

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

**LİNEER FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
MORGAN-VOYCE POLİNOM ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI**

Bengü TÜRKYILMAZ

**Danışman
Prof. Dr. Mehmet SEZER**



MANİSA-2016

**Bengü
TÜRKYILMAZ**

**LİNEER FONKSİYONEL DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN MORGAN-VOYCE
POLİNOM ÇÖZÜMLERİ VE UYGULAMALARI**

2016

TEZ ONAYI

Bengü TÜRKYILMAZ tarafından hazırlanan " **Lineer Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Morgan-Voyce Polinom mleri ve Uygulamaları** " adlı tez çalışması 18 /02 /2016 tarihinde aşığıdaki jüri yeleri önünde Celal Bayar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak başarı ile savunulmuştur.

Danışman	Prof. Dr. Mehmet SEZER Celal Bayar Üniversitesi	
-----------------	---	-------

Jüri yesi	Doç. Dr. Salih YALÇINBAŞ Celal Bayar Üniversitesi	
-------------------	---	-------

Jüri yesi	Doç. Dr. Mustafa ÖZEL Dokuz Eylül Üniversitesi	
-------------------	--	-------

TAAHHÜTNAME

Bu tezin Celal Bayar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde, akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilerek tezde yer aldığını beyan ederim.

Bengü TÜRKYILMAZ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
İÇİNDEKİLER	I
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	II
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	III
TABLO DİZİNİ	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT	VII
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
2.1. Morgan-Voyce Polinomlarının Tanımı ve Rekürans Bağlılıları.....	3
2.2.Morgan-Voyce Polinomlarının Toplam Gösterimleri.....	3
2.3.Morgan-Voyce Polinomlarının Açık Gösterimleri.....	3
2.4.Morgan-Voyce Polinomları Arasındaki Bağlılılar.....	4
2.5.Üreten Fonksiyonlar.....	4
2.6.Morgan-Voyce Polinomlarının Grafikleri.....	5
2.7.Türev Bağlılıları.....	5
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	6
3.1.Diferansiyel-Fark Denklemleri için Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi	
3.1.1.Problemin Tanıtılması.....	6
3.1.2. Temel Matris Bağlılıları.....	6
3.1.3. Çözüm Yöntemi.....	8
3.1.4. Çözümün Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analizi.....	11
3.2.Genelleştirilmiş Gecikmeli Diferansiyel Denklemler için Morgan-Voyce	
Sıralama Yöntemi.....	12
3.2.1. Problemin Tanıtılması.....	12
3.2.2.Temel Matris Bağlılıları ve Çözüm Yöntemi.....	12
3.2.3. Çözümün Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analizi.....	16
4.ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	18
5.SONUÇ VE ÖNERİLER.....	32
KAYNAKLAR.....	33
ÖZGEÇMİŞ	36

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$y_N(x)$	Yaklaşık Çözüm
$y(x)$	Tam Çözüm
$X(x)$	Standart Taban Matrisi
x_i	Sıralama Noktaları
a_n	Morgan-Voyce Polinomlarının Katsayıları
$B(x)$	Morgan-Voyce Taban Matrisi
$b_n(x)$	Birinci Tip Morgan-Voyce Polinomu
$B_n(x)$	İkinci Tip Morgan-Voyce Polinomu
$D(\alpha, \beta)$	Geçiş Matrisi
W	Temel Denkleme ait Katsayılar Matrisi
$\tilde{U}$	Koşullar İçin Artırılmış Matris
$\tilde{W}$	Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
$\tilde{G}$	Sağ Taraftaki Koşulları Kullanılmış Yeni Artırılmış Matris
A	Bilinmeyen Morgan-Voyce Katsayılar Matrisi
T	Standart Tabana Göre Türev Geçiş Matrisi
$R_N(x)$	Rezidüel Hata Fonksiyonu
N	Kesme Sınırı

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 2.1 Morgan-Voyce Polinomlarının Grafikleri.....	5
Şekil 4.1. (a) Örnek 4.5'in farklı N değerleri için nümerik ve tam çözümleri ...	30
Şekil 4.1. (b) Örnek 4.5'in çeşitli E_N hata fonksiyonları.....	30

TABLO DİZİNİ

	Sayfa
Tablo 4.1. Örnek 4.4'ün farklı N değerleri için tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ve bunların E_N mutlak hataları.....	29
Tablo 4.2. Örnek 4.5'in farklı N değerleri için tam ve yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması ve bunların mutlak hataları E_N	31

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bana destek olan, bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet SEZER' e, bilgi ve tecrübesi ile lisansüstü öğrenim hayatımın her aşamasında yardımcı olan, tecrübeleri ile beni aydınlatan ve desteğini hiç eksik etmeyen, kendisini tanımaktan mutluluk duyduğum sevgili arkadaşım Sayın Burcu GÜRBÜZ' e, öğrenim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen ve hep yanımda olan eşim Tervik TÜRKYILMAZ' a yürekten teşekkür ederim.

Bengü TÜRKYILMAZ

MANİSA, 2016

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Lineer Fonksiyonel Diferansiyel Denklemlerin Morgan-Voyce Polinom Çözümleri ve Uygulamaları

Bengü TÜRKYILMAZ

Celal Bayar Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet SEZER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan diferansiyel-fark denklemleri ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri verilmiş ve çözülecek problemler tanıtılmıştır.

İkinci bölümde Morgan-Voyce polinomlarının temel özellikleri açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, yüksek mertebeden diferansiyel-fark ve gecikmeli diferansiyel denklemlerin Morgan-Voyce polinomları cinsinden çözümlerini bulmak için, rezidüel hata analizi ile beraber “Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi” sunulmuştur.

Dördüncü bölümde, Morgan-Voyce sıralama yönteminin uygulanabilirliğini ve etkinliğini göstermek için, yöntemimizi hata analizi ile birlikte beş örneğe uyguladık. Son bölümde de elde edilen sonuçları tartışırız.

Anahtar Kelimeler: Morgan-Voyce polinomları, diferansiyel-fark denklemi, Gecikmeli diferansiyel denklem, Sıralama ve matris yöntemleri, Sıralama noktaları, Rezidüel hata analizi.

2016, 36 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

Morgan –Voyce Polynomial Solutions of Functional Differential Equations and Their Applications

Bengü TÜRKYILMAZ

**Celal Bayar University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet SEZER

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the numerical solution methods of differential-difference and delay differential equations, which belong to a class of functional differential equations, are given and the problems to be solved in study are introduced.

In the second chapter, the fundamental properties of Morgan-Voyce polynomials are explained. In the third chapter, to find the solutions of differential-difference and delay differential equations in terms of Morgan-Voyce polynomials, the "Morgan-Voyce Collocation Method" along with residual error analysis is presented.

In the fourth, we apply our method to five examples along with residual error analysis. In the last section, we discuss the obtained results.

Keywords: Morgan-Voyce polynomials, Differential-difference equation, Delay differential equation, Collocation and matrix methods, Collocation points, Residual error analysis.

2016, 36 pages

1.GİRİŞ

Fonksiyonel diferansiyel denklemlerin bir sınıfı olan diferansiyel-fark denklemler [1–10], bazı fiziksel olayların modelleri olarak kullanılmaktadır. Bir matematiksel model, bir fiziksel sistem için geliştirildiği zaman genellikle uzay ve zaman gibi değişkenlerin tümünün sürekli olduğu kabul edilir. Bu varsayım, sistemin reel değişkenlerinin yaklaşımına yol gösterir. Bununla birlikte fiziksel sistemlerin bazıları için, bu sürekli değişken varsayımları yapılamayabilir. Bu durumda diferansiyel-fark denklemleri bilimin çeşitli branşlarında görülen modelleme problemlerinde önemli rol oynarlar: Mekanik mühendisliği, yoğun madde fiziği, biyofizik, matematiksel istatistik ve kontrol teorisi. Son yıllarda diferansiyel-fark denklemleri üzerine yapılan çalışmalar çok hızlı ve yoğun bir şekilde gelişmektedir. Lineer diferansiyel-fark denklemlerinin birçok yazar tarafından ele alındığı ve biyoloji, fizik ve mühendislikteki problemleri modellendirmek için kullanılmakta olduğu iyi bilinmektedir. Bu tip denklemlerin çözümü ile ilgili birçok farklı yöntem verilmiştir: Ters saçılım yöntemi [1], Hirota'nın bilineer form yöntemi [2], Tanh-hiperbolik yöntemi [3], Jacobian eliptik fonksiyon yöntemi [4], Nümerik teknikler [5,6], Taylor polinom yöntemi [11,12] ve Chebyshev yöntemleri [13,15].

