

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

4-BOYUTLU YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND  
EĞRİLERİ ÜZERİNE

Semih IŞIK

ARALIK 2020

**Matematik Anabilim Dalında** Semih IŞIK tarafından hazırlanan 4-BOYUTLU YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND EĞRİLERİ ÜZERİNE adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduđumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiđini onaylarım.

Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mehmet YILDIRIM \_\_\_\_\_

Üye (Danışman) : Prof. Dr. Kazım İLARSLAN \_\_\_\_\_

Üye : Prof. Dr. Hatice Gül İNCE İLARSLAN \_\_\_\_\_

17/12/2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ÖZET

### 4-BOYUTLU YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA GENELLEŞTİRİLMİŞ BERTRAND EĞRİLERİ ÜZERİNE

IŞIK, Semih

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

Aralık 2020, 46 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, 4-boyutlu 2-indeksli yarı-öklidyen uzayda  $(1,3)$ -Cartan null eğrileri verilmiştir. Dördüncü bölümde, 4-boyutlu 2-indeksli yarı-öklidyen uzayda  $(1,3)$ -pseudo null eğrileri incelenmiştir. Bu bölümlerde  $(1,3)$ -normal düzlemin spacelike veya timelike olma durumlarına göre elde edilen eğrilerin  $(1,3)$ -Bertrand eğrileri olmalarını ve  $(1,3)$ -Bertrand eşlenik eğrilerinin casual karakterini de ifade eden teoremler elde edilmiştir. Ayrıca ilgili örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Yarı-Öklid uzay, Bertrand eğrileri,  $(1,3)$ -Bertrand eğrileri, null eğriler, pseudo null eğriler, null olmayan eğriler

## ABSTRACT

### ON GENERALIZED BERTRAND CURVES IN 4-DIMENSIONAL SEMI-EUCLIDEAN SPACE

IŞIK, Semih

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kazım İLARSLAN

December 2020, 46 pages

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. The second chapter contains concepts and definitions which are needed throughout the thesis. The third chapter includes the theorems which show that there exist no Bertrand curves in Semi-Euclidean space. The fourth chapter is given with two subsections by classifying (1,3)-Bertrand curves according to the causal character of (1,3)-normal plane in Semi-Euclidean space. In these subsections, by considering that (1,3)-normal plane is spacelike or timelike, theorems are given for the obtained curves to be (1,3)-Bertrand curves. Besides the theorems express the casual characters of the (1,3)-Bertrand mate curves. Also, the related examples are given.

**Key Words:** Semi-Euclidean space, Bertrand curves, (1, 3)-Bertrand curves, null curves, pseudo null curves, non-null curves.

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamda bana yol gösteren danışman hocam Sayın Prof. Dr. Kazım İLARSLAN'a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans çalışmam boyunca her türlü desteği veren sevgili anneme, babama minnettarım.



# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
<b>ÖZET</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	iii
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> .....	iv
<b>SİMGELER DİZİNİ</b> .....	v
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	3
<b>3. YARI ÖKLİD UZAYDA (1,3)-CARTAN NULL BERTRAND EĞRİLERİ</b> .....	7
<b>4. GENELLEŞTİRİLMİŞ PSEUDO NULL BERTRAND EĞRİLERİ</b> .....	26
<b>5. TARTIŞMA VE SONUÇ</b> .....	43
<b>KAYNAKLAR</b> .....	44

## SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
$\mathbb{E}^3$	3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}_2^4$	4-boyutlu,2-indeksli Yarı-Öklidyen uzay
$\ \cdot\ $	Norm fonksiyonu
$g$	Non-dejenere metrik
$T$	$\mathbb{E}_2^4$ de bir eğrinin teğet vektör alanı
$N$	$\mathbb{E}_2^4$ de bir eğrinin normal vektör alanı
$B_1$	$\mathbb{E}_2^4$ de bir eğrinin birinci binormal vektör alanı
$B_2$	$\mathbb{E}_2^4$ de bir eğrinin ikinci binormal vektör alanı
$\kappa_i$	Bir eğrinin i-ynci eğrilik fonksiyonu

# 1. GİRİŞ

Eğriler teorisi Diferensiyel geometrinin önemli bir çalışma alanı olup tarihsel gelişimi Leibniz (1646-1716), Newton (1643-1727) ve Monge (1746-1818) tarafından düzlemsel eğriler üzerine yapılan diferansiyel hesaplamalara kadar dayanmaktadır. Bir uzay eğrisinin(veya düzlemsel bir eğrinin) karakterizasyonu bu teoride yoğun bir şekilde çalışılan bir problemdir. Bu problemin çözümünde eğriye ait eğrilik fonksiyonları, eğrinin Frenet vektörleri veya eğrinin konum vektörü yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Örneğin; bir uzay eğrisinin  $\kappa_1$ (eğrinin birinci eğriligi) ve  $\kappa_2$ (eğrinin ikinci eğriligi) eğrilikleri sıfırdan farklı sabitler ise eğrinin bir helis olduğu bilinmektedir.

Bir uzay eğrisinin konum vektörü her zaman kendi rektifyen düzleminde ( $T$  ve  $B$  tarafından gerilen düzlem) yatıyorsa eğri bir rektifyen eğridir. (Chan 2003) Bu örnekleri çoğaltmak mümkündür. Eğrinin Frenet vektörlerinin bir başka eğrinin Frenet vektörleriyle olan ilişkilerinde önemli eğri sınıfları ortaya çıkmıştır. 1845 yılında B. de Saint Venant tarafından ortaya konulan bir eğrinin asli normal vektör alanının bir başka eğrinin asli normal vektör alanı olup olmayacağı problemi 1850 yılında J. Bertrand tarafından yayınlanan bir makalede cevaplandırılmıştır. Böyle bir ikinci eğrinin var olması için gerek ve yeter şartın verilen eğrinin eğriliklerinin  $\lambda\kappa_1 + \mu\kappa_2 = 1$  şartını sağlamasıdır. Bu tarihten itibaren bu şartı sağlayan eğriye Bertrand eğrisi ve ikinci eğriye de bu eğrinin Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir. Bu eğri çiftleri de Bertrand eğri çiftleri olarak adlandırılmıştır ([4,5]).

