T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SASAKİYAN MANİFOLDLARININ LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

Cumali YILDIRIM

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2009

Tezin Başlığı: **Sasakiyan Manifoldlarının Lightlike Altmanifoldları Üzerine**

Tezi Hazırlayan: **Cumali YILDIRIM**

Sınav Tarihi:23 Temmuz 2009

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

__________ (İnönü Üniv.) __________

__________ (İnönü Üniv.) __________

__________ (İnönü Üniv.) __________

__________ (İnönü Üniv.) __________

Doç. Dr. Bayram Şahin (İnönü Üniv.) __________

Doç. Dr. Bayram Şahin
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. İsmail Özdemir
Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Doktora Tezi olarak sunduğum "*Belirsiz Sasakiyan Manifoldlarının Dejenere Altmanifoldları Üzerine*" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden olduğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Cumali YILDIRIM

ÖZET

Doktora Tezi

BELİRSİZ SASAKİYAN MANİFOLDLARININ DEJENERE ALTMANİFOLDLARI ÜZERİNE

Cumali YILDIRIM

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik AnaBilim Dalı

111+iv sayfa

2009

Danışman: Doç. Dr. Bayram ŞAHİN

Bu tez dört bölümden meydana gelmiştir. Birinci bölüm giriş olarak düzenlenmiştir. İkinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar; vektör demetleri, distribüsyonlar, Semi-Riemann manifoldlar, dejenere altuzaylar, lightlike altmanifoldlar ve belirsiz Sasakiyan manifoldlar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde belirsiz Sasakiyan manifoldların transversal lightlike altmanifoldları tanımlanmakta örnekler verilmekte ve indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için şartlar elde edilmektedir. Ayrıca tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifold tanımı verilerek karakterizasyonlar elde edilmektedir.

Dördüncü bölümde belirsiz Sasakiyan manifoldların ekran transversal lightlike altmanifold tanım ve örnekleri verilmekte ve distribüsyonlarının geometrisi incelenmektedir. Ayrıca belirsiz Sasakiyan manifoldun herhangi reel lightlike eğrisinin ekran transversal lightlike altmanifoldların bir örneği olduğu gösterilmektedir. Son olarak belirsiz Sasakiyan manifoldların tamamen kontakt umbilik ekran transversal lightlike altmanifoldların geometrisi incelenmektedir.

ANAHTAR KELİMELER:Lightlike Altmanifold, Belirsiz Sasakiyan manifold, Transversal lightlike altmanifold, Ekran transversal lightlike altmanifold.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON THE LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS OF INDEFİNİTE SASAKIAN MANIFOLDS

Cumali YILDIRIM

İnönü Universty

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

111+iv pages

2009

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

This thesis consists of four chapters.After introduction, in the second chapter, we give basic materials such as degenerate subspaces, Semi-Riemannian manifolds, distributions, vector bundles, lightlike submanifolds and indefinite Sasakian manifolds which will be useful for other chapters.

In the third chapter, we introduce transversal lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds and give examples. We also investigate the geometry of leaves and obtain a geometric condition for the induced connection to be a metric connection. Moreover, we study totally contact umbilical transversal lightlike submanifolds and obtain a classification theorem.

In the fourth chapter, we introduce screen transversal lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds. We give examples, study the geometry of leaves of their distributions and show that any real lightlike curve of an indefinite Sasakian manifold is an example of screen transversal lightlike submanifolds. Finally we study the geometry of totally contact umbilical screen transversal lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifold

KEYWORDS: Lightlike Submanifold, İndefinite Sasakian manifold, Transversal lightlike submanifold, Screen transversal lightlike submanifold.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve beni her adımda bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren, tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Bayram ŞAHİN'e, lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ, Prof. Dr. İlhan İÇEN ve Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e, karşılaştığım sorunlarda yardımlarını gördüğüm Ögr. Gör.Esra ERDOĞAN ve Sema BULUT'a, manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim anneme, babama ve sevgili eşim Zehra'ya teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ

Diferensiyel geometride altmanifoldlar teorisi, en çok çalışılan alanlardan biridir. Esas olarak, altmanifoldlar, yüzeyler teorisinin genelleştirilmesidir. Bununla birlikte yüzeylerin geometrisini araştırırken kullanılan birçok yöntem, altmanifoldlar teorisinde yeterli değildir. Bu nedenle altmanifoldlar üzerine yapılan çalışmalarda, yüzeylerde kullanılmayan farklı yöntem ve teknikler kullanılmaktadır. Altmanifoldlar teorisinde en çok çalışılan ve uygulama alanı bulan özel bir altmanifold sınıfı vardır. Bu sınıf izometrik immersiyonlar olarak bilinmektedir. Bir izometrik immersiyon, iki Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir dönüşümün manifoldlar üzerindeki vektör alanlarının uzunluklarını korumasıdır. Daha açık olarak, (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) iki Riemann manifoldu ve $boy M_1 \leq boy M_2$ olsun. Bu durumda, $\Gamma(TM_1)$ vektör alanlarının uzayı olmak üzere $X, Y \in \Gamma(TM_1)$ için

$$g_1(X, Y) = g_2(F_*X, F_*Y)$$

ise F'ye izometrik immersiyon denir. Burada F_* türev dönüşümüdür. Burada önemli bir özellik, eğer M_1 bir keyfi manifold ise, M_2 manifoldunun Riemann manifoldu olması durumunda F^*g_2, M_1 üzerinde bir Riemann metriğidir[6]. Altmanifoldlar üzerine kapsamlı bir derleme Chen tarafından[10]'da sunuldu. Bu konu günümüzde de çalışılmaktadır. Özellikle, uzay zaman modellerinde sıklıkla altmanifold teorisinde geliştirilen teknikler kullanılmaktadır.

Diğer taraftan 1970'lerden itibaren manifoldlar teorisi, matematiksel fizikte uygulama alanı olmasından dolayı, belirsiz metrikler veya non-dejenere metriklerle birlikte çalışılmaya başlandı. Bu tür manifoldlara Semi-Riemann manifoldları adı verilmektedir. Semi-Riemann manifoldlar ile Riemann manifoldlar arasında temel fark, Riemann manifoldlardaki metrik pozitif tanımlı iken, Semi-Riemann manifoldlardaki metrik pozitif tanımlı değildir. Bu nedenle bir Semi-Riemann manifold da metriğin işaretine bağlı olarak spacelike, timelike veya null(lightlike) olarak adlandırılan üç tür vektör alanı(vektör) tanımlanmaktadır. Üstelik pozitif tanımlı olmadığından, eğer F, M_1 manifoldu ve (M_2, g_2) Semi-Riemann manifoldu $(boyM_1 \leq boyM_2)$ arasında immersiyon ise F^*g_2, M_1 üzerinde pozitif, negatif ve dejenere(singüler) olabilir. F^*g_2 bilineer formunun pozitif olması durumunda (M_1, F^*g_2) altmanifolduna spacelike ve negatif olması durumunda da (M_1, F^*g_2) altmanifolduna timelike altmanifold denir. (M_1, F^*g_2) altmanifoldunda F^*g_2 dejenere olması durumunda bu tür altmanifoldlara dejenere(null, lightlike) altmanifold denir. Bu tür altmanifoldların varlığı null vektörlerin varlığından ortaya çıkar.

Dejenere eğriler ve yüzeyler 1960'lardan itibaren çalışılmaya başlanmasına karşın [22], [24], [25], lightlike altmanifoldlar üzerine sistematik çalışmalar D. N. Küpeli[27] ve K. L. Duggal-A. Bejancu[12] tarafından başlatıldı. Bu yöntemlerden Küpeli tarafından verilen içsel (intrinsic) ve Duggal-Bejancu tarafından ve-rilen dışsal (extrinsic) yöntemdir.

Dejenere altmanifoldlar ile non-dejenere(spacelike-timelike) altmanifoldlar arasındaki temel fark, normal demetlerin davranışında ortaya çıkmaktadır. Non-dejenere altmanifoldlarda tanjant demet ile normal demetin kesişim kümesi sıfır elemana sahipken, lightlike altmanifoldda normal demetin bir kısmı tanjant demette kaldığından böyle bir durum söz konusu değildir. Bu nedenle lightlike altmanifoldlarda tanjant demete tamamlayan bir demetin varlığı önemli bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. Duggal-Bejancu, böyle bir tamamlayan uzayın var olduğunu, fakat tanjant demete dik olmadığını gösterdiler. Onlar bu şekildeki demete transversal demet adını verdiler. Buna göre transversal demet tanjant demete tamamlayan, fakat ona dik olmayan bir demettir. Böyle bir demetin varlığı, non-dejenere altmanifolda daha önce tanımlanan ikinci temel form, şekil operatörü ve eğrilik tensörü ifadelerini tanımlamayı olanaklı kıldı. Bu inşadan sonra lightlike altmanifoldlar, non-dejenere altmanifoldlara benzer olarak çalışılmaya başlandı. Bununla birlikte, non-dejenere altmanifoldlarda geçerli olan birçok özellik, metriğin dejenere olması nedeniyle lightlike altmanifoldlarda geçerli değildir. Bunu en iyi şekilde gösteren sonuç, bir lightlike altmanifold üzerine indirgenen konneksiyonun metrik konneksiyon olmamasıdır. Halbuki bu durum non-dejenere altmanifoldlardaki temel sonuçlardan biridir.

Kompleks diferensiyel geometride, bir kompleks manifoldun altmanifoldu, kompleks manifoldun kompleks yapısına göre tanımlanır. Eğer altmanifoldun tanjant uzayı kompleks yapı altında invaryant ise altmanifolduna holomorfik altmanifold denir. Eğer altmanifoldun tanjant uzayı kompleks yapı altında normal uzaya taşınıyorsa altmanifolda tamamen reel altmanifold adı verilir. A.Bejancu 1978 yılında bu iki altmanifoldu da içeren CR-altmanifoldları tanımladı. Buna göre eğer bir kompleks(Hermityen) manifoldun altmanifoldu üzerinde iki tane birbirine ortogonal tamamlayan D ve $D^{\perp}$ distribüsyonları bulunuyor; D, kompleks yapı altında invaryant ve $D^{\perp}$ distribüsyonu da kompleks yapı altında normal uzaya taşınıyorsa bu altmanifolda CR-altmanifold denir. Açıkça görülmektedir ki, $D = \{0\}$ ise CR-altmanifold tamamen reel altmanifold ve $D^{\perp} = \{0\}$ ise CR-altmanifold holomorfik altmanifold olmaktadır. Eğer D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının her ikisi birden sıfırdan farklı ise CR-altmanifolda özgündür denir. Bu tür altmanifoldlar Chen, Bejancu ve Yano-Kon tarafından detaylı olarak incelendi ve bulunan sonuçlar [2] ve [41]'de derlendi. Esas uzayın Sasakiyan olması durumunda, CR-altmanifoldların karşılığı kontakt CR-altmanifoldlar olmaktadır ve bu tür altmanifoldlar, Yano-Kon tarafından [42]'de çalışıldı .

CR-altmanifoldların lightlike versiyonu olarak CR-lightlike altmanifoldlar Duggal-Bejancu tarafından [4]'te tanımlandı ve [37], [38]'de çalışıldı. Yukarıda belirtildiği gibi, CR-altmanifoldlar, holomorfik ve tamamen reel altmanifoldların genelleştirilmesidir. Buna karşın Duggal-Bejancu, [4]'te gösterdiler ki CR-lightlike altmanifoldlar her zaman özgündür. Yani holomorfik (invaryant) ve tamamen reel lightlike altmanifoldları bir alt sınıf içermez. Bu nedenle, Duggal-Şahin [14], 2005 yılında, ekran CR-lightlike altmanifoldları tanımladılar ve gösterdiler ki, bu tür altmanifoldlar hem invaryant hem de ekran reel altmanifoldları(tamamen reel altmanifoldların lightlike versiyonu olarak tanımlandı) bir alt sınıf olarak içermektedir. Bu makalede ayrıca invaryant ve ekran reel lightlike altmanifoldlar detaylı olarak incelendi. Ayrıca [17]'de Duggal-Şahin, genelleştirilmiş CR-lightlike altmanifoldları çalıştılar ve gösterdiler ki, bu tür altmanifoldlar invaryant, ekran reel ve ekran CR-lightlike altmanifoldları içermektedir.

Duggal-Bejancu, Duggal-Şahin tarafından çalışılan CR-lightlike, ekran CR-lightlike ve genelleştirilmiş CR-lightlike altmanifoldların tamamında altmanifoldun radikal distribüsyonu, manifoldun kompleks yapısına göre invaryant kalmaktadır. Yani kompleks yapı uygulandığında elde edilen uzay yine altmanifoldun tanjant uzayının bir altuzayı olmaktadır. Bu nedenle

Şahin, [34]'de trans-versal lightlike altmanifoldları tanımladı ve çalıştı. Buna göre, eğer altmanifoldun radikal distribüsyonuna kompleks yapı uygulandığında, lightlike transversal demete taşınıyorsa bu tür altmanifoldlara transversal lightlike altmanifoldlar denir. Diğer taraftan, bir Kaehler (kompleks) manifoldun tamamen reel altmanifoldunun en güzel örneği reel eğrilerdir. Yani reel eğriler 1-boyutlu tamamen reel altmanifoldlardır. Halbuki bir belirsiz Kaehler manifoldun yukarıda verilen lightlike altmanifoldların hiçbiri reel lightlike eğrileri içermez. Bu yüzden, [36]'da Şahin, ekran transversal lightlike altmanifoldları tanımladı, reel lightlike eğrilerin bu tür altmanifoldlar için bir örnek olduğunu gösterdi ve ekran transversal lightlike altmanifoldların temel özelliklerini inceledi.

Belirsiz sasakiyan manifoldların lightlike hiperyüzeyleri [23]'de Kang, Jung, Kim ve Pak tarafından çalışıldı. İnvaryant, ekran reel kontakt CR-lightlike ve ekran kontakt CR-lightlike altmanifoldlar Duggal-Şahin tarafından [16]'da çalışıldı. Ayrıca genelleştirilmiş kontakt CR-lightlike altmanifoldlar Duggal-Şahin tarafından [15]'te çalışıldı.

Bu tezde belirsiz sasakiyan manifoldların transversal lightlike ve ekran transversal lightlike altmanifoldları çalışıldı. Duggal-Bejancu ve Duggal-Şahin tarafından geliştirilen temel yöntem ve teknikler kullanıldı. İkinci bölümde daha sonra kullanılacak temel tanım ve teoremler sunuldu. Özellikle bir lightlike altmanifoldun geometrisi incelenirken kullanılan quasi-ortonormal tabanı tanıtıldı.

Tezin orijinal bölümleri, üçüncü ve dördüncü bölümlerdir. Üçüncü bölümde belirsiz Sasakiyan manifoldların transversal lightlike altmanifoldları ve altsınıfları çalışıldı. Üçüncü bölümün birinci altbölümünde radikal transversal lightlike altmanifoldlar ve ikinci altbölümde tamamen umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldlar incelendi. Üçüncü altbölümde ise transversal lightlike altmanifoldlar çalışıldı.

Dördüncü bölüm, ekran transversal lightlike altmanifoldlara ayrıldı. Bu bölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde, bu tür altmanifoldların inşasında kullanılan cebirsel yapı elde edildikten sonra, radikal ekran transversal lightlike altmanifold ve ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifold tanımlanmaktadır. İkinci altbölümde, ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldlar ayrıntılı olarak incelenmektedir. Üçüncü altbölümde radikal transversal lightlike altmanifoldlar ve dördüncü altbölümde izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldlar çalışılmaktadır.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm beş altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde cebirsel kavramlar, ikinci altbölümde vektör demetleri ve distribüsyonlar, üçüncü altbölümde de Semi-Riemann manifoldlar tanıtılmaktadır. Dördüncü altbölümde, lightlike altmanifoldların geometrisi incelenirken, son altbölümde ise belirsiz Sasakiyan manifoldlar sunulmaktadır.

2.1.Cebirsel Kavramlar

Tanım 2.1.1.[18] V reel m-boyutlu vektör uzayı ve $g : V \times V \longrightarrow R$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa g dönüşümüne bilineer dönüşüm denir.

$a, b \in R$ ve $\forall u,v,z \in V$ için,

1. $g(au + bv, z) = ag(u, z) + bg(v, z)$
2. $g(u, av + bz) = ag(u, v) + bg(u, z)$

dir.

Tanım 2.1.2.[18] V reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer dönüşüm olsun. Eğer $\forall u,v \in V$ için,

$$g(u, v) = g(v, u)$$

sağlanırsa g'ye simetriktir denir.

Tanım 2.1.3.[32] Simetrik bilineer dönüşümüne, bilineer form denir.

Tanım 2.1.4.[12] V reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. Eğer V'nin $\xi \neq 0$ bir vektörü var ve $\forall v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0$$

oluyorsa g'ye V üzerinde dejeneredir denir.

Tanım 2.1.5.[12] V reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. Eğer $\forall v \in V$ için

$$g(u, v) = 0$$

olması ancak $u = 0$ ile mümkünse bu durumda g'ye nondejeneredir denir.

V üzerinde nondejenere bilineer form, V'nin bir altuzayına ya dejenere yada nondejenere bilineer form indirger.

Tanım 2.1.6.[12] V reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. V uzayının

$$RadV = \{\xi \in V | g(\xi, v) = 0, v \in V\}$$

ile tanımlı altuzayına, V uzayının radikal uzayı yada null uzayı denir.

Tanım 2.1.7.[12] V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. Her $v \in V$ için

1. $g(v, v) < 0$ ise g ye negatif tanımlıdır denir.
2. $g(v, v) > 0$ ise g ye pozitif tanımlıdır denir.

Tanım 2.1.8.[12] V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. V uzayının herhangi bir W altuzayı için $W \times W$ üzerinde g dönüşümünün kısıtlanmışı $g|_W$ de W üzerinde bilineer formdur. Bu forma indirgenmiş bilineer form denir.

Tanım 2.1.9.[28] V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form ve W, V uzayının herhangi bir altuzayı olsun. $g|_W$'nin negatif olduğu en büyük W altuzayının boyutuna V uzayı üzerinde bilineer formun indeksi denir.

Teorem 2.1.1.[29] V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. Bu durumda vektör uzayı üzerinde

1. $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$

2. $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, 1 \leq i \leq p$

3. $g(\alpha_j, \alpha_j) = -1, p+1 \leq j \leq q$

4. $g(\alpha_k, \alpha_k) = 0, q+1 \leq k \leq m$

olacak şekilde $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m\}$ tabanı vardır.

Tanım 2.1.10.[12] V bir reel vektör uzayı, g, V üzerinde bilineer form olsun. Eğer g, V üzerinde nondejenere bilineer form ise bu durumda g'ye skaler çarpım, V uzayınada semi-Öklidyen uzay denir. $p, q \neq 0$ durumunda V ye proper semi-Öklidyen uzay denir. Bilineer formun dejenere olması durumunda vektör uzayına lightlike uzay denir.

Tanım 2.1.11.[28] V bir Semi-Öklidyen uzay ve $v \in V$ olsun.

1. $g(v, v) > 0$ veya $v = 0$ ise v vektörüne spacelike,

2. $g(v, v) < 0$ ise v vektörüne timelike,

3. $g(v, v) = 0$ ve $v \neq 0$ v vektörüne lightlike denir.

Önerme 2.1.1.[12] Boştan farklı semi-Öklidyen uzayların ortonormal bir tabanı vardır.

Önerme 2.1.2.[12] (W, g) reel n-boyutlu lightlike vektör uzayı ve $RadW$ de vektör uzayının radikali olsun. Bu durumda radikal uzaya tamamlayan olan herhangi altuzay nondejeneredir. Bu uzaya ekran uzay denir.

Tanım 2.1.12.[12] (V, g), reel m-boyutlu Semi-Öklidyen uzay ve W de onun altuzayı olsun. Eğer $g|_W$ dejenere ise altuzaya lightlike (dejenere) altuzay denir. Aksi durumda W ye nondejenere denir. Buradan

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W uzayının diki denir.Genelde

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

dır.

Önerme 2.1.3.[12] (V, g) m-boyutlu semi-Öklidyen uzay, W de altuzayı olsun. Bu durumda

- $boyW + boyW^{\perp} = m$
- $(W^{\perp})^{\perp} = W$
- $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dır.

Bu tezin 3. ve 4. bölümlerinde lightlike altmanifoldlar çalışılmakta ve bu altmanifoldlar üzerinde quasi-ortonormal taban kullanılmaktadır. Şimdi bu tabanın inşaasını görelim.

(V, g), n-boyutlu bir proper semi-Öklidyen uzay olsun. (V, g) uzayının, $\{e_1, e_2, ..., e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1}, e_{q+2}, ..., e_n\}$ birim spacelike vektörler olacak şekilde $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $p+q = n$ ortonormal tabanını gözönüne alalım. Lightlike vektörleri ihtiva eden bir taban üç durumda incelenebilir.

Durum I $(q < p)$ Bu durumda

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\}, f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\}, i \in (1, 2, ..., q) \qquad (2.1.1)$$

vektörlerini inşa edelim. Buradan görülür ki

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0$$

ve

$$g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij}, i, j \in (1, 2, ..., q). \tag{2.1.2}$$

Böylece $\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*, e_{2q+1}, ..., e_{p+q}\}$, V uzayının $2q$ tane lightlike vektör ve $p - q$ tane spacelike vektör ihtiva eden bir tabanıdır.