Diğer yandan, diferansiyel-fark denklemlerinin genel hali olan yüksek mertebeden karışık argümentli ve değişken katsayılı gecikmeli diferansiyel denklemler de dinamik sistemlerin modellenmesi ile ilgili alanlarda önemli rol oynarlar: biyoloji, ekonomi, elektrodinamik, potansiyel teorisi, elektrostatik, astronomi, kimya, mekanik, fizik, vb. [21–29]. Bu denklemlerin çoğunun analitik çözümleri yoktur ve bu yüzden yaklaşık çözümlerini elde etmek için nümerik yöntemlere gerek duyulur. Örneğin, bazı fonksiyonel denklemler, One-Leg θ yöntemleri [22], Spline fonksiyon yöntemi [25], Lagrange-Chebyshev interpolasyon yöntemi [26], Optimal residual yöntemi [27], Legendre-Gauss collocation yöntemi [28] ve Chebyshev operational matris yöntemi [30] gibi nümerik yöntemler kullanılarak çözülebilir.

Son yıllarda lineer ve nonlinear diferansiyel, integral, integro-diferansiyel, integro-diferansiyel fark ve pantograph denklemlerini çözmek için bazı matris-yöntemleri, Sezer ve arkadaşları [11–18] tarafından birçok makalede sunulmuştur.

Bu çalışmada, bahsedilen çalışmaların temel fikirleri gözönüne alınarak, fonksiyonel argümentli değişken katsayılı yüksek mertebeden

$$\sum_{k=0}^m f_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^J p_j(x) y^{(j)}(\alpha x + \beta) = g(x), J \leq m \quad (1.1)$$

diferansiyel-fark denkleminin ve

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} Q_{rs}(x) y^{(r)}(\alpha_{rs} x + \beta_{rs}) = g(x) \quad (1.2)$$

genelleştirilmiş gecikmeli diferansiyel denkleminin [1–10]

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk} y^{(k)}(a) + b_{lk} y^{(k)}(b)) = \lambda_l, l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (1.3)$$

karışık koşulları altında, Morgan-Voyce polinomları [16–20] cinsinden yaklaşık çözümlerini bulmak için bir “**Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi**” geliştirilmiştir. Burada $f_k(x)$, $p_j(x)$ ve $g(x)$, $a \leq x \leq b$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlardır; $\alpha, \beta, a_{lk}, b_{lk}$ ve λ_l uygun sabitlerdir; $y(x)$ tayin edilecek olan bilinmeyen fonksiyondur.

Bu çalışmanın amacı (1.1)–(1.3) ve (1.2)-(1.3) problemlerinin çözümünü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), N \geq m, a \leq x \leq b \quad (1.4)$$

ile tanımlı kesilmiş Morgan-Voyce serisi olarak elde etmektir. Burada $a_n, n = 0, 1, \dots, N$ bilinmeyen katsayılarıdır; $B_n(x), n = 0, 1, \dots, N$ Morgan-Voyce polinomlarıdır [16–20].

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Morgan-Voyce Polinomlarının Tanımı ve Rekürans Bağlılıları

A.M. Morgan-Voyce, elektrik basamak şebekelerinde $\{b_n(x)\}$ ve $\{B_n(x)\}$ gibi “birinci ve ikinci tip Morgan-Voyce polinomları” adlı iki tip polinom kümesi tanımladı. Bu polinomlar, başlangıç koşulları $b_0(x)=1$, $b_1(x)=x+1$ ve $B_0(x)=1$, $B_1(x)=x+2$ olmak üzere aşağıdaki rekürans bağıntılarla tanımlanır [19–23]:

$$b_n = (x+2)b_{n-1}(x) - b_{n-2}(x), n \geq 2$$

ve (2.1)

$$B_n(x) = (x+2)B_{n-1}(x) - B_{n-2}(x), n \geq 2.$$

Aynı zamanda, $b_n(x)$ ve $B_n(x)$ polinomları, sırasıyla,

$$x(x+4)b_n''(x) + 2(x+1)b_n'(x) - n(n+1)b_n(x) = 0$$

ve

$$x(x+4)B_n''(x) + 3(x+2)B_n'(x) - n(n+2)B_n(x) = 0$$

diferansiyel denklemlerinin çözümüdürler.

2.2. Morgan-Voyce Polinomlarının Toplam Gösterimleri

$$b_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{n-j} x^j, B_n(x) = \sum_{j=0}^n \binom{n+j+1}{n-j} x^j \quad (2.2)$$

2.3.Morgan-Voyce Polinomlarının Açık Gösterimleri

$$b_0(x) = 1,$$

$$b_1(x) = x+1,$$

$$b_2(x) = x^2 + 3x + 1,$$

$$b_3(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 1, \dots$$

ve

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x+2$$

$$B_2(x) = x^2 + 4x + 3$$

$$B_3(x) = x^3 + 6x^2 + 10x + 4$$

$$B_4(x) = x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5$$

$$B_5(x) = x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6$$

$$B_6(x) = x^6 + 12x^5 + 55x^4 + 120x^3 + 126x^2 + 56x + 7$$

$$B_7(x) = x^7 + 14x^6 + 78x^5 + 110x^4 + 330x^3 + 252x^2 + 84x + 8$$

$$B_8(x) = x^8 + 16x^7 + 105x^6 + 364x^5 + 715x^4 + 792x^3 + 462x^2 + 120x + 9 \dots$$

2.4. Morgan-Voyce Polinomları Arasındaki Bağlılıklar

$$b_n(x) = B_n(x) - B_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$xB_n(x) = b_{n+1}(x) - b_n(x), n \geq 0$$

$$B_n(x) = (x+1)B_{n-1}(x) + b_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$b_n(x) = xB_{n-1}(x) + b_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$xB_n(x) = (x+1)b_n(x) - b_{n-1}(x), n \geq 1$$

$$B_{n+1}(x) - B_{n-1}(x) = b_{n+1}(x) + b_n(x)$$

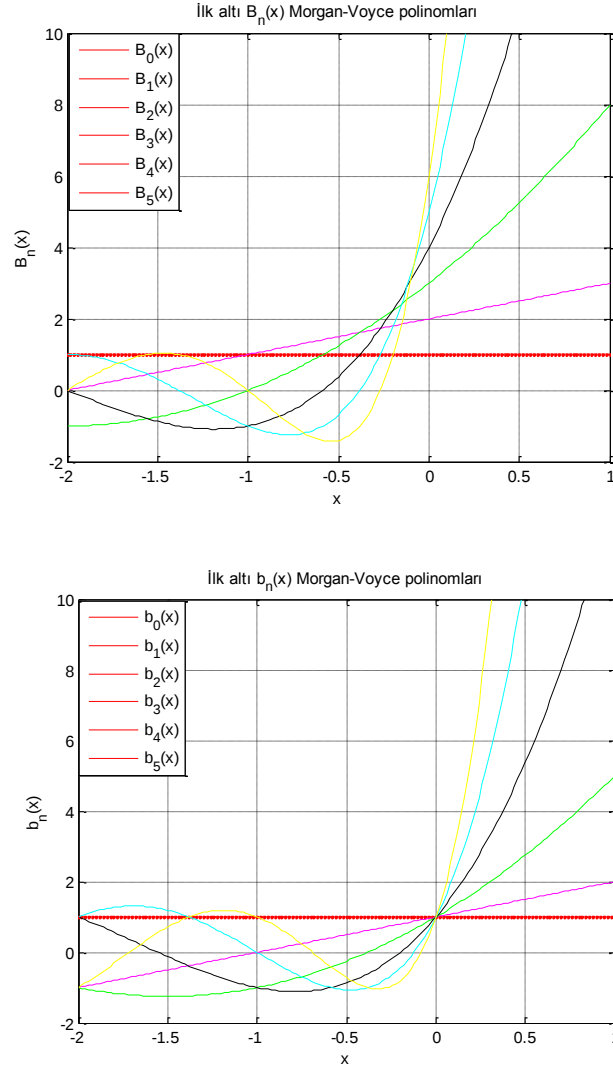
$$b_{n+1}(x) - b_{n-1}(x) = x(B_n(x) + B_{n-1}(x))$$

2.5. Üreten Fonksiyonlar

$$B(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) t^n = \left[1 - (xt + 2t - t^2) \right]^{-1}$$

$$b(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x) t^n = (1-t)B(x, t)$$

2.6.Morgan-Voyce Polinomlarının Grafikleri



Şekil 2.1 Morgan-Voyce Polinomlarının Grafikleri

2.7.Türev Bağlılıkları

$$B'_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (n-2k)B_{n-2k-1}(x)$$

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x) + B'_{n-2}(x)$$

$$b'_n(x) + b'_{n-1}(x) = n \sum_{k=1}^n b_{n-k}(x)$$

$$B'_n(x) = \sum_{k=1}^n b'_k(x)$$

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1.Diferansiyel-Fark Denklemleri için Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi

3.1.1.Problemin Tanıtılması

Bu kesimde, (1.1) ile tanımlanan yüksek mertebeden fonksiyonel argümentli ve değişken katsayılı

$$\sum_{k=0}^m f_k(x)y^{(k)}(x) + \sum_{j=0}^J p_j(x)y^{(j)}(\alpha x + \beta) = g(x), J \leq m \quad (3.1)$$

lineer diferansiyel-fark denkleminin, (1.3) ile tanımlanan

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk}y^{(k)}(a) + b_{lk}y^{(k)}(b)) = \lambda_l, l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

karışık koşulları altında, (1.4)' de verilen

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), N \geq m, a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

kesilmiş Morgan-Voyce serisi formunda yaklaşık çözümlerini araştırırız.

