım 2.3.12. Her $\vec{A}, \vec{B} \in D$ - Modül dual vektörlerinin dış çarpımı

$$\Lambda : D^3 \times D^3 \rightarrow D^3$$

şeklinde bir iç işlemdir ve

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon (\vec{a} \wedge \vec{b}^* + \vec{a}^* \wedge \vec{b})$$

olarak tanımlanır (Hacısalıhoğlu, 1983).

Teorem 2.3.5. Her $\vec{A}, \vec{B} \in D$ - Modül için,

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \sin \Phi \vec{N}$$

Burada $\vec{N}$ dual vektörü $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ dual vektörlerine $\mathbb{R}^3$ uzayında karşılık gelen doğruların ortak dikmesinin E. Study resmi olan bir dual vektördür.

Teorem 2.3.6. Herhangi $\vec{A}, \vec{B}$ gibi iki has dual vektörün dış çarpımı sıfır ise bu dual vektörlerin eksenleri çakışıkıdır (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.4 Dual Kuaterniyonlar

Tanım 2.4.1. $q = a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}$ ve $p = a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}$ herhangi iki kuaterniyon ve ε dual birim olmak üzere bir dual kuaterniyon

$$\begin{aligned} Q &= q + \varepsilon p \\ &= (a_1 + b_1\mathbf{i} + c_1\mathbf{j} + d_1\mathbf{k}) + \varepsilon (a_2 + b_2\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + d_2\mathbf{k}) \\ &= (a_1 + \varepsilon a_2) + (b_1 + \varepsilon b_2)\mathbf{i} + (c_1 + \varepsilon c_2)\mathbf{j} + (d_1 + \varepsilon d_2)\mathbf{k} \\ &= A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $A = a_1 + \varepsilon a_2$, $B = b_1 + \varepsilon b_2$, $C = c_1 + \varepsilon c_2$ ve $D = d_1 + \varepsilon d_2$ dual sayılarına Q 'nun dual bileşenleri denir.

Q dual kuaterniyonunda skalar kısmı $\text{Re } Q$ ve vektörel kısmı $\text{Im } Q$ ile gösterirsek

$$\text{Re } Q = A = a_1 + \varepsilon a_2 \text{ ve } \text{Im } Q = B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k} = \text{Im } q + \varepsilon \text{Im } p$$

olacağından $Q = \text{Re } Q + \text{Im } Q$ biçiminde yazılabilir (Parker, 2009).

Tüm dual kuaterniyonların kümesi H_D ile gösterilir.

Tanım 2.4.2. Herhangi $Q_1 = \text{Re } Q_1 + \text{Im } Q_1$ ve $Q_2 = \text{Re } Q_2 + \text{Im } Q_2$ dual kuaterniyonlarının toplamı ve farkı

$$Q_1 \pm Q_2 = (\text{Re } Q_1 \pm \text{Re } Q_2) + (\text{Im } Q_1 \pm \text{Im } Q_2)$$

biçiminde tanımlanır (Parker, 2009).

Tanım 2.4.3. Herhangi $Q_1 = \text{Re } Q_1 + \text{Im } Q_1$ ve $Q_2 = \text{Re } Q_2 + \text{Im } Q_2$ dual kuaterniyonlarının çarpımı $Q_1 = q_1 + \varepsilon p_1 = \text{Re } Q_1 + \text{Im } Q_1$ ve $Q_2 = q_2 + \varepsilon p_2 = \text{Re } Q_2 + \text{Im } Q_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Q_1 Q_2 &= (q_1 + \varepsilon p_1)(q_2 + \varepsilon p_2) \\ &= q_1 q_2 + \varepsilon (q_1 p_2 + q_2 p_1) \\ &= \text{Re } Q_1 \text{Re } Q_2 - \langle \text{Im } Q_1, \text{Im } Q_2 \rangle + \text{Re } Q_1 \text{Im } Q_2 + \text{Re } Q_2 \text{Im } Q_1 + \text{Im } Q_1 \wedge \text{Im } Q_2 \end{aligned}$$

olarak tanımlanır (Yang ve Freudenstein, 1964).

Tanım 2.4.4. Herhangi bir $Q = q + \varepsilon p = \text{Re } Q + \text{Im } Q$ dual kuaterniyonunun eşleniği

$$\bar{Q} = \bar{q} + \varepsilon \bar{p} = \text{Re } Q - \text{Im } Q$$

şeklinde tanımlanır (Parker, 2009).

Tanım 2.4.5. Herhangi bir Q dual kuaterniyonunun normu $|Q|$ ile gösterilir ve

$$|Q| = \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{\bar{Q}Q}$$

biçiminde tanımlanır (Ercan ve Yüce, 2011).

$A = a_1 + \varepsilon a_2$, $B = b_1 + \varepsilon b_2$, $C = c_1 + \varepsilon c_2$ ve $D = d_1 + \varepsilon d_2$ olmak üzere herhangi bir $Q = A + B\mathbf{i} + C\mathbf{j} + D\mathbf{k}$ dual kuaterniyonunun normu

$$\begin{aligned} |Q| &= \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + \varepsilon(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan görüldüğü üzere bir dual kuaterniyonun normu bir reel sayı değil bir dual sayıdır.

Tanım 2.4.6. Herhangi bir Q dual kuaterniyonunun tersi (inversi) Q^{-1} ile gösterilir ve

$$Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{|Q|^2}$$

olarak tanımlanır (Ata ve Yaylı, 2008).

Tanım 2.4.7. Herhangi bir Q dual kuaterniyonunu bir P dual kuaterniyonuna bölmek demek

$$R_1 P = Q \Rightarrow R_1 = Q P^{-1} \text{ ve } P R_2 = Q \Rightarrow R_2 = P^{-1} Q$$

eşitliklerdeki R_1 ve R_2 dual kuaterniyonlarını bulmak demektir.

Genel olarak dual kuaterniyonlar kuaterniyon çarpımına göre değişimli olmadığından R_1 ve R_2 farklı dual kuaterniyonlardır. Burada R_1 'e Q 'nun sağdan bölümü, R_2 'ye de Q 'nun soldan bölümü denir (Yang ve Freudenstein, 1964).

Tanım 2.4.8. Herhangi bir Q dual kuaterniyonu için $|Q|=1$ ise Q 'ya birim dual kuaterniyon denir (Ercan ve Yüce, 2011).

3. VİDA HAREKETİ

Bu bölüm vida operatörü ve vida operatörünün özel durumları olan dönme ve öteleme operatörlerine ayrılmıştır.

3.1. Vida Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörler ve $\phi \neq 0$, $\phi^* \neq 0$ olmak üzere $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$; $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki dual açı olsun. Buna göre $\vec{S} = \frac{\vec{A} \wedge \vec{B}}{\|\vec{A} \wedge \vec{B}\|}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{A}\vec{B} &= -\langle \vec{A}, \vec{B} \rangle + \vec{A} \wedge \vec{B} \\ &= -\cos \Phi + \vec{S} \sin \Phi\end{aligned}$$

yazılabilir. Diğer taraftan

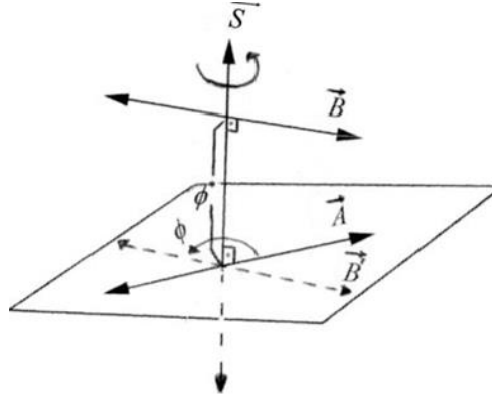
$$\begin{aligned}\overline{(\vec{A}\vec{B})} &= -\cos \Phi - \vec{S} \sin \Phi \\ &= -(\cos \Phi + \vec{S} \sin \Phi)\end{aligned}$$

ve $Q = \cos \Phi + \vec{S} \sin \Phi$ dersek $\overline{(\vec{A}\vec{B})} = -Q$ olur. $\overline{(\vec{A}\vec{B})} = \vec{B}\vec{A}$, $(\vec{A})^{-1} = -\vec{A}$, $(\vec{B})^{-1} = -\vec{B}$ olduğundan $Q = -\vec{B}\vec{A}$, buradan da $\vec{A} = \vec{B}Q$ ve $\vec{B} = Q\vec{A}$ elde edilir. Burada Q birim kuaterniyonuna dönme kısmı ϕ , öteleme kısmı ϕ^* , adımı $\frac{\phi^*}{\phi}$ ve eksenini $\vec{S}$ olan bir vida operatörü denir. Vida operatörü $Q(\vec{S}, \Phi) = \cos \Phi + \vec{S} \sin \Phi$ şeklinde de ifade edilebilir.

E-Study teoreminden $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerine $\mathbb{R}^3$ uzayında aykırı iki yönlü doğru yani kesişmeyen ve paralel olmayan iki yönlü doğru karşılık gelir. Bunlar sırasıyla d_1 ve d_2 doğruları olsun. $\vec{B} = Q\vec{A}$ eşitliği $\vec{B}$ birim dual vektörünün $\vec{A}$ birim dual vektöründen bir vida operatörüyle elde edilmesi anlamına gelir. Benzer durum $\vec{A} = \vec{B}Q$ için de söylenebilir.

$\vec{A}$ 'nın $\vec{B}$ konumuna gelmesi için iki yol vardır. İlki $\vec{A}$ 'nın $\vec{S}$ vida eksenini etrafında ϕ kadar döndürülüp sonra ϕ^* kadar ötelenmesidir (Şekil 3.1). Bunu sembolik olarak q ötelemeyi, q_L de dönmeyi göstermek üzere $\vec{B} = [qq_L]\vec{A}$ ile gösterebiliriz. Diğer yol ise ϕ^* kadar ötelenip sonra ϕ döndürülmesidir. Bunu da $\vec{B} = [q_Lq]\vec{A}$ ile gösterelim. $Q = qq_L = q_Lq$ olduğundan bu iki yol arasında hiçbir fark yoktur.

Sonuç olarak; vida hareketinde bir birim dual vektörün ilk konumundan son konumunu veren hareketi yoldan bağımsız olduğu söylenebilir.



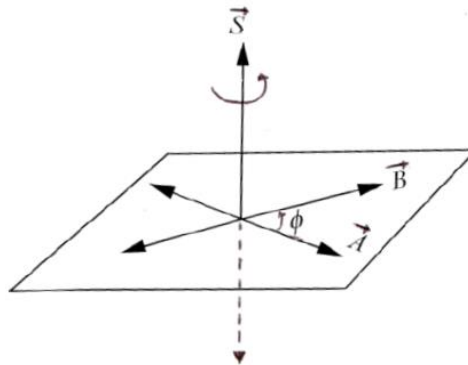
Şekil 3.1. Vida hareketi.

3.2. Dönme Hareketi

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ herhangi birim dual vektörler ve bunlara karşılık gelen doğrular sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $d_1 \cap d_2 = \{0\}$ ve $\angle(d_1, d_2) = \phi$ ise $\phi^* = 0$ dır. Bu durumda $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim çizgi kuaterniyonu olur. O halde $\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ olmak üzere Q vida operatörü

$$\begin{aligned} Q &= \cos \Phi + \vec{S} \sin \Phi \\ &= \cos \phi + \vec{S} \sin \phi \end{aligned}$$

biçimini alır.



Şekil 3.2. Dönme hareketi.

3.3. Öteleme Hareketi

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ herhangi birim dual vektörler ve bunlara karşılık gelen doğrular sırasıyla d_1 ve d_2 olsun. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki açı $\Phi = 0 + \varepsilon\phi^*$ ise d_1 ve d_2 doğruları birbirine paraleldir.

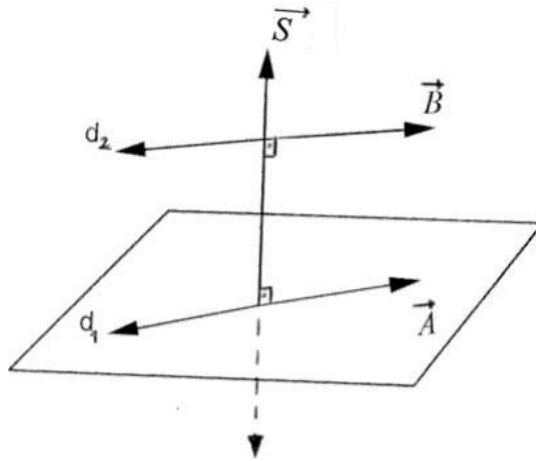
$\Phi = \phi + \varepsilon\phi^*$ dual açısında $\phi = 0$ olduğundan $\Phi = 0 + \varepsilon\phi^*$ olur. Bu durumda Q vida operatörü

$$\begin{aligned} Q &= \cos \Phi + \vec{S} \sin \Phi \\ &= \cos(\varepsilon\phi^*) + \vec{S} \sin(\varepsilon\phi^*) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca $\cos(\varepsilon\phi^*) = \cos 0 - \varepsilon\phi^* \sin 0 = 1$ ve $\sin(\varepsilon\phi^*) = \sin 0 + \varepsilon\phi^* \cos 0 = \varepsilon\phi^*$ olduğundan

$$Q = 1 + \vec{S}\varepsilon\phi^* = 1 + \varepsilon\phi^*\vec{S}$$

elde edilir. Bu durumda, $\vec{B} = Q\vec{A}$ ifadesi $\vec{A}$ birim dual kuaterniyonuna karşılık gelen d_1 doğrusunu $\vec{S}$ eksen yönünde ϕ^* kadar ötelenip $\vec{B}$ birim dual kuaterniyonuna karşılık gelen d_2 doğrusunu elde etmek anlamına gelir (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. Öteleme hareketi.

4. EĞRİ VE YÜZEYLER TEORİSİ

Bu bölümde eğri ve yüzeyler teorisiyle ilgili temel kavram ve teoremlerden bahsedilmiştir. Ayrıca paralel yüzey ve sabit sırt uzaklıklı yüzey kavramları ile bu yüzeyler için verilen bazı önemli teoremler de yine bu bölümde yer almıştır.

4.1. $\mathbb{R}^3$ Uzayında Eğri ve Yüzeyler

Tanım 4.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir fonksiyona $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-uzayında bir eğri denir (O'Neill, 2006).

Tanım 4.1.2. β , $J \subset \mathbb{R}$ de tanımlı $\mathbb{R}^3$ uzayında bir eğri olsun. $\forall s \in J$ için

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

ise β ya birim hızlı eğri ve s ye de yay-parametresi denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 4.1.3. $\mathcal{U}$, $\mathbb{R}^2$ uzayının açık bir alt kümesi olmak üzere $S \subset \mathbb{R}^3$ alt kümesinin regüler bir parametrizasyonu

$$\phi: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, \phi_u \wedge \phi_v \neq \mathbf{0}$$

şeklinde tanımlı diferensiyellenebilir ve birebir fonksiyondur. $\phi^{-1}: \phi(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$ ters fonksiyonu sürekli olmak üzere, $\forall p \in S$ için S nin içinde görüntüsü p nin bir komşuluğunu içeren uygun bir koordinat parçası varsa S ye $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey denir (O'Neill, 2006).

Tanım 4.1.4. S , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey olsun. S yüzeyi üzerinde $v = v_0$ sabit ve u değişken alınarak elde edilen eğriye u -parametre eğrisi, $u = u_0$ sabit ve v değişken alınarak elde edilen eğriye de v -parametre eğrisi denir (Shifrin, 2011).

Tanım 4.1.5. S , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $p \in S$ olsun.

$$\phi: \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3, p = (u_0, v_0)$$

regüler parametrizasyonunu düşünelim. Böylece S yüzeyinin p noktasındaki teğet düzlemi ϕ_u ve ϕ_v vektörleri ile gerilen $T_p(S)$ alt uzayıdır (Shifrin, 2011).

Tanım 4.1.6. $T_p(S)$, S teğet düzlemine dik olan $U = \frac{\phi_u \wedge \phi_v}{\|\phi_u \wedge \phi_v\|}$ birim vektörüne, S yüzeyinin

birim normali denir (Shifrin, 2011).

Tanım 4.1.7. M , E^3 uzayında bir yüzey ve α bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun.

$\vec{T}(t) = \vec{\alpha}'(t)$ vektörüne α eğrisinin birim teğet vektörü, $\vec{N}(t) = \vec{T}'(t) / \|\vec{T}'(t)\|$ vektörüne α eğrisinin asli normal vektörü ve $\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \wedge \vec{N}(t)$ vektörüne de binormal vektörü denir.

$\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ üçlüsü $\mathbb{R}^3$ uzayında ortonormal bir çatı oluşturur. Bu çatıya Frenet çatısı adı verilir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 4.1.8. M , E^3 uzayında bir yüzey ve α bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin birim teğet vektörü $\vec{T}(t)$, α eğrisi boyunca yüzeyin normali $\vec{U}(t)$ vektörü ve bu iki vektörün vektörel çarpımı $\vec{V}(t) = \vec{U}(t) \wedge \vec{T}(t)$ olmak üzere $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ üçlüsü yeni bir dik çatıdır. Bu çatıya Darboux çatısı denir (Ru, 1999).

Tanım 4.1.9. E^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde (I, α) koordinat komşuluğuyla verilen

$$\alpha: I \rightarrow M, \quad I \subset \mathbb{R}$$

birim hızlı bir eğri olsun. $\vec{T}(t) = \vec{\alpha}'(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \kappa(t) = \|\vec{T}'(t)\| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(t) \in \mathbb{R}$ sayısına da α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki eğriliği denir (O'Neill, 2006).

Tanım 4.1.10. E^3 Öklid uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde (I, α) koordinat komşuluğuyla verilen

$$\alpha: I \rightarrow M, \quad I \subset \mathbb{R}$$

birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \tau(t) = \langle \vec{N}'(t), \vec{B}(t) \rangle \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(t) \in \mathbb{R}$ sayısına da

α eğrisinin $\alpha(t)$ noktasındaki burulması denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 4.1.1. M yüzeyi üzerinde birim hızlı olmayan α eğrisinin Frenet çatısı $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$,

$v = \|\alpha'(t)\|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\vec{\alpha}'(t)}{\|\vec{\alpha}'(t)\|}, \\ \vec{B}(t) &= \frac{\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}, \\ \vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca α eğrisinin eğrilik fonksiyonları da

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3} \quad \text{ve} \quad \tau(t) = \frac{\det(\vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t), \vec{\alpha}'''(t))}{\|\vec{\alpha}'(t) \wedge \vec{\alpha}''(t)\|^2}$$

eşitlikleriyle hesaplanabilir (Hacısalihioğlu, 2000).

Tanım 4.1.11. M , E^3 uzayında bir yüzey ve α bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olmak üzere

$$k_g(t) = \langle \vec{T}'(t), \vec{V}(t) \rangle = -\langle \vec{V}'(t), \vec{T}(t) \rangle$$

ifadesine geodezik eğrilik denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 4.1.12. E^3 uzayında bir yüzey M ve α bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olmak üzere

$$k_n(t) = \langle \vec{T}'(t), \vec{U}(t) \rangle = -\langle \vec{U}'(t), \vec{T}(t) \rangle$$

ifadesine normal eğrilik denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Tanım 4.1.13. E^3 uzayında bir yüzey M ve bu yüzey üzerinde birim hızlı bir eğri α olsun. α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$ olmak üzere

$$\tau_g(t) = \langle \vec{V}'(t), \vec{U}(t) \rangle = -\langle \vec{U}'(t), \vec{V}(t) \rangle$$

ifadesine geodezik torsiyon veya geodezik burulma denir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 4.1.2. M yüzeyi üzerinde birim hızlı olmayan bir α eğrisinin Darboux çatısı

$\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$, $v = \|\alpha'(t)\|$, geodezik ve normal eğrilikleri sırasıyla k_g, k_n ve geodezik burulması da τ_g olmak üzere

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{1}{v^2} \langle \vec{\alpha}''(t), \vec{V}(t) \rangle \\ k_n &= \frac{1}{v^2} \langle \vec{\alpha}''(t), \vec{U}(t) \rangle \\ \tau_g &= -\frac{1}{v} \langle \vec{U}'(t), \vec{V}(t) \rangle \end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 4.1.3. M yüzeyi üzerinde birim hızlı α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$, geodezik ve normal eğrilikleri sırasıyla k_g, k_n ve geodezik burulması da τ_g olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= k_g(t) \vec{V}(t) + k_n(t) \vec{U}(t) \\ \vec{V}'(t) &= -k_g(t) \vec{T}(t) + \tau_g(t) \vec{U}(t) \\ \vec{U}'(t) &= -k_n(t) \vec{T}(t) - \tau_g(t) \vec{V}(t) \end{aligned}$$

dir (Sabuncuoğlu, 2010).

Teorem 4.1.4. M yüzeyi üzerinde birim hızlı olmayan bir α eğrisinin Darboux çatısı $\{\vec{T}, \vec{V}, \vec{U}\}$, $v = \|\alpha'(t)\|$, geodezik ve normal eğrilikleri sırasıyla k_g, k_n ve geodezik burulması da τ_g olmak üzere

$$\begin{aligned} \vec{T}'(t) &= v \left(k_g(t) \vec{V}(t) + k_n(t) \vec{U}(t) \right) \\ \vec{V}'(t) &= v \left(-k_g(t) \vec{T}(t) + \tau_g(t) \vec{U}(t) \right) \\ \vec{U}'(t) &= v \left(-k_n(t) \vec{T}(t) - \tau_g(t) \vec{V}(t) \right) \end{aligned}$$

dir.

Tanım 4.1.14. Yüzey üzerinde her noktasındaki normal eğriliği $k_n = 0$ olan eğrilere, asimptotik çizgiler denir (Uras, 1992).

Tanım 4.1.15. Yüzey üzerinde her noktasındaki geodezik eğriliği $k_g = 0$ olan eğrilere, geodezik eğriler denir (Uras, 1992).

Tanım 4.1.16. Yüzey üzerinde her noktasındaki geodezik burulması $\tau_g = 0$ olan eğrilere eğrilik çizgisi denir (Uras, 1992).