Durum II $(p < q)$ Bu durumda

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} + e_a\}, f_a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+a} - e_a\}, a \in \{1, ..., p\} \tag{2.1.3}$$

olur. Böylece (2.1.1), (2.1.2) i, j yerine $a, b \in 1, ..., p$ alınırsa V uzayının $2p$ tane lightlike vektörler ve $q - p$ tane timelike vektörler ihtiva eden

$$\{f_1, ..., f_p, f_1^*, ..., f_p^*, e_{2p+1}, ..., e_{p+q}\}$$

tabanı elde edilir.

Durum III (p=q) $n = 2q = 2p$ olduğundan (2.1.1) veya (2.1.3) de tanımlanan

$$\{f_1, ..., f_p, f_1^*, ..., f_p^*\}$$

lightlike tabanı elde edilir.

Tanım 2.1.13. (V, g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu uzayın $B = \{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*, u_1, ..., u_t\}$ bir tabanı, aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu durumda quasi-ortonormal taban olur.

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0, g(f_i^*, f_j) = \delta_{ij}, i, j \in \{1, ..., q\}$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*), g(u_\alpha, u_\beta) = \epsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \{1, ..., t\}, \epsilon_\alpha = \pm 1.$$

Önerme 2.1.4.[12] V bir semi-Öklidyen uzay ve W de V uzayının bir altuzayı olsun. Bu durumda W boyunca V'nin quasi-ortonormal tabanı vardır.

2.2.Vektör Demetleri ve Distribüsyonlar

Bu bölümde vektör demetlerinin tanımları ve temel özellikleri verilecektir.

Tanım 2.2.1.[33] M ve E, diferensiyellenebilir manifoldlar olsunlar. M üzerinde vektör demeti aşağıdaki şartları sağlayan $\pi : E \longrightarrow M$ örten diferensiyellenebilir bir dönüşümdür:

1.)$\forall x \in M$ için, $E_x = \pi^{-1}(x) \subset E$ bir vektör uzayıdır.

2.)M üzerinde $\{U_i\}_{i\in\ I}$ açık örtüsü ve

$$\Phi_i : \phi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times R^n$$

diffeomorfizmleri var öyleki

$$\phi^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times\ R^n$$

diyagramı değişmeli ise π lokal ayrışım özelliğine sahiptir denir.

(E, π, M) üçlüsüne bir vektör demeti denir. E manifolduna demetin total uzayı M manifolduna demetin tabanı ve π'ye de E total uzayın projeksiyon dönüşümü denir.

Tanım 2.2.2.[12] $\pi : E \longrightarrow M$ vektör demeti olsun. $\forall x \in\ M$ için $E_x = \pi^{-1}(x)$ alt manifolduna x üzerinde lif denir. E_x liflerin ayrık birleşimi total uzayı verir.

Tanım 2.2.3.[30] (E,π,M) bir demet olsun. $\pi \circ s = I$ olacak şekilde bir $s : M \longrightarrow E$ bir dönüşüm varsa bu durumda s'ye E'nin (global)kesiti denir ve $\Gamma(E)$ ile gösterilir. Eḡer s, M'nin bir U açıḡı üzerinde tanımlanmış ise bu durumda $s : M \longrightarrow E$ dönüşümüne U üzerinde E'nin lokal kesiti denir.

Tanım 2.2.4.[30] (E,π,M) ve $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ iki vektör demeti olsun. Bu durumda $\pi^{'} \circ h^{'} = h \circ \pi$ olacak şekilde $H : E \longrightarrow E^{'}$ ve $h : M \longrightarrow M^{'}$ dönüşümleri varsa

$$(H,h) : (E,\pi,M) \longrightarrow (E^{'},\pi^{'},M^{'})$$

diferensiyellenebilir dönüşüm çiftine demet morfizmi denir.

Tanım 2.2.5.[30] (E,π,M) ve $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ iki vektör demeti olsun. Bu durumda $H^{'} \circ H = I_E$ ve $h^{'} \circ h = I_M$ olacak şekilde

$$(H^{'},h^{'}) : (E^{'},\pi^{'},M^{'}) \longrightarrow (E,\pi,M)$$

bir demet morfizmi var ise

$$(H,h) : (E,\pi,M) \longrightarrow (E^{'},\pi^{'},M^{'})$$

demet morfizmine bir izomorfizm denir. (E,π,M) ve $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ demetlerine de izomorfiktirler denir.

Tanım 2.2.6.[30] (E,π,M) ve $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ iki vektör demeti olsun. Her $x \in M$ için $H_x : E_x \longrightarrow E^{'}_{h(x)}$ olacak şekilde bir (H,h) demet morfizmine vektör demet homomorfizmi denir.

Tanım 2.2.7.[30] (E,π,M) ve $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ iki vektör demeti olsun. Eğer $M=M^{'}$ ise (H,I_M) formunda vektör demet homomorfizmasına M üzerinde vektör demet homomorfizması denir.

Tanım 2.2.8.[30] (E,π,M) ve $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ iki vektör demeti ve $H:E^{'}\longrightarrow E$ vektör demet homomorfizmi öyleki her E_x lifi için

$$H_x : E_x^{'} \longrightarrow E_x$$

bire-bir olsun. Bu durumda $(E^{'},\pi^{'},M^{'})$ demetine (E,π,M) demetinin alt vektör demeti denir.

Tanım 2.2.9.[33] $\bar{M}$ m-boyutlu bir manifold olsun. $\bar{M}$ üzeride bir distribüsyon, her $p\in\bar{M}$ noktasına $T_p\bar{M}$'nin D_p alt uzayını karşılık getiren bir dönüşümdür, yani,

$$D : \bar{M} \longrightarrow \bigcup T_p\bar{M}$$

$$p \longrightarrow D_p \subset T_p\bar{M}$$

dir. $X\in\chi(\bar{M})$ için $X_p\in D_p$ ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilir denir. Eğer $\{X_1,X_2,...,X_n\}$ tabanı var ve her biri diferensiyellenebilir ise bu durumda D'ye n-boyutlu diferensiyellenebilir distribüsyon denir.

Tanım 2.2.10.[35] $\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Ayrıca M, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer D_p uzayı ile M manifoldunun bu noktadaki tanjant uzayı aynı ise D'ye integrallenebilir ve M'ye de D'nin integral manifoldu denir.

Tanım 2.2.11.[33] $\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutive denir.

Teorem 2.2.1.[33] $\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Bu durumda D distribüsyonun integral manifoldu vardır. Diğer tüm integral manifoldlar, bu integral manifoldunun altmanifoldudur.

Tanım 2.2.13.[35] $\bar{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde n-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna paraleldir denir.

2.3.Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.3.1.[28] Reel m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold M ve g de bu manifold üzerinde $(0, 2)$ mertebeden simetrik tensör alanı olsun. Böylece g manifoldun her x noktasındaki $T_x M$ tanjant uzayı üzerine bilineer form taşır. Bunu g_x ile gösterelim. Eğer manifoldun her x noktası için g_x bilineer formunun indeksi aynı ve g_x, $T_x M$ uzayı üzerinde nondejenere ise bu durumda bilineer forma semi-Riemann metrik ve manifolda da semi-

Riemann manifoldu denir. Manifoldun indeksinin sıfır(bir) olduğu durumda manifolda Riemann(Lorentz) manifold adını alır.

Tanım 2.3.2.[12] M semi-Riemann manifold ve E'de, $x \in M$ için her E_x lifi üzerinde nondejenere bilineer form g_x olacak şekilde M manifoldu üzerinde vektör demeti olsun. Ayrıca g_x bilineer formun indeksi her $x \in M$ için aynı olduğunu kabul edelim. Eğer g_x, M üzerinde diferensiyellenebilir ise bu durumda E'ye semi-Riemann vektör demeti denir. Manifoldun indeksinin sıfır(bir) olduğu durumda E'ye Riemann(Lorentz) vektör demeti denir.

Tanım 2.3.3.[12] E, M üzerinde rankı n olan bir vektör demeti olsun. Eğer ∇_X operatörü, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $S, S' \in \Gamma(E)$ ve f diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere,

1.)$\nabla_{fX+Y}(S) = f\nabla_X S + \nabla_Y S$
2.)$\nabla_X(fS + S') = f\nabla_X S + X(f)S + \nabla_X S'$

şartlarısağlıyorsa E üzerinde bir lineer konneksiyondur denir. Eğer $E = TM$ ise ∇, M üzerinde lineer konneksiyondur.

(M, g) semi-Riemann manifold üzerinde ∇ lineer konneksiyonun olduğunu kabul edelim. Metrik tensör alanı g, ∇'ya göre paralel ise yani $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0$$

ise ∇'ya metrik konneksiyon(Riemann konneksiyon) denir.

Tanım 2.3.4. M bir manifold ve ∇ M üzerinde konneksiyon olsun. Bu durumda ∇ nın torsiyon tensörü, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ile tanımlanır.

Teorem 2.3.1.[12] Semi-Riemann manifold üzerinde tek bir torsiyonsuz metrik konneksiyon vardır.

Her semi-Riemann metrik

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y X, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) \quad (2.3.1) \end{aligned}$$

ile verilen Koszul özdeşliğini sağlar.

Tanım 2.3.5.[12] (M, g), semi-Riemann manifold olsun. Buradan M üzerinde $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \qquad (2.3.2)$$

olarak tanımlanan tensöre ∇ konneksiyonun eğrilik tensörü, $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için,

$$< \bar{R}(X,Y)Z, W >= g(\bar{R}(X,Y)Z, W)$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir.

Levi-Civita konneksiyonun R eğrilik tensörü birinci ve ikinci Bianchi özdeşiklerini sağlar. Ayrıca, diğer özellikler aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem. 2.3.2. Bir semi-Riemann manifoldu M ve M üzerindeki metrik konneksiyon ∇ olsun. Aşağıdaki bağıntılar, geçerlidir:

(a) $\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(Y,X,Z,W) = 0$

(b) $\bar{R}(X,Y,Z,W) + \bar{R}(X,Y,W,Z) = 0$

(c) $\bar{R}(X,Y,Z,W) - \bar{R}(Z,W,X,Y) = 0$.

Semi-Riemann manifoldların Önerme 2.1.1'e göre ortonormal bir tabana sahip olduğunu biliyoruz. Buradan M manifoldunun ortonormal bir tabanı $\{E_1, E_2, ..., E_m\}$ olsun. Böylece ϵ_i, $\{E_i\}$ bazının işareti ve $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(E_i, E_j) = \epsilon_i \delta_i j$$

ve

$$X = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(X, E_i) E_i$$

olmak üzere

$$g(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i g(X, E_i) g(Y, E_i) \tag{2.3.3}$$

yazılır.

Semi-Riemann manifoldu M'nin Ricci tensör alanı

$$Ric(X,Y) = izZ \rightarrow R(X,Y)Z \tag{2.3.4}$$

tanımlanır. Yerel olarak,

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i \bar{R}(X, E_i, Y, E_i) \tag{2.3.5}$$

olur.

Tanım 2.3.6.[12] (M, g) bir semi-Riemann manifoldu ve bir $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı P olsun. P altuzayının bir bazı $\{X, Y\}$ olmak üzere

$$K(P) = \frac{\bar{R}(X, Y, X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \tag{2.3.6}$$

olarak tanımlanan $K(P)$ reel sayısına P nin Riemann anlamındaki kesit eğriliği denir. Eğer $K(P) = c(\text{sbt})$ ise M manifolduna c sabit kesit eğrilikli semi-Riemann manifold denir ve $M(c)$ ile gösterilir. Bu durumda M'nin R eğrilik tensör alanı

$$R(X, Y)Z = c\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\} \tag{2.3.7}$$

ile verilir.

2.4.Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları

Tanım 2.4.1.[12] $(\bar{M}, \bar{g})$ reel $(m+n)$-boyutlu semi-Riemann manifold $m > 1, n > 1$ ($m > 1, n > 1$, yani M, $\bar{M}$ de ne bir eğri ne de bir hiperyüzeydir.) ve $\bar{g}$, $q \in \{1, ..., m+n-1\}$ sabit indeksli semi-Riemann metrik olsun. M, $\bar{M}$ manifoldunun ek boyutu n olan bir altmanifold olsun. Ayrıca $\bar{g}$'nin M üzerine indirgenmiş tensör alanını g ile tanımlanırsa, $\forall u \in M$ de $\forall X_u, Y_u \in T_uM$ için

$$g(X_u, Y_u) = \bar{g}(X_u, Y_u)$$

elde edilir.

Şimdi $u \in M$ noktasında

$$T_uM^{\perp} = \{V_u \in T_u\bar{M} | \bar{g}_u(V_u, W_u) = 0, \forall W_u \in T_uM\}$$

cümlesini gözönüne alalım. g_u, T_uM üzerinde non-dejenere olması durumunda, hem T_uM hem de $T_uM^{\perp}$ non-dejeneredirler. Ayrıca T_uM ve $T_uM^{\perp}$, $T_u\bar{M}$'nin ortogonal tamamlayan vektör altuzaylarıdırlar. Aksi takdirde, hem T_uM hem de $T_uM^{\perp}$ dejenere, ortogonal ancak tamamlayan altuzay değildirler ve

$$RadT_uM = RadT_uM^{\perp} = T_uM \cap T_uM^{\perp}$$

dir.

M, $\bar{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun ve M üzerinde

$$RadTM : u \in M \longmapsto RadT_uM$$

dönüşümünün rankı r olsun. Eğer $r > 0$ ise $RadTM$ ye radikal distribüsyon ve altmanifold M ye de lightlike altmanifold denir. g'ye de M üzerinde r-lightlike(r-dejenere, r-null) metrik denir.

Teorem 2.4.1.[12] (M, g), $(\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

1.) M, r-lightlike altmanifolddur.

2.) $U \subset M$ her koordinat komşuluğunda

$$RadTU : u \in U \longmapsto RadT_uU$$

dönüşümü, U üzerinde rank $r > 0$ olan diferensiyellenebilir bir distribüsyona sahiptir.

3.) $U \subset M$ her koordinat komşuluğunda g tarafından indirgenmiş g tensörü, sabit $m - r$ rankına sahiptir.

Tanım 2.4.2.[12] (M', g'), $(\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun r-lightlike altmanifold ve

$$f : M' \longmapsto \bar{M}$$

bir immersiyon olduğunu kabul edelim. Eğer $\forall X, Y \in \Gamma(TM')$ için

$$g'(X, Y) = \bar{g}(f_* X, f_* Y)$$

oluyorsa f ye r-lightlike izometrik immersiyon ve $M = f(M')$ ye de $\bar{M}$ manifoldunun r-lightlike altmanifoldu denir.

$\bar{M}$ manifoldunun bir M lightlike altmanifoldu $RadTM$'nin rankına, M'nin ekboyutuna ve boyutuna göre dört durumda incelenecektir.

Durum I. $(0 < r < min\{m, n\})$. M manifoldunun tanjant demeti TM'de $RadTM$'nin tamamlayanı olan $S(TM)$ distribüsyonunu gözönüne alalım. M'nin parakompakt olduğunu kabul ettiğimizden dolayı böyle bir distribüsyon her zaman vardır. (önerme 2.1.2.)'den $S(TM)$, $RadTM$'ye ortogonal ve $\bar{g}$'ye göre non-dejeneredir. M üzerinde $S(TM)$ sabit indeksli olur ve tanjant demeti

$$TM = RadTM \perp S(TM) \tag{2.4.1}$$

şekilde yazılabilir. Buradan altmanifoldun tanjant demetine ortogonal olan

$$TM^\perp = \bigcup T_u M^\perp$$

ile tanmlanırsa M lightlike olduğu için $TM^\perp$, $T\bar{M}_{|M}$ de TM ye tamamlayan değildir, çünkü $RadTM = TM \cap TM^\perp$ ve M üzerinde $rankr > 0$ olan bir distribüsyondur. $TM^\perp$'de $RadTM$'ye ortogonal tamamlayan bir vektör demetini $S(TM^\perp)$ ile tanımlayalım. (önerme 2.1.2.)'ye göre $\bar{g}$ metriği $S(TM^\perp)$

üzerinde non-dejenere olduğundan, $TM^{\perp}$ demeti

$$TM^{\perp} = RadTM \perp S(TM^{\perp}) \quad (2.4.2)$$

ortogonal direkt toplam olacak şekilde yazılabilir. Burada $S(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ vektör demetlerine, sırasıyla, M altmanifoldunun ekran distribüsyonu ve transversal ekran distribüsyonu denir. Buradan $S(TM)$ demeti, $T\bar{M}_{|M}$ demetinin non-dejenere altvektör demeti olduğundan $T\bar{M}_{|M}$ demeti

$$T\bar{M}_{|M} \;\; = \;\; S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \quad (2.4.3)$$

ortogonal tamamlayan olacak şekilde yazılabilir, burada $S(TM)^{\perp}$ demeti, $T\bar{M}_{|M}$'de $S(TM)$ demetinine ortogonal tamamlayan vektör demetidir. Ayrıca $S(TM^{\perp})$ demeti, $S(TM)^{\perp}$'in altvektör demeti ve her ikiside non-dejenere olduğundan

$$S(TM)^{\perp} \;\; = \;\; S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp} \quad (2.4.4)$$

ortogonal direkt ayrışımı elde edilir.

Bundan sonra bir lightlike altmanifoldunu $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ ile gösterilecektir. Ayrıca bu bölümde aksi belirtilmedikce kullanılacak indisler

$$i,j,k \in \{1, ...r\},\ a,b,c \in \{r+1, ..., m\}, \alpha, \beta \in \{r+1, ..., n\}$$

şeklindedir.

Lemma 2.4.1.[12] $(\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun r-lightlike altmanifoldu $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ olsun. Bu altmanifoldun bir koordinat komşuluğu U ve $\{\xi_i\}$'de $\Gamma(RadTM_{|U})$ uzayının bir tabanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $S(TM^{\perp})^{\perp}_{|U}$ altvektör demetinin,

$$g(N_i, \xi_j) = \delta_{ij} \quad (2.4.5)$$

ve

$$g(N_i, N_j) \;=\; 0 \qquad (2.4.6)$$

olacak şekilde $\{N_1, ..., N_r\}$ diferensiyellenebilir vektör alanları vardır.

Lightlike altmanifoldlar teorisi ve Riemann yada semi-Riemann altmanifoldlar teorisi arasındaki temel fark, lightlike durumunda $TM^{\perp}$ demetinin bir kısmı altmanifoldun teğet kısmında kalırken, Riemann yada semi-Riemann durumunda TM ile $TM^{\perp}$ vektör demetlerinin arakesiti sıfırdır. Böylece lightlike durum için temel problem, TM demetine teğet olmayan altvektör demetlerinin varolup olmadığıdır. Duggal-Bejancu, [4] daki makalelerinde böyle bir vektör demetinin varlığını gösterdiler. Bu teoremi ispatsız olarak sunuyoruz:

Teorem 2.4.2.[12] $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{g})$ Semi-Riemann manifoldunun r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $i \in \{1, ..., r\}$ için $\{N_1, ..., N_r\}$ tabanı olan $S(TM^{\perp})^{\perp}$ demetinde $RadTM$'ye komplemant olan bir vektör demeti vardır.

Bu vektör demeti ile altmanifoldun tanjant demetinin arakesiti sıfırdır. Bu vektör demetine $(S(TM), S(TM^{\perp}))$ çiftine göre M'nin lightlike transversal vektör demeti denir ve $ltr(TM)$ ile gösterilir.

Şimdi,

$$tr(TM) \;=\; ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \qquad (2.4.7)$$

vektör demetini gözönüne alalım. $ltr(TM)$, M manifoldunun keyfi bir lightlike transversal vektör demetidir. Burada $tr(TM)$ demetinin rank n ve TM demeti ile arakesiti sıfırdır. Böylece $tr(TM)$, $T\bar{M}_{|M}$'de TM demetine komplemant ancak ortogonal olmayan bir vektör demetidir. $tr(TM)$ vektör demetine M manifoldunun transversal vektör demeti denir. (2.4.1) ve (2.4.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= TM \oplus tr(TM) \\ T\bar{M} &= RadTM \perp S(TM) \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp} \\ T\bar{M} &= S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \perp (RadTM \oplus ltr(TM)) \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

elde edilir. Buradan, M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki quasi-ortonormal çatı $i \in \{1, ..., r\}, a \in \{r+1, ..., m\}$ ve $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ olmak üzere

$$\{\xi_i, N_i, X_a, W_\alpha\} \tag{2.4.9}$$

dir. $\{\xi_i\}$ ve $\{N_i\}$ sırasıyla $\Gamma(RadTM_{|U})$ ve $\Gamma(ltr(TM)_{|U})$ vektör demetlerinin tabanlarıdır. Ayrıca $\{X_a\}$ ve $\{W_\alpha\}$'de sırasıyla $\Gamma(S(TM))$ ve $\Gamma(S(TM^{\perp}))$ demetlerinin ortonormal tabanlarıdır. $\forall i \in \{1, ..., r\}$ için $span\{\xi_i, N_i\}$ U'nun herhangi noktasında hiperbolik bir düzlem olduğundan dolayı $RadTM \oplus ltr(TM)$ non-dejeneredir ve M manifoldu üzerinde sabit r indekslidir.

