

POLİNOMLARIN KRİTİK NOKTALARI

Turgut BAŞKAN

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Erzurum

Her Hakkı Saklıdır.

Bağış Tarihi: 21/12/1986
Atatürk Üniversitesi
Ed. Fak. 2. bağışdır.

POLİNOMLARIN KRİTİK

NOKTALARI

(D o k t o r a)

Turgut Başkan

0009087

Atatürk Üniversitesi
Kütüphanesi
Emh. No 40111

ÖNSÖZ

Polinomların sıfır-yerleri ile kritik noktaları arasındaki temel bağıntıyı, Lucas " Bir polinomun bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden konveks poligon bütün kritik noktalarını da ihtiva eder." şeklinde ifade ve ispat etmiştir. Gauss, bir polinomun kritik noktalarının, sıfır-yerlerinin belirttiği, kuvvet alanı içinde, dengeleme noktaları olduğunu gösterdi. Reel polinomlar için aynı problemi inceleyen Jensen ise, kendi adı ile bilinen ve fakat ispatı 1920 yılında J.L.Walsh tarafından yapılan teoremi vazetti. Bu konuda çalışan araştırmacılar, J.H.Grace'ın Apolar polinomlar hakkındaki "Apolar iki polinomdan birinin bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden daire, diğerinin en az bir sıfır-yerini ihtiva eder." teoreminden büyük ölçüde istifade etmişlerdir.

Bu teoremden hareketle Grace-Heawood, bir polinomun iki sıfır-yeri bilindiğinde, bir kritik noktanın yerini belirten teoremlerini ifade ettiler. S. Kakeya, bir polinomun p tane sıfır-yeri bilindiğinde, $p-1$ tane kritik noktanın dağılımını tesbitle uğraştı; ancak bu problemi $p=2$ için çözebildi. En genel hali M.Marden inceledi.

Bu çalışmada apolar polinomlar için, çalışmamıza uygun, bir tarif konarak elde edilen neticeler bölüm IV te son iki teorem halinde ifade edildi. Bulunan diğer neticeler ise teorem 5.3. ve teorem 5.6. olarak bölüm V te ifade edildi.

Turgut Başkan

İ Ç İ N D E K İ L E R

BÖLÜM I

Temel Teoremler

BÖLÜM II

Polinomların sıfır-yerleri ile kritik noktaları arasındaki bağıntılar

BÖLÜM III

Reel polinomlarda kritik noktaların özelliği

BÖLÜM IV

Apolar polinomlar

BÖLÜM V

p- Sıfıryeri bilinen polinomlarda kritik noktaların dağılımı.

BÖLÜM I

Temel Teoremler

Genel olarak bir $P(z)$ polinomu, $a_n \neq 0$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n$ kompleks sayılar olmak üzere

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

şeklinde ifade edilir. Buradaki pozitif n sayısına polinomun derecesi denir*.

TARİF. $P(z) = 0$ denklemini sağlayan z_j değerlerine polinomun 0-yerleri veya kökleri denir.

Teorem 1.1. Farzedelim ki bir $P(z)$ polinomunun basit kapalı bir C çevresi içinde p tane sıfır-yeri vardır. Bu takdirde

$$p = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg P(z) \quad [3]$$

İspat. $z_1, z_2, \dots, z_p$ C çevresinin içindeki sıfır-yerleri ve $z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n$ C çevresinin dışındaki sıfır-yerleri olsunlar.

$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)(z - z_{p+1})(z - z_{p+2}) \dots (z - z_n)$ olduğuna göre şunu yazabiliriz

$\arg P(z) = \arg a_n + \sum_{j=1}^p \arg(z - z_j) + \sum_{j=p+1}^n \arg(z - z_j)$
 z noktası C üzerinde pozitif yönde hareket etsin, $\arg(z - z_j)$ nin toplam değişimi (argüment varyasyonu) $1 \leq j \leq p$ için 2π ve $p < j \leq n$ için sıfırdır.

o halde

$$\Delta_C \arg P(z) = 2\pi p$$

yani

$$p = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg P(z)$$

Teorem. 1.2. Farzedelim ki $P(z)$ polinomunun bir L doğrusu üzerinde sıfır-yeri olmasın ve $P(z)$ in L nin solunda ve sağındaki sıfır-yerlerinin sayısı, karşılıklı olarak, p ve q olsun. Bu takdirde

$$p - q = \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg P(z) \quad [3]$$

İspat. $z_1, z_2, \dots, z_p$ noktaları L nin solundaki, $z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n$ noktaları ise L nin sağındaki sıfır-yerleri olsunlar.

* Bu çalışmada aksi söylenmedikçe $P(z)$ polinomu n inci dereceden kabul edilecektir.

$$P(z) = (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_p)(z-z_{p+1})(z-z_{p+2})\dots(z-z_n)$$

olduğuna göre burada şunu yazabiliriz.

$$\arg P(z) = \sum_{j=1}^p \arg(z-z_j) + \sum_{j=p+1}^n \arg(z-z_j) \quad 1.2.1.$$

Mademki $\arg(z-z_j)$ nin toplam değişimi, z_j noktası L nin solunda ve sağında oluşuna göre π ve $-\pi$ dir. O halde (1.2.1) gözönüne alınırsa

$$\Delta_L \arg P(z) = \pi p - \pi q$$

yani

$$p - q = \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg P(z)$$

NETICE 1.2a

$$p = \frac{1}{2} (n + \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg P(z))$$

$$q = \frac{1}{2} (n - \frac{1}{\pi} \Delta_L \arg P(z))$$

çünkü, $p+q=n$ olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikle teorem 1.2 deki eşitliği bir defa taraf tarafa toplayıp bir defada çıkarmakla neticeyi elde ederiz.

Teorem 1.3. Farzedelim ki $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ reel polinomunun reel sıfır-yeri yoktur. Bu takdirde

$$\Delta_R \arg P(z) = 0 \quad (\text{Burada } R, OX \text{ eksenini göste.})$$

İspat. Reel polinomlarda kompleks sıfır-yerinin eşleniği de bir sıfır yeri olduğundan, hipotez gözönünde tutulursa, $P(z)$ in sıfır-yerleri reel eksen sağında ve solunda eşit sayıdadır. O halde teorem 1.2 den dolayı

$$p - q = \frac{1}{\pi} \Delta_R \arg P(z) = 0$$

Bolayısıyla

$$\Delta_R \arg P(z) = 0$$

Teorem (Rouché) 1.4 Farzedelim ki basit kapalı bir C çevresi içinde ve üzerinde $F(z)$ ve $G(z)$ analitik ve C üzerinde $|G(z)| < |F(z)|$ dir. Bu takdirde $F(z)$ ve $P(z) = F(z) + G(z)$ C nin içinde aynı sayıda sıfır-yerlerine sahiptirler. [1] [3]

İspat. $P(z)=WF(z)$, $W=1+\frac{G(z)}{F(z)}$ olsun.

p , $F(z)$ in C deki sıfır-yerlerinin sayısı ise teorem 1.1 den dolayı

$$2p\pi = \Delta_C \arg F(z)$$

Mademki C nin üzerinde $\left|\frac{G(z)}{F(z)}\right| < 1$ dir. W , merkezi $W=1$ ve yarı-çapı 1 olan çember içinde kapalı bir eğri çizer. Böylece W daima sağ-yarım düzlemde kalır. Dolayısıyla $\arg W$ nin toplam değişimi sıfır dır. O halde

$$\Delta_C \arg P(z) = \Delta_C \arg W + \Delta_C \arg F(z) = 2p\pi$$

Demekki $P(z)$ in C içindeki sıfır-yerlerinin sayısı p dir.

Teorem 1.5. $P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$, $a_n \neq 0$

polinomunun n kökü vardır. [1]

İspat. $F(z)=a_nz^n$, $G(z)=a_0+a_1z+\dots+a_{n-1}z^{n-1}$ vazedelim.

C olarak, merkezi $z=0$ da ve $r > 1$ yarı-çaplı bir çember alalım C nin üzerinde

$$F(z)=|a_n|r^n \text{ ve } |G(z)| \leq (|a_0|+|a_1|+\dots+|a_{n-1}|) r^{n-1} \quad 1.5.1.$$

O halde r yeter derecede büyük seçilerek $|G(z)| < |F(z)|$ yapılabilir. Bunun için (1.5.1) gözönüne alınırsa

$$r > \frac{|a_0|+|a_1|+\dots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$$

olmalıdır. Bu takdirde, Rouché teoreminden dolayı, yukarıdaki şartı sağlayan r yarı-çaplı bir dairede $P(z)=F(z)+G(z)$ in n sıfır-yeri vardır.

Teorem 1.6. Farzedelim ki her $w_j \neq 0$ ($j=1,2,\dots,p$) kompleks sayısı, γ reel bir sabit olmak üzere

$$\gamma \leq \arg w_j < \gamma + \pi$$

olsun. Bu takdirde

$$w = \sum_{j=1}^p w_j \neq 0 \quad [3]$$

İspat. $\gamma=0$ ve $\arg w_j=0$ olsun. O halde w_j kompleks sayılarının hepsi reel eksen üzerinde olurlar. Yani $\operatorname{Re}(w_j) > 0$. Dolayısıyla $\operatorname{Re}(w) > 0$. O halde $w \neq 0$

$\gamma \neq 0$ ve $\arg w_j \neq 0$ olsun. w_j kompleks sayıları üst-yarı düzlem-

de olurlar. O halde $\text{Im}(w_j) > 0$. Dolayısıyla $\text{Im}(w) > 0$. Yani $w \neq 0$
 $\delta \neq 0$ için $w'_j = e^{-\delta i} w_j$ yi dikkate alalım.

$$\arg w'_j = -\delta + \arg w_j < -\delta + \delta + \pi = \pi$$

Yani

$$0 \leq \arg w'_j < \pi$$

Bu ise ikinci halin aynıdır. Dolayısıyla $w' \neq 0$. Yani $w \neq 0$

BÖLÜM II

Polinomların sıfır-yerleri ile kritik noktaları arasındaki bağıntılar

TARİF. $P'(z)=0$ denklemini sağlayan z_j noktalarına $P(z)$ in kritik noktaları denir.

$P(z)$ in kritik noktaları, polinomun farklı z_j sıfır-yerlerine bağlı olarak, incelenecek. Zira $P(z)$ polinomu katlı sıfır-yerlerine sahip ise

$$P(z)=(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\dots(z-z_p)^{m_p}, \quad n=\sum_{j=1}^p m_j$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi $P'(z)$ i aşağıdaki şekilde yazalım

$$P'(z)=P(z)\frac{P'(z)}{P(z)}=P(z)\frac{d[\ln P(z)]}{dz}$$

Bu eşitliğe dikkat edilirse, görüldüğü gibi $P(z)$ in kritik noktaları iki gruba ayrılır.

1. $m_j > 1$ için, herbirinin katlılığı (m_j-1) olan z_j noktaları. Bunlar $P(z)$ in de sıfır-yerleridir. Toplam katlılıkları ise $(n-p)$ dir.

$$2. \quad P'(z)=\frac{d[\ln P(z)]}{dz}$$

Fonksiyonunun sıfır-yerleri ki bunlar $(p-1)$ tanedir.

Genel olarak $P(z)$ in sıfır-yerlerinin dağılımı belirtileceğinden $P(z)$ in 1. gruptaki kritik noktaları tesbit edilmiş olacaklardır. Bizim asıl problemimiz $P(z)$ in 2. gruptaki kritik noktalarının dağılımını belirtmektir.