Tanım 4.1.17. E^n uzayının bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı U verilsin. D , E^n de Riemann koneksiyonu olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X U$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 4.1.18. E^n uzayının bir M hiperyüzeyi üzerinde $1 \leq q \leq n$ olmak üzere

$$I^q : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna M hiperyüzeyinin q -yuncu temel formu denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 4.1.19. E^n uzayının bir M hiperyüzeyinin $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow K(p) = \det S(p)$$

fonksiyonuna M hiperyüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu, $K(p)$ değerine de M nin $p \in M$ noktasındaki Gauss eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 4.1.20. E^n uzayının bir M hiperyüzeyinin $p \in M$ noktasındaki şekil operatörü $S(p)$ olmak üzere

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow H(p) = \text{iz}(S(p))$$

fonksiyonuna M hiperyüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(p)$ değerine de M nin $p \in M$ noktasındaki ortalama eğriliği denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 4.1.21. E^n n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin bir p noktasına karşılık gelen $S(p)$ nin karakteristik değerlerine M nin bu noktasındaki asli eğrilikleri denir. Asli eğriliklere karşılık gelen karakteristik vektörlere de M nin p noktasındaki asli eğrilik vektörleri veya asli eğrilik doğrultuları adı verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Tanım 4.1.22. E^n n -boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. $p \in M$ noktasında $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için $S = \lambda I_{n-1}$ ise p noktasına M nin bir umbilik noktası denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

4.2. Paralel Yüzeyler

Tanım 4.2.1. M_1 ve M_2 , E^n uzayında iki hiperyüzey ve M_1 in birim normal vektör alanı U olsun. r bir sabit sayı olmak üzere,

$$f : M_1 \rightarrow M_2, \quad f(p) = p + rU_p$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 ve M_2 hiperyüzeylerine paralel hiperyüzeyler denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 4.2.1. M_r , E^n uzayında M hiperyüzeyinin paralel hiperyüzeyi olsun. E^n uzayının $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ Öklid koordinat sistemine göre $X \in \chi(M)$, $\bar{X} \in \chi(M_r)$ vektör alanları $\forall p \in M$ için $b_i(p) = \bar{b}_i(f(p))$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$X = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{b}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda

- 1) $f_*(X) = \bar{X} + rS(\bar{X})$
- 2) $S_r(f_*(X)) = \bar{S}(\bar{X})$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 4.2.2. E^n uzayında $f : M \rightarrow M_r$ olmak üzere M hiperyüzeyinin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. Bu durumda,

- 1) f , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
- 2) f , umbilik nokta olma özelliğini korur.
- 3) f , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
- 4) M nin temel formları sırasıyla I , II ve III ile gösterilmek üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve

$\forall p \in M$ için

$$\langle f_*(X), f_*(Y) \rangle \Big|_{f(p)} = I(X_p, Y_p) + 2rII(X_p, Y_p) + r^2III(X_p, Y_p)$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

$n=3$ özel durumunda, M ve M_r paralel yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasındaki bağıntı aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 4.2.3. E^3 uzayında bir M yüzeyinin bir paralel hiperyüzeyi M_r olsun. $p \in M$ noktasında M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , $f(p) \in M_r$ noktasında M_r yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K_r ve H_r olsun. Bu durumda

$$K_r = \frac{K}{1+rH+r^2K} \text{ ve } H_r = \frac{H+2rK}{1+rH+r^2K}$$

dir (Hacısalıhoğlu, 2000).

4.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Yüzeyler

Tanım 4.3.1. M ve M_1 , E^3 uzayında iki yüzey, M in bir p noktasındaki birim normal vektörü U_p ve tanjant uzayı $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_p, Y_p\}$ olsun. $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sabit sayılar ve $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olmak üzere $Z_p = d_1X_p + d_2Y_p + d_3U_p$ biçiminde X_p , Y_p ve U_p ye sıkı suretle bağlı Z_p birim vektörünü alalım. r bir sabit sayı olmak üzere

$$f: M \rightarrow M_1, \quad f(p) = p + rZ_p$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M_1 yüzeyine M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi denir. M_1 yüzeyi f fonksiyonu yardımıyla tanımlandığından M^f ile gösterilecektir (Tarakçı ve Hacısalıhoğlu, 2004).

Teorem 4.3.1. E^3 uzayında M ve M^f yüzeyleri verilsin. E^3 uzayının $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat sistemine göre $W \in \chi(M)$ için

$$f_*(W) = \overline{W} + r\overline{D_W Z}$$

dir. Burada $\forall p \in M$ için $w_i(p) = \overline{w}_i(f(p))$, $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$W = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{W} = \sum_{i=1}^n \overline{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dir (Tarakçı ve Hacısalıhoğlu, 2004).

M yüzeyi için bir parametrizasyon $(\phi, \mathcal{U})$ ve

$$\begin{aligned} \phi: \mathcal{U} \subset E^3 &\rightarrow M \\ (u, v) &\quad p = \phi(u, v) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $T_p(M)$ nin bir bazı $\{\phi_u|_p, \phi_v|_p\}$, $p \in M$ deki birim normal vektörü U_p ,

$d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$ sabit sayılar, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ ve $Z_p = d_1X_p + d_2Y_p + d_3U_p$ olmak üzere

$$M^f = \{f(p) : f(p) = p + rZ_p\}$$

olarak verildiğinden M^f yüzeyi için bir parametrizasyon

$$\psi(u, v) = \phi(u, v) + rZ(u, v)$$

olur. Böylece

$$M^f = \{\psi(u, v) : \psi(u, v) = \phi(u, v) + r(d_1\phi_u(u, v) + d_2\phi_v(u, v) + d_3U(u, v)), d_1 = \text{sabit}$$

$$d_2 = \text{sabit}, d_3 = \text{sabit}, d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1, r = \text{sabit}\}$$

olarak ifade edilebilir. Burada $rd_1 = \lambda_1$, $rd_2 = \lambda_2$, $rd_3 = \lambda_3$ alınırsa

$$M^f = \{\psi(u, v) : \psi(u, v) = \phi(u, v) + \lambda_1\phi_u(u, v) + \lambda_2\phi_v(u, v) + \lambda_3U(u, v), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \text{sabit}$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = r^2\}$$

olur (Tarakçı ve Hacısalihoğlu, 2004).

Teorem 4.3.2. $(\phi, \mathcal{U})$, E^3 uzayında bir M yüzeyi için parametrizasyon, $\{\phi_u, \phi_v\}$ $\chi(M)$ nin asli eğrilik doğrultularından oluşan ortonormal bazı, k_1 ve k_2 M nin asli eğrilikleri ve M^f yüzeyi M nin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olsun. $\chi(M^f)$ nin $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazı

$$\psi_u = (1 + \lambda_3 k_1) \phi_u - \lambda_1 k_1 U$$

$$\psi_v = (1 + \lambda_3 k_2) \phi_v - \lambda_2 k_2 U$$

alındığında M^f yüzeyinin S^f şekil operatörüne karşılık gelen matris, alınan bu baza göre

$$S^f = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} (1 + \lambda_3 k_2) \left(\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + k_1 A^2 \right) & -\frac{\partial k_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_2) \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_1) & (1 + \lambda_3 k_1) \left(\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2 \right) \end{bmatrix}$$

dir. Burada $A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_1)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2}$ dir (Tarakçı ve Hacısalihoğlu, 2004).

Teorem 4.3.3. E^3 uzayında bir M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi M^f , M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , M^f yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K^f ve H^f ise

$$A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_1)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2}$$

$$= \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2}$$

olmak üzere

$$K^f = (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} \frac{\partial k_2}{\partial v} + \lambda_1 k_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + \lambda_2 k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2)}{(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2)^2} \right. \\ \left. \frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} \right\}$$

dır ve

$$H^f = (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 k_2) (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (1 + \lambda_3 k_1) (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2)}{(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2)^{3/2}} \\ + \frac{H + 2\lambda_3 K}{(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2)^{1/2}}$$

dir (Tarakçı ve Hacısalihoglu, 2004).

5. VİDA YÜZEYLERİ

Bu bölümde ilk olarak vida yüzeyleri tanıtılmıştır. Bu yüzeylerin üzerinde yer alan eğrilerin Darboux ve Frenet çatıları hesaplanmış ve bu çatılar yardımıyla yüzeye ait bazı eğrilikler elde edilmeye çalışılmıştır.

5.1. Vida Yüzeyinin Tanımı

Bir $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ birim vektörü etrafında θ açılık bir dönme,

$$r = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$$

kuaterniyonu ile ifade edilir. Böyle bir kuaterniyonun uzayda bir $p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ noktasına

etkisi $\bar{r} = \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$ olmak üzere

$$p' = r p \bar{r}$$

ile verilir. Geometrik olarak bu ifade bir $p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ noktasının bir $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ birim vektörü etrafında θ açılık dönmesi sonucu elde edilen görüntüsünü verir.

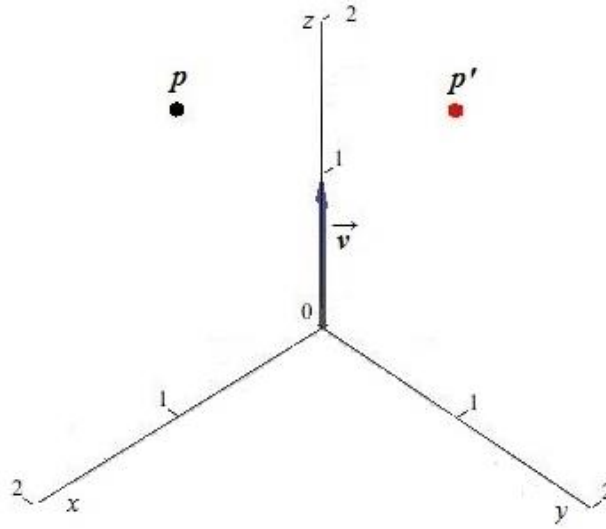
Örnek 5.1. $r = \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{k}$ kuaterniyonunun $p = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ noktasına etkisini inceleyelim:

Yukarıdaki tanımdan

$$\begin{aligned} p' &= r p \bar{r} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{k} \right) (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \left(\cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \mathbf{k} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{j} + \sqrt{2} \mathbf{k} - \sqrt{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{1}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k} - 1 + \frac{1}{2} \mathbf{j} - \frac{1}{2} \mathbf{i} + \mathbf{k} + 1 \\ &= \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $p = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ noktasının $\vec{v} = \mathbf{k}$ vektörü etrafında $\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönmesi sonucu

$p' = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ noktası elde edilmiş olur (Şekil 5.1).



Şekil 5.1. Kuaterniyonun noktaya etkisi.

Diğer taraftan r dönme, $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ dual vektörü öteleme kısmını göstermek üzere katı cisim hareketini ifade eden bir dual kuaterniyon

$$g = r + \frac{1}{2} \varepsilon \vec{t} r$$

ile belirlenir. Uzaydaki noktalar $\hat{p} = 1 + \varepsilon p$ biçimindeki dual kuaterniyonlarla verilebilir.

Böylece katı cisim hareketinin noktaya etkisi

$$\begin{aligned} \hat{p}' &= \left(r + \frac{1}{2} \varepsilon \vec{t} r \right) (1 + \varepsilon p) \left(\bar{r} + \frac{1}{2} \varepsilon \vec{r} \bar{t} \right) \\ &= 1 + \varepsilon (r p \bar{r} + \vec{t}) \\ &= 1 + \varepsilon p'' \end{aligned}$$

olur (Selig ve Husty, 2011).

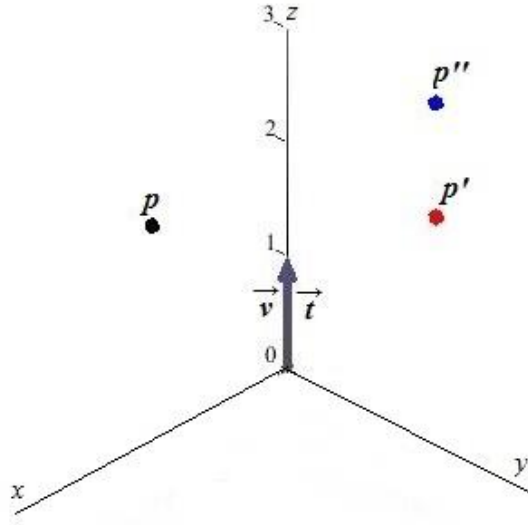
Geometrik olarak, bir $p = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ noktasının bir $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ birim vektörü etrafında pozitif yönde θ açılık döndürülüp ardından bir $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ vektörü kadar ötelenmesi sonucu p'' noktası elde edilir.

Örnek 5.2. Örnek 5.1. de $p = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ noktasının $\vec{v} = \mathbf{k}$ vektörü etrafında pozitif yönde $\frac{\pi}{2}$ radyanlık dönmesi sonucu $p' = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ noktası elde edilmişti. Bu nokta $\vec{t} = \mathbf{k}$ vektörü kadar ötelenirse

$$p'' = r p \bar{r} + \vec{t}$$

$$\begin{aligned}
&= p' + \vec{t} \\
&= \mathbf{j} + 3\mathbf{k}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $p = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ noktasının $\vec{v} = \mathbf{k}$ vektörü etrafında pozitif yönde $\frac{\pi}{2}$ radyanlık döndürülüp $\vec{t} = \mathbf{k}$ vektörü kadar ötelenmesi sonucu $p'' = \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ noktası elde edilmiş olur (Şekil 5.2).



Şekil 5.2. Katı cisim hareketinin noktaya etkisi.

Buna göre

$$\begin{aligned}
f : M &\rightarrow M^g \\
p &\rightarrow f(p) = rp\vec{r} + \vec{t}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

dönüşümü ile bir M yüzeyindeki noktalar katı cisim hareketi ile bir M^g yüzeyine taşınabilir.

Bu çalışmada özel olarak dönme eksenini yüzeyin birim normal vektörü $\vec{U}$ ve öteleme vektörü de $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda\vec{U}$ olarak seçilmiştir. Buna göre katı cisim hareketi bir vida hareketine dönüşür. Böylece vida hareketi yardımıyla M yüzeyinin noktaları M^g vida yüzeyine taşınır.

Tanım 5.1.1. M ve M^g , E^3 te iki yüzey ve $p \in M$ olsun. $r = \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} (v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k})$, $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ birim vektörü etrafında pozitif yönde θ açılık bir dönme ve $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$ öteleme vektörü olmak üzere

$$f : M \rightarrow M^g$$

$$p \rightarrow f(p) = r\bar{p}r + \vec{t}$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa M^g yüzeyine M yüzeyinin vida yüzeyi adı verilir.

Bu durumda vida yüzeyi fonksiyonu

$$\begin{aligned} f(p) &= \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \bar{U} \right) p \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \bar{U} \right) + \lambda \bar{U} \\ &= \left(\cos \frac{\theta}{2} p - \sin \frac{\theta}{2} \langle \bar{U}, p \rangle + \sin \frac{\theta}{2} (\bar{U} \wedge p) \right) \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \bar{U} \right) + \lambda \bar{U} \\ &= \cos \theta p + \sin \theta (\bar{U} \wedge p) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle U, p \rangle U + \lambda \bar{U} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. p noktasının konum vektörü ile $\bar{U}$ birim normal vektörünün paralel olması halinde ise bu eşitlik

$$f(p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \bar{U} \quad (5.2)$$

biçimini alır. Çalışmanın devamında işlemler bu duruma göre yapılacaktır.

5.2. Vida Yüzeylerinin Bazı Özellikleri

Bir M yüzeyinin M^g vida yüzeyinin noktaları $f : M \rightarrow M^g$ dönüşümü ile

$$f(p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \bar{U}$$

biçiminde elde edilir. M yüzeyi üzerindeki vektörler $\bar{U} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, M yüzeyinin birim normal

vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{*p} &\leftrightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} p_1 a_1 & p_2 a_1 & p_3 a_1 \\ p_1 a_2 & p_2 a_2 & p_3 a_2 \\ p_1 a_3 & p_2 a_3 & p_3 a_3 \end{pmatrix}_p \\ &\quad + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}_p \end{aligned}$$

$$\leftrightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2} I_3 + \frac{1}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} [p_i a_j] + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right]$$

türev dönüşümü ile M^g yüzeyine taşınabilir. Böylece $\forall X_p = \sum_{i=1}^3 b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \in T_p(M)$ için

$$\begin{aligned} f_* : T_p M &\rightarrow T_{f(p)} M^g \\ f_{*p}(X_p) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \frac{1}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle P, X_p \rangle U_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p) \end{aligned} \quad (5.3)$$

bulunur.

$\bar{U} = \sum_{i=1}^3 a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve S, M yüzeyinin sırasıyla birim normal vektör alanı ve şekil operatörü

olsun. M^g yüzeyinin birim normal vektör alanını $\bar{U}^g$ ve şekil operatörünü S^g ile gösterelim.

Bu durumda $\bar{a}_i \circ f = a_i$ olmak üzere $f(p)$ noktasında M^g yüzeyinin birim normal vektörü

$$\bar{U}^g_{f(p)} = \sum_{i=1}^3 \bar{a}_i(f(p)) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \sum_{i=1}^3 a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p = \bar{U}_p \text{ dir.}$$

$X_p = \sum_{i=1}^3 b_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p$ tanjant vektörünün $\alpha : I \rightarrow M$ eğrisinin $p \in M$ noktasında birim

teğet vektörü olduğunu varsayalım. Bu durumda $f_*(X_p) \in T_{f(p)}(M^g)$ tanjant vektörü de

$f \circ \alpha : I \rightarrow M^g$ eğrisinin $f(p) \in M^g$ noktasındaki teğet vektörü olur. Buna göre $p = \alpha(t)$ noktasında

$$\begin{aligned} S(X)_p &= D_{X_p} U = \sum_{i=1}^3 X_p[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \\ &= \sum_{i=1}^3 X_{\alpha(t)}[a_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^3 \frac{d(a_i \circ \alpha)}{dt} \Big|_{\alpha(t)} \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{d(\bar{a}_i \circ f \circ \alpha)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\alpha(t)} = \sum_{i=1}^3 f_*(X)|_{f(p)} [\bar{a}_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$S^g(f_*(X))_{f(p)} = D_{f_*(X)_{f(p)}} U^g$$

$$= \sum_{i=1}^3 f_*(X)|_{f(p)} [\overline{a_i}] \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(p)}$$

olduğundan $S^g(f_*(X))_{f(p)} = S(X)_p$ dir.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.2.1. E^3 uzayında M yüzeyinin M^g vıda yüzeyi verilsin. E^3 uzayının $\{x_1, x_2, x_3\}$

Öklid koordinat sistemine göre $X \in \chi(M)$, $\overline{X} \in \chi(M^g)$ vektör alanları

$$X = \sum_{i=1}^3 b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \overline{X} = \sum_{i=1}^3 \overline{b_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olmak üzere $\forall p \in M$ için $b_i(p) = \overline{b_i}(f(p))$, $1 \leq i \leq 3$ özelliğiyle verilsin. O zaman

$$1) f_*(X_p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p)$$

$$2) S^g(f_*(X))_{f(p)} = S(X)_p \text{ dir.}$$

Teorem 5.2.2. $f : M \rightarrow M^g$ olmak üzere M nin vıda yüzeyi M^g olsun.

- 1) f , üçüncü temel form olma özelliğini korur.
- 2) f , umbilik nokta olma özelliğini korur.
- 3) f , asli eğrilik doğrultusu olma özelliğini korur.
- 4) M nin temel formları sırasıyla I, II, III ile gösterilmek üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$,

$\forall p \in M$ için

$$\langle f_*X, f_*Y \rangle|_{f(p)} = \cos^4 \frac{\theta}{2} I(X_p, Y_p) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) II(X_p, Y_p)$$

$$+ \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 III(X_p, Y_p)$$

olur.

İspat:

- 1) M nin üçüncü temel formu III ve M^g ninki de III^g olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$,

$\forall p \in M$ için

$$III^g(f_*X_p, f_*Y_p) = \langle S^g(f_*X_p), S^g(f_*Y_p) \rangle$$

$$= \langle S(X_p), S(Y_p) \rangle = III(X_p, Y_p)$$

olur.

2) $p \in M$, M nin bir umbilik noktası olsun. Bu durumda $\forall X_p \in T_p(M)$ ve bir tek $c \in \mathbb{R}$ için $S(X_p) = cX_p$ dir. Diğer taraftan Teorem 5.2.1. gereğince

$$\begin{aligned} f_*(X_p) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + c \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) X_p \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre $\forall f_*(X_p) \in T_{f(p)}(M^g)$ için

$$\begin{aligned} S^g(f_*(X_p)) &= S(X)_p \\ &= cX_p \\ &= \frac{c}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + c \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_p) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $p \in M$ umbilik nokta ise $f(p) \in M^g$ de M^g nin umbilik noktasıdır.

3) $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 , bunlara karşılık gelen asli doğrultuları da sırasıyla X_{1p} ve X_{2p} olsun. Bu durumda $S(X_{1p}) = k_1 X_{1p}$ ve $S(X_{2p}) = k_2 X_{2p}$ dir. Diğer taraftan Teorem 5.2.1. gereğince

$$\begin{aligned} f_*(X_{1p}) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_{1p} + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_{1p}) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) X_{1p} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_*(X_{2p}) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} X_{2p} + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_{2p}) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) X_{2p} \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} S^g(f_*(X_{1p})) &= S(X_1)_p \\ &= k_1 X_{1p} \\ &= \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_{1p}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
S^g(f_*(X_{2p})) &= S(X_2)_p \\
&= k_2 X_{2p} \\
&= \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_{2p})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $f_*(X_{1p})$ ve $f_*(X_{2p})$ de M^g yüzeyinin $f(p) \in M$ noktasındaki asli doğrultuları ve

$$\frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \text{ ile } \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)}$$

de sırasıyla bunlara karşılık gelen asli eğrilikler olur.

