

ARALIK 2015

YÜKSEK LİSANS – MATEMATİK BÖLÜMÜ

ZÜLKÜF KOÇINKAĞ

T.C

GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JACOBI MATRİSLERİN İKİ SPEKTRUMU İÇİN
TERS SPEKTRAL PROBLEM

MATEMATİK BÖLÜMÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZÜLKÜF KOÇINKAĞ
ARALIK 2015

**Jacobi Matrislerin İki Spektrumu İçin
Ters Spektral Problem**

**Gaziantep Üniversitesi
Matematik Bölümü
Yüksek Lisans Tezi**

**Danışman
Doç. Dr. Abdullah KABLAN**

**Zülküf KOÇİNKAG
Aralık 2015**

© 2015 [Zülküf KOÇİNKAGİ]

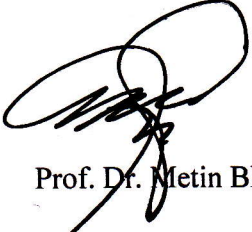
T.C.
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Tezin Adı: Jacobi Matrislerin İki Spektrumu İçin Ters Spektral Problem

Öğrencinin, Adı Soyadı: Zülküf KOÇİNKAG

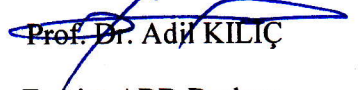
Tez Savunma Tarihi: 28.12.2015

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı



Prof. Dr. Metin BEDIİR
FBE Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak gerekli şartları sağladığını onaylarım.



Prof. Dr. Adil KILIÇ
Enstitü ABD Başkanı

Bu tez tarafımda okunmuş, kapsamı ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.



Doç. Dr. Abdullah KABLAN
Tez Danışmanı

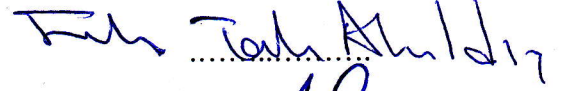
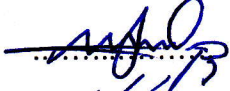
Bu tez tarafımızca okunmuş, kapsam ve niteliği açısından bir Yüksek Lisans tezi olarak oy birliği ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Fahir Talay AKYILDIZ

Doç. Dr. M. Fatih HASOĞLU

Doç. Dr. Abdullah KABLAN

imzası




İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek ilgili tezde yer aldığını beyan ederim.

Zülküf KOÇİNKAG

ÖZET
JACOBI MATRİSLERİN İKİ SPEKTRUMU İÇİN
TERS SPEKTRAL PROBLEM

KOÇİNKAG, Zülküf

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Bölümü

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Abdullah KABLAN

Aralık 2015, 26 sayfa

Sonlu boyutlu reel Jacobi matrislerin (üç-köşegensel simetrik matrisler) iki spektrumu için ters spektral problem araştırıldı. Problem özdeğerlerin iki kümesini kullanarak orijinal Jacobi matrisi ve son satır ve son sütununun silinerek oluşturulan Jacobi matrisi yeniden inşa etmektir.

Anahtar Kelimeler: Jacobi matris, ters spektral problem, spektral veri.

ABSTRACT
INVERSE SPECTRAL PROBLEM FOR TWO SPECTRA
OF JACOBI MATRICES

KOÇİNKAG, Zülküf

M.Sc.Thesis, Mathematics Department

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Abdullah KABLAN

December 2015, 26 pages

A version of the inverse spectral problem for two spectra of finite-order real Jacobi matrices (tridiagonal symmetric matrices) is investigated. The problem is to reconstruct the matrix using two sets of eigenvalues: one for the original Jacobi matrix and one for the matrix obtained by deleting the last row and last column of the Jacobi matrix.

Key Words: Jacobi matrix, inverse spectral problem, spectral data.

Çok kıymetli aileme...

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda bilgi ve tecrübeleri ile her konuda bana yardımcı olan ve çalışmayla ilgili kaynak temini için imkânlarını sunan saygıdeğer hocam Doç. Dr. Abdullah KABLAN'a, maddi ve manevî desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve değerli eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
TEŞEKKÜR.....	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ	x
BÖLÜM 1: GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2: TERS SPEKTRAL PROBLEM İÇİN ÖN HAZIRLIK	4
BÖLÜM 3: İKİ SPEKTRUM İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEM	19
KAYNAKLAR	26

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
J	$N \times N$ tipinde simetrik matris
J_1	$N-1 \times N-1$ tipinde simetrik matris
λ	J matrisinin özdeğeri
μ	J_1 matrisinin özdeğeri
$R(\lambda)$	J matrisinin resolventi
$\omega(\lambda)$	Resolvent fonksiyon
β_k	Normalleşmiş sayı
Ω	Lineer fonksiyonel
D_n	$n \times n$ tipinde bir matrisin determinanı
Δ_n	Determinant
$M(\lambda)$	Weyl fonksiyonu
$\deg F(\lambda)$	$F(\lambda)$ polinomunun derecesi

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Jacobi matrislerin (üç-köşegensel simetrik matrisler) uygulamaları çeşitlilik gösterir. Bu bölümde [1] deki çalışma takip edilerek Jacobi matrisinden ve matrisin iki spektrumundan bahsedilmiştir. Jacobi matrisleri diğerlerinden ayırt eden özelliği belli üç terimli denklemlerle ilişkili olmasıdır (ikinci dereceden lineer fark denklemleri). Bundan dolayı, bu matrisler Sturm-Liouville operatörünün ayrık bir analogu olarak düşünülebilir ve onların incelemeleri Sturm-Liouville teorisi [2] ile birçok benzerliğe sahiptir.

Her n sayısı için a_n ve b_n keyfi reel sayılar olmak üzere $N \times N$ reel Jacobi matrisi

$$J = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

şeklindedir. Öyle ki a_n sıfırdan farklı olmak üzere

$$a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0 \quad (1.2)$$

yazılabilir.

J_1 matrisi J matrisinin son satır ve son sütununun silinmesiyle elde edilir. J matrisinin kısaltılmışı olan J_1 matrisi

$$J_1 = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-4} & a_{N-4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-4} & b_{N-3} & a_{N-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-3} & b_{N-2} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

şeklindedir.

J ve J_1 matrislerinin özdeğerleri sırasıyla $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ve $\mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ ile gösterilsin.

$\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ sonlu dizileri J matrisinin iki spektrumu diye adlandırılır.

Bu çalışmanın konusu, iki spektruma göre ters problemin çözümünün nasıl olacağını belirlemektir.

- (i) J matrisi iki spektrumu tarafından tek türlü mü belirlenir?
- (ii) J matrisini oluşturmak için iki spektrumundan bir algoritma üretilebilir mi?
- (iii) $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ reel sayı dizilerinin (1.2) girişleri ile verilen (1.1) formundaki bazı matrislerin iki spektrumu olabilmesi için gerek ve yeter şartları bulmak.