Yani

$$P'(z)=\sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z-z_j}, \quad m_j > 0$$

fonksiyonunun sıfır-yerlerini belirtmeliyiz.

Teorem (Lucas) 2.1. Farzedelim ki $P(z)$ in bütün sıfır-yerleri bir yarı-düzlemde dir. Bu takdirde $P(z)$ in bütün kritik noktaları da aynı yarı-düzleme düşer. [2]

İspat. $P(z)=a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$ olduğundan

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_n} \quad 2.1.1.$$

dir. Farzedelim ki $z_1, z_2, \dots, z_n$ noktaları $\text{Im} \frac{z-a}{b} < 0$ olarak tarif edilen yarı-düzlemde bulunsunlar. Şayet Z_k bu düzlemde ve z bu

düzlemde değilse aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\operatorname{Im} \frac{z-z_k}{b} = \operatorname{Im} \frac{z-a}{b} - \operatorname{Im} \frac{z_k-a}{b} > 0$$

Dolayısıyla

$$\operatorname{Im} \frac{b}{z-z_k} < 0$$

olur. Şayet bu bağıntı bütün k lar için doğru ise (2.1.1)den dolayı

$$\operatorname{Im} \frac{b P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} \frac{b}{z-z_k} < 0$$

0 halde

$$P'(z) \neq 0$$

Böylece teorem ispatlanmış olur.

TARİF. K poligonuna $P(z)$ in Lucas Poligonu denir, şayet bu poligon $P(z)$ in bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden en küçük konveks poligon ise.

TARİF. K' poligonuna $P'(z)$ in Lucas poligonu denir, şayet $P'(z)$ in bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden en küçük konveks poligon ise.

Teorem (Lucas) 2.2. $P(z)$ in Lucas poligonu $P(z)$ in kritik noktalarını da ihtiva eder. [3] [4]

İspat. Bu bölümün başlangıcındaki izahtan dolayı sadece

$$P(z) = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z-z_j}$$

in K nin dışında sıfır-yeri olamayacağını göstermeliyiz. Aksini düşünelim. $P(z)$ in bir z' sıfır-yeri K nin dışına düşsün. Bu z' noktası $P(z)$ in bir sıfır-yeri olamaz çünkü hipotezden dolayı $P(z)$ in bütün sıfır-yerleri K nin içindedir. Üstelik z' noktası K poligonunun $A(z')$ açısı ile görüyorsa

$$0 < A(z') < \pi$$

dir. Şimdi

$$P'(z) = \sum_{j=1}^p (-m_j w_j) \quad , \quad w_j = \frac{1}{z_j - z} \text{ vazedelim}$$

Buradan

$$\arg(z_j - z') = -\arg w_j$$

olur. $(z_j - z')$ vektörü $A(z')$ bölgesinde bulunduğu göre

$$0 < -\arg w_j < \pi$$

dir. m_j reel bir sayı olduğundan

$$0 < -\arg m_j w_j < \pi$$

dir. Bu son eşitsizlik ve teorem 1.6 gözönüne alınırca $P(z') \neq 0$ olduğu görülür.

Teorem (Lucas) 2.3. $C, P(z)$ in bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden en küçük yarı-çaplı daire olsun. Bu takdirde $C, P(z)$ in bütün kritik noktalarını da ihtiva eder. [3]

İspat. $K, P(z)$ in bütün sıfır-yerlerini çevreleyen en küçük konveks poligon olsun. O halde K, C nin içine düşer. Teorem 2.2 gözönüne alınırca $P(z)$ in kritik noktaları da C nin içine düşer.

Bu üç teoremden aşağıdaki neticeleri çıkarmak mümkündür.

NETİCE 2.3a. $P(z)$ in bütün kritik noktaları $|z| \leq r$ nin içinde ise, bu takdirde $P(z)$ in en az bir sıfır-yeri $|z| \geq r$ nin içine düşer.

NETİCE 2.3b. K nin köşelerinde $P(z)$ in katlı sıfır-yerleri varsa bu takdirde K ve K' idantik (aynı) dır.

NETİCE 2.3c $K' \subset K$ dır.

Teorem (Gauss) 2.4. $P(z) = (z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2} \dots (z-z_p)^{m_p}$ polinomunun sıfır-yerlerine, katlılık mertebelerine eşit sayıda, yerleştirilmiş birim kütlelerle -ki bunlar biri birini ters mesafe kamununa göre iterler- bir kuvvet alanı belirtilmiş olsun. Bu takdirde $P(z)$ in kritik noktaları bu kuvvet alanı içinde denge durumundadırlar. [4]

İspat. $P(z)$ in logaritmik türevini teşkil edelim.

$$F(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z-z_j} \quad 2.4.1.$$

olur. Şayet z , (2.4.1) in bir sıfır-yeri ise "yani $P(z)$ in bir kritik noktası ise" bu z noktası keza (2.4.1) in negatif konjügesi olan

$$\bar{F}(z) = -F(\bar{z}) = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{\bar{z}-\bar{z}_j} \quad 2.4.2.$$

ifadesinin de bir sıfır-yeridir. (2.4.2) ifadesindeki j inci terim, magnitudü $\frac{m_j}{|z-\bar{z}_j|}$ ve yönü $z_j - z$ in yönünde olan bir vektördür. Bu vektör z_j deki m_j kütlelerinin, z noktasındaki birim partiküle tesir eden çekme kuvveti olarak kabul edilebilir.

Bu sebepten z noktası yalnız ve yalnız bu kuvvetlerin toplamı sıfır olduğunda (2.4.1) in sıfır-yeri olur. Demekki $P(z)$ in kritik noktaları teoremden belirtilen dengeleme noktalarıdır.

BÖLÜM III

Reel Polinomlarda Kritik Noktaların Özelliği

TARİF. Bir $P(z)$ polinomunun jensen daireleri diye bu polinomun eşlenik sıfır-yerlerini birleştiren doğru parçasını çap kabul eden dairelere denir.

Teorem (Jensen) 3.1. $P(z)$ reel bir polinom olsun. Bu takdirde reel olmayan her kritik nokta $P(z)$ in Jensen dairelerinden en az birinin içine veya üzerine düşer. [3] [4]

İspat. $P(z)$ in katlı olmayan sıfır-yerlerini incelemek yeter. Çünkü $P(z)$ in katlı kompleks sıfır-yerleri $P'(z)$ in de sıfır-yerleri olduğundan bunlar zaten Jensen dairelerinin üzerine düşerler.

$$P'(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{z-z_j} = \sum_{j=1}^n w_j = \operatorname{Re}(w_1+w_2+\dots+w_n) + i \operatorname{Im}(w_1+w_2+\dots+w_n) \quad 3.1.1.$$

şeklinde yazalım. (3.1.1) in reel olmayan sıfır-yerlerinin Jensen daireleri dışında olamayacağını gösterelim. Bunun içinde Jensen daireleri dışındaki reel olmayan noktalarda

$$\operatorname{Im}(w_1+w_2+\dots+w_n) \neq 0$$

olduğunu göstermek yeter.

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_1-iy_1$ eşlenik sıfır-yerlerine ve $z_3=x_3$ reel sıfır-yerine karşılık gelen $\operatorname{Im}(w_1+w_2)$ ve $\operatorname{Im}(w_3)$ 'ı hesaplayalım.

$$\operatorname{Im}(w_1+w_2) = \frac{-2y[(x-x_1)^2+y^2-y_1^2]}{[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2][(x-x_1)^2+(y+y_1)^2]}$$

ve dolayısıyla Jensen dairelerinin dışındaki her z noktası için

$$\operatorname{Sg} \operatorname{Im}(w_1+w_2) = -\operatorname{Sg} y \quad 3.1.2.$$

Aynı şekilde

$$\operatorname{Im}(w_3) = \frac{-y}{[(x-x_3)^2+y^2]}$$

ve dolayısıyla her z noktası için

$$\operatorname{Sg} \operatorname{Im}(w_3) = -\operatorname{Sg} y \quad 3.1.3.$$

O halde (3.1.2) ve (3.1.3.) ten dolayı bütün Jensen dairelerinin dışındaki noktalar için

$$\operatorname{Sg} \operatorname{Im} \frac{P'(z)}{P(z)} = -\operatorname{Sg} y \quad 3.1.4.$$

ve özel olarak z Jensen dairelerinin dışında reel olmayan bir nokta ise (3.1.4) ten dolayı

$$\operatorname{Im} \frac{P'(z)}{P(z)} \neq 0$$

Dolayısıyla

$$P'(z) \neq 0$$

Teorem (Walsh) 3.2. $I: \alpha \leq x \leq \beta$ reel eksenin bir intervali olsun. α, β noktaları reel $P(z)$ polinomunun sıfır-yerleri olmasınlar ve $P(z)$ in herhangi bir Jensen dairesinin içinde veya üzerinde bulunmasınlar. $K, \bar{I}$ yı kesen Jensen dairelerinin içini ve I yı ihtiva eden, konfigüreyşin olsun. Şayet $K, P(z)$ in k tane sıfır-yerini ihtiva ediyorsa bu takdirde $K, P(z)$ in en az $k-1$ ve en çok $k+1$ tane kritik noktasını ihtiva eder. [3] [4]

İspat. R , kenarları koordinat eksenlerine paralel ve K yı ihtiva eden en küçük dörtgenin sınırı olsun. (3.1.4) bağıntısından dolayı R , $w = \frac{P'(z)}{P(z)}$ yardımı ile, w düzlemi üzerine, orjini en fazla bir defa çevreleyen bir eğriye tasvir edilir. Bu tasvir eğrisi şu üç halden birinde bulunur.

- a) Orjini pozitif yönde çevreler, yani $\Delta_R \arg \frac{P'(z)}{P(z)} = 2\pi$
- b) Orjini negatif yönde çevreler, yani $\Delta_R \arg \frac{P'(z)}{P(z)} = -2\pi$
- c) Orjini çevrelemez, yani $\Delta_R \arg \frac{P'(z)}{P(z)} = 0$

sırası ile bu hallere karşılık olarak $P(z)$ in K içindeki kritik noktalarının sayısı teorem 1.1 den dolayı $(k+1)$, $(k-1)$ ve k dir.

NETİCE 3.2a. Reel eksenin kapalı herhangi bir intervali $P(z)$ in en çok bir kritik noktasını ihtiva eder, şayet $P(z)$ in hiç bir sıfır-yerini ihtiva etmiyorsa ve şayet bu interval bütün Jensen dairelerinin dışında ise.

BÖLÜM IV

APOLAR POLİNOMLAR

TARİF 1. $P(z) = \sum_{k=0}^n C(n,k)A_k z^k$, $G(z) = \sum_{k=0}^n C(n,k)B_k z^k$, $A_n B_n \neq 0$, polinomlarına biri birine apolardır denir, şayet aşağıdaki bağıntı gerçekte leniyorsa.

$$A_0 B_n - C(n,1)A_1 B_{n-1} + C(n,2)A_2 B_{n-2} - \dots + (-1)^n A_n B_0 = 0$$

TARİF 2. Bir $P_1(z)$ polinomuna n inci dereceden $P(z)$ polinomunun ζ noktasına göre polar-türevi denir, şayet aşağıdaki bağıntıyı gerçekliiyorsa

$$P_1(z) = nP(z) - (z - \zeta)P'(z)$$

$P_1(z)$ in $(n-1)$ inci dereceden olduğu görülüyor. Bu bağıntıya dikkat edilirse $P_1(z)$ in sıfır-yerlerini şu üç grupta toplayabiliriz.

a) ζ noktası. Şayet $P(\zeta) = 0$ ise.

b) $P(z)$ in katlı sıfır-yerleri

c) $\frac{P_1(z)}{P(z)(z-\zeta)} = \frac{n}{z-\zeta} - \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{z-z_j}$ fonksiyonunun sıfır-yerleri.