Bertrand eğrileri 3-boyutlu Öklid uzayında tarih içerisinde birçok yazar tarafından yoğun bir şekilde çalışılmıştır. 1935 yılında, L. R. Pears, Bertrand eğrilerini  $n$ -boyutlu Öklid uzayında çalışmış ve  $\kappa_2$  ya da  $\kappa_3$  eğriliklerinin sıfır olduğu sonucuna ulaşmıştır. Bir diğer ifadeyle  $\mathbb{E}^n$  ( $n > 3$ ) uzayındaki Bertrand eğrileri dejenere eğrilerdir. Bu durumda, özel olarak tüm eğrilikleri sıfırdan farklı bir eğri ele aldığımızda bu eğrinin Bertrand eğrisi olmayacağı aşikardır. 2003 yılında Matsuda ve Yorozu 4-boyutlu Öklid uzayında Bertrand eğrilerinin yeni bir sınıfını tanımlamışlar ve çalışmışlardır. Buna göre  $\mathbb{E}^4$ de tüm eğrilikleri sıfırdan farklı verilen bir eğrinin Frenet vektörleri  $T, N, B_1, B_2$  olmak üzere  $sp\{N, B_2\}$

tarafından gerilen düzlem  $(1, 3)$ -normal düzlem olarak tanımlanmış, bir eğrinin  $(1, 3)$ -normal düzlemi başka bir eğrinin  $(1, 3)$ -normal düzlemi oluyorsa bu eğriye  $(1, 3)$ -Bertrand eğrisi, diğer eğriye de bu eğrinin  $(1, 3)$ -Bertrand eşlenik eğrisi adı verilmiştir ([8,9]).

Bunun yanı sıra Bertrand eğrileri Minkowski 3-uzayında ve Minkowski uzay-zaman  $\mathbb{E}_1^4$  de de çalışılmıştır. 2001 yılında Ekmekçi ve İlarıslan null olmayan Bertrand eğrilerini Minkowski 3-uzayında çalışmışlardır. Balgetir ve diğerleri 2004 yılında null Bertrand eğrilerini aynı uzayda çalışmıştır. Ayrıca, Minkowski uzay-zamanda  $(1, 3)$ -Bertrand eğrileri İlarıslan ve diğerleri tarafından 2014 yılında çalışılmıştır. Bu çalışmalarda Matsudo ve Yorozu tarafından verilen yöntem takip edilmiştir. Bu çalışmaların dışında da Bertrand eğrileri ve  $(1, 3)$ -Bertrand eğrileri üzerine yapılmış ve farklı özellikleri ortaya koyan çalışmalar da vardır ([10-20]).

Yapılan bu tüm çalışmalarda  $(1, 3)$ -Bertrand eğrisi ve eşlenik eğrisi aynı casual karakterli eğriler olarak ele alınmıştır. Bu da farklı casual karaktere sahip eğrilerin  $(1, 3)$ -Bertrand eğri çifti oluşturup oluşturamayacağı sorusunu akla getirmiştir. Biz bu tez çalışmasında bu soruya cevap vermek adına Bertrand eğrilerini  $(1, 3)$ -normal düzlemlerinin casual karakterine göre sınıflandırarak inceledik.  $(1, 3)$ -normal düzlemini sırasıyla spacelike ve timelike düzlem olarak ele aldık.  $(1, 3)$ -normal düzlemi null bir düzlem olarak düşünüldüğünde bu eğrinin partially null eğri olduğu ortaya çıkmıştır ve bu eğrinin üçüncü eğriliği sıfırdır. Yani bu eğri  $\mathbb{E}_1^4$  in bir alt uzayında yatmaktadır. Bundan dolayı  $(1, 3)$ -normal düzlemi null olarak ele alınmamıştır. Diğer durumlar için bir Bertrand eğrisinin kendi casual karakterinden farklı Bertrand eşlenik eğrilerine de sahip olabileceği gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar [21] ve [22] makalelerinde yayınlanmıştır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde gerekli olan kavramlar ve tanımlar verilecektir.

### Tanım 2.1 (Simetrik Bilineer Form)

Bir reel vektör uzayı  $V$  için

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u, v, w \in V$  için

i.  $g(u, v) = g(v, u)$

ii.  $g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w)$

iii.  $g(u, av + bw) = ag(u, v) + bg(u, w)$

şartları sağlanıyorsa  $g$  dönüşümüne  $V$  reel vektör uzayı üzerinde simetrik bilinear form denir [23].

**Tanım 2.2**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form  $g$  olsun.  $0 \neq w \in V$  olmak üzere  $\forall u \in V$  için

$$g(u, w) = 0$$

ise  $g$  ye  $V$  üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda  $g$  ye non-dejeneredir denir. Bu tanıma göre  $g$  nin non-dejenerere olması için gerek ve yeter şart  $\forall w \in V$  için

$$g(u, w) = 0 \text{ iken } u = 0$$

olmasıdır [23].

**Tanım 2.3.** 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay  $E_2^4$ ,  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $E_2^4$  in bir dik koordinat sistemi olmak üzere

$$g = -dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2,$$

olarak tanımlanan non-dejenerere metrik ile donatılmış 4-boyutlu Öklid uzayıdır.