Durum II.[12] $(1 < r = n < m)$. Bu durumda $RadTM = TM^{\perp}$, yani $S(TM^{\perp}) = 0$ dır. Böylece normal demet lightlike altmanifold üzerinde bir distribüsyon olur. Bu durumdaki altmanifolda koizotropik altmanifold denir ve

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{2.4.10}$$

olacak şekilde ortogonal direkt toplam şeklinde yazılabilir. Bu durumda (2.4.8) denklemi

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= TM \oplus ltr(TM) \\ T\bar{M} &= S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus ltr(TM)) \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

olur, burada $ltr(TM)$, $S(TM)$ demetine göre M manifoldunun lightlike transversal vektör demetidir. Ayrıca, M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerinde quasi-ortonormal çatı

$$\{\xi_1, ..., \xi_n, N_1, ..., N_n, X_{n+1}, ..., X_m\} \tag{2.4.12}$$

dir. Burada $\{X_{n+1}, ..., X_m\}$ kümesi $\Gamma(S(TM)_{|U})$'nun ortonormal bir tabanıdır.

Durum III.[12] $(1 < r = m < n)$. Bu durumda $RadTM = TM$, yani $S(TM) = \{0\}$ dır. Böylece M manifoldunun tanjant demeti TM, $TM^{\perp}$ demetinin altvektör demeti olur. Bu yapıdaki M manifolda, $\bar{M}$ manifoldunun izotropik bir altmanifoldu denir ve

$$TM^{\perp} = TM \perp S(TM^{\perp}) \tag{2.4.13}$$

dır. Bu durumda (2.4.8) denklemi

$$T\bar{M} = TM \oplus tr(TM) \tag{2.4.14}$$

olur. (2.4.14) denkleminde (2.4.7) denklemi kullanılırsa

$$T\bar{M} = TM \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \tag{2.4.15}$$

ayrışımı elde edilir. Ayrıca, M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerinde quasi-ortonormal çatı

$$\{\xi_1, ..., \xi_m, N_1, ..., N_m, W_{m+1}, ..., W_n\} \tag{2.4.16}$$

dir. Burada $\{W_{m+1}, ..., W_n\}$ kümesi $\Gamma(S(TM^{\perp})_{|U})$'nun ortonormal bir tabanıdır.

Durum IV.[12] $(1 < r = m = n)$. Bu durumda $RadTM = TM = TM^{\perp}$, yani $S(TM) = \{0\}$ ve $S(TM^{\perp}) = \{0\}$ dır. Buradan da görüleceği gibi ne bir ekran distribüsyonu ne de transversal ekran distribüsyonu vardır. Bu yapıdaki bir M manifolduna, $\bar{M}$ manifoldunun tamamen lightlike altmanifoldu denir ve

$$T\bar{M} \;=\; TM \oplus ltr(TM) \tag{2.4.17}$$

direkt ayrışımı elde edilir. Ayrıca, M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerinde quasi-ortonormal çatısı

$$\{\xi_1, ..., \xi_m, N_1, ..., N_m\} \tag{2.4.18}$$

ile verilir.

$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(m+n)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ Semi-Riemann manifoldunun m-boyutlu lightlike altmanifoldu olsun. $tr(TM)$, $(S(TM), S(TM^{\perp}))$ çiftine göre M manifoldunun transversal vektör demeti ve $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyon olduğunu kabul edelim. TM ve $tr(TM)$, $T\bar{M}_{|M}$ demetinin tamamlayan altvektör demetleri olduğundan, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\bar{\nabla}_X Y \;=\; \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{2.4.19}$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V. \tag{2.4.20}$$

olur. Burada $\{\nabla_X Y, A_V X\}$ ve $\{h(X,Y), \nabla^t_X V\}$ sırasıyla $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(tr(TM))$ uzaylarına aittir. ∇ ve ∇^t sırasıyla M manifoldu ve $tr(TM)$ demetinde lineer konneksiyonlardır. Ayrıca ∇ torsiyonsuz lineer konneksiyon ve h,$\Gamma(TM) \times$

$\Gamma(TM)$ uzayı üzerinde $\Gamma(tr(TM))$ değerli simetrik bilineer formdur. Buradan h'ya $tr(TM)$ demetine göre M manifoldunun ikinci temel formu denir. A'da $\Gamma(tr(TM)) \times \Gamma(TM)$ uzayı üzerinde tanımlanmış $\Gamma(TM)$ değerli bilineer formdur. A'ya da V'ye göre M manifoldunun şekil operatörü denir. ∇ ve ∇^t'ye sırasıyla M manifoldu üzerinde indirgenmiş lineer konneksiyon ve transversal lineer konneksiyon denir [12].

$S(TM^{\perp}) \neq \{0\}$ olduğunu kabul edelim, yani M manifoldu ya I.durum yada III.durum daki gibi olsun. Buradan (2.4.7) ayrışımına göre $ltr(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ demetlerinin sırasıyla $tr(TM)$ demeti üzerinde projeksiyon morfizimleri L ve S olduğunu kabul edelim, yani

$$L : tr(TM) \longmapsto ltr(TM)$$

ve

$$S : tr(TM) \longmapsto S(TM^{\perp})$$

burada

$$h^l(X,Y) = Lh(X,Y), h^s(X,Y) = Sh(X,Y)$$

ve

$$D^l_X V = L(\nabla^t_X V), D^s_X V = S(\nabla^t_X V).$$

Bu durumda (2.4.19) ve (2.4.20) denklemlerinden

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y) \tag{2.4.21}$$

ve

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + D^l_X V + D^s(X,V) \tag{2.4.22}$$

elde edilir. h^l ve h^s, tensörlerine sırasıyla, altmanifoldun ikinci temel formu ve ekran ikinci temel formu denir [12].

Tanım 2.4.3.[12] E bir vektör demeti ve P'de vektör demet morfizmi, yani $P : E \longmapsto E$ olsun. $\forall s \in \Gamma(E)$ için,

$$D_X : \Gamma(E) \longmapsto \Gamma(E)$$

$$s \longmapsto D_X s$$

diferensiyel operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa P morfizimine göre Otsuki konneksiyon denir.

1.) $D_{fX+Y} s = f D_X s + D_Y s$

2.) $D_X(fs + s^{'}) = f D_X s + X(f)P(s) + D_X s^{'}$

Önerme 2.4.1.[12] M, $\bar{M}$ manifoldunun r-lightlike yada izotropik bir altmanifoldu olsun. Bu durumda D^l ve D^s diferensiyel operatörler, sırasıyla L ve S vektör demet morfizimlerine göre $tr(TM)$ demeti üzerinde iki Otsuki konneksiyon tanımlar.

Buradan $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V \in \Gamma(tr(TM))$ için Tanım 2.4.3' göre

$$\nabla^l_X : \Gamma(ltr(TM)) \longmapsto \Gamma(ltr(TM))$$

$$LV \longmapsto \nabla^l_X(LV) = D^l_X(LV)$$

ve

$$\nabla^s_X : \Gamma(S(TM^\perp)) \longmapsto \Gamma(S(TM^\perp))$$

$$SV \longmapsto \nabla^s_X(SV) = D^s_X(SV)$$

diferensiyel operatörleri tanımlanır. Burada ∇^l ve ∇^s, sırasıyla, $ltr(TM)$ ve $S(TM^\perp)$ demetleri üzerinde lineer konneksiyonlardır. ∇^l ve ∇^s'ye, sırasıyla, altmanifold üzerinde lightlike transversal konneksiyon ve ekran transversal konneksiyon denir. Ayrıca $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$D^l : \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM^\perp)) \longmapsto \Gamma(ltr(TM))$$

$$(X, SV) \longmapsto D^l_X SV = D^l(X, SV)$$

ve

$$D^s : \Gamma(TM) \times \Gamma(ltr(TM)) \longmapsto \Gamma(S(TM^\perp))$$

$$(X, LV) \longmapsto D^s_X LV = D^s(X, LV)$$

bilineer dönüşümleri tanımlanır. Bu dönüşümler (2.4.22) denklemine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^l_X LV + \nabla^s_X SV \\ &\quad + D^l(X, SV) + D^s(X, LV) \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

elde edilir. Özel olarak $V \in \Gamma(tr(TM))$ yerine, sırasıyla, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $W \in \Gamma(S(TM^\perp))$ alınırsa $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(X, N) \tag{2.4.24}$$

$$\bar{\nabla}_X W = -A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X, W) \tag{2.4.25}$$

denklemlerine ulaşılır [12].

Şimdi M, $\bar{M}$ manifoldunun koizotropik yada tamamen lightlike altmanifold olduğunu kabul edelim. Bu durumda ekran transversal vektör demeti olmadığından, (2.4.21) ve (2.4.23) denklemlerinden

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y) \tag{2.4.26}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^l_X N \qquad (2.4.27)$$

elde edilir. Dejenere olmayan altmanifoldlarda oldugu gibi (2.4.19), (2.4.21) ve (2.4.26) denklemlerine Gauss formülü ve (2.4.20), (2.4.22), (2.4.23), (2.4.24), (2.4.25) ve (2.4.27) denklemlerinede Weingarten formülü denir. Gauss ve Weingarten formülleri ve $\bar{\nabla}$'nin metrik konneksiyon oldugu gözönüne alınırsa, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$, $N, N' \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\bar{g}(h^s(X,Y),W) + \bar{g}(Y, D^l(X,W)) = g(A_W X, Y), \qquad (2.4.28)$$

$$\bar{g}(h^l(X,Y),\xi) + \bar{g}(Y, h^l(X,\xi)) + g(Y, \nabla_X \xi) = 0, \qquad (2.4.29)$$

$$\bar{g}(D^s(X,N),W) = \bar{g}(N, A_W X), \qquad (2.4.30)$$

$$\bar{g}(A_N X, N') + \bar{g}(A_{N'} X, N) = 0 \qquad (2.4.31)$$

elde edilir. P $S(TM)$ demeti üzerinde TM'nin projeksiyon morfizmi olmak üzere

$$\bar{g}(A_N X, PY) = \bar{g}(N, \bar{\nabla}_X PY). \qquad (2.4.32)$$

Şimdi, M'nin bir U kordinat komşulugunda, $i \in \{1, ..., r\}$ için $N_i \in \Gamma(ltr(TM)_{|M})$ ve $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ için $W_\alpha \in \Gamma(S(TM^{\perp})_{|U})$ olacak şekilde $\Gamma(tr(TM)_{|M})$'nin bir tabanı $\{N_i, W_\alpha\}$ oldugunu kabul edelim. Bu durumda (2.4.21) denklemi, r-lightlike altmanifold ve izotropik altmanifoldlar için, sırasıyla,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum h^l_i(X,Y) N_i + \sum h^s_\alpha(X,Y) W_\alpha \qquad (2.4.33)$$

ve

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum h_i^l(X,Y)N_i + \sum h_\alpha^s(X,Y)W_\alpha \qquad (2.4.34)$$

olur. koizotropik ve tamamen lightlike altmanifoldlar için,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum h_i^l(X,Y)N_i \qquad (2.4.35)$$

ve

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum h_i^l(X,Y)N_i \qquad (2.4.36)$$

elde edilir. U koordinat komşuluğunda $\{h_i^l\}$ ve $\{h_\alpha^s\}$ terimlerine, sırasıyla, altmanifoldun yerel lightlike ikinci temel formu ve yerel ekran ikinci temel formu denir.

Teorem 2.4.3.[12] $(M, g, S(TM), S(TM^\perp))$ bir lightlike altmanifoldun yerel lightlike ikinci temel formları $S(TM), S(TM^\perp)$ ve $ltr(TM)$ vektör demetlerine bağlı değildir.

Önerme 2.4.2.[12] Yerel lightlike ikinci temel formlar radikal distribüsyon üzerinde sıfırdır.

$\forall X \in \Gamma(TM_{|U}), i \in \{1, ..., r\}$ için

$$\eta_i(X) = \bar{g}(X, N_i) \qquad (2.4.37)$$

tanımlayalım. Bu durumda M manifoldu üzerinde her X vektör alanı U kordinat komşuluğu üzerinde

$$X = PX + \sum \eta_i(X)\xi_i \qquad (2.4.38)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi, M ya r-lightlike yada koizotropic bir altmanifold olsun. Bu durumda (2.4.1) ve (2.4.38) ayrışımlarından, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(TM))$ için

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY) \qquad (2.4.39)$$

ve

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X \xi \qquad (2.4.40)$$

yazılabilir. Burada $\{\nabla^*_X PY, A^*_\xi X\}$ ve $\{h^*(X, PY), \nabla^{*t}_X \xi\}$, sırasıyla, $\Gamma(S(TM))$ ve $\Gamma(Rad(TM))$ uzaylarınn elamanlarıdır. ∇^* ve ∇^{*t}, sırasıyla, $S(TM)$ ve $Rad(TM)$ tamamlayan distribüsyonlar üzerinde lineer konneksiyonlardır. Diḡer taraftan h^* ve A^*

$$h^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM)) \longmapsto \Gamma(Rad(TM))$$

ve

$$A^* : \Gamma(Rad(TM)) \times \Gamma(TM) \longmapsto \Gamma(S(TM))$$

şeklinde tanımlanan bilineer formlardır [12].

Semi-Riemann manifoldun non-dejenere bir altmanifoldunun şekil operatörü ve ikinci temel formu arasında bir ilişki olduḡunu biliyoruz. Lightlike altmanifoldlarda ise bu durumun tersine bu ilişki $S(TM)$ ve $tr(TM)$ distribüsyonlarında ayrı ayrı vardır. Daha açık olarak (2.4.21), (2.4.22), (2.4.39) ve (2.4.40) denklemleri kullanılırsa $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(Rad(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\bar{g}(h^l(X, PY), \xi) = g(A^*_\xi X, PY) \qquad (2.4.41)$$

ve

$$\bar{g}(h^*(X,PY),N) \;=\; \bar{g}(A_N X, PY) \tag{2.4.42}$$

elde edilir. h^l simetrik olduğundan (2.4.41) denkleminden $S(TM)$ distribüsyonunun şekil operatörü $S(TM)$ üzerinden self-adjointtir. (2.4.29) denkleminde Y yerine ξ yazılırsa $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{g}(h^l(X,\xi),\xi) \;=\; 0 \tag{2.4.43}$$

elde edilir. (2.4.41) de X yerine ξ alınır ve (2.4.43) kullanılırsa

$$A^*_\xi \xi \;=\; 0 \tag{2.4.44}$$

olur [12].

(2.4.21) ve (2.4.26) denklemlerinden kolayca görülürki, non-dejenere altmanifoldların tersine, bir lightlike altmanifold üzerindeki indirgenmiş konneksiyon metrik konneksiyon değildir. Aşağıdaki teorem lightlike altmanifold üzerindeki indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartları vermektedir.

Teorem 2.4.4.[12] M, $\bar{M}$ manifoldunun r-lightlike yada koizotropik altmanifold olduğunu kabul edelim. Bu durumda, indirgenmiş konnersiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır.

1. $\forall \xi \in \Gamma(RadTM)$ için A^*_ξ, $\Gamma(TM)$ üzerinde sıfırdır.

2. $RadTM$ Killing distribüsyondur.

3. $RadTM$, ∇'ya göre paralel distribüsyondur.

Riemann altmanifoldların diferensiyel geometrisinin incelenmesında Gauss, Codazzi ve Ricci denklemlerinin önemli bir rolü olduğunu biliyoruz. Şimdi, lightlike altmanifoldlar için bu denklemlere karşılık gelen yapı denklemlerini vereceğiz.

$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(m+n)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ Semi-Riemann manifoldunun m-boyutlu r-lightlike bir altmanifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$(\nabla_X h^l)(Y, Z) = \nabla^l_X(h^l(Y, Z)) - h^l(\nabla_X Y, Z) - h^l(Y, \nabla_X Z) \quad (2.4.45)$$

$$(\nabla_X h^s)(Y, Z) = \nabla^s_X(h^l(Y, Z)) - h^s(\nabla_X Y, Z) - h^s(Y, \nabla_X Z) \quad (2.4.46)$$

$$(\nabla_X D^l)(Y, W) = \nabla^l_X(D^l(Y, W)) - D^l(\nabla_X Y, W) - D^l(Y, \nabla^s_X W) \quad (2.4.47)$$

$$(\nabla_X D^s)(Y, N) = \nabla^s_X(D^s(Y, N)) - D^s(\nabla_X Y, N) - D^s(Y, \nabla^l_X N) \quad (2.4.48)$$

$$(\nabla_X A)(N, Y) = \nabla_X(A(N, Y)) - A(\nabla^l_X N, Y) - A(N, \nabla_X Y) \quad (2.4.49)$$

$$(\nabla_X A)(W, Y) = \nabla_X(A(W, Y)) - A(\nabla^s_X W, Y) - A(W, \nabla_X Y) \quad (2.4.50)$$

tanımlayalım. Bu durumda $\bar{\nabla}$, ∇, ∇^l ve ∇^s konneksiyonlarının eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\bar{R}$, R, R^l ve R^s ile tanımlanırsa (2.4.21), (2.4.24), (2.4.25) ve (2.4.45)-(2.4.50) denklemlerinden

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + A_{h^l(X,Z)}Y - A_{h^l(Y,Z)}X + A_{h^s(X,Z)}Y \\ &\quad - A_{h^s(Y,Z)}X + (\nabla_X h^l)(Y, Z) - (\nabla_Y h^l)(X, Z) \qquad (2.4.51) \\ &\quad + D^l(X, h^s(Y, Z)) - D^l(Y, h^s(X, Z)) + (\nabla_X h^s)(Y, Z) \\ &\quad - (\nabla_Y h^s)(X, Z) + D^s(X, h^l(Y, Z)) - D^s(Y, h^l(X, Z)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)N &= R^l(X,Y)N + h^l(Y,A_NX) - h^l(X,A_NY) + D^l(X,D^s(Y,N)) \\ &-D^l(Y,D^s(X,N)) + (\nabla_Y A)(N,X) - (\nabla_X A)(N,Y) \quad (2.4.52) \\ &+A_{D^s(X,N)}Y - A_{D^s(Y,N)}X + (\nabla_X D^s)(Y,N) \\ &-(\nabla_Y D^s)(X,N) + h^s(Y,A_NX) - h^s(X,\nabla_N Y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)W &= R^s(X,Y)W + h^s(Y,A_WX) - h^s(X,A_WY) + D^s(X,D^l(Y,W)) \\ &-D^s(Y,D^l(X,W)) + (\nabla_Y A)(W,X) - (\nabla_X A)(W,Y) \quad (2.4.53) \\ &+A_{D^l(X,W)}Y - A_{D^l(Y,W)}X + (\nabla_X D^l)(Y,W) \\ &-(\nabla_Y D^l)(X,W) + h^l(Y,A_WX) - h^l(X,\nabla_W Y)\end{aligned}$$

elde edilir [12].

2.5.Sasakiyan Manifoldlar

Tanım 2.5.1.[11, 16] $\bar{M}$ $(2m+1)-$ boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde, (1, 1) mertebeli tensör alanı ϕ, $1-$ form η ve bir vektör alanı V var ve aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\bar{M}$ ye hemen hemen kontakt manifold ve (ϕ,η,V) ye de **hemen hemen kontakt yapı** denir.

$$\phi^2 X = -X + \eta(X)V \quad (2.5.1)$$

$$\eta(V) = 1. \quad (2.5.2)$$

Önerme 2.5.1.[11] $\bar{M}$ hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda, $\bar{M}$ üzerindeki (ϕ,η,V) hemen hemen kontakt yapısı için

$$\phi V = 0 \quad (2.5.3)$$

$$\begin{aligned} \eta(\phi X) &= 0 && (2.5.4) \\ rank\phi &= 2n && (2.5.5) \end{aligned}$$

dır.

Lemma 2.5.1.[8] $\bar{M}$ bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ üzerinde bir h Riemann metrik tensör alanı vardır öyleki $\forall X \in \chi(M)$ için $h(X,V) = \eta(X)$ dır.

Önerme 2.5.2.[8] $\bar{M}$ hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ üzerinde bir g Riemann metriği vardır öyleki

$$\begin{aligned} \eta(X) &= g(X,V) && (2.5.6) \\ g(\phi X, \phi Y) &= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) && (2.5.7) \\ g(\phi X, Y) + g(X, \phi Y) &= 0 && (2.5.8) \end{aligned}$$

dır.

Tanım 2.5.2.[41] $\bar{M}$ hemen hemen kontakt manifold olsun. Eğer $\bar{M}$ üzerinde Önerme 2.5.2'de verilen $\bar{g}$ Riemann metriği varsa, (ϕ, V, η) hemen hemen kontakt yapısına $\bar{g}$, Riemann metriği ile birleşen bir hemen hemen kontakt metrik yapıdır denir. $(\bar{M}, \bar{g}, \phi, V, \eta)$ beşlisine de hemen hemen kontakt metrik manifold adı verilir.