TARİF 3. $P_k(z)$ polinomuna n inci dereceden bir $P(z)$ polinomunun k inci polar-türevi denir, şayet aşağıdaki bağıntıyı gerçekliiyorsa.

$P_k(z) = (n-k+1)P_{k-1}(z) + (\zeta_k - z)P'_{k-1}(z)$, $k=1,2,\dots,n$, $P_0(z)=P(z)$. Burada ζ_k lar eşit veya farklı olabilirler. Böylece müteakip polar-türevleri tarif etmiş olduk.

Teorem 4.1. Farzedelim ki $P(z)$ polinomunun bütün z_j sıfır-yerleri bir C dairesi içinde ve Z noktası

$$P_1(z) = nP(z) + (\zeta - z)P'(z) \quad 4.1.1.$$

polinomunun herhangi bir sıfır-yeridir. Bu takdirde Z ve ζ noktalarının ikisi birden C nin dışında olamaz. [3]

Bu teoremin ispatı aşağıdaki iki lemmaya dayanmaktadır.

LEMMA I. $C(z) = |z-c|^2 - r^2$ verilmiş olsun, öyleki $C(z)=0$, C dairenin denklemdir. z_1, Z ve w $w = \frac{1}{\bar{Z}-\bar{z}}$ bağıntısını gerçekleyen üç nokta ve $C'(c',r')$, $c' = \frac{Z-c}{C(Z)}$ ve $r' = \frac{r}{|C(Z)|}$ olsun. Bu takdirde w noktası, çemberi Z ve z_1 noktalarını ayırıp ayırmadığına göre, C nin içine ya da dışına düşer.

İspat. $C'(w)$ yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 C'(w) &= |w-c'|^2 - r'^2 = |(\bar{z}-\bar{z}_1)^{-1} - (z-c)C(z)^{-1}|^2 - r^2 C(z)^{-2} \\
 &= [(\bar{z}-\bar{z}_1)^{-1} - (z-c)C(z)^{-1}] [(z-z_1)^{-1} - (\bar{z}-\bar{c})C(z)^{-1}] + C(z)^{-1} \\
 &\quad - |z-c|^2 C(z)^{-2} \\
 &= (\bar{z}-\bar{z}_1)^{-1}(z-z_1)^{-1} - (\bar{z}-\bar{z}_1)^{-1}(\bar{z}-\bar{c})C(z)^{-1} - (z-c)(z-z_1)^{-1}C(z)^{-1} + C(z)^{-1} \\
 &= |z-z_1|^{-2} + C(z)^{-1} - [(z-z_1)(\bar{z}-\bar{c}) + (z-c)(\bar{z}-\bar{z}_1)] \frac{1}{(\bar{z}-\bar{z}_1)(z-z_1)} C(z)^{-1}
 \end{aligned}$$

Burada

$$A \bar{B} + \bar{A} B = |A|^2 + |B|^2 - |A-B|^2$$

özdeşliğinden istifade edilirse

$$(z-c)(\bar{z}-\bar{z}_1) + (\bar{z}-\bar{c})(z-z_1) = |z-c|^2 + |z-z_1|^2 - |z_1-c|^2$$

yani

$$C'(w) = |w|^2 \frac{C(z_1)}{C(z)}$$

z ve z_1 noktalarının biri C nin içinde diğeri dışında ise

$\frac{C(z_1)}{C(z)} < 0$. Dolayısıyla $C'(w) < 0$ ve w, C' nin içinde bulunur. Şayet

z ve z_1 noktalarının ikisi birden C nin içinde veya dışında ise

$\frac{C(z_1)}{C(z)} > 0$. Dolayısıyla $C'(w) > 0$ ve w, C' nin dışında bulunur.

Böylece iddia ispatlanmış olur.

LEMMA 2. Şayet w_j noktalarına yerleştirilmiş bulunan pozitif m_j kütlelerinin belirttiği kütle sistemindeki her bir w_j C' dairesinin içine düşerse, bu takdirde bu sistemin kütle merkezi olan w de C' nin içine düşer.

İspat. Kütle merkezi tarifinden dolayı

$$w = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p m_j w_j, \quad n = \sum_{j=1}^p m_j$$

olduğuna göre şu teşkil edilebilir.

$$m_1(w_1-w) + m_2(w_2-w) + \dots + m_p(w_p-w) = 0 \quad 2.1.$$

Şayet C', w noktasını ihtiva etmiyorsa C', w den bir ϕ açısı ile görülür, öyleki

$$0 < \phi < \pi$$

ve (w_j-w) vektörlerinin hepsi bu bölgenin içine düşerler. Teorem 1.6 dan dolayı (2.1) in sıfır olmaması gerekir. Bu ise hipoteze zıttır. Bu zıtlık iddiayı ispat eder.

Teorem 4.1 in ispatı. Z ve ζ noktalarının her ikisini de C nin dışında kabul edelim. Lucas teoreminden dolayı Z ve ζ , $P(z)$ ve $P'(z)$ in sıfır-yerleri olamazlar. Mademki Z (4.1.1) in sıfır-yeridir, o halde şu eşitliği sağlamalıdır.

$$P_1(Z) = nP(Z) + (\zeta - Z)P'(Z) = 0$$

Buradan

$$\frac{P'(Z)}{P(Z)} = \frac{n}{Z - \zeta} = \sum_{j=1}^p \frac{m_j}{Z - z_j}, \quad n = \sum_{j=1}^p m_j$$

yazılabilir.

$$w = \frac{1}{Z - \zeta}, \quad w_j = \frac{1}{Z - z_j} \quad \text{vazedilirse}$$

$$w = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p m_j w_j$$

olur. Parzedelim ki Z noktası C nin dışındadır. Lemma 1 den dolayı w_j ler C 'nün içinde ve Lemma 2 den dolayı w de C 'nün içinde olur. Tekrar lemma 1 tatbik edilirse ζ nin C nin içinde olduğu görülür. Demekki Z ve ζ noktalarının ikisi birden C nin dışında olamazlar.

Teorem 4.2. Parzedelim ki $P(z)$ polinomunun bütün sıfır-yerleri bir C dairesinin içinde ve $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ ($k \leq n-1$) noktaların hepsi C nin dışında olsun. Bu takdirde $P_1(z), P_2(z), \dots, P_k(z)$ polar-türevlerinin sıfır-yerleri de C nin içine düşer. [3]

İspat. Teorem 4.1 den dolayı $P_1(z)$ in bütün sıfır-yerleri C nin içine düşer. Çünkü ζ_1 , C nin dışında verilmiştir. Aynı muhakemeden dolayı $P_2(z), P_3(z), \dots, P_k(z)$ in sıfır-yerleri de C nin içine düşer.

Apolar polinomlar teorisinde ve kritik noktalarla ilgili çalışmalarda önemli rolü olan GRACE teoreminin ispatında sadeliği temin için $P_k(z)$ polar-türevi, doğrudan doğruya $P(z)$ ve $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ ya bağlı olarak ifade edilmelidir. Bunun için $P(z)$ ve $P_k(z)$ i aşağıdaki şekilde alalım.

1. $P(z) = \sum_{j=0}^n C(n, j) A_j z^j$, $P_k(z) = \sum_{j=0}^{n-k} C(n-k, j) A_j^{(k)} z^j$, $n-k < j < n$ için $A_j^{(k)}$ Bu bağıntılardan $P_{k-1}(z)$ ve $P_k(z)$ için bulunan değerler

$$2. P_k(z) = (n-k+1) P_{k-1}(z) + (\zeta_k - z) P'_{k-1}(z), \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

bağıntısında yerine konur ve z^j lerin katsayıları eşitlenirse

$$3. A_j^{(k)} = (n-k+1) (A_j^{(k-1)} + A_{j+1}^{(k-1)} \zeta_k)$$

elde edilir. Şimdi (3) ün tekrarlı tatbiki ile, $N(k, i), \zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_k$ lerin mümkün olan bütün çarpımlarının toplamlarından tegekkül etmiş bir simetrik fonksiyon - her defasında 1 tane alınarak- olduğuna göre

$$4. A_j^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) \sum_{i=0}^k N(k, i) A_{i+j}$$

bağıntısının elde edileceği gösterilmelidir. Bu gösterilirse (1) den dolayı $P_k(z)$ istenilen şekilde ifade edilmiş olur.

Tümevarım metodu ile ispat edilebilir. $k=1$ için (3) ile (4) ün aynı olduğu görülüyor. k için doğru kabul edilerek $k+1$ için doğruluğu görülebilir. Şöyleki, önce (3) te k yerine $(k+1)$ konularak elde edilen eşitlikte $A_j^{(k)}$ nin (4) teki değerleri konursa aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\begin{aligned} A_{j+1}^{(k+1)} &= n(n-1)\dots(n-k) \sum_{i=0}^k [N(k, i) A_{i+j+1} + \zeta_{k+1} N(k, i) A_{i+j}] \\ &= n(n-1)\dots(n-k) \sum_{i=0}^{k+1} [N(k, i) + \zeta_{k+1} N(k, i-1)] A_{i+j} \\ &= n(n-1)\dots(n-k) \sum_{i=0}^{k+1} N(k+1, i) A_{i+j} \end{aligned}$$

Böylece (4) bağıntısının varlığı ispat edilmiş olur.

Teorem (GRACE) 4.3. $P(z)$ ve $G(z)$ apolar iki polinom olsunlar. Şayet bir C dairesi bunlardan birinin bütün sıfır-yerlerini ihtiva ediyor ise, bu daire diğerrinin en az bir sıfır-yerini ihtiva eder. [5] [6]

İspat. Farzedelim ki $P(z)$ in $z_1, z_2, \dots, z_n$ sıfır-yerleri C de bulunsun ve $G(z)$ in $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1}$ sıfır-yerleri C nin dışında olsun. Teorem 4.2 ve $P_k(z) = (n-k+1) P_{k-1}(z) + (\zeta_k - z) P'_{k-1}(z)$ $k=1, \dots, n$ bağıntısı gözönüne alınır, her bir $P_k(z)$ polar-türevinin sıfır-yerleri de C de bulunur. Özel olarak $P_{n-1}(z)$ dikkate alınır (1) bağıntısından dolayı

$$P_{n-1}(z) = A_0^{(n-1)} + A_1^{(n-1)} z \quad 4.3.1.$$

burada (4) ten dolayı

$$A_0^{(n-1)} = n! [A_0 + N(n-1,1)A_1 + N(n-1,2)A_2 + \dots + N(n-1,n-1)A_{n-1}]$$

$$A_1^{(n-1)} = n! [A_1 + N(n-1,1)A_2 + N(n-1,2)A_3 + \dots + N(n-1,n-1)A_n]$$

olur.

$$C(n,p)B_{n-p} = (-1)^p N(n,p)B_n \quad \text{ve} \quad N(n-1,k) + N(n-1,k-1)\zeta_n = N(n,k)$$

Eşitlikleri gözönüne alınırsa (4.3.1) den dolayı

$$P_{n-1}(\zeta_n) = n! [A_0 + N(n,1)A_1 + N(n,2)A_2 + \dots + N(n,n)A_n]$$

$$= \frac{n!}{B_n} [A_0 B_n - C(n,1)A_1 B_{n-1} + C(n,2)A_2 B_{n-2} - \dots + (-1)^n C(n,n)A_n B_0]$$

mademki $P(z)$ ve $G(z)$ apolardır o halde bu son bağıntı sıfıra eşit olur. Böylece teorem ispat edilmiştir.