4) $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in M$ için,

$$\begin{aligned}
\langle f_*X, f_*Y \rangle|_{f(p)} &= \left\langle \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(X_p), \cos^2 \frac{\theta}{2} Y_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(Y_p) \right\rangle \\
&= \left\langle \cos^2 \frac{\theta}{2} X_p, \cos^2 \frac{\theta}{2} Y_p \right\rangle + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \langle S(X_p), Y_p \rangle \\
&\quad + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \langle S(X_p), S(Y_p) \rangle \\
&\Rightarrow \langle f_*X, f_*Y \rangle|_{f(p)} = \cos^4 \frac{\theta}{2} I(X_p, Y_p) + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) II(X_p, Y_p) \\
&\quad + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 III(X_p, Y_p)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Vida yüzeyi için dönme işlemi göz ardı edilirse $\theta=0$ olup paralel yüzey ile karşılaşılacaktır. Bu durumda, Teorem 4.2.2 ile benzer sonuçlar elde edilir.

Teorem 5.2.3. E^3 uzayında bir M yüzeyinin M^g vida yüzeyi verilsin. $p \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , $f(p) \in M^g$ noktasında M^g nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K^g ve H^g olsun. Bu durumda

$$K^g = \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \quad (5.4)$$

$$H^g = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \quad (5.5)$$

dir.

İspat: $p \in M$ noktasında M nin asli eğrilikleri k_1 ve k_2 , bunlara karşılık gelen asli doğrultuları da sırasıyla X_1 ve X_2 olsun. Teorem 5.2.2 gereğince M^g nin $f(p)$ noktasındaki asli doğrultuları da $f_*(X_1)$ ve $f_*(X_2)$ olur. Ayrıca;

$$S^g(f_*(X_{1p})) = \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_{1p})$$

$$S^g(f_*(X_{2p})) = \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} f_*(X_{2p})$$

dir. Dolayısıyla $\{f_*(X_1), f_*(X_2)\}_p$ bazına göre S^g nin matrisi

$$\begin{bmatrix} \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} & 0 \\ 0 & \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \end{bmatrix}$$

olup

$$\begin{aligned} H^g = \dot{L} S^g &= \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} + \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} (k_1 + k_2) + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) k_1 k_2}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) (k_1 + k_2) + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 k_1 k_2} \\ &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
K^g = \det S^g &= \frac{k_1}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_1 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \cdot \frac{k_2}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + k_2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \\
&= \frac{k_1 k_2}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) (k_1 + k_2) + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 k_1 k_2} \\
&= \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K}
\end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 5.2.4. E^3 uzayında bir M yüzeyinin M^g vida yüzeyi verilsin. $p \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , $f(p) \in M^g$ noktasında M^g nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K^g ve H^g olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2} K^g}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g} \\
H &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H^g - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g}
\end{aligned}$$

dir.

İspat: Teorem 5.2.3 deki K^g ve H^g ifadeleri oranlanırsa

$$\frac{K^g}{H^g} = \frac{K}{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}$$

olur. Buradan

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} H K^g + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K K^g = K H^g$$

ve

$$K = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H K^g}{H^g - 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g} \tag{5.6}$$

yazılabilir. (5.6) eşitliği (5.4) de kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\cos^4 \frac{\theta}{2} K^g \left(H^g - 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g \right) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g \right) K^g H$$

ve buradan da

$$H = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} \left(H^g - 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K^g \right)}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g} \quad (5.7)$$

elde edilir.

(5.6) denkleminde H yerine (5.7) de elde edilen eşiti yazılırsa

$$K = \frac{\cos^4 \frac{\theta}{2} K^g}{1 - \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H^g + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K^g}$$

bulunur.

Sonuç 5.2.1. Bir M yüzeyinin

$$M^g = \left\{ f(p) \left| f(p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{U_p}, p \in M, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

vida yüzeyi için dönme açısı $\theta = 0$ alınırsa M^g yüzeyi M yüzeyinin paralel yüzeyi olur ve

$$K^g = \frac{K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K} \text{ ve } H^g = \frac{H + 2\lambda K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K}$$

dır.

İspat: $\theta = 0$ alınırsa $f(p) = p + \lambda \overrightarrow{U_p}$ olacağından M^g yüzeyi M yüzeyinin paralel yüzeyi olur. Diğer taraftan Teorem 5.3.2 den ve $\sin \theta = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} K^g &= \frac{K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K} \\ &= \frac{K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K} \end{aligned}$$

bulunur. Yine Teorem 5.3.2 den ve $\sin \theta = 0$ olduğundan

$$H^g = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} H + 2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) K}{\cos^4 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) H + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 K}$$

$$= \frac{H + 2\lambda K}{1 + \lambda H + \lambda^2 K}$$

elde edilir.

5.3. Bir Eğrinin Vida Yüzeyi Üzerindeki Resminin Darboux Çatısı

M yüzeyinin vida yüzeyi M^g , M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g yüzeyi üzerindeki görüntüsü $\beta = (f \circ \alpha)$ olsun. Bu durumda $\overrightarrow{\beta'} = \overrightarrow{f_*(T)}$ dir. β eğrisi $f(\alpha(t))$ noktasında birim hızlı olmadığından $v = \|\overrightarrow{f_*(T)}\|$ olmak üzere eğrinin Darboux çatısı $\left\{ \overrightarrow{T^g} = \frac{\overrightarrow{f_*(T)}}{v}, \overrightarrow{V^g} = \overrightarrow{U^g} \wedge \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{U^g} \right\}$ dir.

Teorem 5.3.1. M^g yüzeyinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux üçyüzlüsü $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T^g} \Big|_{f(p)} &= \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \overrightarrow{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{V}_p \right] \\ \overrightarrow{V^g} \Big|_{f(p)} &= \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \overrightarrow{V}_p + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T}_p \right] \\ \overrightarrow{U^g} \Big|_{f(p)} &= \overrightarrow{U}_p \end{aligned} \quad (4.8)$$

dir. Burada k_n ve τ_g , M yüzeyinin sırasıyla normal eğriliği ve geodezik burulmasıdır.

İspat: M yüzeyinin $p = \alpha(t)$ noktasındaki birim normal vektörünün türevi $\overrightarrow{U'_p} = -k_n \overrightarrow{T}_p - \tau_g \overrightarrow{V}_p$ olduğundan β eğrisinin $f(\alpha(t)) = f(p)$ noktasındaki teğet vektörü

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\beta'}(f(p)) &= \overrightarrow{f_*(T_p)} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \overrightarrow{T}_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) S(\overrightarrow{T}_p) \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \overrightarrow{T}_p + \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) (-k_n \overrightarrow{T}_p - \tau_g \overrightarrow{V}_p) \\ &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \overrightarrow{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{V}_p \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$v = \|\overrightarrow{f_*(T)}\| = \sqrt{\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right)^2 + \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2}$$

olur. $\overrightarrow{T^g} = \frac{\overrightarrow{f_*(T)}}{v}$ olduğundan

$$\overrightarrow{T^g}\Big|_{f(p)} = \frac{\overrightarrow{f_*(T)}}{\mathbf{v}}\Big|_{f(p)} = \frac{1}{\mathbf{v}} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p \right]$$

olarak elde edilir. M^g yüzeyi M yüzeyinin vida yüzeyi olduğundan $\overrightarrow{U^g}\Big|_{f(p)} = \vec{U}_p$ dir. O halde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V^g}\Big|_{f(p)} &= \left(\overrightarrow{U^g} \wedge \overrightarrow{T^g} \right)_{f(p)} \\ &= \vec{U}_p \wedge \frac{\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p}{\mathbf{v}} \\ &= \frac{1}{\mathbf{v}} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{V}_p + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p \right]. \end{aligned}$$

Böylece M^g yüzeyinin $f(\alpha(t)) = f(p)$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}_{f(p)}$

elde edilmiş olur.

Tanım 5.3.1. Bir M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olmak üzere

$$k_g^g(f(\alpha(t))) = \left\langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))} = - \left\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{T^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))}$$

ifadesine M^g vida yüzeyinin geodezik eğriliği denir.

Tanım 5.3.2. Bir M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olmak üzere

$$k_n^g(f(\alpha(t))) = \left\langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))} = - \left\langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{T^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))}$$

ifadesine M^g vida yüzeyinin normal eğriliği denir.

Tanım 5.3.3. Bir M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ olmak üzere

$$\tau_g^g(f(\alpha(t))) = \left\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))} = - \left\langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{V^g} \right\rangle_{f(\alpha(t))}$$

ifadesine M^g vida yüzeyinin geodezik torsiyonu veya geodezik burulması denir.

Teorem 5.3.2. M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla

$$k_g^g = \frac{1}{v^3} \left\{ k_g v^2 + \tau_g' \left(k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right. \\ \left. - \tau_g \left(\frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right\}$$

$$k_n^g = \frac{1}{v^2} \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right)$$

$$\tau_g^g = \frac{\tau_g}{v^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

dir.

İspat: $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisi birim hızlı olmadığından Teorem 4.1.2'den yararlanılacaktır.

$$\begin{aligned} \vec{\beta}'(f(p)) &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{T}_p - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p \\ \vec{\beta}''(f(p)) &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \vec{T}_p' - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{V}_p' \\ &\quad - \left(k_n \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} + k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p \\ &\quad - \left(\tau_g' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) + \tau_g \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{V}_p \\ &= \left(-k_n \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) + k_g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p \\ &\quad + \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{U}_p \\ &\quad + \left(k_g \cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n k_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{V}_p \end{aligned}$$

$\beta(s) = f(\alpha(s))$ birim hızlı bir eğri olmadığından M^g yüzeyinin geodezik eğriliği

$$\begin{aligned}
k_g^g &= \frac{1}{v^2} \left\langle \overrightarrow{\beta^n}, \overrightarrow{V^g} \right\rangle_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v^3} \left\langle \overrightarrow{\beta^n}_{f(p)}, \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \overrightarrow{V_p} + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T_p} \right\rangle \\
&= \frac{1}{v^3} \left\{ k_g \left(\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right)^2 + \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right. \\
&\quad \left. + \tau_g' \left(k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \tau_g \left(\frac{\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{T_p} \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right\} \\
&= \frac{1}{v^3} \left\{ k_g v^2 + \tau_g' \left(k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - \tau_g \left(\frac{\langle \overrightarrow{p}, \overrightarrow{T_p} \rangle}{\|p\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + k_n' \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Normal eğrilik

$$\begin{aligned}
k_n^g &= \frac{1}{v^2} \left\langle \overrightarrow{\beta^n}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v^2} \left\langle \overrightarrow{\beta^n}_{f(p)}, \overrightarrow{U_p} \right\rangle \\
&= \frac{1}{v^2} \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Geodezik torsiyon ise

$$\begin{aligned}
\tau_g^g &= \frac{1}{v} \left\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle_{f(p)} = -\frac{1}{v} \left\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^{g'}} \right\rangle_{f(p)} \\
&= -\frac{1}{v^2} \left\langle \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \overrightarrow{V_p} + \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T_p}, -k_n \overrightarrow{T_p} - \tau_g \overrightarrow{V_p} \right\rangle \\
&= -\frac{1}{v^2} \left(-k_n \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g \cos^2 \frac{\theta}{2} + k_n \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \\
&= \frac{\tau_g}{v^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 5.3.1. Esas yüzey üzerinde geodezik olan bir eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki resminin de geodezik olabilmesi için esas yüzey üzerindeki eğri eğrilik çizgisi olmalıdır.

İspat: Esas yüzey üzerinde geodezik olan bir eğrinin geodezik eğriliği $k_g = 0$ dır. Eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki resminin de geodezik olabilmesi için $k_g^g = 0$ olmalıdır. Esas yüzey üzerindeki eğri aynı zamanda eğrilik çizgisi ise $\tau_g = 0$ dır. $k_g = 0$ ve $\tau_g = 0$ alındığında $k_g^g = 0$ olduğu görülür.

Sonuç 5.3.2. Esas yüzey üzerinde asimptotik çizgi olan bir eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki resminin de asimptotik çizgi olabilmesi için aşağıdaki şartlardan birinin sağlanması gerekir:

i. Esas yüzey üzerindeki eğri eğrilik çizgisi olmalıdır.

ii. $k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} = (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)$ eşitliği sağlanmalıdır.

İspat: Esas yüzey üzerinde asimptotik çizgi olan bir eğrinin normal eğriliği $k_n = 0$ dır.

i. Esas yüzey üzerindeki eğri eğrilik çizgisi ise $\tau_g = 0$ dır. Buradan $k_n^g = 0$ olduğu görülür.

ii. $k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} = (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)$ eşitliği sağlandığında $k_n^g = 0$ olur.

Sonuç 5.3.3. Esas yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olan bir eğrinin M^g yüzeyi üzerindeki resmi de eğrilik çizgisidir.

İspat: Esas yüzey üzerinde eğrilik çizgisi olan bir eğrinin geodezik burulması $\tau_g = 0$ dır. O halde M^g yüzeyi üzerinde $\tau_g^g = 0$ olur.

Teorem 5.3.3. M^g yüzeyi üzerinde $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Darboux üçyüzlüsü $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$, geodezik ve normal eğriliği sırasıyla k_g^g, k_n^g ve geodezik burulması

da τ_g^g ve $v = \|\overrightarrow{f_*(T)}\|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T^{g'}} &= v \left(k_g^g \overrightarrow{V^g} + k_n^g \overrightarrow{U^g} \right) \\ \overrightarrow{V^{g'}} &= v \left(-k_g^g \overrightarrow{T^g} + \tau_g^g \overrightarrow{U^g} \right) \\ \overrightarrow{U^{g'}} &= v \left(-k_n^g \overrightarrow{T^g} - \tau_g^g \overrightarrow{V^g} \right)\end{aligned}\tag{4.9}$$

dir.

İspat: $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}_{f(p)}$ kümesi $\forall f(p) \in M^g$ için $T_{f(p)}M^g$ uzayının bir ortonormal bazı

olduğundan $\overrightarrow{T^{g'}} = a_1 \overrightarrow{T^g} + a_2 \overrightarrow{V^g} + a_3 \overrightarrow{U^g}$ olur. $\overrightarrow{T^{g'}}$ ile $\overrightarrow{T^g}$ nin iç çarpımını incelersek

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle \\ &\Rightarrow a_1 = 0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{T^{g'}}$ ile $\overrightarrow{V^g}$ nin iç çarpımını incelenirse

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{V^g} \rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{V^g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{V^g} \rangle \\ &\Rightarrow a_2 = \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{V^g} \rangle = v \langle \overrightarrow{\beta''}, \overrightarrow{V^g} \rangle = vk_g^g \end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{T^{g'}}$ ile $\overrightarrow{U^g}$ nin iç çarpımından

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle \\ &\Rightarrow a_3 = \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \rangle = v \langle \overrightarrow{\beta''}, \overrightarrow{U^g} \rangle = vk_n^g \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\overrightarrow{V^{g'}} = b_1 \overrightarrow{T^g} + b_2 \overrightarrow{V^g} + b_3 \overrightarrow{U^g}$ olduğunu varsayalım. $\overrightarrow{V^{g'}}$ ile $\overrightarrow{T^g}$ nin iç çarpımı incelenirse

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle \\ &\Rightarrow b_1 = \langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{T^{g'}} \rangle = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alındığında

$$\langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle = -\langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{T^{g'}} \rangle$$

olacağından $b_1 = \langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle = -\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{V^g} \rangle = -a_2 = -vk_g^g$ elde edilir.

$\overrightarrow{V^{g'}}$ ile $\overrightarrow{U^g}$ nin iç çarpımından

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{U^g}, \overrightarrow{U^g} \rangle \\ &\Rightarrow b_3 = \langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \rangle = v\tau_g^g \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu kez $\overrightarrow{U^{g'}} = c_1 \overrightarrow{T^g} + c_2 \overrightarrow{V^g} + c_3 \overrightarrow{U^g}$ olduğunu varsayıp yukarıdaki işlemleri $\overrightarrow{U^{g'}}$ için tekrarlırsak

$$\begin{aligned} c_1 &= \left\langle \overrightarrow{U^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle = -vk_n^g \\ c_2 &= \left\langle \overrightarrow{U^{g'}}, \overrightarrow{V^g} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{V^{g'}}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle = -v\tau_g^g \\ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{T^{g'}} \\ \overrightarrow{V^{g'}} \\ \overrightarrow{U^{g'}} \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & k_g^g & k_n^g \\ -k_g^g & 0 & \tau_g^g \\ -k_n^g & \tau_g^g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T^g} \\ \overrightarrow{V^g} \\ \overrightarrow{U^g} \end{bmatrix}$$

bulunur.

5.4. Bir Eğrinin Vida Yüzeyi Üzerindeki Resminin Frenet Çatısı

Teorem 5.4.1. M^g yüzeyinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin Darboux üçyüzlüsü

$\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{V^g}, \overrightarrow{U^g}\}$ ve Frenet üçyüzlüsü $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \overrightarrow{T^g} \Big|_{f(p)} &= \frac{1}{v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{T_p} - \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{V_p} \right] \\ \overrightarrow{N^g} \Big|_{f(p)} &= \frac{1}{v \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T_p} + k_g^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{V_p} + vk_n^g \overrightarrow{U_p} \right] \\ \overrightarrow{B^g} \Big|_{f(p)} &= \frac{1}{v \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[-k_n^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T_p} - k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{V_p} + vk_g^g \overrightarrow{U_p} \right] \end{aligned}$$

dir.

İspat: β eğrisi birim hızlı olmadığından

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{\beta'} \wedge \overrightarrow{\beta''}) \Big|_{f(p)} &= \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{T_p} \wedge \overrightarrow{U_p} \\ &\quad + \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} - k_n \lambda \right) \left(k_g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\tau'_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\left\| p \right\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{T}_p \wedge \vec{V}_p \\
& -\tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \left(-k_n \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\left\| p \right\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} - k'_n \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) + k_g \tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p \wedge \vec{T}_p \\
& -\tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n^2 \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g^2 \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p \wedge \vec{U}_p \\
& = -\tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \left(k_n \cos^2 \frac{\theta}{2} - (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{T}_p \\
& + \left(k_g v^2 + k_n \tau'_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 - \tau'_g \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \\
& - \tau_g \frac{\langle \vec{p}, \vec{T}_p \rangle}{\left\| p \right\|} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} - k'_n \tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \vec{U}_p \\
& - \left(k_n \cos^4 \frac{\theta}{2} - 2k_n^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) - \tau_g^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \\
& + k_n (k_n^2 + \tau_g^2) \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \vec{V}_p \\
& = -v^2 k_n^g \tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p - v^2 k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p + v^3 k_g^g \vec{U}_p
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\| \vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}'' \right\|_{f(p)}^2 &= v^4 (k_n^g)^2 \tau_g^2 \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 + v^4 (k_n^g)^2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right)^2 + v^6 (k_g^g)^2 \\
&= v^6 \left[(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2 \right]
\end{aligned}$$

olacağından $\left\| \vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}'' \right\|_{f(p)} = v^3 \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}$ elde edilir.

O halde,

$$\begin{aligned}
\vec{B}^g \Big|_{f(p)} &= \frac{\vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}''}{\left\| \vec{\beta}' \wedge \vec{\beta}'' \right\|} \Big|_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[-k_n^g \tau_g \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \vec{T}_p - k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \vec{V}_p + v k_g^g \vec{U}_p \right]
\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N^g} \Big|_{f(p)} &= \left(\overrightarrow{B^g} \wedge \overrightarrow{T^g} \right) \Big|_{f(p)} \\
&= \frac{1}{v^2 \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[k_n^g \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \overrightarrow{T_p} \wedge \overrightarrow{V_p} - k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right)^2 \overrightarrow{V_p} \wedge \overrightarrow{T_p} \right. \\
&\quad \left. + v k_g^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{U_p} \wedge \overrightarrow{T_p} - v k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{U_p} \wedge \overrightarrow{V_p} \right] \\
&= \frac{1}{v^2 \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[k_n^g \tau_g^2 \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right)^2 \overrightarrow{U_p} + k_n^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right)^2 \overrightarrow{U_p} \right. \\
&\quad \left. + v k_g^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{V_p} + v k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T_p} \right] \\
&= \frac{1}{v \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}} \left[k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T_p} + k_g^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{V_p} + v k_n^g \overrightarrow{U_p} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 5.4.1. Bir M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}$ olmak üzere

$$\kappa^g(t) = \left\langle \overrightarrow{T^g}'(t), \overrightarrow{N^g}(t) \right\rangle$$

ifadesine $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki eğriliği denir.

Tanım 5.4.2. Bir M yüzeyi üzerindeki birim hızlı α eğrisinin M^g vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}$ olmak üzere

$$\tau^g(t) = \left\langle \overrightarrow{N^g}'(t), \overrightarrow{B^g}(t) \right\rangle$$

ifadesine $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki burulması denir.

Teorem 5.4.2. M^g yüzeyi üzerinde $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}$, eğriliği κ^g , burulması τ^g ve $v = \|f_*(T)\|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T^{g'}} &= \nu \kappa^g \overrightarrow{N^g} \\ \overrightarrow{N^{g'}} &= -\nu \kappa^g \overrightarrow{T^g} + \nu \tau^g \overrightarrow{B^g} \\ \overrightarrow{B^{g'}} &= -\nu \tau^g \overrightarrow{N^g}\end{aligned}$$

dir.

