ANİZOTROPİK ORTAMDA ELEKTROMAGNETİK RADYASYONUN İNCELENMESİ

Nuran ÖZALP

Doktora Tezi
Fizik Anabilim Dalı
Erzurum 1967

ANİZOTROPİK ORTAMDA
ELEKTROMAGNETİK RADYASYONUN İNCELENMESİ

Doktora tezi

NURAN ÖZALP
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen-Ed. Fakültesi, Fizik Bölümü Asistanı

Erzurum 1967

İ Ç İ N D E K İ L E R

Ö N S Ö Z   V E   T A K D İ M

Son yıllarda, elektromagnetik özellikleri anizotropik olan ortamlarda yüksek frekans ve bilhassa mikrodalga fizik çalışmalarına alâka duyulmuştur. Bu maddeler arasında devamlı magnetik saha içinde plasma (iyonlanmış gazlar) ve ferriteler (demirin bazı özel bileşenleri), kristaller, elâstik maddeler vardır.

Bu çalışmada, anizotropik ortamda madde sabitleri ve bunların kayıplı ve kayıpsız ortamdaki şartları sağlamak için hangi özellikleri haiz olmaları gerektiği incelenmiş ve iyonlanmış gazlarla ferriteler arasındaki karşılıklı bağıntı münakaşa edilmiştir. Sınırsız anizotropik ortamlarda düzlem dalga incelenmiş, bunların dalga matrisleri verilmiş, propagasyon sabitleri ve dalganın mümkün polarizasyonu bulunmuştur.

Sınırsız, homojen anizotropik ortamda radyasyon problemi, dyadic green fonksiyonları ve spesiyal fourier transformasyonları metodu ile çözülmüştür. Metod, anizotropik ortamda ve bilhassa plasmada, bir düzlem içine düzenlenmiş titreşen dipollerin yarattığı dalganın incelenmesine ve modüle edilmiş bir iyon demetinden plasmaya geçen gücün hesaplanmasına tatbik edilmiştir.

Burada sözü tez'e bırakırken, çalışmamda bana yol gösteren ve aydınlatan, değerli alâkaları ile her türlü kolaylığı gösteren Sayın Hocam Prof. Ahmet Özel'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarımın mühim bir kısmını yaptığım Nebraska Üniversitesi öğretim üyelerine ve kitaplığından yararlanmam için imkân veren Orta Doğu Teknik Üniversitesi ilgililerine teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Nuran ÖZALP

Atatürk Üniversitesi

Fizik Asistanı

KULLANILAN SEMBOLLER

$\underline{A}$ .... Vektör (Sütun Matris)

$\underline{\tilde{A}}$ .... nın Transpozesi (Sıra Matris)

$\underline{A}^+$ .... nın Hermitian Konjugesi

$\underline{A} \cdot \underline{\tilde{A}}$ .... Dyade

$\underline{A} \cdot \underline{A}$ .... Skaler Çarpım

$\underline{A} \times \underline{B}$ .... Vektörel Çarpım

$\hat{A}$ .... Matris

$\tilde{\hat{A}}$ .... $\hat{A}$ nın Transpozesi

$\hat{A}^+$ .... $\hat{A}$ nın Hermitian Konjugesi

$\det \hat{A}$ .... $\hat{A}$ nın Determinantı

$\underline{r}$ .... Yarıçap Vektör

ω .... Radian Frekansı (Pulzasyon)

$k_0 = \frac{\omega}{c}$ .... Işığın Boşlukta Yayılma Sabiti

$\underline{k}$ .... k - Uzayında Yarıçap Vektörü

$\underline{n}$ .... (n_1, n_2, n_3) Dalga Normali, Birim Vektör

∇ .... Nabla Operatörü

Δ .... Laplacian Operatör

δ .... Delta Fonksiyonu

j .... $\sqrt{-1}$

ε_0 .... Boşluğun Dielektrik Katsayısı

μ_0 .... Boşluğun Permeabilitesi

c .... Boşlukta Işığın Yayılma Hızı

I - ANİZOTROPİK ORTAMIN TARİF VE TAVSİFİ

I - 1. Anizotropik Ortamın Tarifi

Anizotropik Ortam teriminden, elektromagnetik özellikleri bakımından lineer kabul edilebilen fakat madde sabitleri bir tensör ile tarif edilen ortam anlaşılır. Ortam, gaz, sıvı, katı veya bunların karışımı olabilir. Ortamın mikroskopik özellikleri konumuzun dışında kalmaktadır. Makroskopik madde sabitleri yâni tensörlerde dielektrik sabiti ve magnetik permeabiliteden ibaret olur.

Anizotropik ortamlarda -meselâ bazı kristallerde- elektromagnetik dalganın hızı bütün yayılma yönlerinde aynı değildir. Diğer ortamlarda olduğu gibi, elektrik alan $\underline{E}$, $\underline{D}$ veya $\underline{J}$ 'ye paralel değildir. Aynı şekilde, magnetik alan $\underline{H}$, magnetik indüksiyon $\underline{B}$ 'ye paralel değildir. Madde sabitleri tensörlerdir, bunlar elektromagnetik alan vektörlerinin bileşenleri arasındaki lineer bağıntıyı gösterirler.

Bu tensörler, $\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ matrisleri ile gösterilirse, bu bağıntı

$$\varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \underline{E} = \underline{D} + \frac{\underline{J}}{j\omega}$$

$$\mu_0 \hat{\mu} \underline{H} = \underline{B}$$

şeklindedir.

$\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ genel olarak frekansın fonksiyonudurlar. Fakat kâfi derecede küçük bir frekans aralığında sabit farzedilebilirler. Bileşenleri komplekstir. $\underline{E}$, $\underline{H}$, $\underline{D}$ zamana bağlı alan büyüklüklerinin kompleks amplitüdleridir.

Anizotropik Ortamların Genel Sınıflandırılmaları.

I - 2. Plazma (Magnetik Alan İçindeki İyonlanmış Gazlar)

İyonlanmış gazlar, dielektrik ortamlar olarak düşünülür. Bunların büyüklüğü ışığın dalga boyu partiküller arasındaki uzaklığa göre çok büyük ise, sürekli bir ortam kabul edilebilirler. İyonlanmış gaz yahut plasmayı devamlı magnetik alan içine yerleştirmek suretile elde edilen ortama, anizotropik dielektrik ortam denilir. Literatürde daha başka isimler de kullanılmıştır. Meselâ :

Magnetoaktif plasma,

Magnetoiyonik ortam,

Magneto plasma,

Gyrotropic plasma...gibi.

Bu ortam astrofizikte, termonükleer çalışmalarda, iyonosferde ve daha bir çok sahalarda bahis konusudur. Ortamın elektromagnetik karakteri ilk def'a Nichols ve Schelling tarafından incelenmiş ve ortam bir dielektrik tensörü ile tarif edilmiştir. "Appleton denklemleri" ise diğer bir tarif şeklidir.

Başlangıçta da söylenildiği gibi, ortamın mikroskopik özellikleri ile ilgili değiliz. Fakat konuya girerken kısaca da olsa elektromagnetik alan içine yerleştirilen plasmanın dielektrik tensörü hakkında bilgi verilmesini, konunun daha iyi anlaşılması bakımından lüzumlu buluyoruz.

I - 3. Magnetize Edilmiş Plasma

Plasma, elektron ve iyonların karışımından teşekkül etmiş bir gazdır. Bunu düzgün bir magnetik alan içine yerleştirelim ve parçacıkların hareketini düşünelim. Newton kanunundan,

$$m\underline{\dot{V}} = \frac{e}{c}\left(\underline{V} \times \underline{B}\right) = \underline{F}$$

$$\underline{\dot{V}} = \frac{e}{mc}\left(\underline{V} \times \underline{B}\right)$$

olacaktır. Magnetik alan yönünde $\underline{F} = 0$ dır. O halde bu yönde hız sabittir. Bunu $V_{\parallel}$ ile gösterirsek

$$V_{\parallel} = \underline{V} \cdot \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|} = C$$

$\frac{\underline{B}}{|\underline{B}|}$, $\underline{B}$ yönündeki birim vektördür. Buna dik olan yönü ($\perp$) ile gösterelim. Bu yönde

$$V_{\perp} = V_{\perp}\left(\cos(\Omega t + \varphi),\ \sin(\Omega t + \varphi)\right)$$

şeklinde t nin fonksiyonudur. Bunların integralini alarak yörüngenin denklemini bulalım :

$$x_{\parallel} = V_{\parallel} t \,, \qquad x_{\perp} = \frac{V_{\perp}}{\Omega} \left(\sin(\Omega t + \varphi), - \cos(\Omega t + \varphi \right.$$

Parçacık, yarıçapı $r = \dfrac{V_{\perp}}{\Omega}$ olan bir heliks üzerinde dolaşır.

Bir düzlem içinde kapalı bir yörünge üzerinde dönen yüklü bir parçacığın bir dipol momenti vardır. Ve eğer yörüngenin çevrelediği alan A ise bu moment

$$\mu = I A = \frac{e}{cT} \pi r^2 = \frac{e \nu}{c} \pi r^2$$

Diğer taraftan

$$2\pi \omega = \nu \,, \quad \omega = \frac{V_{\perp}}{r} = \frac{eB}{m}$$

Bu değerleri yerine koyarsak

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{m V_{\perp}^2}{B} \,, \qquad \underline{\mu} = \frac{1}{2} \frac{m V_{\perp}^2}{B} \cdot \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|}$$

bulunur. Ve magnetik moment yoğunluğu

$$\vec{M} = - \frac{1}{2} \frac{m V_{\perp}^2 n}{B} \cdot \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|}$$

dır. Akı yoğunluğu ise

$$\underline{J} = \underline{\nabla} \times \underline{M} = \frac{\underline{B}}{B^2} \times \nabla \left(\frac{1}{2} n . m V_{\perp} \right)$$

bulunur.

Şimdi buraya bir $\underline{E}$ elektrik alanı tatbik edelim. Elektrik alanın $\underline{B}$ ile aynı yönde olan bileşeni parçacığı hızlandıracak, buna dik olan bileşeni ise bir sapma hızı hasıl edecektir. Eğer tatbik edilen alan, zamanın bir fonksiyonu ise, sapma hızı da sabit değildir yâni parçacığın bir ivmesi olacaktır. Bu ivmeyi aşağıdaki şekilde ifâde edelim :

$$\dot{\underline{V}} = \frac{e}{mc} (\underline{V}_s \times \underline{B})$$

$\underline{V}_s$ bir akımın doğmasına sebep olacaktır. diğer taraftan ,

$$\vec{\underline{V}} = c \, \frac{\underline{E} \times \underline{B}}{B^2}$$

dır. Bu iki denklemden akı yoğunluğu

$$\underline{J} = \sum n e \, \underline{V}_s = \sum \frac{n m c^2}{e B^2} \dot{\underline{E}}$$

bulunur.

$$n\,m = \rho \qquad \underline{J} = \underline{\dot{P}}$$

dersek (bütün büyüklüklerin zamanın sinüsoidal fonksiyonları olduğunu kabul ederek)

$$\underline{P} = \rho \frac{c^2}{B^2} \underline{E}$$

bulunur.

$$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P} = \varepsilon E$$

den

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi \rho c^2}{B^2}$$

plazma frekansı bulunur.

Şimdi yüksek frekansta transvers hareketin denklemini inceleyelim.

Burada :

$$\dot{V}_x = \frac{e}{m} E_x + \Omega V_y$$

$$\dot{V}_y = \frac{e}{m} E_y - \Omega V_x$$

ve

$$\underline{V} = V_x + i V_y = \frac{e}{m} \frac{1}{j(\omega \mp \Omega)} (E_x \mp j E_y)$$

yahut

$$\underline{V} = \frac{e}{m} \frac{1}{j(\omega \mp \Omega)} E_{\pm}$$

yazabiliriz. Bu hazın doğurduğu akı yoğunluğu

$$\underline{J} = n\,m\,\underline{V}$$

ve

$$\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m$$

diyerek ,

$$4\pi \underline{P} = -\omega_p^2 \frac{\underline{E}_\mp}{\omega(\omega \mp \Omega)}$$

yahut iyon ve elektronların hareketini hep birden nazarı itibare alarak

$$4\pi P_\pm = -\omega_p^2 \left[\frac{1}{\omega(\omega \mp \Omega_-)} + \frac{m}{M}\frac{1}{\omega(\omega \mp \Omega_+)}\right] \underline{E}_\pm$$

Yahut

$$4\pi P_i = -\omega_p^2 \left\{\frac{1}{\omega\left[\omega + (-1)^i \Omega_-\right]} + \frac{m}{M}\frac{1}{\omega\left[\omega \mp (-1)^i \Omega_+\right]}\right\} E_i$$

verilir. Gene

$$\underline{E} + 4\pi \underline{P} = \varepsilon \underline{E} \quad \text{Ve} \quad i = \mp 1, 0$$

münasebetinden ve magnetik alanı (OZ) doğrultusunda alarak

$$i = \mp 1, 0$$

değerleri için $\mathcal{E}$, üç bağımsız bileşeni ,

$$\mathcal{E}_{zz} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$$

$$\mathcal{E}_{xx} = \mathcal{E}_{yy} = 1 - \omega_p^2\left(\frac{1}{\omega^2 - \Omega_-^2} + \frac{m}{M}\frac{1}{\omega^2 - \Omega_+^2}\right)$$

$$\mathcal{E}_{xy} = -\mathcal{E}_{yx} = j\,\omega_p^2\left(\frac{\Omega_+}{\omega(\omega^2 - \Omega_-^2)} + \frac{m}{M}\frac{\Omega_+}{\omega(\omega^2 - \Omega_+^2)}\right) \text{ dir.}$$

Eğer yukarıda $\underline{P}$ 'yi veren denklemlerde

$i = +1$ Sağ dairesel polarize dalga,

$i = -1$ Sol dairesel polarize dalga,

$i = 0$, $\underline{B}$ yönünde polarize olmuş dalga bulunur.