Bu problemin benzeri daha önce [3,4] de çözülmüştür. Bu çalışmada problemin çözümü için daha etkili ve daha farklı bir çözüm metodu sunulmaktadır. İki spektrum için ters problemin farklı durumları [2,5–10]da araştırılmıştır.

Bu bölüm dışında çalışma iki bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde özdeğerler ve normalleşmiş sayılar açısından sonlu Jacobi matrisler için ters problemin çözümü sunulmuştur. Bu problemin bir çözümü [2] ve [11] çalışmalarında verilmiştir. Üçüncü bölümde de aşağıda formüle edildiği gibi esas problemin çözümü incelenmiştir. Bu çözümün temeli

$$\beta_k = \frac{a}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_k)} \quad (1.4)$$

formülüdür. Burada

$$\frac{1}{a} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq m}^N (\lambda_j - \lambda_m) \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_m)} \quad (1.5)$$

dir.

Bu formüller iki spektruma sahip sonlu Jacobi matrisinin β_k normalleşmiş sayılarını verir. (1.4) ve (1.5) formülleri iki spektrumlu ters problemlerin şartlı çözümünü verir. (Yani; $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ spektrumlarına sahip (1.1) formunda bir matrisin olduğunu varsayalım.) çünkü $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ sayıları önceden bilinmektedir. İkinci bölümde verilen çözüm yolu ile J matrisi biçimlendirilebilir. Sonra, $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ reel sayı dizilerinin (1.2) girişleri ile verilen (1.1) formundaki bir Jacobi matrisinin iki spektrumu olabilmesi için gerek ve yeter şartlar verilmiştir, yani bu çalışmanın asıl problemi çözülmüştür. Bu şartlar aşağıdaki tek ve basit durumu oluşturur:

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{N-1} < \mu_{N-1} < \lambda_N, \quad (1.6)$$

yani, λ_k ve μ_k sayıları iç içedir.

BÖLÜM 2

TERS SPEKTRAL PROBLEM İÇİN ÖN HAZIRLIK

Bu bölümde, [11] daki yazarın çalışmasını takip edeceğiz. (1.1) formunda (1.2) deki girişlere sahip J Jacobi matrisi verilmiş olsun. $y = \{y_n\}_{n=0}^{N-1}$ sütun vektörü için $Jy = \lambda y$ özdeğer problemini düşünelim

$$\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-3} \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a_{-1}y_{-1} + b_0y_0 + a_0y_1 &= \lambda y_0 \\ a_0y_0 + b_1y_1 + a_1y_2 &= \lambda y_1 \\ a_1y_1 + b_2y_2 + a_2y_3 &= \lambda y_2 \\ \vdots &\vdots \\ a_{N-3}y_{N-3} + b_{N-2}y_{N-2} + a_{N-2}y_{N-1} &= \lambda y_{N-2} \\ a_{N-2}y_{N-2} + b_{N-1}y_{N-1} + a_{N-1}y_N &= \lambda y_{N-1} \end{aligned}$$

ki bu $\{y_n\}_{n=-1}^N$ vektörü için aşağıdaki ikinci mertebeden lineer fark denklemine eşdeğerdir:

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_ny_n + a_ny_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad a_{-1} = a_{N-1} = 1 \quad (2.1)$$

sınır şartları

$$y_{-1} = y_N = 0 \quad (2.2)$$

dır. Aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan (2.1) denkleminin çözümleri $\{P_n(\lambda)\}_{n=-1}^N$ ve $\{Q_n(\lambda)\}_{n=-1}^N$ ile gösterilsin.

$$P_{-1}(\lambda) = 0, \quad P_0(\lambda) = 1, \quad (2.3)$$

$$Q_{-1}(\lambda) = -1, \quad Q_0(\lambda) = 0, \quad (2.4)$$

Her $n \geq 0$ için $P_n(\lambda)$, n . dereceden bir polinom, $Q_n(\lambda)$, $(n-1)$. dereceden bir polinom ve $P_n(\lambda)$ birinci tip polinom, $Q_n(\lambda)$ ikinci tip polinom diye adlandırılır. Şimdi (2.3) ve (2.4) başlangıç şartları yardımıyla fark denkleminde bazı $P_n(\lambda)$ ve $Q_n(\lambda)$ polinomlarını bulalım.

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + b_n P_n(\lambda) + a_n P_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$n=0$ için,

$$a_{-1}P_{-1}(\lambda) + b_0 P_0(\lambda) + a_0 P_1(\lambda) = \lambda P_0(\lambda)$$

ifadesi elde edilir. (2.3) şartı uygulanırsa

$$b_0 + a_0 P_1(\lambda) = \lambda, \quad P_1(\lambda) = \frac{\lambda - b_0}{a_0}$$

olur. $n=1$ için,

$$a_0 P_0(\lambda) + b_1 P_1(\lambda) + a_1 P_2(\lambda) = \lambda P_1(\lambda)$$

denkleminde

$$a_0 + a_1 P_2(\lambda) = P_1(\lambda)(\lambda - b_1), \quad a_0 + a_1 P_2(\lambda) = \frac{(\lambda - b_0)(\lambda - b_1)}{a_0}$$

$$P_2(\lambda) = \frac{(\lambda - b_0)(\lambda - b_1) - a_0^2}{a_0 a_1}$$

bulunur.

$$a_{n-1}Q_{n-1}(\lambda) + b_n Q_n(\lambda) + a_n Q_{n+1}(\lambda) = \lambda Q_n(\lambda), \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

$n=0$ için,

$$a_{-1}Q_{-1}(\lambda) + b_0 Q_0(\lambda) + a_0 Q_1(\lambda) = \lambda Q_0(\lambda)$$

ifadesi elde edilir. (2.4) şartı uygulanırsa

$$(-1) + a_0 Q_1(\lambda) = 0, \quad a_0 Q_1(\lambda) = 1, \quad Q_1(\lambda) = \frac{1}{a_0}$$

olur. Benzer şekilde $n=1$ için,

$$a_0 Q_0(\lambda) + b_1 Q_1(\lambda) + a_1 Q_2(\lambda) = \lambda Q_1(\lambda)$$

denkleminde

$$\frac{b_1}{a_0} + a_1 Q_2(\lambda) = \frac{\lambda}{a_0}, \quad a_1 Q_2(\lambda) = \frac{\lambda - b_1}{a_0}, \quad Q_2(\lambda) = \frac{\lambda - b_1}{a_0 a_1}$$

bulunur. $n=2$ için,

$$a_1 Q_1(\lambda) + b_2 Q_2(\lambda) + a_2 Q_3(\lambda) = \lambda Q_2(\lambda)$$

denkleminde $Q_1(\lambda)$ ve $Q_2(\lambda)$ yerine yazılırsa

$$\frac{a_1}{a_0} + \frac{b_2(\lambda - b_1)}{a_0 a_1} + a_2 Q_3(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda - b_1)}{a_0 a_1}$$

ve böylece

$$a_2 Q_3(\lambda) = \frac{(\lambda - b_2)(\lambda - b_1) - a_1^2}{a_0 a_1}, \quad Q_3(\lambda) = \frac{(\lambda - b_2)(\lambda - b_1) - a_1^2}{a_0 a_1 a_2}$$

bulunur.