İspat: $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}_{f(p)}$ kümesi $\forall f(p) \in M^g$ için $T_{f(p)}(M^g)$ uzayının bir ortonormal bazı

olduğundan $\overrightarrow{T^{g'}} = a_1 \overrightarrow{T^g} + a_2 \overrightarrow{N^g} + a_3 \overrightarrow{B^g}$ olur. $\overrightarrow{T^{g'}}$ ile $\overrightarrow{T^g}$ nin iç çarpımı incelenirse

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{B^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle \\ &\Rightarrow a_1 = 0\end{aligned}$$

olduğu görülür. $\overrightarrow{T^{g'}}$ ile $\overrightarrow{N^g}$ nin iç çarpımını incelenirse

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{N^g} \rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{N^g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{B^g}, \overrightarrow{N^g} \rangle \\ &\Rightarrow a_2 = \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{N^g} \rangle = \nu \langle \overrightarrow{\beta''}, \overrightarrow{N^g} \rangle = \nu \kappa^g\end{aligned}$$

ve $\overrightarrow{T^{g'}}$ ile $\overrightarrow{B^g}$ nin iç çarpımından

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{B^g} \rangle &= a_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{B^g} \rangle + a_2 \langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g} \rangle + a_3 \langle \overrightarrow{B^g}, \overrightarrow{B^g} \rangle \\ &\Rightarrow a_3 = \langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{B^g} \rangle = \nu \langle \overrightarrow{\beta''}, \overrightarrow{B^g} \rangle = 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\overrightarrow{N^{g'}} = b_1 \overrightarrow{T^g} + b_2 \overrightarrow{N^g} + b_3 \overrightarrow{B^g}$ olduğunu varsayalım. $\overrightarrow{N^{g'}}$ ile $\overrightarrow{T^g}$ nin iç çarpımı incelenirse

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle &= b_1 \langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + b_2 \langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle + b_3 \langle \overrightarrow{B^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle \\ &\Rightarrow b_1 = \langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{T^g} \rangle = 0$ eşitliğinin her iki tarafının türevi alındığında

$$\langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle = -\langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{T^{g'}} \rangle$$

olacağından $b_1 = \langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \rangle = -\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{N^g} \rangle = -a_2 = -\nu \kappa^g$ elde edilir.

$\overrightarrow{N^{g'}}$ ile $\overrightarrow{B^g}$ nin iç çarpımından

$$\begin{aligned}\left\langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle &= b_1 \left\langle \overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle + b_2 \left\langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle + b_3 \left\langle \overrightarrow{B^g}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle \\ \Rightarrow b_3 &= \left\langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle = v\tau^g\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Bu kez $\overrightarrow{B^{g'}} = c_1 \overrightarrow{T^g} + c_2 \overrightarrow{N^g} + c_3 \overrightarrow{B^g}$ olduğu varsayılarak yukarıdaki işlemler $\overrightarrow{B^{g'}}$ için tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}c_1 &= \left\langle \overrightarrow{B^{g'}}, \overrightarrow{T^g} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{T^{g'}}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle = -vk_n^g \\ c_2 &= \left\langle \overrightarrow{B^{g'}}, \overrightarrow{N^g} \right\rangle = -\left\langle \overrightarrow{N^{g'}}, \overrightarrow{B^g} \right\rangle = -v\tau^g \\ c_3 &= 0\end{aligned}$$

elde edileceğinden

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{T^{g'}} \\ \overrightarrow{N^{g'}} \\ \overrightarrow{B^{g'}} \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & \kappa^g & 0 \\ -\kappa^g & 0 & \tau^g \\ 0 & -\tau^g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T^g} \\ \overrightarrow{N^g} \\ \overrightarrow{B^g} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem 5.4.3. M^g yüzeyinin $f(\alpha(t))$ noktasındaki $\beta = (f \circ \alpha)$ eğrisinin Frenet üçyüzlüsü $\{\overrightarrow{T^g}, \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{B^g}\}$ ve eğrinin asli normali $\overrightarrow{N^g}$ ile yüzeyin birim normali $\overrightarrow{U^g}$ arasındaki açı Φ^g ve eğrinin eğriliği κ^g ise

$$\kappa^g = \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2} \text{ ve } \cos \Phi^g = \frac{k_n^g}{\kappa^g}$$

dir.

İspat: $\kappa^g(f(p)) = \frac{\|\overrightarrow{\beta'} \wedge \overrightarrow{\beta''}\|_{f(p)}^2}{\|\overrightarrow{\beta'}\|_{f(p)}^3}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\kappa^g|_{f(p)} &= \frac{v^3 \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}}{v^3} \\ &= \sqrt{(k_n^g)^2 + (k_g^g)^2}\end{aligned}$$

bulunur.

Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
 \cos \Phi^g &= \left\langle \overrightarrow{N^g}, \overrightarrow{U^g} \right\rangle \Big|_{f(p)} \\
 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{k_n^g{}^2 + k_g^g{}^2}} \left[k_g^g \tau_g \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{T}_p + k_g^g \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - k_n \left(\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \right) \overrightarrow{V}_p + \nu k_n^g \overrightarrow{U}_p \right], \overrightarrow{U}_p \right\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{k_n^g{}^2 + k_g^g{}^2}} \nu k_n^g \left\langle \overrightarrow{U}_p, \overrightarrow{U}_p \right\rangle \\
 &= \frac{k_n^g}{\kappa^g}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

5.5. Vida Yüzeylerine Ait Bir Örnek

Örnek 5.1. $M = \left\{ \phi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \mid -\pi/2 \leq u \leq 0, -\pi/2 \leq v \leq 0 \right\}$

sekizde bir birim küre yüzeyini alalım. Tanım 4.1.6 dan yararlanarak M yüzeyinin birim normalini bulalım:

$\phi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$ ve $\phi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$ olmak üzere

$$\phi_u \wedge \phi_v = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$$

dir. $\|\phi_u \wedge \phi_v\| = \cos u$ olduğundan

$$U = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

olarak elde edilir

$\forall p = \phi(u, v) \in M$ noktası için dönme eksenini $\overrightarrow{U}_p$, dönme açısı $\pi/2$ radyan ve öteleme vektörü $\vec{t} = 2\overrightarrow{U}_p$ alınırsa M yüzeyinin vida yüzeyi

$$M^g = \left\{ \phi(u, v) = (-2 \cos u \cos v, -2 \cos u \sin v, -2 \sin u) \mid -\pi/2 \leq u \leq 0, -\pi/2 \leq v \leq 0 \right\}$$

olur.

M yüzeyi üzerindeki $C = \left\{ \phi(u, 0) = (0, -\cos u, \sin u) \mid -\pi/2 \leq u \leq 0 \right\}$ eğrisinin bir

$p_0 = (0, -1, 0) \in M$ noktasındaki Darboux çatısı hesaplandığında

$$\vec{T}(p_0) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{V}(p_0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{U}(p_0) = (0, 1, 0)$$

elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapıldığında M yüzeyinin bu noktadaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulmasının sırasıyla aşağıdaki gibi olduğu görülür:

$$k_g(p_0) = 0$$

$$k_n(p_0) = 1$$

$$\tau_g(p_0) = 0.$$

$C = \left\{ \phi(u, 0) = (0, -\cos u, \sin u) \mid -\pi/2 \leq u \leq 0 \right\}$ eğrisinin $p_0 = (0, -1, 0) \in M$ noktasındaki Frenet çatısı ise

$$\vec{T}(p_0) = (0, 0, 1)$$

$$\vec{N}(p_0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{B}(p_0) = (-1, 0, 0)$$

olur. p_0 noktasının M yüzeyinin vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü hesaplandığında ise $g_0 = f(p_0) = (0, 2, 0)$ noktası ile karşılaşılacaktır. Bu durumda Teorem 5.3.2 den eğrinin vida yüzeyi üzerindeki görüntüsü olan C' eğrisinin bu noktadaki geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması sırasıyla

$$k_g^g(f(p_0)) = 0$$

$$k_n^g(f(p_0)) = -1/2$$

$$\tau_g^g(f(p_0)) = 0$$

ve Teorem 4.4.1 den C' eğrisinin Frenet çatısı

$$\vec{T}_{f(p_0)}^g = (0, 0, -1)$$

$$\vec{N}_{f(p_0)}^g = (0, -1, 0)$$

$$\vec{B}_{f(p_0)}^g = (-1, 0, 0)$$

olarak elde edilir.

Maple programı yardımıyla sekizde bir birim küre yüzeyine ait vida yüzeyinin, M yüzeyi üzerindeki $C = \left\{ \phi(u, 0) = (0, -\cos u, \sin u) \mid -\pi/2 \leq u \leq 0 \right\}$ eğrisinin vida yüzeyi üzerindeki görüntüsünün ve iki eğriye ait Frenet çatılarının hesaplanması aşağıdaki gibidir (Şekil 5.3):

```

> restart:
> with(VectorCalculus):
> with(plottools):
> with(plots):
> with(LinearAlgebra):
> p:=<cos(x)*cos(y),cos(x)*sin(y),sin(x)>;
      
$$p := (\cos(x) \cos(y))e_x + (\cos(x) \sin(y))e_y + (\sin(x))e_z$$

> p0:=point([0,-1,0],color=black,symbolsize=20):
> c:=<0,-cos(x),sin(x)>;
> c1:=spacecurve([0,-cos(x),sin(x)],x=-(Pi)/(2)..0,color=
black,thickness=3):
> s[x]:=<-sin(x)*cos(y),-sin(x)*sin(y),cos(x)>;
> s[y]:=<-cos(x)*sin(y),cos(x)*cos(y),0>;
> N1:=simplify(CrossProduct(s[x],s[y])):
> N:=<-cos(x)*cos(y),-cos(x)*sin(y),-sin(x)>;
      
$$N := -\cos(x) \cos(y)e_x - \cos(x) \sin(y)e_y - \sin(x)e_z$$

> T:=diff(c,x);
      
$$T := (\sin(x))e_y + (\cos(x))e_z$$

> U:=<0,cos(x),-sin(x)>;
> t:=arrow([0,-1,0],Vector([0,0,1]),color=red):
> b:=simplify((CrossProduct(diff(c,x),diff(diff(c,x),x)))):
      
$$b := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> b1:=arrow([0,-1,0],Vector([-1,0,0]),color=green):
> n2:=simplify(CrossProduct(b,T));
      
$$n2 := \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x) \\ -\sin(x) \end{bmatrix}$$

> n1:=arrow([0,-1,0],Vector([0,1,0]),color=blue):
> k[g]:=0;
      
$$k_g := 0$$

> tau[1]:=simplify(DotProduct(diff(V,x),N,conjugate=false));
      
$$\tau_1 := -\sin(x) \cos(y)$$

> tau[g]:=0;
      
$$\tau_g := 0$$

> v:=simplify(sqrt(((1)/(2)-k[n]*((1)/(2)+2))^(2))):
> k[gg]:=simplify((k[g])/(v));
      
$$k_{gg} := 0$$

> k[gn]:=simplify((k[n]*(1)/(2)-(k[n])^(2)*((1)/(2)+2))/((v)^(2)));
      
$$k_{gn} := -\frac{1}{2}$$

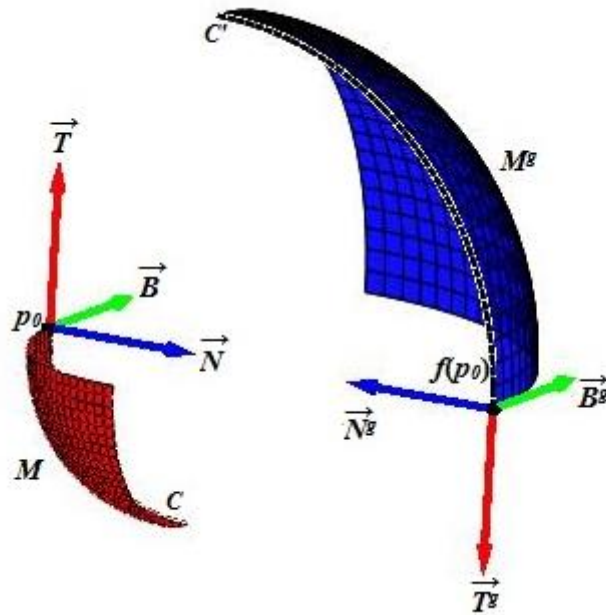

```

```

> kp:=simplify(sqrt((k[gn])^(2)+k[gg]^(2))*v):

> G:=simplify((1)/(2)*p+((5)/(2))*N);
      G := -2 cos(x) cos(y)ex - 2 cos(x) sin(y)ey - 2 sin(x)ez
> g[1]:=simplify((1)/(2)*c+((1)/(2)*VectorNorm(c,2,conjugate=false)
+2)*U);
      g1 := 2 cos(x)ey - 2 sin(x)ez
> g0:=point([0,2,0],color=black,symbolsize=20):
> c2:=SpaceCurve(g[1],x=-(Pi)/(2)..0,color=black,thickness=3):
> tg:=simplify((1)/(v)*((1)/(2)-k[n]*((1)/(2)+2))*T);
      tg := -sin(x)ey - cos(x)ez
> tg1:=arrow([0,2,0],Vector([0,0,-1]),color=red):
> ng:=simplify(((k[gg]*((1)/(2)-k[n]*((1)/(2)+2)))/(kp)*V+(v*k[gn]
)/(kp)*N);
      ng := (cos(x) cos(y))ex + (cos(x) sin(y))ey + (sin(x))ez
> ng1:=arrow([0,2,0],Vector([0,-1,0]),color=blue):
> bg:=simplify((1)/(v*(sqrt((k[gn])^(2)+k[gg]^(2))))*(-k[gn]*((1)/(
2)-k[n]*((1)/(2)+2))*V+v*k[gg]*N);
      bg := (cos(x)2 sin(y) - 1 + cos(x)2)ex - cos(x)2 cos(y)ey + (cos(x) cos(y) sin(x))ez
> bg1:=arrow([0,2,0],Vector([-1,0,0]),color=green):
> s:=plot3d([cos(x)*cos(y),cos(x)*sin(y),sin(x)],x=-(Pi)/(2)..0,y=-(
Pi)/(2)..0,color=red):
> s2:=plot3d(G,x=-(Pi)/(2)..0,y=-(Pi)/(2)..0,color=blue,style=
surface):
> display([s,s2,c1,c2,t,n1,b1,tg1,ng1,bg1,p0,g0]);

```



Şekil 5.3. Sekizde bir birim küre yüzeyi ve vida yüzeyi.

Diğer taraftan, M yüzeyinin şekil operatörünün matrisi

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğundan M yüzeyinin K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği sırasıyla $K=1$ ve $H=-2$ dir. M^g vida yüzeyinin şekil operatörü hesaplandığında ise

$$S^g = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu durumda M^g vida yüzeyinin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği sırasıyla

$K^g = \frac{1}{4}$ ve $H^g = 1$ olur. Bu sonuca Teorem 5.2.3 ile de ulaşılabilir.

Ayrıca dikkat edilirse M yüzeyinin bütün noktaları umbilik noktalardır. M^g vida yüzeyinin şekil operatörü incelendiğinde bu yüzeyin de bütün noktalarının umbilik nokta olduğu görülür. Bu durum, vida yüzeyi fonksiyonunun umbilik nokta olma özelliğini koruduğunun somut halidir.

6. SABİT SIRT UZAKLIKLI VİDA YÜZEYLERİ

Bu bölümde öncelikle sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi kavramı verilmiştir. Bu yüzeylerin şekil operatörü, Gauss ve ortalama eğrilikleri hesaplanmıştır.

6.1. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeyinin Tanımı

Tanım 6.1.1. M ve $M^\vee$, E^3 uzayında iki yüzey, M nin bir p noktasındaki birim normal vektörü $\overrightarrow{U_p}$ ve tanjant uzayı $T_p(M)$, $T_p(M)$ nin ortonormal bir bazı $\{X_p, Y_p\}$ olsun. d_1, d_2, d_3 sabit sayılar ve $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ olmak üzere $\overrightarrow{Z_p} = d_1 \overrightarrow{X_p} + d_2 \overrightarrow{Y_p} + d_3 \overrightarrow{U_p}$ şeklinde $\overrightarrow{X_p}, \overrightarrow{Y_p}, \overrightarrow{U_p}$ ye sıkı suretle bağlı $\overrightarrow{Z_p}$ birim vektörünü alalım. $\lambda \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı olmak üzere, $f : M \rightarrow M^\vee$

$$f(p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} p + \left(\left\| \overrightarrow{p} \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overrightarrow{Z_p}$$

olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa $M^\vee$ yüzeyine M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi adı verilir.

Teorem 6.1.1. M ve $M^\vee$, E^3 uzayında iki yüzey olsun. E^3 ün $\{x_1, x_2, x_3\}$ Öklid koordinat

sistemine göre $W = \sum_{i=1}^3 w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\overline{W} = \sum_{i=1}^3 \overline{w}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\forall p \in M$ için $w_i(p) = \overline{w}_i(f(p))$, $1 \leq i \leq 3$

özellikle verilsin. Bu durumda $W = \sum_{i=1}^3 w_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \chi(M)$ için

$$f_*|_p(W_p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \overline{W}_{f(p)} + \mu \overline{D_W Z}|_{f(p)} + \frac{1}{\left\| p \right\| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \langle p, \overline{W}(f(p)) \rangle Z_p$$

dir.

İspat: $f : M \rightarrow M^\vee$ dönüşümü E^3 uzayına

$$f : E^3 \rightarrow E^3,$$

$$f(p) = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} p_1 + \mu z_1(p), \cos^2 \frac{\theta}{2} p_2 + \mu z_2(p), \cos^2 \frac{\theta}{2} p_3 + \mu z_3(p) \right)$$

olarak genişletilsin. $Z = \sum_{i=1}^3 z_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ vektör alanının bileşenlerini de E^3 uzayına

$$z_i(p) = \begin{cases} z_i(p), & p \in M \\ 0, & p \notin M \end{cases}$$

olarak genişletelim. Öklid koordinat sistemine göre f dönüşümünün koordinat fonksiyonları

$f_i = \cos^2 \frac{\theta}{2} x_i + \mu z_i$, $1 \leq i \leq 3$ olduğundan f_* dönüşümüne karşılık gelen matris

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} x_i + \mu z_i \right) \right] &= \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial z_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu}{\partial x_j} z_i \right] \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right] + \mu \left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right] + \left[\frac{\partial \mu}{\partial x_j} z_i \right] \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} I_3 + \mu \left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right] + \left[\frac{\partial \mu}{\partial x_j} z_i \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

$$W_p = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in T_p(M) \text{ için}$$

$$\begin{aligned} f_*|_p(W_p) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} I_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_p + \mu \left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right]_p \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_p + \left[\frac{\partial \mu}{\partial x_j} z_i \right]_p \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_p \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \end{bmatrix} + \mu \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right]_p w_j(p) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu}{\partial x_1} w_1 z_1 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} w_2 z_1 + \frac{\partial \mu}{\partial x_3} w_3 z_1 \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_1} w_1 z_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} w_2 z_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_3} w_3 z_2 \\ \frac{\partial \mu}{\partial x_1} w_1 z_3 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} w_2 z_3 + \frac{\partial \mu}{\partial x_3} w_3 z_3 \end{bmatrix}_p \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \end{bmatrix} + \mu \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right]_p w_j(p) + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1} w_1 + \frac{\partial \mu}{\partial x_2} w_2 + \frac{\partial \mu}{\partial x_3} w_3 \right)_p \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}_p \\ &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} w_1(p) \\ w_2(p) \\ w_3(p) \end{bmatrix} + \mu \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right]_p w_j(p) + \langle \nabla \mu|_p, W(p) \rangle \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}_p \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \langle \nabla \mu|_p, W(p) \rangle &= \left\langle \left(\frac{p_1}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \frac{p_2}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}}, \frac{p_3}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right), (w_1(p), w_2(p), w_3(p)) \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \langle (p_1, p_2, p_3), (w_1(p), w_2(p), w_3(p)) \rangle \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \langle p, W(p) \rangle$$

olacağından

$$\begin{aligned} f_*|_p(W_p) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^3 w_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(p)} + \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \Big|_p w_j(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(p)} \\ &\quad + \frac{1}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \langle p, W(p) \rangle \sum_{i=1}^3 z_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{f(p)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada sağ taraftaki ilk terim $w_i(p) = \overline{w_i}(f(p))$ olduğundan $\cos^2 \frac{\theta}{2} \overline{W}_{f(p)}$ ve

ikinci terim $\mu \overline{D_W Z} \Big|_{f(p)}$ dir. O halde

$$f_*|_p(W_p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \overline{W}_{f(p)} + \mu \overline{D_W Z} \Big|_{f(p)} + \frac{1}{\|p\| \sin^2 \frac{\theta}{2}} \langle p, \overline{W}(f(p)) \rangle \overline{Z}_{f(p)}$$

elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \phi: U \subset E^3 &\rightarrow M \\ (u, v) &\rightarrow p = \phi(u, v) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda $\{\phi_u|_p, \phi_v|_p\}$, $T_p(M)$ nin bir bazı olur. U_p, M nin bir p noktasındaki birim normal vektörü ve $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$, $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ eşitliğini sağlayan sabit sayılar olmak üzere $\overline{Z}_p = d_1 \overline{\phi_u}|_p + d_2 \overline{\phi_v}|_p + d_3 \overline{U_p}$ yazılabilir. O halde, $M^\vee$ yüzeyinin parametrik gösterimi

$$M^\vee = \left\{ f(p) \Big| f(p) = \cos^2 \frac{\theta}{2} p + \left(\|\overline{p}\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda \right) \overline{Z}_p \right\}$$

olduğundan $\mu = \|\phi(u, v)\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M^\vee &= \left\{ \psi(u, v) \Big| \psi(u, v) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi(u, v) + \mu (d_1 \phi_u + d_2 \phi_v + d_3 U), d_1, d_2, d_3 \text{ sabit sayılar,} \right. \\ &\quad \left. d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda ψ_u ve ψ_v

$$\psi_u = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi_u + d_1 \mu \phi_{uu} + d_1 \mu_u \phi_u + d_2 \mu \phi_{uv} + d_2 \mu_u \phi_v + d_3 \mu U_u + d_3 \mu_u U$$

$$\psi_v = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi_v + d_1 \mu \phi_{uv} + d_1 \mu_v \phi_u + d_2 \mu \phi_{vv} + d_2 \mu_v \phi_v + d_3 \mu U_v + d_3 \mu_v U$$

olarak elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\phi_{uu} &= \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} U, \\
\phi_{uv} &= \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} U, \\
\phi_{vv} &= \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_u \rangle}{\|\phi_u\|^2} \phi_u + \frac{\langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle}{\|\phi_v\|^2} \phi_v + \frac{\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\| \|\phi_v\|} U, \\
U_u &= -\frac{\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \phi_u - \frac{\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \phi_v, \\
U_v &= -\frac{\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \phi_u - \frac{\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)}{\|\phi_u\|^2 \|\phi_v\|^2} \phi_v.
\end{aligned}$$

olarak elde edilebilir.