**Tanım 2.4**  $v \in \mathbb{E}_2^4 \setminus \{0\}$  olmak üzere, eğer

i.  $g(v, v) > 0$  ise,  $v$  spacelike (uzaysı) vektör

ii.  $g(v, v) < 0$  ise,  $v$  timelike (zamansı) vektör

iii.  $g(v, v) = 0$  ise,  $v$  null veya lightlike (ışığı) vektör, ( $v \neq 0$ )

olarak adlandırılır ([3]).

**Tanım 2.5**  $\forall v, w \in V$  için  $v \neq 0$  ve  $w \neq 0$  iken  $g(v, w) = 0$  ise  $v$  ve  $w$  vektörleri ortogondur.  $v \perp w$  şeklinde gösterilir.

$V$  reel vektör uzayının bir alt uzayı  $W$  olsun.  $W^\perp = \{v \in V \mid v \perp W\}$  alt uzayına  $V$  nin dik alt uzayı denir. Burada  $W^\perp$  alt uzayına  $W$  nin ortogonal komplemanı diyemeyiz. Çünkü  $W \oplus W^\perp$  genellikle  $V$  nin tamamı değildir (O'Neill,1983).

**Teorem 2.1**  $W$  bir  $V$  skalar çarpım uzayının alt uzayı olsun. O zaman

(i)  $\text{boy}W + \text{boy}W^\perp = n = \text{boy}V$ ,

(ii)  $(W^\perp)^\perp = W$  dir (O'Neill,1983).

**Tanım 2.6**  $V$  reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım  $\langle, \rangle$  ve  $W$  da  $V$  nin bir alt uzayı olsun. Eğer  $\langle, \rangle$ ,  $W$  üzerinde non-dejenere ise  $W$  ya non-dejenere alt uzay, non-dejenere değilse dejenere alt uzay denir (O'Neill,1983).

**Teorem 2.2**  $V$  bir skalar çarpım uzayı ve  $W, V$  nin bir alt uzayı olsun.  $W$  nin non-dejenere alt uzay olması için gerek ve yeter şart  $V = W \oplus W^\perp$  olmasıdır (O'Neill,1983).

**Tanım 2.7.**  $v, w \in \mathbb{E}_2^4$  olmak üzere,  $v$  ve  $w$  vektörlerinin dik olması için gerek ve yeter şart  $g(v, w) = 0$  olmasıdır ([3]).

**Tanım 2.8.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  bir eğri olsun. Eğer  $\alpha$  eğrisinin  $\forall s \in I$  için hız vektörü  $\alpha'(s)$  sırasıyla spacelike, timelike veya null vektör ise  $\alpha$  eğrisi sırasıyla spacelike, timelike veya null eğri olarak adlandırılır ([3]).

**Tanım 2.9.**  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  bir eğri olsun.

i.  $\alpha$  null bir eğri olmak üzere, eğer  $\forall s \in I$  için  $g(\alpha''(s), \alpha''(s)) = 1$  şartı sağlanıyorsa  $\alpha$  eğrisine pseudo yay parametresi ile parametrelendirilmiştir denir.

ii.  $\alpha$  null olmayan bir eğri olmak üzere, eğer  $\forall s \in I$  için  $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$  şartı sağlanıyorsa  $\alpha$  eğrisine yay uzunluğu parametresi ile parametrelendirilmiştir denir ([24]).

4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay  $\mathbb{E}_2^4$  de  $\{T, N, B_1, B_2\}$   $\alpha$  eğrisi üzerinde

hareketli Frenet çatısı ve  $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$   $\alpha$  eğrisinin eğrilik fonksiyonları olsun. Burada  $T, N, B_1, B_2$  sırasıyla  $\alpha$  eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı, birinci binormal vektör alanı ve ikinci binormal vektör alanıdır.

Eğer  $\alpha$  eğrisi spacelike veya timelike eğri ise, Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \epsilon_2 \kappa_1 & 0 & 0 \\ -\epsilon_1 \kappa_1 & 0 & \epsilon_3 \kappa_2 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 \kappa_2 & 0 & -\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \kappa_3 \\ 0 & 0 & -\epsilon_3 \kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

olarak verilir. [24] Burada  $g(T, T) = \epsilon_1, g(N, N) = \epsilon_2, g(B_1, B_1) = \epsilon_3, g(B_2, B_2) = \epsilon_4, \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 \epsilon_4 = -1, \epsilon_i \in \{-1, 1\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$  dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = g(B_1, B_2) = 0.$$

Eğer  $\alpha$  eğrisi Cartan null bir eğri ise,

$$\alpha, \mathbb{E}_2^4 \text{ de bir null eğri olsun } (g(T, T) = 0). \alpha \text{ eğrisi } s(t) = \int_0^t \sqrt{\|\alpha''(u)\|} du$$

pseudo-yay fonksiyonu  $s$  ile parametrelendirilmiş ise  $\alpha$  eğrisi null Cartan eğri olarak adlandırılır. Bu durumda geodezik olmayan ( $\kappa_1(s) \neq 0$ ) null Cartan eğrisi boyunca bir tek Cartan çatısı  $\{T, N, B_1, B_2\}$  vardır ve aşağıdaki denklemleri sağlarlar [24]

Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B_1' \\ B_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_2 & 0 & -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 & 0 & \kappa_3 \\ -\kappa_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

olarak verilir. [24] Burada eğer  $\alpha(s)$  bir null doğru ise  $\kappa_1(s) = 0$ , diğer bütün durumlarda  $\kappa_1(s) = 1$  dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 0, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 1,$$

$$g(T, N) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(T, B_1) = 1.$$

Eğer  $\alpha$  eğrisi pseudo null bir eğri ise

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & \kappa_3 & 0 & -\kappa_2 \\ -\kappa_1 & 0 & -\kappa_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

olarak verilir. [24] Burada eğer  $\alpha(s)$  bir null doğru ise  $\kappa_1(s) = 0$ , diğer bütün durumlarda  $\kappa_1(s) = 1$  dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 1, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0,$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(N, B_2) = 1.$$