Lemma 2.1

$$\det(J - \lambda I) = (-1)^N a_0 a_1 \cdots a_{N-2} P_N(\lambda) \quad (2.5)$$

eşitliği sağlanır. Öyle ki J matrisinin özdeğerleri ile $P_N(\lambda)$ polinomunun sıfırları çakışıktır.

İspat:

Karakteristik denklemin ispatı için her $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ olmak üzere

$$J_n = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-3} & a_{n-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3} & b_{n-2} & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-2} & b_{n-1} \end{bmatrix}$$

matrisi ve $\Delta_n(\lambda) = \det(J_n - \lambda I)$ ifadesi oluşturulsun. I gerekli boyutta birim matrisi belirtsin. J_{n+1} matrisi J_n matrisinin bir satır ve bir sütun genişletilmiş hali olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$J_{n+1} = \begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & b_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & b_n \end{bmatrix}$$

Dolayısıyla $\Delta_{n+1}(\lambda) = \det(J_{n+1} - \lambda I)$ dır. $\Delta_{n+1}(\lambda)$ ifadesinin açılımından

$$\Delta_{n+1}(\lambda) = (b_n - \lambda)\Delta_n(\lambda) - a_{n-1}^2\Delta_{n-1}(\lambda) \quad n=1, 2, \dots; \quad \Delta_0(\lambda) = 1,$$

elde edilir. Her iki taraf $a_0 a_1 \dots a_{n-1}$ çarpımına bölünüp $(-1)^n$ ile çarpılırsa

$$(-1)^n (a_0 a_1 \dots a_{n-1})^{-1} \Delta_{n+1}(\lambda) = (-1)^n (a_0 a_1 \dots a_{n-1})^{-1} (b_n - \lambda)\Delta_n(\lambda) - (-1)^n (a_0 a_1 \dots a_{n-1})^{-1} a_{n-1}^2 \Delta_{n-1}(\lambda)$$

ifadesi elde edilir. (2.1) ve (2.3) ü sağlayan dizinin elemanları olan

$$d_{-1} = 0, \quad d_0 = 1, \quad d_n = (-1)^n (a_0 a_1 \dots a_{n-1})^{-1} \Delta_n(\lambda) \quad n=1, 2, \dots$$

eşitlikleri kullanılırsa $a_{n-1}d_{n-1} + b_nd_n + a_nd_{n+1} = \lambda d_n$ bulunur. Bu ifadeden dolayı $d_n = P_n(\lambda)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ dir. $J_N = J$ ve $a_{N-1} = 1$ olduğundan (2.5) elde edilir.

Lemma 2.2

$$P_{N-1}(\lambda)Q_N(\lambda) - P_N(\lambda)Q_{N-1}(\lambda) = 1 \quad (2.6)$$

ifadesi sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned} a_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + b_nP_n(\lambda) + a_nP_{n+1}(\lambda) &= \lambda P_n(\lambda), \\ n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad a_{-1} &= a_{N-1} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n-1}Q_{n-1}(\lambda) + b_nQ_n(\lambda) + a_nQ_{n+1}(\lambda) &= \lambda Q_n(\lambda), \\ n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad a_{-1} &= a_{N-1} = 1, \end{aligned}$$

denklemleri sırasıyla $Q_n(\lambda)$ ve $P_n(\lambda)$ ile çarpılırsa

$$a_{n-1}Q_n(\lambda)P_{n-1}(\lambda) + b_nQ_n(\lambda)P_n(\lambda) + a_nQ_n(\lambda)P_{n+1}(\lambda) = \lambda Q_n(\lambda)P_n(\lambda),$$

$$a_{n-1}P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda) + b_nP_n(\lambda)Q_n(\lambda) + a_nP_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda)Q_n(\lambda),$$

elde edilen iki denklem taraf tarafa çıkarılırsa

$$a_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)Q_n(\lambda) - P_n(\lambda)Q_{n-1}(\lambda)] = a_n[P_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)], \quad n \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$$

elde edilir. $P_n(\lambda)$ ve $Q_n(\lambda)$ çözümlerinin Wronskianı olan

$$a_n[P_n(\lambda)Q_{n+1}(\lambda) - P_{n+1}(\lambda)Q_n(\lambda)]$$

ifadesi $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ e bağlı değildir.

$n=0$ için

$$a_0[P_0(\lambda)Q_1(\lambda) - P_1(\lambda)Q_0(\lambda)]$$

ifadesi düzenlenip yeniden yazılırsa $a_0[(\frac{1}{a_0} - \frac{\lambda - b_0}{a_0}.0)] = 1$ olur ve bütün

$n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ ler için eşit olduğundan $n = N-1$ alındığında

$$a_{N-1} [Q_N(\lambda)P_{N-1}(\lambda) - P_N(\lambda)Q_{N-1}(\lambda)] = 1$$

olur ve $a_{N-1} = 1$ olduğundan (2.6) ifadesi elde edilir.

Lemma 2.3

$$P_{N-1}(\lambda)P'_N(\lambda) - P_N(\lambda)P'_{N-1}(\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda) \quad (2.7)$$

ifadesi sağlanır. Burada türev λ parametresine göre dir.

İspat:

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda) + b_nP_n(\lambda) + a_nP_{n+1}(\lambda) = \lambda P_n(\lambda)$$

denkleminin λ ya göre türevi alınır

$$a_{n-1}P'_{n-1}(\lambda) + b_nP'_n(\lambda) + a_nP'_{n+1}(\lambda) = P_n(\lambda) + \lambda P'_n(\lambda)$$

$$n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad a_{-1} = a_{N-1} = 1.$$

ifadesi elde edilir. Şimdi ilk denklem $P'_n(\lambda)$ ifadesi ile çarpılırsa

$$a_{n-1}P_{n-1}(\lambda)P'_n(\lambda) + b_nP_n(\lambda)P'_n(\lambda) + a_nP_{n+1}(\lambda)P'_n(\lambda) = \lambda P_n(\lambda)P'_n(\lambda)$$

elde edilir. İkinci denklem ile $P_n(\lambda)$ ifadesi ile çarpılırsa

$$a_{n-1}P'_{n-1}(\lambda)P_n(\lambda) + b_nP'_n(\lambda)P_n(\lambda) + a_nP'_{n+1}(\lambda)P_n(\lambda) = P_n^2(\lambda) + \lambda P'_n(\lambda)P_n(\lambda)$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa

$$a_{n-1}[P_{n-1}(\lambda)P'_n(\lambda) - P'_{n-1}(\lambda)P_n(\lambda)] - a_n[P'_{n+1}(\lambda)P_n(\lambda) - P_{n+1}(\lambda)P'_n(\lambda)] = -P_n^2(\lambda)$$