NOTICE 4.3a. $P(z)$ ve $G(z)$ apolar ise bu takdirde $P(z)$ in bütün sıfır-yerlerini çevreleyen herhangi bir A konveks bölgesi $G(z)$ in bütün sıfır-yerlerini çevreleyen B konveks bölgesi ile en az bir ortak noktaya sahiptirler.

Çünkü, A ve B nin ortak noktaları olmasa, bu bölgeler A yı çevreleyen bir C çemberi ile ayırte dilediği. Fakat bu çember $G(z)$ in hiç bir sıfır-yerini ihtiva etmez. Bu ise Grace teoremin aykırıdır.

Genel olarak polinomlar $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $G(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ şeklinde verildiğinden bölümün başlangıcında verilen apolar polinomlar tanımını buna göre yeniden ifade etmek gerekir.

TARİF 4. $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $G(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$, $a_n b_n \neq 0$ polinomlarına biri birine apolardır denir, gayet kat sayılar arasında

$$a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \frac{1}{C(n,2)} a_2 b_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n b_0 = 0$$

bağıntısı varsa.

Bu tarifi ilk tarifle aynı olduğu gösterilebilir.

Gerçekten

$$a_k = C(n,k)A_k, \quad b_k = C(n,k)B_k, \quad k=0,1,2,\dots,n \text{ vazedelim.}$$

Buradan A_k ve B_k nin değerleri sırasıyla a_k ve b_k cinsinden bulunup ilk tarifte yerine konur ve $C(n,k) = C(n,n-k)$ hatırlanırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{a_0}{C(n,0)} \frac{b_n}{C(n,n)} - C(n,1) \frac{a_1}{C(n,1)} \frac{b_{n-1}}{C(n,n-1)} + C(n,2) \frac{a_2}{C(n,2)} \frac{b_{n-2}}{C(n,n-2)} - \dots + (-1)^n a_n b_0 \\ &= a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \frac{1}{C(n,2)} a_2 b_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n b_0 = 0 \end{aligned}$$

yani

$$A_0 B_n - C(n,1) A_1 B_{n-1} + \dots + (-1)^n A_n B_0 = a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \dots + (-1)^n a_n b_0 = 0$$

Teorem 4.4 Farzedelim ki $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$, $G(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$, $a_n b_n \neq 0$ apolar iki polinom olsun. Bu takdirde $S(n,p)$ ve $N(n,p)$ köklerin simetrik fonksiyonları olmak üzere

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k [C(n,k)]^{-1} S(n,n-k) N(n,k) = 0 \quad [3]$$

İspat. Köklerin simetrik fonksiyonları ile kat sayıları arasındaki bağıntı

$$a_{n-p} = (-1)^p S(n,p) a_n, \quad b_{n-p} = (-1)^p N(n,p) b_n, \quad p=1,2,3,\dots,n$$

şeklinde olduğuna göre buradan bulunan değerler tarif 4 te yerine konursa

$$\begin{aligned} a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \frac{1}{C(n,2)} a_2 b_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n b_0 \\ = (-1)^n S(n,n) N(n,0) a_n b_n - (-1)^n \frac{1}{C(n,1)} S(n,n-1) N(n,1) a_n b_n + \dots + (-1)^{2n} a_n b_n \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$(-1)^n S(n,n) N(n,0) - \frac{(-1)^n}{C(n,1)} S(n,n-1) N(n,1) + \dots + (-1)^{2n} S(n,0) N(n,n) = 0$$

yani

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k [C(n,k)]^{-1} S(n,n-k) N(n,k) = 0$$

Teorem 4.5 Farzedelim ki $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomunun kat sayıları arasında $\sum_{k=0}^n \ell_k \frac{a_k}{C(n,k)} = 0$ bağıntısı vardır. Bu takdirde $G(z) = L[(t-z)^n]$ polinomu $P(z)$ e apolardır. [3]

İspat.

$$\sum_{k=0}^n \ell_k \frac{a_k}{C(n,k)} = \ell_0 \frac{a_0}{C(n,0)} + \ell_1 \frac{a_1}{C(n,1)} + \dots + \ell_n \frac{a_n}{C(n,n)} = 0 \quad 4.5.1.$$

ve

$$G(z) = L[(t-z)^n] = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \ell_k C(n,k) z^{n-k} \quad 4.5.2.$$

olduğuna göre

$b_{n-k} = (-1)^{n-k} \ell_k$ vazedilir ve ℓ_k nin değerleri buradan bulunarak (4.5.1) de yerine konursa

$$\begin{aligned} \ell_0 \frac{a_0}{C(n,0)} + \ell_1 \frac{a_1}{C(n,1)} + \dots + \ell_n \frac{a_n}{C(n,n)} &= (-1)^n a_0 b_n + \frac{(-1)^{n-1}}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 \\ &= (-1)^n \left[a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \frac{1}{C(n,2)} a_2 b_{n-2} - \dots + (-1)^n a_n b_0 \right] = 0 \end{aligned}$$

Bu eşitliğe dikkat edilirse tarif 4 ile aynıdır.

Teorem 4.6. Farzedelim ki $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomunun a_0 ve a_n kat sayıları $a_0 + a_n = 0$ eşitliğini gerçeklesin. Bu takdirde $P(z)$ in $n+1$ kökleri vardır.

in $|z| = 1$ dairesi içinde veya üzerinde en az bir sıfır-yeri vardır.

İspat. Burada bütün sıfır-yerleri $|z|=1$ in içinde veya üzerinde bulunan bir $G(z)$ polinomunun $P(z)$ e apolar olduğunu göstermek yeter. İddia ediyoruz ki $G(z)=z^{n+1}$ polinomu $P(z)$ e apolardır. Gerçekten $G(z)=z^{n+1}$ polinomunun kat sayılarını şöyle gösterilebilir.

$$b_n=1, b_{n-1}=0, b_{n-2}=0, \dots, b_1=0, b_0=1$$

Bu değerler tarif 4 te yerine konur ve hipotez gözönünde tutulursa

$$a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \dots + (-1)^n a_n b_0 = a_0 \cdot 1 + (-1)^n a_n = a_0 + (-1)^n a_n = 0$$

Çünkü, $(-1)^n$, n nin çift veya tek oluşuna göre ∓ 1 dir.

NOTICE 4.6a. $P(z)$ in bütün sıfır-yerleri reel ipe $a_0 + a_n = 0$ şartı gerçekleşiyor ise, bu takdirde $P(z)$ in $-1 \leq x \leq 1$ intervalinde en az sıfır-yeri vardır.

Çünkü, verilen şart $\frac{a_0}{a_n} = \mp 1$ şeklinde yazılırsa $\frac{a_0}{a_n}$ sıfır-yerlerinin çarpımını gösterir. Demekki sıfır-yerleri çarpımı ∓ 1 e eşittir. Bir çarpımın ∓ 1 e eşit olması için ya bütün çarpanların mutlak değeri 1 olmalı veya çarpanlardan en az birinin mutlak değeri 1 den küçük olmalı.

Teorem 4.7. $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomunun katsayıları arasında

$$a_0 + \frac{a_2}{3} z_1^2 + \frac{a_4}{5} z_1^4 + \frac{a_6}{7} z_1^6 + \dots = 0$$

bağıntısı var ise, $|z_1| \cdot \cot \frac{\pi}{n+1}$ yarı-çaplı ve orjin merkezli dairenin içinde $P(z)$ in en az bir sıfır-yeri vardır.

İspat. İddianın ispat edilebilmesi için, bütün sıfır-yerleri teoremden verilen daire içine veya üzerine düşen bir $G(z)$ polinomunun tesbiti ve bu $G(z)$ polinomunun $P(z)$ e apolar olduğunun gösterilmesi gerekir.

İddia ediyoruz ki $G(z) = (z+z_1)^{n+1} - (z-z_1)^{n+1}$ polinomu aradığımız polinomdur. Gerçekten $G(z)=0$ in bütün sıfır-yerleri orjin merkezli $|z_1| \cdot \cot \frac{\pi}{n+1}$ yarı-çaplı dairede bulunur. Şimdi bu polinomun $P(z)$ e apolar olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned}
 G(z) &= (z+z_1)^{n+1} - (z-z_1)^{n+1} = z^{n+1} + C(n+1,1)z_1z^n + C(n+1,2)z_1^2z^{n-1} + \dots + \\
 &\quad C(n+1,n+1)z_1^{n+1} - z^{n+1} + C(n+1,1)z_1z^n - C(n+1,2)z_1^2z^{n-1} + \dots \\
 &= 2 [C(n+1,1)z_1z^n + C(n+1,3)z_1^3z^{n-2} + C(n+1,5)z_1^5z^{n-4} + \dots]
 \end{aligned}$$

$G(z)$ in katsayılarını şöyle göstermek mümkündür.

$$b_n = 2C(n+1,1)z_1, \quad b_{n-1} = 0, \quad b_{n-2} = 2C(n+1,3)z_1^3, \quad b_{n-3} = 0, \dots$$

Bu değerler tarif 4 te yerine konur ve hipotez gözönünde tutulursa

$$\begin{aligned}
 a_0 b_n - \frac{1}{C(n,1)} a_1 b_{n-1} + \frac{1}{C(n,2)} a_2 b_{n-2} - \frac{1}{C(n,3)} a_3 b_{n-3} + \dots + (-1)^n a_n b_0 \\
 = 2 [C(n+1,1)a_0 z_1 + \frac{C(n+1,3)}{C(n,2)} a_2 z_1^3 + \frac{C(n+1,5)}{C(n,4)} a_4 z_1^5 + \dots] \\
 = 2 [(n+1)a_0 z_1 + (n+1) \frac{a_2}{3} z_1^3 + (n+1) \frac{a_4}{5} z_1^5 + \dots] \\
 = 2(n+1)z_1 [a_0 + \frac{a_2}{3} z_1^2 + \frac{a_4}{5} z_1^4 + \dots] = 0
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla iddia gerçektir.

NETİCE 4.7a. $P(z)$ in katsayıları arasında $a_0 + \frac{a_2}{3} + \frac{a_4}{5} + \dots = 0$

bağıntısının varlığı kabul edilirse $P(z)$ in orjin merkezli

$\text{Cot } \frac{\pi}{n+1}$ yarı-çaplı dairede en az bir sıfır-yeri vardır.

BÖLÜM V

p- sıfır-yeri bilinen polinomlarda kritik noktaların dağılımı.

Bir $P(z)$ polinomunun p tane sıfır-yeri r yarı-çaplı bir C dairesinin içine düştüğünde, $P(z)$ in en az $p-1$ tane kritik noktasını ihtiva eden aynı merkezli en küçük yarı-çaplı dairenin bulunması problemi ilk defa Kakeya tarafından ortaya atıldı. Ve gösterildi ki genel olarak $r=r_0(n,p)$ gibi bir $\phi(n,p)$ fonksiyonu vardır. Bu bölümde $\phi(n,p)$ fonksiyonunu tesbite çalışalım ve önce $p=2$ için inceleyelim.