Eğer  $\alpha$  eğrisi partially null bir eğri ise Frenet denklemleri,

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B'_1 \\ B'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_1 & 0 & 0 \\ \kappa_1 & 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 & 0 \\ 0 & -\epsilon_2 \kappa_2 & 0 & -\kappa_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

olarak verilir. [24] Burada eğer  $\alpha(s)$  bir null doğru ise  $\kappa_3(s) = 0$ , diğer bütün durumlarda  $\kappa_1(s) = 1$  dir. Ayrıca aşağıdaki durumlar sağlanır:

$$g(B_1, B_2) = 1, \quad g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 0,$$

$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = 0.$$

**Tanım 2.10.**  $P$ ,  $\mathbb{E}_2^4$  uzayının bir alt uzayı olsun. Eğer

**i.**  $P$  üzerinde her sıfırdan farklı vektör spacelike vektör ise  $P$  ye spacelike altuzay,

**ii.**  $P$  üzerinde en az bir timelike vektör var ise  $P$  ye timelike altuzay,

**iii.** diğer durumlarda  $P$  ye lightlike altuzay denir.

**Notasyon**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  ve  $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  Yarı-Öklidyen uzay  $\mathbb{E}_2^4$  olsun. Bu tez çalışması boyunca  $\{T, N, B_1, B_2\}$  ve  $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\}$   $\beta$  eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları,  $s$  de  $\beta$  eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır. Benzer şekilde  $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$  ve  $\{\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*\}$   $\beta^*$  eğrisinin sırasıyla Frenet çatısı ve eğrilik fonksiyonları,  $s^*$  da  $\beta^*$  eğrisinin yay uzunluğu parametresi veya pseudo yay uzunluğu parametresi olarak alınacaktır.

### 3. 4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA (1, 3) -CARTAN NULL BERTRAND EĞRİLER

Bu bölümde 4-boyutlu, 2-indeksli Yarı-Öklidyen uzayda (1, 3)-Cartan null Bertrand eğrileri incelenecek olup, bu bölüm için ana referansımız [24] olacaktır. İlk olarak bu uzayda Cartan null Bertrand eğri tanımını verelim.

**Tanım 3.1**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$ , 4-boyutlu, 2-indeksli Yarı-Öklidyen uzayda bir Cartan null eğri olsun. Eğer her  $s \in I$  için,  $\beta$  eğrisinin her  $\beta(s)$  noktasındaki asli normal başka bir  $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrisinin  $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$  noktasındaki asli normal ile lineer bağımlı ise  $\beta$  eğrisine Bertrand eğrisi,  $\beta^*$  eğrisine de  $\beta$  eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada  $f : I \rightarrow I^*$  bir regüler  $C^\infty$  dönüşümdür öyle ki her  $s \in I$  için  $\beta$  nin her  $\beta(s)$  noktasına  $\beta^*$  ın bir  $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$  noktası karşılık getirir.

$\beta$  nin asli normal vektör alanı  $N$ , spacelike veya timelike olabileceğinden  $\beta^*$  eşlenik eğrisi ; Cartan null eğri, non-null eğri veya partially null eğri olabilir. Bu durumlar dikkate alınarak aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edelim.

**Teorem 3.1**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrisi sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  olan Cartan null eğri olsun. Bu durumda  $\beta$  eğrisinin kendisinden başka bir Bertrand eşlenik eğrisi yoktur.

**İspat 3.1**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrisi, sıfırdan farklı eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  ve asli normal vektörü  $N$  olan bir Cartan null eğri olsun. Kabul edelim ki  $\beta^*$  eğrisi,  $\beta$  eğrisinin kendisinden başka Bertrand eşlenik eğrisi olsun.  $\beta$  eğrisinin asli normal vektörü  $N$  spacelike veya timelike vektör olduğundan  $\beta^*$  eğrisi (i) Cartan null eğri, (ii) non-null eğri veya (iii) partially null eğri olabilir. Şimdi bu durumları ayrı ayrı ele alarak ispatı gerçekleştirelim.

(i)  $\beta^*$  eğrisi, asli normal vektörü  $N^*$  olan bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda  $\beta^*$  her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki gibi yazılabilir

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \quad (3.1)$$

(3.1) denkleminde  $s$  ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri

kullanılırsa ;

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 \lambda \kappa_2) T + \lambda' N - \epsilon_1 \lambda B_1 \quad (3.2)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik  $N$  ile iç çarpılırsa,  $\lambda' = 0$  bulunur. Dolayısıyla  $\lambda$  sıfırdan farklı bir sabittir. Buna göre (3.2) denklemi tekrar düzenlenirse

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 \lambda \kappa_2) T - \epsilon_1 \lambda B_1 \quad (3.3)$$

olarak bulunur. (3.3) kendisiyle iç çarpılıp  $\kappa_2 = \frac{\epsilon_1}{\lambda}$  yazılırsa ,

$$T^* = -\frac{\epsilon_1 \lambda}{f'} B_1 \quad (3.4)$$

elde edilir. (3.4) denkleminde  $s$  ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f' N^* = -\frac{\epsilon_1 \lambda \kappa_2}{f'} N - \left( \frac{-\epsilon_1 \lambda}{f'} \right)' B_1 - \frac{\epsilon_1 \lambda \kappa_3}{f'} B_2 \quad (3.5)$$

bulunur. (3.5) denklemi  $N$  ve  $N^*$  paralel olduğu dikkate alınarak  $B_2$  ile iç çarpılırsa  $\lambda \kappa_3 = 0$  elde edilir.  $\lambda \neq 0$  olduğundan  $\kappa_3 = 0$  elde edilir. Bu durum bir çelişkidir.