$$n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$$

bulunur. Son denklemin $n = 0, 1, \dots, m$ ($m \leq N-1$) değerleri için toplamı alınıp ve (2.3) başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\sum_{n=0}^m [a_{n-1} [P_{n-1}(\lambda)P'_n(\lambda) - P'_{n-1}(\lambda)P_n(\lambda) - a_n [P'_{n+1}(\lambda)P_n(\lambda) - P_{n+1}(\lambda)P'_n(\lambda)]]] = \sum_{n=0}^m -P_n^2(\lambda)$$

$$\begin{aligned}
& a_{-1} [P_{-1}(\lambda)P'_0(\lambda) - P'_{-1}(\lambda)P_0(\lambda)] - a_0 [P'_1(\lambda)P_0(\lambda) - P_1(\lambda)P'_0(\lambda)] \\
& + a_0 [P_0(\lambda)P'_1(\lambda) - P'_0(\lambda)P_1(\lambda)] - a_1 [P'_2(\lambda)P_1(\lambda) - P_2(\lambda)P'_1(\lambda)] \\
& + a_1 [P_1(\lambda)P'_2(\lambda) - P'_1(\lambda)P_2(\lambda)] - a_2 [P'_3(\lambda)P_2(\lambda) - P_3(\lambda)P'_2(\lambda)] + \dots \\
& + a_{m-1} [P_{m-1}(\lambda)P'_m(\lambda) - P'_{m-1}(\lambda)P_m(\lambda)] - a_m [P'_{m+1}(\lambda)P_m(\lambda) - P_{m+1}(\lambda)P'_m(\lambda)] = \sum_{n=0}^m -P_n^2(\lambda) \\
& a_m [P'_{m+1}(\lambda)P_m(\lambda) - P_{m+1}(\lambda)P'_m(\lambda)] = \sum_{n=0}^m P_n^2(\lambda), \quad m \in \{0, 1, \dots, N-1\}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $m = N-1$ için

$$a_{N-1} [P'_N(\lambda)P_{N-1}(\lambda) - P_N(\lambda)P'_{N-1}(\lambda)] = \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda)$$

$a_{N-1} = 1$ olduğu dikkate alındığında ispat tamamlanmış olur.

(1.2) verileri ile verilen (1.1) formundaki reel Jacobi matrisi özeşlenik olduğundan özdeğerleri reeldir. λ_0 , $P_N(\lambda)$ polinomunun sıfırı olsun. (2.5) den anlaşılacağı üzere λ_0 sıfırı J matrisinin bir özdeğeridir. Bundan dolayı λ_0 reeldir. (2.7) de λ yerine λ_0 yazılırsa ve $P_N(\lambda_0) = 0$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
P_{N-1}(\lambda_0)P'_N(\lambda_0) - P_N(\lambda_0)P'_{N-1}(\lambda_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda_0) \\
P_{N-1}(\lambda_0)P'_N(\lambda_0) &= \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda_0) \tag{2.8}
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.8) ifadesinin sağ tarafı sıfırdan farklıdır. Çünkü $P_n(\lambda)$ polinomları reel katsayılıdır ve dolayısıyla λ nın reel değerleri için reeldir. Bunun yanı sıra $P_0(\lambda) = 1$ dir. Bu nedenle $P'_N(\lambda_0) \neq 0$ dir. Yani, λ , $P_N(\lambda)$ polinomunun basit sıfırındır. $P_N(\lambda)$ polinomu N . dereceden bir polinom olduğundan N tane farklı sıfırı vardır. Böylece, (1.2) verileri ile (1.1) formundaki herhangi bir J reel Jacobi matrisi tam olarak N reel ve farklı özdeğere sahiptir.

J matrisinin resolventi $R(\lambda) = (J - \lambda I)^{-1}$ olsun. (I istenilen boyutta birim matristir) ve e_0 , N boyutlu sütun vektörünün bileşenleri $1, 0, \dots, 0$ ile belirtilir.

$$\omega(\lambda) = -\langle R(\lambda)e_0, e_0 \rangle = \langle (\lambda I - J)^{-1} e_0, e_0 \rangle, \quad (2.9)$$

rasyonel fonksiyonu J matrisinin resolvent fonksiyonu diye adlandırılır. Burada $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gösterimi $\mathbb{C}^N$ de standart iç çarpımdır. Ayrıca bu fonksiyon J matrisinin Weyl-Titchmarsh fonksiyonu olarak da bilinir.

[11, Bölüm 5] $R(\lambda) = (J - \lambda I)^{-1}$ (J matrisinin resolventi) matrisinin $R_{nm}(\lambda)$ girişleri aşağıdaki formdadır:

$$R_{nm}(\lambda) = \begin{cases} P_n(\lambda)[Q_m(\lambda) + M(\lambda)P_m(\lambda)], & 0 \leq n \leq m \leq N-1, \\ P_m(\lambda)[Q_n(\lambda) + M(\lambda)P_n(\lambda)], & 0 \leq m \leq n \leq N-1, \end{cases} \quad (2.10)$$

Burada

$$M(\lambda) = -\frac{Q_N(\lambda)}{P_N(\lambda)} \quad (2.11)$$

Bundan dolayı (2.9) gereğince ve (2.3) ve (2.4) başlangıç koşulları kullanılırsa

$$\omega(\lambda) = -R_{00}(\lambda) = -M(\lambda) = \frac{Q_N(\lambda)}{P_N(\lambda)} \quad (2.12)$$

ifadesi elde edilir.

Aşağıda verilen ve iyi bilinen basit kullanılabilir lemma sık sık kullanılacaktır.

Lemma 2.4

$A(\lambda)$ ve $B(\lambda)$ polinomları kompleks katsayılı ve $\deg A < \deg B$ olsun. Farz edelim ki $z_1, \dots, z_N$ farklı kompleks sayılar ve b sıfır olmayan bir kompleks sayı olmak üzere $B(\lambda) = b(\lambda - z_1) \cdots (\lambda - z_N)$ olsun. $z_1, \dots, z_N$ den farklı bütün λ değerleri için

$$\frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\lambda - z_k}, \quad (2.13)$$

ifadesi belirli $a_1, \dots, a_N$ gibi kompleks sayıları için tek türlü yazılabilir. Denklemden verilen a_k sayıları

$$a_k = \lim_{\lambda \rightarrow z_k} (\lambda - z_k) \frac{A(\lambda)}{B(\lambda)} = \frac{A(z_k)}{B'(z_k)}, \quad k \in \{1, \dots, N\} \quad (2.14)$$

şeklindedir.