Teorem 5.1. $P(z)$ polinomunun herhangi iki sıfır-yeri z_1 ve z_2 olsun. Bu takdirde $P(z)$ in $C(\frac{z_1+z_2}{2}, \frac{|z_1-z_2|}{2} \cot \frac{\pi}{n})$ dairesinde en az bir kritik noktası vardır. [5] [6] [11]

İspat. $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ olsun. $P'(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (C(n-1,k) A_k) z^k$ olur.

$b_k = C(n-1,k) A_k = (k+1) a_{k+1}$, $k=0,1,2,\dots,n-1$ vazedir ve teorem 4.2 de olduğu gibi düşünülürse

$\sum_{k=0}^{n-1} l_k b_k = l_0 b_0 + l_1 b_1 + l_2 b_2 + \dots + l_{n-1} b_{n-1} = l_0 a_1 + l_1 2a_2 + l_2 3a_3 + \dots + l_{n-1} n a_n = 0$ bulunur. Bu ise $P'(z)$ in katsayıları arasında lineer bir bağıntıdır.

Halbuki z_1 ve z_2 $P(z)$ in sıfır-yerleri olduğundan ayrıyeten

$$a_1(z_1 - z_2) + a_2(z_1^2 - z_2^2) + \dots + a_n(z_1^n - z_2^n) = 0 \quad 5.1.1.$$

olur. Bu son iki eşitlikten dolayı

$$l_k = \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1 - z_2}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1 \quad 5.1.2.$$

Madenki

$$G(z) = L[(t-z)^{n-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} l_k C(n-1,k) z^{n-1-k}$$

polinomu $P'(z)$ e apolardır, l_k nin değeri yerine konursa

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \frac{z_1^{k+1} - z_2^{k+1}}{z_1 - z_2} C(n-1,k) z^{n-1-k}$$

olur. Bu polinomun sıfır-yerlerini bulalım.

$$G(z) = (-1)^{n-1} \frac{z_1 - z_2}{1} C(n-1,0) z^{n-1} + (-1)^{n-2} \frac{z_1^2 - z_2^2}{2} C(n-1,1) z^{n-2} + \dots + \frac{z_1^n - z_2^n}{n} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Yani} \quad & \frac{z_1^n - z_2^n}{n} - \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{n-1} C(n-1,n-2) z + \frac{z_1^{n-2} - z_2^{n-2}}{n-2} C(n-1,n-3) z^2 - \dots = 0 \\ & \frac{z_1^n - z_2^n}{n} - \frac{z_1^{n-1} - z_2^{n-1}}{n-1} \frac{n-1}{1} z + \frac{z_1^{n-2} - z_2^{n-2}}{n-2} \frac{(n-1)(n-2)}{2!} z^2 - \dots = 0 \end{aligned}$$

ve buradan

$$(z_1^n - z_2^n) - n(z_1^{n-1} - z_2^{n-1})z + \frac{n(n-1)}{2!}(z_1^{n-2} - z_2^{n-2})z^2 - \dots = 0$$

Bu son ifade ise şu şekilde yazılabilir.

$$(z_1 - z)^n - (z_2 - z)^n = 0 \quad 5.1.3.$$

Bu denklemin bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden daire de Grace teoreminden dolayı $P(z)$ in en az bir kritik noktası bulunur.

(5.1.3) ifadesinin sıfır-yerleri w , 1 in n inci mertebeden kökü olmak üzere şöyle yazılabilir.

$$(z_1 - z) = w(z_2 - z)$$

z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktasına "0" denirse $\frac{z - z_1}{z - z_2} = e^{\frac{2\pi i r}{n}}$, $r=1,2,\dots,n-1$. ve

$$\frac{z - \frac{z_1 + z_2}{2}}{\frac{|z_1 - z_2|}{2}} = i \cot \frac{r\pi}{n}$$

olduğuna göre şunu elde ederiz.

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{|z_1 - z_2|}{2} i \cot \frac{r\pi}{n} \quad 5.1.4.$$

$\cot \frac{r\pi}{n}$ nin en büyük değeri $\cot \frac{\pi}{n}$ olduğundan (5.1.3) ün bütün sıfır-yerlerini ihtiva eden daire, (5.1.4) den dolayı,

$$C\left(\frac{z_1 + z_2}{2}, \frac{|z_1 - z_2|}{2} \cot \frac{\pi}{n}\right)$$

dir.

Teorem 5.2. $P(z)$ polinomunun z_1 ve z_2 gibi iki sıfır-yeri r yarı-çaplı bir dairenin içinde veya üzerinde bulunursa $P(z)$ in en az bir kritik noktası aynı merkezli $r' = r \csc \frac{\pi}{n}$ yarı-çaplı C' dairesinin içinde veya üzerinde bulunur.

İspat. Burada yapılacak olan, teorem 5.1 deki C dairesinin zarfını bulmaktan ibarettir. Önce C dairesi üzerindeki herhangi bir ζ noktasını

$$\zeta = \frac{z_1 + z_2}{2} + e^{i\psi} \frac{|z_1 - z_2|}{2} \cot \frac{\pi}{n} \quad 5.2.1.$$

şeklinde ifade edelim. z_1, z_2 noktalarının $|z|=r$ dairesi üzerinde olduğunu kabul etmek yeter. Bu durumda $z_1 = z_2 e^{i\psi}$ veya $z_2 = z_1 e^{-i\psi}$ $0 \leq \psi \leq \pi$ dir.

$$|\zeta| \leq \frac{r}{2} |1 + e^{i\psi}| + \frac{r}{2} |1 - e^{i\psi}| \cot \frac{\pi}{n}$$

$$\leq r \left(\cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cot \frac{\pi}{n} \right) \leq r \sin \left(\frac{\pi}{n} + \frac{\psi}{2} \right) \csc \frac{\pi}{n} \leq r \csc \frac{\pi}{n}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5.3. Farzedelim ki $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ polinomunun katsayıları, $a_1 + a_3 z_1^2 + a_5 z_1^4 + \dots = 0$ bağıntısını gerçekleştiriyorlar. Bu takdirde $|z| = |z_1| \cot \frac{\pi}{n}$ dairesi içinde $P(z)$ in en az bir kritik noktası vardır.

İspat. $G(z) = (z+z_1)^n - (z-z_1)^n$ polinomunu alalım. Bu polinomun bütün sıfır-yerleri $|z| = |z_1| \cot \frac{\pi}{n}$ dairesinin içindedir. O halde $G(z)$ in $P'(z)$ e apolar olduğu gösterilebilirse iddia gerçekleşmiş olur.

$$G(z) = (z+z_1)^n - (z-z_1)^n = 2 [C(n,1)z_1 z^{n-1} + C(n,3)z_1^3 z^{n-3} + C(n,5)z_1^5 z^{n-5} + \dots]$$

$G(z)$ ve $P'(z)$ polinomlarının katsayıları sırasıyla

$$b_{n-1} = 2C(n,1)z_1, \quad b_{n-2} = 0, \quad b_{n-3} = 2C(n,3)z_1^3, \quad b_{n-4} = 0, \quad \dots$$

$$c_0 = a_1, \quad c_1 = 2a_2, \quad c_3 = 3a_3, \quad c_4 = 4a_4, \quad \dots, \quad c_{n-1} = na_n$$

ile gösterilir ve $(n-1)$ inci dereceden polinomlar için yazılan apolarlık bağıntısında hipotez gözönünde tutulursa

$$\begin{aligned} c_0 b_{n-1} - \frac{1}{C(n-1,1)} c_1 b_{n-2} + \frac{1}{C(n-1,2)} c_2 b_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1} b_0 \\ = 2 [C(n,1)a_1 z_1 + \frac{3C(n,3)}{C(n-1,2)} a_3 z_1^3 + \frac{5C(n,5)}{C(n-1,4)} a_5 z_1^5 + \dots] \\ = 2 [na_1 z_1 + na_3 z_1^3 + na_5 z_1^5 + \dots] = 2nz_1 (a_1 + a_3 z_1^2 + a_5 z_1^4 + \dots) = 0 \end{aligned}$$

Böylece ikinci iddia da gösterilmiş oldu. Şayet bu teoremden katsayılar arasında, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \dots = 0$ bağıntısı kabul edilirse polinomun $\cot \frac{\pi}{n}$ dairesinde (orjin merkezli) en az bir kritik noktasının olduğu görülür. Bu son katsayılar bağıntısı ise, $+1$ ve -1 in $P(z)$ in sıfır-yeri olmaları haline karşılık gelen bağıntıdır.

Teorem 5.4. $P(z)$ n inci dereceden bir polinom ve $z_1, z_2, \dots, z_m$ noktaları ise, K konveks bölgesinin herhangi m noktası olsun

$$\sigma, \quad \sigma \sum_{j=1}^m \alpha_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j P(z_j), \quad \mu \leq \arg \alpha_j \leq \mu + \delta < \mu + \pi \quad \text{s. 4.1}$$

olarak tarif edilmiş ise, bu takdirde $S(K, \frac{\pi-\delta}{n})$ yıldız bölgesi en az bir s noktası ihtiva eder, öyleki $P(s) = \sigma$ dir. [7]

Teorem 5.5. Bir $P(z)$ polinomu verilmiş olsun ve $C: z = \psi(t)$ (t reel $a \leq t \leq b$) bir konveks K bölgesinde rektifiye edilebilir bir eğri olsun. Sürekli olan $\alpha(z)$ fonksiyonu C eğrisi üzerinde

$$\mu \leq \arg \alpha(t) \leq \mu + \delta < \mu + \pi$$

eşitsizliğini gerçeklesin. Bu takdirde $S(K, \frac{\pi-\delta}{n})$ yıldız bölgesinde

$$\text{en az bir } s \text{ için} \quad \int_a^b P[\psi(t)] \alpha[\psi(t)] dt = P(s) \int_a^b \alpha[\psi(t)] dt \quad \text{s. s. 1.}$$

Bu teoremlerin ispatları biribirinin aynı olduğundan burada sadece teorem 5.4 ü ispat edeceğiz.

İspat. (5.4.1) den dolayı

5.4.2.

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j [P(z_j) - \sigma] = 0$$

5.4.2

$a_1, a_2, \dots, a_n$ noktaları $P(z)$ in σ değerini aldığı noktalar ise şunu teşkil edebiliriz.

$$P(z) - \sigma = A(z-a_1)(z-a_2)\dots(z-a_n)$$

5.4.3.

Şayet her a_k , $S(K, \frac{\pi-\delta}{n})$ nin dışına düşseydi K bölgesi, her bir a_k da $\frac{\pi-\delta}{n}$ den daha küçük bir açı ile saptardı. Yani bir δ_k sabiti bulunabilirdi, öyleki

$$0 \leq \arg(z_j - a_k) - \delta_k < \frac{\pi-\delta}{n} \quad k=1, 2, \dots, n. \quad 5.4.4.$$

Şimdi aşağıdaki eşitsizlikleri yazalım

$$0 \leq \arg(z_j - a_1) - \delta_1 < \frac{\pi-\delta}{n}$$

$$0 \leq \arg(z_j - a_2) - \delta_2 < \frac{\pi-\delta}{n}$$

.....

$$0 \leq \arg(z_j - a_n) - \delta_n < \frac{\pi-\delta}{n}$$

bunlar taraf tarafa toplanırsa aşağıdaki eşitsizlik bulunur.

$$0 \leq \arg(z_j - a_1)(z_j - a_2)\dots(z_j - a_n) - (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n) < \pi - \delta$$

Bu son eşitsizliğin yardımı ile (5.4.3) ifadesinden şunu teşkil etmek mümkündür.

$$0 \leq \arg[P(z_j) - \sigma] - \arg A - \sum_{k=1}^n \delta_k < \pi - \delta \quad j=1, 2, \dots, m$$

Böylece teorem 1.6 dan dolayı

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j [P(z_j) - \sigma] \neq 0$$

Bu ise hipoteze zıttır. Dolayısıyla bütün a_k ların $S(K, \frac{\pi-\delta}{n})$ nin dışında olması mümkün değildir. Yani $P(z)$, $S(K, \frac{\pi-\delta}{n})$ de en az bir defa σ değerini alır.