M nin parametre eğrileri yerine asli doğrultularını alalım ve u ile v bu asli doğrultuların yay parametresi olsun. Yani $\|\phi_u\|=1$ ve $\|\phi_v\|=1$ olsun. Bu durumda, $\det(\phi_{uv}, \phi_u, \phi_v)=0$ ve $\langle \phi_u, \phi_v \rangle=0$ olur. Ayrıca, k_1 ve k_2 , M nin asli eğrilikleri ise $k_1 = -\det(\phi_{uu}, \phi_u, \phi_v)$ ve $k_2 = -\det(\phi_{vv}, \phi_u, \phi_v)$ dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\langle \phi_u, \phi_u \rangle &= 1 \Rightarrow \phi_u [\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = 0 \Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_u \rangle = 0 \\
\langle \phi_v, \phi_v \rangle &= 1 \Rightarrow \langle \phi_{vv}, \phi_v \rangle = 0 \\
\langle \phi_u, \phi_u \rangle &= 1 \Rightarrow \phi_v [\langle \phi_u, \phi_u \rangle] = 0 \Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_u \rangle = 0 \\
\langle \phi_v, \phi_v \rangle &= 1 \Rightarrow \phi_u [\langle \phi_v, \phi_v \rangle] = 0 \Rightarrow \langle \phi_{vu}, \phi_v \rangle = 0 \\
\langle \phi_u, \phi_v \rangle &= 0 \Rightarrow \phi_u [\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = 0 \Rightarrow \langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vu} \rangle \\
\langle \phi_u, \phi_v \rangle &= 0 \Rightarrow \phi_v [\langle \phi_u, \phi_v \rangle] = 0 \Rightarrow \langle \phi_{uv}, \phi_v \rangle = -\langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle
\end{aligned}$$

ve $\phi_{uv} = \phi_{vu}$ olduğundan $\langle \phi_{uu}, \phi_v \rangle = 0 = \langle \phi_u, \phi_{vv} \rangle$ bulunur. Öyleyse,

$$\phi_{uu} = -k_1 U, \quad \phi_{uv} = \phi_{vu} = 0, \quad \phi_{vv} = -k_2 U, \quad U_u = k_1 \phi_u, \quad U_v = k_2 \phi_v$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000).

Sonuç olarak,

$$\psi_u = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) \phi_u + d_2 \mu_u \phi_v + (d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) U \quad (6.1)$$

$$\psi_v = d_1 \mu_v \phi_u + \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) \phi_v + (d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) U \quad (6.2)$$

elde edilir ve $\{\psi_u, \psi_v\}$, $\chi(M^v)$ uzayının bir bazı olur. M^v yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned}
A &= \|\psi_u \wedge \psi_v\| \\
&= \left[\left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right)^2 \right. \\
&\quad + \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right)^2 \\
&\quad \left. + \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 (k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right)^2 \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
U^v &= \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} \\
&= \frac{1}{A} \left[\left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \phi_u \right. \\
&\quad + \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \phi_v \\
&\quad \left. + \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 (k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right) U \right] \quad (6.3)
\end{aligned}$$

dir.

Yardımcı Teorem 6.1.1. M^v yüzeyinin M yüzeyinin paralel yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $\theta = 0$ ve $d_1 k_1 = d_2 k_2 = 0$ olmasıdır.

İspat: $\theta = 0$ ise $\mu = \|\phi(u, v)\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda = \lambda = \text{sabit}$ olacaktır. Bu durumda

$$\psi_u \wedge \psi_v = (d_1 k_1 \lambda + d_1 d_3 k_1 k_2 \lambda^2) \phi_u + (d_2 k_2 \lambda + d_2 d_3 k_1 k_2 \lambda^2) \phi_v + (1 + d_3 (k_1 + k_2) \lambda + k_1 k_2 d_3^2 \lambda^2) U$$

elde edilir. $d_1 k_1 = d_2 k_2 = 0$ ise

$$\psi_u \wedge \psi_v = (1 + d_3 (k_1 + k_2) \lambda + d_3^2 k_1 k_2 \lambda^2) U \text{ dir.}$$

Buradan

$$U^v = \frac{\psi_u \wedge \psi_v}{\|\psi_u \wedge \psi_v\|} = U$$

olacağından (M, M^v) paralel yüzey çifti olur.

6.2. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerinin Şekil Operatörü

U, M nin birim normal vektör alanı, $\{\phi_u, \phi_v\}$ ortonormal asli vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı ve k_1 ile k_2 , M nin asli eğrilikleri olsun. E^3 ün R ile gösterilen Riemann eğriliği sıfır olduğundan

$$R(\phi_u, \phi_v)U = 0$$

$$D_{\phi_u}(D_{\phi_v})U - D_{\phi_v}(D_{\phi_u})U - D_{[\phi_u, \phi_v]}U = 0$$

$$D_{\phi_u}(k_2\phi_v) - D_{\phi_v}(k_1\phi_u) - D_{(D_{\phi_u}\phi_v - D_{\phi_v}\phi_u)}U = 0$$

olur (Sabuncuoğlu, 2010). $D_{\phi_u}\phi_v - D_{\phi_v}\phi_u = \phi_{vu} - \phi_{uv} = 0$ olduğundan $D_{\phi_u}(k_2\phi_v) - D_{\phi_v}(k_1\phi_u) = 0$ dir.

Buradan $-\frac{\partial k_1}{\partial v}\phi_u + \frac{\partial k_2}{\partial u}\phi_v = 0$ bulunur. $\{\phi_u, \phi_v\}$ lineer bağımsız olduğundan $\frac{\partial k_1}{\partial v} = 0$ ve $\frac{\partial k_2}{\partial u} = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned} S^v(\psi_u) &= D_{\psi_u}U^v = \frac{\partial U^v}{\partial u} \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(d_1k_1\mu - d_3\mu_u)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_u + d_1d_2k_1\mu\mu_v + d_1d_3k_1k_2\mu^2}{A} \right) \phi_u \\ &\quad - \frac{(d_1k_1\mu - d_3\mu_u)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_u + d_1d_2k_1\mu\mu_v + d_1d_3k_1k_2\mu^2}{A} k_1U \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(d_2k_2\mu - d_3\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2)k_1\mu\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu^2}{A} \right) \phi_v \\ &\quad + \frac{(d_2k_2\mu - d_3\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2)k_1\mu\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu^2}{A} \phi_{uv} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_3(k_1 + k_2)\mu + d_1\mu_u + d_2\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} + d_3^2k_1k_2\mu^2 + d_1d_3k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v}{A} \right) U \\ &\quad + \frac{\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_3(k_1 + k_2)\mu + d_1\mu_u + d_2\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} + d_3^2k_1k_2\mu^2 + d_1d_3k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v}{A} U_u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \right) \phi_u \\
&- \frac{(d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} k_1 U \\
&+ \frac{(d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \phi_{uu} \\
&+ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \right) \phi_v \\
&+ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{A} \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 (k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right. \right. \\
&\left. \left. + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u \right) \right] U + \frac{1}{A} \left[\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 (k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\left. + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right] k_1 \phi_u \\
&= \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{A} \left(k_1 \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 k_1^2 \mu + d_3 k_1 k_2 \mu + d_1 k_1 \mu_u + d_2 k_1 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \right. \right. \\
&\left. \left. + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v \right) \right] \phi_u \\
&+ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{(d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \right) \phi_v \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 k_1 \mu + d_3 k_2 \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 \right. \right. \right. \\
&\left. \left. + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right) \right) - \frac{1}{A} \left((d_1 k_1^2 \mu - d_3 k_1 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\left. \left. - (d_2^2 + d_3^2) k_1 k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1^2 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1^2 k_2 \mu^2 \right) \right] U
\end{aligned} \tag{6.4}$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan $S^v(\psi_u)$ nun ψ_u ve ψ_v cinsinden değeri

$$S^v(\psi_u) = \alpha_1 \psi_u + \alpha_2 \psi_v$$

olacağından (5.1) ve (5.2) den ψ_u ve ψ_v nin değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S^v(\psi_u) &= \alpha_1 \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) \phi_u + d_2 \mu_u \phi_v + (d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) U \right] \\ &\quad + \alpha_2 \left[d_1 \mu_v \phi_u + \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) \phi_v + (d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) U \right] \\ &= \left[\alpha_1 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) + \alpha_2 d_1 \mu_v \right] \phi_u \\ &\quad + \left[\alpha_1 d_2 \mu_u + \alpha_2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) \right] \phi_v \\ &\quad + \left[\alpha_1 (d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) + \alpha_2 (d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \right] U \end{aligned} \quad (6.5)$$

elde edilir. (6.4) ve (6.5) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) + \alpha_2 d_1 \mu_v &= \frac{1}{A} \left(k_1 \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 k_1^2 \mu + d_3 k_1 k_2 \mu + d_1 k_1 \mu_u \right. \\ &\quad \left. + d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_2^2 k_2 \mu \mu_u \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - d_3^2 k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (6.6)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 d_2 \mu_u + \alpha_2 \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{A} \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1^2 k_1 \mu \mu_v \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - d_3^2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

ve

$$\begin{aligned} \alpha_1 (d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) + \alpha_2 (d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 k_1 \mu + d_3 k_2 \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{A} \left((d_1 k_1^2 \mu - d_3 k_1 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_1 k_2 \mu \mu_u \right. \\ &\quad \left. + d_1 d_2 k_1^2 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1^2 k_2 \mu^2 \right) \end{aligned} \quad (6.8)$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir.

(6.6) denklemi " $\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu$ " ile çarpılıp elde edilen ifadeden (6.7) denkleminin

" $d_1 \mu_v$ " katı çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) - d_1 d_2 \mu_u \mu_v \right] \\
 &= \frac{1}{A} \left(k_1 \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 k_1^2 \mu + d_3 k_1 k_2 \mu + d_1 k_1 \mu_u + d_2 k_1 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
 & \quad \left. + d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) \\
 & \quad + \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \left. + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \right) \right] \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{A} \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \right] d_1 \mu_v
 \end{aligned}$$

olur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1 \left[\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 \mu \mu_v + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 \right] \\
 &= \frac{1}{A^2} \left[\left(k_1 \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 \mu \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3 k_1^2 \mu + 2d_3 k_1 k_2 \mu + 2d_1 k_1 \mu_u + 2d_2 k_1 \mu_v - d_3 \mu_{uu} \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(-d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_3 \mu_{uv} \mu_v + 2d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2 d_3 \mu_{uu} \mu_v + 2d_1 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 \right. \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2d_3^2 k_2 \mu \mu_{uu} - d_2^2 k_2 \mu_u^2 - d_2^2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_{uv} + 5d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v + 3d_1 d_2 k_1 \mu_u \mu_v + d_2^2 k_1 \mu_v^2 + 2d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 - d_3^2 k_2 \mu_u^2 + d_2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
 & \quad \left. + d_1^3 k_1 \mu_u \mu_v^2 + d_1 d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 + d_1^3 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^2 \mu_v - d_2^3 k_2 \mu_u^2 \mu_v \right. \\
 & \quad \left. + d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v + d_1 d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 + d_1 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v \right. \\
 & \quad \left. - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} + 2d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_3^3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} \right. \\
 & \quad \left. + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{uv} + d_1 d_3^2 k_2^2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + 2d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_v \right. \\
 & \quad \left. + d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v^2 + d_3^3 k_1^2 k_2^2 \mu^3 + d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2^2 \mu^2 \mu_v \right) A
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left((d_3\mu_u - d_1k_1\mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1d_2k_2\mu\mu_v - d_1d_3\mu_v^2 + d_2^2k_2\mu\mu_u + 2d_3^2k_2\mu\mu_u - 2d_1d_2k_1\mu\mu_v \right. \\
& - 2d_1d_3k_1k_2\mu^2 + d_2d_3\mu_u\mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1^3k_1\mu\mu_v^2 + d_2k_2\mu\mu_u\mu_v - d_1d_2^2k_1\mu\mu_v^2 \\
& \left. - d_1d_3^2k_1\mu\mu_v^2 - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_v + d_2^2d_3k_2^2\mu^2\mu_u + d_3^3k_2^2\mu^2\mu_u - d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^3 \right) \frac{\partial A}{\partial u} \Big]
\end{aligned}$$

elde edilir. (6.3) den

$$\begin{aligned}
\langle U^v, U \rangle = & \frac{1}{A} \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3k_1\mu + d_3k_2\mu + d_1\mu_u + d_2\mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
& \left. + d_3^2k_1k_2\mu^2 + d_1d_3k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v \right)
\end{aligned} \tag{6.9}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = & \frac{1}{A^3 \langle U^v, U \rangle} \left[\left(k_1 \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_1\mu \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3k_1^2\mu + 2d_3k_1k_2\mu + 2d_1k_1\mu_u - d_3\mu_{uu} \right. \right. \right. \\
& + 2d_2k_1\mu_v) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (5d_1d_3k_1k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1^2\mu\mu_v - d_1d_2k_2\mu_u\mu_v + d_1d_2k_1\mu\mu_{uv} \\
& + d_3^2k_1k_2^2\mu^2 + 3d_1d_2k_1\mu_u\mu_v + d_2d_3k_1^2k_2\mu\mu_v + d_1d_3\mu_{uv}\mu_v + 2d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v \\
& - d_3^2k_2\mu\mu_u + 2d_3^2k_1^2k_2\mu^2 + 2d_1d_3k_2\mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + 2d_1d_2\mu\mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2^2k_2\mu\mu_{uu} \\
& - d_3^2k_2\mu\mu_{uu} + d_2^2k_1\mu_v^2 - d_2^2k_2\mu_u^2 - d_3^2k_2\mu_u^2 - d_2d_3\mu_{uu}\mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& + d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_{uv} + d_1d_2d_3k_2\mu^2\mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1^3\mu\mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3^3k_1^2k_2^2\mu^3 - d_3^3k_2^2\mu^2\mu_u \\
& - d_3^3k_2\mu_u^2\mu_v + d_2d_3^2k_1^2k_2\mu^2\mu_v + d_1^3k_1\mu_u\mu_v^2 - d_3^3k_2^2\mu\mu_u^2 + d_2d_3^2k_1^2k_2^2\mu^2\mu_v \\
& - d_2d_3^2k_2\mu\mu_u\mu_v + d_1d_2^2k_1\mu\mu_{uv}\mu_v - d_2^3k_2\mu\mu_{uu}\mu_v - d_2^2d_3k_2^2\mu^2\mu_{uu} - d_2^2d_3k_2^2\mu\mu_u^2 \\
& + d_1d_2^2\mu\mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1d_3^2k_2^2\mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_2^2d_3k_1^2k_2\mu\mu_v^2 + 3d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^2\mu_u \\
& + d_1d_2^2k_1\mu_u\mu_v^2 - d_1^2d_2k_2\mu\mu_{uu}\mu_v + d_1^3k_1\mu\mu_{uv}\mu_v - d_2d_3^2k_2\mu_u^2\mu_v - d_1^2d_2k_2\mu_u^2\mu_v \\
& + 2d_1d_2d_3k_1k_2\mu\mu_u\mu_v + d_1d_3^2\mu\mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1d_3^2k_1\mu_u\mu_v^2 + d_1d_3^2k_1\mu\mu_{uv}\mu_v) \Big] A \\
& + \left((d_3\mu_u - d_1k_1\mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1d_2k_2\mu\mu_v - 2d_1d_2k_1\mu\mu_v + d_2^2k_2\mu\mu_u \right. \\
& - 2d_1d_3k_1k_2\mu^2 - d_1d_3\mu_v^2 + d_2d_3\mu_u\mu_v + 2d_3^2k_2\mu\mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2d_3^2k_2\mu\mu_u\mu_v \\
& \left. - d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^3 + d_2^3k_2\mu\mu_u\mu_v + d_2^2d_3k_2^2\mu^2\mu_u + d_3^3k_2^2\mu^2\mu_u - d_1d_2^2k_1\mu\mu_v^2 \right)
\end{aligned}$$

$$\left. -d_1^3 k_1 \mu \mu_v^2 + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v^2 + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_v \right) \frac{\partial A}{\partial u} \right] \quad (6.10)$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde (6.7) denklemi " $\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu$ " ile çarpılıp elde edilen ifadedden

(6.6) denkleminin " $d_2 \mu_u$ " katı çıkartılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) - d_1 d_2 \mu_u \mu_v \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{A} \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \right] \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) - \frac{1}{A} \left(d_2 k_1 \mu_u \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \\ & \quad \left. + (d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu_u^2 + d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\ & \quad \left. + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_u + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u^2 + d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v \right) \\ & \quad - \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{A} \left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_2^2 k_2 \mu \mu_u - d_3^2 k_2 \mu \mu_u \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 d_2 \mu_u \right) \right) \right] d_2 \mu_u \end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \left[\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 \mu \mu_v + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 \right] \\ &= \frac{1}{A^2} \left\{ \left[(d_2 k_2 \mu_u - d_3 \mu_{uv} - d_2 k_1 \mu_u) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (2d_1 d_2 k_2 \mu_u^2 + 2d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u - d_1 d_3 \mu_u \mu_{uv} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} - d_1^2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_3^2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2 k_1 \mu_u \mu_v - d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v - d_1^2 k_1 \mu \mu_{uv} - d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_2 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_1}{\partial u} - 2d_1 d_2 k_1 \mu_u^2 + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uu} - d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1^3 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1 d_3^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^3 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_1 d_3^2 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} \right. \\ & \quad \left. - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} + d_1^2 d_2 k_2 \mu_u^3 + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} + d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_1}{\partial u} + 2d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u^2 \right. \\ & \quad \left. - d_1^2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_3^3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u \mu_v - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_u \mu_v - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{uv} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{uv} + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{uu} + d_2 d_3^2 k_1 k_2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_u + d_2^3 k_2 \mu_u^3 \\
& + d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^3 + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} - d_1 d_2^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1 d_2^2 k_1 \mu_u^2 \mu_v \\
& - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} - d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_1}{\partial u} - 2 d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v \Big] A \\
& + \left[(d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1 d_3 \mu_u \mu_v + d_3^2 k_1 \mu \mu_v - d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u - d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right. \\
& + d_1^2 k_1 \mu \mu_v + d_3^2 k_1 \mu \mu_v - d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u - d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u - d_2 d_3 \mu_u^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& + d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v \\
& + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 - d_2^3 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 \\
& \left. + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u \right) \frac{\partial A}{\partial u} \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

bulunur. (6.9) dan

$$\begin{aligned}
\alpha_2 = \frac{1}{A^3 \langle U^v, U \rangle} & \left\{ \left[(d_2 k_2 \mu_u - d_2 k_1 \mu_u - d_3 \mu_{uv}) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(-2 d_1 d_2 k_1 \mu_u^2 - d_3^2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} \right. \right. \right. \\
& - d_1^2 k_1 \mu \mu_{uv} - d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u - d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v - d_1^2 k_1 \mu_u \mu_v + 2 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u \\
& + 2 d_1 d_2 k_2 \mu_u^2 - d_1^2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_2 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1 d_3 \mu_u \mu_{uv} - 2 d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} \\
& - d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uu} \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1^2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} \\
& - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} + d_2 d_3^2 k_1 k_2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_u + d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^3 \\
& - d_1^3 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{uv} + d_1^2 d_2 k_2 \mu_u^3 + d_2^3 k_2 \mu_u^3 - d_1^3 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^3 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v \\
& - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{uv} - d_3^3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1 d_3^2 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_u \mu_v + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} \\
& + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_1 d_2^2 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} - d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} \\
& \left. + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{uu} \right] A + \left[\left((d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1^2 k_1 \mu \mu_v - 2 d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u \right. \right. \\
& \left. + 2 d_3^2 k_1 \mu \mu_v - 2 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 \mu_u \mu_v - d_2 d_3 \mu_u^2 + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 \\
& + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v \Big) \frac{\partial A}{\partial u} \Big] \Big\} \quad (6.11)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de $S^v(\psi_v)$ yi ψ_u ve ψ_v cinsinden elde etmeye çalışalım:

$$\begin{aligned}
S^v(\psi_v) &= D_{\psi_v} U^v = \frac{\partial U^v}{\partial v} \\
&= \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{(d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \right] \phi_u \\
&\quad + \frac{(d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \phi_{uv} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{(d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \right] \phi_v \\
&\quad + \frac{(d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2}{A} \phi_{vv} \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{A} \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3(k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right) \right] U \\
&\quad + \frac{1}{A} \left[\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3(k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right] U_v \\
&= \frac{1}{A^2} \left\{ \left[\left((d_1 k_1 \mu_v - d_3 \mu_{uv}) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu_u \mu_v \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_{uv} + d_1 d_2 k_1 \mu_v^2 + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_{vv} + d_1 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2 d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right) A \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \frac{\partial A}{\partial v} \right] \phi_u \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\left(d_2 \mu \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2 k_2 \mu_v - d_3 \mu_{vv} \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu_v^2 - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_{vv} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} + d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right) A \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left((d_2k_2\mu - d_3\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2)k_1\mu\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu^2\right)\frac{\partial A}{\partial v}\Big]\phi_v \\
& -\left[\left((d_2k_2^2\mu - d_3k_2\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2)k_1k_2\mu\mu_v + d_1d_2k_2^2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2^2\mu^2\right)A\right]U \\
& +\left[\left(\left(d_3k_1\mu_v + d_3\mu\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_3k_2\mu_v + d_1\mu_{uv} + d_2\mu_{vv}\right)\cos^2\frac{\theta}{2} + 2d_3^2k_1k_2\mu\mu_v + d_3^2k_1\mu^2\frac{\partial k_2}{\partial v}\right.\right. \\
& +d_1d_3\mu\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_3k_2\mu_u\mu_v + d_1d_3k_2\mu\mu_{uv} + d_2d_3k_1\mu\mu_v\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2d_3k_1k_2\mu_v^2 \\
& +d_2d_3k_1k_2\mu\mu_{vv})A - \left(\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_3k_1\mu + d_3k_2\mu + d_1\mu_u + d_2\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} + d_3^2k_1k_2\mu^2\right. \\
& +d_1d_3k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v)\frac{\partial A}{\partial v}\Big]U \\
& +\left[\left(k_2\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_3k_1k_2\mu + d_3k_2^2\mu + d_1k_2\mu_u + d_2k_2\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} + d_3^2k_1k_2^2\mu^2\right.\right. \\
& +d_1d_3k_2^2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2^2\mu\mu_v)A\Big]\phi_v\Big\} \\
& =\frac{1}{A^2}\left\{\left[\left((d_1k_1\mu_v - d_3\mu_{uv})\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)\mu\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu_u\mu_v\right.\right.\right. \\
& -\left.(d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_{uv} + d_1d_2k_1\mu_v^2 + d_1d_2k_1\mu\mu_{vv} + d_1d_3k_1\mu^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1d_3k_1k_2\mu\mu_v\right)A \\
& -\left.\left((d_1k_1\mu - d_3\mu_u)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_u + d_1d_2k_1\mu\mu_v + d_1d_3k_1k_2\mu^2\right)\frac{\partial A}{\partial v}\right]\phi_u \\
& +\left[\left(k_2\cos^4\frac{\theta}{2} + \left(d_2\mu\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2k_2\mu_v - d_3\mu_{vv} + d_3k_1k_2\mu + d_3k_2^2\mu + d_1k_2\mu_u + d_2k_2\mu_v\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\right.\right. \\
& -\left.(d_1^2 + d_3^2)k_1\mu_v^2 - (d_1^2 + d_3^2)k_1\mu\mu_{vv} + d_3^2k_1k_2^2\mu^2 + d_1d_3k_2^2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2^2\mu\mu_v\right. \\
& +d_1d_2\mu\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_2k_2\mu_u\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_{uv} + d_2d_3k_1\mu^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v\Big]A \\
& -\left.\left((d_2k_2\mu - d_3\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2)k_1\mu\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu^2\right)\frac{\partial A}{\partial v}\right]\phi_v \\
& +\left[\left(\left(d_3k_1\mu_v + d_3\mu\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_3k_2\mu_v + d_1\mu_{uv} + d_2\mu_{vv} - d_2k_2^2\mu + d_3k_2\mu_v\right)\cos^2\frac{\theta}{2}\right.\right. \\
& +d_3^2k_1\mu^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_3^2k_1k_2\mu\mu_v + d_1d_3\mu\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_3k_2\mu_u\mu_v + d_1d_3k_2\mu\mu_{uv}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_2d_3k_1\mu\mu_v\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2d_3k_1k_2\mu_v^2 + (d_1^2 + d_3^2)k_1k_2\mu\mu_v - d_1d_2k_2^2\mu\mu_u \\
& -d_2d_3k_1k_2^2\mu^2 + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v)A - \left(\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_3k_1\mu + d_3k_2\mu + d_1\mu_u + d_2\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} \right. \\
& \left. + d_3^2k_1k_2\mu^2 + d_1d_3k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v \right) \frac{\partial A}{\partial v} \Big] U
\end{aligned} \tag{6.12}$$

bulunur.