NOT: Bu çalışmada sadece ikinci tip $\{B_n(x)\}$ Morgan-Voyce polinomlarını kullanacağız.

3.1.2. Temel Matris Bağlıları

İlk önce (3.1) denkleminin (3.3) kesilmiş Morgan-Voyce serisi ile tanımlı $y(x)$ çözümünü ele alırız ve bunu $n=0,1,2,\dots,N$ için

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (3.4)$$

matris formuna çeviririz. Burada

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \ B_1(x) \ \dots \ B_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$$

şeklindedir. Ayrıca (2.1) veya (2.2)' de verilen bağıntıları kullanarak $\mathbf{B}(x)$ matrisi

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{R}^T \quad (3.5)$$

olarak elde edilir; burada $\mathbf{X}(x)$ ve $\mathbf{R}$ matrisleri

$$\mathbf{X}(x) = [x^0 \ x^1 \ x^2 \ \dots \ x^N]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \begin{pmatrix} N+1 \\ N \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} N+2 \\ N-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} N+3 \\ N-2 \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} 2N+1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Aynı zamanda, (3.5)'den $\mathbf{B}(x)$ matrisi ve $\mathbf{B}'(x)$ türev matrisi arasındaki bağıntının

$$\mathbf{B}'(x) = \mathbf{X}'(x)\mathbf{R}^T = \mathbf{X}(x)\mathbf{T}^T\mathbf{R}^T$$

ve tekrarlama işlemi yapılarak

$$\mathbf{B}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T, k = 0, 1, 2, \dots, m \quad (3.6)$$

olduğu açıkça görülür; burada

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (N-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}^0 = \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ \cdots \ 1] \text{ (birim matris)}$$

şeklindedir. Ayrıca, (3.4), (3.5) ve (3.6) matris bağıntılarından

$$y(x) \cong y_N(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} = \mathbf{X}(x)\mathbf{R}^T\mathbf{A}$$

ve

$$\begin{aligned}
y^{(k)}(x) &\equiv y_N^{(k)}(x) = \mathbf{B}^{(k)}(x) \mathbf{A} = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{R}^T \mathbf{A} \\
&= \mathbf{X}(x) (\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T \mathbf{A}, \quad k=0,1,2,\dots
\end{aligned} \tag{3.7}$$

sonucu çıkar. (3.7) bağıntısında $x \rightarrow \alpha x + \beta$ yazarsak; $j = 0,1,\dots$ için

$$\begin{aligned}
y^{(j)}(\alpha x + \beta) &= \mathbf{X}(\alpha x + \beta) (\mathbf{T}^T)^j \mathbf{R}^T \mathbf{A} \\
&= \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha, \beta) (\mathbf{T}^T)^j \mathbf{R}^T \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Burada $\alpha \neq 0$ için

$$\mathbf{D}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha^0 \beta^0 & \binom{1}{0} \alpha^0 \beta^1 & \binom{2}{0} \alpha^0 \beta^2 & \dots & \binom{N}{0} \alpha^0 \beta^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha^1 \beta^0 & \binom{2}{1} \alpha^1 \beta^1 & \dots & \binom{N}{1} \alpha^1 \beta^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha^2 \beta^0 & \dots & \binom{N}{2} \alpha^2 \beta^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{N}{N} \alpha^N \beta^0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.1.3. Çözüm Yöntemi

Problemimizle ilgili temel matris denklemini kurmak için, önce $i = 0,1,\dots,N$ için

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad (\text{Standart})$$

ve (3.9)

$$x_i = \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{\pi i}{N}\right), \quad (\text{Chebyshev-Lobatto})$$

ile tanımlı sıralama noktalarını gözönüne alırız. Daha sonra (3.9) sıralama noktalarını (3.1) ifadesinde kullanarak

$$\sum_{k=0}^m f_k(x_i) y^{(k)}(x_i) + \sum_{j=0}^J p_j(x_i) y^{(j)}(\alpha x_i + \beta) = g(x_i)$$

denklemler sistemi veya kısaca

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{F}_k \mathbf{Y}^{(k)} + \sum_{j=0}^J \mathbf{P}_j \mathbf{Y}^{(j)}(\alpha, \beta) = \mathbf{G} \quad (3.10)$$

matris denklemi elde edilir; (3.10) ifadesi içindeki matrisler

$$\mathbf{F}_k = \text{diag} [f_k(x_0) \quad f_k(x_1) \quad \cdots \quad f_k(x_N)], \mathbf{P}_j = \text{diag} [p_j(x_0) \quad p_j(x_1) \quad \cdots \quad p_j(x_N)]$$

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix}, \mathbf{Y}^{(j)}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} y^{(j)}(\alpha x_0 + \beta) \\ y^{(j)}(\alpha x_1 + \beta) \\ \vdots \\ y^{(j)}(\alpha x_N + \beta) \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

olarak tanımlanır. Diğer taraftan (3.9) sıralama noktalarını (3.7) ve (3.8)'da yerine koyarsak, (3.11) matrisleri

$$\mathbf{Y}^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_0) \\ y^{(k)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0)(\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(x_1)(\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N)(\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X}(\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T \mathbf{A}$$

$$\mathbf{Y}^{(j)}(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} y^{(j)}(x_0) \\ y^{(j)}(x_1) \\ \vdots \\ y^{(j)}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(\alpha x_0 + \beta) \mathbf{D}(\alpha, \beta)(\mathbf{T}^T)^j \mathbf{R}^T \mathbf{A} \\ \mathbf{X}(\alpha x_1 + \beta) \mathbf{D}(\alpha, \beta)(\mathbf{T}^T)^j \mathbf{R}^T \mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{X}(\alpha x_N + \beta) \mathbf{D}(\alpha, \beta)(\mathbf{T}^T)^j \mathbf{R}^T \mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{X} \mathbf{D}(\alpha, \beta)(\mathbf{T}^T)^j \mathbf{R}^T \mathbf{A}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(x_0) \\ \mathbf{X}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir; dolayısıyla (3.10) temel matris denklemi

$$\left[\sum_{k=0}^m F_k X(T^T)^k + \sum_{j=0}^J P_j XD(\alpha, \beta)(T^T)^j \right] R^T A = G \quad (3.12)$$

şekline gelir. Ayrıca, (3.7) bağıntısını kullanarak, (3.2) koşulları için temel matris denklemleri

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk} X(a) + b_{lk} X(b))(T^T)^k R^T A = \lambda_l, l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.13)$$

olur. Böylece (3.1) denkleminin ve (3.2) koşullarına karşı gelen, (3.12) ve (3.13) temel matris denklemlerini, sırasıyla, aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$WA = G \text{ veya } [W; G] \quad (3.14)$$

ve

$$U_l A = \lambda_l \text{ veya } [U_l; \lambda_l], l = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.15)$$

Burada W ve U_l matrisleri

$$W = [w_{pq}] = \left\{ \sum_{k=0}^m F_k X(T^T)^k + \sum_{j=0}^J P_j XD(\alpha, \beta)(T^T)^j \right\} R^T$$

ve

$$U_l = [u_{l0} \quad u_{l1} \quad \dots \quad u_{lN}] = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{lk} X(a) + b_{lk} X(b))(T^T)^k R^T, l = 0, 1, \dots, m-1$$

olarak tanımlanmaktadır. Sonuç olarak (3.1) denkleminin (3.2) koşulları altında çözümünü bulmak için; (3.14) ek matrisinin herhangi m satırı silinip yerine (3.15)'deki m satır matrislerinin konulmasıyla, gerekli yeni

$$[\tilde{W}; \tilde{G}] \text{ veya } \tilde{W}A = \tilde{G} \quad (3.16)$$

matrisi elde edilir. Eğer $rank \tilde{W} = rank[\tilde{W}; \tilde{G}] = N+1$ ise yani $\det(\tilde{W}) \neq 0$ ise $[\tilde{W}; \tilde{G}]$ matris denkleminin çözümü

$$A = (\tilde{W})^{-1} \tilde{G} \quad (3.17)$$

şeklindedir. Bu durumda (3.17) ifadesinden, bilinmeyen

$$A = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

matrisi (dolayısıyla $a_0, a_1, \dots, a_N$ Morgan-Voyce katsayılarının oluşturduğu sadece bir tek sütun matrisi) bulunur. Aynı zamanda (3.2) koşulları altında (3.1) diferansiyel-fark denklemi bir tek çözüme sahip olur. Bu çözüm

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), N \geq m, a \leq x \leq b$$

ile tanımlı kesilmiş Morgan-Voyce serisi ile belirlenir.