Dalga yayılımında bunlar, Maxwell denklemi içinde kısaltılmış şekillerile kullanılabilirler.

Magnetik alan, (x, y, z) dik koordinatlar sisteminde Z doğrultusunda alınırsa,

$$\vec{\mathcal{E}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde bir tensörle gösterilir.

Frekans çok yüksek ve ağır iyonların hareketi ihmal edilebilirse ε_1, ε_2 ve ε_3 bileşenleri ω_H gyrofrekansı

$$\omega_H = \frac{e}{m_0}\mu_0 B_0$$

elektron plasma frekansı

$$\omega_p^2 = \frac{n e^2}{\varepsilon_0 m_0}$$

ve,

ν , elektronların ağır iyonlarla çarpışma frekansı ile tâyin edilir. Burada :

n = birim hacimdeki elektron sayısı,

e = elektronik yük,

m_0 = elektronun kütlesidir.

ε_i nin değeri aşağıdaki formüllerle verilir :

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2\left(1 - j\frac{\nu}{\omega}\right)}{\omega^2\left(1 - j\frac{\nu}{\omega}\right) - \omega_H^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_H}{\omega}\,\frac{\omega_p^2}{\omega^2\left(1 - j\frac{\nu}{\omega}\right) - \omega_H^2}, \quad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2\left(1 - j\frac{\nu}{\omega}\right)}$$

$\frac{\nu}{\omega} \ll 1$ ise ε_i ler reel farzedilebilir.

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \qquad \varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Tatbik edilen magnetik alan çok yüksek ise,

$$\frac{\omega_H}{\omega_p} \gg 1 \quad \text{ve} \quad \frac{\omega_H}{\omega} \gg 1$$

O zaman gaz (plasma) bir uniaxial kristal karakterindedir ve yukardaki formüllerden,

$$\varepsilon_1 = 1$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

alınabilir.

Yüksek sıcaklıklarda dielektrik tensör daha kompleks bir şekildedir. Eğer ortam, yâni iyonlanmış gaz magnetik değilse izafi geçirgenlik $\hat{\mu} = \hat{I}$ dir.

I - 4. Ferriteler

Bu isim bazı demir bileşenlerine verilen müşterek bir addır. Eğer devamlı bir magnetik alan $\underline{H}_0$ tatbik edilirse, ferrite ve benzeri maddeler "Anisotropik Magnetik" bir ortam teşkil ederler. Burada da yine H_0, Z eksenî yönünde ise "Magnetik Geçirgenlik" tensörü

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu^2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Burada da $\hat{\mu}$ nün bileşenleri,

$$\mu_1 = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}$$

$$\mu_2 = \frac{\omega_H \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}$$

$$\mu_3 = 1$$

Burada, ω_H elektron frekansı,

ω_M saturasyon frekansı

$$\omega_M = \frac{e}{m_0} \mu_0 M_0$$

M_0 , maddenin saturasyon magnetizasyonudur.

I - 5. Kristaller

Kristallerin anizotropik özellikleri, kristali teşkil eden moleküllerin anizotropik elektrik özellikleri ile izah edilebilir.

Kristaller, anizotropik dielektrik ortamlardır. Dielektrik tensör $\hat{\varepsilon}$, eğer koordinat sistemleri uygun seçilmiş ise, rankı 2 olan bütün simetrik tensörler gibi diyagonal şekle getirilebilir. Genel olarak $\hat{\varepsilon}$ üç bağımsız büyüklük, üç prensipal değer ile tâyin edilir. (ε_1 , ε_2 , ε_3)

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

Kristalin fiziksel özelliklerine bağlı olarak ε_1 , ε_2 , ε_3 değerleri değişir. Eğer ε_1 , ε_2, ε_3 üçünün değerleri farklı ise kristal "biaxial" denilir. Bu mesela triclinic, monoclinic ve rhombic kristal sistemlerinde bulunur.

Eğer ε_1 , ε_2, ε_3 değerlerinden ikisi birbirine eşit ve üçüncüsü farklı bir değer alırsa "uniaxial" kristal denilir. Tetragonal, rhombohedral ve hexagonal kristal sistemlerinde olduğu gibi.

Kübik kristal sistemlerinde ise $\hat{\varepsilon}$ nun üç prensipal değeri birbirine eşittir. Yâni $\hat{\varepsilon}$ tensörü bir tek skalar ile gösterilebilir. Ve elektromagnetik

Bütün bunlardan başka sun'i olarak anizotropik hale getirilmiş ortamlar vardır. Meselâ, aslında izotropik olan bir maddenin devamlı elektrik ve magnetik alan tesiri altında bırakılmasile olduğu gibi.

II - ELEKTROMAGNETİK DALGALAR

II - 1. Maxwell Denklemleri

Kararlı ortamda elektromagnetik alan Maxwell Denklemlerile verilir. Bir başlangıç olarak Maxwell denklemlerinin genel şeklini verelim :

$$\mathrm{Curl}\ \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$
$$\mathrm{Curl}\ \underline{H} = \underline{J} + \dot{\underline{D}}$$
$$\mathrm{Div}\ \underline{D} = 0$$
$$\mathrm{Div}\ \underline{B} = 0$$

Ve tamamlayıcı denklemler ise,

$$\underline{B} = \mu\, \underline{H}$$
$$\underline{D} = \varepsilon\, \underline{E}$$
$$\underline{J} = \alpha\, \underline{E}$$

dır.

Lorentz teoreminden

$$\underline{J} = \dot{\underline{P}}$$
$$\underline{P} = N q\, \underline{r}$$
$$\underline{J} = N q\, \underline{V} = \rho\, \underline{V} = \dot{\underline{P}}$$

$\underline{V}$, yük hızının zaman ortalaması

N birim hacimdeki parçacık sayısı

$\underline{P}$ polarizasyon vektörü (birim hacimdeki dipol moment)

Maxwell denklemlerinde yükün mikroskopik yapısı bilinmediğinden hareket denklemleri

$$\frac{d(mV)}{dt} = q\left(\underline{E} + \underline{V} \times \underline{B}\right)$$

şeklinde olmalıdır.

Alan büyüklüklerinin yâni $\underline{E}(t)$, $\underline{H}(t)$, $\underline{J}(t)$ ve $\underline{M}(t)$ nin zamanın sinüsoidal fonksiyonları olduğunu kabul edersek, meselâ

$$\underline{E}(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{E}\, e^{j\omega t} + \underline{E}^{x}\, e^{-j\omega t}\right)$$

olmak üzere, Maxwell denklemleri

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu_0 \hat{\mu}\, \underline{H} - \underline{M}$$

$$\nabla \times \underline{E} = j\omega\mu_0 \hat{\varepsilon}\, \underline{E} + \underline{J}$$

yazılabilir. Burada ω radyasyon frekansıdır ve $\underline{E}$, $\underline{H}$, $\underline{J}$, $\underline{M}$ 'de complex amplitüdlerdir.

$\underline{J}$ hareket eden yüklü parçacıkların hasıl ettiği elektrik akı yoğunluğu,

$\underline{M}$ magnetik akı yoğunluğudur.

$\underline{J}$ ve $\underline{M}$ nün bilinen büyüklükler olduğunu kabul ediyoruz. $\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ ise dielektrik ve magnetik tensörlerdir. Genellikle bu tensörlerin elemanları complextir. Dışardan tatbik edilen alan dik koordinatlarda (z) yönünde ise bu tensörlerin

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & -j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğunu daha evvel görmüştük.

Magnetik akı yoğunluğu reel bir fiziksel büyüklük değildir. Fakat bunların hesaplara katılması lüzumludur. Bunlar :

a) Anizotropik dielektrik ortam (meselâ plasma) ile anizotropik magnetik ortam (meselâ ferriteler) arasındaki karşılıklı bağıntıyı ortaya koymak,

b) Ortamda belli süreksizliklerin bir magnetik akı yayılımına eşdeğer gibi düşünülebilmesi.

II - 2. Matris Notasyon ve Diferansiyel Operatör

Makroskopik madde sabitleri $\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ nün birer (3×3) matris olduğunu gördük. Ve bu matrislerin a_{ij} elemanları genellikle complextir. $\underline{E}$ ve $\underline{k}$ vektörlerini bu notasyonla gösterirsek

$$\underline{E} = \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} \qquad \underline{k} = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{vmatrix}$$

olur. Burada, E_x , E_y , E_z ve k_1 , k_2 , k_3 , $\underline{E}$ ve $\underline{k}$ vektörlerinin üç eksen üzerindeki bileşenleridir.

Maxwell denklemlerinde $\underline{J}$ ve $\underline{M}$ nin sıfır ve

$$\underline{E} = E_0\, e^{ik\,\underline{n}\cdot\underline{r}}$$

olduğunu düşünürsek denklemler,

$$\underline{k} \times \underline{E} = \omega \mu_0 \hat{\mu}\, \underline{H}$$

$$\underline{k} \times \underline{H} = -\omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon}\, \underline{E}$$

şeklini alırlar.

Burada $\underline{k} \times \underline{E}$ vektörel çarpımını matris notasyonuyla göstermek suretile

$$\underline{k} \times \underline{E} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ E_x & E_y & E_z \end{bmatrix}$$

$$= \underline{i}\left(k_2 E_z - k_3 E_y\right) + \underline{j}\left(k_3 E_x - k_1 E_z\right) + \underline{k}\left(k_1 E_y - k_2 E_x\right)$$

bulunur. Bu bir vektördür ve yukardaki notasyonla da,

$$\underline{k} \times \underline{E} = \begin{vmatrix} k_2 E_z - k_3 E_y \\ k_3 E_x - k_1 E_z \\ k_1 E_y - k_2 E_x \end{vmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir.

Diğer taraftan $\underline{k}$ nın elemanlarını, bir skew-simetrik $\hat{k}$ matrisi şeklinde ifâde edebilirsek,

$$\underline{k} \times \underline{E} = \hat{k}\, \underline{E}$$

şeklinde gösterebiliriz ki bu da her zaman mümkündür.

$$\hat{k} = \begin{vmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\hat{k}\, \underline{E} \quad \begin{bmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 E_z - k_3 E_y \\ k_3 E_x - k_1 E_z \\ k_1 E_y - k_2 E_x \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Eğer bir $\hat{A}$ matrisinin elemanları iki vektörün bileşenlerine

$$\hat{A} = \underline{k}\ \tilde{\underline{E}}$$

şeklinde bağlı ise $\hat{A}$ ya bir dyade denilir.

$$\hat{A} = \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{vmatrix} \overline{\underline{E_x \quad E_y \quad E_z}} = \begin{vmatrix} k_1 E_x & k_1 E_y & k_1 E_z \\ k_2 E_x & k_2 E_y & k_2 E_z \\ k_3 E_x & k_3 E_y & k_3 E_z \end{vmatrix}$$

Dyade notasyonu kullanılırsa matris çarpımı $\hat{K}\hat{K}$, $\underline{k}$ cinsinden yazılabilir.

$$\hat{K}\hat{K} = \begin{vmatrix} k_1^2 - k^2 & k_1 k_2 & k_1 k_3 \\ k_1 k_2 & k_2^2 - k^2 & k_2 k_3 \\ k_1 k_3 & k_2 k_3 & k_3^2 - k^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{vmatrix} \overline{\underline{k_1 \quad k_2 \quad k_3}} - k^2 \hat{I} = \underline{k}\ \tilde{\underline{k}} - (\underline{k} \cdot \underline{k})\hat{I}$$

bulunur.

Bir $\hat{A}$ matrsinin hermitian konjugesi $\hat{A}^+$ ile gösterilir ki bu $\hat{A}$ nın transpozesinin elemanlarının konjugesi alınarak bulunur. Yâni $\hat{A}$ nın elemanlarını a_{ij} ile gösterirsek

$$a_{ij}^+ = a_{ji}^*$$

dir.

Bir $\underline{E}$ sütun matrisinin hermitian konjugesi bir sıra matris $\underline{E}^+$ dır.

Diferansiyel Operatör $\frac{\partial}{\partial x_i}$: $i = 1, 2, 3 \ldots$

$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial x_i$ skalar operatörlerdir ve bir vektörün bileşenleri şeklinde aranje edilebilirler. Meselâ $\nabla \equiv$ Nabla

$$\nabla = \begin{vmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{vmatrix},$$

Yahut da bir matrisin elemanları şeklinde

$$\hat{\nabla} = \begin{vmatrix} 0 & -\partial_z & \partial_y \\ \partial_z & 0 & -\partial_x \\ -\partial_y & \partial_x & 0 \end{vmatrix}$$

Yukarda da söylenildiği gibi

$$\hat{\nabla} \underline{E} = \mathrm{Curl}\, \underline{E} = \nabla \times \underline{E} \quad \text{ve} \quad \hat{\nabla}\, \hat{\nabla}$$

matris çarpımı

$$\hat{\nabla}\, \hat{\nabla} = \nabla\, \tilde{\nabla} - \Delta \hat{I}$$

burada $\hat{I}$ birim matris $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ Laplacien operatördür ve matris $\nabla \tilde{\nabla}$ nın

elemanları,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

operatörleridir.