Diğer taraftan $S^v(\psi_v)$ nun ψ_u ve ψ_v cinsinden değeri

$$S^v(\psi_v) = \alpha_3\psi_u + \alpha_4\psi_v$$

olacağından (6.1) ve (6.2) den ψ_u ve ψ_v nin değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
S^v(\psi_v) &= \alpha_3 \left[\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_1\mu_u + d_3k_1\mu \right) \phi_u + d_2\mu_u\phi_v + (d_3\mu_u - d_1k_1\mu)U \right] \\
&+ \alpha_4 \left[d_1\mu_v\phi_u + \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_2\mu_v + d_3k_2\mu \right) \phi_v + (d_3\mu_v - d_2k_2\mu)U \right] \\
&= \left[\alpha_3 \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_1\mu_u + d_3k_1\mu \right) + \alpha_4d_1\mu_v \right] \phi_u + \left[\alpha_3d_2\mu_u + \alpha_4 \left(\cos^2\frac{\theta}{2} \right. \right. \\
&\left. \left. + d_2\mu_v + d_3k_2\mu \right) \right] \phi_v + \left[\alpha_3(d_3\mu_u - d_1k_1\mu) + \alpha_4(d_3\mu_v - d_2k_2\mu) \right] U
\end{aligned} \tag{6.13}$$

elde edilir. (6.12) ve (6.13) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\begin{aligned}
\alpha_3 \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_1\mu_u + d_3k_1\mu \right) + \alpha_4d_1\mu_v &= \frac{1}{A^2} \left[\left((d_1k_1\mu_v - d_3\mu_{uv})\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)\mu\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} \right. \right. \\
&- (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu_u\mu_v - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_{uv} + d_1d_2k_1\mu_v^2 \\
&+ d_1d_2k_1\mu\mu_{vv} + d_1d_3k_1\mu^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1d_3k_1k_2\mu\mu_v \Big) A \\
&- \left((d_1k_1\mu - d_3\mu_u)\cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_u \right. \\
&\left. \left. + d_1d_2k_1\mu\mu_v + d_1d_3k_1k_2\mu^2 \right) \frac{\partial A}{\partial v} \right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_3d_2\mu_u + \alpha_4 \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_2\mu_v + d_3k_2\mu \right) &= \frac{1}{A^2} \left[\left(k_2\cos^4\frac{\theta}{2} + \left(d_2\mu\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2k_2\mu_v - d_3\mu_{vv} \right. \right. \right. \\
&\left. \left. + d_3k_1k_2\mu + d_3k_2^2\mu + d_1k_2\mu_u + d_2k_2\mu_v \right) \cos^2\frac{\theta}{2} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(d_1^2 + d_3^2\right)k_1\mu_v^2 - \left(d_1^2 + d_3^2\right)k_1\mu\mu_v + d_3^2k_1k_2^2\mu^2 \\
& + d_1d_3k_2^2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2^2\mu\mu_v + d_1d_2\mu\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& + d_1d_2k_2\mu_u\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_{uv} + d_2d_3k_1\mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& + 2d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v)A - \left((d_2k_2\mu - d_3\mu_v)\cos^2\frac{\theta}{2} - d_1^2k_1\mu\mu_v\right. \\
& \left. - d_3^2k_1\mu\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu^2\right)\frac{\partial A}{\partial v} \quad (6.15)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\alpha_3(d_3\mu_u - d_1k_1\mu) + \alpha_4(d_3\mu_v - d_2k_2\mu) = \frac{1}{A^2} \left[\left(\left(d_3k_1\mu_v + d_3\mu \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_3k_2\mu_v + d_1\mu_{uv} + d_2\mu_{vv} \right. \right. \right. \\
\left. \left. - d_2k_2^2\mu + d_3k_2\mu_v \right) \cos^2\frac{\theta}{2} + d_3^2k_1\mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_3^2k_1k_2\mu\mu_v \right. \\
\left. + d_1d_3\mu\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_3k_2\mu_u\mu_v + d_1d_3k_2\mu\mu_{uv} \right. \\
\left. + d_2d_3k_1\mu\mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2d_3k_1k_2\mu_v^2 + (d_1^2 + d_3^2)k_1k_2\mu\mu_v \right. \\
\left. - d_1d_2k_2^2\mu\mu_u - d_2d_3k_1k_2^2\mu^2 + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_{vv} \right) A \\
- \left(\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_3k_1\mu + d_3k_2\mu + d_1\mu_u + d_2\mu_v) \cos^2\frac{\theta}{2} \right. \\
\left. + d_3^2k_1k_2\mu^2 + d_1d_3k_2\mu\mu_u + d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v \right) \frac{\partial A}{\partial v} \quad (6.16)
\end{aligned}$$

eşitliklerinin sağlandığı kolayca görülebilir.

(6.14) denklemi " $\cos^2\frac{\theta}{2} + d_2\mu_v + d_3k_2\mu$ " ile çarpılıp elde edilen ifadeden (6.15) denkleminin

" $d_1\mu_v$ " katı çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_3 \left[\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_1\mu_u + d_3k_1\mu \right) \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_2\mu_v + d_3k_2\mu \right) - d_1d_2\mu_u\mu_v \right] \\
& = \frac{1}{A^2} \left\{ \left[\left((d_1k_1\mu_v - d_3\mu_{uv}) \cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)\mu\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu_u\mu_v - d_2^2k_2\mu\mu_{uv} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + d_1d_2k_1\mu_v^2 - d_3^2k_2\mu\mu_{uv} + d_1d_2k_1\mu\mu_{vv} + d_1d_3k_1\mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1d_3k_1k_2\mu\mu_v \right) A - \left((d_1k_1\mu \right. \right. \\
& \left. \left. - d_3\mu_u) \cos^2\frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2)k_2\mu\mu_u + d_1d_2k_1\mu\mu_v + d_1d_3k_1k_2\mu^2 \right) \frac{\partial A}{\partial v} \right] \left(\cos^2\frac{\theta}{2} + d_2\mu_v + d_3k_2\mu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(d_1 k_2 \mu_v \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 k_2 \mu_v^2 - d_1 d_3 \mu_v \mu_{vv} + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_v \right. \right. \\
& + d_1^2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu_v^2 \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1^3 k_1 \mu_v^3 - d_1 d_3^2 k_1 \mu_v^3 - d_1^3 k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} \\
& + d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_v + d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v^2 + d_1^2 d_2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1^2 d_2 k_2 \mu_u \mu_v^2 \\
& + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} \mu_v + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2 d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v^2 \Big) A + \left[\left(d_1 d_2 k_2 \mu \mu_v - d_1 d_3 \mu_v^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
& \left. - d_1^3 k_1 \mu \mu_v^2 - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v^2 + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_v \right] \frac{\partial A}{\partial v} \Big\}
\end{aligned}$$

olur.

(6.9) dan

$$\begin{aligned}
A \langle U^v, U \rangle \alpha_3 = & \frac{1}{A^2} \left[\left((d_1 k_1 \mu_v - d_3 \mu_{uv} - d_1 k_2 \mu_v) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(-d_2^2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3^2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} \right. \right. \right. \\
& - d_2^2 k_2 \mu_u \mu_v - d_3^2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu_v^2 - d_2^2 k_2 \mu \mu_{uv} - d_3^2 k_2 \mu \mu_{uv} + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_{vv} \\
& + d_1 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2 d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu_v^2 - d_2 d_3 \mu_{uv} \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \\
& - d_3^2 k_2 \mu \mu_{uv} - d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_1 d_2 k_2 \mu_v^2 + d_1 d_3 \mu_v \mu_{vv} - d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \\
& - d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_v - d_1^2 k_2 \mu_u \mu_v - d_1 d_2 k_2 \mu_v^2 \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_2^3 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^2 k_2 \mu_u \mu_v^2 \\
& - d_2 d_3^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2 d_3^2 k_2 \mu_u \mu_v^2 + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} - d_2 (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_{uv} \mu_v \\
& + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2 d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v^2 - (d_2^2 + d_3^2) d_3 k_2 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2^2 k_1 \mu_v^3 \\
& - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v - d_3^3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v^2 - (d_2^2 + d_3^2) d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uv} \\
& + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{vv} + d_1 d_3^2 k_1 k_2 \mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2 d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_v + d_1 (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu_v^3 \\
& + d_1 (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} - d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_v - d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v^2 \\
& - d_1^2 d_2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_1^2 d_2 k_2 \mu_u \mu_v^2 - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& - 2 d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v^2 \Big) A + \left((d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_2^2 k_2 \mu \mu_u + 2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \right. \\
& \left. - d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v - d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 - d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_2 d_3 \mu_u \mu_v - d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_1d_2k_2\mu\mu_v - d_1d_3\mu_v^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2^3k_2\mu\mu_u\mu_v + d_2d_3^2k_2\mu\mu_u\mu_v - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_v \\
& -d_1d_2^2k_1\mu\mu_v^2 + d_2^2d_3k_2^2\mu^2\mu_u + d_3^3k_2^2\mu^2\mu_u - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_v - d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^3 \\
& -d_1^3k_1\mu\mu_v^2 - d_1d_3^2k_1\mu\mu_v^2 + d_1^2d_2k_2\mu\mu_u\mu_v + d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_v) \frac{\partial A}{\partial v} \Big]
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılrırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_3 = \frac{1}{A^3 \langle U^v, U \rangle} & \left[\left((d_1k_1\mu_v - d_3\mu_{uv} - d_1k_2\mu_v) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(d_1d_3k_1\mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^2k_2\mu_u\mu_v \right. \right. \right. \\
& -d_3^2k_2\mu_u\mu_v - d_3^2\mu\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - 2d_1d_2k_2\mu_v^2 - d_2^2k_2\mu\mu_{uv} - d_2^2\mu\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_3\mu_v\mu_{vv} \\
& +2d_1d_2k_1\mu_v^2 - d_2d_3\mu_{uv}\mu_v - d_1^2k_2\mu_u\mu_v + d_1d_2k_1\mu\mu_{vv} - d_1d_2\mu\mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_1d_3k_2^2\mu\mu_v \\
& -2d_2^2k_2\mu\mu_{uv} + 2d_1d_3k_1k_2\mu\mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1d_2^2k_1\mu_v^3 + d_1d_3^2k_1\mu_v^3 - d_2^3k_2\mu_u\mu_v^2 \\
& -d_3^3k_2^2\mu^2\mu_{uv} + d_1d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v^2 + d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_{vv} + d_1d_2^2k_1\mu\mu_v\mu_{vv} - d_2^2d_3k_2\mu^2\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& -d_2d_3^2\mu\mu_u\mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^2d_3k_2^2\mu\mu_u\mu_v - d_2d_3^2k_2\mu\mu_{uv}\mu_v + d_1d_3^2k_1k_2\mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& +d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^2\mu_v + d_1d_3^2k_1\mu\mu_v\mu_{vv} - d_1^2d_3k_2^2\mu\mu_u\mu_v - d_1^2d_2k_2\mu\mu_{uv}\mu_v - d_2^3\mu\mu_u\mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& -d_1^2d_2\mu\mu_u\mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3^3k_2\mu^2\mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2d_3^2k_2\mu_u\mu_v^2 - d_3^3k_2^2\mu\mu_u\mu_v - d_2^3k_2\mu\mu_{uv}\mu_v \\
& -d_2^2d_3k_2^2\mu^2\mu_{uv} + d_1^3k_1\mu\mu_v\mu_{vv} - d_1^2d_2k_2\mu_u\mu_v^2 - d_1d_2d_3k_1k_2^2\mu\mu_v^2 + d_1^3k_1\mu_v^3) A \\
& + \left((d_3\mu_u - d_1k_1\mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_2^2k_2\mu\mu_u + d_1d_2k_2\mu\mu + d_2d_3\mu_u\mu_v + 2d_3^2k_2\mu\mu_u \right. \\
& -2d_1d_2k_1\mu\mu_v - 2d_1d_3k_1k_2\mu_v^2 - d_1d_3\mu_v^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1d_3^2k_1\mu\mu_v^2 - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_v \\
& -d_1d_2^2k_1\mu\mu_v^2 - d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^3 + d_2^3k_2\mu\mu_u\mu_v + d_2^2d_3k_2^2\mu^2\mu_u - d_1^3k_1\mu\mu_v^2 \\
& \left. + d_2d_3^2k_2\mu\mu_u\mu_v + d_3^3k_2^2\mu^2\mu_u) \frac{\partial A}{\partial v} \right] \quad (6.17)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (6.15) denklemi " $\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1\mu_u + d_3k_1\mu$ " ile çarpılıp elde edilen ifadedden

(6.14) denkleminin " $d_2\mu_u$ " katı çıkartılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_4 \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 \mu_v + d_3 k_2 \mu \right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) - d_1 d_2 \mu_u \mu_v \right] \\
&= \frac{1}{A^2} \left\{ \left[\left(k_2 \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(d_2 \mu \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_2 k_2 \mu_v - d_3 \mu_v + d_3 k_1 k_2 \mu + d_3 k_2^2 \mu + d_1 k_2 \mu_u \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \right. \right. \\
&\quad - \left(d_1^2 + d_3^2 \right) k_1 \mu_v^2 - \left(d_1^2 + d_3^2 \right) k_1 \mu \mu_v + d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v \\
&\quad + d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} + d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \left. \right] A \\
&\quad - \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right) \frac{\partial A}{\partial v} \left[\left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 \mu_u + d_3 k_1 \mu \right) \right. \\
&\quad - \left((d_1 d_2 k_1 \mu_u \mu_v - d_2 d_3 \mu_u \mu_{uv}) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_2^3 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2 d_3^2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^3 k_2 \mu_u^2 \mu_v \right. \\
&\quad - d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^2 \mu_v - d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} + d_1 d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v \\
&\quad + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u^2 \left. \right] A + \left((d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u - d_2 d_3 \mu_u^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. \left. - d_2^3 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u \right) \frac{\partial A}{\partial v} \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. (6.9) dan

$$\begin{aligned}
A \langle U^v, U \rangle \alpha_4 &= \frac{1}{A^2} \left[\left(k_2 \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_2 \mu \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_2 k_2 \mu_v - d_3 \mu_v + 2d_3 k_1 k_2 \mu + d_3 k_2^2 \mu \right. \right. \right. \\
&\quad + 2d_1 k_2 \mu_u \left. \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v - d_1 d_3 \mu_u \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u \right. \\
&\quad + d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u + d_1^2 k_2 \mu_u^2 + d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \\
&\quad - d_3^2 k_1 \mu \mu_v + d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 + d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \\
&\quad - d_1^2 k_1 \mu_v^2 - d_3^2 k_1 \mu_v^2 - d_1^2 k_1 \mu \mu_v - d_3^2 k_1 \mu \mu_v + d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u \\
&\quad + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uv} + d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} + d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
&\quad + 2d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v - d_1 d_2 k_1 \mu_u \mu_v + d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v \left. \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1^3 k_1 \mu_u \mu_v^2 \\
&\quad - d_1 d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 - d_1 (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 \\
&\quad + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v + d_1^2 d_2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1^2 d_2 k_2 \mu_u^2 \mu_v + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} \\
&\quad + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_v^2 - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v^2 + 2d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u \mu_v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(d_1^2 + d_3^2\right)d_3k_1^2\mu^2\mu_{vv} + d_3^3k_1^2k_2^2\mu^3 + d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^2\mu_u + d_2d_3^2k_1^2k_2^2\mu^2\mu_v \\
& + d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_{uv} + d_2^3\mu\mu_u^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2d_3^2\mu\mu_u^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_2d_3k_1k_2\mu\mu_u\mu_v \\
& + 2d_2d_3^2k_1^2k_2\mu^2\mu_v + d_1d_2d_3k_1\mu^2\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2d_3^2k_1^2\mu^3\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2^3k_2\mu_u^2\mu_v \\
& + d_2d_3^2k_2\mu_u^2\mu_v + d_2^3k_2\mu\mu_u\mu_{uv} + d_2d_3^2k_2\mu\mu_u\mu_{uv} - d_1d_2^2k_1\mu_u\mu_v^2 \\
& - d_1d_2^2k_1\mu\mu_u\mu_{vv} - d_1d_2d_3k_1\mu^2\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} - 2d_1d_2d_3k_1k_2\mu\mu_u\mu_v \Big) A \\
& + \left[\left((d_3\mu_v - d_2k_2\mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1^2k_1\mu\mu_v - d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_3^2k_1\mu\mu_v \right. \right. \\
& - d_2d_3k_1k_2\mu^2 - d_1d_2k_2\mu\mu_u + d_1d_3\mu_u\mu_v - d_2d_3k_1k_2\mu^2 + d_3^2k_1\mu\mu_v \\
& + d_1d_2k_1\mu\mu_u - d_2d_3\mu_u^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1^3k_1\mu\mu_u\mu_v + d_1d_3^2k_1\mu\mu_u\mu_v \\
& - d_1^2d_2k_2\mu\mu_u^2 - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_u + d_1^2d_3k_1^2\mu^2\mu_v + d_3^3k_1^2\mu^2\mu_v \\
& - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_u - d_2d_3^2k_1^2k_2\mu^3 - d_2^3k_2\mu\mu_u^2 + d_1d_2^2k_1\mu\mu_u\mu_v \\
& \left. \left. - d_2d_3^2k_2\mu\mu_u^2 + d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_u \right) \frac{\partial A}{\partial v} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_4 = \frac{1}{A^3 \langle U^v, U \rangle} & \left[\left(k_2 \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_2\mu \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3\mu_{vv} + 2d_3k_1k_2\mu + d_3k_2^2\mu + 2d_1k_2\mu_u \right. \right. \right. \\
& + 2d_2k_2\mu_v) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (3d_1d_2k_2\mu_u\mu_v + d_1^2k_2\mu_u^2 + d_3^2k_1^2k_2\mu^2 + 4d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v \\
& + 2d_1d_3k_1k_2\mu\mu_u - d_1d_2k_1\mu_u\mu_v - 2d_3^2k_1\mu\mu_{vv} - d_1^2k_1\mu\mu_{vv} - d_1d_3\mu_u\mu_{vv} \\
& - (d_1^2 + d_3^2)k_1\mu_v^2 + d_2d_3k_1k_2^2\mu\mu_v + d_1d_2k_2\mu\mu_{uv} + 2d_3^2k_1k_2^2\mu^2 + d_2d_3\mu_u\mu_{uv} \\
& + 2d_2d_3k_1\mu^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1d_3k_2^2\mu\mu_u + 2d_1d_2\mu\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v}) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^3k_1^2k_2^2\mu^3 \\
& + d_2^3\mu\mu_u^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2^3k_2\mu_u^2\mu_v - d_3^3k_1^2\mu\mu_v^2 - d_3^3k_1^2\mu^2\mu_{vv} + 2d_2d_3^2k_1^2k_2\mu^2\mu_v \\
& + 2d_1d_3^2k_1k_2^2\mu^2\mu_u + d_2d_3^2k_1^2k_2^2\mu^2\mu_v + d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_{uv} - d_1d_2^2k_1\mu_u\mu_v^2 \\
& - d_1^3k_1\mu_u\mu_v^2 + d_2d_3^2k_2\mu_u^2\mu_v - d_1d_3^2k_1\mu_u\mu_v^2 + d_1^2d_2k_2\mu_u^2\mu_v + d_1^2d_3k_2^2\mu\mu_u^2 \\
& \left. \left. - d_1d_3^2k_1\mu\mu_u\mu_{vv} + d_1^2d_2k_2\mu\mu_u\mu_{uv} - d_1^2d_3k_1^2\mu\mu_v^2 - d_1^3k_1\mu\mu_u\mu_{vv} - d_1^2d_3k_1^2\mu^2\mu_{vv} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_1d_2d_3k_1k_2\mu\mu_u\mu_v + d_1^2d_2\mu\mu_u^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2d_3^2k_1^2\mu^3\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2^3k_2\mu\mu_u\mu_{uv} \\
& +d_2d_3^2\mu\mu_u^2\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_2d_3k_1\mu^2\mu_u\frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1d_2d_3k_1k_2^2\mu\mu_u\mu_v + d_2d_3^2k_2\mu\mu_u\mu_{uv} \\
& -d_1d_2^2k_1\mu\mu_u\mu_{vv})A + \left((d_3\mu_v - d_2k_2\mu)\cos^4\frac{\theta}{2} + (d_1^2k_1\mu\mu_v - d_2d_3\mu_u^2 - 2d_1d_2k_2\mu\mu_u \right. \\
& + d_1d_3\mu_u\mu_v + d_1d_2k_1\mu\mu_u + 2d_3^2k_1\mu\mu_v - 2d_2d_3k_1k_2\mu^2)\cos^2\frac{\theta}{2} - d_2^3k_2\mu\mu_u^2 \\
& - d_2d_3^2k_2\mu\mu_u^2 - d_2d_3^2k_1^2k_2\mu^3 + d_1d_2^2k_1\mu\mu_u\mu_v + d_1^3k_1\mu\mu_u\mu_v + d_3^3k_1^2\mu^2\mu_v \\
& \left. + d_1^2d_3k_1^2\mu^2\mu_v - d_1^2d_2k_2\mu\mu_u^2 + d_1d_3^2k_1\mu\mu_u\mu_v - d_1d_2d_3k_1k_2\mu^2\mu_u\right)\frac{\partial A}{\partial v} \Big] \quad (6.18)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece $\chi(M^v)$ nin $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazına göre M^v sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin S^v şekil operatörünün matrisi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ve α_4 sırasıyla (6.10), (6.11), (6.17) ve (6.18) denklemleriyle verilmek üzere

$$S^v = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

olarak elde edilmiş olur.