3.1.4. Çözümün Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analizi

Elde edilen çözümlerin doğruluğu aşağıda belirlendiği gibi kolayca kontrol edebiliriz: (3.3) kesilmiş Morgan-Voyce serisi (3.1) denkleminin yaklaşık çözümü olduğu için $y_N(x)$ fonksiyonu ve bunun türevleri (3.1) denkleminde yerine konulduğunda sonuç denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Yani $x = x_r \in [a, b]$,

$r = 0, 1, \dots, N$ için

$$R_N(x_r) = \sum_{k=0}^m f_k(x_r) y^{(k)}(x_r) + \sum_{j=0}^J p_j(x_r) y^{(j)}(\alpha x_r + \beta_r) - g(x_r) \cong 0 \quad (3.18)$$

veya

$$R_N(x_r) \leq 10^{-k_r}, (k_r \text{ herhangi bir pozitif tamsayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max 10^{-k_r} = 10^{-k}$ (k herhangi bir pozitif tamsayı) önceden belirlenmişse, o zaman N kesme sınırı (limiti), noktaların her birinde $R_N(x_r)$ farkı, önceden verilen 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar arttırılır.

Ayrıca $R_N(x)$ ile tanımlanan rezidüel fonksiyon ve $[a, b]$ aralığında $|R_N(x)|$ fonksiyonunun ortalama değeri yardımıyla, çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve hata tahmin edilebilir [7–9, 14–22]. N yeterince büyük olduğunda eğer $R_N(x) \rightarrow 0$

ise bu durumda hata azalır. Aynı zamanda ortalama değer teoremini kullanarak $\bar{R}_N$ ortalama hatanın üst sınırını aşağıdaki gibi tahmin edebiliriz:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| &\leq \int_a^b |R_N(x)| dx \quad \text{ve} \quad \int_a^b R_N(x) dx = (b-a)R_N(c), a \leq c \leq b \\ \Rightarrow \left| \int_a^b R_N(x) dx \right| &= (b-a)|R_N(c)| \Rightarrow (b-a)|R_N(c)| \leq \int_a^b |R_N(x)| dx \\ &\Downarrow \\ |R_N(c)| &\leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.2. Genelleştirilmiş Gecikmeli Diferansiyel Denklemler için Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi

3.2.1. Problemin Tanıtılması

Bu kesimde, (1.2) ile tanımlanan yüksek mertebeden değişken katsayılı ve karışık argümentli

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) y^{(k)}(x) + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} Q_{rs}(x) y^{(r)}(\alpha_{rs}x + \beta_{rs}) = g(x), \quad m \geq m_1 \quad (3.20)$$

genelleştirilmiş lineer gecikmeli diferansiyel denkleminin, (1.3) ile tanımlanan

$$\sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} y^{(k)}(a) + b_{kj} y^{(k)}(b)) = \lambda_j, \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (3.21)$$

karışık koşulları altında, (1.4) de verilen

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x), \quad N \geq m, a \leq x \leq b \quad (3.22)$$

kesilmiş Morgan-Voyce serisi formunda yaklaşık çözümlerini araştırırız. Burada $P_k(x)$, $Q_{rs}(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında m -inci türevlere sahip bilinen fonksiyonlardır; $\alpha_{rs}, \beta_{rs}, a_{kj}, b_{kj}$ ve λ_j uygun sabitlerdir.

3.2.2. Temel Matris Bağlılıkları ve Çözüm Yöntemi

İlk olarak, (3.20)-(3.21) probleminin (3.22) çözümüne

$$y_N(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{A} \quad (3.23)$$

matris formu ile yaklaşabiliriz; burada

$$\mathbf{B}(x) = [B_0(x) \ B_1(x) \ \dots \ B_N(x)]$$

$$\mathbf{A} = [a_0 \ a_1 \ \dots \ a_N]^T$$

şeklindedir.

Açıklama: (2.1) ve (2.2)' de tanımlanan birinci tip Morgan-Voyce polinomuna benzer işlemler uygulanabilir.

(2.1) veya (2.2) ile verilen ikinci tip Morgan-Voyce polinomlarını kullanarak, $\mathbf{B}(x)$ matrisini

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{R}^T \quad (3.24)$$

olarak yazabiliriz. Burada $\mathbf{X}(x)$ ve $\mathbf{R}$ matrisleri

$$\mathbf{X}(x) = [1 \ x^1 \ x^2 \ \dots \ x^N]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \begin{pmatrix} N+1 \\ N \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} N+2 \\ N-1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} N+3 \\ N-2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} 2N+1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. (3.23) ve (3.24) bağıntılarından

$$y_N(x) = \mathbf{X}(x)\mathbf{R}^T \mathbf{A} \quad (3.25)$$

matris formunu elde ederiz. Aynı zamanda $\mathbf{X}(x)$ ve $\mathbf{X}^{(k)}(x)$ arasındaki bağıntının

$$\mathbf{X}^{(k)}(x) = \mathbf{X}(x)(\mathbf{T}^T)^k; k = 0, 1, \dots \quad (3.26)$$

olduğu bilinmektedir. Burada $\mathbf{T}^T$ matrisi

$$\mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. (3.25) ve (3.26) matrislerini kullanarak

$$y_N^{(k)}(x) = \mathbf{X}^{(k)}(x) \mathbf{R}^T \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) (\mathbf{T}^T)^k \mathbf{R}^T \mathbf{A}, k = 0, 1, \dots \quad (3.27)$$

elde edilir. (3.27) matris bağıntısında $x \rightarrow \alpha_{rs}x + \beta_{rs}$ ve $k \rightarrow r$ yi yerine koyarak

$$y_N^{(r)}(x) = \mathbf{X}(\alpha_{rs}x + \beta_{rs}) (\mathbf{T}^T)^r \mathbf{R}^T \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{rs}, \beta_{rs}) (\mathbf{T}^T)^r \mathbf{R}^T \mathbf{A} \quad (3.28)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\mathbf{D}(\alpha_{rs}, \beta_{rs})$

$$\mathbf{D}(\alpha_{rs}, \beta_{rs}) = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} \alpha_{rs}^0 \beta_{rs}^0 & \binom{1}{0} \alpha_{rs}^0 \beta_{rs}^1 & \binom{2}{0} \alpha_{rs}^0 \beta_{rs}^2 & \cdots & \binom{N}{0} \alpha_{rs}^0 \beta_{rs}^N \\ 0 & \binom{1}{1} \alpha_{rs}^1 \beta_{rs}^0 & \binom{2}{1} \alpha_{rs}^1 \beta_{rs}^1 & \cdots & \binom{N}{1} \alpha_{rs}^1 \beta_{rs}^{N-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2} \alpha_{rs}^2 \beta_{rs}^0 & \cdots & \binom{N}{2} \alpha_{rs}^2 \beta_{rs}^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{N}{N} \alpha_{rs}^N \beta_{rs}^0 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır ve $\mathbf{X}(\alpha_{rs}x + \beta_{rs})$ matrisi

$$\mathbf{X}(\alpha_{rs}x + \beta_{rs}) = \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{rs}, \beta_{rs})$$

olarak yazılabilir. (3.27) ve (3.28) bağıntılarını (3.20) denkleminde yerine koyarak

$$\left\{ \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x) \mathbf{X}(x) (\mathbf{T}^T)^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} \mathbf{Q}_{rs}(x) \mathbf{X}(x) \mathbf{D}(\alpha_{rs}, \beta_{rs}) (\mathbf{T}^T)^r \right\} \mathbf{R}^T \mathbf{A} = g(x)$$

matris denklemini ve sonra (3.9) sıralama noktalarını koyarak $i = 0, 1, \dots, N$ için

$$\left\{ \sum_{k=0}^m P_k(x_i) X(x_i) (T^T)^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} Q_{rs}(x_i) X(x_i) D(\alpha_{rs}, \beta_{rs}) (T^T)^r \right\} R^T A = g(x_i)$$

matris denklemler sistemini elde ederiz. Bu sistemi kısaca

$$\left(\sum_{k=0}^m P_k X (T^T)^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} Q_{rs} X D(\alpha_{rs}, \beta_{rs}) (T^T)^r \right) R^T A = G \quad (3.29)$$

temel matris denklemi olarak yazabiliriz; burada

$$X = \begin{bmatrix} X(x_0) \\ X(x_1) \\ \vdots \\ X(x_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^N \end{bmatrix}$$

$$P_k = \text{diag}[P_k(x_0) \quad P_k(x_1) \quad \cdots \quad P_k(x_N)]$$

$$Q_{rs} = \text{diag}[Q_{rs}(x_0) \quad Q_{rs}(x_1) \quad \cdots \quad Q_{rs}(x_N)]$$

$$G = [g(x_0) \quad g(x_1) \quad \cdots \quad g(x_N)]^T$$

şeklindedir. (3.29) denkleminde $P_k, X, T^T, Q_{rs}, D, R, A$ ve G matrislerinin boyutları sırasıyla $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times (N+1)$, $(N+1) \times 1$ ve $(N+1) \times 1$ şeklindedir. (3.29) temel matris denklemi

$$WA = G \text{ veya } [W; G] \quad (3.30)$$

$$W = \left(\sum_{k=0}^m P_k X (T^T)^k + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} Q_{rs} X D(\alpha_{rs}, \beta_{rs}) (T^T)^r \right) R^T = [w_{pq}], p, q = 0, 1, \dots, N$$

şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan, (3.27) bağıntısı yardımıyla (3.21) koşulları için karşı gelen matris formlarını

$$U_j A = \lambda_j \text{ veya } [U_j; \lambda_j] \quad (3.31)$$

$$U_j = \sum_{k=0}^{m-1} (a_{kj} X(a) + b_{kj} X(b)) (T^T)^k R^T = [u_{j0} \quad u_{j1} \quad \cdots \quad u_{jN}], j = 0, 1, \dots, m-1$$

olarak elde ederiz.

Sonuç olarak, (3.20) denkleminin (3.21) koşulları altında Morgan-Voyce polinom çözümünü elde etmek için (3.31) satır matrisleri ile (3.30) ek matrislerinin herhangi m satırı yer değiştirerek

$$\tilde{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{G}} \text{ veya } [\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] \quad (3.32)$$

yeni artırılmış matrisini elde ederiz. Eğer $\text{rank}\tilde{\mathbf{W}} = \text{rank}[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = N + 1$ ise,

yani $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ ise, $[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}]$ matris denkleminin çözümü

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \quad (3.33)$$

şeklindedir. Bu durumda (3.32) denkleminde, bilinmeyen

$$\mathbf{A} = [a_0 \quad a_1 \quad \cdots \quad a_N]^T$$

matrisi (dolayısıyla $a_0, a_1, \dots, a_N$ Morgan-Voyce katsayıları) tek olarak bulunur. Böylece, (3.21) koşulları altında (3.20) denklemi bir tek çözüme sahip olur.

3.2.3. Çözümün Doğruluğu ve Rezidüel Hata Analizi

Elde edilen çözümlerin doğruluğunu, Kesim (3.1.4)' deki gibi, yani aşağıda açıklandığı gibi kolayca kontrol edebiliriz: (3.22) kesilmiş Morgan-Voyce serisi (3.20) denkleminin yaklaşık çözümü olduğu için $y_N(x)$ yaklaşımı ve bunun türevleri (3.20) denkleminde yerine konulduğunda sonuç denklem yaklaşık olarak sağlanmalıdır. Yani $x = x_l \in [a, b]$, $l = 0, 1, \dots, N$ için

$$R_N(x_l) = \sum_{k=0}^m P_k(x_l) y^{(k)}(x_l) + \sum_{r=0}^{m_1} \sum_{s=0}^{m_2} Q_{rs}(x_l) y^{(r)}(\alpha_{rs} x_l + \beta_{rs}) - g(x_l) \cong 0 \quad (3.34)$$

veya

$$R_N(x_l) \leq 10^{-k_l}, \quad (k_l \text{ herhangi bir pozitif tamsayı})$$

olmalıdır. Eğer $\max 10^{-k_l} = 10^{-k}$ (k herhangi bir pozitif tamsayı) önceden belirlenmişse, o zaman N kesme sınırı (limiti), noktaların her birinde $R_N(x_l)$ farkı, önceden verilen 10^{-k} dan daha küçük oluncaya kadar arttırılır.

Ayrıca $R_N(x)$ rezidüel fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığında $|R_N(x)|$ fonksiyonunun ortalama değeri yardımıyla çözümün doğruluğu kontrol edilebilir ve hata tahmin edilebilir [8–9, 14–22]. N yeterince büyük olduğunda eğer $R_N(x) \rightarrow 0$ ise bu durumda hata azalır. Aynı zamanda ortalama değer teoremini kullanarak $\bar{R}_N$ ortalama hatanın üst sınırını aşağıdaki gibi tahmin edebiliriz:

$$|R_N(c)| \leq \frac{\int_a^b |R_N(x)| dx}{b-a} = \bar{R}_N \quad (3.35)$$

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, geliştirilen “**Morgan-Voyce Sıralama Yöntemi**” nin kullanılabilirliğini ve geçerliliğini göstermek için, yüksek mertebeden değişken katsayılı ve fonksiyonel argümentli lineer diferansiyel-fark denklemleri ile beraber yüksek mertebeden değişken katsayılı genelleştirilmiş lineer gecikmeli diferansiyel denklem örnekleri incelenmiştir. Ayrıca çözümün kontrolü ve doğruluğunu araştırmak için rezidüel fonksiyonlara ve Ortalama Değer Teoremine dayalı hata analizi yapılarak, elde edilen sonuçlar tablolar ve grafiklerle gösterilmiş ve yorumlanmıştır.

Örnek4.1. Tam çözümü $y(x) = x^2 - 2$ olan değişken katsayılı, $0 \leq x \leq 2$ aralığında

$$y''(x) - xy'(x) + y(x) + xy'(x-1) = x^2 - 2x$$

lineer diferansiyel-fark denkleminin

$$y(0) = -2, y'(0) = 0$$

koşullarına göre çözümünü, $N = 2$ için, Morgan-Voyce sıralama yöntemi ile bulalım.

Burada $N = 2$ için Morgan-Voyce seri çözümünü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 a_n B_n(x)$$

formunda bulmak için,

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i, \quad i = 0, 1, 2$$

sıralama bağıntısı yardımıyla

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2\}$$

olarak buluruz. Denklemdaki fonksiyonlar

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = -x, f_2(x) = 1$$

$$p_0(x) = 0, p_1(x) = x$$

$$g(x) = x^2 - 2x$$

olduğuna göre, verilen lineer diferansiyel-fark denkleminin temel matris denklemi Kesim 3.1. deki prosedürden

$$\left[\sum_{k=0}^m F_k X(T^T)^k + \sum_{j=0}^J P_j XD(\alpha, \beta)(T^T)^j \right] R^T A = G$$

şeklinde olur. Verilen denklemin mertebesine göre, bu temel matris denklemini aşağıdaki gibi açabiliriz:

$$\{F_0 X(T^T)^0 + F_1 X(T^T)^1 + F_2 X(T^T)^2 + P_0 XD(1, -1)(T^T)^0 + P_1 XD(1, -1)(T^T)^1\} R^T A = G.$$

Burada W matrisine

$$W = \{F_0 X(T^T)^0 + F_1 X(T^T)^1 + F_2 X(T^T)^2 + P_0 XD(1, -1)(T^T)^0 + P_1 XD(1, -1)(T^T)^1\} R^T$$

dersek temel matris denklemi

$$WA = G \Rightarrow [W; G]$$

şeklini alır. Burada $F_0, F_1, F_2, P_0, P_1, X, T^T, (T^T)^2 R^T, G$ ve $D(1, -1)$ matrisleri, Kesim 3.1.1. deki matris bağıntılarından,

$$F_k = \begin{bmatrix} f_k(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & f_k(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & f_k(x_2) \end{bmatrix}, F_0 = F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, R^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(T^T)^0 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (T^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_k(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & p_k(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & p_k(x_2) \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}(1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bulunan bu matrisleri yerlerine koyarsak, artırılmış matrisi

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & ; & 0 \\ 1 & 3 & 8 & ; & -1 \\ 1 & 4 & 13 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Ayrıca, başlangıç koşulları için

$$y(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{R}^T \mathbf{A} = -2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [-2]$$

$$[\mathbf{U}_0 \ ; \ \lambda_0] = [1 \ 2 \ 3 \ ; \ -2]$$

ve

$$y'(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [0]$$

$$[\mathbf{U}_1 \ ; \ \lambda_1] = [0 \ 1 \ 4 \ ; \ 0]$$

matris bağıntıları elde edilir. Böylece koşullar için temel matris aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \ ; \ \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 \ ; \ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \ ; \ -2 \\ 0 & 1 & 4 \ ; \ 0 \end{bmatrix}$$

$[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ nin ikinci ve üçüncü satırları silip, yerine koşulların temel matrisinin satırları yazılırsa, artırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & ; & 0 \\ 1 & 2 & 3 & ; & -2 \\ 0 & 1 & 4 & ; & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & ; & 0 \\ 0 & 0 & -2 & ; & -2 \\ 0 & 1 & 4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Burada $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan aşağıdaki sonuca varılır:

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Buradan da Morgan-Voyce katsayı matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu katsayılar Morgan-Voyce serisinde yerine yazılırsa

$$y(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{R}^T \mathbf{A}$$

$$y(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(x) = x^2 - 2$$

çözümü elde edilir ki bu tam çözümdür.