II - 3. Elektromagnetik Kuvvet, Poynting Teoremi

Bir q yükü için elektromagnetik kuvvet -Lorentz kuvveti-

$$\underline{F} = q\,(\underline{E} + \underline{V} \times \mu_0 \underline{H})$$
$$= q\,(\underline{E} + \underline{V} \times \underline{B})$$

dır. Burada $\underline{V}$ elektrik yükünün hızını göstermektedir. Yükün yoğunluğu $\rho(e)$

olarak verilmişse,

$$\underline{J} = \rho(e)\, \underline{V} \quad , \quad \underline{F}_1 = \rho(e)\, \underline{E} + \underline{J} \times \underline{B}$$

olur. $\underline{J}$ yüklerin hareketinden doğan akımın yoğunluğudur.

Elektrik enerjisi konservatiftir. Elektrik yüklerin dengede tutulabilmesi için, elektromagnetik alan ile dış kuvvetler arasında bir enerji alışverişi olması lâzımdır. Elektromagnetik alanın gücünü yazalım : Bir tek q yükü için,

$$\underline{F} \cdot \underline{V} = q(\underline{E} + \underline{V} \times \underline{B}) \cdot \underline{V} = q\underline{V} \cdot \underline{E}$$

bulunur. Kuvvet $\underline{V}$ ye dik olduğundan magnetik alanın işi sıfırdır. Bir $\rho(e)$ yük dağılımı için bu güç,

$$\underline{F} \cdot \underline{V} = \underline{J} \cdot \underline{E}$$

dır.

Bundan sonraki bağıntıların açıkça görülebilmesi için Maxwell denklemlerini ve yükün sakınımı prensipini bir kerre daha yazalım :

$$\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \underline{H} = \underline{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{D} = \rho(e) \quad , \quad \mathrm{div}\,\underline{B} = 0 \quad , \quad \mathrm{div}\,\underline{J} + \frac{\partial \rho(e)}{\partial t} = 0$$

olur. Bu denklemler, Faraday Kanunu ve

$$\nabla \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = \underline{H} \cdot (\nabla \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\nabla \times \underline{H})$$

vektör bağıntısı kullanılarak

$$\underline{J} \cdot \underline{E} = \underline{E} \cdot \mathrm{Curl}\,\underline{H} - \varepsilon_0 \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \underline{H}\,\mathrm{Curl}\,\underline{E} - \mu_0 \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$

yahut

$$-\underline{J} \cdot \underline{E} = \mathrm{div}\,(\underline{E} \times \underline{H}) + \varepsilon_0 \underline{E} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \mu_0 \underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{H}}{\partial t}$$

olur.

Bu denklem "Poynting Teoremi"dir ve elektromagnetik enerjinin sakınımının ifâdesidir. Poynting vektör $\underline{S}$ ise

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H}$$

dır. Burada iki hipotezi kaydedelim :

a) Ortam elektrik ve magnetik özellikleri bakımından lineerdir.

b) Enerji, elektrik ve magnetik enerjilerin toplamına eşittir. Yâni, enerji yoğunluğunu P ile gösterirsek, bu yoğunluk,

$$P \equiv (\underline{E}\cdot\underline{D} + \underline{B}\cdot\underline{H})$$

şeklindedir. Ve yukardaki denklem,

$$\frac{dP}{dt} + \nabla\cdot\underline{S} = -\underline{J}\cdot\underline{E}$$

şeklinde yazılabilir.

II - 4. Kayıplı Ortamda Madde Sabitlerinin Özellikleri

Birim hacimden çıkan ortalama kompleks güç, poynting teoreminden hesaplanır. $\underline{E}$, $\underline{H}$, $\underline{J}$ ve $\underline{M}$ nin zamanın sinüsoidal fonksiyonları olduğunu kabul edip anizotropik ortam için Maxwell denklemlerini yazarsak,

$$\nabla\times\underline{E} = -j\omega\mu_0\hat{\mu}\,\underline{H} - \underline{M}$$

$$\nabla\times\underline{H} = j\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\,\underline{E} + \underline{J}$$

olur. Buradan

$$\nabla\times\underline{H}^x = \underline{J}^x + j\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}^x\,\underline{E}^x$$

yazılabilir. Diğer taraftan

$$\nabla\cdot(\underline{A}\times\underline{B}) = \underline{B}\cdot(\nabla\times\underline{A}) - \underline{A}\cdot(\nabla\times\underline{B})$$

vektör bağıntısı ile de

$$\underline{H}^x\cdot(\nabla\times\underline{E}) = -j\omega\mu_0\underline{H}^x\cdot\hat{\mu}\,\underline{H} - \underline{H}^x\underline{M}$$

$$\underline{E}\cdot(\nabla\times\underline{H}^x) = \underline{J}^x\cdot\underline{E} - j\omega\varepsilon_0\underline{E}^x\hat{\varepsilon}^{+}\underline{H}$$

$$\nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) = j\omega(\varepsilon_0\underline{E}^x\hat{\varepsilon}^{+}\underline{E}^x - \mu_0\underline{H}^x\hat{\mu}\,\underline{H} - \underline{J}^x\cdot\underline{E} - \underline{H}^x\cdot\underline{M}$$

olur.

Ortamda $\underline{J} = 0$, $\underline{M} = 0$ olduğunu kabul edelim ve birim hacimden kaybolan $\mathcal{Q}$ gücünü hesaplayalım. Bunun için $\hat{\varepsilon}^{+}$ ve $\hat{\mu}$ matrislerini aşağıdaki şekilde gösterelim :

$$\hat{\varepsilon}^{+} = \hat{\varepsilon}_{I} + j\,\hat{\varepsilon}_{II} \qquad\qquad \hat{\mu} = \hat{\mu}_{I} - j\,\hat{\mu}_{II}$$

$$\hat{\varepsilon}_{I} = \frac{1}{2}\left(\hat{\varepsilon} + \hat{\varepsilon}^{+}\right) \qquad\qquad \hat{\mu}_{I} = \frac{1}{2}\left(\hat{\mu} + \hat{\mu}^{+}\right)$$

$$\hat{\varepsilon}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\varepsilon}^{+} - \hat{\varepsilon}\right) \qquad\qquad \hat{\mu}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\mu}^{+} - \hat{\mu}\right)$$

Buradaki dört matris hermitian matristir. Hermitian şekil reeldir. Ve Q iki hermitian formun toplamı olarak ifâde edilebilir.

$$Q = \frac{\omega}{2}\left(\varepsilon_0\, \underline{E}^{+} \hat{\varepsilon}_{II} \underline{E} + \mu_0\, \underline{H}^{+} \mu_{II} \underline{H}\right)$$

$\underline{E}$ ve $\underline{H}$ alan vektörlerinin amplitüd ve polarizasyonu dış şartlara bağlıdır. Öyle ise biz o noktada $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ ın bağımsız olduğunu ve geniş bir polarizasyon ve amplitüd imkânı olduğunu düşünebiliriz.

Ortam kayıpsız ise, kaybolan bir güç yoktur. $(Q=0)$. Alan ne olursa olsun bu da ancak,

$$\hat{\varepsilon}_{II} = 0 \qquad\qquad \hat{\mu}_{II} = 0$$

olması ile mümkündür. Yâni :

$$\hat{\varepsilon}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\varepsilon}^{+} - \hat{\varepsilon}\right) = 0 \qquad\qquad \hat{\varepsilon}^{+} = \hat{\varepsilon}$$

$$\hat{\mu}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\mu}^{+} - \hat{\mu}\right) = 0 \qquad\qquad \hat{\mu}^{+} = \hat{\mu}$$

dır. Buradan şu neticeyi buluruz :

Kayıpsız bir ortamda dielektrik tensör $\hat{\varepsilon}$ ve magnetik tensör $\hat{\mu}$ hermitiandır. Eğer ortam kayıplı ise $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ ın herhangi bir değeri için bu şartın yerine gelmesi yâni $Q>0$ olması için $\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ matrislerinin nasıl olabileceğini düşünelim. Burada hermitian olan matris formlarına ait bir karakteristiği hatırlayabiliriz.

$\underline{E}^{+} \hat{A}\, \underline{E}$ hermitian formundadır. Şayet,

$$\det \hat{A} > 0 \qquad A_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} > 0\,, \qquad a_{33} > 0$$

ise, $\underline{E}^{+} \hat{A}\, \underline{E}$ pozitif ve belirlidir. Bu şartlar gerek ve yeter şartlardır.

Bir misal olarak bunu magnetoiyonik ortamın dielektrik tensörüne ve ferritelerin magnetik tensörüne tatbik edilirse,

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_1 < 0 \qquad \mathrm{Im}\,\varepsilon_3 > 0 \qquad (\mathrm{Im}\,\varepsilon_1)^2 > (\mathrm{Im}\,\varepsilon_2)^2$$

$$\mathrm{Im}\,\mu_1 < 0 \qquad \mathrm{Im}\,\mu_3 > 0 \qquad (\mathrm{Im}\,\mu_1)^2 > (\mathrm{Im}\,\mu_2)^2$$

neticeleri bulunur.

II - 5. Ferrite ve Plasmadaki Karşılıklı Bağıntılar

Daha evvel de söylediğimiz gibi, plasma karakterindeki bir anizotropik dielektrik ortamın özellikleri, bir dielektrik tensör $\hat{\varepsilon}$ ve bir skalar magnetik permeabilite μ ile tarif edilebilir. Diğer taraftan ferrite gibi bir anizotropik ortamın özellikleri ise, bir magnetik tensör $\hat{\mu}$ ve bir skalar dielektrik sabiti ε ile tarif edilir.

Plasma içindeki alanları içine alan Maxwell denklemleri ferrite içindeki alanlara transpoze edilebilir. Fakat bunları aşağıdaki şekilde kullanmak lâzımdır :

Plasma :	μ_0	ε_0	μ	$\hat{\varepsilon}$	$\underline{E}$	$\underline{H}$	$\underline{J}$	$\underline{M}$
Ferrite:	ε_0	μ_0	ε	$\hat{\mu}$	$\mp\underline{H}$	$\mp\underline{E}$	$\mp\underline{M}$	$\mp\underline{J}$

Eğer tensörler

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & -j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

ve ,

$$\hat{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$\varepsilon_1 \rightarrow \mu_1$
$\varepsilon_2 \rightarrow \mu_2$
$\varepsilon_3 \rightarrow \mu_3$ 'e tekabül eder.

Yukarda gösterdiğimiz karşılıklı bağıntıdan dolayı ortamlardan biri için bulunan netice gereken transformasyonu yaptıktan sonra öteki için de doğrudur. Fakat bu bağıntıları karşılıklı sınır şartları içinde düşünmek lâzımdır.

Bu araştırmada ortam sınırsız alınmıştır. Yâni plasma için elde edilen neticeler gereken yer değiştirmeyi yaparak, ferriteler için de kullanılabilir.

II - 6. Kompleks Vektörler ve Polarizasyon

Bileşenleri, zamanın sinüsoidal fonksiyonları olan vektörler, genellikle eliptik polarizasyonu verir. Kompleks amplitüd $\underline{E}$ polarizasyon elipsini tâyin eder. Eğer $\underline{E}$ 'yi reel ve imajineri kısımlara ayırırsak bunu kolayca görürüz.

$$\underline{E} = \underline{E}_1 + j\,\underline{E}_2$$

Burada $\underline{E}_1$ ve $\underline{E}_2$ reel vektörlerdir. Şimdi $\underline{E}(t)$ yi aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\underline{E}(t) = \underline{E}_1 \cos \omega t - \underline{E}_2 \sin \omega t$$

Bu, elipsin parametrik gösterilişidir. $\underline{E}_1$, $\underline{E}_2$'de polarizasyon elipsinin düzlemini tâyin eder.

$$\underline{E}_2 \times \underline{E}_1 = \frac{1}{2j}\,\underline{E} \times \underline{E}^*$$

Bu vektör, elipsin düzlemine dikeydir ve modülü $\frac{1}{\pi}$ kerre elipsin alanına eşittir.

$\underline{E}_1$ ve $\underline{E}_2$ aynı doğrultuda iseler $E(t)$ lineer olarak polarize olmuştur.

$\underline{E}_1 = \underline{E}_2$ ve dik iseler $E(t)$ dairesel polarize olmuştur.

III - SINIRSIZ ANİZOTROPİK ORTAMDA RADYASYON

III - 1. Anizotropik Ortamda Radyasyon Konusunda Yapılan Çalışmalar

Konuya başlarken, anizotropik sınırsız ortamda radyasyon konusunda daha evvel yapılan çalışmaları ve kullanılan metodları kısaca vermek faydalı olur kanısındayım.

İlk çalışmalar, Brill ve Volterra tarafından yapılmış ve anizotrop kristallerden bir elementer kaynağın ışığının yayılması incelenmiştir. Bu çalışmada Maxwell diferansiyel denklemlerini çözmek için eliptik koordinatlar kullanılmıştır. Daha evvel de ifâde edildiği gibi, kristal için dielektrik tensörü $\hat{\varepsilon}$

$$\hat{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

şeklinde bir diyagonal matristir.

Kristal içindeki bir noktadaki yükün neşrettiği rdyasyonu hesaplamak için ikinci metod, Ginzburg tarafından verilmiştir. Bu aynı zamanda quantum elektrodinamiğe de tatbik edilmiş ve genelleştirilmiş "Hamiltonian" metodudur. Daha sonra kristallerde -kayıpsız ortamlarda- Cherenkov radyasyonunun incelenmesinde kullanılmıştır.