(ii)  $\beta^*$  eğrisi, non-null eğri olsun. Bu durumda, her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \quad (3.6)$$

(3.6) denkleminde  $s$  ye göre türev alınır, (2.1) de verilen Frenet denklemi kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \lambda \epsilon_1 \kappa_2) T + \lambda' N - \lambda \epsilon_1 \kappa_1 B_1 \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu denklem  $N$  ile iç çarpılırsa,  $\lambda' = 0$  bulunur. Dolayısıyla  $\lambda$  sıfırdan farklı bir sabittir.

Buradan (3.7) denklemi

$$T^* f' = (1 - \lambda \epsilon_1 \kappa_2) T - \lambda \epsilon_1 \kappa_1 B_1 \quad (3.8)$$

olarak elde edilir. Eğer (3.8) denklemi kendisiyle iç çarpılırsa

$$(f')^2 \epsilon_1^* = -2\lambda \epsilon_1 (1 - \lambda \epsilon_1 \kappa_2)$$

bulunur. Bu eşitlikten

$$\kappa_2 = \frac{f'^2 \epsilon_1^* + 2\lambda \epsilon_1}{2\lambda^2} \quad (3.9)$$

elde edilir. (3.9) denklemini (3.8) de yerine yazılırsa,

$$T^* = -\frac{f' \epsilon_1 \epsilon_1^*}{2\lambda} T - \frac{\epsilon_1 \lambda}{f'} B_1 \quad (3.10)$$

bulunur. (3.10) denkleminin türevi alınır,

$$\begin{aligned} \epsilon_2^* N^* f' = & \left( -\frac{f' \epsilon_1 \epsilon_1^*}{2\lambda} \right)' T + \left( -\frac{f \epsilon_1 \epsilon_1^*}{2\lambda} - \frac{\epsilon_1 \lambda \kappa_2}{f'} \right) N \\ & - \left( \frac{\epsilon_1 \lambda}{f'} \right)' B_1 - \left( \frac{\epsilon_1 \lambda \kappa_3}{f'} \right) B_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

bulunur. Bu denklem  $N$  ve  $N^*$  ın paralel olduğu dikkate alınarak  $B_2$  ile iç çarpılırsa

$$-\frac{\epsilon_1 \epsilon_2 \lambda \kappa_3}{f'} = 0 \quad (3.12)$$

elde edilir. Buradan,  $\lambda$  sıfırdan farklı bir sabit olduğu için  $\kappa_3 = 0$  bulunur. Bu ise bir çelişkidir.

(iii)  $\beta^*$  eğrisi, partially null eğri olsun. Bu durumda, her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki formda ifade edilebilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \quad (3.13)$$

(3.13) denkleminin  $s$  ye göre türevi alınıp (2.4) de verilen Frenet denklemi kullanılırsa,

$$T^* f' = (1 - \lambda \kappa_1) T + \lambda' N + \lambda \kappa_2 B_1 \quad (3.14)$$

olarak elde edilir. (3.14) denklemini  $N$  ile iç çarpılırsa,  $\lambda' = 0$  bulunur. Buradan (3.14) denklemini

$$T^* f' = (1 - \lambda \kappa_1) T + \lambda \kappa_2 B_1 \quad (3.15)$$

olarak bulunur. Eğer (3.15) denklemini kendisiyle iç çarparsak

$$\kappa_2 = \frac{f'^2 \epsilon_1^*}{2\lambda} + \frac{f'^2 \epsilon_1^*}{2\lambda^2 \kappa_1} \quad (3.16)$$

$\kappa_2$  yi bu şekilde elde ederiz  $\kappa_2$  yi (3.15) denkleminde yerine yazarsak

$$T^* = \left( \frac{1+\lambda}{f'} \right) T + \left( \frac{\lambda f' \epsilon_1^* + f' \epsilon_1^*}{2\lambda} \right) B_1 \quad (3.17)$$

olarak bulunur. (3.17) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \epsilon_1^* N^* f' = & \left( \frac{1+\lambda}{f'} \right)' T + \left( \frac{1+\lambda}{f'} \right) N + \left( \frac{\lambda f' \epsilon_1^* + f' \epsilon_1^*}{2\lambda} \right)' B_1 \\ & + \left( \frac{\lambda f' \epsilon_1^* \kappa_2 + f' \epsilon_1^* \kappa_2}{2\lambda} \right) N + \left( \frac{\lambda \kappa_3 f' \epsilon_1^* + \kappa_3 f' \epsilon_1^*}{2\lambda} \right) B_2 \end{aligned}$$

bulunur.  $N$  ve  $N^*$  paralel olduğundan  $\kappa_3 (\lambda f' \epsilon_1^* + f' \epsilon_1^*) = 0$ ,  $\kappa_3 = 0$  elde edilir.

Bu bir çelişkidir.

Yukarıdaki teoremden anlaşılacağı gibi, 4-boyutlu, 2-indeksli yarı-Öklidyen uzay  $\mathbb{E}_2^4$  de klasik anlamda Bertrand eğrisi yoktur. Buna göre Bertrand eğrilerinin bir genelleştirmesi olan (1, 3)-Bertrand eğri kavramını bu uzayda inceleyelim. İlk olarak (1, 3)-Bertrand eğri tanımını verelim.