Örnek 4.2. Tam çözümü $y(x) = x^2$ olan değişken katsayılı ve oransal gecikmeli

$$y''(x) - \frac{3}{4}y(x) - y\left(\frac{x}{2}\right) = -x^2 + 2, \quad 0 \leq x \leq 1$$

lineer fonksiyonel diferansiyel denklemini,

$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

başlangıç koşulları altında Morgan-Voyce sıralama yöntemi ile çözelim.

Çözüm için, $N = 2$ alalım ve

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n B_n(x)$$

formunda Morgan-Voyce seri çözümünü araştıralım; amacımız için önce sıralama noktalarını

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

bağıntısı yardımıyla

$$\left\{ x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1 \right\}$$

şeklinde buluruz. Bu örnek için gerekli olan fonksiyonlar,

$$f_0(x) = -\frac{3}{4}, f_1(x) = 0, f_2(x) = 1$$

$$p_0(x) = -1, g(x) = -x^2 + 2$$

olduğuna göre, lineer fonksiyonel diferansiyel denkleminin temel matris denklemi, Kesim 3.1.deki prosedürden,

$$\left[\sum_{k=0}^m F_k X(T^T)^k + \sum_{j=0}^J P_j XD(\alpha, \beta)(T^T)^j \right] R^T A = G$$

olarak elde edilir. Verilen denkleminin $m=2$ mertebesine göre, bu toplam ifadesini açtığımızda

$$\left\{ F_0 X(T^T)^0 + F_1 X(T^T)^1 + F_2 X(T^T)^2 + P_0 XD\left(\frac{1}{2}, 0\right)(T^T)^0 \right\} R^T A = G$$

matris denklemini kurarız. Burada

$$W = \left\{ F_0 X(T^T)^0 + F_1 X(T^T)^1 + F_2 X(T^T)^2 + P_0 XD\left(\frac{1}{2}, 0\right)(T^T)^0 \right\} R^T$$

dersek, temel matris denklemi

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \Rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}]$$

şeklini alır ve ilgili $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{P}_0, \mathbf{X}, \mathbf{T}^T, (\mathbf{T}^T)^2 \mathbf{R}^T, \mathbf{G}, \mathbf{D}(\frac{1}{2}, 0)$ matrisleri, Kesim 3.1.2

içindeki bağıntılarından,

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} f_k(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & f_k(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & f_k(x_2) \end{bmatrix}, \mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{R}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{T}^T)^0 = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (\mathbf{T}^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} p_k(x_0) & 0 & 0 \\ 0 & p_k(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & p_k(x_2) \end{bmatrix}, \mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}(\frac{1}{2}, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

olarak kurulur. Bulunan bu matrisleri $[\mathbf{W};\mathbf{G}]$ matrisinde yerine koyarsak, artırılmış matris

$$[\mathbf{W};\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{4} & ; & 2 \\ -\frac{7}{4} & -\frac{33}{8} & -\frac{93}{16} & ; & \frac{7}{4} \\ -\frac{7}{4} & -\frac{19}{4} & -\frac{17}{2} & ; & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Başlangıç koşulları için matris denklemleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{R}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_0 \ ; \ \lambda_0] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\mathbf{y}'(0) = \mathbf{X}(0)\mathbf{T}^T \mathbf{R}^T \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{U}_1 \ ; \ \lambda_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

Buradan koşullar için temel matris denkleminin arttırılmış biçimi elde edilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_0 \ ; \ \lambda_0 \\ \mathbf{U}_1 \ ; \ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ; & 0 \\ 0 & 1 & 4 & ; & 0 \end{bmatrix}.$$

Sonuç olarak, $[\mathbf{W};\mathbf{G}]$ matrisinin ikinci ve üçüncü satırlarını silip, yerine koşulların matrisi yazılırsa yeni ve gerekli artırılmış matris

$$[\tilde{\mathbf{W}}; \tilde{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{4} & ; & 2 \\ 1 & 2 & 3 & ; & 0 \\ 0 & 1 & 4 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Burada $\det(\tilde{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan

$$\mathbf{A} = (\tilde{\mathbf{W}})^{-1} \tilde{\mathbf{G}} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{4} \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir ve Morgan-Voyce katsayı matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla problemin çözümü

$$y(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{A} = \mathbf{X}(x) \mathbf{R}^T \mathbf{A}$$

$$y(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(x) = x^2$$

olur ki bu tam çözümdür.

Örnek4.3. Tam çözümü $y(x) = 2x - 1$ olan, sabit katsayılı

$$y''(x) - y'(x+1) + y(x) = 2x - 3, \quad 0 \leq x \leq 2$$

lineer fonksiyonel diferansiyel denkleminin

$$y(0) = -1, y'(0) = 2$$

koşullarına göre çözümünü, $N = 2$ için, Morgan-Voyce matris yöntemi ile bulalım.

Burada $N = 2$ için Morgan-Voyce seri çözümünü

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^2 a_n B_n(x)$$

şeklinde ararız. Amacımız için, önce $y(x), y'(x), y''(x), y'(x+1)$ ifadelerini aşağıdaki gibi matris şeklinde yazabiliriz:

$$y(x) = X(x) R^T A$$

$$y'(x) = X(x) T^T R^T A$$

$$y''(x) = X(x) (T^T)^2 R^T A$$

$$y'(x+1) = X(x) D(1,1) T^T R^T A$$

Ayrıca, $g(x)$ fonksiyonunu

$$g(x) = 2x - 3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = X(x) G$$

matris formuna indirgeyebiliriz. Yukarıda $y(x), y'(x), y''(x), y'(x+1)$ ifadelerinin elde edilen matris formlarını verilen denklemde yerine koyarak ve sonuç denklemini sadeleştirerek aşağıdaki temel matris denklemi elde edilir:

$$X(x) (T^T)^2 R^T A - X(x) D(1,1) T^T R^T A + X(x) R^T A = X(x) G$$

$$\{ (T^T)^2 - D(1,1) T^T + I \} R^T A = G$$

veya kısaca

$$W A = G \Rightarrow [W; G], W = \{ (T^T)^2 - D(1,1) T^T + I \} R^T$$

şeklini alır. Buradaki $T^T, (T^T)^2, D(1,1), R^T$ matrisleri Bölüm 3 deki matris bağıntılarından

$$T^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (T^T)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(1,1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R^T=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisleri temel matris denkleminde yerine koyarsak

$$[W;G]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & ; & -3 \\ 0 & 1 & 2 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisini elde ederiz. Diğer yandan, koşullar için artırılmış matris, önceki örneklerde olduğu gibi,

$$\begin{bmatrix} U_0 & ; & \lambda_0 \\ U_1 & ; & \lambda_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ; & -1 \\ 0 & 1 & 4 & ; & 2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak, $[W;G]$ matrisinin baştan iki satırını silip yerine koşul matrisini koyarsak

$$[\tilde{W};\tilde{G}]=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ; & -1 \\ 0 & 1 & 4 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 1 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

artırılmış matrisini elde ederiz ve böylece $\det \tilde{W} \neq 0$ olduğundan

$$A=\tilde{W}^{-1}\tilde{G}$$

$$A=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Morgan-Voyce katsayı matrisi bulunur. Dolayısıyla başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(x)=2x-1$$

olarak bulunur ki bu tam çözümdür.

Örnek 4.4. Değişken katsayılı ikinci mertebeden

$$y''(x) - \frac{3}{4}y(x) - y(x+2) = -\frac{7}{4}x^2 - 4x - 7, \quad 0 \leq x \leq 1$$

diferansiyel-fark denkleminin $y(0) = 0$ ve $y'(0) = 0$ koşulları altında çözümünü araştıralım.

Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^2$ olduğu bilinmektedir [37]. Burada $y(x)$ çözümünü $N=3$ için

$$y(x) = \sum_{n=0}^3 a_n B_n(x)$$

kesilmiş Morgan- Voyce serisi formunda bulacağız. Önce denklemdeki gerekli olan fonksiyonlar

$$f_0(x) = -\frac{3}{4}, f_1(x) = 0, f_2(x) = 1, p_0(x) = -1, g(x) = -\frac{7}{4}x^2 - 4x - 7$$

ve sıralama noktaları $N=3$ için

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$$

olarak belirlenir. Bölüm 3 deki yöntemimize göre problemin temel matris denklemi

$$W = \left\{ \sum_{k=0}^2 F_k X(T^T)^k + \sum_{j=0}^1 P_j XD(\alpha, \beta)(T^T)^j \right\} R^T$$

olarak elde edilir ve $N=3$ için yaklaşık çözüm

$$y_N(x) = -\frac{1}{338}x^3 + x^2 + \frac{1}{100}x - \frac{1}{839}$$

olur; bazı sonuçlar Tablo 4.1 de gösterilmiştir.

Tablo 4.1, kesme sınırı N 'in farklı değerleri için problemin çözümleri ve bunların mutlak hatalarını göstermektedir. Tablo 4.1 den görüldüğü gibi, N 'in değerleri yeterince büyük alındığında hata azalmaktadır. Bu durumda $N=8$ için $y(x) = x^2$ tam çözümüne yaklaştığımız oluruz.

Tablo 4.1. Örnek 4.4'ün farklı N değerleri için tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması ve bunların E_N mutlak hataları

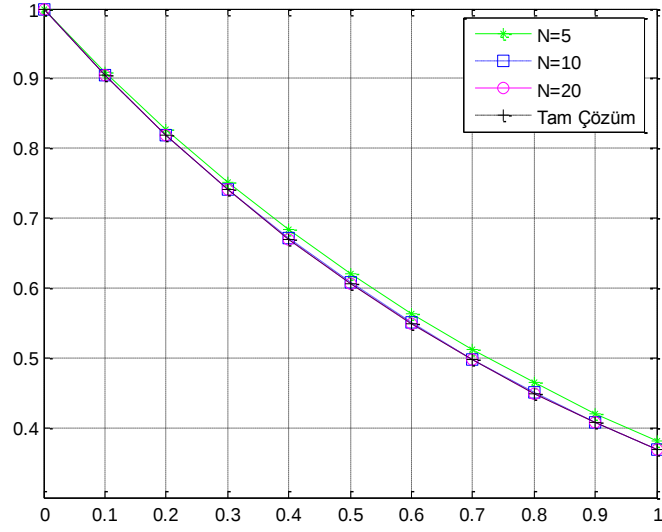
x	Tam çözüm	$N=3$	E_N	$N=8$	E_N
0.0	0.00	0.116E-8	1.16438E-9	0.00	0.0000
0.1	0.01	0.0100	1.38000E-9	0.01	0.0000
0.2	0.04	0.0400	1.82000E-9	0.04	0.0000
0.3	0.09	0.0900	2.46000E-9	0.09	0.0000
0.4	0.16	0.1600	3.30000E-9	0.16	0.0000
0.5	0.25	0.2500	4.30000E-9	0.25	0.0000
0.6	0.36	0.3600	5.50000E-9	0.36	0.0000
0.7	0.49	0.4900	6.80000E-9	0.49	0.0000
0.8	0.64	0.6400	8.20000E-9	0.64	0.0000
0.9	0.81	0.8100	9.60000E-9	0.81	0.0000
1.0	1.00	1.0000	1.10000E-8	1.00	0.0000

Örnek 4.5. Son olarak, aşağıdaki problemin Morgan-Voyce seri çözümünü araştıralım:

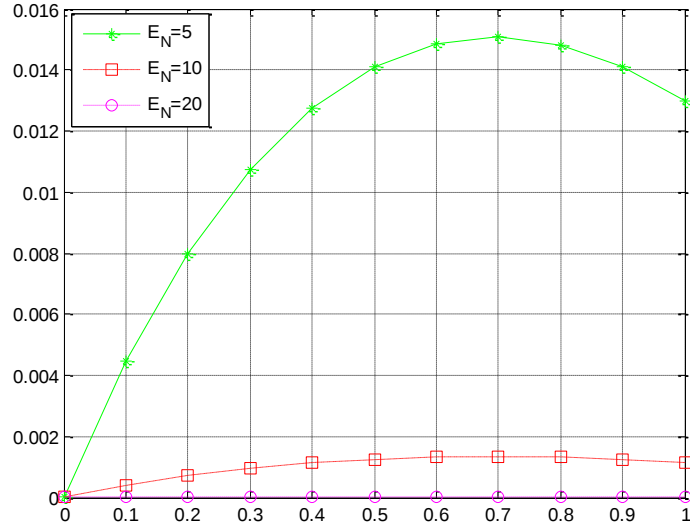
$$y'(x) + y(x) + e^{x-1}y(x-1) = 1, \quad y(0) = 1$$

Bu problemin tam çözümü $y(x) = e^{-x}$ olduğu bilinmektedir. Bölüm 3 de sunulan Morgan-Voyce sıralama yöntemini kullanarak, $N = 5, 10, 20$ değerleri için temel matrisler hesaplanmış ve böylece cebrik denklemler sistemi elde edilmiştir. Bu sistem, Maple18 programı kullanılarak yaklaşık olarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar Tablo 4.2 ile Şekil 4.1(a) ve Şekil 4.1(b) de gösterilmiştir.

(a)



(b)



Şekil 4.1. (a) Örnek 4.5'in farklı N değerleri için nümerik ve tam çözümleri. (b) Örnek 4.5'in çeşitli E_N hata fonksiyonları

Örnek 4.5'in farklı N değerleri için elde edilen çözümlerinin karşılaştırılmasından, büyük N değerleri için tam çözüme yaklaştığımız Şekil 4.1(a) ve Şekil 4.1(b) de açıkça görülmektedir..

Tablo 4.2. Örnek 4.5'in farklı N değerleri için tam ve yaklaşık çözümlerin karşılaştırılması ve bunların mutlak hataları E_N .

x	Tam çözüm	$N=5$	E_N	$N=10$	E_N	$N=20$	E_N
0.0	1.00000	0.99999	4.00000E-9	1.00000	4.00000E-9	1.00000	7.10000E-18
0.1	0.90483	0.90928	4.44475E-3	0.90523	3.94605E-4	0.90483	2.66089E-10
0.2	0.81873	0.82671	7.98690E-3	0.81943	7.09007E-4	0.81873	4.78103E-10
0.3	0.74081	0.75153	1.07211E-2	0.74176	9.51724E-4	0.74081	6.41782E-10
0.4	0.67032	0.68304	1.27291E-2	0.67145	1.13006E-3	0.67032	7.62050E-09
0.5	0.60653	0.62061	1.40823E-2	0.60778	1.25034E-3	0.60653	8.43163E-09
0.6	0.54888	0.56365	1.48435E-2	0.55012	1.31806E-3	0.54888	8.88830E-09
0.7	0.49658	0.51165	1.50681E-2	0.49792	1.33806E-3	0.49658	9.02317E-09
0.8	0.44932	0.46413	1.48047E-2	0.45064	1.31468E-3	0.44932	8.86545E-08
0.9	0.40656	0.42066	1.40950E-2	0.40782	1.25184E-3	0.40656	8.44171E-08
1.0	0.36787	0.38085	1.29734E-2	0.36903	1.15322E-3	0.36787	7.77671E-08

Diğer yandan, Tablo 4.2 de farklı N değerleri için problemin çözümleri ve hataları gösterilmektedir. Buradan N değerlerinin yeterince büyük seçildiğinde hatanın azaldığı sonucuna varılmaktadır.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Son yıllarda, yüksek mertebeden gecikmeli diferansiyel ve diferansiyel-fark denklemleri birçok matematikçi ve fizikçi tarafından yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Bu tip denklemlerin analitik çözümlerini bulmak çok zor veya mümkün değildir. Bu nedenle yaklaşık çözümlere gerek duyulmaktadır; dolayısıyla bu çalışmada Morgan-Voyce polinomlarına ve sıralama noktalarına dayalı “Morgan-Voyce sıralama yöntemi” adlı bir matris tekniği sunulmuştur.

Morgan-Voyce sıralama yönteminin avantajlarından birisi, yaklaşık çözümlerin bilgisayar programları yardımıyla kolayca bulunabilmesidir. Aynı zamanda, hesaplama zamanının kısalığı ve az çaba harcayarak iyi sonuçların elde edilmesi bir diğer avantajıdır. Açıklayıcı örneklerden, yöntemin uygulanabilir ve geçerli iyi sonuçlar verdiği de gözlenmektedir. Ancak verilen diferansiyel denklemlerin en iyi yaklaşık çözümlerini bulmak için, fonksiyonların Morgan-Voyce açılımından daha çok terimlerin alınması, yani N kesme sınırlarının yeterince büyük seçilmesi, gereklidir. Yöntemimizin uygulanabilirliğini göstermek için kullanılan örnekler tatminkar sonuçlar vermiş ve elde edilen yaklaşımların, tam ve yaklaşık çözümler arasındaki uyumun çok iyi olduğunu göstermiştir.