6.3. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerinin Ortalama Eğriliği

(6.10), (6.18) ve (6.19) eşitliklerinden yararlanarak M^v sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi için H^v ortalama eğriliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
H^v &= \dot{L}S^v = \alpha_1 + \alpha_4 \\
&= \frac{1}{A^3 \langle U^v, U \rangle} \left[\left((k_1 + k_2)\cos^6\frac{\theta}{2} + \left(d_1\mu\frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3k_1^2\mu + 2d_1k_1\mu_u - d_3\mu_{uu} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 4d_3k_1k_2\mu + 2d_2k_1\mu_v + d_2\mu\frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3\mu_{vv} + d_3k_2^2\mu + 2d_1k_2\mu_u + 2d_2k_2\mu_v \right) \cos^4\frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. + (3d_3^2k_1^2k_2\mu^2 - d_2^2k_2\mu\mu_{uu} - d_3^2k_2\mu\mu_u - d_2^2k_2\mu_u^2 - d_3^2k_2\mu_u^2 - d_1^2k_1\mu\mu_{vv} \right. \\
&\quad \left. + 6d_2d_3k_1k_2\mu\mu_v + 7d_1d_3k_1k_2\mu\mu_u - d_1d_3\mu_u\mu_{vv} - 2d_3^2k_1\mu\mu_{vv} + d_1^2k_2\mu_u^2 \right. \\
&\quad \left. + 3d_3^2k_1k_2\mu^2 + d_1d_3\mu_{uv}\mu_v - d_2d_3\mu_{uu}\mu_v + d_2d_3\mu_u\mu_{uv} + d_2d_3k_1^2k_2\mu\mu_v \right. \\
&\quad \left. + 2d_1d_3k_2\mu^2\frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1d_2k_1\mu\mu_{uv} + 2d_1d_2k_1\mu_u\mu_v + 2d_1d_2\mu\mu_v\frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2k_1\mu_v^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_2^2 k_1 \mu_v^2 + 2d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v - d_3^2 k_2 \mu \mu_{uu} - d_3^2 k_1 \mu_v^2 \\
& + 2d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u + 2d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} + d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& + 2d_3^3 k_1^2 k_2^2 \mu^3 - d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_u - d_3^3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} + 3d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_v \\
& + d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v^2 + 5d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_v^2 + 2d_2 d_3^2 k_1^2 k_2^2 \mu^2 \mu_v \\
& - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v + d_1^3 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v \\
& + d_2^3 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2^3 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v \\
& + 2d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{uv} - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v^2 \\
& + d_1 d_2^2 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_3^2 k_2^2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_3^2 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 \\
& + 3d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} - d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} \\
& - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} + d_1^2 d_2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} + d_2 d_3^2 k_1^2 \mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& + d_2 d_3^2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1^3 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} \\
& + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} \Big) A + \left((d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \\
& + (d_1 d_2 k_2 \mu \mu_v - d_1 d_3 \mu_v^2 + d_2^2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_2 \mu \mu_u - 2d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v \\
& - 2d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 + d_2 d_3 \mu_u \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v^2 \\
& - d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^3 + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v + d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_u - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_v \\
& + d_3^3 k_2^3 \mu^2 \mu_u + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_v^2 \Big) \frac{\partial A}{\partial u} + \left((d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \\
& + (d_1^2 k_1 \mu \mu_v - 2d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_1 \mu \mu_v - d_2 d_3 \mu_u^2 - 2d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \\
& + d_1 d_3 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u \\
& + d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_v + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u^2 \\
& \left. + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2^3 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 \right) \frac{\partial A}{\partial v} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A^3 \langle U^v, U \rangle} \left[\left((k_1 + k_2) \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 \mu \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3 (k_1 + k_2)^2 \mu + 2d_3 k_1 k_2 \mu \right. \right. \right. \\
&\quad + 2d_1 (k_1 + k_2) \mu_u + 2d_2 (k_1 + k_2) \mu_v - d_3 \mu_{uu} + d_2 \mu \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3 \mu_{vv} \left. \left. \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad + \left(d_1 d_3 \mu_{uv} \mu_v + 2d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} + 2d_1 d_2 (k_1 + k_2) \mu_u \mu_v + 2d_1 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} \right. \\
&\quad + d_1 d_2 (k_1 + k_2) \mu \mu_{uv} - 2d_3^2 k_2 \mu \mu_{uu} - d_3^2 k_2 \mu_u^2 - d_2^2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_1^2 k_2 \mu_u^2 \\
&\quad + d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v + 3d_3^2 k_1 k_2 (k_1 + k_2) \mu^2 + 2d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^2 k_2 \mu_u^2 - d_1^2 k_1 \mu \mu_{vv} \\
&\quad - d_2 d_3 \mu_{uu} \mu_v + 6d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v + 7d_1 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 (k_1 + k_2) \mu \mu_v \\
&\quad + 2d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u + 2d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - 2d_3^2 k_1 \mu \mu_{vv} + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uv} + d_2^2 k_1 \mu_v^2 \\
&\quad - d_3^2 k_1 \mu_v^2 - d_1 d_3 \mu_u \mu_{vv} - d_1^2 k_1 \mu_v^2 \left. \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_3^2 k_2^2 \mu \mu_u^2 \\
&\quad + d_1 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_2 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v + d_1 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} - d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} \\
&\quad - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 + 3d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_u \mu_v + 2d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{uv} + d_1 d_3 k_2^2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} \\
&\quad + 5d_1 d_3 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u - d_1 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} + d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_v^2 + d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} \\
&\quad + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v + d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v^2 - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} + 2d_3^3 k_1^2 k_2^2 \mu^3 \\
&\quad - d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_2 d_3^2 k_1^2 k_2^2 \mu^2 \mu_v + 3d_2 d_3^2 k_1^2 k_2^2 \mu^2 \mu_v \\
&\quad + d_2 d_3^2 k_1^2 \mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v^2 \left. \right) A + \left((d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad + (d_1 d_2 k_2 \mu \mu_v + d_2^2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_2 \mu \mu_u - 2d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_2 d_3 \mu_u \mu_v \\
&\quad - 2d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_1 k_1 \mu \mu_v^2 + d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_v - d_1 d_3 \mu_v^2 \\
&\quad + d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_u - d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^3 \left. \right) \frac{\partial A}{\partial u} + \left((d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad + (d_1^2 k_1 \mu \mu_v - 2d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_1 \mu \mu_v - d_2 d_3 \mu_u^2 - 2d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \\
&\quad + d_1 d_3 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_u \\
&\quad + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v - d_2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 \left. \right) \frac{\partial A}{\partial v} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{A^3 \langle U^\nu, U \rangle} \left[\left(H \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 \mu \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3 H^2 \mu + 2d_3 K \mu + 2d_1 H \mu_u + 2d_2 H \mu_v \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_3 \mu_{uu} + d_2 \mu \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3 \mu_{vv} \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 d_3 \mu_{uv} \mu_v + 2d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2d_1 d_2 H \mu_u \mu_v - d_2 d_3 \mu_{uu} \mu_v + 2d_1 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2^2 k_2 \mu_u^2 + 6d_2 d_3 K \mu \mu_v \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_3^2 k_2 \mu_u^2 + d_1 d_2 H \mu \mu_{uv} - 2d_3^2 k_2 \mu \mu_{uu} - d_2^2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_1^2 k_2 \mu_u^2 + d_2^2 k_1 \mu_v^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v + 3d_3^2 K H \mu^2 + 2d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + 7d_1 d_3 K \mu \mu_u - 2d_3^2 k_1 \mu \mu_{vv} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_1 d_3 \mu_u \mu_{vv} + 2d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u + 2d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_1^2 k_1 \mu_v^2 + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uv} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - d_1^2 k_1 \mu \mu_{vv} + d_2 d_3 K H \mu \mu_v - d_3^2 k_1 \mu_v^2 \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} \right. \\
&\quad \left. + d_1 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_2 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v + d_1 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_3^3 k_2^2 \mu \mu_u^2 \right. \\
&\quad \left. - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} - d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} + 3d_1 d_2 d_3 K \mu \mu_u \mu_v + 2d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_{uv} - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_v^2 \right. \\
&\quad \left. + d_1 d_3 k_2^2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + 5d_1 d_3 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v^2 - d_1 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} + 2d_3^3 K^2 \mu^3 \right. \\
&\quad \left. + d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} - d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v^2 + d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} \right. \\
&\quad \left. + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v + 2d_2 d_3^2 K^2 \mu^2 \mu_v + d_2 d_3^2 k_1^2 \mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} \right. \\
&\quad \left. + d_2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 3d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_v \right) A + \left((d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1 d_2 k_2 \mu \mu_v \right. \\
&\quad \left. - d_1 d_3 \mu_v^2 + d_2^2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_2 \mu \mu_u - 2d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v - 2d_1 d_3 K \mu^2 + d_2 d_3 \mu_u \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right. \\
&\quad \left. - d_1 k_1 \mu \mu_v^2 + d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_v + d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_u \right. \\
&\quad \left. - d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^3 \right) \frac{\partial A}{\partial u} + \left((d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1^2 k_1 \mu \mu_v - 2d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_1 \mu \mu_v \right. \\
&\quad \left. - d_2 d_3 \mu_u^2 - 2d_2 d_3 K \mu^2 + d_1 d_3 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 k_1 \mu \mu_u \mu_v \right. \\
&\quad \left. - d_2 k_2 \mu \mu_u^2 + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v - d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_u - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 \right) \frac{\partial A}{\partial v} \Big]
\end{aligned}$$

elde edilir.

6.4. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerinin Gauss Eğriliği

(6.10), (6.11), (6.17), (6.18) ve (6.19) eşitliklerinin yardımıyla M^v sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi için K^g Gauss eğriliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
K^v &= \det S^v \\
&= \alpha_1 \alpha_4 - \alpha_2 \alpha_3 \\
&= \frac{1}{A^6 \langle U^v, U \rangle^2} \left\{ \left[\left(k_1 \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_1 \mu \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3 k_1^2 \mu + 2d_3 K \mu + 2d_1 k_1 \mu_u - d_3 \mu_{uu} + 2d_2 k_1 \mu_v \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \right. \right. \\
&\quad + \left(5d_1 d_3 K \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v - d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_{uv} + d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 + 3d_1 d_2 k_1 \mu_u \mu_v \right. \\
&\quad + d_2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v + d_1 d_3 \mu_{uv} \mu_v + 2d_2 d_3 K \mu \mu_v - d_3^2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 + 2d_1 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} \\
&\quad + 2d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_2^2 k_2 \mu \mu_{uu} - d_3^2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_2^2 k_1 \mu_v^2 - d_2^2 k_2 \mu_u^2 - d_3^2 k_2 \mu_u^2 - d_2 d_3 \mu_{uu} \mu_v \left. \right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
&\quad + d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_{uv} + d_1 d_2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1^3 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_3^3 K^2 \mu^3 - d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v \\
&\quad + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_v + d_1^3 k_1 \mu_u \mu_v^2 - d_3^3 k_2^2 \mu \mu_u^2 + d_2 d_3^2 K^2 \mu^2 \mu_v - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_3^3 k_2 \mu_u^2 \mu_v \\
&\quad - d_2^3 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uu} - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^2 \mu_v + d_1 d_2^2 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 \\
&\quad + d_1 d_3^2 k_2^2 \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + 3d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_v^2 + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_{uu} \mu_v \\
&\quad + d_1^3 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v + 2d_1 d_2 d_3 K \mu \mu_u \mu_v + d_1 d_3^2 \mu \mu_v^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 - d_1^2 d_2 k_2 \mu_u^2 \mu_v \left. \right) A \\
&\quad + \left((d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1 d_2 k_2 \mu \mu_v - 2d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_2^2 k_2 \mu \mu_u - 2d_1 d_3 K \mu^2 - d_1 d_3 \mu_v^2 \right. \\
&\quad + d_2 d_3 \mu_u \mu_v + 2d_3^2 k_2 \mu \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^3 + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_v + d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_u \\
&\quad + d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_u - d_1 (d_1^2 + d_2^2) k_1 \mu \mu_v^2 + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v^2 + d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_v \left. \right) \frac{\partial A}{\partial u} \Big] \\
&\quad \left[\left(k_2 \cos^6 \frac{\theta}{2} + \left(d_2 \mu \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_3 \mu_v + 2d_3 K \mu + d_3 k_2^2 \mu + 2d_1 k_2 \mu_u + 2d_2 k_2 \mu_v \right) \cos^4 \frac{\theta}{2} \right. \right. \\
&\quad + \left(3d_1 d_2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1^2 k_2 \mu_u^2 + d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 + 4d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v + 2d_1 d_3 K \mu \mu_u - d_1 d_2 k_1 \mu_u \mu_v \right. \\
&\quad - 2d_3^2 k_1 \mu \mu_v - d_1^2 k_1 \mu \mu_v - d_1 d_3 \mu_u \mu_v - d_1^2 k_1 \mu_v^2 + d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v - d_3^2 k_1 \mu_v^2 + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uv}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 + 2d_2 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + 2d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_u + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uv} + 2d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& + d_3^3 K^2 \mu^3 + d_2^3 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2^3 k_2 \mu_u^2 \mu_v - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_v^2 - d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} + 2d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_v \\
& + 2d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_2 d_3^2 K^2 \mu^2 \mu_v + d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_{uv} - d_1^3 k_1 \mu_u \mu_v^2 + d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^2 \mu_v - d_1 d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 \\
& - d_1 d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v^2 + d_1^2 d_2 k_2 \mu_u^2 \mu_v + d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u^2 - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} \\
& - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_v^2 - d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{vv} + d_1 d_2 d_3 K \mu \mu_u \mu_v + d_1^2 d_2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2 d_3^2 k_1^2 \mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& + d_2 d_3^2 \mu \mu_u^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} + d_1 d_2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uv} \\
& - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{vv} \Big) A + \left((d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1^2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 \mu_u \mu_v - 2d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u - d_2 d_3 \mu_u^2 + 2d_3^2 k_1 \mu \mu_v \right. \\
& + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u - 2d_2 d_3 K \mu^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} - d_2^3 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v \\
& + d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_v + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u^2 + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_u \Big) \frac{\partial A}{\partial v} \Big] \\
& - \left[\left((d_2 k_2 \mu_u - d_2 k_1 \mu_u - d_3 \mu_{uv}) \cos^4 \frac{\theta}{2} + \left(-2d_1 d_2 k_1 \mu_u^2 - d_3^2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2 k_1 \mu \mu_{uv} - d_2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u \right. \right. \right. \\
& - d_1 d_2 \mu \mu_u \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_3^2 k_1 \mu_u \mu_v - d_1^2 k_1 \mu_u \mu_v + 2d_2 d_3 K \mu \mu_u + 2d_1 d_2 k_2 \mu_u^2 - d_1^2 \mu \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} \\
& - d_1 d_3 \mu_u \mu_{uv} + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_{uu} + d_2 d_3 k_2 \mu^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} - 2d_3^2 k_1 \mu \mu_{uv} - d_2^2 k_1 \mu_u \mu_v + d_2 d_3 \mu_u \mu_{uu} \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& - d_1^2 d_3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_3^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} + d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} \\
& + d_2 d_3^2 K \mu^3 \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^2 \mu_u + d_2 d_3^2 k_2 \mu_u^3 - d_1^3 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_{uv} + d_3^2 k_2 \mu_u^3 \\
& + d_1^2 d_2 k_2 \mu_u^3 - d_1^3 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_1^3 k_1 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_{uv} - d_3^3 k_1 \mu^2 \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} - d_3^3 k_1^2 \mu \mu_u \mu_v \\
& - d_1 d_3^2 k_1 \mu_u^2 \mu_v + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_{uu} + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_1 d_2^2 k_1 \mu_u^2 \mu_v - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_{uv} \\
& - d_2^2 d_3 k_1^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1 d_2^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_1}{\partial u} + d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_{uu} \Big) A + \left((d_3 \mu_v - d_2 k_2 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_1^2 k_1 \mu \mu_v \right. \\
& - 2d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + 2d_3^2 k_1 \mu \mu_v - 2d_2 d_3 K \mu^2 + d_1 d_3 \mu_u \mu_v - d_2 d_3 \mu_u^2 + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_u \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& + d_1^3 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_u^2 - d_2 d_3^2 k_1^2 k_2 \mu^3 + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u^2 + d_3^3 k_1^2 \mu^2 \mu_v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_u + d_1^2 d_3 k_1^2 \mu^2 \mu_v + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_u \mu_v \Big) \frac{\partial A}{\partial u} \Big] \Big[\Big((d_1 k_1 \mu_v - d_3 \mu_{uv} - d_1 k_2 \mu_v) \cos^4 \frac{\theta}{2} \\
& + \Big(d_1 d_3 k_1 \mu^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^2 k_2 \mu_u \mu_v - d_3^2 k_2 \mu_u \mu_v - d_3^2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - 2 d_1 d_2 k_2 \mu_v^2 - d_2^2 k_2 \mu \mu_{uv} \\
& - d_2^2 \mu \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_3 \mu_v \mu_w + 2 d_1 d_2 k_1 \mu_v^2 - d_2 d_3 \mu_{uv} \mu_v - d_1^2 k_2 \mu_u \mu_v + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_{vv} - d_1 d_2 \mu \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& - d_1 d_3 k_2^2 \mu \mu_v - 2 d_3^2 k_2 \mu \mu_{uv} + 2 d_1 d_3 K \mu \mu_v \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_1 d_2^2 k_1 \mu_v^3 + d_1 d_3^2 k_1 \mu_v^3 - d_2^3 k_2 \mu_u \mu_v^2 \\
& - d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uv} + d_1 d_2 d_3 K \mu \mu_v^2 + d_1 d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \mu_{vv} + d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} - d_2^2 d_3 k_2 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& - d_2 d_3^2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v - d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_{uv} \mu_v + d_1 d_3^2 K \mu^3 \frac{\partial k_2}{\partial v} + d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^2 \mu_v \\
& + d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} - d_1^2 d_3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v - d_1^2 d_2 k_2 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_2^3 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_1^2 d_2 \mu \mu_u \mu_v \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
& - d_3^3 k_2 \mu^2 \mu_u \frac{\partial k_2}{\partial v} - d_2 d_3^2 k_2 \mu_u \mu_v^2 - d_3^3 k_2^2 \mu \mu_u \mu_v - d_2^3 k_2 \mu \mu_{uv} \mu_v - d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_{uv} \\
& + d_1^3 k_1 \mu \mu_v \mu_{vv} - d_1^2 d_2 k_2 \mu_u \mu_v^2 - d_1 d_2 d_3 k_1 k_2^2 \mu \mu_v^2 + d_1^3 k_1 \mu_v^3 \Big) A + \Big((d_3 \mu_u - d_1 k_1 \mu) \cos^4 \frac{\theta}{2} \\
& + \Big(d_2^2 k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_v + d_2 d_3 \mu_u \mu_v + 2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u - 2 d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v - 2 d_1 d_3 K \mu^2 - d_1 d_3 \mu_v^2 \Big) \cos^2 \frac{\theta}{2} \\
& - d_1 d_3^2 k_1 \mu \mu_v^2 - d_1 d_2 d_3 K \mu^2 \mu_v - d_1 d_2^2 k_1 \mu \mu_v^2 - d_1 d_3^2 k_1 k_2^2 \mu^3 + d_2^3 k_2 \mu \mu_u \mu_v - d_1^3 k_1 \mu \mu_v^2 \\
& + d_2^2 d_3 k_2^2 \mu^2 \mu_u + d_2 d_3^2 k_2 \mu \mu_u \mu_v + d_3^3 k_2^2 \mu^2 \mu_u \Big) \frac{\partial A}{\partial v} \Big] \Big\}
\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 6.4.1. $\mu = \|\phi(u, v)\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda$ olmak üzere bir M yüzeyinin

$$\begin{aligned}
M^\vee = \Big\{ \psi(u, v) \Big| \psi(u, v) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi(u, v) + \mu (d_1 \phi_u + d_2 \phi_v + d_3 U), d_1, d_2, d_3 \text{ sabit sayılar,} \\
d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1 \Big\}
\end{aligned}$$

sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi için dönme açısı $\theta = 0$ alınırsa $M^\vee$ yüzeyi M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyi olur ve $M^\vee$ yüzeyinin $S^\vee$ şekil operatörünün matrisi $\lambda d_1 = \lambda_1$, $\lambda d_2 = \lambda_2$,

$\lambda d_3 = \lambda_3$ ve $A = \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_1)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2}$ olmak üzere

$$S^v = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} (1+\lambda_3 k_2) \left(\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 + (1+\lambda_3 k_2)^2) + k_1 A^2 \right) & -\frac{\partial k_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_2) \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 (1+\lambda_3 k_1) & (1+\lambda_3 k_1) \left(\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1+\lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2 \right) \end{bmatrix}$$

olur.