Tanım 2.5.3.[8] $\bar{M}$, $(2n+1)$ boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\bar{M}$ üzerinde

$$\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$$

olacak şekilde, global olarak tanımlı η, $1-$ formu varsa $\bar{M}$ manifolduna kontakt manifold denir. Burada n, n. mertebeden dış kuvveti gösterir. η'ya $\bar{M}$ manifoldunun kontakt formu denir.

Teorem 2.5.1.[41] $\bar{M}$, $(2n+1)$ boyutlu ve η kontakt yapılı bir manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ üzerinde

$$\bar{g}(X, \phi Y) = d\eta(X, Y) \qquad (2.5.9)$$

olacak şekilde (ϕ, V, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır.

Tanım 2.5.4.[41] $\bar{M}$, $(2n+1)$ boyutlu ve η kontakt yapılı bir manifold olsun. η kontakt formunda inşa edilmiş hemen hemen bir kontakt metrik yapıya kontakt metrik yapı, manifolda da kontakt metrik manifold denir.

Önerme 2.5.3.[11] $\bar{M}$ hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda (ϕ, V, η) hemen hemen kontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N_{\phi}(X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \qquad (2.5.10)$$

olmasıdır, burada N_{ϕ} Nijenhuis tensör alanıdır.

Lemma 2.5.2.[41] $N^{(2)} = 0$ ve $\Phi = d\eta$ olması durumunda, $\bar{M}$ manifoldunun $(\phi, V, \eta, \bar{g})$ kontakt metrik yapısı için

$$2g((\nabla_X \phi)Y, Z) = g(N^{(1)}(Y, Z), \phi X) + 2d\eta(\phi Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\phi Z, X)\eta(Y)$$

ve

$$\nabla_V \phi = 0$$

dır.

Tanım 2.5.5. [41] $\bar{M}$, (2n+1)boyutlu, $(\phi, V, \eta, \bar{g})$ kontakt metrik yapılı kontakt metrik manifold olsun. V vektör alanı $\bar{g}$'ye göre Killing vektör alanı ise $\bar{M}$ üzerindeki kontakt yapıya K-kontakt yapı ve $\bar{M}$ ' ye de K-kontakt manifold denir. Bir Z vektör alanının Killing vektör alanı

$$(L_Z \bar{g})(X, Y) = \bar{g}(\nabla_X Z, Y) + \bar{g}(X, \nabla_Y Z) \qquad (2.5.11)$$

ile tanımlandığından, V vektör alanının, $\bar{g}$'ye göre Killing vektör alanı olması

$$\begin{aligned}(L_V\bar{g})(X,Y) &= L_V\bar{g}(X,Y) - \bar{g}(L_VX,Y) - \bar{g}(X,L_VY)\\ (L_V\bar{g})(X,Y) &= V\bar{g}(X,Y) - \bar{g}([V,X],Y) - \bar{g}(X,[V,Y])\end{aligned}$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.5.6.[40] $\bar{M}$, (2n+1) boyutlu, $(\phi, V, \eta, \bar{g})$ kontakt metrik yapılı kontakt metrik manifold olsun. Eğer $\bar{M}$ nin kontakt metrik yapısı normal ise $\bar{M}$ ye Sasakian yapıya sahip (yada normal kontakt metrik yapıya) ve M manifoldunada Sasakian manifold (yada normal kontakt metrik manifold) denir.

Teorem 2.5.3. [40] $\bar{M}$ hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ manifoldunun Sasakiyan olması için gerek ve yeter şart

$$\bar{\nabla}_X V = -\phi X \tag{2.5.12}$$

$$(\bar{\nabla}_X \phi)Y = g(X,Y)V - \eta(Y)X \tag{2.5.13}$$

dır.

Tanım 2.5.7.[42] $\bar{M}$ Sasakiyan manifold olsun. $\forall x \in \bar{M}$ için $T_x\bar{M}$ tanjant uzayında ξ'ye dik bir X birim vektörü $\{X, \phi X\}$ ortonormal olacak şekilde var ise $\{X, \phi X\}$ düzlemine $T_x\bar{M}$'nin ϕ-kesiti denir ve $\bar{M}$'nin ϕ kesit eğriliği

$$K(X,\phi X) = g(R(X,\phi X)\phi X, X) \tag{2.5.14}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.5.8. $\bar{M}$ Sasakiyan manifold olsun. $\bar{M}$'nin ϕ-kesit eğriliği sabit$= c$ ise $\bar{M}$'ye Sasakiyan uzay form olarak adlandırılır ve $\bar{M(c)}$ ile gösterilir.

Teorem 2.5.4. [39] $\bar{M(c)}$ Sasakiyan uzay formunun R eğrilik tensörü, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z &= \frac{(c+3)}{4}\{\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y\} + \frac{(c-1)}{4}\{\epsilon\eta(X)\eta(Z)Y \\ &\quad -\epsilon\eta(Y)\eta(Z)X + \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\,V - \bar{g}(Y,Z)\eta(X)\,V \\ &\quad +\bar{g}(\phi\,Y,Z)\phi\,X + \bar{g}(\phi\,Z,X)\phi\,Y - 2\bar{g}(\phi\,X,Y)\phi\,Z\} \quad (2.5.15) \end{aligned}$$

1990 yılında Duggal, hemen hemen kontakt manifoldlar üzerinde semi-Riemann metrik durumunu gözönüne aldı ve Tanım 2.5.1 yerine aşağıdaki tanımı sundu.

Tanım 2.5.9.[11] (M, g), 2n+1 boyutlu semi-Riemann manifold olsun. M üzerinde $(1,1)$ mertebeli ϕ tensör alanı, η 1-formu ve V vektör alanı var öyleki

$$\phi^2 = -I + \eta \otimes V, \eta(V) = 1 \qquad (2.5.16)$$

$$g(V,V) = \varepsilon, g(\phi X, \phi Y) = g(X,Y) - \varepsilon\eta(X)\eta(Y) \qquad (2.5.17)$$

şartları sağlanıyorsa (M, g) ye ε-hemen hemen kontakt metrik manifold denir. Burada V, vektör alanının spacelike veya timelike durumuna göre $\varepsilon = 1$ veya $\varepsilon = -1$ dır.

Bu şekilde tanımlanan bir kontakt yapı, Riemann durumdakinin tersine, (2.5.17) ifadesini sağlayan non-dejenere metriği garanti etmez. Bu durumun

Semi-Riemann versiyonu Duggal tarafından aşağıdaki gibi verildi.

Teorem 2.5.5.[11] (ϕ, η, V) hemen hemen kontakt yapı ve $\bar{g}$, semi-Riemann manifold üzerinde bir metrik öyleki V null olmayan vektör alanı olsun. Bu durumda M üzerinde (2.5.17) şartını sağlayan $(1,2)$ mertebeli simetrik g tensör alanı vardır.

Bununla birlikte bir Lorentz metriğinin varlığı garanti edilmektedir. Yani Teorem 2.5.5 de verilen şartlar altında M üzerinde (2.5.17) ifadesini sağlayan bir Lorentz metrik her zaman vardır.

M, semi-Riemann manifold olsun. Eğer $\varepsilon = 1$ ve $indexM = 2r$ ise M ye spacelike hemen hemen kontakt metrik manifold ve $\varepsilon = -1$ ve $indexM = 2r+1$ ise M ye timelike hemen hemen kontakt metrik manifold adı verilir [11]. Diğer taraftan tamamen Riemann durumundaki temel 2-form ve normallik şartı gözönüne alınarak aşağıdaki kavramlar tanımlanmaktadır.

Bir (ϕ, η, V, g) ε-hemen hemen kontakt metrik yapı için $\Phi = d\eta$ ise (ϕ, η, V, g) yapısına ε-kontakt yapı ve (M, ϕ, η, V, g) beşlisine ε-kontakt manifold denir. Üstelik eğer M normal ise M ye belirsiz Sasakiyan manifold adı verilir.

Teorem 2.5.6.[11] Bir ε-hemen hemen kontakt metrik manifoldun belirsiz Sasakiyan manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X \phi)Y = g(X, Y)V - \varepsilon\eta(Y)X$$

şartının sağlanmasıdır. Bu ifade de Y yerine V yazılırsa

$$\nabla_X V = -\varepsilon\phi X$$

elde edilir [11].

Diğer taraftan ε-Sasakiyan manifoldların sabit eğrilikli olması durumunda eğrilik tensörü Kumar, Rani ve Nagaich tarafından elde edildi. Buna göre bir ε-Sasakiyan manifold sabit c eğrilikli ise eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y,Z,W) &= \frac{(c+3\varepsilon)}{4}\{g(Y,Z)g(X,W)-g(X,Z)g(Y,W)\}\\ &+\frac{(c-\varepsilon)}{4}\{\eta(X)\eta(Z)g(Y,W)-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)\\ &+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)\\ &+g(\phi Y,Z)g(\phi X,W)-g(\phi X,Z)g(\phi Y,W)\\ &+2g(X,\phi Y)g(\phi Z,W)\}\end{aligned}$$

olur [26].

Şimdi, bu tezde vereceğimiz örnekler için kullanacağımız hemen hemen kontakt metrik yapıyı verelim. Daha açık olarak $\mathbf{R}_q^{2m+1}$'da bir kontakt yapı

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{1}{2}(dz-\sum_{i=1}^{m} y^i dx^i), V = 2\partial z\\ \bar{g}=\eta\otimes\eta &+ \frac{1}{4}(-\sum_{i=1}^{\frac{q}{2}} dx^i\otimes dx^i + dy^i\otimes dy^i + \sum_{i=q+1}^{m} dx^i\otimes dx^i + dy^i\otimes dy^i)\\ \phi_o(\sum_{i=1}^{m}(X_i\partial x^i &+ Y_i\,\partial y^i)+Z\,\partial z) = \sum_{i=1}^{m}(Y_i\partial x^i - X_i\,\partial y^i)+\sum_{i=1}^{m} Y_i y^i\,\partial z\end{aligned}$$

ile verilir. Burada $(x^i; y^i; z)$ kartezyen koordinatlardır.

3.SASAKİYAN MANİFOLDLARIN TRANSVERSAL LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm üç altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde radikal transversal lightlike altmanifold tanımlanmakta, örnekler ve karakterizasyonlar verilmektedir. İkinci altbölümde tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifold için gerekli cebirsel yapılar verilmektedir. Üçüncü altbölümde transversal lightlike altmanifoldlar tanımlanmakta, örnekler verilmekte ve distribüsyonların integrallenebilirliği incelenmektedir.

3.1.Radikal Transversal Lightlike Altmanifoldlar

Bu altbölümde, radikal transversal lightlike altmanifoldların tanımı, distribüsyonların integrallenebilme şartları ve örnekler verilmektedir. Ayrıca indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartlar incelenmektedir. [9]'dan biliyoruz ki eğer yapı vektör alanı V, tanjant demete ait ise bu durumda V, ekran distribüsyona aittir.

Tanım 3.1.1. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{g})$ bir belirsiz Sasakiyan manifolduna immersed ve yapı vektör alanı V'ye teğet olan lightlike altmanifold olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa lightlike altmanifolda radikal transversal lightlike altmanifold denir.

$$\phi(Rad\,TM) = ltr\,(TM) \tag{3.1.1}$$

$$\phi(S(TM)) = S\,(TM) \tag{3.1.2}$$

Bu tezde V vektör alanı spacelike bir vektör alanı olarak kabul edilecektir. Eğer yapı vektör alanı timelike ise benzer sonuçlar elde edilebilir.

Ancak yapı vektör alanı lightlike değildir [11]. Bu kabullerimize göre bir indefinite Sasakiyan manifoldun eğrilik tensörü, normallik şartı tamamen Riemann durumundaki gibi olur.

Örnek 1. $\mathbf{R}^9_2$ semi-öklidyen uzayın

$$x^1 = y^2, x^2 = y^1, x^3 = -y^4, x^4 = y^3$$

denklemleri ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Böylece M'deki bir nokta

$$P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_1, x_4, -x_3, z)$$

dır. Bu durumda tanjant demet

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2(\partial\, x_1 + \partial\, y_2 + y^1 \partial\, z) \\ Z_2 &= 2(\partial\, x_2 + \partial\, y_1 + y^2 \partial\, z) \\ Z_3 &= 2(\partial\, x_3 - \partial\, y_4 + y^3 \partial\, z) \\ Z_4 &= 2(\partial\, x_4 + \partial\, y_3 + y^4 \partial\, z) \\ Z_5 &= V = 2\partial\, z \end{aligned}$$

ile gerilir. Bu durumda M, 2-lightlike altmanifolddur öyleki $RadTM = span\{Z_1, Z_2\}$. Lightlike transversal demet $ltr(TM)$

$$N_1 = (-\partial\, x_1 + \partial\, y_2 - y^1 \partial\, z),\ N_2 = (\partial\, x_2 - \partial\, y_1 + y^2 \partial\, z).$$

ile gerilir. Buradan kolayca görülürki $\phi Z_1 = \frac{1}{2} N_2$, $\phi Z_2 = -\frac{1}{2} N_1$, yani $\phi RadTM = ltr(TM)$. Benzer şekilde $\phi Z_3 = -Z_4$ elde edilir. Buradanda $S(TM) = span\{Z_3, Z_4\}$ distribüsyonunun invaryant olduğu görülür. Sonuç olarak, M bir 2-lightlike radikal transversal altmanifolddur.

Örnek 2. M, $\mathbf{R}_4^9$ semi-Riemann manifoldun $\theta \in R - \{k\frac{\pi}{4}\}$ için

$$x^1 = u^1, x^2 = u^2 \sin\theta, x^3 = u^3, x^4 = -u^4 \cos\theta$$

$$y^1 = u^3, y^2 = -u^4 \sin\theta, y^3 = u^1, y^4 = -u^2 \cos\theta.$$

ile verilen altmanifoldu olsun. M'de bir nokta

$$P = (u_1, u_2 \sin\theta, u_3, -u_4 \cos\theta, u_3, -u_4 \sin\theta, u_1, -u_2 \cos\theta, z)$$

dır. M altmanifoldunun tanjant demeti

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 2(\partial\, x_1 + \partial\, y_3 + y^1 \partial\, z),\\
Z_2 &= 2(\sin\theta \partial\, x_2 - \cos\theta \partial\, y_4 + \sin\theta y^2 \partial\, z)\\
Z_3 &= 2(\partial\, x_3 + \partial\, y_1 + y^3 \partial\, z)\\
Z_4 &= 2(-\cos\theta \partial\, x_4 - \sin\theta \partial\, y_2 - \cos\theta y^4 \partial\, z)\\
Z_5 &= V = 2\partial\, z.
\end{aligned}$$

ile gerilir. Bu durumda M 2-lightlike altmanifolddur öyleki $RadTM = span\{Z_1, Z_3\}$. Lightlike transversal demet $ltr(TM)$

$$N_1 = (-\partial\, x_1 + \partial\, y_3 - y^1 \partial\, z),\ N_3 = (\partial\, x_3 - \partial\, y_1 + y^3 \partial\, z).$$

ile gerilir. Kolayca görülür ki $\phi Z_1 = \frac{1}{2}N_3$, $\phi Z_3 = -\frac{1}{2}N_1$, yani $\phi RadTM = ltr(TM)$. Benzer şekilde $\phi Z_2 = Z_4$ elde edilir. Buradanda $S(TM) = span\{Z_2, Z_4\}$ distribüsyonunun invaryant oldugu görülür. Sonuç olarak, M

radikal transversal 2-lightlike altmanifolddur.

Önerme 3.1.1. $\bar{M}$ bir belirsiz Sasakiyan manifold olsun. Bu durumda, $\bar{M}$ manifoldunun 1-lightlike radikal transversal lightlike altmanifoldu yoktur.

İspat. Kabul edelim ki M, 1-lightlike olsun. Bu durumda $RadTM = span\{\xi\}$ ve $ltr(TM) = span\{N\}$dır. Böylece (2.5.7)den

$$\bar{g}(\phi\xi, \xi) = \bar{g}(\phi^2\xi, \phi\xi) + \eta(\phi\xi)\eta(\xi)$$

olur.(2.5.1) kullanılırsa

$$\bar{g}(\phi\xi, \xi) = \bar{g}(-\xi + \eta(\xi)V, \phi\xi)$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{g}(\phi\xi, \xi) = -\bar{g}(\xi, \phi\xi)$$

dır. Böylece

$$\bar{g}(\phi\xi, \xi) \quad = \quad 0 \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.1.1) den $\phi\xi = N \in \Gamma(ltr(TM))$ olur. Buradan $g(\phi\xi, \xi) = g(N, \xi) = 1$ elde edilir. Bu ise (3.1.3) ile çelişir. Buradan ispat tamamlanır.

Aşağıdaki önerme Tanım. 3.1.1 den kolayca görülür.

Önerme 3.1.2. $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ manifoldunun izotropik yada tamamen lightlike radikal transversal lightlike altmanifoldu yoktur.

$\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $S(TM) \neq 0$ ise M ye proper radikal transversal lightlike altmanifoldu denir. Tanım 3.1.1 ve Önerme 3.1.1 den aşağıdaki özellikler kolayca elde edilir:

1) $boy(RadTM) \geq 2$

2) $boy(S(TM)) = 2s, s > 1$

3) $5-$boyutlu radikal transversal lightlike altmanifold $2-$lightlikedır.

Teorem 3.1.1. $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu invaryanttır.

İspat. $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için (2.5.7) den

$$\bar{g}(\phi W, \xi) = \bar{g}(\phi^2 W, \phi\xi) + \eta(\phi W)\eta(\xi)$$

elde edilir. Buradan (2.5.1) ve (2.5.4)

$$g(\phi W, \xi) = -g(W, \phi\xi) = 0 \tag{3.1.4}$$

dır. Bu ise ϕW vektör alanının $ltr(TM)$ de bileşeni olmadığını gösterir. Benzer şekilde $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$g(\phi W, N) = -g(W, \phi N) = 0 \tag{3.1.5}$$

olur. Buradan da ϕW vektör alanın $Rad(TM)$ de bileşeni olmadığı sonucuna ulaşırız. $X \in \Gamma(S(TM))$ için (2.5.7), (2.5.1) ve (2.5.4) den

$$g(\phi W, X) = -g(W, \phi X) = 0 \tag{3.1.6}$$

yani ϕW vektör alanının $S(TM)$ de de bileşeni yoktur. Böylece ispat (3.1.4), (3.1.5) ve (3.1.6) dan elde edilir.

$\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. $RadTM$ ve $S(TM)$ üzerindeki projeksion dönüşümler sırasıyla Q ve T olmak üzere, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = TX + QX \tag{3.1.7}$$

olacak şekilde yazılır. Burada $TX \in \Gamma(S(TM))$, $QX \in \Gamma(RadTM)$ dir. (3.1.7) ifadesine ϕ uygulanırsa

$$\phi X = \phi TX + \phi QX \tag{3.1.8}$$

olur. Burada $\phi TX = SX$ ve $\phi QX = LX$ yazılırsa (3.1.8) aşağıdaki gibi

$$\phi X = SX + LX \tag{3.1.9}$$

elde edilir burada $SX \in \Gamma(S(TM))$ ve $LX \in \Gamma(ltrTM)$ dir.

$\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. (2.5.13) den $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X \phi Y - \phi \bar{\nabla}_X Y \;=\; g(X,Y)V - \eta(Y)X$$

olur. Burada (3.1.9),(2.4.21) ve (2.4.24) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(X,Y)V - \eta(Y)X \;=\;& \nabla_X SY + h^l(X,SY) + h^s(X,SY) - A_{LY}X \\ & + \nabla^l_X LY + D^s(X,LY) - S\nabla_X Y - L\nabla_X Y \\ & - \phi h^l(X,Y) - \phi h^s(X,Y). \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin teğet, ekran transversal ve lightlike transversal bileşenleri ayrı ayrı yazılırsa

$$(\nabla_X S)Y = A_{LY}X + \phi h^l(X,Y) + g(X,Y)V - \eta(Y)X \tag{3.1.10}$$

$$h^l(X,SY) + \nabla^l_X LY - L\nabla_X Y = 0 \tag{3.1.11}$$

$$h^s(X,SY) + D^s(X,LY) - \phi h^s(X,Y) = 0 \tag{3.1.12}$$

elde edilir.

Lightlike altmanifoldların indirgenmiş konneksiyonu metrik konneksiyon değildir. Şimdi indirgenmiş konneksiyonunun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartları verelim.

Teorem 3.1.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ∇ indirdenmiş konneksiyonunun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(RadTM)$ için $A_{\phi Y}X$ vektör alanının $S(TM)$ de bileşeninin olmamasıdır.

İspat. Kabul edelim ki ∇ metrik konneksiyon olsun. Bu durumda Teorem 2.4.4'den $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(RadTM)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(RadTM)$ dir. Buradan $Z \in \Gamma(S(TM))$ için (2.4.21)den

$$g(\nabla_X Y, Z) \;=\; \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - h^l(X,Y) - h^s(X,Y), Z)$$

olur. Buradan

$$0 \;=\; \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z).$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.5.7) kullanılırsa

$$g(\phi\bar{\nabla}_X Y, \phi Z) + \eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(Z) = 0$$

olur. (2.4.21) den $\eta(\bar{\nabla}_X Y) = 0$ elde edilir. Buradan

$$g(-(\bar{\nabla}_X \phi)Y + \bar{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) = 0.$$

dır. (2.5.14) kullanılırsa

$$\bar{g}(-g(X,Y)V + \eta(Y)X + \bar{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) = 0$$

olur. (2.4.24) kullanılırsa

$$\bar{g}(-A_{\phi Y}X + \nabla^l_X \phi Y + D^s(X, \phi Y), \phi Z) = 0$$

dir. Böylece

$$g(A_{\phi Y}X, \phi Z) = 0$$

dır. Yani $A_{\phi Y}X$ vektör alanının $S(TM)$ distribüsyonunda bileşeni yoktur.