Sonuç olarak, kullanılan yöntemin etkinliği doğrulanmış, Maple18 ile elde edilen sonuçların doğruluğundan emin olunmuş; dolayısıyla, Morgan-Voyce sıralama yönteminin gecikmeli diferansiyel ve diferansiyel-fark denklemlerinin yaklaşık çözümlerini araştırmak için öngörülebilir bir yöntem olacağı düşünülmektedir. Aynı zamanda yöntem, diğer lineer ve lineer olmayan fonksiyonel gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulanabilir; fakat bazı düzenlemelere gerek duyulur.

KAYNAKLAR

- [1] Ablowitz, M.L., Ladik, J.F. A nonlinear difference scheme and inverse scattering Stud. Appl. Math., 55 (1976) 213-229.
- [2] Hu, X.B., Ma, W.X. Application of Hirota's bilinear formalism to the teoplitz lattice some special soliton-like solutions, Phys. Lett: A 293 (2002) 161-165.
- [3] Fan, E. Soliton solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled Kdv equation a coupled Mkdv equation, Phys. Lett.A282 (2001) 18-22.
- [4] Dai, C., Zhang J. Jacobian elliptic function method for nonlinear differential difference equations, Chaos, Soliton Frac. 27 (2006) 1042-1047.
- [5] Elmer, C.E., Van Vleck, E.S. Traveling wave solutions for bistable differential difference equations with periodic diffusion, SIAM J. Appl. Math. 81 (2001) 1648-1657.
- [6] Elmer, C.E., Van Vleck, E.S. A variant of Newton's method for solution of traveling wave solutions of bistable differential difference equations, J.Dyn. Different. equat. 14 (2002) 493-517.
- [7] Arıkoğlu, A., Özkol, I. Solution of differential equations by using differential transform method, Appl. Math. Comput. 174 (2006) 1216-1228.
- [8] Sezer, M., Gülsu, M. Polynominal solution of the most general linear Fredholm integro- differential difference equation by means of Taylor matrix method, Complex variables, 50 (5) (2005), 367-382.
- [9] Gülsu, M., Sezer M. A method for the approximate solution of the high-order linear difference equations in terms of Taylor polynomials, Intern. J. Comput. Math. 82 (5) (2005) 629-641.
- [10] Saaty, T. L. Modern nonlinear equations, Dover publications Inc. , New York (1981), P. 225.
- [11] Sezer, M., Akyüz-Daşcıoğlu, A. Taylor polynominal solutions of general linear differential- difference equations with variable coefficients, Appl. Math. Comput. 174 (2006) 1526-1538.
- [12] Gülsu, M., Sezer, M. A Taylor polynomial approach for solvig differential difference equations, J. Comput. Appl. Math. 186 (2006) 549-364.

- [13] Sezer, M., Kaynak, M. Chebyshev polynomial solutions of linear differential equations, Intern. J. Math. Educ. Sci. Technol. 27 (4) (1996) 607-618.
- [14] Akyüz, A., Sezer, M. A Chebyshev Collocation method for the solution of linear integro- differential equations, Intern. J. Comput. math. 72 (4) (1999) 491-507.
- [15] Akyüz, A., Sezer, M. Chebyshev polynomial solutions of systems of high-order linear differential equations with variable coefficients Appl. Math. Comput. 144 (2003) 237-247.
- [16] Swamy, M. M. S. Further properties of Morgan-Voyce polynomials, Fibonacci Quart. 62 (1968) 165-175.
- [17] İlhan, Ö. Morgan-Voyce polynomial solutions of linear differential and integro- differential equations, M.Sc. Thesis, Graduate School of Naturel and Applied Sciences, Muğla University, 2012.
- [18] Fortuna, L. Frasca, M. Generating passive systems from recursively defined polynomials, Intem. J. Circuits system and signal processing, 6 (2) 2012 179-188.
- [19] Koshy, T. Fibonocci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, New York, 2001.
- [20] İlhan, Ö., Şahin, N., Sezer, M. On Morgan-Voyce polynomial approximation for linear Fredholm integro- differential equations, 2. International Symposium on Computing in Science&Engineering, Gediz Üniversitesi, Proc. Number: 700/62, Kuşadası, Aydın, Turkey, June 1-4, 2011.
- [21] Iserles, A. On Neutral Functional-Differential Equations with Proportional Delays, J. Math. Anal. Appl., 207 (1997) 73-95.
- [22] Wang, W.S., Li, S. F. On the one-leg Q-methods for solving nonlinear neutral functional differential equations, Appl. Math. Comput. 193 (1) (2007) 285-301.
- [23] Kuang, Y., Feldstein, A. Monotonic and Oscillatory solutions of a linear neutral delay equations with infinite lag, SIAM J. Math. Anal., 21 (6) (1990) 1633-1641.
- [24] Cahlon, B., Schmidt, D. Stability criteria for certain high even order delay differential equations, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007) 859-875.
- [25] El-Khatib, M.A. Convergenue of the spline function for functional differential equation of neutral type, Intern, J. Comput. Math. 80 (11) (2003) 1437-1447.

- [26] Rashed, M.T. Numerical solution of functional differential, integral and integro- differential equations, Appl.Math.Comput. 156 (2004) 485-492.
- [27] Cheng, K., Chen,Z., Zhang,Q. An approximate solution for a neutral functional differential equation with proportional delays, Appl.Math.Comput. 260 (2015) 27-34.
- [28] Bhrawy, A.H., Assas, L.M., Tohidi, E., Alghamdi, M.A. A Legendre-Gauss collocation method for neutral functional differential equations with proportional delays,Advances in Difference Equations, 2013, 2013: 63 Springer.
- [29] Heydari, M., Loghmani, G.B., Hosseini, S.M. Operational matrices of Chebyshev cardinal functions and their aplication for solving delay differential equations arising in elektrodynamics with error estimation, Appl. Math. Model.37 (2013) 7789-7809.
- [30] Sedaghat, S., Ordokhani, Y., Dehghan, M. Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via Chebyshev polynomials, Common Nonlinear Sci Numer Simulat,17 (2012) 4815-4830.
- [31] Oğuz, C., Sezer, M. Chelyshkov collocation method for a class of mixed functional integro- differential equations, Appl. Math. Comput. 259 (2015) 943-954.
- [32] Gürbüz, B., Sezer, M., Güler,C. Laguerre collocation method for solving Fredholm integro- differential equations with functional arguments, J. Appl. Math. 2014 (2014) Article ID 682398, 12 pages.
- [33] Gürbüz, B., Sezer, M. Laguerre polynomial approach for solving Lane–Emden type functional differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 242(2014) 255-264.
- [34] Şahin, N., Yüzbaşı Ş., Sezer, M. A Bessel polynomial approach for solving general linear Fredholm integro- differential –difference equations, Int. J. Comput. Math. 88 (14) (2011) 3093-3111.
- [35] Stoll, T., Tichky,R.F. Diophantine equations for Morgan- Voyce and other modified orthogonal polynomials, Math. Slovaca 58 (1) (2008) 11-18.
- [36] İlhan, Ö., Şahin, N. On Morgan-Voyce polynomials approximation for linear differential equations, TJMCS (2014) Article ID20140048, 10 pages.
- [37] Yuzbasi,Ş., Gok,E.,Sezer,M. Residual correction of the Hermite polynomial solutions, of the generalized pantograph equations, New Trends in Mathematical Sciences, NTMSCI 3, No. 2, 118-125 (2015)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bengü TÜRKYILMAZ
Doğum Yeri : Alaşehir, 1982
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : benguturkyilmaz@hotmail.com

Eğitim Durumu

Lise : İzmir Özel Türk Koleji, 2000
Lisans : Ege Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2005
Yüksek Lisans : Celal Bayar Üniversitesi, Matematik Bölümü, -

Mesleki Deneyim

Alaşehir Hedef Dershaneleri, 2005 – 2010

Celal Bayar Üniversitesi, Alaşehir Meslek Yüksekokulu (dışarıdan görevlendirme),
2009 – 2011

Celal Bayar Üniversitesi, Alaşehir Meslek Yüksekokulu, Öğretim Görevlisi, 2011 -
...(halen)

Yayınları

Türkyılmaz, B.,Gürbüz, B.,Sezer,M. Morgan-Voyce Polynomial Approach for
Solution of High-Order Linear Differential-Difference Equations with Residual Error
Estimation Düzce University Journal of Science & Technology, 4 (2016) 252-263