Ginzburg'ün çalışmalarını daha sonra Pafamov, anizotropik Cherenkov radyasyonunun incelenmesinde kullandı. Pafamov da ferriteler için bir diyagonal $\hat{\mu}$ tensörü kabul etti.

Daha sonra "Spatial Fourier transformasyonları" kullanılarak gyroelectric ortamda Cherenkov radyasyonu incelendi.

Bunkin, kayıpsız bir ortamda bir elektrik dipolün radyasyonunu inceledi. Ve anizotropik dielektrik ortam için Green fonksiyonlarını veren bir metod ortaya koydu.

Bunlar, bu konuda yapılan çalışmaların en belli başlılarıdır. Daha başka bir çok tamamlayıcı çalışmalar yapıldığı da bu arada söylenmelidir.

III - 2. Sınırsız Ortamda Düzlem Dalgalar

Ortamın, homojen ve sınırsız olduğunu ve dış akımların ($\underline{J} = 0$, $\underline{M} = 0$) olduğunu kabul edelim. Maxwell denklemlerinin en basit çözümü bir boyutlu uzaydadır. Ve bunlar düzlem dalgaları temsil ederler. Uzayda bir nokta (x , y , z) bir yarıçap vektörü $\underline{r}$ ile gösterilir. Ve eşit fazların düzlemi de

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = \underline{n} \cdot \underline{r} = C$$

denklemi ile tarif edilir. Normali $\underline{n}$ olan düzlem dalga alanlarının amplitüdleri

$$\underline{E}(\underline{r}) = \underline{E}_0 \, e^{-jk \, \underline{n} \cdot \underline{r}}$$

dır. Burada k bir kompleks sayıdır.

$$\underline{k} = k \, \underline{n} \equiv (k_1 , k_2 , k_3)$$

münasebetini tarif etmek yerinde olur.

Maxwell denklemleri k nın bazı belli değerleri için çözülebilir.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}} = - j k_i \, e^{-j \underline{k} \cdot \underline{r}}$$

$$\underline{k} \times \underline{E} = \omega \mu_0 \hat{\mu} \, \underline{H} = \omega \, \underline{B}$$

$$\underline{k} \times \underline{H} = - \omega \, \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \, \underline{E} = - \omega \, \underline{D}$$

Burada $\underline{D}$ ve $\underline{B}$ 'yi bu kısımda uygulamak üzere yeniden tarif ettik. Eğer yukardaki denklemleri $\underline{n}$ ile skalar olarak çarparsak,

$$\underline{B} \cdot \underline{n} = 0 \qquad \underline{D} \cdot \underline{n} = 0$$

olur. $\underline{B}$ ve $\underline{D}$ vektörleri de transversaldirler. Eşit fazların düzlemleri

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = \underline{n} \, \underline{r} = C$$

denklemi ile gösterilir. Burada $\underline{n} = (n_1 , n_2 , n_3)$

dalga yüzeyine normal olan vektördür ve bileşenleri ,

$$n_1 = \sin\alpha \cos\beta$$
$$n_2 = \sin\alpha \sin\beta$$
$$n_3 = \cos\alpha$$

dır. Skalar çarpımı $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ ile yaparsak

$$\underline{B} \cdot \underline{E} = 0 \quad , \qquad \underline{D} \cdot \underline{H} = 0$$

bulunur. Alan lineer olarak polarize edilmişse yukardaki denklemlerden çıkan netice $\underline{B}(t)$ nin $E(t)$ ye ve $\underline{D}(t)$ nin $\underline{H}(t)$ ye dik oluşudur. Fakat umumiyetle düzlem dalga alanları eliptik olarak polar'ize olur ve :

$$\underline{B} \cdot \underline{E} = 0 \quad , \qquad \underline{D} \cdot \underline{H} = 0$$

denklemleri kompleks amplitüdler arasındaki bağıntıdır. Skalar

$$\underline{B}(t) \cdot \underline{E}(t)$$

ve

$$\underline{D}(t) \cdot \underline{H}(t)$$

çarpımlarının zamana bağlı olmadığını ifâde eder.

III - 3. Dalga Matrisleri

$$\hat{K} = \begin{vmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & -k_1 \\ -k_2 & k_1 & 0 \end{vmatrix}$$

Matris yolu ile

$$\underline{k} \times \underline{E} = \omega \mu_0 \hat{\mu} \underline{H}$$

$$\underline{k} \times \underline{H} = -\omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \underline{E}$$

denklemlerini $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ ye göre daha simetrik bir şekilde,

$$\underline{k} \times \underline{E} = \hat{K}\,\underline{E} = \omega\mu_0\hat{\mu}\,\underline{H}$$
$$\underline{k} \times \underline{H} = \hat{k}\,\underline{H} = -\omega\varepsilon_0\hat{\varepsilon}\,\underline{E}$$

yazılabilir.

$\hat{\mu}$ ve $\hat{\varepsilon}$ matrislerinde determinant sıfırdan farklıdır yâni $\hat{\mu}^{-1}$ ve $\hat{\varepsilon}^{-1}$ mevcuttur. Yâni

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\hat{\mu}^{-1}\hat{K}\,\underline{E}$$
$$\underline{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K}\,\underline{H}$$

bulunur.

Buradan denklemlerin $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ ye göre çözümleri, ikincideki $\underline{E}$ değerini birincide yerine koyarak, yahut bunun tersi işlemi yaparak bulunur. Böylece,

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\hat{\mu}^{-1}\hat{K}\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K}\,\underline{H}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K}\frac{1}{\omega\mu_0}\hat{\mu}^{-1}\hat{K}\,\underline{E}$$

elde edilir.

$$k_0 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$$

ile gösterirsek

$$(\hat{K}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\mu})\,\underline{H} = 0$$
$$(\hat{K}\hat{\mu}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon})\,\underline{E} = 0$$

bulunur. Buradaki

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c}$$

olmak üzere, boşlukta elektromagnetik dalganın yayılma sabitesi bulunmuş olur.

Burada

$$\hat{W}_H(\underline{k}) = \hat{K}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\mu}$$

"Magnetik dalga matrisi" ve

$$\hat{W}_E(\underline{k}) = \hat{K}\hat{\mu}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon}$$

"Elektrik dalga matrisi" diye isimlendirilir.

III - 4. Propagasyon -Yayılma- Sabiti

$$(\hat{K}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\mu})\underline{H} = 0$$

$$(\hat{K}\hat{\mu}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon})\underline{E} = 0$$

Lineer homojen denklemlerde $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ nin sıfırdan farklı bir çözümü olması için kat sayılar determinantlarının yâni

$$\det \hat{W}_H = 0 \qquad \det \hat{W}_E = 0$$

sıfır olması lâzımdır. Bu denklemlerin çözümü ise, propagasyon sabitlerini ve verilen bir dalga normali $\underline{n}$ ile düzlem dalga sahalarının polarizasyonunu tâyin eder.

Şimdi bu denklemlerin açık şeklini ve $\hat{K}$ nin alabileceği değerleri görelim. Magnetik olmayan bir ortam için (meselâ plasma $\hat{\mu} = \hat{I}$), $\hat{W}_E(\underline{k})$ aşağıdaki şekildedir.

$$\hat{W}_E = \hat{K}\hat{\mu}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon}$$

$$\hat{W}_E = \hat{K}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon}$$

Diğer taraftan,

$$\hat{K}\hat{K} = \underline{k}\,\tilde{\underline{k}} - k^2 I$$

$$\hat{W}_E = \underline{k}\,\tilde{\underline{k}} - k^2 I + k_0^2\hat{\varepsilon}$$

şeklinde ifâde edilebilir. $\underline{k}$ vektörü de $\underline{n}$ normali cinsinden ifâde edilirse

$$\underline{k} = k\,\underline{n} \qquad \underline{n} = (n_1, n_2, n_3)$$

ve bileşenleri de

$$n_1 = \sin\alpha \cos\alpha\,, \quad n_2 = \sin\alpha \sin\beta\,, \quad n_3 = \cos\alpha$$

olmak üzere,

$$= \begin{vmatrix} k^2(n_1^2-1)+k_0^2\varepsilon_1 & k^2 n_1 n_2 - j k_0^2 \varepsilon_2 & k^2 n_1 n_3 \\ k^2 n_1 n_2 + j k_0^2 \varepsilon_2 & k^2(n_2^2-1)+k_0^2\varepsilon_1 & k^2 n_2 n_3 \\ k^2 n_1 n_3 & k^2 n_2 n_3 & k^2(n_3^2-1)+k_0^2\varepsilon_1 \end{vmatrix}$$

$$\hat{W}_E = \left[k^2(n_1^2-1)+k_0^2\varepsilon_1\right] \begin{vmatrix} k^2(n_2^2-1)+k_0^2\varepsilon_1 & k^2 n_2 n_3 \\ k^2 n_2 n_3 & k^2(n_3^2-1)+k_0^2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$- \left[k^2 n_1 n_2 - j k_0^2 \varepsilon_2\right] \begin{vmatrix} k^2 n_1 n_2 + j k_0^2 \varepsilon_2 & k^2 n_2 n_3 \\ k^2 n_1 n_3 & k^2(n_3^2-1)+k_0^2\varepsilon_3 \end{vmatrix}$$

$$+ \; k^2 n_1 n_3 \begin{vmatrix} k^2 n_1 n_2 + j k_0^2 \varepsilon_2 & k^2(n_2^2-1)+k_0^2\varepsilon_1 \\ k^2 n_1 n_3 & k^2 n_2 n_3 \end{vmatrix}$$

bulunur.

Buradan ve $\underline{n}$ nin bileşenlerinin değerlerini yerine koyarak

$$\det \hat{W}_E = k^4 (\varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_3 \cos^2\alpha) - k_0^2 k^2 \left[(\cos^2\alpha + 1)\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \sin^2\alpha (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \right] + k_0^4 \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) = 0$$

denklemini buluruz. Bu, yukarda görüldüğü gibi k nin bir quadratik şeklidir.

$$\det \hat{W}_E = 0$$

denklemi k için k_I , k_{II} değerlerini verecektir. Bilinen cebirsel metodlarla

$$\frac{k^2_{I,II}}{k_0^2} = \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\alpha + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2\alpha)}{2(\varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_3 \cos^2\alpha)} \mp \frac{\sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3)^2 \sin^4\alpha + 4\varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2 \cos^2\alpha}}{2(\varepsilon_1 \sin\alpha + \varepsilon_3 \cos^2\alpha)}$$

değerleri bulunur.

Buradan şu neticeye varırız ki, genellikle bir lineer anizotropik ortamda iki düzlem dalga verilen bir dalga normali ile yayılır. Bu iki tipin iki farklı dalga sabiti (k_I , k_{II}), farklı fakat sabit polarizasyonu (eliptik) vardır. Propagasyon sabitleri, propagasyon yönünün bir fonksiyonudur. Ve genellikle bir kompleks sayıdır. k_I ve k_{II} mümkün iki düzlem dalganın propagasyon sabitleridir. Bu dalgalar (ordinary) ve (extraordinary) diye isimlendirilir. Bunlar dalga normali ile devamlı magnetik alan arasındaki α açısının bir fonksiyonudurlar.

$k_{I,II} / k_0^2$ dalganın "yansıma indisi" olarak isimlendirilir. Ortam kayıpsız ise ε_1 , ε_2 ve ε_3 reel sayılardır ve dolayısile k_I^2 ve k_{II}^2 de reel sayılardır. Fakat bazı belli frekanslerde ε_1 veya ε_3 yahut her ikisi birden negatiftirler. Yahut da ε_2^2 , ε_1^2 den daha büyüktür. Neticede $k^2_{I,II}$ veya bunlardan birisi α açısının bazı özel değerleri için negatiftir ve $k_{I,II}$ yahut bunlarda birisi imajineridir. Yâni dalga yayılmaz.

Böyle bir kompleks $k_{I,II}$ değerini

$$k_{I(II)} = a - j\alpha$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada a faz sabitidir. Diğer taraftan ortalama güç akımını gösteren $\underline{S}$ poynting vektörünü düşünelim.

$$\underline{S} = \frac{1}{2} Re\, \underline{E} \times \underline{H}^{*}$$

$\underline{S}$ poyntikg vektörünün yönü genellikle $\underline{n}$ ile aynı değildir. Bu teoremden

$$2\alpha\, \underline{n} \cdot \underline{S} = Q$$

kayıplı ortam için $(Q > 0)$ dır. Bu ortamlarda α nın işareti ve $\underline{n} \cdot \underline{S}$ işareti aynıdır. Eğer ortam kayıpsız yâni $Q = 0$ ise bu $\alpha = 0$ veya $\underline{n} \cdot \underline{S} = 0$ olması ile mümkündür. Eğer,

$$\underline{n} \cdot \underline{S} = 0$$

ise dalga güç nakletmez, yâni yayılmaz. Eğer,

$$\alpha = 0$$

ise dalga gecikmeli değildir.