Teorem 5.6. Farzedelim ki n inci dereceden bir $P(z)$ polinomu $P(z_1) + P(z_2) = 0$ şartını sağlıyor. Bu takdirde $P(z)$ in $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ merkezli $\frac{1}{2}|z_1 + z_2| \cot \frac{\pi}{2n}$ yarı-çaplı dairede en az bir sıfır-yeri vardır.

İspat. Teorem 5.4 de $\delta=0$, $\alpha_j \equiv 1$, $m=2$ alınırsa

$$\sigma = 0 \quad 0/2 \text{ çapından}$$

$S(K, \frac{\pi}{n})$ bölgesinde $P(z)$ in en az bir sıfır-yeri bulunur. K burada $z_1 z_2$ doğru parçası olduğundan bunu $\frac{\pi}{n}$ açısı altında gören noktaların geometrik yeri $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ merkezli $\frac{1}{2}|z_1-z_2| \cot \frac{\pi}{2n}$ yarı-çaplı çemberdir.

Teorem 5.7. $P(z)$ n inci dereceden bir polinom, $C: z = \psi(t)$ (t reel $a \leq t \leq b$) K konveks bölgesinde rektifiye edilebilen bir eğri ve $\alpha(z)$, C nin üzerinde aşağıdaki şartı sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\mu \leq \arg \alpha(t) \leq \mu + \delta < \mu + \pi$$

Şayet

$$\int_a^b P[\psi(t)] \alpha[\psi(t)] dt = 0 \quad 5.7.1.$$

ise, bu takdirde $P(z)$ polinomu $S(K, \frac{\pi-\delta}{n})$ yıldız bölgesinde en az bir tane sıfır-yerine sahiptir. [7]

İspat. (5.7.1) bağıntısı (5.5.1) ile karşılaştırılırsa $\int_a^b \alpha[\psi(t)] dt \neq 0$ olduğundan, $P(s)=0$ olduğu görülür.

Teorem 5.8. $P(z)$ polinomu verilmiş olsun. $C: z = \psi(t)$ (t reel $a \leq t \leq b$) K konveks bölgesinde rektifiye edilebilir bir eğri ve $\alpha(z)$, C nin üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun, öyleki C nin üzerinde

$$\mu \leq \arg \alpha(t) \leq \mu + \delta < \mu + \pi$$

$P(z)$ polinomu, z_1 ve z_2 noktalarında aynı değeri alıyorsa $P(z)$ in $S(K, \frac{\pi}{n-1})$ bölgesinde en az bir kritik noktası vardır. [3] [7]

İspat. Teorem 5.7 de olduğu gibi düşünelim ve

$\gamma = 0$, $\alpha(z) \equiv 1$, $a=0$, $b=1$, $\psi(t) = (1-t)z_1 + tz_2$ alalım. Aynı teoreme n yerine $(n-1)$ alınırsa

$$\int_0^1 P[(1-t)z_1 + tz_2] dt = \frac{P(z_1) - P(z_2)}{z_1 - z_2} = 0 \quad 5.8.1.$$

olur, ve bu eşitlik (5.7.1) ile aynıdır. O halde $P(z)$ in $S(K, \frac{\pi}{n-1})$ de en az bir kritik noktası vardır.

Bu teoremin neticesi olarak aşağıdaki teoremi ispata lüzum kalmadan ifade edebiliriz.

Teorem 5.9. Farzedelim ki $P(z)$ polinomu z_1 ve z_2 noktala-

larında sıfır olsun. Bu takdirde $z_1 z_2$ doğru parçasını en az $\frac{\pi}{n-1}$ açısı ile gören noktaların teşkil ettiği bölgede $P(z)$ in en az bir kritik noktası vardır.

Bu teoremi katlı sıfır-yerlerine sahip polinomlara tatbik edebiliriz. M. Marden'e ait aşağıdaki teorem bunu gerçekleştirir.

Teorem 5.10. Şayet z_1 ve z_2 $P(z)$ polinomunun k_1 ve k_2 katlı sıfır-yerleri ise, bu takdirde $P(z)$ in z_1 ve z_2 den farklı en az bir kritik noktası $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$ merkezli $\frac{1}{2}|z_1-z_2|\cot\frac{\pi}{2q}$ yarı-çaplı C dairesi içinde bulunur. ($q=n+1-k_1-k_2$)

İspat. $z_1=-1$, $z_2=+1$ almak genelliğe halel getirmez. Buna göre $\alpha(z)=(1+z)^{k-1}(1-z)^{k-1}$, $Q(z)=\frac{P'(z)}{\alpha(z)}$, $\psi(t)\equiv t$ alınırsa, $z=\psi(t)$ ($-1\leq t\leq 1$) doğrusu üzerinde $\arg\alpha(z)=0$, ve $Q(z)$ q cü derecedendir. Şimdi aşağıdaki ifadeyi teşkil edelim.

$$\int_a^b Q[\psi(t)]\alpha[\psi(t)]dt = \int_{-1}^1 Q(t)\alpha(t)dt = \int_{-1}^1 \frac{P'(t)}{\alpha(t)}\alpha(t)dt = \int_{-1}^1 P'(t)dt = P(1)-P(-1)=0$$

0 halde, teorem 5.7 dikkate alınırca, $Q(z)$ polinomunun $-1\leq z\leq 1$ doğru parçasını $\frac{\pi}{q}$ açısı altında gören noktaların belirttiği bölgede en az bir sıfır-yeri olduğu görülür. Halbuki $Q(z)$ in bu sıfır-yeri $P(z)$ in kritik noktası olduğundan teorem ispatlanmıştır. Bu noktaların cümlesini ihtiva eden en küçük yarı-çaplı daire

$$C\left[\frac{1}{2}(z_1+z_2), \frac{1}{2}|z_1-z_2|\cot\frac{\pi}{2q}\right]$$

dir.

Teorem 5.11. Farzedelim ki $C_1, P(z)$ polinomunun k_1 ve k_2 katlı iki sıfır-yerini ihtiva eden r yarı-çaplı dairedir. Bu takdirde aynı merkezli $r\csc\frac{\pi}{2q}$, ($q=n+1-k_1-k_2$) yarı-çaplı C' dairesi $P(z)$ in toplam katlılığı en az (k_1+k_2-1) olan kritik noktalarını ihtiva eder.

İspat. Burada aranılan C' dairesi, aşikar olarak, teorem 5.1 da belirtilmiş olan dairenin zarfıdır. Bu daire ise teorem 5.2 de yapılan işlemlerin tekrarı ile bulunur.

Şimdi Bölüm V in başlangıcında vazettiğimiz problemin genel halini cevaplandırmaya çalışalım. Önce yardımcı üç teoremi ispat edelim.

Teorem 5.12. Farzedelim ki z_k ($k=1,2,\dots,n$) noktaları $P(z)$ polinomunun sıfır-yerleri ve z'_i ($i=1,2,\dots,q$) noktaları, $P(z)$ in sıfır-yerlerinden farklı, kritik noktaları olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k - z'_i} = 0, \quad k=1,2,\dots,n \text{ ve } i=1,2,\dots,q \quad [8], [9]$$

İspat. $P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$ eşitliğinden dolayı

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \dots + \frac{1}{z-z_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z-z_k} \quad 5.12.1.$$

$P'(z'_i) = 0$ ve $P(z'_i) \neq 0$ olduğuna göre (5.12.1) den dolayı

$$\frac{P'(z'_i)}{P(z'_i)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z'_i - z_k} = 0$$

Teorem 5.13. Farzedelim ki $P(z)$ polinomunun sıfır-yerleri $z_1, z_2, \dots, z_n$ ve kritik noktaları ise $z'_1, z'_2, \dots, z'_q$ olsun. Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(z'_1 - z_k)(z'_2 - z_k) \dots (z'_q - z_k)} = 0 \quad [8]$$

İspat. Şu bağıntıyı alalım

$$\frac{1}{(z'_1 - x)(z'_2 - x) \dots (z'_q - x)} = \frac{A_1}{z'_1 - x} + \frac{A_2}{z'_2 - x} + \dots + \frac{A_q}{z'_q - x}$$

Buradan şunu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z'_1 - z_1)(z'_2 - z_1) \dots (z'_q - z_1)} &= \frac{A_1}{z'_1 - z_1} + \frac{A_2}{z'_2 - z_1} + \dots + \frac{A_q}{z'_q - z_1} \\ \frac{1}{(z'_1 - z_2)(z'_2 - z_2) \dots (z'_q - z_2)} &= \frac{A_1}{z'_1 - z_2} + \frac{A_2}{z'_2 - z_2} + \dots + \frac{A_q}{z'_q - z_2} \\ &\vdots \\ \frac{1}{(z'_1 - z_n)(z'_2 - z_n) \dots (z'_q - z_n)} &= \frac{A_1}{z'_1 - z_n} + \frac{A_2}{z'_2 - z_n} + \dots + \frac{A_q}{z'_q - z_n} \end{aligned}$$

Bunları taraf tarafa toplayalım ve $A_1, A_2, \dots, A_q$ ler $z'_1, z'_2, \dots, z'_q$ ye bağlı ifadeler olduğundan toplam dışına alalım.

$$\sum_{x=z_1, z_2, \dots, z_n} \frac{1}{(z'_1 - x)(z'_2 - x) \dots (z'_q - x)} = A_1 \sum_{x=z_1, z_2, \dots, z_n} \frac{1}{z'_1 - x} + A_2 \sum_{x=z_1, z_2, \dots, z_n} \frac{1}{z'_2 - x} + \dots + A_q \sum_{x=z_1, z_2, \dots, z_n} \frac{1}{z'_q - x} \quad 5.13.1.$$

Bu eşitliğin sağ tarafındaki terimler teorem 5.12. dan dolayı teker teker sıfır olduğundan (x yerine z_k) konduğunda).

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(z'_1 - z_k)(z'_2 - z_k) \dots (z'_q - z_k)} = 0$$

Teorem 5.14. Farzedelim ki, $p+q=n+1$ olmak üzere, $z_1, z_2, \dots, z_p$ noktaları $P(z)$ in sıfır-yerleri, $z'_1, z'_2, \dots, z'_q$ noktaları ise $P(z)$ in kritik noktaları olsun. $j_1, j_2, \dots, j_q$ ler

bağımsız olarak $1, 2, 3, \dots, p$ değerlerini alabilsin ve

$D_{j_1 j_2 \dots j_p} = \prod_{m=1}^p (\delta_{m j_1} + \delta_{m j_2} + \dots + \delta_{m j_p})!$ ifadesindeki $\delta_{m j}$, $j=m$ ve $j \neq m$ oluşuna göre 1 ve sıfır olsun. Bu takdirde

$$\sum \frac{D_{j_1 j_2 \dots j_p}}{(z'_1 - z_{j_1})(z'_2 - z_{j_2}) \dots (z'_p - z_{j_p})} = 0 \quad [9] \quad 5.14.1.$$

İspat. Bu teoremin ispatı uzun işlemleri gerektirdiği için buraya alınmadı.