İspat:

Her bir $k \in \{1, \dots, N\}$ için $(N-1)$. dereceden

$$L_k(\lambda) = b \prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda - z_j) = \frac{B(\lambda)}{\lambda - z_k}, \quad (2.15)$$

polinomu ve

$$F(\lambda) = A(\lambda) - \sum_{k=1}^N a_k L_k(\lambda) \quad (2.16)$$

ifadesi tanımlansın. Burada a_k , (2.14) de tanımlandı. Açıkça $F(\lambda)$ bir polinom ve $\deg F \leq N-1$ dir. (Hatırlayacak olursak $\deg A < \deg B = N$ idi)

$$L_k(z_j) = 0 \quad j \neq k, \quad L_k(z_k) = B'(z_k) \neq 0, \quad (2.17)$$

ifadesinden her $j \in \{1, \dots, N\}$ için

$$F(z_j) = A(z_j) - \sum_{k=1}^N a_k L_k(z_j) = A(z_j) - a_j L_j(z_j) = A(z_j) - \frac{A(z_j)}{B'(z_j)} B'(z_j) = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. Böylece, derecesi $(N-1)$ den küçük veya eşit olan $F(\lambda)$ polinomunun

N farklı sıfırı vardır ki bunlar $z_1, \dots, z_N$ dir. O zaman $F(\lambda) \equiv 0$ ve

$$A(\lambda) = \sum_{k=1}^N a_k L_k(\lambda) = \sum_{k=1}^N a_k \frac{B(\lambda)}{\lambda - z_k} = B(\lambda) \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{\lambda - z_k} \quad (2.19)$$

elde edilir. Bu (2.13) ün ispatıdır. Belirtelim ki (2.13) ayrışımı, (2.14) ayrışımını sağlayan a_k için tek türdür.

$P_N(\lambda)$ polinomunun sıfırları $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ile gösterilsin. ($\lambda_1, \dots, \lambda_N$, (2.5) den J matrisinin reel ve farklı olan özdeğerlerine karşılık gelir):

$$P_N(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_N), \quad (2.20)$$

burada c sıfır olmayan bir sabittir. Bundan dolayı Lemma 2.4, (2.12) ye uygulanırsa $\omega(\lambda)$ resolvent fonksiyonu için aşağıdaki ayrışım elde edilir:

$$\omega(\lambda) = \sum_{k=1}^N \frac{\beta_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (2.21)$$

Burada

$$\beta_k = \frac{Q_N(\lambda_k)}{P'_N(\lambda_k)} \quad (2.22)$$

Ayrıca (2.6) ve (2.7) de λ yerine λ_k yazılırsa ve $P_N(\lambda_k) = 0$ olduğu hesaba katılırsa sırası ile aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$P_{N-1}(\lambda_k) Q_N(\lambda_k) = 1, \quad (2.23)$$

$$P_{N-1}(\lambda_k) P'_N(\lambda_k) = \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda_k), \quad (2.24)$$

(2.23) den $Q_N(\lambda_k) \neq 0$ dır. Bu nedenle $\beta_k \neq 0$ olur. (2.22), (2.23) ve (2.24) karşılaştırılırsa,

$$\beta_k = \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} P_n^2(\lambda_k) \right\}^{-1}, \quad (2.25)$$

olur, buradan da özellikle $\beta_k > 0$ ifadesi elde edilir.

$\{P_n(\lambda_k)\}_{n=0}^{N-1}$, J matrisinin λ_k özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğundan, (2.25) formülünden dolayı, β_k sayısı J matrisinin λ_k özdeğerine karşılık gelen normalleşmiş sayı adını alır.

Normalleşmiş sayılar ve özdeğerlerin birleşimi:

$$\{\lambda_k, \beta_k (k=1, \dots, N)\}, \quad (2.26)$$

(1.2) girişleri ile (1.1) formundaki J matrisinin spektral verisi diye adlandırılır.

Verilen bir Jacobi matrisin spektral verisinin belirlenmesi düz spektral problem olarak adlandırılır.

Böylece, spektral veri, özdeğerlerden ve bununla ilişkili olan özdeğerleri kullanarak kısmi kesirlerin oluşturduğu resolvent fonksiyonun (Weyl-Titchmarsh fonksiyonu) ayrışımından türetilen normalleşmiş sayılardan meydana gelir. J matrisinin $\omega(\lambda)$ resolvent fonksiyonu (2.12) tarafından inşa edilebilir. Resolvent fonksiyonunu hesaplamak için başka uygun formüle [11, Bölüm 5] bakılabilir:

$$\omega(\lambda) = -\frac{\det(J^{(1)} - \lambda I)}{\det(J - \lambda I)} \quad (2.27)$$

Burada $J^{(1)}$ matrisi, J matrisinin ilk satır ve ilk sütununun silinmesi ile elde edilir.

(2.27) de $\lambda \rightarrow \infty$ iken $\lambda \omega(\lambda) \rightarrow 1$. Bu nedenle (2.21) ifadesi λ ile çarpılıp $\lambda \rightarrow \infty$ limiti alınırsa

$$\sum_{k=1}^N \beta_k = 1 \quad (2.28)$$

bulunur.

Ters spektral problemin durumları aşağıdaki gibidir:

(i) J matrisinin (2.26) spektral verisi ile yeniden kurulmasının mümkün olup olmayacağını görmek. Eğer mümkünse prosedürü yeniden tanımlamak;

(ii) (1.2) girişleri ile (1.1) formundaki bazı J matrisleri için (2.26) koleksiyonunun spektral veri olması için gerek ve yeter şartları bulmak.

Bu problemin çözümü (Bknz [2, Bölüm 4.6] ve [11]) iyi bilinir ve sonucu oluşturur.

(2.26) koleksiyonu verilsin. Burada $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ reel ve farklı ve $\beta_1, \dots, \beta_N$ pozitif olmak üzere s_l sayıları tanımlansın:

$$s_l = \sum_{k=1}^N \beta_k \lambda_k^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

ve bu sayılar kullanılarak determinantlar oluşturulsun:

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.30)$$

Lemma 2.5

(2.30) ve (2.29) dan tanımlanan D_n determinantları için, $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ için $D_n > 0$ ve $n \geq N$ için $D_n = 0$ elde edilir.

İspat:

(2.30) da verilen D_n determinantına karşılık gelen $(n+1) \times (n+1)$ matrisi A ile gösterilsin. O halde $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$ keyfi reel sütun vektörü için,

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \sum_{j,m=0}^n s_{j+m} x_m x_j = \sum_{j,m=0}^n \left(\sum_{k=1}^N \beta_k \lambda_k^{j+m} \right) x_m x_j \\ &= \sum_{k=1}^N \beta_k \left(\sum_{j=0}^n x_j \lambda_k^j \right)^2 = \sum_{k=1}^N \beta_k [G(\lambda_k)]^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

elde edilir. Burada,

$$G(\lambda) = \sum_{j=0}^n x_j \lambda^j \quad (2.32)$$

Dahası $\langle Ax, x \rangle = 0$ yazılırsa,

$$G(\lambda_k) = 0, \quad k = 1, \dots, N \quad (2.33)$$

elde edilir.

Eğer $n \leq N-1$ ise $\deg G \leq N-1$ ve (2.33) yalnızca $G(\lambda) \equiv 0$ ile mümkündür. (Hatırlayacak olursak $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ farklıydı). Ancak o zaman $x_0 = x_1 = \dots = x_n = 0$ olur. Bundan dolayı, eğer $n \leq N-1$ ise sıfır olmayan reel $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)^T$ vektörleri için

$$\langle Ax, x \rangle > 0 \quad (2.34)$$

olur. Lineer cebirden iyi bilindiği gibi $\det A > 0$ dır. Böylece $n \leq N-1$ için $D_n > 0$ dır.