Tersine $A_{\phi Y}X$, $S(TM)$ de bileşeni olmadığını kabul edelim. Yani $g(A_{\phi Y}X, Z) = 0$ olsun. Bu ifade de (2.4.24) kullanılırsa

$$g(-\bar{\nabla}_X \phi Y + \nabla^l_X \phi Y + D^s(X, \phi Y), Z) = 0$$

olur. Buradan

$$g(\bar{\nabla}_X \phi Y, Z) = 0$$

dır. Böylece

$$g((\bar{\nabla}_X \phi)Y + \phi \bar{\nabla}_X Y, Z) = 0$$

olur. (2.5.13) ve (2.4.21) den

$$g(g(X,Y)V - \eta(Y)X + \phi\nabla_X Y + \phi h^l(X,Y) + \phi h^s(X,Y), Z) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$g(\phi\nabla_X Y, Z) = 0$$

dır. (2.5.7) den

$$g(\phi^2\nabla_X Y, \phi Z) + \eta(\phi\nabla_X Y)\eta(Z) = 0$$

olur. Burada (2.5.1) ve (2.5.4) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, \phi Z) = 0$$

elde edilir. Buradan $\nabla_X Y \in \Gamma(Rad(TM))$dir.

Şimdi, radikal transversal lightlike altmanifoldların tanımı doğrultusunda distribüsyonların integrallenebilme şartlarını inceleyelim.

Teorem 3.1.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$h^l(X, SY) = h^l(Y, SX)$$

dir.

İspat. $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için (3.1.11) de X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$h^l(Y, SX) + \nabla^l_Y LX - L\nabla_Y X = 0. \qquad (3.1.13)$$

elde edilir. Böylece (3.1.11) ve (3.1.13) den

$$h^l(X, SY) - h^l(Y, SX) = L[X, Y]. \tag{3.1.14}$$

elde edilir. İspat (3.1.14) den görülür.

Teorem 3.1.4. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(RadTM)$ için

$$A_{LX}Y = A_{LY}X$$

dir.

İspat. $X, Y \in \Gamma(RadTM)$ için (3.1.10) dan

$$(\nabla_X S)Y = A_{LY}X + \phi h^l(X, Y)$$

olur. Buradan

$$-S\nabla_X Y = A_{LY}X + \phi h^l(X, Y). \tag{3.1.15}$$

olur. (3.1.15) den X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$-S\nabla_Y X = A_{LX}Y + \phi h^l(Y, X). \tag{3.1.16}$$

denklemi elde edilir. Buradan (3.1.15) ve (3.1.16) taraf tarafa çıkartılırsa

$$S\nabla_X Y - S\nabla_Y X = A_{LX}Y - A_{LY}X + \phi h^l(Y, X) - \phi h^l(X, Y).$$

elde edilir. h^l simetrik olduğundan dolayı

$$S[X, Y] = A_{LX}Y - A_{LY}X$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(RadTM)$, $Z \in \Gamma\ (S(TM))$ için

$$\bar{g}(\phi Y, X)\eta(Z) = -g(A_{\phi Y}X, \phi Z)$$

olmasıdır.

İspat. $RadTM$ distribüsyonun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(RadTM)$, $Z \in \Gamma\ (S(TM))$ için

$$g(\nabla_X Y, Z) = 0$$

olmasıdır. Buradan (2.4.21) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z)$$

olur. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan

$$g(\nabla_X Y, Z) = X\bar{g}(Y, Z) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

ulaşılır. Buradan

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

dir. Burada (2.5.7) denklemi kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, \phi\bar{\nabla}_X Z) - \eta(Y)\eta(\bar{\nabla}_X Z)$$

elde edilir. Buradan

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, \phi\bar{\nabla}_X Z).$$

Böylece

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, -(\bar{\nabla}_X \phi)Z + \bar{\nabla}_X \phi Z)$$

olur. (2.5.13) den

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, -g(X, Z)V + \eta(Z)X + \bar{\nabla}_X \phi Z)$$

dir. Böylece

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(\phi Y, X)\eta(Z) - \bar{g}(\phi Y, \bar{\nabla}_X \phi Z)$$

elde edilir. Burada (2.4.21) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(\phi Y, X)\eta(Z) - g(\phi Y, \nabla_X \phi Z)$$

olur. (2.4.39) dan

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(\phi Y, X)\eta(Z) - g(\phi Y, h^*(X, \phi Z))$$

dır. (2.4.42) den de

$$g(\nabla_X Y, Z) = -g(\phi Y, X)\eta(Z) - g(A_{\phi Y} X, \phi Z)$$

elde edilir. Böylece ispat biter.

Teorem 3.1.6. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ekran distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(S(TM))$, $N \in \Gamma$ $(ltr(TM))$ için $A^*_{\phi N} X$ in $(S(TM))$ de bileşeni yoktur.

İspat. $(S(TM))$ distribüsyonun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(S(TM))$, $N \in \Gamma\ (ltr(TM))$ için

$$g(\nabla_X Y, N) = 0$$

olmasıdır. (2.4.21) kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y, N) = g(\bar{\nabla}_X Y, N)$$

elde edilir. (2.5.7) den

$$g(\bar{\nabla}_X Y, N) \quad = \quad \bar{g}(-(\bar{\nabla}_X \phi)Y + \bar{\nabla}_X \phi Y, \phi N)$$

elde edilir. (2.5.13) kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_X Y, N) = g(\bar{\nabla}_X \phi Y, \phi N)$$

olur. Böylece (2.4.21) den

$$g(\bar{\nabla}_X Y, N) = g(h^l(X, \phi Y), \phi N)$$

dır. (2.4.41) den de

$$g(\bar{\nabla}_X Y, N) = g(A^*_{\phi N} X, \phi Y) \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonuç 3.1.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldunun $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart (3.1.17) ve $X, Y \in \Gamma(TM)$, $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\bar{g}(\phi Y, X)\eta(Z) = -g(A_{\phi Y} X, \phi Z)$$

şartlarının sağlanmasıdır, burada M_1, radikal distribüsyonun ve M_2 ekran distribüsyonunun integral manifoldlarıdır.

3.2.Tamamen Kontakt Umbilikal Radikal Transversal Lightlike Altmanifoldlar

Bu altbölümde tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldları inceleyeceğiz. Bir belirsiz Sasakiyan manifoldunun karekteristik vektör alanı, altmanifoldun tanjant demetine ait ve altmanifold tamamen umbilik ise bu durumda [16]'ten biliyoruz ki altmanifold invaryant altmanifold olmak zorundadır. [16]'da yazarlar, tamamen kontakt umbilik altmanifold tanımını aşağıdaki gibi sundular.

Tanım 3.2.1.$\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun lightlike altmanifoldu olsun. Eğer, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} h^l(X,Y) &= [g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)]\alpha_L \\ &\quad + \eta(X)h^l(Y,V) + \eta(Y)h^l(X,V) \qquad (3.2.1) \\ h^s(X,Y) &= [g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)]\alpha_S \\ &\quad + \eta(X)h^s(Y,V) + \eta(Y)h^s(X,V), \qquad (3.2.2) \end{aligned}$$

ise M ye tamamen kontakt umbilik lightlike altmanifold denir, burada $\alpha_S \in \Gamma(S(TM^\perp))$ ve $\alpha_L \in \Gamma(ltr(TM))$ dır.

Teorem 3.2.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\alpha_L = 0$ olması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilir olmasıdır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için

$$\bar{g}([X,Y],N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, N) \tag{3.2.3}$$

olur. (3.2.3) de (2.5.7) ve (2.5.13) kullanılırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X \phi Y, \phi N) \\ \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \phi X, \phi N) \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

elde edilir. (3.2.4) denklemleri (3.2.3) de yazılır ve (2.4.21) kullanılırsa

$$\bar{g}([X,Y],N) = \bar{g}(h^l(X,\phi Y),\phi N) - \bar{g}(h^l(Y,\phi X),\phi N) \tag{3.2.5}$$

dır. Buradan (3.2.1), (2.4.21) ve (2.5.12) kullanılırsa

$$h^l(X,\phi Y) = g(X,\phi Y)\alpha_L \tag{3.2.6}$$

$$h^l(Y,\phi X) = g(Y,\phi X)\alpha_L \tag{3.2.7}$$

olur. (3.2.5) de (3.2.6), (3.2.7) yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\bar{g}([X,Y],N) = 2g(Y,\phi X)g(\alpha_L,\phi N) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda,$\alpha_L = 0$ olması gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için $h^*(X,\phi Y) = 0$ olmasıdır.

İspat. (2.5.13) den,

$$\bar{\nabla}_X \phi Y - \phi \bar{\nabla}_X Y = g(X,Y)V$$

olur. (2.4.21) ve (3.1.9) dan

$$\begin{aligned} g(X,Y)V &= \nabla_X \phi Y + h^l(X,\phi Y) + h^s(X,\phi Y) \\ & \quad -S\nabla_X Y - L\nabla_X Y - \phi h^l(X,Y) - \phi h^s(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$g(\nabla_X \phi Y, \phi\xi) - g(\phi h^l(X,Y), \phi\xi) = 0.$$

bulunur. (2.4.39) ve (2.5.7) den

$$g(h^*(X,\phi Y), \phi\xi) - g(h^l(X,Y), \xi) = 0$$

olur. Böylece (3.2.1) den

$$g(h^*(X,\phi Y), \phi\xi) = g(X,Y)g(\alpha_L, \xi),$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, ∇ indirdenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ olmak üzere

$$A_{\phi\xi}X = -\eta(X)\xi$$

dir.

İspat. (2.5.13) den

$$\bar{\nabla}_X \phi\xi - \phi\bar{\nabla}_X \xi = 0$$

olur. (2.4.21) ve (2.4.24) den

$$-A_{\phi\xi}X + \nabla^l_X\phi\xi + D^s(X,\phi\xi) = \phi(\nabla_X\xi + h^l(X,\xi) + h^s(X,\xi))$$

elde edilir.(3.2.1) ve (3.2.2) den

$$-A_{\phi\xi}X + \nabla^l_X\phi\xi + D^s(X,\phi\xi) = \phi\nabla_X\xi + \eta(X)\phi h^l(\xi,V) + \eta(X)\phi h^s(\xi,V)$$

dır. (3.1.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} -A_{\phi\xi}X + \nabla^l_X\phi\xi + D^s(X,\phi\xi) &= S\nabla_X\xi + L\nabla_X\xi + \eta(X)\phi h^l(\xi,V) \\ &\quad + \eta(X)\phi h^s(\xi,V) \end{aligned}$$

bulunur. Bu denklemin tanjant kısımları alınırsa

$$-A_{\phi\xi}X = S\nabla_X\xi + \eta(X)\phi h^l(\xi,V) \tag{3.2.9}$$

dır. Diğer taraftan, (2.5.12) ve (2.4.21) den

$$h^l(\xi,V) = -\phi\xi. \tag{3.2.10}$$

olur.(3.2.9) da (3.2.10) yazılır ve (2.5.1)kullanılırsa

$$S\nabla_X\xi = -A_{\phi\xi}X - \eta(X)\xi \tag{3.2.11}$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X\xi \in \Gamma(RadTM)$ olması için gerek ve yeter şart $A_{\phi\xi}X = -\eta(X)\xi$ dır.

Teorem 3.2.4. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, radikal distribüsyonun paralel olması için gerek ve yeter şart $\forall\xi_1,\xi_2 \in \Gamma(RadTM)$ için $A_{\phi\xi_2}\xi_1 = 0$ dır.*

İspat. (2.5.13) den

$$\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2 - \phi\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 = 0$$

olur. (2.4.21) ve (2.4.24) denklemlerinden

$$-A_{\phi\xi_2}\xi_1 + \nabla^l_{\xi_1}\phi\xi_2 + D^s(\xi_1, \phi\xi_2) = \phi\nabla_{\xi_1}\xi_2 + \phi h^l(\xi_1, \xi_2) + \phi h^s(\xi_1, \xi_2)$$

dir. (3.2.1) ve (3.2.2)den

$$-A_{\phi\xi_2}\xi_1 + \nabla^l_{\xi_1}\phi\xi_2 + D^s(\xi_1, \phi\xi_2) = \phi\nabla_{\xi_1}\xi_2$$

olur. Böylece (3.1.9) ve teğet bileşenler gözönüne alınırsa

$$-A_{\phi\xi_2}\xi_1 = S\nabla_{\xi_1}\xi_2,$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\alpha_S = 0$ dır.*

İspat. (2.5.13) denkleminden $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$\bar{\nabla}_X\phi X - \phi\bar{\nabla}_X X = g(X, X)V$$

olur. (2.4.21) ve (3.1.9)dan

$$\begin{aligned} g(X, X)V &= \nabla_X\phi X + h^l(X, \phi X) + h^s(X, \phi X) - S\nabla_X X - L\nabla_X X \\ &\quad -\phi h^l(X, X) - \phi h^s(X, X) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada denklemin ekran transversal bileşenleri gözönüne alınırsa denklemin ifadesi

$$h^s(X, \phi X) = \phi h^s(X, X) \qquad (3.2.12)$$

dir. $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için (3.2.12) de (3.2.2)kullanılırsa

$$g(X,X)g(\alpha_S, \phi W) = 0$$

elde edilir. $(S(TM))$ non-dejenere olduğundan $\alpha_S = 0$ dır. Buradan ispat tamamlanır.

Bu kısımda, belirsiz Sasakiyan uzay formun radikal transversal lightlike altmanifoldlarının varlığı yokluğu kontrol edilecektir. Bunun için bazı hazırlık lemmalar verelim.

Lemma 3.2.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$h^l(\nabla_X \phi X, \xi) = -g(\nabla_X \phi X, V)\phi\xi \tag{3.2.13}$$

dır.

İspat. (2.4.21) ve (2.5.12)den

$$\nabla_\xi V + h^l(\xi, V) + h^s(\xi, V) = -\phi\xi.$$

Buradan

$$h^l(\xi, V) = -\phi\xi. \tag{3.2.14}$$

Diğer taraftan, (3.2.1) den

$$h^l(\nabla_X \phi X, \xi) = g(\nabla_X \phi X, V)h^l(\xi, V)$$

elde edilir. Böylece üstteki denklemde (3.2.14) kullanılırsa, (3.2.13) elde edilir.

Lemma 3.2.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$g(\nabla_X \phi X, V) = g(\phi X, \phi X) \tag{3.2.15}$$

İspat. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \phi X, V) + \bar{g}(\phi X, \bar{\nabla}_X V) = 0.$$

Burada, (2.4.21) ve (2.5.12) kullanılırsa

$$g(\nabla_X \phi X, V) - g(\phi X, \phi X) = 0.$$

olur.

Lemma 3.2.4. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$h^l(\phi X, V) = 0. \tag{3.2.16}$$

İspat. (2.4.21)den,

$$\bar{\nabla}_{\phi X} V = \nabla_{\phi X} V + h^l(\phi X, V) + h^s(\phi X, V)$$

elde edilir. Üstteki denklemde (2.5.1) ve (2.5.12) kullanılırsa, ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.5. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\forall X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$g(\nabla_{\phi X} X, V) = -g(X, X) \qquad (3.2.17)$$

dir.

İspat. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\phi X} X, V) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_{\phi X} V) = 0$$

elde edilir. Buradan (2.4.21) ve (2.5.13)kullanılırsa

$$g(\nabla_{\phi X} X, V) + g(X, -\phi^2 X) = 0$$

olur. Böylece, (2.5.1) den,

$$g(\nabla_{\phi X} X, V) + g(X, X) = 0$$

elde edilir.

Lemma 3.2.6. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$g(X, \nabla_{\phi X} \xi) = -g(h^l(\phi X, X), \xi) \qquad (3.2.18)$$

dır.

İspat. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\phi X} X, \xi) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_{\phi X} \xi) = 0$$

olur. Buradan, (2.4.21) kulanılırsa ispat tamamlanır.

Lemma 3.2.7. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için*

$$g(\phi X, \nabla_X \xi) = -g(h^l(X, \phi X), \xi) \qquad (3.2.19)$$

dır.

İspat. $\bar{\nabla}$ metrik konneksion olduğundan,

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \phi X, \xi) + \bar{g}(\phi X, \bar{\nabla}_X \xi) = 0$$

olur. Buradan, (2.4.21) kullanılırsa (3.2.19) elde edilir.

Teorem 3.2.5. *$\bar{M}(c)$ bir belirsiz Sasakiyan uzay form öyleki $c \neq -3$ olsun. Bu durumda $\bar{M}(c)$ uzayının tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu yoktur.*

İspat. M, $\bar{M}(c)$ nin tamamen kontakt umbilik radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun öyleki $c \neq -3$ dır. (2.4.51), (2.5.15) ve (2.4.45) den $\forall X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$, $\xi, \xi' \in \Gamma(RadTM)$ için

$$\begin{aligned} \frac{1-c}{2} g(\phi X, \phi X) g(\phi \xi, \xi') &= \bar{g}((\nabla_X h^l)(\phi X, \xi), \xi') \\ &\quad -\bar{g}((\nabla_{\phi X} h^l)(X, \xi), \xi') \end{aligned} \qquad (3.2.20)$$

elde edilir, burada

$$(\nabla_X h^l)(\phi X, \xi) = \nabla^l_X h^l(\phi X, \xi) - h^l(\nabla_X \phi X, \xi) - h^l(\phi X, \nabla_X \xi) \quad (3.2.21)$$

ve

$$(\nabla_{\phi X} h^l)(X, \xi) = \nabla^l_{\phi X} h^l(X, \xi) - h^l(\nabla_{\phi X} X, \xi) - h^l(X, \nabla_{\phi X} \xi) \quad (3.2.22)$$

dır. M tamamen kontakt umbilik olduğundan, (3.2.1) uygulanırsa

$$h^l(\phi X, \xi) = 0. \quad (3.2.23)$$

(3.2.1), (3.2.13), (3.2.15) ve (2.5.7) den

$$h^l(\nabla_X \phi X, \xi) = -g(X, X)\phi\xi \quad (3.2.24)$$

olur. (3.2.1) ve (3.2.16) den

$$h^l(\phi X, \nabla_X \xi) = g(\phi X, \nabla_X \xi)\alpha_L \quad (3.2.25)$$

bulunur. (3.2.21)de (3.2.23), (3.2.24) ve (3.2.25) kullanılırsa,

$$(\nabla_X h^l)(\phi X, \xi) = g(X, X)\phi\xi - g(\phi X, \nabla_X \xi)\alpha_L. \quad (3.2.26)$$

Diğer taraftan, (3.2.1) den

$$h^l(X, \xi) = 0 \quad (3.2.27)$$

dır. Bu durumda (3.2.1), (3.2.14) ve (3.2.17) kullanılırsa

$$h^l(\nabla_{\phi X} X, \xi) = g(X, X)\phi\xi \quad (3.2.28)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.2.1) ve (3.2.16) dan

$$h^l(X, \nabla_{\phi X} \xi) = g(X, \nabla_{\phi X} \xi)\alpha_L \quad (3.2.29)$$

olur. (3.2.22)de (3.2.27), (3.2.28) ve (3.2.29) kullanılırsa,

$$(\nabla_{\phi X} h^l)(X,\xi) = -g(X,X)\phi\xi - g(X,\nabla_{\phi X}\xi)\alpha_L \tag{3.2.30}$$

olur. Böylece (3.2.20) de (3.2.26) ve (3.2.30) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{1-c}{2} g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'}) &= 2g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'}) + g(X,\nabla_{\phi X}\xi)g(\alpha_L,\xi^{'}) \\ &\quad -g(\phi X,\nabla_X\xi)g(\alpha_L,\xi^{'}) \end{aligned}\tag{3.2.31}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.18) ve (3.2.19) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{1-c}{2} g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'}) &= 2g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'}) \\ &\quad +g(\alpha_L,\xi^{'})(g(h^l(X,\phi X) - h^l(\phi X,X),\xi)).\end{aligned}$$

olur. h^l simetrik oldūgundan,

$$\frac{1}{2}(1-c)g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'}) = 2g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'})$$

elde edilir. Buradanda

$$(3+c)g(X,X)g(\phi\xi,\xi^{'}) = 0$$

olur. $(S(TM))$ ve $(RadTM)\oplus ltr(TM)$ non-degenerate oldūgundan, bir non-null vektör alanı X ve $g(\phi\xi,\xi^{'}) \neq 0$ olacak ṣekilde seçebiliriz. Bu yüzden $c=-3$ dir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3.Transversal Lightlike Altmanifoldlar

Bu altbölümde, transversal lightlike altmanifoldların tanımı verilmekte, distribüsyonların geometrisi incelenmekte ve bu ṣekildeki altmanifoldlarla ilgili örnekler verilmektedir. Ayrıca indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmektedir.