Teorem 5.15. Farzedelim ki r yarı-çaplı bir C dairesi $P(z)$ polinomunun p tane sıfır-yerini ihtiva etsin. Bu takdirde aynı merkezli $r \cdot \csc \frac{\pi}{2q}$ ($q=n-p+1$) yarı-çaplı C' dairesi $P(z)$ in en az $(p-1)$ tane kritik noktasını ihtiva eder. [9][3]

İspat. Aksini farzedelim. $P(z)$ in en çok $(p-2)$ tane kritik noktası C' nün içine veya üzerine düşsün ve $P(z)$ in q tane kritik noktasında C' nün dışına düşsün. C' nün dışındaki kritik noktaları $z'_1, z'_2, \dots, z'_q$ ile, $P(z)$ in C nin içindeki sıfır-yerlerini $z_1, z_2, \dots, z_p$ ile gösterelim. Aşıkarak $1 \leq j \leq p$ için hiç bir z_j ve z'_i eşit olamaz. ($1 \leq i \leq q$). Her z'_i de C dairesi $\frac{\pi}{q}$ den daha küçük bir açı ile görülür. Bu şunu ifade ederki C nin üzerinde bir ζ_i noktası bulunabilir, öyleki

$$0 \leq \arg \frac{\zeta_i - z'_i}{z_{j_i} - z'_i} < \frac{\pi}{q} \quad j=1, 2, \dots, p \quad 5.15.1.$$

olur. (5.14.1) eşitliğindeki toplam $(z'_1 - \zeta_1)(z'_2 - \zeta_2) \dots (z'_q - \zeta_q)$ ile çarpılırsa toplamın her terimi

$$\frac{(\zeta_1 - z'_1)(\zeta_2 - z'_2) \dots (\zeta_q - z'_q)}{(z_{j_1} - z'_1)(z_{j_2} - z'_2) \dots (z_{j_q} - z'_q)} \quad 5.15.2.$$

geçerinde olur. Mademki, (5.15.1) ifadesinden dolayı, her (5.15.2) terimi açısı $0 \leq \arg z < \pi$ olan bir vektörle temsil edilebilecek teorem 1.6 dan dolayı toplam sıfır olamaz. (5.14.1) eşitliğine zıt olan bu netice gösterirki $P(z)$ in en az $(p-1)$ tane kritik noktası C' dairesi içine düşmek zorundadır.

Bölümün başlangıcında zikredilen genel problemle ilgili olarak bir kısım teoremler daha ispat edebiliriz.

Teorem 5.16. $P_1(z)$, bütün sıfır-yerleri $Q(c_1, r_1)$ daireleri içinde veya üzerinde bulunan, n_1 inci dereceden bir polinom, $P_2(z)$ ise bütün sıfır-yerleri $Q(c_2, r_2)$ daireleri içinde veya üzerinde bulunan n_2 inci dereceden bir polinom olsun. Bu takdirde $P(z) = P_1(z)P_2(z)$ in kritik noktaları C_1, C_2 ve $C(\frac{n_1 c_2 + n_2 c_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 r_2 + n_2 r_1}{n_1 + n_2})$ dairelerinin içine veya üzerine düşer. [4]

Bu teoremin ispatı aşağıdaki Lemmalara dayanmaktadır.

LEMMA 1. Şayet bir P noktası, m tane birim partikülü ihtiva eden bir C dairesinin dışına düşerse, m tane partikülün P de hasıl ettiği bileşke kuvvet, C nin uygun olarak seçilmiş bir noktasına çakıştırılmış olan m tane birim partikülün P de hasıl ettiği bileşke kuvvete denktir. Bu hüküm, P hiç bir partikülle çakışmadıkça, P, C nin sınırı üzerinde olduğunda da müteberdir.

İspat. P merkezli birim daireye göre C nin inversini C' ile ve C nin içindeki Q noktalarının inversini de Q' ile gösterebiliriz. P nin Q de hasıl ettiği kuvvet PQ vektörüne denktir. Biz m tane partikülü çakıştırmakla m tane PQ vektörünü, başlangıç noktaları P ve bitim noktaları Q' lerin gravite merkezi olan Q_0 de m tane çakışık vektör haline getirmiş oluruz. Q_0 , C nin içinde olduğuna göre bu noktanın inversi olan Q_0 noktasında C nin içi de olur. Böylece iddia ispat edilmiş olur.

LEMMA 2. Farzedelim ki $z_1, z_2, \dots, z_p$ noktaları sırası ile $C_1, C_2, \dots, C_p$ daireleri içinde keyfi olarak değişsinler. $c = \sum_{j=1}^p m_j c_j$, $r = \sum_{j=1}^p |m_j| r_j$ ve m_j ler keyfi kompleks sayılar olmak üzere $z = \sum_{j=1}^p m_j z_j$ olarak tarif edilen z noktası $C(c, r)$ dairesinin içi de değişir.

İspat.

$|z - c| = \left| \sum_{j=1}^p m_j (z_j - c_j) \right| \leq \sum_{j=1}^p |m_j| |z_j - c_j| \leq \sum_{j=1}^p |m_j| r_j = r$ olduğunda iddia gerçekleşmiş olur.

Teorem 5.16 nin ispatı. Şayet z noktası $P(z)$ in bir kritik noktası ise, teorem 2.4 ten dolayı, z noktası $P(z)$ in C_1 ve C_2 daireleri içindeki sıfır-yerlerine yerleştirilmiş bulunan kütlelerin belirttiği kuvvet alanı içindeki bir dengeleme noktasıdır.

Lemma 1 den dolayı C_1 in içindeki n_1 tane birim partikülün z de hasıl ettiği bileşke kuvvet bu n_1 tane birim partikülün C_1 içinde uygun bir ζ_1 noktasına yakıştırılması halinde z noktasında hasıl ettiği kuvvete denktir. Keza C_2 içindeki n_2 tane birim partikülün z noktasında hasıl ettiği bileşke kuvvet bu n_2 tane birim partikülün C_2 içinde uygun olarak seçilmiş bir ζ_2 noktasına yerleştirilmesi halinde z noktasında hasıl ettiği kuvvete denktir. O halde $P(z)$ in kritik noktası olan z sırası ile ζ_1 ve ζ_2 noktalarına yerleştirilmiş bulunan n_1 ve n_2 tane birim partikülün belirttiği kuvvet alanının bir dengeleme noktasıdır. Bu z dengeleme noktası ζ_1, ζ_2 doğru parçasını $\frac{n_1}{n_2}$ oranında böleceğinden

$$z = \frac{n_1 \zeta_2 + n_2 \zeta_1}{n_1 + n_2} \quad 5.16.1.$$

olur. Lemma 2 den dolayı bu z noktası C nin içinde bulunur. z noktası $P(z)$ in katlı bir sıfır-yeri ise C_1 veya C_2 içinde bulunur. Dolayısıyla $P(z)$ kritik noktaları C_1, C_2 ve C içinde veya üzerinde bulunur.

NETİCE 5.16a. Şayet C_1, C_2 ve C daireleri ortak noktalara sahip değilseler sıra ile $C_1: n_1-1, C_2: n_2-1$ ve $C: 1$ kritik nokta ihtiva ederler.

İspat. $P(z)$ in n_1 tane sıfır-yerini C_1 içindeki ζ_1 noktasına ve n_2 tane sıfır-yerini C_2 içindeki ζ_2 noktasına tamamen bu daireler içinde bulunan regüler yollar boyunca yaklaştıralım. Böylece ζ_1 ve ζ_2 , $P(z)$ in sıra ile n_1-1 ve n_2-1 katlı kritik noktaları olurlar. Geri kalan bir kritik nokta ise C nin içinde bulunur. $P(z)$ in sıfır-yerleri sürekli olarak değiştiği zaman $P'(z)$ in sıfır-yerleride sürekli olarak değişeceğinden $P(z)$ in hiç bir kritik noktası, biri biri dışında bulunan bu dairelerin, içinde ve dışında olma durumunu değiştirmezler. Bu sebepten C_1, C_2 ve C nin içindeki kritik noktaların sayısı bu yaklaşma işleminden öncede sıra ile n_1-1, n_2-1 ve 1 dir.

Teorem 5.17. $P(z)$ polinomunun n_1 tane sıfır-yeri $C_1(c_1, r_1)$ dairesi içinde veya üzerinde, geri kalan n_2 tane sıfır-yeri ise

$C_2(c_2, r_2)$ dairelerinin içinde veya üzerinde olsun. Bu takdirde $P(z)$ in bütün kritik noktaları $C_1, C_2, C(\frac{n_1 c_2 + n_2 c_1}{n_1 + n_2}, \frac{n_1 r_2 + n_2 r_1}{n_1 + n_2})$ daireleri içine düşer. C_1, C_2 ve C nin ortak noktası yok ise, bu takdirde bu daireler sıra ile $P(z)$ in n_1-1, n_2-1 ve 1 tane kritik noktası ihtiva ederler. [4]

İspat. Teorem 5.16 da olduğu gibi düşünülürse $P_1(z)$, n_1 inci dereceden ve $P_2(z)$ n_2 inci dereceden polinomlar olmak üzere

$$P(z) = P_1(z) P_2(z)$$

yazılabilir. İspatın bundan sonraki kısmı önceki teoreme olduğu gibidir.

Teorem 5.18. $P(z)$ polinomunun k tane sıfır-yeri P noktasına ve geri kalan $n-k$ sıfır-yeride P noktasını ihtiva etmeyen C_1 dairelerinin içine düşerse bu takdirde $P(z)$ in bütün kritik noktaları C_1 dairelerinin içine, P noktasına ve C daireсі içine düşer, ki burada C_1 ile C nin yarı-çapları oranı $1:\frac{k}{n}$

İspat. Teorem 5.17 dikkate alınırssa burada $C_1(c_1, r_1)$ ve P noktası merkez olarak alınıp gizilen C_2 çemberi için $r_2=0$ Dolayısıyla teorem 5.17 de $n_1=n-k, n_2=k, r_2=0$ ve $c_2=\zeta$ alınırssa

$$\frac{n_1 c_2 + n_2 c_1}{n_1 + n_2} = \frac{(n-k)\zeta + k c_1}{n-k+k} = \frac{(n-k)\zeta + k c_1}{n}$$

$$\frac{n_1 r_1 + n_2 r_2}{n_1 + n_2} = \frac{(n-k)0 + k r_1}{n} = \frac{k}{n} r_1$$

o halde $C(\frac{(n-k)\zeta + k c_1}{n}, \frac{k}{n} r_1)$ dir. Gerçekten C_1 ile C nin yarı-çapları oranı $1:\frac{k}{n}$ olduğu görülür.

NETİCE 5.18a. C_1 ve C ortak noktaya sahip değil iseler bunlar sıra ile $P(z)$ in $(n-k-1)$ ve 1 kritik noktasını ihtiva ederler.

Bu netice aynen 5.16a da olduğu gibi düşünülerek görülür.