$n \geq N$ olmak üzere $D_n = 0$ ifadesinin ispatı için kompleks katsayılı λ ya bağlı bütün polinomların lineer uzayında Ω lineer fonksiyoneli şu şekilde tanımlansın:

Eğer $G(\lambda)$ bir polinom ise, G polinomunun elemanlarında Ω fonksiyonelinin değeri, $\langle \Omega, G(\lambda) \rangle$;

$$\langle \Omega, G(\lambda) \rangle = \sum_{k=1}^N \beta_k G(\lambda_k) \quad (2.35)$$

olur. $m \geq 0$ sabit bir tamsayı olmak üzere;

$$T(\lambda) = \lambda^m (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_N) = t_m \lambda^m + t_{m+1} \lambda^{m+1} + \dots + t_{m+N-1} \lambda^{m+N-1} + \lambda^{m+N} \quad (2.36)$$

olsun. O zaman (2.35) den dolayı,

$$\langle \Omega, \lambda^l T(\lambda) \rangle = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.37)$$

elde edilir. (2.37) ifadesi $l = 0, 1, 2, \dots, N+m$ için düşünülüp ve $T(\lambda)$ için (2.36) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\langle \Omega, \lambda^l \rangle = \sum_{k=1}^N \beta_k \lambda_k^l = s_l, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.38)$$

dikkate alınırsa,

$$t_m s_{l+m} + t_{m+1} s_{l+m+1} + \dots + t_{m+N-1} s_{l+m+N-1} + s_{l+m+N} = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, N+m \quad (2.39)$$

ifadesi elde edilir.

Bundan dolayı, bilinmeyenler $x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+N-1}, x_{m+N}$ olmak üzere lineer cebirsel denklemlerin homojen sisteminin aşıkâr olmayan bir çözümü, $(0, \dots, 0, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+N-1}, 1)$:

$$\begin{aligned} x_0 s_l + x_1 s_{l+1} + \dots + x_m s_{l+m} + x_{m+1} s_{l+m+1} + \dots + x_{m+N-1} s_{l+m+N-1} + x_{m+N} s_{l+m+N} &= 0, \\ l &= 0, 1, 2, \dots, N+m. \end{aligned} \quad (2.40)$$

şeklinde olur. Bundan dolayı bu sistemin determinantı, D_{N+m} ile denk ve sıfıra eşit olmalıdır.

Teorem 2.6

Sayıların $\{\lambda_k, \beta_k (k=1, \dots, N)\}$ şeklinde keyfi bir koleksiyonu verilmiş olsun. Bu koleksiyonun (1.2) girişleri ile (1.1) formundaki bir J Jacobi matrisi için spektral veri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki şartın sağlanmasıdır:

(i) $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sayıları reel ve farklı

(ii) $\beta_1, \dots, \beta_N$ sayıları pozitif ve $\beta_1 + \dots + \beta_N = 1$

(i) ve (ii) şartları altında $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ için $D_n > 0$ ve $\{\lambda_k, \beta_k (k=1, \dots, N)\}$ koleksiyonunun spektral veri olması için J matrisinin a_n ve b_n girişleri aşağıdaki formüllerle elde edilir:

$$a_n = \frac{\pm \sqrt{D_{n-1} D_{n+1}}}{D_n}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-2\}, \quad D_{-1} = 1, \quad (2.41)$$

$$b_n = \frac{\Delta_n}{D_n} - \frac{\Delta_{n-1}}{D_{n-1}}, \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\}, \quad \Delta_{-1} = 0, \quad \Delta_0 = s_1, \quad (2.42)$$

burada D_n , (2.29) ve (2.30) da tanımlandı. Δ_n , D_n determinantının son sütununda bulunan elemanlar yerine $s_{n+1}, s_{n+2}, \dots, s_{2n+1}$ elemanları yazıldığında elde edilen determinanttır.

Ters problemin yukarıdaki çözümünden görülür ki (1.1) matrisi spektral veriden tek türlü olarak inşa edilmemiştir. Bu ise aslında a_n ifadesinin (2.41) den işarete bağlı tek türlü olarak belirli olduğu gerçeği ile bağlantılıdır. Bu ters problemin tek çözümünün olduğundan emin olmak için $+$ ve $-$ işaretlerinin toplamsal bir dizisinin olduğunu belirtmek zorundayız. Yani, $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-2}\}$ sonlu dizisi verilmiş olsun, burada her $n \in \{0, 1, \dots, N-2\}$ için σ_n ifadesi $+$ veya $-$ olur. 2^{N-1} farklı dizi vardır. Şimdi $n \in \{0, 1, \dots, N-2\}$ için (2.41) formundan a_n nin tek türlü olduğuna karar vermek için, karekökten çıkarıldığı zaman σ_n nin işareti seçilebilir. Bu yol ile aynı spektral verilere sahip, tam olarak 2^{N-1} farklı Jacobi matris elde edilir.

Ters problem $+$ ve $-$ işaretlerinin $\{\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{N-2}\}$ dizisinden ve spektral veriden tek türlü çözüldü.

Böylece spektral veri ile ilgili ters problem, yeniden elde edilen Jacobi matrisinin köşegen dışı olan elemanlarının işaretleri ile tek türlü çözüldü. Özellikle ters problem $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ girişleri ile tek olarak çözülebilir.

BÖLÜM 3

İKİ SPEKTRUM İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEM

J , (1.2) girişleri ile (1.1) formundaki $N \times N$ tipinde bir Jacobi matris olsun. (1.3) de verilen kesilmiş Jacobi matris J_1 olarak tanımlansın. J ve J_1 matrislerinin özdeğerleri sırası ile $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$ ve $\mu_1 < \dots < \mu_{N-1}$ şeklinde gösterilsin. $\{\lambda_k (k=1, \dots, N)\}$ ve $\{\mu_k (k=1, \dots, N-1)\}$ koleksiyonları J matrisinin iki spektrumu diye adlandırılır.

İki spektrum için ters problem, J matrisinin iki spektrumu tarafından yeniden inşa edilmesiyle meydana gelir.

İki spektrum için ters problem, bölüm 2 de çözülen özdeğerler ve normalleşmiş sayılar için ters probleme indirgenecektir.

Öncelikle, J Jacobi matrisinin iki spektrumunun bazı gerekli özelliklerini verelim.