**Tanım 3.2**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  ve  $\beta^* : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrileri  $C^\infty$  sınıftan özel Frenet eğrileri olsunlar ve  $f : I \rightarrow I^*$  bir regüler  $C^\infty$  dönüşüm olsun öyle ki her  $s \in I$  için  $\beta$  nın her  $\beta(s)$  noktasına,  $\beta^*$  nın bir  $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$  noktasını karşılık getirsin. Eğer her  $s \in I$  için,  $\beta$  eğrisinin her  $\beta(s)$  noktasındaki (1, 3)-normal düzlemi ile  $\beta^*$  nın bu noktaya karşılık gelen  $\beta^*(s^*)$  noktasındaki (1, 3)-normal düzlemi çakışıkse  $\beta$  eğrisine bir (1, 3)-Bertrand eğrisi ve  $\beta^*$  eğrisine de  $\beta$  eğrisinin (1, 3)-Bertrand eşlenik eğrisi denir. Burada  $s$  ve  $s^*$  sırayla  $\beta$  ve  $\beta^*$  yay uzunluğu parametreleridir.

$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  Frenet çatısı  $\{T, N, B_1, B_2\}$  ve eğrilikleri  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  olan bir (1, 3)-Cartan null Bertrand eğrisi ve  $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$ , Frenet çatısı  $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$  ve eğrilikleri  $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$  olan  $\beta$  nın (1, 3)-Bertrand eşlenik eğrisidir.

**Teorem 3.2**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  olan bir Cartan null eğri olsun. Bu durumda  $\beta$  nın, Bertrand eşleniği  $\beta^*$  olan bir (1, 3)-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır:

(i)

$$\epsilon_1 a \kappa_2 + \epsilon_2 b \kappa_3 = 1, \epsilon_1 \kappa_2^2 + \epsilon_2 \kappa_3^2 = \epsilon_1^* a^2 / \gamma^4, \mu = \kappa_2 / \kappa_3, \quad (3.18)$$

olacak şekilde  $a \neq 0$ ,  $b$ ,  $\gamma \neq 0$ ,  $\mu$  reel sayıları vardır. Bu durumda  $\beta^*$  eşlenik eğrisi  $\mathbb{E}_2^4$  de bir Cartan null eğridir.

(ii)

$$1 + ah\epsilon_1 = \epsilon_1 a \kappa_2 + \epsilon_2 b \kappa_3, \mu \kappa_3 = h + \kappa_2, h_2^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2 \neq 0 \quad (3.19)$$

olacak şekilde  $a \neq 0$ ,  $b, h \neq 0$ ,  $\mu$  reel sayıları vardır. Bu durumda  $\beta^*$  eşlenik eğrisi  $\mathbb{E}_2^4$  de bir spacelike veya timelike eğridir.

(iii)

$$1 + ah\epsilon_1 = \epsilon_1 a \kappa_2 + \epsilon_2 b \kappa_3 \text{ ve } (h + \kappa_2)^2 = \kappa_3^2, \quad (3.20)$$

olacak şekilde  $a \neq 0$ ,  $b, h \neq 0$  reel sayıları vardır. Bu durumda  $\beta^*$  eşlenik eğrisi  $\mathbb{E}_2^4$  de bir pseudo null eğridir.

**İspat 3.2 (i)**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  eğri olsun. Kabul edelim ki  $\beta^*$  eğrisi Cartan null eğri olsun. Bu durumda, her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \quad (3.21)$$

(3.21) denkleminde  $s$  ye göre türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) T + a' N - a \epsilon_1 B_1 + b' B_2 \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu denklem  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa,  $a' = 0$  ve  $b' = 0$  bulunur. Buradan (3.22) denklemini

$$T^* = \left( \frac{1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3}{f'} \right) T - \frac{a \epsilon_1}{f'} B_1 \quad (3.23)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\delta = \frac{1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3}{f'} \quad \text{ve} \quad \gamma = -\frac{a \epsilon_1}{f'} \quad (3.24)$$

alınırsa

$$T^* = \delta T + \gamma B_1. \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) denklemini kendisiyle iç çarpılırsa  $\gamma = \delta = 0$  alınırsa,  $T$  ve  $T^*$  paralel olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\gamma \neq 0$  ve  $\delta = 0$  olmalıdır.

Buradan

$$a \neq 0 \text{ ve } \epsilon_1 a \kappa_2 + \epsilon_2 b \kappa_3 = 1$$

(3.25) de  $\delta = 0$  yazılırsa

$$T^* = \gamma B_1 \quad (3.26)$$

elde edilir. (3.26) denkleminde türev alınır ve (2.2) de verilen Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f' N^* = \gamma \kappa_2 N + \gamma' B_1 + \gamma \kappa_3 B_2 \quad (3.27)$$

bulunur. Bu denklem  $T$  ile iç çarpılırsa  $\gamma' = 0$  olur. Bu durumda

$$f' N^* = \gamma \kappa_2 N + \gamma \kappa_3 B_2 \quad (3.28)$$

olur. (3.28) denklemini kendisiyle iç çarpılırsa;

$$\epsilon_1^* (f')^2 = \gamma^2 (\epsilon_1 \kappa_2^2 + \epsilon_2 \kappa_3^2) \quad (3.29)$$

elde edilir. (3.24) ve (3.29) dan

$$\epsilon_1 \kappa_2^2 + \epsilon_2 \kappa_3^2 = \frac{\epsilon_1^* a^2}{\gamma^4} \quad (3.30)$$

$\kappa_2^2 \neq \kappa_3^2$  (Eşit olsaydı  $\epsilon_1 \epsilon_2 = -1$  eşitliğinde  $a=0$  olurdu. Bu bir çelişkidir.)

$$\lambda_1 = \frac{\gamma \kappa_2}{f'} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{\kappa_3}{f'} \quad (3.31)$$

(3.28) den

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2. \quad (3.32)$$

(3.32) nin s ye göre türevi alınıp (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-\epsilon_1^* f' \kappa_2^* T^* - \epsilon_1^* f' B_1^* = (-\epsilon_1 \lambda_1 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_2 \kappa_3) T + \lambda_1' N - \epsilon_1 \lambda_1 B_1 + \lambda_2' \quad (3.33)$$