Tanım 3.3.1. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{g})$ bir belirsiz Sasakiyan manifolduna immersed ve yapı vektör alanı V'ye teḡet olan lightlike altmanifoldu olsun. Eḡer aşaḡıdaki şartlar saḡlanıyorsa lightlike altmanifolda transversal lightlike altmanifold denir.

$$\phi(Rad\,TM) = ltr\,(TM) \tag{3.3.1}$$

$$\phi(S(TM)) \subseteq (S(TM^{\perp})) \tag{3.3.2}$$

$S(TM^{\perp})$ de $\phi S(TM)$ ye ortogonal tamamlayan olan altdemeti μ ile gösterelim.

Önerme 3.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, μ distribüsyonu ϕ ye göre invaryanttır.

İspat. $W \in \Gamma(\mu)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için 2.5.7) ve (2.5.1)den

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\phi W, \xi) &= \bar{g}(\phi^2 W, \phi\xi) + \eta(\phi W)\eta(\xi) \\
\bar{g}(\phi W, \xi) &= -\bar{g}(W, \phi\xi) \\
\bar{g}(\phi W, \xi) &= 0
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

ve

$$\bar{g}(\phi W, N) = \bar{g}(\phi^2 W, \phi X) + \eta(\phi W)\eta(N)$$

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\phi W, N) &= -\bar{g}(W, \phi N) \\
\bar{g}(\phi W, N) &= 0
\end{aligned} \tag{3.3.4}
$$

olur. Şu halde ϕW nin $(RadTM)$ ve $(ltrTM)$ de bileşenleri yoktur. Benzer yolla, $X \in \Gamma(S(TM))$ ve $W_1 \in \Gamma(\phi S(TM))$ için

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\phi W, X) = -\bar{g}(W, \phi X) = 0 \\
\bar{g}(\phi W, W_1) = -\bar{g}(W, \phi W_1) = 0
\end{aligned} \tag{3.3.5}
$$

elde edilir. Buradan ϕW, $(S(TM))$ ve $(\phi S(TM))$ de bileşenleri yoktur. (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerinden μ distribüsyonunun invaryant olduğu ortaya çıkar.

Aşağıdaki iki önermenin ispatı 1. altbölümdeki sonuçlara benzer olduğundan sadece ifadeleri sunulmaktadır.

Önerme 3.3.2. $\bar{M}$ bir belirsiz Sasakiyan manifold olsun. Bu durumda, $\bar{M}$ manifoldunun 1-lightlike transversal lightlike altmanifoldu yoktur.

Önerme 3.3.3. $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ manifoldunun izotropik yada tamamen lightlike transversal lightlike altmanifoldu yoktur.

M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Tanım 3.3.1 ve Önerme 3.3.2 den aşağıdaki sonuçlar açıktır:

1) $boy(RadTM) \geq 2$

2) $3-$ boyutlu transversal lightlike altmanifold $2-$lightlikedır.

Örnek 3. $\mathbf{R}_2^9$ semi-öklidyen uzayın

$$x^1 = y^2, x^2 = y^1, x^3 = y^4, x^4 = y^3$$

denklemleri ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Böylece M'deki bir nokta

$$P = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_1, x_4, x_3, z)$$

dir. Bu durumda tanjant demet

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2(\partial\, x_1 + \partial\, y_2 + y^1 \partial\, z) \\ Z_2 &= 2(\partial\, x_2 + \partial\, y_1 + y^2 \partial\, z) \\ Z_3 &= 2(\partial\, x_3 + \partial\, y_4 + y^3 \partial\, z) \\ Z_4 &= 2(\partial\, x_4 + \partial\, y_3 + y^4 \partial\, z) \\ Z_5 &= V = 2\partial\, z. \end{aligned}$$

ile gerilir. Bu durumda M, 2-lig̃htlike altmanifolddur öyleki $RadTM = span\{Z_1, Z_2\}$ dir. Ekran transversal demet $S(TM^{\perp})$

$$W_1 = 2(\partial\, x_3 - \partial\, y_4 + y^3 \partial\, z),\, W_2 = 2(-\partial\, x_4 + \partial\, y_3 - y^4 \partial\, z)$$

ile gerilir. Buradan kolayca görülürki $\phi Z_3 = -W_2, \phi Z_4 = W_1$ dir. Ayrıca lightlike transversal $ltr(TM)$

$$N_1 = (-\partial\, x_1 + \partial\, y_2 - y^1 \partial\, z),\, N_2 = (\partial\, x_2 - \partial\, y_1 + y^2 \partial\, z)$$

ile gerilir. Buradan $\phi Z_1 = \frac{1}{2} N_2$, $\phi Z_2 = -\frac{1}{2} N_1$ demektir. Böylece, (3.3.1) ve (3.3.2) şartları sağlanır. Buradan M transversal 2-lightlike altmanifolddur.

Örnek 4. M, $\mathbf{R}_4^{11}$ uzayının

$$x^1 = y^3, x^3 = y^1, x^4 = y^4, x^5 = y^5, x^2 = y^2 = 0$$

denklemi ile verilen altmanifoldu olsun. Bu durumda M de bir nokta

$$P = (x_1, 0, x_3, x_4, x_5, x_3, 0, x_1, x_4, x_5 z)$$

dir. Bu durumda tanjant demet

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 2(\partial\, x_1 + \partial\, y_3 + y^1 \partial\, z), \\
Z_2 &= 2(\partial\, x_3 + \partial\, y_1 + y^3 \partial\, z) \\
Z_3 &= 2(\partial\, x_4 + \partial\, y_4 + y^4 \partial\, z) \\
Z_4 &= 2(\partial\, x_5 + \partial\, y_5 + y^5 \partial\, z) \\
Z_5 &= V = 2\partial\, z.
\end{aligned}$$

ile gerilir. Bu durumda M, 2-lightlike altmanifolddur öyleki $RadTM = span\{Z_1, Z_2\}$ dir. Lightlike transversal demet $ltr(TM)$

$$N_1 = (-\partial\, x_1 + \partial\, y_3 - y^1 \partial\, z),\; N_2 = (\partial\, x_3 - \partial\, y_1 + y^3 \partial\, z)$$

ile gerilir. Kolayca görülürki $\phi Z_1 = \frac{1}{2} N_2$, $\phi Z_2 = -\frac{1}{2} N_1$ dir. Ayrıca, $\phi S(TM)$

$$W_1 = 2(\partial\, x_4 - \partial\, y_4 + y^4 \partial\, z),\; W_2 = 2(\partial\, x_5 - \partial\, y_5 + y^5 \partial\, z)$$

ile gerilir. Buradan da $\phi Z_3 = W_1$, $\phi Z_4 = W_2$ dir. Sonuç olarak, M transversal lightlike altmanifolddur. μ invaryant demeti

$$H_1 = 2(\partial\, x_2 + \partial\, y_2 + y^2 \partial\, z),\; H_2 = 2(\partial\, x_2 - \partial\, y_2 + y^2 \partial\, z)$$

ile gerilir.

$\bar{M}$ bir belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $RadTM$ ve $S(TM)$ üzerinde projeksiyon dönüşümler sırasıyla Q ve T olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = TX + QX + \eta(X)V \tag{3.3.6}$$

burada $TX + \eta(X)V \in \Gamma(S(TM))$, $QX \in \Gamma(RadTM)$ dir. (3.3.6) ifadesine ϕ uygulanırsa

$$\phi X = \phi TX + \phi QX \tag{3.3.7}$$

Burada $\phi TX = WX$ ve $\phi QX = LX$ yazılarak (3.3.7) denklemi

$$\phi X = WX + LX \tag{3.3.8}$$

olur. Burada $WX \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ ve $LX \in \Gamma(ltrTM)$ dir. Ayrıca $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$\phi W = BW + CW \tag{3.3.9}$$

elde edilir. Burada $BW \in \Gamma(S(TM))$ ve $CW \in \Gamma(\mu)$ dir.

M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (2.5.13) den

$$\bar{\nabla}_X \phi Y - \phi \bar{\nabla}_X Y \;=\; g(X,Y)V - \eta(Y)X$$

olur. (3.3.8) ve (2.4.21) den

$$\begin{aligned} g(X,Y)V - \eta(Y)X &= \bar{\nabla}_X WY + \bar{\nabla}_X LY - \phi \nabla_X Y \\ &\quad - \phi h^l(X,Y) - \phi h^s(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. (2.4.24) ve (2.4.25) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g(X,Y)V - \eta(Y)X &= -A_W Y X + \nabla^s_X WY + D^l(X,WY) - A_L Y X \\ &\quad + \nabla^l_X LY + D^s(X,LY) - W\nabla_X Y - L\nabla_X Y \\ &\quad - \phi h^l(X,Y) - Bh^s(X,Y) - Ch^s(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan tanjant ve transversal bileşenleri ayrı ayrı yazılırsa

$$-A_{WY}X - A_{LY}X - \phi h^l(X,Y) - Bh^s(X,Y) - g(X,Y)V + \eta(Y)X = 0 \quad (3.3.10)$$

$$\nabla^s_X WY + D^s(X,LY) - W\nabla_X Y - Ch^s(X,Y) = 0 \quad (3.3.11)$$

$$D^l(X,WY) + \nabla^l_X LY - L\nabla_X Y = 0 \quad (3.3.12)$$

denklemleri elde edilir.

Şimdi, transversal lightlike altmanifoldlar üzerinde distribüsyonların integrallenebilirliğini inceleyelim.

Teorem 3.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $RadTM$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(RadTM)$ için

$$D^s(X,LY) = D^s(Y,LX)$$

dir.

İspat. (3.3.11) denkleminde X ve Y vektör alanlarının rolleri değiştirilirse,

$$\nabla^s_Y WX + D^s(Y,LX) - W\nabla_Y X - Ch^s(Y,X) = 0. \quad (3.3.13)$$

olur. Böylece (3.3.11) ve (3.3.13)denklemlerinden

$$D^s(Y, LX) - D^s(X, LY) + W(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + Ch^s(X, Y) - Ch^s(Y, X) = 0.$$

elde edilir. h^s simetrik oldu̇gundan,

$$W[X, Y] = D^s(X, LY) - D^s(Y, LX). \tag{3.3.14}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.3.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$D^l(X, WY) = D^l(Y, WX)$$

dır.

İspat. (3.3.12) denkleminde X ve Y vektör alanlarının rolleri değiştirilirse,

$$D^l(X, WY) + \nabla^l_X LY - L\nabla_X Y = 0. \tag{3.3.15}$$

olur. Buradan (3.3.12) ve (3.3.15) denklemlerinden

$$D^l(Y, WX) - D^l(X, WY) + L[X, Y] = 0 \tag{3.3.16}$$

elde edilir. Böylece (3.3.16) denkleminden ispat görülür.

(3.3.14) ve (3.3.16) denklemlerinden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 3.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, ekran distribüsyon M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $D^l(Y, WX) = 0$ dır.

Sonuç 3.3.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, radikal distribüsyon M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(RadTM)$ için $D^s(X, LY) = Ch^s(X, Y)$ dır.

Sonuç 3.3.1 ve Sonuç 3.3.2'den, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3. $\bar{M}$ bir belirsiz sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldunun bir lightlike çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $D^l(Y, WX) = 0$ ve $D^s(X, LY) \in \Gamma(\mu)$ dır.

Şimdi, ∇ konneksiyonunun bir metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartları verelim.

Teorem 3.3.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, ∇ indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(RadTM)$ için

$$BD^s(X, \phi Y) = \eta(\nabla_X Y)V$$

dır.

İspat. (2.5.13) denkleminden

$$\bar{\nabla}_X \phi Y - \phi \bar{\nabla}_X Y = 0.$$

dır. Buradan (2.4.21), (2.4.24) kullanılır ve ϕ uygulanırsa

$$-\phi A_{\phi Y} X + \phi \nabla^l_X \phi Y + \phi D^s(X, \phi Y) = \phi^2 \nabla_X Y + \phi^2 h^l(X, Y) + \phi^2 h^s(X, Y)$$

olur. (2.5.1), (3.3.8) ve (3.3.9) den

$$\begin{aligned} -\nabla_X Y &= -W A_{\phi Y} X - L A_{\phi Y} X + \phi \nabla^l_X \phi Y + B D^s(X, \phi Y) \\ &\quad + C D^s(X, \phi Y) - \eta(\nabla_X Y) V + h^l(X, Y) + h^s(X, Y). \end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki denklemin tanjant bilşenleri alınırsa

$$-\nabla_X Y = \phi \nabla^l_X \phi Y + B D^s(X, \phi Y) - \eta(\nabla_X Y) V \qquad (3.3.17)$$

olur. (3.3.17) den $\nabla_X Y \in \Gamma(RadTM)$ olması için gerek ve yeter şart

$$B D^s(X, \phi Y) = \eta(\nabla_X Y) V$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

M tamamen kontakt umbilik ise aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Teorem 3.3.4. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, ∇ indirgenmiş* konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$D^s(X, \phi\xi) = 0$$

dır.

İspat. (2.5.13) denkleminden

$$\bar{\nabla}_X \phi\xi - \phi\bar{\nabla}_X \xi = 0.$$

dir. Buradan (2.4.21) ve (2.4.24) den

$$-A_{\phi\xi}X + \nabla^l_X \phi\xi + D^s(X, \phi\xi) = \phi\nabla_X \xi + \phi h^l(X, \xi) + \phi h^s(X, \xi)$$

olur. (3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -A_{\phi\xi}X + \nabla^l_X \phi\xi + D^s(X, \phi\xi) &= \phi\nabla_X \xi + \eta(X)\phi h^l(\xi, V) \\ &\quad + \eta(X)\phi h^s(\xi, V) \end{aligned}$$

dir. (3.3.8) ve (3.3.9) kullanılırsa

$$\begin{aligned} -A_{\phi\xi}X + \nabla^l_X \phi\xi + D^s(X, \phi\xi) &= W\nabla_X \xi + L\nabla_X \xi + \eta(X)\phi h^l(\xi, V) \\ &\quad + \eta(X)Bh^s(\xi, V) + \eta(X)Ch^s(\xi, V) \end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki denklemin ekran transversal bileşenleri alınırsa

$$D^s(X, \phi\xi) = W\nabla_X \xi \tag{3.3.18}$$

dir. Böylece (3.3.18) den ispat tamamlanır.

Sonuç 3.3.4. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, radikal distribüsyonun paralel olması için gerek ve yeter şart $\forall \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(RadTM)$ için

$$D^s(\xi_1, \phi\xi_2) = 0$$

dır.

İspat. (2.5.13) den

$$(\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi)\xi_2 = \bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2 - \phi\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 = 0$$

dir. (2.4.21) ve (2.4.24) denklemlerinden

$$-A_{\phi\xi_2}\xi_1 + \nabla^l_{\xi_1}\phi\xi_2 + D^s(\xi_1, \phi\xi_2) = \phi\nabla_{\xi_1}\xi_2 + \phi h^l(\xi_1, \xi_2) + \phi h^s(\xi_1, \xi_2)$$

olur. Burada (3.2.1), (3.2.2) ve (3.3.8) kullanılırsa

$$-A_{\phi\xi_2}\xi_1 + \nabla^l_{\xi_1}\phi\xi_2 + D^s(\xi_1, \phi\xi_2) = W\nabla_{\xi_1}\xi_2 + L\nabla_{\xi_1}\xi_2$$

elde edilir. Üstteki denklemin ekran transversal bileşenleri alınırsa

$$D^s(\xi_1, \phi\xi_2) = W\nabla_{\xi_1}\xi_2,$$

buradan ispat tamamlanır.

Şimdi, tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifoldlar için karekterizasyon vereceğiz. Bunun için bazı lemmalar verelim.

Lemma 3.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $\alpha_L = 0$ olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(S(TM)-\{V\}), \xi \in \Gamma(RadTM)$ için $D^s(X, \phi\xi)$ vektör alanının $\phi S(TM)$ de bileşeni yoktur.

İspat. M tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifold olsun. (2.5.13) denkleminden

$$g(X,X)V = \bar{\nabla}_X \phi X - \phi \bar{\nabla}_X X$$

olur. (2.4.21) ve (2.4.25) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(X,X)V &= -A_{\phi X}X + \nabla^s_X \phi X + D^l(X,\phi X) \\ &\quad -\phi\nabla_X X - \phi h^l(X,X) - \phi h^s(X,X) \end{aligned}$$

olur. (3.3.8) ve 3.3.9) den

$$\begin{aligned} g(X,X)V &= -A_{\phi X}X + \nabla^s_X \phi X + D^l(X,\phi X) - W\nabla_X X - L\nabla_X X \\ &\quad -\phi h^l(X,X) - Bh^s(X,X) - Ch^s(X,X) \end{aligned}$$

dir. Üstteki denklemin tanjant bileşenleri alınırsa

$$g(X,X)V = -A_{\phi X}X - \phi h^l(X,X) - Bh^s(X,X). \qquad (3.3.19)$$

elde edilir. (3.3.19), $\phi\xi$ ile çarpılırsa

$$g(A_{\phi X}X, \phi\xi) + g(\phi h^l(X,X), \phi\xi) = 0.$$

olur. Böylece (2.5.7) denkleminden

$$g(A_{\phi X}X, \phi\xi) + g(h^l(X,X), \xi) = 0 \qquad (3.3.20)$$

dir. (3.2.20) de (3.2.1) ve (2.4.30) kullanılırsa

$$g(D^s(X,\phi\xi), \phi X) + g(X,X)g(\alpha_L, \xi) = 0 \qquad (3.3.21)$$

elde edilir. $(S(TM))$ non-degenere olduğundan, $\alpha_L = 0$ olması için gerek ve yeter şart $D^s(X, \phi\xi)$ vektör alanının $\phi(S(TM))$ de bileşeni olmamasıdır.

Teorem 3.3.5. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifoldu öyleki $\phi S(TM) = S(TM^{\perp})$ olsun. Bu durumda $\alpha_S = 0$ veya boy$(S(TM)) = 1$.*

İspat. $Z \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için (3.3.19)den

$$g(A_{\phi X}X, Z) = g(h^s(X, X), \phi Z) \tag{3.3.22}$$

dir. Diğer taraftan (2.4.28)denkleminden

$$g(A_{\phi X}X, Z) = g(h^s(X, Z), \phi X) \tag{3.3.23}$$

olur. Böylece (3.3.22) ve (3.3.23) den

$$g(h^s(X, X), \phi Z) = g(h^s(X, Z), \phi X) \tag{3.3.24}$$

elde edilir. Buradan (3.3.24) ve (3.2.2) denklemlerinden

$$g(X, X)g(\alpha_S, \phi Z) = g(X, Z)g(\alpha_S, \phi X) \tag{3.3.25}$$

olur. (3.3.25) denkleminde X ve Z vektör alanlarının rolleri değiştirilirse

$$g(Z, Z)g(\alpha_S, \phi X) = g(Z, X)g(\alpha_S, \phi Z) \tag{3.3.26}$$

dir. (3.3.25) ve (3.3.26) denklemlerinden

$$\bar{g}(\alpha_S, \phi X) = \frac{g(X, Z)^2}{g(X, X)g(Z, Z)}\,\bar{g}(\alpha_S, \phi\, X). \tag{3.3.27}$$

elde edilir. Böylece ya $S(TM)$ bir boyutludur yada $\alpha_S = 0$ dır.

Sonuç 3.3.5. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik transversal lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $X \in \Gamma(S(TM))$ için $D^s(X, \phi X) \in \Gamma(\phi(S(TM))$ ise, bu durumda $boy(S(TM)) = 1$ veya $\alpha_S = 0$ dır.

4.SASAKİYAN MANİFOLDLARIN EKRAN TRANSVERSAL LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde, ekran transversal lightlike altmanifold tanımı için cebirsel altyapı sunulmakta ve tanımlar verilmektedir. İkinci altbölümde, ekran transversal anti-invaryantlar üzerine örnekler verilmekte ve varlığı araştırılmaktadır. Üçüncü altbölümde, radikal ekran transversal lightlike altmanifoldlar için örnekler verilmekte ve distribüsyonların integrallenebilirliği incelenmektedir. Ayrıca bu altbölümde indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartlar verilmektedir. Son altbölümde ise izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldlar üzerine bir teorem verilmektedir.

4.1.Ekran Transversal Lightlike Altmanifoldlar

Bu altbölümde öncelikle Tanım 4.1.1. de kullanacağımız aşağıdaki sonucu ispatlayacağız.

Lemma 4.1.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun r-lightlike altmanifoldu ve $\phi RadTM$, $S(TM^{\perp})$ distribüsyonunun bir altvektör demeti olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\phi ltrTM$, ekran transversal demetin altvektör demeti ve

$$\phi RadTM \cap \phi ltrTM = \{0\}$$

dır.