$P_n(\lambda)$ ve $Q_n(\lambda)$ polinomları J matrisinin birinci ve ikinci tip polinomları olsun. (2.5) ifadesinden

$$\det(J - \lambda I) = (-1)^N a_0 a_1 \dots a_{N-2} P_N(\lambda), \quad (3.1)$$

$$\det(J_1 - \lambda I) = (-1)^{N-1} a_0 a_1 \dots a_{N-2} P_{N-1}(\lambda) \quad (3.2)$$

elde edilir. Aslında bu $a_{N-1} = 1$ ifadesinin kullanılmasından elde edildi. Bundan dolayı J ve J_1 matrislerinin sırası ile $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ ve $\mu_1, \dots, \mu_{N-1}$ özdeğerleri $P_N(\lambda)$ ve $P_{N-1}(\lambda)$ polinomlarının sıfırları ile çakışır.

(2.6) ifadesinin her iki tarafı $P_{N-1}(\lambda)P_N(\lambda)$ ile bölünürse;

$$\frac{Q_N(\lambda)}{P_N(\lambda)} - \frac{Q_{N-1}(\lambda)}{P_{N-1}(\lambda)} = \frac{1}{P_{N-1}(\lambda)P_N(\lambda)} \quad (3.3)$$

ifadesi elde edilir. Bu bölme işlemi sonucunda, (2.12) ifadesinden bilinen aşağıdaki $\omega(\lambda)$ resolvent fonksiyonu elde edilir.

$$\omega(\lambda) = \frac{Q_{N-1}(\lambda)}{P_{N-1}(\lambda)} + \frac{1}{P_{N-1}(\lambda)P_N(\lambda)} \quad (3.4)$$

Lemma 3.1

J ve J_1 matrislerinin ortak özdeğeri yoktur. Yani; her k, j için $\lambda_k \neq \mu_j$ dir.

İspat:

J ve J_1 matrislerinin ortak bir özdeğerinin λ olduğunu varsayalım. O zaman (3.1) ve (3.2) ifadelerinden $P_N(\lambda) = P_{N-1}(\lambda) = 0$ elde edilir. Ancak bu (2.6) ifadesinden dolayı imkansızdır.

Lemma 3.2

$$\lambda_N + \sum_{k=1}^{N-1} (\lambda_k - \mu_k) = b_{N-1} \quad (3.5)$$

(iz formülü) eşitliği sağlanır.

İspat:

Herhangi bir $A = [a_{jk}]_{j,k=1}^N$ matrisi için, A matrisinin spektral izi, A nın matris izine karşılık gelir. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\nu_1, \dots, \nu_N$ ise,

$$\sum_{k=1}^N \nu_k = \sum_{k=1}^N a_{kk} \quad (3.6)$$

elde edilir. Bundan dolayı aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = b_0 + b_1 + \dots + b_{N-2} + b_{N-1}, \quad \sum_{k=1}^{N-1} \mu_k = b_0 + b_1 + \dots + b_{N-2} \quad (3.7)$$

Böylece son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa (3.5) ifadesi elde edilir.

Lemma 3.3

J ve J_1 matrislerinin özdeğerleri iç içedir:

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 \cdots < \lambda_{N-1} < \mu_{N-1} < \lambda_N. \quad (3.8)$$

İspat:

$\psi(\lambda)$, J matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen noktalar ve J_1 matrisinin özdeğerleri ile çakışan sıfırların bir rasyonel fonksiyonu olmak üzere

$$\psi(\lambda) = \frac{P_{N-1}(\lambda)}{P_N(\lambda)} \quad (3.9)$$

şeklinde alınsın. Şimdi Lemma 2.4 deki ifade $\psi(\lambda)$ rasyonel fonksiyonuna uygulanırsa aşağıdaki form elde edilir:

$$\psi(\lambda) = \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad (3.10)$$

Burada

$$\gamma_k = \frac{P_{N-1}(\lambda_k)}{P'_N(\lambda_k)} \quad (3.11)$$

dır.

Sonra, (2.24) den $P_{N-1}(\lambda_k)P'_N(\lambda_k) > 0$ dır, yani $P_{N-1}(\lambda_k)$ ve $P'_N(\lambda_k)$ aynı işarete sahiptirler. O halde (3.11) den $\gamma_k > 0$ ($k=1, \dots, N$) elde edilir.

Eğer (3.10) ifadesinin türevi alınırsa;

$$\psi'(\lambda) = - \sum_{k=1}^N \frac{\gamma_k}{(\lambda - \lambda_k)^2} \quad (3.12)$$

elde edilir.

Daha sonra (3.12) ifadesinden λ nın reel ve farklı değerleri için $\psi'(\lambda) < 0$ dır. Dolayısıyla $\psi(\lambda)$, $(-\infty, \lambda_1)$, (λ_1, λ_2) , ..., $(\lambda_{N-1}, \lambda_N)$, (λ_N, ∞) aralıklarında kesin azalan sürekli bir fonksiyondur. Bunun yanı sıra, (3.10) ifadesinden aşığıdaki ifade elde edilir:

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \psi(\lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k^-} \psi(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_k^+} \psi(\lambda) = \infty \quad (3.13)$$

Sonuç olarak, $\psi(\lambda)$ fonksiyonunun $(-\infty, \lambda_1)$ ve (λ_N, ∞) aralıklarında sıfırı yoktur. Tam olarak $(\lambda_1, \lambda_2), \dots, (\lambda_{N-1}, \lambda_N)$ her bir aralıkta bir sıfırı vardır. $\psi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları, (3.9) dan J_1 matrisinin özdeğerlerine karşılık geldiğinden ispat tamamlanmış olur.

Aşığıdaki lemma iki spektrum açısından $\beta_1, \dots, \beta_N$ normalleşmiş sayılarını hesaplamak için bir formül verir.

Lemma 3.4

Her $k \in \{1, \dots, N\}$ için,

$$\beta_k = \frac{a}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_k)} \quad (3.14)$$

formülü sağlanır. Burada,

$$\frac{1}{a} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq m}^N (\lambda_j - \lambda_m) \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_m)} \quad (3.15)$$

dır.

İspat:

(2.21) ifadesini (3.4) ifadesinin sol tarafında yerine yazılırsa;

$$\sum_{m=1}^N \frac{\beta_m}{\lambda - \lambda_m} = \frac{Q_{N-1}(\lambda)}{P_{N-1}(\lambda)} + \frac{1}{P_{N-1}(\lambda) P_N(\lambda)} \quad (3.16)$$

formu elde edilir.