$N$  ve  $B_2$  ile iç çarpılırsa,  $\lambda_1' = \lambda_2' = 0$  bulunur. (3.31) den

$$\gamma = \frac{\kappa_2}{\kappa_3} = \text{sabit}, \gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq \mp 1$$

Tersine, kabul edelim ki  $\beta$ , (3.18) şartlarını sağlayan Cartan null eğri olsun.  $\beta^*$  eğrisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (3.34)$$

(3.34) ün  $s$  ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \beta'(s) + a'(s)N(s) + a(s)N'(s) + b'(s)B_2(s) + b(s)B_2'(s)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta^*}{ds} &= T(s) + a(s)(-\epsilon_1\kappa_2T - \epsilon_1B_1) + b(-\epsilon_2\kappa_3T) \\ &= [1 - (a\epsilon_1\kappa_2 + b\epsilon_2\kappa_3)]T - a\epsilon_1B_1 \end{aligned}$$

$$\frac{d\beta^*}{ds} = -a\epsilon_1B_1 \quad (3.35)$$

bulunur. (3.35) in  $s$  ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{d^2\beta^*}{ds^2} &= -a\epsilon_1B_1' \\ &= -a\epsilon_1(\kappa_2N + \kappa_3B_2) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\beta^*}{ds^2} = -a\epsilon_1\kappa_2N - a\epsilon_1\kappa_3B_2 \quad (3.36)$$

olarak elde edilir. (3.36) dan biz şunu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} g\left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}, \frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right) &= a^2\epsilon_1^2\kappa_2^2\epsilon_1 + a^2\epsilon_1^2\kappa_3^2\epsilon_2 \\ &= a^2(\kappa_2^2\epsilon_1 + \kappa_3^2\epsilon_2) \end{aligned}$$

(3.30) dan

$$g\left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}, \frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right) = \frac{\epsilon_1^*a^4}{\gamma^4} \quad (3.37)$$

$$f' = \left|\frac{d^2\beta^*}{ds^2}, \frac{d^2\beta^*}{ds^2}\right|^{\frac{1}{4}} = \frac{ma}{\gamma} \quad (3.38)$$

$$m = \mp 1 \text{ öyle ki } \frac{ma}{\gamma} > 0$$

elde edilir. (3.35) i yeniden yazarsak,

$$T^* = m\epsilon_1\gamma B_1 \quad (3.39)$$

(3.39) in s ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$f' \frac{dT^*}{ds^*} = -m\epsilon_1\gamma B_1' = -m\epsilon_1\gamma (\kappa_2 N + \kappa_3 B_2)$$

$$\frac{dT^*}{ds^*} = -\frac{m\epsilon_1\gamma\kappa_2}{f'} N - \frac{m\epsilon_1\gamma\kappa_3}{f'} B_2 \quad (3.40)$$

bulunur. (3.40) dan

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = 1 \quad (3.41)$$

Şimdi biz  $N^*$  ı şu şekilde yazabiliriz.

$$N^* = -\frac{m\epsilon_1\gamma\kappa_2}{f'} N - \frac{m\epsilon_1\gamma\kappa_3}{f'} B_2 \quad (3.42)$$

$$g = (N^*, N^*) = \epsilon_1^*$$

Eğer biz,  $\lambda_3$  ve  $\lambda_4$  ü şu şekilde alırsak,

$$\lambda_3 = -\frac{m\epsilon_1\gamma\kappa_2}{f'} \text{ ve } \lambda_4 = -\frac{m\epsilon_1\gamma\kappa_3}{f'} \quad (3.43)$$

O zaman  $N^*$  ı şu şekilde yazabiliriz.

$$N^* = \lambda_3 N + \lambda_4 B_2 \quad (3.44)$$

(3.18) in son iki şartını kullanırsak,  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3$  sabit.  $\lambda_3' = \lambda_4' = 0$  olur.

(3.44) in s ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} f' \frac{dN^*}{ds^*} &= \lambda_3' N + \lambda_3 N' + \lambda_4' B_2 + \lambda_4 B_2' \\ &= \lambda_3 (-\epsilon_1 \kappa_2 T - \epsilon_1 B_1) + \lambda_4 (-\epsilon_2 \kappa_3 T) \end{aligned}$$

$$f' \frac{dN^*}{ds^*} = (-\epsilon_1 \lambda_3 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_4 \kappa_3) T - \epsilon_1 \lambda_3 B_1 \quad (3.45)$$

olarak elde edilir. (3.43) ü (3.45) de yerine yazarsak

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{\epsilon_1 \epsilon_1^* m}{\gamma} T + \frac{m \gamma \kappa_2}{(f')^2} B_1 \quad (3.46)$$

$$\kappa_2^* = g \left( \frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*} \right) = \frac{2 \epsilon_1 \epsilon_1^* m^2 \gamma \kappa_2}{\gamma (f')^2} = \frac{2 \epsilon_1 \epsilon_1^* \kappa_2}{(f')^2}$$

$$\kappa_2^* = \frac{1}{2} g \left( \frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*} \right) = \frac{\epsilon_1 \epsilon_1^* \kappa_2}{(f')^2} \quad (3.47)$$

bu şekilde elde edilir.  $B_1^*$  ve  $B_2^*$  şu şekilde tanımlansın.

$$B_1^* = \frac{-\epsilon_1 m}{\gamma} \quad (3.48)$$

$$B_2^* = -\frac{m \epsilon_1 \gamma \kappa_3}{f'} N - \frac{m \epsilon_1 \gamma \kappa_2}{f'} B_2 \quad (3.49)$$

$$\kappa_3^* = -\epsilon_2 g \left( \frac{dB_2^*}{ds^*}, B_1^* \right) = -\frac{\kappa_3}{(f')^2} \quad (3.50)$$