İspat. $ltrTM$, ϕ ye göre invaryant olduğunu kabul edelim, bu durumda $\phi ltrTM = ltrTM$ dir. Lightlike altmanifoldun tanımından, $\xi \in \Gamma(RadTM)$

ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ vektör alanları için $g(\xi, N) = 1$ dir. (2.5.7) denkleminden

$$g(\xi, N) = g(\phi\xi, \phi N) = 1$$

elde edilir. Hipotezden $\phi N \in \Gamma(ltrTM)$ ise bu durumda $g(\phi\xi, \phi N) = 0$ olur. Böylece bir çelişki elde edildi. Şu halde ϕN, $ltrTM$ nin elemanı değildir. Şimdi, $\phi N \in \Gamma(S(TM))$ olduğunu kabul edelim. (2.5.7) den

$$1 = g(\xi, N) = g(\phi\xi, \phi N) = 0$$

elde edilir. Buradan ϕN, $S(TM)$ nin elemanı değildir. Şimdi de $\phi N \in \Gamma(RadTM)$ olduğunu kabul edelim. (2.5.7) den

$$1 = g(\xi, N) = g(\phi\xi, \phi N) = 0$$

elde edilir. Buradan ϕN, $RadTM$ nin elemanı değildir. Böylece $\phi N \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ dır.

Şimdi, bir $X \in \Gamma(\phi RadTM \cap \phi ltrTM)$ vektör alanının olduğunu kabul edelim. Bu durumda (2.5.7) den

$$0 \neq g(\phi X, N) = -g(X, \phi N) = 0$$

olacak şekilde bir çelişki olur. Buradan

$$\phi RadTM \cap \phi ltrTM = \{0\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 4.1.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun r-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $S(TM^{\perp})$ ekran transversal vektör demeti var ve

$$\phi RadTM \subset S(TM^{\perp})$$

ise bu durumda M ye $\bar{M}$ nin ekran transversal lightlike altmanifoldu denir.

Tanım 4.1.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda:

1) Eğer $S(TM)$, ϕ ye göre invaryant ise bu durumda M ye radikal ekran transversal lightlike altmanifold denir.

2) Eğer $S(TM)$ ϕ ye göre ekran transversal ise yani $\phi S(TM) \subset S(TM^{\perp})$ ise bu durumda M'ye $\bar{M}$'nin ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu denir.

Tanım 4.1.2'de M ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olduğunda

$$S(TM^{\perp}) = \phi RadTM \oplus \phi ltrTM \perp \phi S(TM) \perp D_o$$

şeklinde ayrıştırılır, burada D_o, $S(TM^{\perp})$ de

$$\phi RadTM \oplus \phi ltrTM \perp \phi S(TM)$$

ortogonal tamamlayan olan non-dejenere bir distribüsyondur.

Önerme 4.1.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, D_o distribüsyonu ϕ'ye göre invaryanttır.

İspat. $X \in \Gamma(D_o)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $N \in \Gamma(ltrTM)$ ve $T \in \Gamma(S(TM))$ için

(2.5.7) den

$$\begin{aligned} g(\phi X, \xi) &= -g(X, \phi\xi) = 0 \\ g(\phi X, N) &= -g(X, \phi N) = 0, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

buradan $\phi D_o \cap RadTM = \{0\}$ ve $\phi D_o \cap ltrTM = \{0\}$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi\xi) &= g(X, \xi) = 0 \\ g(\phi X, \phi N) &= g(X, N) = 0 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

buradan da $\phi D_o \cap \phi RadTM = \{0\}$ ve $\phi D_o \cap \phi ltrTM = \{0\}$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(\phi X, T) = -g(X, \phi T) = 0 \\ g(\phi X, \phi T) = g(X, T) = 0 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

$\phi D_o \cap S(TM) = \{0\}$ ve $\phi D_o \cap \phi S(TM) = \{0\}$ olduğunu söyler. Böylece (4.1.1), (4.1.2) ve (4.1.3) denklemlerinden D_o, ϕ'ye göre invaryanttır.

Tanım 4.1.2 ve Lemma 4.1.1'den M belirsiz Sasakiyan manifoldun bir izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldu olduğunda

$$TM = RadTM$$

ve

$$T\bar{M} = \{TM \oplus ltrTM\} \perp \{\phi RadTM \oplus \phi ltrTM \perp D_o\}$$

şeklinde ayrıştırılır.

Önerme 4.1.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda koizotropik yada tamamen lightlike ekran transversal lightlike altmanifold yoktur.

İspat. Koizotropik veya tamamen lightlike altmanifoldlarda $S(TM^{\perp}) = \{0\}$ olduğundan Tanım 4.1.1'den açıktır.

Aşağıdaki önerme ekran transversal lightlike altmanifoldlarının çok sayıda örneğinin var olduğunu göstermektedir.

Önerme 4.1.3. $\bar{M}$ bir belirsiz Sasakiyan manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ manifoldunun bir lightlike reel eğrisi izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldudur.

İspat. M bir lightlike reel eğri olduğundan

$$TM = RadTM = span\{\xi\}$$

dir. Buradan (2.5.7) den $g(\phi\xi, \xi) = 0$ olur. Bu ise $\phi\xi$'nin $ltrTM$'ye ait olmadığını gösterir. $boyTM = 1$ olduğundan $\phi\xi$ ve ξ lineer bağımsızdır ve $\phi\xi$, TM'ye ait değildir. Böylece $\phi\xi \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ dir.

Benzer yolla (2.5.7) denkleminden $g(\phi N, N) = 0$ olur. Buradan ϕN $RadTM$ ye ait değildir. Ayrıca

$$g(\phi N, \xi) = -g(N, \phi\xi) = 0,$$

olur. Böylece ϕN, $ltrTM$'nin elemanı değildir. Buradan $\phi N \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ sonucuna varırız. (2.5.7)den

$$g(\phi\xi, \phi N) = g(\xi, N) = 1$$

elde edilir. $S(TM^{\perp})$ non-dejenere olduğundan

$$S(TM^{\perp}) = \phi RadTM \oplus \phi ltrTM \perp D_o$$

ayrışımı elde edilir burada D_o non-dejenere distribüsyondur. Böylece ispat tamamlanır.

4.2.Ekran Transversal Anti-İnvaryant Lightlike Altmanifoldlar

Bu bölümde belirsiz Sasakiyan manifoldların ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldlarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.2.1. $\bar{M}(c)$, $c \neq 1$, belirsiz Sasakiyan uzay form ve M de $\bar{M}$ manifoldunun lightlike altmanifoldu olsun. $\phi RadTM \subset S(TM^{\perp})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda M'nin ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifold olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi, \phi N) = 0$$

dır.

İspat. $\phi RadTM \subset S(TM^{\perp})$ olduğundan Lemma 4.1.1'den $\phi ltrTM \subset S(TM^{\perp})$ dir. (2.5.7) den

$$\begin{aligned} g(\phi X, \xi) &= -g(X, \phi\xi) = 0 \\ g(\phi X, N) &= -g(X, \phi N) = 0 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

buradan $\phi S(TM)\cap RadTM=\{0\}$ ve $\phi S(TM)\cap ltrTM=\{0\}$ elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} g(\phi X,\phi\xi) &= g(X,\xi)=0 \\ g(\phi X,\phi N) &= g(X,N)=0 \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

olur. Buradan da $\phi S(TM)\cap\phi RadTM=\{0\}$ ve $\phi S(TM)\cap\phi ltrTM=\{0\}$ olur. Diğer taraftan (2.5.15) den

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi,\phi N) &= \frac{c+3}{4}\{g(Y,\xi)g(X,\phi N)-g(X,\xi)g(Y,\phi N)\} \\ &+\frac{c-1}{4}\{\eta(X)\eta(\xi)g(Y,\phi N)-\eta(Y)\eta(\xi)g(X,\phi N) \\ &+g(X,\xi)\eta(Y)g(V,\phi N)-g(Y,\xi)\eta(X)g(V,\phi N) \\ &+g(\phi Y,\xi)g(\phi X,\phi N)+g(\phi\xi,X)g(\phi Y,\phi N) \\ &-2g(\phi X,Y)g(\phi\xi,\phi N)\} \end{aligned}$$

dir. Bu ifade düzenlenirse

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi,\phi N)=\frac{1-c}{2}\bar{g}(\phi X,Y)g(\phi\xi,\phi N) \tag{4.2.3}$$

elde edilir. (2.5.7)den, $\bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi,\phi N)=0$ olması için gerek ve yeter şart $g(\phi X,Y)=0$ dır. Yani $\phi S(TM)\perp S(TM)$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \phi S(TM)\cap S(TM)=\{0\} \\ \phi S(TM)\cap ltrTM=\{0\} \\ \phi S(TM)\cap RadTM=\{0\} \end{aligned}$$

olduğundan, $\bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi,\phi N)=0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\phi S(TM)\subset S(TM^{\perp})$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 5. $\mathbf{R}_2^9$ semi-öklidyen uzayının

$$\begin{aligned} x^1 &= \cos u_1, & y^1 &= -\sin u_1 \\ x^2 &= u_1, & y^2 &= 0 \\ x^3 &= \sin u_2, & y^3 &= -\cos u_2 \\ x^4 &= 0, & y^4 &= u_2 \end{aligned}$$

denklemleri ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Böylece M'deki bir nokta

$$P = (\cos u_1, u_1, \sin u_2, 0, -\sin u_1, 0, -\cos u_2, u_2, z)$$

dir. Bu durumda tanjant demet

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2(-\sin u_1 \partial\, x_1 + \partial\, x_2 - \cos u_1 \partial\, y_1 + (-\sin u_1 y^1 + y^2)\partial, z) \\ Z_2 &= 2(\cos u_2 \partial\, x_3 + \sin u_2 \partial\, y_3 + \partial\, y_4 + \cos u_2 y^3 \partial\, z) \\ Z_3 &= V = 2\partial\, z. \end{aligned}$$

ile gerilir. Böylece M, 1-lightlike altmanifolddur öyleki $RadTM = span\{Z_1\}$ dir. Lightlike transversal demet $ltrTM$

$$N = 2(\sin u_1 \partial\, x_1 - \cos u_1 \partial\, y_1 + \sin u_1 y^1 \partial, z)$$

ile gerilir. Ayrıca ekran transversal demet $S(TM^{\perp})$

$$\begin{aligned} W_1 &= 2(-\cos u_1 \partial\, x_1 + \sin u_1 \partial\, y_1 - \partial\, y_2 - \cos u_1 y^1 \partial, z) \\ W_2 &= 2(\cos u_1 \partial\, x_1 + \sin u_1 \partial\, y_1 + \cos u_1 y^1 \partial\, z) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
W_3 &= 2(\sin u_2 \partial\, x_3 + \partial\, x_4 - \cos u_2 \partial\, y_3 + (\sin u_2 y^3 + y^4)\partial, z) \\
W_4 &= 2(\cos u_2 \partial\, x_3 + \sin u_2 \partial\, y_3 - \partial, y_4 + \cos u_2 y^3 \partial\, z) \\
W_5 &= 2(\sin u_2 \partial\, x_3 - \partial, x_4 - \cos u_2 \partial\, y_3 + (\sin u_2 y^3 - y^4)\partial\, z)
\end{aligned}
$$

ile gerilir. Buradan kolayca görülürki $\phi Z_1 = W_1, \phi N = W_2, \phi Z_2 = W_3$ ve $\phi W_4 = W_5$ dir. Böylece, M ekran transversal anti-invaryant 1-lightlike altmanifolddur.

$\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifold ve M de $\bar{M}$ manifoldunun ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. $\phi RadTM$, $\phi S(TM)$, $\phi ltrTM$ ve D_o üzerindeki projeksion dönüşümler sırasıyla T_1, T_2, T_3 ve T_4 olmak üzere $V \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$V = T_1 V + T_2 V + T_3 V + T_4 V \tag{4.2.4}$$

olacak şekilde yazılır. Diğer taraftan, $V \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$\phi V = BV + CV \tag{4.2.5}$$

yazılabilir. Burada BV ve CV, ϕV'nin sırasıyla tanjant ve transversal kısımlarıdır. (4.2.4) denklemine ϕ uygulanırsa

$$\phi V = \phi T_1 V + \phi T_2 V + \phi T_3 V + \phi T_4 V \tag{4.2.6}$$

olur. (4.2.5) ve (4.2.6) denkleminden

$$BV = \phi T_1 V + \phi T_2 V, CV = \phi T_3 V + \phi T_4 V$$

alınır ve $\phi T_1 = B_1$, $\phi T_2 = B_2$, $\phi T_3 = C_1$ ve $\phi T_4 = C_2$ denilirse bu durumda (4.2.6) denklemi

$$\phi V = B_1 V + B_2 V + C_1 V + C_2 V \tag{4.2.7}$$

olur. Burada $B_1 V \in \Gamma(RadTM)$, $B_2 V \in \Gamma(S(TM))$, $C_1 V \in \Gamma(ltrTM)$ ve $C_2 V \in \Gamma(D_o)$ dır.

Teorem 4.2.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için $B_2 \nabla^s_X \phi\xi = \eta(\nabla_X \xi) V$ dır.

İspat. (2.5.13) den

$$\bar{\nabla}_X \phi\xi - \phi \bar{\nabla}_X \xi = 0$$

olur. Bu denkleme ϕ uygulanır ve (2.5.1) kullanılırsa

$$\phi \bar{\nabla}_X \phi\xi = -\bar{\nabla}_X \xi + \eta(\bar{\nabla}_X \xi) V$$

dir. (2.4.21), (2.4.25) ve (4.2.7) denklemlerinden

$$\begin{aligned} -\nabla_X \xi - h^l(X,\xi) - h^s(X,\xi) + \eta(\nabla_X \xi) V \quad = \quad & -\phi A_{\phi\xi} X + B_1 \nabla^s_X \phi\xi \\ & + B_2 \nabla^s_X \phi\xi + C_1 \nabla^s_X \phi\xi \\ & + C_2 \nabla^s_X \phi\xi + \phi D^l(X, \phi\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Üstteki denklemin tanjant kısımları alınırsa,

$$\nabla_X \xi = -B_1 \nabla^s_X \phi\xi - B_2 \nabla^s_X \phi\xi + \eta(\nabla_X \xi) V \tag{4.2.8}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(RadTM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$g(\nabla^s_X \phi Y - \nabla^s_Y \phi X, \phi Z) = 0$$

dir.

İspat. Radikal distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(RadTM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için $g([X,Y],Z) = 0$ dır. (2.4.21) den

$$g([X,Y],Z) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) - g(\bar{\nabla}_Y X, Z)$$

dir. (2.5.7) den

$$g([X,Y],Z) = g(\phi\bar{\nabla}_X Y, \phi Z) + \eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(Z) - g(\phi\bar{\nabla}_Y X, \phi Z) - \eta(\bar{\nabla}_Y X)\eta(Z)$$

olur. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan $\eta(\bar{\nabla}_X Y) = 0$ dır. Bu ifade yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$g([X,Y],Z) = g(\phi\bar{\nabla}_X Y, \phi Z) - g(\phi\bar{\nabla}_Y X, \phi Z)$$

olur. (2.5.13) denkleminden

$$g([X,Y],Z) = g(\bar{\nabla}_X \phi Y, \phi Z) - g(\bar{\nabla}_Y \phi X, \phi Z)$$

bulunur. Buradanda (2.4.25) den

$$g([X,Y],Z) = g(\nabla^s_X \phi Y - \nabla^s_Y \phi X, \phi Z)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.4. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun ekran transversal anti-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ekran distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için

$$g(\nabla^s_X \phi Y - \nabla^s_Y \phi X, \phi N) = 0$$

dir.

İspat. Ekran distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $g([X, Y], N) = 0$ dır. (2.4.21) den

$$g([X, Y], N) = g(\bar{\nabla}_X Y, N) - g(\bar{\nabla}_Y X, N)$$

dir. (2.5.7) den

$$g([X, Y], N) = g(\phi\bar{\nabla}_X Y, \phi N) - g(\phi\bar{\nabla}_Y X, \phi N)$$

olur. Böylece (2.5.13) ve (2.4.25) denklemlerinden

$$g([X, Y], N) = g(\nabla^s_X \phi Y - \nabla^s_Y \phi X, \phi N)$$

elde edilir.

4.3.Radikal Ekran Transversal Lightlike Altmanifoldlar

Bu bölümde, radikal ekran transversal lightlike altmanifoldlarının, lightlike çarpım radikal ekran tranversal lightlike altmanifoldu olması için gerek ve yeter şartlar elde edilmektedir. Ayrıca indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olma şartları verilmektedir. Öncelikle hatırlatalım ki eğer $\xi \in$

$\Gamma(RadTM)$ ve $X \in \Gamma(TM)$ için $\bar{\nabla}_X \xi \in \Gamma(TM)$ ise M ye irrasyoneldir denir[27].

Örnek 6. $\mathbf{R}^9_2$, semi-öklidyen uzayın

$$x^1 = 0, x^2 = u_1, x^3 = u_2, x^4 = u_3, y^1 = u_1, y^2 = 0, y^3 = -u_3, y^4 = u_2$$

denklemleri ile verilen M altmanifoldunu gözönüne alalım. Böylece M'deki bir nokta

$$P = (0, u_1, u_2, u_3, u_1, 0, -u_3, u_2, z)$$

dir. Bu durumda tanjant demet

$$\begin{aligned} Z_1 &= 2(\partial\, x_2 + \partial\, y_1 + y^2 \partial\, z) \\ Z_2 &= 2(\partial\, x_3 + \partial\, y_4 + y^3 \partial\, z) \\ Z_3 &= 2(\partial\, x_4 - \partial\, y_3 + y^4 \partial\, z) \\ Z_4 &= V = 2\partial\, z. \end{aligned}$$

ile gerilir. Böylece M 1-lightlike altmanifolddur öyleki $RadTM = span\{Z_1\}$ dir. Ayrıca $\phi Z_2 = Z_3$ olduğundan $S(TM)$, ϕ'ye göre invaryanttır. Lightlike transversal demet $ltrTM$

$$N = 2(-\partial\, x_2 - 2\partial\, y_1 - y^2 \partial\, z)$$

ile gerilir. Ayrıca ekran transversal demet $S(TM^{\perp})$

$$\begin{aligned} W_1 &= 2(\partial\, x_1 - \partial\, y_2 + y^1 \partial\, z) \\ W_2 &= 2(-2\partial\, x_1 + \partial\, y_2 - 2y^1 \partial\, z) \\ W_3 &= 2(\partial\, x_2 - \partial\, x_4 + \partial\, y_1 - \partial\, y_3 + (y^2 - y^4)\partial\, z) \\ W_4 &= 2(\partial\, x_1 - \partial\, x_3 - \partial\, y_2 + \partial\, y_4 + (y^1 - y^3)\partial\, z) \end{aligned}$$

ile gerilir. Buradan kolayca görülürki $\phi Z_1 = W_1, \phi N = W_2$ ve $\phi W_3 = W_4$ dir. Böylece, M radikal ekran transversal 1-lightlike altmanifolddur.

Teorem 4.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, ekran distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için

$$g(h^s(X, \phi Y) - h^s(Y, \phi X), \phi N) = 0$$

dir.

İspat. $S(TM)$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$, $N \in \Gamma(ltrTM)$ için $g([X, Y], N) = 0$ dır. Böylece (2.5.7) ve (2.5.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}([X, Y], N) &= \bar{g}(\phi[X, Y], \phi N) \\
\bar{g}([X, Y], N) &= g(-(\bar{\nabla}_X \phi)Y + \bar{\nabla}_X \phi Y, \phi N) - g(-(\bar{\nabla}_Y \phi)X + \bar{\nabla}_Y \phi X, \phi N) \\
\bar{g}([X, Y], N) &= g(\bar{\nabla}_X \phi Y, \phi N) - g(\bar{\nabla}_Y \phi X, \phi N)
\end{aligned}$$

olur. Burada (2.4.21) kullanılırsa

$$\bar{g}([X, Y], N) = g(h^s(X, \phi Y) - h^s(Y, \phi X), \phi N)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, radikal distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ ve

$\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(RadTM)$ için

$$g(A_{\phi\xi_1}\xi_2 - A_{\phi\xi_2}\xi_1, \phi X) = 0$$

dir.

İspat. $RadTM$ distribüsyonunun integralleneblir olması için gerek ve yeter şart $g([\xi_1, \xi_2], X) = 0$ dır. (2.5.7) ve (2.5.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\xi_1, \xi_2], X) &= \bar{g}(\phi[\xi_1, \xi_2], \phi X) \\
\bar{g}([\xi_1, \xi_2], X) &= g(-(\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi)\xi_2 + \bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2, \phi X) - g(-(\bar{\nabla}_{\xi_2}\phi)\xi_1 + \bar{\nabla}_{\xi_2}\phi\xi_1, \phi X) \\
\bar{g}([\xi_1, \xi_2], X) &= g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2, \phi X) - g(\bar{\nabla}_{\xi_2}\phi\xi_1, \phi X)
\end{aligned}$$

olur. (2.4.25) kullanılırsa

$$\bar{g}([\xi_1, \xi_2], X) = g(A_{\phi\xi_1}\xi_2 - A_{\phi\xi_2}\xi_1, \phi X)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, D_o distribüsyonu invaryanttır.