III - 5. Polarizasyon. Plasma içinde $\underline{E}$ nin Polarizasyonu.

$$(\hat{k} \hat{\mu}^{-1} \hat{k} + k_0^2 \hat{\varepsilon})\, \underline{E} = 0$$

denkleminden hesaplanabilir. Bu denklemlerde plasmanın $\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ madde sabitlerini ve $\underline{k}$ için bulduğumuz k_I (veya k_{II}) özel değerlerini yerine koyarak

$$\underline{E}_I = \frac{n_3\, \varepsilon_3\, E_z}{(n_1^2 + n_2^2)(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^2\, k_I^2 / k_0^2} \;\underline{e}_I$$

bulunur. Burada

$$\underline{e}_I = \begin{vmatrix} n_1(\varepsilon_1 - k_I^2/k_0^2) + j\, n_2\, \varepsilon_3 \\ \\ n_2(\varepsilon_1 - k_I^2/k_0^2) - j\, n_1\, \varepsilon_2 \\ \\ \dfrac{n_1^2 + n_2^2}{n_3 \varepsilon_3} \left(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\, k_I^2/k_0^2\right. \end{vmatrix}$$

Bu da bir kompleks vektördür ve $\underline{E}_I$ nin polarizasyonunu tâyin eder. Aynı şekilde

$$\underline{k} \times \underline{E} = \omega \mu_0 \hat{\mu} \, \underline{H}$$

denkleminideki $\underline{E}$ ile $\underline{H}$ arasındaki bağıntıyı kullanarak $\underline{H}$ nin polarizasyonu elde edilir.

Yukardaki bağıntılar I ve II indekslerinin yeri değiştirildiği zaman da varittir.

Polarizasyonun Özel Yönleri

a) Devamlı magnetik alan H_0 ($n_1 = n_2 = 0, n_3 = 1$) yönünde yayılan dalga için propagasyon sabitleri

$$k_I^2/k_0^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad k_{II}^2/k_0^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

elde edilir.

Yukardaki denklemlerde bunları yerine koyarak

$$\underline{E}_I = \begin{vmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{vmatrix} E_x \qquad \underline{E}_{II} = \begin{vmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{vmatrix} E_x'$$

$$H_I = \begin{vmatrix} 1 \\ j \\ 0 \end{vmatrix} H_x \qquad H_{II} = \begin{vmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{vmatrix} H_x'$$

elde edilir ki, bunlar transversal ve dairesel polarizasyonu gösterirler.

b) H_0 ($n_1 = 1$, $n_2 = n_3 = 0$) ra dik olarak yayılan dalganın propagasyon sabitleri ise

$$k_I^2/k_0^2 = \frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} \qquad k_{II}^2/k_0^2 = \varepsilon_3$$

ve bunlara tekabül eden alanlar da ,

$$\underline{E}_{I} = \begin{vmatrix} j\,\varepsilon_2/\varepsilon_1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} E_y \qquad \underline{E}_{II} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} E_z'$$

$$\underline{H}_{I} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} H_z \qquad H_{II} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} H_y'$$

olur. Bunlar transversaldirler ve çizgisel olarak polarize olmuşlardır. Burada yalnız $\underline{E}_I$ eliptik polarizasyonlu olup uzunluğuna (longitudinal) bir bileşeni vardır.

IV - GREEN FONKSİYONLARI

IV - 1. Dyadic Green Fonksiyonları ve Spetial Fourier Transformasyonları Hakkında Genel Bilgi ve Bunların Anizotropik Ortamda Alan Hesaplanmasına Tatbiki .

Green Fonksiyonları elektodinamiğin problemlerinde çok güçlü bir matematik yoldur. Biz burada anizotropik ortamda radyasyon problemini incelemek için bu yolu kullanıyoruz.

Bundan evvelki bölümde olduğu gibi ortamın homojen ve sınırsız olduğunu kabul edelim. Burada bir başka kabul de yapıyoruz. Şöyle ki, elektrik ve magnetik akı dağılımlarını biliyoruz. Maxwell denklemleri lineer olduğu için ($\underline{r}$) noktasındaki bir akım elemanının bileşenleri ile bunun ($\underline{r}'$) noktasında hasıl ettiği alanın bileşenleri arasında bir lineer bağıntı olmalıdır.

Önce her hangi bir dalga denklemini alalım. Bütün dalga denklemlerine esas olan yapı

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(\underline{r},t)$$

şeklindedir. Burada $f(r,t)$ bilinen kaynak dağılımıdır. Ve C de ortalama yayılma hızıdır. Eğer bulacağımız Green Fonksiyonu G bu denklemin bir çözümü ise -ki denklem zamanı da ihtiva ettiği için bu fonksiyonun şekli $G(\underline{r},t\,;\,\underline{r}',t')$ şeklinde olacaktır. aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz :

$$\left(\nabla_{\underline{r}}^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\underline{r},t\,;\,\underline{r}',t') = 4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')$$

Sınır şartları olmayan uzay için bu iki denklemden,

$$\psi(r,t) = \int G(r,t\,;\,r',t')\, f(r',t')\, dr'\,dt'$$

bağıntısını buluruz.

Diğer taraftan konumuza esas olan Maxwell denklemlerini düşünelim.

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega \mu_0 \hat{\mu} \, \underline{H} - \underline{M}$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega \varepsilon_0 \hat{\varepsilon} \, \underline{E} + \underline{J}$$

Bu denklemlerin çözümü de

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int dr' \hat{G}_{EJ}(\underline{r}, \underline{r}') \, \underline{J}(\underline{r}') + \int dr' \hat{G}_{EM}(r, r') \, \underline{M}(\underline{r}')$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = \int dr' \hat{G}_{HJ}(\underline{r}, \underline{r}') \, \underline{J}(\underline{r}') + \int dr' \hat{G}_{HM}(r, r') \, \underline{M}(r')$$

şeklindedir. Bunlar daha toplu ve kısa olarak

$$\begin{vmatrix} \underline{E}(r) \\ \\ \underline{H}(r) \end{vmatrix} = \int \hat{G}(r, r') \begin{bmatrix} \underline{J}(r') \\ \\ \underline{M}(r') \end{bmatrix} dr'$$

şeklinde ifâde edilebilirler. Burada açık yazılışı ile

$$\int dr' = \iiint_{-\infty}^{+\infty} dx' \, dy' \, dz'$$

ve

$$\hat{G}(r, r') = \begin{bmatrix} G_{EJ}(r, r') & G_{EM}(r, r') \\ \\ G_{HJ}(r, r') & G_{HM}(r, r') \end{bmatrix}$$

dır. Bunlara "Dyadic Green Fonksiyonları" denilir.

IV - 2. Özel Fourier Transformasyonları

G fonksiyonunun bulunmasında özel Fourier transformasyonu metodunu kullanacağız. Burada $\underline{k}$ akım ve alanın Fourier transformasyonunu gösterir ki bunlar şöyle tarif edilebilir :

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d\underline{k}\; \underline{E}_{\underline{k}}\, e^{-j\,\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$\underline{E}(\underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3}\int d\underline{r}\; E(\underline{r})\, e^{j\,\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

Benzer denklemler, $\underline{H}, H_{\underline{k}}$; $\underline{J}, \underline{J}_{\underline{k}}$; $\underline{M}\;\; \underline{M}_{\underline{k}}$ için de vardır. Burada $\int d\underline{k}$ sembolü $\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, dk_2\, dk_3$ demektir.

Hesaplarda Delta fonksiyonunu kullanmak uygundur. Önce şu hatırlatmayı yapalım :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx' = f(x)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\,k_1 x}\, dk_1$$

ve

$$\delta(r) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) = \frac{1}{8\pi^3}\int d\underline{k}\; e^{-j\,\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

dır. Burada $\hat{g}_{EJ}, \hat{g}_{EM}, \hat{g}_{HM}$ ve $\hat{g}_{HJ}$ matrislerini tarif edelim. Bunlar mütekabil Dyadic Green Fonksiyonlarının Fourier Transformasyonlarıdır, yâni

$$G_{EJ}(r,r') = \frac{1}{8\pi^3}\int d\underline{k}\; \hat{g}_{EJ}(\underline{k})\, e^{-j\,\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Ve benzer şekilde :

G_{EM} in Fourier transformasyonu $\hat{g}_{EM}$ dır. Burada,

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int d\underline{k}\ \underline{E}_{\underline{k}}\ e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

$$G_{EJ}(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{8\pi^3}\int d\underline{k}\ g_{EJ}(\underline{k})\ e^{-j\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}$$

denklemlerini,

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int dr'\, G_{EJ}(\underline{r},\underline{r}')\ \underline{J}(\underline{r}') + \int d\underline{r}'\, G_{EM}(\underline{r},\underline{r}')\ M(\underline{r}')$$

$$\underline{H}(\underline{r}) = \int dr'\, G_{HJ}(\underline{r},\underline{r}')\ \underline{J}(\underline{r}') + \int d\underline{r}'\, G_{HM}(\underline{r},\underline{r}')\ M(\underline{r}')$$

denklemlerinde yerine koyup δ (Delta) fonksiyonlarının bilinen özelliklerini

$$\int f(x')\,\delta(x-x')\,dx' = f(x)$$

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jk_1 x}\, dk_1$$

tatbik edersek

$$\underline{E}_{\underline{k}} = \hat{g}_{EJ}\,\underline{J}_{\underline{k}} + \hat{g}_{EM}\,\underline{M}_{\underline{k}}$$

$$\underline{H}_{\underline{k}} = \hat{g}_{HJ}\,\underline{J}_{\underline{k}} + \hat{g}_{HM}\,\underline{M}_{\underline{k}}$$

bağıntılarını buluruz. Burada $\int dr'$ integrali ile $\int dk$ integralinin yer değiştirebileceğini kabul etmiş oluyoruz. Yahut matris notasyonu ile bunu kısaca,

$$\begin{vmatrix} \underline{E}(\underline{k}) \\ \\ \underline{H}(\underline{k}) \end{vmatrix} = \hat{g}(\underline{k}) \begin{vmatrix} \underline{J}(\underline{k}) \\ \\ \underline{M}(\underline{k}) \end{vmatrix}$$

burada

$$\hat{g}(\underline{k}) = \begin{vmatrix} g_{EJ}(\underline{k}) & g_{EM}(\underline{k}) \\ \\ g_{HJ}(\underline{k}) & g_{HM}(\underline{k}) \end{vmatrix}$$

dır.

IV - 3. Green Fonksiyonlarının Fourier Transformasyonlarının Bulunması.

Bu transformasyonları bulmak için evvelâ

$$\nabla \times \underline{E} = -j\omega\mu_0 \hat{\mu}\, \underline{H} - \underline{M}$$

$$\nabla \times \underline{H} = j\omega\varepsilon_0 \hat{\varepsilon}\, \underline{E} + \underline{J}$$

Maxwell denklemlerinin Fourier transformasyonlarını yazalım. Bu arada $\underline{k}$ vektörü yerine $\hat{k}$ matrisini de kullanarak,

$$-j\hat{K}\,\underline{E}_{\underline{k}} = -j\omega\mu_0 \hat{\mu}\, \underline{H}_{\underline{k}} - \underline{M}_{\underline{k}}$$

$$-j\hat{K}\,\underline{H}_{\underline{k}} = j\omega\varepsilon_0 \hat{\varepsilon}\, \underline{E}_{\underline{k}} + \underline{J}_{\underline{k}}$$

Burada

$$\hat{K} = \begin{vmatrix} 0 & -k_3 & k_2 \\ k_3 & 0 & k_1 \\ k_2 & k_1 & 0 \end{vmatrix}$$

ve $\det \hat{K}$, k nın bütün değerleri için sıfırdır. Yâni $\hat{K}$ nın inversi $\hat{K}^{-1}$ bulunamaz fakat $\hat{\varepsilon}^{-1}$ ve $\hat{\mu}^{-1}$ vardır. Bunları kullanarak Maxwell denklemlerinin Fourier transformasyonlarını $\underline{H}_{\underline{k}}$ ve $\underline{E}_{\underline{k}}$ ya göre çözebiliriz.