İspat: $\theta = 0$ alınırsa $\mu = \|\phi(u, v)\| \sin^2 \frac{\theta}{2} + \lambda = \lambda \in \mathbb{R}$ olacağından

$$\begin{aligned} M^v &= \left\{ \psi(u, v) \left| \psi(u, v) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi(u, v) + \mu (d_1 \phi_u + d_2 \phi_v + d_3 U), d_1, d_2, d_3 \text{ sabit sayılar,} \right. \right. \\ &\quad \left. d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \psi(u, v) \left| \psi(u, v) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi(u, v) + \lambda (d_1 \phi_u + d_2 \phi_v + d_3 U), d_1, d_2, d_3 \text{ sabit sayılar,} \right. \right. \\ &\quad \left. d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da Tanım 4.3.1 deki sabit sırt uzaklıklı yüzeyin parametrik gösterimine karşılık gelir. O halde M^v yüzeyi M yüzeyinin sabit sırt uzaklıklı yüzeyidir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} A &= \left[\left((d_1 k_1 \mu - d_3 \mu_u) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_2^2 + d_3^2) k_2 \mu \mu_u + d_1 d_2 k_1 \mu \mu_v + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left((d_2 k_2 \mu - d_3 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} - (d_1^2 + d_3^2) k_1 \mu \mu_v + d_1 d_2 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2 \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + (d_3 (k_1 + k_2) \mu + d_1 \mu_u + d_2 \mu_v) \cos^2 \frac{\theta}{2} + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2 + d_1 d_3 k_2 \mu \mu_u + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu \mu_v \right)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[(d_1 k_1 \mu + d_1 d_3 k_1 k_2 \mu^2)^2 + (d_2 k_2 \mu + d_2 d_3 k_1 k_2 \mu^2)^2 + (1 + d_3 k_1 \mu + d_3 k_2 \mu + d_3^2 k_1 k_2 \mu^2)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[(\lambda_1 k_1 + \lambda_1 \lambda_3 k_1 k_2)^2 + (\lambda_2 k_2 + \lambda_2 \lambda_3 k_1 k_2)^2 + (1 + \lambda_3 k_1 + \lambda_3 k_2 + \lambda_3^2 k_1 k_2)^2 \right]^{1/2} \\ &= \sqrt{\lambda_1^2 k_1^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_2^2 k_2^2 (1 + \lambda_3 k_1)^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 (1 + \lambda_3 k_2)^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

(6.19) da verilen $\chi(M^v)$ nin $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazına göre M^v sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin S^v şekil operatörünün matrisinin bileşenleri (6.10), (6.11), (6.17) ve (6.18) denklemleri yardımıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{A^3 \langle U^\nu, U \rangle} \left[\left(k_1 + 2\lambda_3 k_1 k_2 + \lambda_3^2 k_1 k_2^2 + \lambda_3 k_1^2 + 2\lambda_3^2 k_1^2 k_2 + \lambda_3^3 k_1^2 k_2^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} + 2\lambda_1 \lambda_3 k_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} + \lambda_1 \lambda_3^2 k_2^2 \frac{\partial k_1}{\partial u} \right) A - \left(\lambda_1 k_1 + 2\lambda_1 \lambda_3 k_1 k_2 + \lambda_1 \lambda_3^2 k_1 k_2^2 \right) \frac{\partial A}{\partial u} \right] \\
&= \frac{1}{A^3 \langle U^\nu, U \rangle} \left[\left(k_1 (1 + \lambda_3 k_1) (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 k_2)^2 \right) A - \lambda_1 k_1 (1 + \lambda_3 k_2)^2 \frac{\partial A}{\partial u} \right]
\end{aligned}$$

olur. (6.9) dan

$$\begin{aligned}
\langle U^\nu, U \rangle &= \frac{1}{A} (1 + \lambda_3 k_1 + \lambda_3 k_2 + \lambda_3^2 k_1 k_2) \\
&= \frac{1}{A} (1 + \lambda_3 k_2) (1 + \lambda_3 k_1)
\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{A^3 (1 + \lambda_3 k_2) (1 + \lambda_3 k_1)} \left[\left(k_1 (1 + \lambda_3 k_1) (1 + \lambda_3 k_2)^2 + \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 k_2)^2 \right) A^2 - \lambda_1 k_1 (1 + \lambda_3 k_2)^2 A \frac{\partial A}{\partial u} \right] \\
&= \frac{1}{A^3} k_1 (1 + \lambda_3 k_2) A^2 + \frac{1}{A^3 (1 + \lambda_3 k_1)} \left[\left(\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 k_2) \right) A^2 - \lambda_1 k_1 (1 + \lambda_3 k_2) A \frac{\partial A}{\partial u} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. A^2 ve $A \frac{\partial A}{\partial u}$ nun eşitleri de denklemde yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{A^3} k_1 (1 + \lambda_3 k_2) A^2 + \frac{1}{A^3} (1 + \lambda_3 k_2) \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} \left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2 \right) \\
&= \frac{1}{A^3} (1 + \lambda_3 k_2) \left[k_1 A^2 + \lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} \left(\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= -\frac{1}{A^3} \lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_2) \frac{\partial k_1}{\partial u} \\
\alpha_3 &= -\frac{1}{A^3} \lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_1) \frac{\partial k_2}{\partial v} \\
\alpha_4 &= \frac{1}{A^3} (1 + \lambda_3 k_1) \left[k_2 A^2 + \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} \left(\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

olduğu hesaplanabilir. Böylece M^v sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin S^v şekil operatörünün matrisi $\chi(M^v)$ nin $\{\psi_u, \psi_v\}$ bazına göre

$$S^v = \frac{1}{A^3} \begin{bmatrix} (1 + \lambda_3 k_2) \left(\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + k_1 A^2 \right) & -\frac{\partial k_1}{\partial u} \lambda_1^2 \lambda_2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_2) \\ -\frac{\partial k_2}{\partial v} \lambda_1 \lambda_2^2 k_1 k_2 (1 + \lambda_3 k_1) & (1 + \lambda_3 k_1) \left(\lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2) + k_2 A^2 \right) \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir.

Bu şekil operatörü ise (Tarakçı ve Hacısalıhoğlu, 2004) çalışmasında verilmiştir.

Sonuç 6.4.2. Bir M yüzeyinin M^v sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi için dönme açısı $\theta = 0$ alınırsa M^v yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla

$$K^v = (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \left\{ \frac{\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} \frac{\partial k_2}{\partial v} + \lambda_1 k_2 \frac{\partial k_1}{\partial u} (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + \lambda_2 k_1 \frac{\partial k_2}{\partial v} (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2)}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2 \right)^2} \right. \\ \left. \frac{K}{\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2} \right\}$$

ve

$$H^v = (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K) \frac{\lambda_1 \frac{\partial k_1}{\partial u} (1 + \lambda_3 k_2) (\lambda_2^2 k_2^2 + (1 + \lambda_3 k_2)^2) + \lambda_2 \frac{\partial k_2}{\partial v} (1 + \lambda_3 k_1) (\lambda_1^2 k_1^2 + (1 + \lambda_3 k_1)^2)}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2 \right)^{3/2}} \\ + \frac{H + 2\lambda_3 K}{\left(\lambda_1^2 k_1^2 + \lambda_2^2 k_2^2 + 2\lambda_3 (\lambda_1^2 k_1 + \lambda_2^2 k_2) K + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3^2 K^2 + (1 + \lambda_3 H + \lambda_3^2 K)^2 \right)^{1/2}}$$

olur.

İspat: Sonuç 6.4.1 den kolayca görülebilir.

Bu sonuç (Tarakçı ve Hacısalıhoğlu, 2004) çalışmasında olduğu gibidir.

Sonuç 6.4.3. Özel olarak $d_1 = d_2 = 0$, $\lambda d_3 = r$ ve dönme açısı $\theta = 0$ alınırsa M^v yüzeyi M yüzeyinin paralel yüzeyi olur ve

$$K^v = \frac{K}{1 + rH + r^2 K}, \quad H^v = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2 K}$$

dir.

İspat: Sonuç 6.4.1 de $\theta = 0$ alındığında

$$M^v = \left\{ \psi(u, v) \left| \psi(u, v) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi(u, v) + \lambda (d_1 \phi_u + d_2 \phi_v + d_3 U), d_1, d_2, d_3 \text{ sabit sayılar,} \right. \right. \\ \left. \left. d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1 \right\}$$

elde edilmiştir. Buradan $d_1 = d_2 = 0$, $\lambda d_3 = r$ için

$$M^v = \left\{ \psi(u, v) \left| \psi(u, v) = \cos^2 \frac{\theta}{2} \phi(u, v) + rU \right. \right\}$$

olacağından M^v yüzeyi M yüzeyinin paralel yüzeyi olur.

Diğer taraftan, Sonuç 5.4.2 de $d_1 = d_2 = 0$ olduğundan $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda d_3 = \lambda_3 = r$ yazılırsa

$$K^v = (1 + rH + r^2 K) \frac{K}{(1 + rH + r^2 K)^2} = \frac{K}{1 + rH + r^2 K}$$

ve

$$H^v = \frac{H + 2rK}{\left((1 + rH + r^2 K)^2 \right)^{1/2}} = \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2 K}$$

bulunur.

Sonuç 6.4.1, Sonuç 6.4.2 ve Sonuç 6.4.3, sabit sırt uzaklıklı yüzeyler ile paralel yüzeylerin sabit sırt uzaklıklı vida yüzeylerinin daha özel durumları olduğunu göstermektedir.

6.5. Sabit Sırt Uzaklıklı Vida Yüzeylerine Ait Bir Örnek

Örnek 6.1. $M = \left\{ \phi(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \mid 0 \leq u \leq \pi/2, 0 \leq v \leq \pi/2 \right\}$ sekizde bir birim küre yüzeyini alalım. M yüzeyi için $\phi_u = (-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u)$ ve $\phi_v = (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)$ olduğundan yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$U = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

olarak hesaplanabilir. $\forall p = \phi(u, v) \in M$ noktası için dönme eksenini

$$\vec{Z}_p = \frac{1}{2} \vec{\phi}_u \Big|_p + \frac{1}{\sqrt{2} \cos u} \vec{\phi}_v \Big|_p - \frac{1}{2} \vec{U}_p$$

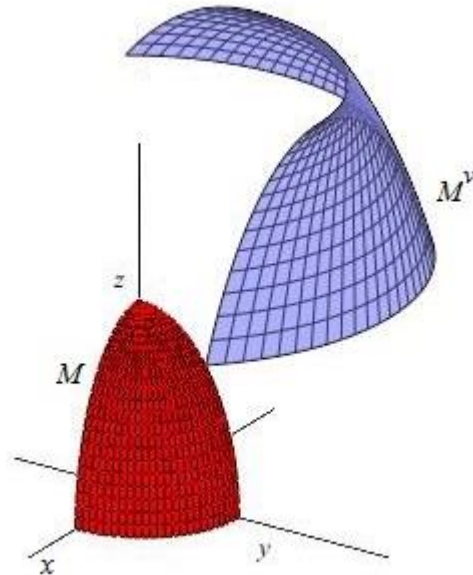
dönme açısını $\pi/2$ radyan ve öteleme vektörünü $\vec{t} = 2\vec{Z}_p$ olarak alalım. $\forall p = \phi(u, v) \in M$ için

$\|\vec{Z}_p\| = 1$ olduğu kolayca görülebilir. Maple programı yardımıyla M yüzeyine ait sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyinin elde edilişi aşağıda verilmiştir (Şekil 6.1).

```

> restart:
> with(VectorCalculus):
> with(plottools):
> with(plots):
> with(LinearAlgebra):
> p:=<cos(x)*cos(y), cos(x)*sin(y), sin(x)>;
      p := (cos(x) cos(y))ex + (cos(x) sin(y))ey + (sin(x))ez
> s[x]:=<-sin(x)*cos(y), -sin(x)*sin(y), cos(x)>;
> s[y]:=<-cos(x)*sin(y), cos(x)*cos(y), 0>;
> N1:=CrossProduct(s[x], s[y]):
> d1:=(1)/(2)*s[x]:
> d2:=((1)/(sqrt(2))*s[y])/(cos(x)):
> N:=(-1)/(2)*<-cos(x)*cos(y), -cos(x)*sin(y), -sin(x)>;
> z:=d1+d2+N;
      z := (-1/2 sin(x) cos(y) - 1/2 sqrt(2) sin(y) + 1/2 cos(x) cos(y))ex + (-1/2 sin(x) sin(y)
      + 1/2 sqrt(2) cos(y) + 1/2 cos(x) sin(y))ey + (1/2 cos(x) + 1/2 sin(x))ez
> v:=(1)/(2)*p+((1)/(2)+2)*z;
      v := (7/4 cos(x) cos(y) - 5/4 sin(x) cos(y) - 5/4 sqrt(2) sin(y))ex + (7/4 cos(x) sin(y)
      - 5/4 sin(x) sin(y) + 5/4 sqrt(2) cos(y))ey + (7/4 sin(x) + 5/4 cos(x))ez
> s:=plot3d([cos(x)*cos(y), cos(x)*sin(y), sin(x)], x=0..(Pi)/(2), y=0..
      (Pi)/(2), color=red):
> s2:=plot3d(v, x=0..(Pi)/(2), y=0..(Pi)/(2), color=blue):
> display([s, s2]);

```



Şekil 6.4. Sekizde bir birim küre yüzeyi ve sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi.

Burada M yüzeyinin şekil operatörünün matris gösterimi

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

olduğundan M yüzeyinin asli eğrilikleri $k_1 = k_2 = -1$ olarak hesaplanabilir. Böylece gerekli hesaplamalar yapılırsa $M^\vee$ yüzeyinin şekil operatörü

$$S^\vee = \frac{\sqrt{31}}{512} \begin{bmatrix} 784 & 0 \\ 0 & -2401 \end{bmatrix}$$

olur ve buradan $H^\vee = -\frac{1617}{512}\sqrt{31}$ ve $K^\vee = -\frac{3647119}{16384}$ elde edilir.

Dikkat edilirse $\forall p \in M$ için $K(p) > 0$ olduğundan M yüzeyinin noktaları eliptik noktalardır. Diğer taraftan $\forall f(p) \in M^\vee$ için $K^\vee < 0$ olduğundan $M^\vee$ yüzeyinin noktaları hiperbolik noktalardır. Buradan bir yüzeyin noktaları ile bu yüzeye ait sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyine ait noktaların karakterinin aynı olmak zorunda olmadığı söylenebilir.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada paralel yüzeylerin daha genel bir hali olan, vida operatörü yardımıyla tanımlanan vida yüzeyleri verilmiştir. Bu yüzeyler için şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik gibi kavramların yanında yüzey üzerindeki eğrinin Frenet ve Darboux çatıları yardımıyla belirlenen bazı eğrilikleri de elde edilmiştir. Ayrıca, vida yüzeylerinin, dolayısı ile paralel yüzeylerin çok daha genel bir hali olan sabit sırt uzaklıklı vida yüzeylerine değinilmiş ve bu yüzeylerin diferensiyel geometrik özelliklerinin elde edilmesini sağlayan şekil operatörü, Gauss eğriliği ve ortalama eğrilik gibi kavramlar hesaplanmıştır.

Bu çalışma yardımıyla sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyi üzerinde bir eğri için geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik burulma fonksiyonları hesaplanabilir. Bu yüzeyin Weingarten yüzeyi olma şartı araştırılabilir. Sabit sırt uzaklıklı vida yüzeyleri, kayma operatörü kullanılarak incelenebilir. Ayrıca, çalışma boyunca elde edilen veriler ile vida yüzeyi fonksiyonu

$$f(p) = \cos \theta p + \sin \theta (\bar{U} \wedge p) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \langle \bar{U}, p \rangle \bar{U} + \lambda \bar{U}$$

olarak alındığında elde edilecek veriler karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Aktan, N., Görgülü, A., Özüsaglam, E., Ekici, C., (2006), Conjugate tangent vectors and asymptotic directions for surfaces at a constant distance from edge of regression on a surface, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, Cilt 33, Sayı 1, s. 127–133.
- Ata, E., Yaylı, Y., (2008), Dual unitary matrices and unit dual quaternions. *Differential Geometry-Dynamical Systems*, Cilt 10, s. 1-12.
- Baky, R. A. (2003), On The Blaschke Approach of Ruled Surface, *Tamkang Journal of Mathematics*, Cilt 34, Sayı 2.
- Bishop, R. L., (1975), There is More than One Way to Frame a Curve, *The American Mathematical Monthly*, Cilt 82, Sayı 3, s. 246-251.
- Blaschke, W., (1949), Diferensiyel Geometri Dersleri, İstanbul Üniversitesi Yay. Sayı 433.
- Bottema O., Roth B., (1990), Theoretical Kinematics, Dover Publications, Inc., New York.
- Clifford, W. K., (1873), Preliminary Sketch of Bi-quaternions, *Proc.LondonMath.Soc.* 4. s. 381-395.
- Dede, M., Ekici, E., Çöken, A. C., (2012), On The Parallel Surfaces In Galilean Space, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, Cilt 42, Sayı 6, s. 605-615.
- E. Study, (1903), *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, Germany.
- Eisenhart, L.P., (1909), A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces, Ginn and Company, Boston New York.
- Ercan, Z., Yüce, S., (2011), On Properties of Dual Quaternions, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, Cilt 4, Sayı 2, s. 142-146.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (1983), Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H., (2000), Diferensiyel Geometri, Hacısalıhoğlu Yayınları, Cilt 1, Cilt 2.
- Hamilton, W. R., (1843), On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra (letter to John T. Graves, dated October 17, 1843).
- Hanson, A.J., (1994), Quaternion Frenet Frames: Making Optimal Tubes and Ribbons from Curves, Tech. Rep. 407, Indiana University Computer Science Department.
- Kızıltuğ, S., Tarakçı, Ö., Yaylı, Y., (2013), On the curves lying on parallel surfaces in the Euclidean 3-space E^3 , *Journal of Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, Cilt 5, Sayı 3, s. 26-35.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

McCarthy, J., M., (1990), An Introduction to Theoretical Kinematics, MIT Press, Cambridge.

O'Neill, B., (2006), Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York.

Öztürk, U., Hacısalıhoğlu, H. H., Yaylı, Y., Koç Öztürk, B., (2010), Dual Quaternion Frames, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A1 Cilt. 59, Sayı 2, s. 41-50 ISSN 1303.5991.

Parker, J., (2009), Quaternionic linear algebra, Durham University.

Ru, M., (1999), Lecture on Differential Geometry Part I., Huston Üniversitesi.

Sabuncuoğlu, A., (2010), Diferensiyel Geometri, Nobel Yayıncılık.

Sağlam, D., Boyacıoğlu Kalkan, Ö., (2010), Surfaces At A Constant Distance From Edge Of Regression On A Surface In E_1^3 , Differential Geometry-Dynamical Systems, Cilt 12, s. 187–200.

Sağlam, D., Boyacıoğlu Kalkan, Ö., (2013), The Euler Theorem and Dupin Indicatrix For Surfaces At A Constant Distance From Edge Of Regression On A Surface In E_1^3 , Matematikçi Vesnik, Cilt. 65, Sayı 2, s. 242–249.

Savcı, Ü. Z., (2011), 3-Boyutlu Öklid Uzayında Paralel Regle Weingarten Yüzeyler Üzerine, Doktora Tezi.

Selig, J.M., Husty, M., (2011), Half-turns and line symmetric motions, Mechanism and Machine Theory, cilt. 46, s. 156–167.

Shifrin, T., (2011), Differential Geometry: A First Course in Curves and Surfaces. Preliminary Version, Fall, 125 p. University of Georgia, Athens, Georgia, 30602.

Tarakçı, Ö., Hacısalıhoğlu, H. H., (2004), Surfaces At A Constant Distance From The Edge Of Regression On A Surface, Applied Mathematics and Computation, Cilt. 155, s. 81-93.

Uras, F., (1992), Diferensiyel Geometri Dersleri, Yıldız Teknik Üniversitesi Yayın Komisyonu.

Ünlütürk, Y., Özusağlam, E., (2013), On Parallel Surfaces In Minkowski 3-Space, TWMS J. App. Eng. Math., Cilt 3, Sayı 2, s. 214-222.

Yang, A. T., Freudenstein, F., (1964), Application of a dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, ASME journal of Applied Mechanics, Cilt 86E, Sayı 2, s. 300-308.

Yaylı, Y., Saraçoğlu, S., (2012), Ruled Surfaces with Different Blaschke Approach, Applied Mathematical Sciences, Cilt 6, Sayı 59, s. 2945-2955.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Yalova’ da doğdu. 2000 yılında ilköğrenimini tamamladı. 2004 yılında Yalova Lisesi (YDAL)’ den mezun oldu. 2009 yılında Dokuz Eylül Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik (İngilizce) Bölümü’ nden mezun oldu ve aynı yıl Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2011 yılında Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda bütünsel doktora öğrenimine başladı. 2010 yılından beri Dumlupınar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.