Son eşitliğin her iki tarafı $(\lambda - \lambda_k)$ ile çarpılıp ve sonra $\lambda \rightarrow \lambda_k$ limiti alınırsa (2.23) ve (2.24) ifadelerinden de bilindiği üzere $P_N(\lambda_k) = 0$, $P'_N(\lambda_k) \neq 0$, $P_{N-1}(\lambda_k) \neq 0$ ifadeleri hesaba katılırsa o halde;

$$\beta_k = \frac{1}{P'_N(\lambda_k) P_{N-1}(\lambda_k)} \quad (3.17)$$

ifadesi elde edilir. Daha sonra (3.1) ve (3.2) den dolayı

$$\begin{aligned} (-1)^N a_0 a_1 \dots a_{N-2} P_N(\lambda) &= \prod_{j=1}^N (\lambda_j - \lambda), \\ (-1)^{N-1} a_0 a_1 \dots a_{N-2} P_{N-1}(\lambda) &= \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda) \end{aligned} \quad (3.18)$$

ifadeleri elde edilir. Elde edilen bu ifadeler (3.17) ifadesinin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$\beta_k = \frac{a}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_k)}, \quad (3.19)$$

formu elde edilir. Burada,

$$a = (a_0 a_1 \dots a_{N-2})^2 \quad (3.20)$$

(3.19) da k nın yerine m yazılırsa ve sonra $m = 1, \dots, N$ için toplama yapılırsa ve (2.28) de dikkate alınırsa (3.15) ifadesi elde edilir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Teorem 3.5 (Teklik sonucu)

$$a_n > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad (3.21)$$

girişleri ile (1.1) formundaki J Jacobi matrisinin $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ iki spektrumu J matrisini tek türlü belirler.

İspat:

J matrisinin $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ iki spektrumu verilsin. (3.14) ve (3.15) ifadelerinden J matrisinin $\{\beta_k(k=1,...,N)\}$ normalleşmiş sayıları tek türlü belirlenir. J matrisinin $\{\lambda_k, \beta_k(k=1,...,N)\}$ özdeğerlerinin ve normalleşmiş sayılarının koleksiyonu (3.21) girişleri ile tek türlü belirlendiğinden ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem iki spektruma göre ters problemi çözer. Bu ispat, iki spektrumdan Jacobi matrisin yapısı için etkin bir yöntem içerir.

Teorem 3.6

$\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ reel sayılarının verilen iki koleksiyonu (1.2) girişleri ile sırasıyla (1.1) ve (1.3) formundaki J ve J_1 matrislerinin spektrumları olabilmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmasıdır:

$$\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \lambda_3 \dots < \lambda_{N-1} < \mu_{N-1} < \lambda_N \quad (3.22)$$

İspat:

(3.22) ifadesinin gerek şartı Lemma 3.3 de ispatlandı.

($\Leftarrow$) (3.22) eşitsizliğini sağlayan $\{\lambda_k\}_{k=1}^N$ ve $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ reel sayıların bu iki koleksiyonu verilsin. (3.14) ve (3.15) ifadelerinden bu verilerle $\beta_k(k=1,...,N)$ normalleşmiş sayıları inşa edildi. (3.22) den aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_k) > 0, \quad k=1,...,N \quad (3.23)$$

Bundan dolayı, (3.14) ifadesinin sağ tarafındaki ifade pozitif ve dolayısı ile $\beta_k > 0$ ($k=1,...,N$) olur. Sonra (3.14) ve (3.15) ifadelerinden doğrudan $\beta_1 + \dots + \beta_N = 1$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\{\lambda_k, \beta_k(k=1,...,N)\}$ koleksiyonu Teorem 3.3 ün şartlarını sağlar. Dolayısıyla (1.2) girişleri ile (1.1) formundaki bir J matrisi vardır. Öyleki, J Jacobi matrisi için $\beta_k(k=1,...,N)$, normalleşmiş sayılara ve $\lambda_k(k=1,...,N)$, özdeğerlere

karşılık gelir. J matrisinin sahip olduğu, (1.3), J_1 matrisi inşa edilir. $\{\mu_k\}_{k=1}^{N-1}$ nin inşa edilen J_1 matrisinin spektrumu olduğunu göstermek kaldı. J_1 matrisinin özdeğerleri $\tilde{\mu}_1 < \dots < \tilde{\mu}_{N-1}$ ile gösterilsin. Lemma 3.3 den,

$$\lambda_1 < \tilde{\mu}_1 < \lambda_2 < \tilde{\mu}_2 < \dots < \lambda_{N-1} < \tilde{\mu}_{N-1} < \lambda_N \quad (3.24)$$

yazılabilir. $\tilde{\mu}_k = \mu_k$ ($k=1, \dots, N$) olduğu gösterilmelidir. Düz spektral problem den (Lemma 3.4):

$$\beta_k = \frac{\tilde{a}}{\prod_{j=1, j \neq k}^N (\lambda_j - \lambda_k) \prod_{j=1}^{N-1} (\tilde{\mu}_j - \lambda_k)}, \quad (3.25)$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{1}{\tilde{a}} = \sum_{m=1}^N \frac{1}{\prod_{j=1, j \neq m}^N (\lambda_j - \lambda_m) \prod_{j=1}^{N-1} (\tilde{\mu}_j - \lambda_m)} \quad (3.26)$$

dır. Diğer taraftan β_k nin inşasından (3.14) ve (3.15) elde edilir. (3.25) ve (3.14) ifadelerinin sağ tarafının denkleğinden,

$$\tilde{a} \prod_{j=1}^{N-1} (\mu_j - \lambda_k) = a \prod_{j=1}^{N-1} (\tilde{\mu}_j - \lambda_k), \quad k=1, \dots, N \quad (3.27)$$

elde edilir. Bunun anlamı, derecesi $\leq N-1$ olan

$$\tilde{a} \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \mu_j) - a \prod_{j=1}^{N-1} (\lambda - \tilde{\mu}_j), \quad (3.28)$$

polinomu N farklı $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sifira sahiptir. Bu polinom sifira özdeştir. Dolayısıyla $\tilde{a} = a$ ve $\tilde{\mu}_j = \mu_j$ ($j=1, \dots, N$) olur. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

- [1] G. Sh. Guseinov, (2012). On a discrete inverse problem for two spectra, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 1-14, Article ID 956407.
- [2] F. V. Atkinson, (1964). *Discrete and Continuous Boundary Problems*, vol. 8 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New York, NY, USA.
- [3] O. H. Hald, (1976). Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 14, no. 1, pp. 63-85.
- [4] L. J. Gray and D. G. Wilson, (1976). Construction of a Jacobi matrix from spectral data, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 14, no. 2, pp. 131-134.
- [5] H. Hochstadt, (1967). On some inverse problems in matrix theory, *Archiv der Mathematik*, vol. 18, pp. 201-207.
- [6] H. Hochstadt, (1974). On the construction of a Jacobi matrix from spectral data, *Linear Algebra and its Applications*, vol. 8, pp. 435-446.
- [7] L. Fu and H. Hochstadt, (1974). Inverse theorems for Jacobi matrices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 47, pp. 162-168.
- [8] G. S. Guseinov, (1978). The determination of the infinite Jacobi matrix from two spectra, *Matematicheskie Zametki*, vol. 23, no. 5, pp. 709-720, (Russian).
- [9] G. S. Guseinov, (1978). The determination of the infinite Jacobi matrix from two spectra, *Mathematical Notes*, vol. 23, no. 5, pp. 391-398.
- [10] G. Sh. Guseinov, (2011). Construction of a complex Jacobi matrix from two-spectra, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, vol. 40, no. 2, pp. 297-303.
- [11] G. Sh. Guseinov, (2009). Inverse spectral problems for tridiagonal N by N complex Hamiltonians, *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, vol. 5, article 018, 28 pages.