Teorem 5.19. $P(z)$ polinomu, r_1 yarı-çaplı C_1 dairelerinde p tane sıfır-yerine ve ζ noktasında $(n-p)$ katlı sıfır-yerine sahip ise bu takdirde $P(z)$ in $r=r_1 \frac{3n-2p}{n}$ yarı-çaplı C' dairelerinde en az $(p-1)$ tane kritik noktası vardır. [3]

İspat. Şayet $|\xi| \leq r_1$ ise $P(z)$ in bütün sıfır-yerleri C_1 in içine düşer ve teorem 2.3 ten dolayı $P(z)$ in bütün $(n-1)$ kritik noktası da C_1 in içine düşer. Böylece $P(z)$ in $(p-1)$ kritik noktası C' nin içine düşmüş olur. Şayet $|\xi| > r_1$ ise teorem 5.18 den dolayı $P(z)$ in kritik noktaları C_1 in içinde, ξ noktasında ve $C(\frac{p\xi + (n-p)c_1}{n}, \frac{n-p}{n}r_1)$ dairesinin içinde bulunur. Şayet C_1 ve C ortak noktaya sahip değillerse netice 5.18a dan dolayı $P(z)$ in tam $(p-1)$ tane kritik noktası C_1 dairesinde bulunur. Ve dolayısıyla C' içinde bulunur. Şayet C_1 ile C biri birini kısmen örterlerse ve C , ξ noktasını çevrelemezse, $P(z)$ in tam p tane kritik noktası C_1 ve C nin teşkil ettiği bölgeye ve böylece C' nin içine düşer ki C' dairesi merkezi C_1 in merkezinde ve yarı-çapı $r' = r_1 + \frac{2(n-p)}{n}r_1 = \frac{3n-2}{n}r_1$

Netice olarak şayet C_1 ve C biri birini kısmen örterlerse ve C , ξ noktasını ihtiva ederse bu takdirde $P(z)$ in bütün sıfır yerleri C' nin içinde, dolayısıyla $P(z)$ in $(n-1)$ tane kritik noktası C' nin içine düşer. Görülüyorki bütün durumlarda C' , $P(z)$ in en az $(p-1)$ tane kritik noktasını ihtiva eder.

Teorem 5.20. Parzedelim ki $n = n_1 + n_2$ olmak üzere n inci dereceden bir $P(z)$ polinomunun n_1 tane sıfır-yeri $C_1: |z_1 - c_1| \leq r_1$ dairesinde ve n_2 tane sıfır-yeride $C_2: |z_2 - c_2| \geq r_2$ bölgesinde bulunsun. Bu takdirde $P(z)$ in kritik noktaları C_1 , C_2 ve $C: |z - \frac{n_1 c_2 + n_2 c_1}{n_1 + n_2}| \geq \frac{n_1 r_2 - n_2 r_1}{n_1 + n_2}$ dairelerinin içinde bulunur. Şayet C_1 ile $C_2 + C$ in ortak noktaları yoksa bu takdirde $C_1: n_1 - 1$ ve $C_2 + C: n_2$ tane kritik nokta ihtiva ederler. [4] [3]

Bu teoremin ispatı aşağıdaki lemmaya dayanmaktadır.

LEMMA 1. $|z - c_1| \leq r_1$ ve $|z - c_2| \geq r_2$ bölgeleri sıra ile z_1 , z_2 nin geometrik yerleri olsunlar. n_1 ve n_2 , $r = \frac{n_1 r_2 - n_2 r_1}{n_1 + n_2} > 0$ olacağı şekilde pozitif sayılar ise bu takdirde $z = \frac{n_2 z_1 + n_1 z_2}{n_1 + n_2}$ in geometrik yeri, $c = \frac{n_2 c_1 + n_1 c_2}{n_1 + n_2}$ olmak üzere, $|z - c| \geq r$ bölgesidir.

İspat. Verilen şartlar altında şunu yazabiliriz.

$$z - c = \frac{n_1(z_2 - c_2) + n_2(z_1 - c_1)}{n_1 + n_2}$$

ve buradan $|z - c| \geq \frac{n_1 r_2 - n_2 r_1}{n_1 + n_2}$ olur.

Şimdi teoremin ispatını verelim. Şayet z , $P(z)$ in bir kritik noktası ise bu z noktası C_1 ve C_2 nin herhangi birisinde veya hem C_1 hemde C_2 de aynı zamanda bulunabilir ki bu durumda C nin içinde olur. Veyahut bu z noktası C_1 ve C_2 de bulunmayan bir dengeleme noktası olabilir. Bu son durumda C_1 ve C_2 içinde bulunan n_1 ve n_2 partikülün z de hasil ettiği kuvvet bu partiküllerin, teorem 5.16 da verilmiş olan lemma 1 den dolayı, bulundukları bölgelerde çakıştırılmaları halinde z de hasil ettikleri kuvvete denk olduğundan bu z dengeleme noktası $z = \frac{n_1 z_1 + n_2 z_2}{n_1 + n_2}$ olur ve yukarıdaki lemmadan dolayı C nin içinde bulunur. Teoremi geri kalan kısmı netice 5.16a da olduğu gibi ispat edilir.

Bu teoremden istifade ile aşağıdaki teoremin zikredebiliriz

Teorem (Biernacki) 5.21. $P(z)$ polinomu R yarı-çaplı C da iresinde p tane sıfır-yerine sahip ise bu takdirde

$$R' = R \prod_{k=1}^{p-1} \frac{n+k}{n-k}$$

yarı-çaplı C' dairesinde en az $(p-1)$ tane kritik noktaya sahiptir. [3]

İspat. C , merkezi orjinde bulunan daire olsun. $P(z)$ in z_j sıfır-yerlerini

$$|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \quad 5.21.1.$$

olarak kabul etmek genelliği bozmayacağından ispatımızda bu kabulleri kullanalım.

$p=n-1$ olsun. Mademki sadece bir z_n sıfır-yeri C nin dışındadır teorem 5.19 dan dolayı, $P(z)$ in en az $(p-1)$ tane kritik noktası

$$|z| \leq \left(1 + \frac{2}{n}\right) R < \left(1 + \frac{2}{n-1}\right) R = \frac{n+1}{n-1} R$$

dairesi içinde bulunur. Şimdi farzedelim ki bu teorem $p=n-1, n-2,$

$\dots, N+1$ için doğrudur. $p=N$ için doğrulunu gösterelim. Şayet

$|z_{N+1}| > \frac{2n-N}{N} R$ ise $n_1=N$, $n_2=n-N$, $r_1=R$ ve $r_2 > \frac{2n-N}{N} R$ olmak üzere teorem 5.20 uygulanırsa şu elde edilir.

$$r > \frac{1}{N} \left[N \left(\frac{2n-N}{N} R \right) - (n-N) R \right] = R$$

O halde $C_1 \equiv C$ dairesi içinde ve dolayısıyla C' dairesinin içinde $P(z)$ in tam $(N+1)$ tane kritik noktası vardır.

Diğer taraftan $|z_{N+1}| \leq \frac{2n-N}{N} R$ ise, $C: |z| \leq \rho = \frac{2n-N}{N} R$ dairesi $(N+1)$ tane $z_1, z_2, \dots, z_{N+1}$ sıfır-yerini ihtiva eder. Böylece teorem 5.21 e uygun olarak ρ , R ile ve $N+1$, p ile değiştirilerek tatbik edilirse, $P(z)$ in en az N tane kritik noktası

$$|z| \leq \frac{2n-N}{N} \left[\frac{(n+1)(n+2) \dots (2n-N-1)}{(n+1)(n-2) \dots (N+1)} \right] R$$

dairesi içinde bulunur. Bu ise $p=N$ için teoremden verilmiş olan C' dairesidir. Böylece $p=N$ olan bütün hallerde en az $N-1$ tane kritik nokta C' de bulunur.

Teorem 5.22. $P(z)$ polinomu birim dairede $(p-1)$ tane kritik noktaya sahip ise bu takdirde $|z| = \sin \frac{\pi}{2(n-p)}$ dairesi içinde $P(z)$ en fazla p tane sıfır-yerine sahiptir. [9]

İspat. Şayet $P(z)$ polinomunun $|z| = \sin \frac{\pi}{2(n-p)}$ dairesinde $(p+1)$ sıfır-yeri olsaydı teorem 5.15 ten dolayı $P(z)$ polinomunun

$$|z| = \sin \frac{\pi}{2(n-p)} \csc \frac{\pi}{2(n-p)} = 1$$

dairesinde p tane kritik noktası olması gerekirdi. Bu ise hipoteze aykırıdır.

TARİF. $P(z)$ polinomuna bir G bölgesinde p -valanttır denir şayet bir değeri G de en az p defa alıyor ve hiç bir değeri p den daha fazla sayıda almıyorsa.

Teorem 5.23. $(n \geq 2)$ olmak üzere $P(z)$ polinomu birim daire içinde veya üzerinde tam $(p-1)$ tane kritik noktaya sahipse bu takdirde $|z| = \sin \frac{\pi}{2(n-p)}$ nin içinde veya üzerinde en çok p -valanttır.

İspat. Teorem 5.22 ve tariften dolayı ispat aşıkardır. [9]

S U M M A R Y

The fundamental relation between the zeros and the critical points of a polynomial was formulated and proved by Lucas as "The convex polygon which contains all the zeros of a polynomial also contains its critical points"

Jensen investigated the same subject for the real polynomials and expressed this as Jensen's Theorem which was proved by J.L. Walsh in 1920.

The mathematicians who studied the same problem have used a great deal the theorem of J.H. Grace on Apolar polynomials which is formulated as "The circle which contains all the zeros of one of the Apolar polynomials also contains at least one zero of the other."

Taking in view the above theorem Grace and Heawood have formulated their theorems which locates a critical point if two zeros of a polynomial is known. S. Kakeya studied the dispersion of $p-1$ critical points of a polynomial when p of its zeros are known. He could give a solution for $p-2$. The general case was investigated by M. Marden.

In this paper a new definition is given for Apolar polynomials and the results which are obtained are given by two theorems in section IV. The theorems 5.3 and 5.6 express the various results we have obtained.

LİTERATÜR

- [1] ULUÇAY, Cengiz: Fonksiyonlar Teorisi
A.Ü.Fen Fak.Yayınlarından 1957 Ankara
- [2] LARS V,Ahlfors: Complex Analysis
McGraw-Hill Book Company, Second Edition.1956
- [3] MARDEN,M: The Geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable.
American Math.Soc.Math Surveys.Number.III. 1949 -1966
- [4] WALSH,J.L: The Location of critical points of analytic and harmonic functions,
Amer.Math.Soc.Colloquium Publications.Val. XXXIV 1950
- [5] GRACE,J.H: The zeros of a polynomial,
Proc.Cambridge Philos.Soc.vol.II (1902)pp.352-357.
- [6] HEAWOOD,P.J: Geometrical relations between the roots of $f(x)=0$,
 $f(x) = 0$,
Quart.J.Math.vol. 38 (1907) pp.84-107.
- [7] MARDEN,M: A generalization of Weierstrass and Fekete's mean-value theorems,
Bull.Amer.Math.Soc.vol.38.(1932) pp.434-441.
- [8] MONTGOMERY,J.C: The roots of a polynomial and its derivative
Bull.Math.Soc.vol.47 No:1. 1941.pp. 621-624.
- [9] MARDEN,M: Kakeya's problem on the zeros of the derivative of a polynomial,
Trans.Amer.Math.Soc.vol.45 (1939) pp.355-368
- [10] WALSH,J.L: On the location of the roots of the jacobian of two binary forms and of the derivative of a rational function
Trans.Amer.Math.Soc.vol. 22 (1921) pp.101-116.
- [11] ALEXANDER,J.W: Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions,(Ann.of Math.vol.17(1915)12-2
- [12] KAKEYA,S: On zeros of a polynomial and its derivatives,
Tôhoku Math.J.vol.11 (1917) pp.5-16.