Neticede

$$\underline{H}_{\underline{k}} = \frac{\hat{\mu}^{-1}}{j\omega\mu_0}\left(j\hat{K}\,\underline{E}_{\underline{k}} - \underline{M}_{\underline{k}}\right)$$

$$\underline{E}_{\underline{k}} = -\frac{\hat{\varepsilon}^{-1}}{j\omega\varepsilon_0}\left(j\hat{K}\,\underline{H}_{\underline{k}} + \underline{J}_{\underline{k}}\right)$$

$\underline{E}_{\underline{k}}$ ve $\underline{H}_{\underline{k}}$ nın bu değerlerini Maxwell denklemlerinde yerine koyarak,

$$(\hat{k}\hat{\mu}^{-1}\hat{k}+k_0^2\hat{\varepsilon})\underline{E}_{\underline{k}} = j\omega\mu_0\underline{J}_{\underline{k}} - j\hat{k}\hat{\mu}^{-1}\underline{M}_{\underline{k}}$$

$$(\hat{k}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{k}+k_0^2\hat{\mu})\underline{H}_{\underline{k}} = j\omega\hat{\varepsilon}^{-1}\underline{J}_{\underline{k}} + j\omega\varepsilon_0\underline{M}_{\underline{k}}$$

bulunur. Daha evvel

$$(\hat{k}\hat{\mu}^{-1}\hat{k}+k_0^2\hat{\varepsilon}) = \hat{W}_E(\underline{k})$$

elektrik dalga matrisi,

$$(\hat{k}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{k}+k_0^2\hat{\mu}) = \hat{W}_H(\underline{k})$$

magnetik dalga matrisi olarak tarif etmiştik. O halde yukardaki neticeyi daha açık olarak

$$\begin{vmatrix} W_E & 0 \\ 0 & W_H \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{E}_{\underline{k}} \\ \underline{H}_{\underline{k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j\omega\mu_0 & -j\hat{k}\hat{\mu}^{-1} \\ j\hat{k}\hat{\varepsilon}^{-1} & j\omega\varepsilon_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{J}_{\underline{k}} \\ \underline{M}_{\underline{k}} \end{vmatrix}$$

şeklinde gösterebiliriz. Ve bu denklemi yukarda yazdığımız

$$\begin{vmatrix} \underline{E}_{\underline{k}} \\ \underline{H}_{\underline{k}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{EJ}(k) & g_{EM}(k) \\ g_{HJ}(k) & g_{HM}(k) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \underline{J}_{\underline{k}} \\ \underline{M}_{\underline{k}} \end{vmatrix}$$

denklemi ile mukayese ederek Green fonksiyonlarının Fourier transformasyonlarını bulabiliriz.

$$\hat{g}_{EJ} = j\omega\mu_0(\hat{k}\hat{\mu}^{-1}\hat{k}+k_0^2\hat{\varepsilon})^{-1} = j\omega\mu_0\hat{W}_E^{-1}$$

$$g_{EM} = -j(\hat{k}\hat{\mu}^{-1}\hat{k}+k_0^2\hat{\varepsilon})^{-1}\hat{k}\hat{\mu}^{-1} = -j\hat{W}_E^{-1}\hat{k}\hat{\mu}^{-1}$$

$$\hat{g}_{HJ} = j\,(\hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\mu})\,\hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1} = j\,\hat{W}_H^{-1}\,\hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1}$$

$$g_{HM} = j\,\omega\,\varepsilon_0\,(\hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\mu})^{-1} = j\,\omega\,\varepsilon_0\,W_H^{-1}$$

Elektrik ve magnetik dalga matrislerinin verilen ifâdelerinden

$$\hat{W}_H = \hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\mu}$$

$$\hat{W}_E = \hat{K}\,\hat{\mu}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon}$$

aşağıdaki bağıntıları bulabiliriz :

$$k_0^2\,\hat{W}_E^{-1} = \hat{\varepsilon}^{-1} - \hat{\varepsilon}^{-1}\,\hat{K}\,\hat{W}_H^{-1}\,\hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1}$$

$$\hat{W}_E^{-1}\,\hat{K}\,\hat{\mu}^{-1} = \hat{\varepsilon}^{-1}\,\hat{K}\,\hat{W}_H^{-1}$$

$$\hat{\mu}^{-1}\,\hat{K}\,\hat{W}_E^{-1} = \hat{W}_H^{-1}\,\hat{K}\,\hat{\varepsilon}^{-1}$$

$$k_0^2\,\hat{W}_H^{-1} = \hat{\mu}^{-1} - \hat{\mu}^{-1}\,\hat{K}\,\hat{W}_E^{-1}\,\hat{K}\,\hat{\mu}^{-1}$$

IV - 4. Plazma için $\hat{g}_{EJ}$ ve $\hat{g}_{HM}$ Değerlerinin Hesaplanması:

Burada dalga matrisi $\hat{W}_E$ nin inversinin hesaplanması icap etmektedir. İnvers, "Cramer" yolu ile hesaplanır.

$$\hat{W}_E^{-1} = \frac{\hat{\omega}(\underline{k})}{\det \hat{W}_E}$$

$\hat{\omega}(k)$ burada $\hat{W}_E$ nin adjointidir. Burada gösterilmesini lüzumlu bulmadığımız cebrik işlemleri yaparak ve $\underline{k}$ ile $\underline{n}$ arasındaki bağıntıyı kullanarak -ki bu oldukça uzun ve teferruatlı bir hesaplama olmakla beraber sadece matrislerde inversi bulmak için bilinen yolun tatbikından ibarettir- aşağıya neticeyi yazıyoruz :

$$\hat{\omega}(k) = k^4\, \underline{n}\, \tilde{\underline{n}} - k_0^2 k^2 \hat{L} + k_0^2 \hat{E}$$

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \varepsilon_3 & j\varepsilon_2 \varepsilon_3 & 0 \\ -j\varepsilon_2 \varepsilon_3 & \varepsilon_1 \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 (n_1^2 + n_2^2) + \varepsilon_3 (n_1^2 + n_3^2) & j\varepsilon_2 (n_1^2 + n_2^2) + \varepsilon_3 n_1 n_2 & \varepsilon_1 n_1 n_3 + j\varepsilon_2 n_3 \ldots \\ -j\varepsilon_2 (n_1^2 + n_2^2) + \varepsilon_3 n_1 n_2 & \varepsilon_1 (n_1^2 + n_2^2) + \varepsilon_3 (n_2^2 + n_3^2) & \varepsilon_1 n_2 n_3 - j\varepsilon_2 n_1 \ldots \\ \varepsilon_1 n_1 n_3 - j\varepsilon_2 n_2 n_3 & \varepsilon_1 n_2 n_3 + j\varepsilon_2 n_1 n_3 & \varepsilon_1 (1 + n_3^2) \end{vmatrix}$$

Eğer $\hat{W}_E$ ile $\hat{W}_H$ arasında yukarda bulduğumuz bağıntıları kullanırsak

$$\hat{\mu}^{-1} - \hat{\mu}^{-1} \hat{K}\, \hat{W}_E^{-1} \hat{K}\, \hat{\mu}^{-1} = k_0^2\, \hat{W}_H^{-1}$$

$\hat{\mu} = \hat{I}$ (birim matris için) bu bağıntı

$$\hat{I} - \hat{K}\,\hat{W}_E^{-1}\,\hat{K} = k_0^2\,\hat{W}_H^{-1}$$

olur.

Buradan plasma için madde sabitlerinin değerini ve W_E^{-1} bulduğumuz değerini yerine koyarak

$$\hat{I} - \hat{K}\,\hat{W}_E^{-1}\,\hat{K} = \frac{k_0^2}{\det W_E}\left\{\underline{\tilde{n}}\,\hat{\varepsilon}\,\underline{n}\,k^4\,\underline{n}\,\tilde{n} - k^2 k_0^2\,\hat{S} + k_0^4 I \det\hat{\varepsilon}\right\}$$

ki burada,

$$\underline{\tilde{n}}\,\hat{\varepsilon}\,\underline{n} = (n_1^2 + n_2^2)\,\varepsilon_1 + n_3^2\,\varepsilon_3$$

$$\det\hat{\varepsilon} = \varepsilon_3(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)$$

dır. $\hat{S}$ matrisi ise

$$\begin{matrix} \varepsilon_1\varepsilon_3 + n_1^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) & -j n_3^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + n_1 n_2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) & j n_2 n_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + n_1 n_3 \varepsilon_1 \\ j n_3^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + n_1 n_2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) & \varepsilon_1\varepsilon_3 + n_2^2(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) & n_2 n_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 - j n_1 n_3 \varepsilon_2 \\ j n_2 n_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 + n_1 n_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 & n_2 n_3 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + j n_1 n_3 \varepsilon_2 \varepsilon_3 & 2 n_3^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 + (n_1^2 + n_2^2)(\varepsilon_1^2 - \end{matrix}$$

ibaret olur. Netice olarak $\hat{g}_{EJ}$ ve $\hat{g}_{HM}$ değerlerini topluca verelim :

$$\hat{g}_{EJ} = \frac{j\omega\mu_0}{\det\hat{W}_E}\left\{k^4\,\underline{n}\,\underline{\tilde{n}} - k^2 k_0^2\,\hat{L} + k_0^4\,\hat{E}\right\}$$

$$\hat{g}_{HM} = \frac{j\omega\mu_0}{\det\hat{W}_E}\left\{\underline{\tilde{n}}\,\hat{\varepsilon}\,\underline{n}\,k^4\,\underline{n}\,\underline{\tilde{n}} - k^2 k_0^2\,\hat{S} + k_0^4 \det\hat{\varepsilon}\right\}$$

Buradan G_{EJ} veren denklem,

$$G_{EJ}(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{8\pi^3}\int d\underline{k}\ \hat{g}_{EJ}(\underline{k})\ e^{-j\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}$$

G_{EJ} ve $\det \hat{W}_E$ nin bilinen değerlerini yerine koyarak geçebiliriz.

$$G_{EJ} = \frac{j}{8\pi^3\omega\varepsilon_0}\int d\underline{k}\ \frac{k^4\underline{n}\,\tilde{\underline{n}} - k^2k_0^2\hat{L} + k_0^4\hat{E}}{\tilde{\underline{n}}\,\hat{\varepsilon}\,\underline{n}\,(k^2-k_I^2)(k^2-k_{II}^2)}\ e^{-j\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')}$$

V - YAYILAN GÜCÜN HESABI

Bu bölümde elektrik ve magnetik akı dağılımları verildiğinde yayılan gücü bulacağız. Bunu, toplam gücün hesabı, birim uzunluktan yayılan güç, birim alandan yayılan güç şeklinde üç kısımda inceleyeceğiz.

V - 1. Toplam Güç.

$\underline{J}(\underline{r})$ ve $\underline{M}(\underline{r})$ alternatif akı dağılımlarını düşünelim. $(dx\,dy\,dz) = dV$ hacim elemanındaki neşredilen güç Poynting teoreminden

$$dP = -\frac{1}{2}\left(\underline{J}^{x}\cdot\underline{E} + \underline{H}^{x}\cdot\underline{M}\right)dx\,dy\,dz$$

yazılabilir. Bunun integralini alarak bütün bir akı dağılımı için,

$$dr = dx\,dy\,dz$$

olmak üzere

$$P = -\frac{1}{2}\int d\underline{r}\left(\underline{J}^{x}\cdot\underline{E} + \underline{H}^{x}\cdot\underline{M}\right)$$

dır.

$\underline{J}$, $\underline{M}$ akımları ile $\underline{E}$ ve $\underline{H}$ için Green fonksiyonları biliniyorsa, bu değerler yerine konulduğunda

$$P = -\frac{1}{2}\int dr\,dr'\Big\{\underline{J}^{+}(r)\,\hat{G}_{EJ}\,\underline{J}(r') + \underline{J}^{+}(\underline{r})\,\hat{G}_{EM}\,\underline{M}(r)$$

$$+\underline{J}^{+}(r')\,\hat{G}^{+}_{HJ}\,\underline{M}(\underline{r}) + \underline{M}^{+}(\underline{r}')\,\hat{G}^{+}_{HM}\,\underline{M}(r)$$

bulunur. Aynı ifâdeyi G, $\underline{J}$ ve $\underline{M}$ nin Fourier transformasyonları ile yazarsak

$$P = \frac{1}{16\pi^{3}}\int dr\,dr'\,dk\,dk'\,dk''\,\underline{J}^{+}_{\underline{k}}\,\hat{G}_{EJ}(k)\,\underline{J}_{\underline{k}}\;\times$$

$$\times\; e^{-j\left[\underline{r}\cdot(\underline{k}-\underline{k}') - r'\cdot(\underline{k}-\underline{k}'')\right]} + \cdots$$

şeklinde uzun bir integral elde edilir. Fakat Delta fonksiyonlarının yardımı ile bunu kısaltmak mümkündür. Şöyle ki,

$$\int d\underline{r}\; e^{-i\underline{r}\cdot(\underline{k}-\underline{k}')} = 8\pi^3 \delta(\underline{k}-\underline{k}')$$

ve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\,\delta(x-x')\,dx' = f(x)$$

olduğunu hatırlayarak

$$\rho = -4\pi^3 \int d\underline{k} \left\{ \underline{J}_k^+ \hat{g}_{EG} \underline{J}_k + \underline{J}_k^+ \hat{g}_{HM} \underline{M}_k + \left(\underline{M}_k^+ \hat{g}_{HJ} \underline{J}_k\right)^x + \left(\underline{M}_k^+ \hat{g}_{HM} \underline{M}_k\right)^x \right\}$$

bulunur.

$\underline{M} = 0$, yâni magnetik akı dağılımının olmadığını düşünürsek,

$$\rho = -4\pi^3 \int d\underline{k}\; \underline{J}_k^+ \hat{g}_{EJ} \underline{J}_k$$

ve aynı şekilde yâni elektrik akı dağılımının sıfır olduğunu düşünürsek,

$$\rho = -4\pi^3 \int d\underline{k} \left(\underline{M}_k^+ \hat{g}_{HM} \underline{M}_k\right)^x$$

bulunur. Daha evvel de söylenildiği gibi, bu hesaplar, gereken işlemler (madde sabitleri arasında) yapılarak ferritelere de tatbik edilebilir.

V - 2. Birim Uzunluktan Yayılan Güç

Modüle edilmiş bir elektron akımı veya Cherenkov radyasyonundan neşredilen yüklü parçacıkların hareketi, bu bölüme birer misal teşkil ederler. "uzunluğu" yâni yüklü parçacıkların yönünü, üç boyutlu dik koordinat sisteminde (Z) ekseni boyunca alır ve $\underline{M} = 0$ olduğunu kabul edersek gücü veren,

$$dP = -\frac{1}{2}\left(\underline{J}^{x}\cdot\underline{E} + \underline{H}^{x}\cdot\underline{M}\right)dx\,dy\,dz$$

denkleminde

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\underline{J}^{x}\cdot\underline{E}\;dx\,dy$$

olur. Burada kısmî Fourier transformasyonlarını kullanabiliriz.

$$\underline{J}(\underline{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty}\underline{J}(\underline{k}_1,\underline{k}_2,z)\,e^{-j(k_1x+k_2y)}\,dk_1\,dk_2 \quad \text{ve,}$$

$$\underline{J}(k_1,k_2,z) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{-\infty}^{+\infty}\underline{J}(\underline{r})\,e^{j(k_1x+k_2y)}\,dx\,dy$$

bulunur. Birim uzunluktan yayılan güç, bu denklemlerde $\hat{G}_{EJ}$ nin Fourier transformasyonları $\hat{g}_{EJ}$ yi kullanarak bulunur. Hesap şekli ise bundan evvelki bölümde yaptığımız gibidir. Buna göre,

$$\frac{dP}{dz} = -\pi\int d\underline{k}\int dz'\,\underline{J}^{+}(k_1,k_2,z)\,\hat{g}_{EJ}\,\underline{J}(k_1,k_2,z')\,e^{-jk_3(z-z')}$$

elde olunur. Aynı şekilde birim uzunlukta magnetik akıdan yayılan güç de

$$\frac{dP}{dz} = -\pi\int d\underline{k}\int dz'\left\{\underline{M}^{+}(k_1,k_2,z)\,g_{HM}\,M(k_1,k_2,z')\,e^{-jk_3(z-z')}\right\}$$

olarak ve aynı muhakeme ile bulunur.