İspat. $X \in \Gamma(D_o)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$,$N \in \Gamma(ltrTM)$ için (2.5.7) den

$$\begin{aligned}
g(\phi X, \xi) &= -g(X, \phi\xi) = 0 \\
g(\phi X, N) &= -g(X, \phi N) = 0 \qquad (4.3.1)
\end{aligned}$$

buradan $\phi D_o \cap RadTM = \{0\}$ ve $\phi D_o \cap ltrTM = \{0\}$ elde edilir. Benzer şekilde

$$g(\phi X, \phi\xi) = g(X, \xi) = 0$$

$$g(\phi X, \phi N) \;\;=\;\; g(X, N) = 0 \qquad (4.3.2)$$

buradan da $\phi D_o \cap \phi RadTM = \{0\}$ ve $\phi D_o \cap \phi ltrTM = \{0\}$ olur. Ayrıca $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\begin{aligned} g(\phi X, Z) &= -g(X, \phi Z) = 0 \\ g(\phi X, \phi Z) &= g(X, Z) = 0 \end{aligned} \qquad (4.3.3)$$

elde edilir. Bu ise $\phi D_o \cap S(TM) = \{0\}$ ve $\phi D_o \cap \phi S(TM) = \{0\}$ olduğunu söyler. Böylece (4.3.1), (4.3.2) ve (4.3.3) denklemlerinden D_o, ϕ'ye göre invaryanttır.

Teorem 4.3.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $S(TM)$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $h^s(X, \phi Y)$'nin $\phi RadTM$'de bileşeni olmamasıdır.

İspat. $S(TM)$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için $\bar{g}(\nabla_X Y, N) = 0$ dır. (2.4.21) den

$$\bar{g}(\nabla_X Y, N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N)$$

olur. (2.5.7) denkleminden

$$\bar{g}(\nabla_X Y, N) = \bar{g}(\phi \bar{\nabla}_X Y, \phi N)$$

dir. (2.5.13) den

$$\bar{g}(\nabla_X Y, N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \phi Y, \phi N)$$

elde edilir. Burada (2.4.21) kullanılırsa

$$\bar{g}(\nabla_X Y, N) = \bar{g}(h^s(X, \phi Y), \phi N)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $RadTM$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $\xi_1, \xi_2 \in \Gamma(RadTM)$ ve $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için $h^s(\xi, \phi X)$'in $\phi ltrTM$'de bileşeni olmamasıdır.

İspat. $RadTM$ distribüsyonunun tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\bar{g}(\nabla_{\xi_1}\xi_2, X) = 0$$

dır. (2.4.21) den

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, X) = g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 - h^l(\xi_1, \xi_2) - h^s(\xi_1, \xi_2), X)$$

olur. (2.5.7) denkleminden

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, X) = g(\phi\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2, \phi X)$$

dir. (2.5.13) den

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, X) = g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2, \phi X)$$

elde edilir. Böylece (2.4.25) denkleminden

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, X) = -g(A_{\phi\xi_2}\xi_1, \phi X)$$

olur. (2.4.28) kullanılırsa

$$g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, X) = -g(h^s(\xi_1, \phi X), \phi\xi_2)$$

elde edilir.

Sonuç 4.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun irrasyonel radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, M altmanifoldunun bir lightlike çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $h^s(X, \phi Y)$ nin $\phi ltrTM$ de bileşeninin olmamasıdır.

Teorem 4.3.5. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart, $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $h^s(X, Y)$'nin $\phi ltrTM$'de bileşeni olmamasıdır.

İspat. $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $X \in \Gamma(S(TM))$ için (2.5.13) den

$$\bar{\nabla}_X \phi\xi - \phi\bar{\nabla}_X\xi = 0$$

olur. Buradan, (2.4.21) ve (2.4.25) kullanılırsa

$$g(A_{\phi\xi}X, Y) = g(\nabla_X\xi, \phi Y)$$

olur. (2.4.28) den

$$g(h^s(X, Y), \phi\xi) = g(\nabla_X\xi, \phi Y)$$

elde edilir.

Bu altbölümün bundan sonraki kısımında tamamen umbilik radikal ekran transversal lightlike altmanifoldlarını çalışacağız.

Lemma 4.3.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$h^l(X, \xi) = 0, h^s(\xi, V) = -\phi\xi \qquad (4.3.4)$$

İspat. (3.2.1)den

$$h^l(X, \xi) = \eta(X)h^l(\xi, V) \qquad (4.3.5)$$

dir. Diğer taraftan (2.4.21) den

$$-\phi\xi = \nabla_\xi V + h^l(\xi, V) + h^s(\xi, V)$$

olur. Transversal kısımlar ayrı ayrı yazılırsa $-\phi\xi = h^s(\xi, V)$ ve $h^l(\xi, V) = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.2. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$h^s(X, \xi) = 0 \qquad (4.3.6)$$

İspat. (3.2.2) den

$$h^s(X, \xi) = \eta(X)h^s(\xi, V) \qquad (4.3.7)$$

dir. Buradan, (4.3.7) denkleminde (4.3.4) kullanılırsa ispat tamamlanır.

Lemma 4.3.3. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$g(\nabla_X \phi X, V) = g(X, X) \qquad (4.3.8)$$

dır.

İspat. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \phi X, V) + \bar{g}(\phi X, \bar{\nabla}_X V) = 0$$

dır. Burada (2.4.21), (2.5.12) ve (2.5.7) denklemleri kullanılırsa (4.3.8) elde edilir.

Lemma 4.3.4. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için*

$$g(\nabla_{\phi X} X, V) = -g(X, X) \tag{4.3.9}$$

dır.

İspat. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\phi X} X, V) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_{\phi X} V) = 0$$

dır. Buradan (2.4.21) ve (2.5.12)

$$g(\nabla_{\phi X} X, V) + g(X, -\phi^2 X) = 0$$

olur. Böylece, (2.5.1) den

$$g(\nabla_{\phi X} X, V) + g(X, X) = 0$$

elde edilir.

Lemma 4.3.5. *M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun tamamen kontakt umbilik radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için*

$$h^s(X, V) = 0 \tag{4.3.10}$$

dır.

İspat. (2.4.21) ve (2.5.12)den

$$-\phi X = \nabla_X V + h^l(X, V) + h^s(X, V)$$

olur ispat tamamlanır.

Aşağıdaki lemmanın ispatı 3.bölümdeki lemma 3.2.6 ve lemma 3.2.7 ye benzer olduğundan sadece ifadesi verilmektedir.

Lemma 4.3.6. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun tamamen kontakt umbilik radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, $X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$ için

$$g(X, \nabla_{\phi X}\xi) = -g(h^l(\phi X, X), \xi)$$

ve

$$g(\phi X, \nabla_X \xi) = -g(h^l(X, \phi X), \xi)$$

dır.

Teorem 4.3.6. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun tamamen kontakt umbilik radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, ∇ indirdenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$A_{\phi\xi}X = -\eta(X)\xi$$

dir.

İspat. (2.5.13) den

$$\bar{\nabla}_X \phi\xi - \phi\bar{\nabla}_X \xi = 0$$

olur. Böylece (2.4.21) ve (2.4.25)den

$$-A_{\phi\xi}X + \nabla^s_X \phi\xi + D^l(X, \phi\xi) = \phi\nabla_X \xi + \phi h^l(X, \xi) + \phi h^s(X, \xi)$$

elde edilir.(4.3.4), (4.3.6) ve (2.5.1) den

$$-A_{\phi\xi}X + \nabla^s_X \phi\xi + D^l(X, \phi\xi) = \phi\nabla_X \xi + \eta(X)\xi$$

olur. Buradan da tanjant kısım

$$\phi\nabla_X \xi = -A_{\phi\xi}X - \eta(X)\xi$$

elde edilir. Böylece $\nabla_X \xi \in \Gamma(RadTM)$ ise $A_{\phi\xi}X = -\eta(X)\xi$ dir.
Tersine $A_{\phi\xi} = -\eta(X)\xi$ olsun. Bu durumda $Y \in \Gamma(S(TM))$ içi̇n $g(A_{\phi\xi}X, Y) = 0$ dır. (2.4.28) den $g(h^s(X, Y), \phi\xi) = 0$ olur. (2.4.21) denkleminden de $g(\phi\bar{\nabla}_X Y, \xi) = 0$ bulunur. Diḡer taraftan (2.5.13) den $g(h^l(X, \phi Y), \xi) = 0$ elde edilir. Böylece $h^l(X, \phi Y) = 0$ (4.3.4) den de $h^l(X, \xi) = 0$ elde edilir. $RadTM$ üzerinde h^l sıfır olduḡundan önerme 2.4.2 den ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.7. $\bar{M}(c)$ bir belirsiz Sasakiyan uzay form öyleki $c \neq -3$ olsun. Bu durumda $\bar{M}(c)$ uzayının radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu yoktur.

İspat. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldunun radikal ekran transversal lightlike altmanifoldu öyleki $c \neq -3$ olsun. $\forall X \in \Gamma(S(TM) - \{V\})$, $\xi \in$

$\Gamma(RadTM)$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için (2.5.15) ve (2.4.51)den

$$\bar{R}(X, \phi X)\xi = \frac{1-c}{2} g(X, X)\phi\xi$$

dir. Buradan

$$g(\bar{R}(X, \phi X)\xi, \phi N) = \frac{1-c}{2} g(X, X) \tag{4.3.11}$$

olur. Ayrıca (2.4.51) ve (4.3.4) den

$$g(\bar{R}(X, \phi X)\xi, \phi N) = g((\nabla_X h^s)(\phi X, \xi), \phi N) - g((\nabla_{\phi X} h^s)(X, \xi), \phi N) \tag{4.3.12}$$

elde edilir, burada

$$(\nabla_X h^s)(\phi X, \xi) = \nabla^s_X h^s(\phi X, \xi) - h^s(\nabla_X \phi X, \xi) - h^s(\phi X, \nabla_X \xi) \tag{4.3.13}$$

ve

$$(\nabla_{\phi X} h^s)(X, \xi) = \nabla^s_{\phi X} h^s(X, \xi) - h^s(\nabla_{\phi X} X, \xi) - h^s(X, \nabla_{\phi X} \xi). \tag{4.3.14}$$

dır. (3.2.2) den

$$h^s(\phi X, \xi) = 0 \tag{4.3.15}$$

dir. (3.2.2), (4.3.4) ve (4.3.8) den

$$h^s(\nabla_X \phi X, \xi) = -g(X, X)\phi\xi \tag{4.3.16}$$

dir. Ayrıca (3.2.2) ve (4.3.10) denklemlerinden de

$$h^s(\phi X, \nabla_X \xi) = g(\phi X, \nabla_X \xi)\alpha_S \tag{4.3.17}$$

elde edilir. (4.3.13)de (4.3.15), (4.3.16) ve (4.3.17) kullanılırsa

$$(\nabla_X h^s)(\phi X, \xi) = g(X, X)\phi\xi - g(\phi X, \nabla_X \xi)\alpha_S \tag{4.3.18}$$

olur. Diğer taraftan (4.3.6) den

$$h^s(X,\xi)=0 \tag{4.3.19}$$

olur. (3.2.2), (4.3.4) ve (4.3.9) denklemlerinden

$$h^s(\nabla_{\phi X}X,\xi)=g(X,X)\phi\xi. \tag{4.3.20}$$

dir. Ayrıca (3.2.2) ve (4.3.10) dan

$$h^s(X,\nabla_{\phi X}\xi)=g(X,\nabla_{\phi X}\xi)\alpha_S \tag{4.3.21}$$

elde edilir. (4.3.14)de (4.3.19), (4.3.20) ve (4.3.21) kullanılırsa

$$(\nabla_{\phi X}h^s)(X,\xi)=-g(X,X)\phi\xi-g(X,\nabla_{\phi X}\xi)\alpha_S \tag{4.3.22}$$

elde edilir. Buradan (4.3.12) de (4.3.18) ve (4.3.22) kullanılırsa

$$g(\bar{R}(X,\phi X)\xi,\phi N)=2g(X,X)+\{g(X,\nabla_{\phi X}\xi)-g(\phi X,\nabla_X\xi)\}g(\alpha_S,\phi N) \tag{4.3.23}$$

olur. Böylece (4.3.23) de lemma 4.3.6 kullanılırsa

$$g(\bar{R}(X,\phi X)\xi,\phi N)=2g(X,X) \tag{4.3.24}$$

olur. (4.3.11) ve (4.3.24) denklemlerinden

$$(c+3)g(X,X)=0$$

elde edilir. $S(TM)$ non-dejenere null olmayan en az bir X vektö alanı seçilebilir. Buradan $c=-3$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

4.4.Izotropik Ekran Transversal Lightlike Altmanifoldlar

M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldu ise $TM = RadTM$ ve esas uzayın tanjant demeti

$$T\bar{M} = \{TM \oplus ltrTM\} \perp \{\phi RadTM \oplus \phi ltrTM \perp D_o\}$$

ayrışımına sahiptir.
Bu bölümde izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldun tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.
Teorem 4.4.1. M, $\bar{M}$ belirsiz Sasakiyan manifoldun izotropik ekran transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda, M tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \Gamma(RadTM)$, $N \in \Gamma(ltrTM)$ ve $Z \in \Gamma(D_o)$ için $D^l(\xi_1, Z) = 0$, $D^l(\xi_1, \phi\xi_2) = 0$ ve$D^s(\xi_1, N)$'nin $\phi ltrTM$'de bileşeni olmamasıdır.

İspat. (2.5.13) denkleminden

$$\bar{\nabla}_{\xi_1} \phi\xi_2 = \phi\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2 \tag{4.4.1}$$

olur. (4.4.1) denklemi ξ ile iç çarpıma tabii tutulursa

$$g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2, \xi) = -g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2, \phi\xi)$$

dir. Böylece (2.4.21) ve (2.4.25) kullanılırsa

$$g(D^l(\xi_1, \phi\xi_2), \xi) = -g(h^s(\xi_1, \xi_2), \phi\xi) \tag{4.4.2}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.4.1) N ile iç çarpıma tabii tutulursa

$$g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\phi\xi_2, N) = -g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2, \phi N)$$

olur. Burada (2.4.21) ve (2.4.25) kullanılırsa

$$g(D^s(\xi_1, N), \phi\xi_2) = g(h^s(\xi_1, \xi_2), \phi N) \tag{4.4.3}$$

elde edilir. Ayrıca $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan $Z \in \Gamma(D_o)$ için

$$g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2, Z) = -g(\xi_2, \bar{\nabla}_{\xi_1} Z) \tag{4.4.4}$$

olur. (2.4.21) den

$$g(\bar{\nabla}_{\xi_1}\xi_2, Z) = g(h^s(\xi_1, \xi_2), Z) \tag{4.4.5}$$

dır. Diğer taraftan (2.4.25) denkleminden

$$g(\xi_2, \bar{\nabla}_{\xi_1} Z) = g(\xi_2, D^l(\xi_1, Z)) \tag{4.4.6}$$

olur. (4.4.5) ve (4.4.6) denklemleri (4.4.4) de yazılırsa

$$g(h^s(\xi_1, \xi_2), Z) = -g(\xi_2, D^l(\xi_1, Z)) \tag{4.4.7}$$

elde edilir. Böylece (4.4.2), (4.4.3) ve (4.4.7) denklemlerinden ispat tamamlanır.

Bibliography

Kaynaklar

[1] Arnold, V.I.: *Contact geometry: The geometrical method of Gibbs's Thermodynamics*, Proc. Gibbs Symposium, Yale University, 1989, 163-179.

[2] Bejancu, A.: *Geometry of CR-Submanifolds*, Kluwer Academic, 1986.

[3] Bejancu, A.: *Lightlike Curves in Lorentz manifolds*, Publications Math. Debrecen, 44, (1994), 145-155

[4] Bejancu, A. and Duggal,K.L.: *Lightlike submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds*, Acta Appl. Math. 38, (1995), 197-215

[5] Bonnor, W.B.: *Null Curves in a Minkowski space-time.* Tensör (N.S)20 (1969) 229-242.

[6] Bootby, W.M.: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press Inc, (1986).

[7] Beem, J.K. and Ehrlich, P.E.: *Global Lorentzian Geometry*, Marcell Dekker Inc., (1981).

[8] Blair,D.: *Contact Manifold in Riemanian Geometry*, Lecture Notes in Math., No:509, Springer Verlag, (1967).

[9] Călin, C.: *Contributions to geometry of CR-submanifold*, Thesis, University of Iasi, Romania, (1998).

[10] Chen,B.Y: *Geometry of Submanifolds.* Pure and Apllied Mathematics, No.22, Marcel Dekker.,Inc., New York, (1973)

[11] Duggal, K.L.: *Spacetime manifolds and contact structures*, Internat. J. Math. & Math. Sci., **13** (1990), 545-554.

[12] Duggal, K.L. and Bejancu, A.: *Lightlike submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications*, Kluwer Academic Publishers, **364**, (1996).

[13] Duggal, K.L. and Jin, D.H.: *Totally umbilical lightlike submanifolds*, Kodai Math J., **26 (1)** (2003), 49-68.

[14] Duggal, K.L. and Ṣahin, B.: *Screen Cauchy Riemann lightlike submanifolds*, Acta Math. H, **106(1-2)**(2005),137-165

[15] Duggal, K.L. and Ṣahin, B.: *Generalized screen Cauchy Riemann lightlike submanifolds*, Acta Math. Hungar., **112(1-2)** (2006), 113-136.

[16] Duggal, K.L. and Ṣahin, B.: *Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds*,Int.Jour.Math and Math.Sci,(2007) DOI=10.1155/2007/57585.

[17] Duggal, K.L. and Ṣahin, B.: *Generalized Cauchy-Rieman lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds*, Acta Math. Hungar., **122(1-2)** (2009), 45-58.

[18] Hacisalihoḡlu, H.H.: *Diferensiyel Geometri cilt I. II. III*, (1993), Ankara.

[19] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R.: *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1972).

[20] Ioan, C.I.: *Degenerate Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds*, N.S. 58.(1997), 1-7

[21] Ioan, C.I.: *Totally Umbilical Lightlike Submanifolds*, N.S. 58.(1997), 18-30

[22] Ikawa, D.: *On curves and submanifolds in an indefinite Riemannian manifold.* Tsukuba J.Math.9(1985),no.2,353-371

[23] Kang, T.H., Jung, S.D., Kim,B.H., Pak,H.K. And Pak,J.S.: *Lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian manifolds*, Indian J. pure appl. Math., **34(9)** (2003), 1369-1380.

[24] Katsuno, K.: *Null hypersurfaces in Lorentzian Manifolds.I.* Math. Proc. Cambridge Philos.Soc.88(1980),no.1, 175-182

[25] Katsuno, K.: *Null hypersurfaces in Lorentzian Manifolds.II.* Math. Proc. Cambridge Philos.Soc.89(1980),no.3, 525-532

[26] Kumar, R., Rani, R. and Nagaich, R.K.: *On Sectional Curvatures of ε-Sasakian manifolds*, International J. Math and Math Sci., Article I.D.:93562, DOI:101155/2007/93562,(2007)

[27] Kupeli, D.N.: *Singular semi-Riemannian geometry*, Kluwer Academic Publishers, **366**, 1996.

[28] Neil, B.O.: *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press. 1971.

[29] Nomizu, K.: *Fundemental of Linear Algebra*, McGraw-Hill Book.com., (1966), New York.

[30] Leop, M.D., Rotriques, P.R.: *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, Elsevier S.C., (1989)

[31] Perlick, V.: *On totally umbilic submanifolds of semi-Riemannian manifolds*, Nonlinear Anal., 63/5-7(2005), 511-518.

[32] Sabuncuoğlu, A.: *Lineer Cebir*, Nobel Yayın, (2004)

[33] Ṣahin, B.: *CR-Altmanifoldların Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi*, İnönü Üniversitesi,(1996).

[34] Ṣahin, B.: *Transversal lightlike submanifolds of indefinite Kaehler manifolds*, An. Univ. Vest Timiṣ. Ser. Mat.-Inform. XLIV,1,(2006),119-145.

[35] Ṣahin, B.: *Lightlike Manifoldların Altmanifoldları üzerine Doktora Tezi*, İnönü Üniversitesi, (2000).

[36] Ṣahin, B.: *Screen transversal lightlike submanifolds of indefinite Kaehler manifolds*, Chaos, solitons and Fractals, 38(2008), 1439-1448.

[37] Ṣahin, B. and Güneṣ, R.,Integrability of distributions in CR-lightlike submanifolds. Tamkang J. Math. 33 (2002), no. 3, 209-221.

[38] Ṣahin, B. and Güneṣ, R., Geodesic CR-lightlike submanifolds. Beitrge Algebra Geom. 42 (2001), no. 2, 583-594.

[39] Tanno, S.: *Sasakian manifolds with constant ϕ-holomorphic sectional curvature*, Tôhoku Math. J. **21** (1969), 501-507.

[40] Takahashi,T.: *Sasakian Manifold with Pseudo-Riemannian Metric*, Tohoku Math. J., 21(1969), 271-290.

[41] Yano, K. and Kon, M.: *Structures on Manifolds*, World Scientific, (1984).

[42] Yano, K. and Kon, M.: *CR-Submanifolds of Kaehlerian and Sasakian Manifolds*, Birkhauser, (1983).

ÖZGEÇMİŞ

27 Şubat 1972 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk ve orta örta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1992 yılında Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 1996'da mezun oldu. 1997 de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. 1998'de Van'da Öğretmenlik yaptı. 2000 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2002 yılında Adıyaman Fen-Edebiyat Fakültesine öğretim görevlisi olarak göreve başladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora programına kayıt yaptırdı. Evli ve iki çocuk sahibi olup halen Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde öğretim görevlisi olarak görev yapmaktadır.