V - 3. Birim Yüzeyden Yayılan Güç

Kesitinin alanı birim yüzey olan bir silindir düşünelim. Bu, düzlem akı yayılmasına bir misaldir. Eğer silindirin ekseni Z eksenine paralel ise ve gene $\underline{M} = 0$ kabul edersek, gücü veren formül,

$$\frac{dP}{dx\,dy} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{J}^{*} \cdot \underline{E} \; dz$$

olur.

Gene kısmi Fourier transformasyonları ile,

$$\underline{J}(\underline{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \, \underline{J}(x, y, k_3) \, e^{-j k_3 z}$$

$$\underline{J}(x, y, k_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \underline{J}(\underline{r}) \, e^{j k_3 z}$$

Ve yukardaki ifâde

$$\frac{dP}{dx\,dy} = \frac{1}{4\pi} \int d\underline{k} \iint_{-\infty}^{+\infty} dx' \, dy' \, \underline{J}^{+}(x, y, k_3) \, \hat{g}_{EJ} \, \underline{J}(x', y', k_3) \times e^{-j[k_1 (x - x') + k_3 (x - x')]}$$

elde edilir.

Birim yüzeydeki magnetik akı dağılımının neşrettiği güç ise

$$\frac{dP}{dx\,dy} = \int dk \iint_{-\infty}^{+\infty} dx' \, dy' \left\{ \underline{M}^{+}(x, y, k_3) \, \hat{g}_{HM} \, \underline{M}(x', y', k_3) \times e^{-j[k_1 (x - x') + k_3 (y - y')]} \right\}$$

bulunur.

VI - AKIMIN DAĞILIMI HALLERİ

VI - 1. Düzlem Akım Dağılımı

Sanırla uzayda bir yük dağılımının hareketinin incelenmesi bir çok konuda mühimdir. Örneğin, bir düzlem içinde sanırlanmış, dipol momentleri eşit dipollerin elektrik alanını inceleyelim.

Dipol dağılımının devamlı olduğunu kabul edelim. Bunların meydana getirdiği akı yoğunluğu iyi bir yaklaşıklıkla

$$\underline{J}(\underline{r}) = \underline{I}\,\delta(\underline{m}\cdot\underline{r})$$

şeklinde ifâde edilebilir. Burada $\delta(\underline{m}\cdot\underline{r})$ Delta fonksiyonu ve $\underline{m}$ dipollerin yayılma düzleminin normalidir. Düzlemin koordinat eksenlerinin orijinden geçtiği kabul edilmiştir. Kompleks vektör $\underline{I}$ amplitüd kesafeti ve dipol polarizasyonunu tarif eder. Polarizasyon elipsinin düzlemi ile aynı olması şart değildir.

VI - 2. Hasıl Olan Elektrik Alan

Yukarda tarif edilen şekilde bir akı yayılımının hasıl ettiği elektrik alanı bulmak için Green fonksiyonlarından faydalanacağız. Daha evvel $E(r)$ yi

$$\underline{E}(\underline{r}) = \int dr'\,\hat{G}_{EJ}(\underline{r},\underline{r}')\,\underline{J}(\underline{r}') + \int dr'\,\hat{G}_{EM}(r,r')\,\underline{M}(\underline{r}')$$

olarak ifâde etmiştir. Burada $J(\underline{r})$ in yukarda verilen ifâdesini yerine koyarak

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{8\pi^3}\int d\underline{r}'\,d\underline{k}\;\hat{g}_{EJ}\,I\,e^{-i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')}\,\delta(\underline{m}\cdot\underline{r}')$$

bulunur.

Burada Delta fonksiyonunun iyi bilinen bir özelliğinden faydalanabiliriz.

$$\delta(\underline{m}\cdot\underline{r}) = \delta(m_1x' + m_2y' + m_3z') = -\frac{1}{|m_3|}\times\delta\left(\frac{m_1}{m_3}x' + \frac{m_2}{m_3}y' + z'\right)$$

$m_3 \neq 0$ olduğunu kabul ediyoruz. Bu da dipollerin yayıldığı düzlemin (Z) eksenini içine almadığını gösterir.

Eğer $\int d\underline{r}'$ ve $\int d\underline{k}$ integrallerinin kendi aralarında yer değiştirebildiklerini kabul edersek neticede ,

$$\underline{E} = \frac{1}{8\pi^3 |m_3|} \int d\underline{k}\, \hat{g}_{EJ}\, \underline{I}\, e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}} \int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} dx'\, dy'$$

$$\times\, e^{j\left[(k_1 - \frac{m_1}{m_3} k_3)x' + (k_2 - \frac{m_2}{m_3} k_3)y'\right]}$$

ve

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j k_1 x}\, dk_1$$

bağıntısını kullanarak

$$\underline{E} = \frac{1}{2\pi |m_3|} \int d\underline{k}\, \hat{g}_{EJ}\, \underline{I}\, e^{-j\underline{k}\cdot\underline{r}}\, \delta\left(k_1 - \frac{m_1}{m_3} k_3\right) \delta\left(k_2 - \frac{m_2}{m_3} k_3\right)$$

ve,

$$k_3 / m_3 = k_m$$

koyarak ve δ fonksiyonlarının bilinen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\, \delta(x - x')\, dx' = f(x)$$

özelliği yardımı ile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_1\, dk_2$$

integralini elde ederiz. Neticede

$$\underline{E} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_m\, \hat{g}_{EJ}(k_m \underline{m})\, \underline{I}\, e^{-j k_m \underline{m}\cdot\underline{r}}$$

bulunur. $m_3 = 0$ halinde de bu netice doğru olur.

$\hat{g}_{EJ}$ nin değerini daha evvel $\hat{\mu} = \hat{I}$ için bulmuş,

$$\hat{g}_{EJ}(\underline{k}) = j\omega\mu_0 \hat{W}_E^{-1}.$$

ve

$$\hat{W}_E^{-1} = \frac{\mathrm{Adj.}\ \hat{W}_E}{\det \hat{W}_E}$$

olarak yazmıştık. k_m yi de bütün fonksiyonların agumanı olarak yazarsak

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{g}_{EJ}(k_m m)\ \underline{I}\ e^{-j k_m \underline{m}\cdot\underline{r}}\ dk_m$$

olarak yazabiliriz. Açık ifâdesi ile

$$\underline{E} = \frac{j}{2\pi\omega\varepsilon_0 \tilde{\underline{m}} \hat{\varepsilon} \underline{m}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_m \frac{\mathrm{Adj.}\ \hat{W}_E(k_m \underline{m})\ e^{-j k_m \underline{m}\cdot\underline{r}}}{(k_m^2 - k_{mI}^2)(k_m^2 - k_{mII}^2)}$$

dır. Burada $\hat{W}_E$ nin adjointi,

$$\hat{\omega}_E(k_m \underline{m}) = k_m^4\, \underline{m}\, \tilde{\underline{m}} - k_m^2 k_0^2\, \hat{L}(\underline{m}) + k_0^4\, \hat{E}$$

idi.

Burada $k_{mI,II}$ düzlem dalganın (normali $\underline{m}$ olan) propagasyon sabitleridir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_m$$

integralini almak için, integrandı böleriz. Ve Cauchy formulünü tatbik ederiz. Bu da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_m \frac{e^{-j k_m \underline{m}\cdot r}}{(k_m^2 - k_{mI}^2)} = -\frac{j}{k_{mI}}\ e^{-j k_{mI}(\underline{m}\cdot\underline{r})}$$

olur. k_{mI}^2 nin işareti o şekilde seçilmiştir ki, $\mathrm{Im}\ k_{mI} < 0$

Burada şunu hatırlatmak yerinde olur : Ortamın çok az da olsa kayıplı olduğunu kabul etmek lâzımdır. Neticede

$$\underline{E} = \frac{1}{2\omega\varepsilon_0 \tilde{\underline{m}}\,\hat{\varepsilon}\,\underline{m}} \Big\{ e\,j\,\delta(\underline{m}\cdot\underline{r})\,\underline{m}\,\tilde{\underline{m}} + \frac{1}{k_{mI}^2 - k_{mII}^2} \times$$

$$\times \left[\hat{\omega}_E(k_{mI}\,\underline{m})\,\frac{e^{-j k_{mI}(\underline{m}\cdot\underline{r})}}{k_{mI}} - \hat{\omega}_E(k_{mII}\,\underline{m})\,\frac{e^{-j k_{mII}(\underline{m}\cdot\underline{r})}}{k_{mII}} \right] \Big\}$$

elde edilir.

Yukardaki formulü tedkik ederek şu neticeye varırız :

a) Dalga k_{mI} , k_{mII} dalga sabitleri ile yayılır ve dalga normali $\underline{m}$ dir.

b) Dalganın polarizasyon ve amplitüdünü $\underline{I}$ vektörü tâyin eder.

c) Dalga kaynaktan uzaklaştıkça küçülür.

Yukardaki formulde, elektrik dalga matrisi $\hat{W}_E$ nin adjointi olan $\hat{\omega}_E(k_{mI}\,\underline{m})$ yi aşağıdaki şekilde ifâde etmek mümkündür.

$$\hat{\omega}_E(k_{mI}\,\underline{m}) = \frac{k_0^4}{m_1^2 + m_2^2} \cdot \frac{\varepsilon_3 - (m_1^2 + m_2^2)\,k_{mI}/k_0^2}{\varepsilon_1 - k_{mI}/k_0^2}\,\underline{e}_I(m)\,\underline{e}_I'$$

Burada,

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = m^2$$

dır. $\underline{e}_I(m)$ ise complex bir vektördür. IV üncü Bölümde verdiğimiz ifâdesile

$$\underline{e}_I = \begin{bmatrix} m_1(\varepsilon_1 - k_{mI}/k_0^2) + j\,m_2\,\varepsilon_2 \\ m_3(\varepsilon_1 - k_{mI}/k_0^2) - j\,m_1\,\varepsilon_2 \\ \dfrac{m_1^2 + m_2^2}{m_3\,\varepsilon_3}\,(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_1 k_I^2/k_0^2 \end{bmatrix}$$

dir. $\underline{e}_I'$, e_I de ε_2 yerine $(-\varepsilon_2)$ konularak bulunan değerdir ve ortam kayıpsız ise $\underline{e}_I' = \underline{e}_I$ dir.

Bir dyade ile bir vektörün çarpımını hatırlarsak ,

$$(\underline{e}_I \, \underline{e}'_I)\,\underline{I} = \underline{e}_I\,(\underline{e}'_I \cdot \underline{I})$$

bağıntısını bulabiliriz. Yukardaki ifâdeden, dalganın polarizasyonunun, dalga normaline ve ortamın özelliklerine bağlı olup kaynağın polarizasyonuna bağlı olmadığını görürüz.

VI - 3. Plasmada Yayılan Güç

Düzlem akı dağılımının (meselâ yukarda söylediğimiz gibi bir düzlem içinde hareket edebilen dipoller) meydana getirdiği dalga içindeki güci hesaplamağa çalışacağız. Ortamın kayıpsız olduğunu kabul ediyoruz. Kaynağın birim hacminden yayılan reel güç,

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\underline{J}^{x} \cdot \underline{E}(0)$$

dir. Bunun $\underline{m}$ ye göre yönlenmiş koordinatlerde integralini alırsak, akı dağılımının birim yüzeyinden yayılan güç,

$$\frac{dP}{dA} = -\frac{1}{4\omega\varepsilon_0\,\tilde{\underline{m}}\,\varepsilon\,\underline{m}\,(k_{mI}^2 - k_{mII}^2)} \times$$

$$\times\,\mathrm{Re}\left\{\underline{I}^{+}\left[\frac{\hat{\omega}_E(k_{mI}\,\underline{m})}{k_{mI}} - \frac{\hat{\omega}_E(k_{mII}\,\underline{m})}{k_{mII}}\right]\underline{I}\right\}$$

olur. Burada

$$\underline{E}(0) = \frac{1}{2\omega\varepsilon_0\,\tilde{\underline{m}}\,\varepsilon\,\underline{m}}\left\{2j\,\delta(\underline{m}\cdot\underline{r})\,\underline{m}\,\tilde{\underline{m}} + \frac{1}{k_{mI}^2 - k_{mII}^2} \times\right.$$

$$\times\left[\hat{\omega}_E(k_{mI}\,\underline{m})\,\frac{e^{-jk_{mI}(\underline{m}\cdot\underline{r})}}{k_{mI}} - \hat{\omega}_E(k_{mII}\,\underline{m})\,\frac{e^{-jk_{mII}(\underline{m}\cdot\underline{r})}}{k_{mII}}\right.$$

olarak bulunmuştur. Bu iki terimli bir ifâdedir. Ve her terim bir dalga tipine tekabül eder. İki dalganın taşıdığı gücün birbirine oranı eğer $k_{mI,II} = b_{I,II} - j\,\alpha_{I,II}$

şeklinde ifâde edersek -ki bu her zaman mümkündür-

$$\frac{\rho_I}{\rho_{II}} = \frac{b_I}{b_{II}} = \left|\frac{\underline{e}_I^x \cdot \underline{I}}{\underline{e}_{II}^x \cdot \underline{I}}\right| = \left|\frac{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 k_{mII}^2/k_0^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 k_{mI}/k_0^2}\right|$$

olur.

N o t : Ortamın kayıpsız olduğunu kabul ettik. Yâni,

$$k_{I,II} = b_{I,II} - j\alpha_{I,II}$$

ifâdesinde $\alpha = 0$ alınmıştır. Eğer $b = 0$ olursa dalga zaten yayılmıyor demektir.

Mevzuun özel bir durumunda yukardaki neticeyi inceleyelim. Meselâ dipollerin magnetik alana dik bir düzlem içinde sıralandığını düşünelim ve meselâ,

$$m_1 = m_2 = 0\,, \qquad m_3 = 1$$

olsun. Maxwell denklemlerini, yâni

$$\underline{H} = \frac{1}{\omega\mu_0}\hat{\mu}^{-1}\hat{K}\underline{E}$$

$$\underline{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon_0}\hat{\varepsilon}^{-1}\hat{K}\underline{H}$$

birleştirerek,

$$(\hat{K}\hat{\mu}^{-1}\hat{K} + k_0^2\hat{\varepsilon})\underline{E} = 0$$

elde ederiz. Ve $\underline{E}$ ile $\underline{H}$ için en az bir çözüm olması

$$\hat{W}_E = \hat{k}\hat{\mu}^{-1}\hat{k} + k_0^2\hat{\varepsilon} = \hat{k}\tilde{k} - k^2 I + k_0^2\hat{\varepsilon} = 0$$

olmasına bağlıdır. Denklem, k ye göre quadratik bir denklemdir ve burada k nın kökleri

$$k_{I,II}/k_0^2 = \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\alpha + \varepsilon_1\varepsilon_3(1+\cos^2\alpha) \mp \sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3)^2\sin^2\alpha + 4\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\cos^2\alpha}}{2(\varepsilon_1\sin^2\alpha + \varepsilon_3\cos^2\alpha)}$$

ve $\underline{m} = (\underline{m}_1 , \underline{m}_2 , \underline{m}_3)$

$m_1 = \sin\alpha \cos\beta , \quad m_2 = \sin\alpha \sin\beta \qquad m_3 = \cos\alpha$

dir. Özel halde yâni

$m_1 = m_2 = 0 \; ; \qquad m_3 = 1$

için

$\alpha = 0 \qquad \sin\alpha = 0 \qquad \cos\alpha = 1$ dir

ve

$$k_{mI}^2 / k_0^2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$k_{mII} / k_0^2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

olur. Buradan,

$$k_{mI}^2 - k_{mII}^2 = 2 k_0^2 \varepsilon_2$$

çıkar. Diğer taraftan

$$\tilde{\underline{m}} \, \hat{\varepsilon} \, \underline{m} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & j\varepsilon_2 & 0 \\ j\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \varepsilon_3$$

bulunur.

$\hat{\omega}_E(k_{mI,II})$ yi bir dyade şeklinde yazdığımızda

$$\hat{\omega}_E(k_{mI,II}) = \mp k_0^2 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \begin{bmatrix} 1 \\ \mp j \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mp j \\ 0 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Bütün bunları birleştirirsek, birim yüzeyden yayılan güç de

$$\frac{dP}{dx\,dy} = \frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left\{ \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \underline{I} \right|^2}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} + \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{vmatrix} \cdot I \right|^2}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} \right\}$$

olur. O halde iki tip dalganın taşıdığı gücün birbirine oranı da,

$$\frac{P_{I}}{P_{II}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \left| \frac{I_x - j\,I_y}{I_x + j\,I_y} \right|$$

olur.

Ö Z E T

Bu çalışma, anizotropik ortamda radyasyon probleminin incelenmesinde, izotropik ortamda yapılan inceleme metodlarının kullanılabileceğini, fakat madde sabitleri karakter itibarile değişik olduğundan, sadece kullanılan matematik işlemlerin deşik olacağını göstermektedir.

Alan hesaplanmasında kullanılan Green fonksiyonları, izotropik ortamdaki Green fonksiyonlarının genelleştirilmiş bir şeklidir. Elektrik ve magnetik anizotropik ortamlarda Green fonksiyonu yahut tensörü bir süper matristir.

Klasik elektrodinamik ve Green fonksiyonları ile bunların özel Fourier transformasyonları yardımı ile aşağıdaki neticelere varılmıştır :

a) Kayıplı ve kayıpsız ortamlarda $\hat{\varepsilon}$ ve $\hat{\mu}$ nün karakteri incelenmiş ve kayıpsız ortamlar için ($Q = 0$) bu matrislerin Hermitian olması icap ettiği görülmüştür. Şöyle ki, bu ortamlarda kaybolan güci veren denklem

$$Q = \frac{\omega}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^+ \hat{\varepsilon}_{II} \underline{E} + \mu_0 \underline{H}^+ \hat{\mu}_{II} \underline{H}\right) \text{ dır.}$$

ve

$$\hat{\varepsilon}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\varepsilon}^+ - \hat{\varepsilon}\right) ; \qquad \hat{\mu}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\mu}^+ - \hat{\mu}\right)$$

$Q = 0$ olabilmesi için,

$$\hat{\varepsilon}_{II} = 0 \quad , \quad \hat{\mu}_{II} = 0$$

olmalıdır. Bu da

$$\hat{\varepsilon}^+ = \hat{\varepsilon} \qquad \hat{\mu}^+ = \hat{\mu}$$

olması ile mümkün olur.

b) Genel olarak lineer anizotropik ortamda dalganın, $k^2_{I,II}$,

$$= k_0^2 \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\alpha + \varepsilon_1\varepsilon_2(1+\cos^2\alpha) \mp \sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3)^2 \sin^4\alpha + 4\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\cos^2\alpha}}{2(\varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_3 \cos^2\alpha}$$

denklemi ile verilen iki ayrı propagasyon sabiti ile (k_I , k_{II}) ve eliptikli polarise olarak yayıldığı neticesine varılmıştır. Propagasyon sabitleri, propagasyon yönünün fonksiyonudurlar. Ve genellikle kompleksdirler.

c) Eğer ortam kayıpsız ise $\hat{\mathcal{E}}$ nun elemanları reeldir. Yukarda, $k_{I,II}$ propagasyon sabitlerini veren denklem, propagasyon sabitlerinin de reel olduğu neticesine götürmüştür. Fakat belli frekanslarda ve maddenin fiziksel yapısına bağlı olarak $\hat{\mathcal{E}}$ nun elemanlarının alacağı değere göre dalga yayılır veya yayılmaz. Bu demektir ki, şayet, $\mathcal{E}_1$ veya $\mathcal{E}_2$ negatif ise - ler ve

$$\mathcal{E}_2^2 > \mathcal{E}_1^2$$

ise α nın bazı belli değerleri için $k^2_{I,II}$ negatiftir. Veya imajineridir. Yâni dalga yayılmaz.

d) Anizotropik ortamda bir düzlem dalga içinde harekete mecbur edilmiş dipollerin hasıl ettiği dalganın gücü hesaplanmış ve yayılma şartları incelenmiştir. Dipollerin devamlı magnetik sahaya dikey bir düzlem üzerine sıralanmış özel durumu için,

$$(m_1 = m_2 = 0, \qquad m_1 = 1)$$

propagasyon sabitleri, ve birim yüzeyden neşrolunan güç hesaplanmış

$$\frac{dP}{dx\,dy} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\mu_0}{\mathcal{E}_0}}\left\{ \frac{\left|\left|\begin{matrix}1\\-j\\0\end{matrix}\right| \cdot I\right|^2}{\sqrt{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}} + \frac{\left|\left|\begin{matrix}1\\+j\\0\end{matrix}\right| \cdot I\right|^2}{\sqrt{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}} \right.$$

bulunmuştur.

CONCLUSION

Studying of the Electro-magnetic radiation in aisotropic media shows that we can use the same method of investigation of isotropic media. But because of the different characters of the material constants we should follow a different mathematical rule.

The Green's functions that are used for calculation of fields in anisotropic media are in a more general form than of the scalar functions in the case of an isotropic medium. The Green's tensor for an unbounded region is, in the case of an electric and magnetic medium, given by a super matrix.

With the aid of Green's functions and their spatial Fourier transforms the following results are found.

a) For a lossless, unbounded media ($Q = 0$) the material contants $\hat{\varepsilon}$ and $\hat{\mu}$ are Hermitian matricies. This can be shown from the equation that gives the power fluxing from a unit volume enclosing the sources of the field.

Q , as the power dissipated per unit volume

$$Q = \frac{\omega}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^+ \hat{\varepsilon}_{II} \underline{E} + \mu_0 \underline{H}^+ \mu_{II} \underline{H}\right)$$

and

$$\hat{\varepsilon}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\varepsilon}^+ - \hat{\varepsilon}\right), \qquad \hat{\mu}_{II} = \frac{1}{2j}\left(\hat{\mu}^+ - \hat{\mu}\right)$$

for ($Q = 0$), $\hat{\varepsilon}_{II}$ and $\hat{\mu}_{II}$ should be zero from here,

$$\hat{\varepsilon}_{II} = 0 \longrightarrow \hat{\varepsilon}^+ = \hat{\varepsilon}$$

$$\hat{\mu}_{II} = 0 \longrightarrow \hat{\mu}^+ = \hat{\mu}$$

b) In general, for a homogeneous anisotropic mediawave propagates with two different propagation constants.

That are given by,

$$k^2_{I,II} = k_0^2 \; \frac{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)\sin^2\alpha + \varepsilon_1\varepsilon_3(1+\cos^2\alpha)}{2(\varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_3 \cos^2\alpha)}$$

$$\frac{\mp\sqrt{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1\varepsilon_3)^2 \sin^4\alpha + 4\varepsilon_2^2\varepsilon_3^2\cos^2\alpha}}{2(\varepsilon_1 \sin^2\alpha + \varepsilon_3 \cos^2\alpha)}$$

Here $k_{I,II}$ are the propagation constants of the two possible plane waves. They are functions of the angle α between the wave normal and the permanent magnetic field. In general their values are complex.

c) If the medium is lossless ε_1 , ε_2 and ε_3 are real numbers. And k_I , k_{II} are too. But some certain frequencies, that ε_1 or ε_2 , or both of them are negative and

$$\varepsilon_1^2 > \varepsilon_2^2$$

This implies that $k^2_{I,II}$ or one of them is imaginary. This means, that the corresponding plane waves can not propagate and are "cut off".

d) The interesting problem of wave exitation due to a distribution of oscillating elertic dipoles, in magneto-ionic medium, constrained to a plane of arbitrary orientation is treated and for a special case which the dipoles are arranged in a plane perpendicular to the permanent magnetic field,

$$(m_1 = m_2 = 0, \quad m_3 = 1)$$

is discussed and the power radiated per unit area are found as follow,

$$\frac{dP}{dx\,dy} = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \left\{ \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 \\ -j \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \underline{I} \right|^2}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} + \frac{\left| \begin{vmatrix} 1 \\ +j \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \underline{I} \right|^2}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}} \right\}$$

VII - FAYDALANILAN KAYNAKLAR

1. Morse and Feshbach

Methods of Theoretical Physics. Bölüm 4 Sahife 453, B. 7 S. 791

2. Mathews and Walker

Mathematical Methods of Physics. B. 9 S. 265

3. Jackson

Classical Electrodynamics. B. 6 S. 183

4. Landau and Lifshitz

Electrodynamics of Continious Media. B. 11 S. 313

5. Brandstater

Waves, Rays and Radiation in Plasma Media. B. 9 S. 537

6. Tolstov

Fourier Series

7. Jenkins and White

Fundamentals of Optics. B. 12 S. 211

8. A. J. Dekker

Solid State Physics. B. 1 S. 27

9. W. B. Thompson

Plasma Physics. B. 1 S. 1, 17

10. Physical Review. 110 (1958) 293 - 306

Basic Properties of Magneto-Plasma.

11. Rev. Mod. Phys. 28 (1956) 3 - 17

Theory of Wave Propagation in Gyromagnetic Medium.

12. Phys. Rev. 112 (1958) 1460 - 1464

Wave Propagation in Magneto Plasma.

13. Phys. Rev. 93 (1956)

Cherenkov Radiation.

14. J. A. Stratton

Electromagnetic Theory

15. Hayri Dener

Elektrik Dersleri

16. Bruhat

Elektrik Dersleri

17. M. Born

Optics

18. M. Born and E. Wolf

Principles of Optics

19. D.A. Watkins

Topics in Electromagnetic Theory

20. V. L. Ginzburg

Radiation of an Electron Moving in a Cyristal With a Constand Velocity J. E. T. P.

21. V. L. Ginzburg

The Radiation Reaction in the Motion of a Charge in a Medium

J. E. T. P. 36 (1959) S. 1823 - 33