(ii)  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  eğri olsun. Kabul edelim ki  $\beta^*$  eğrisi timelike veya spacelike eğri olsun. Bu durumda, her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (3.51)$$

(3.51) nin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) T + a' N - a \epsilon_1 B_1 + b' B_2 \quad (3.52)$$

(3.52) denklemini  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa;

$$a' = 0 \text{ ve } b' = 0 \quad (3.53)$$

olur.(3.53), (3.52) de yerine yazılırsa

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) T - a \epsilon_1 B_1 \quad (3.54)$$

olarak elde edilir.

$$\delta = \frac{1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{-a \epsilon_1}{f'} \quad (3.55)$$

alırsak

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.56) in s ye göre türevi alınıp, (2.2) ve (2.1) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta + \gamma \kappa_2) N + \gamma' B_1 + \gamma \kappa_3 B_2 \quad (3.57)$$

bulunur. (3.57)  $T$  ve  $B_1$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa  $\delta' = \gamma' = 0$  dir.

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = (\delta + \gamma \kappa_2) N + \gamma \kappa_3 B_2 \quad (3.58)$$

(3.58) de  $\gamma = 0$  alınır;

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \delta N$$

Bu durumda  $N$  ile  $N^*$  lineer bağımlı olur.  $\gamma = 0$  ise (3.55) den  $a = 0$  olur. Bu durumda (3.54) den

$$T^* f' = (1 - \epsilon_2 b \kappa_3) T$$

olur. Bu ise  $T$  ve  $T^*$  in lineer bağımlı olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir.

$$\epsilon_1^* f'^2 = -2a \epsilon_1 (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) \quad (3.59)$$

(3.55) den

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3}{f'} \cdot \frac{f'}{-a \epsilon_1} = h$$

$$h = \frac{1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3}{-a \epsilon_1}$$

$$1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3 = -a \epsilon_1 h$$

$$1 + a \epsilon_1 h = \epsilon_1 a \kappa_2 + \epsilon_2 b \kappa_3 \quad (3.60)$$

elde edilir. (3.60) u (3.59) de yerine yazarsak;

$$\epsilon_1^* f'^2 = 2a^2 h \quad (3.61)$$

(3.58) kendisiyle iç çarpılırsa;

$$(\epsilon_2^*)^2 (f')^2 (\kappa_1^*)^2 \epsilon_2^* = (\delta + \gamma \kappa_2)^2 \epsilon_1 + \gamma^2 \kappa_3^2 \epsilon_2$$

$$\delta = -\frac{ah\epsilon_1}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{-a\epsilon_1}{f'} \quad (3.62)$$

olarak bulunur. (3.62) i ve (3.61) ı kullanarak

$$(f')^2 (\kappa_1^*)^2 = \frac{\epsilon_1^* \epsilon_2^*}{2h} [\epsilon_1 (h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2 \kappa_3^2]. \quad (3.63)$$

(3.58) den  $N^*$  yalnız bırakılırsa,

$$N^* = \frac{(\delta + \gamma \kappa_2)}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} N + \frac{\gamma \kappa_3}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} B_2$$

$$\lambda_5 = \frac{\delta + \gamma \kappa_2}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} = \frac{-a\epsilon_1 \epsilon_2^* (h + \kappa_2)}{(f')^2 \kappa_1^*} \text{ ve } \lambda_6 = \frac{\gamma \kappa_3}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} = \frac{-a\epsilon_1 \epsilon_2^*}{(f')^2 \kappa_1^*} \quad (3.64)$$

$$N^* = \lambda_5 N + \lambda_6 B_2. \quad (3.65)$$

$N^*$  bu şekilde yazılıp (3.65) nin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$-\epsilon_1^* f' \kappa_1^* T^* + \epsilon_3 f' \kappa_2^* B_1^* = (-\epsilon_1 \lambda_5 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_6 \kappa_3) T + \lambda_5' N - \epsilon_1 \lambda_5 B_1 + \lambda_6' B_2. \quad (3.66)$$

bulunur. (3.66)  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa,  $\lambda_5' = 0$  ve  $\lambda_6' = 0$  olur.

$$\mu = \frac{\lambda_5}{\lambda_6} = \frac{h + \kappa_2}{\kappa_3}$$

$$\mu \kappa_3 = h + \kappa_2 \quad (3.67)$$

bulunur. (3.66) de düzenleme yapılırsa;

$$\epsilon_3 f' \kappa_2^* B_1^* = \epsilon_1^* f' \kappa_1^* T^* - (\epsilon_1 \lambda_5 \kappa_2 + \epsilon_2 \lambda_6 \kappa_3) T - \epsilon_1 \lambda_5 B_1. \quad (3.68)$$

elde edilir. (3.54) ve (3.68) den

$$\epsilon_3 f' \kappa_2^* B_1^* = A(s) T + B(s) B_1. \quad (3.69)$$

$$A(s) = \frac{-a\epsilon_2^*}{2(f')^2 \kappa_1^*} [h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2]. \quad (3.70)$$

ve

$$B(s) = \frac{a\epsilon_2^*}{2h(f')^2 \kappa_1^*} [h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2]. \quad (3.71)$$

olur.  $T$  ile  $B_1$  lineer bağımlı olduğundan  $\epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* \neq 0$

$$h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2 \neq 0. \quad (3.72)$$

Tersine kabul edelim ki  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  Cartan null eğri ve  $\kappa_1 = 1$  (3.19) şartından  $a \neq 0, b, h \neq 0, \mu$ . Sonra biz  $\beta^*$  ı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s). \quad (3.73)$$

(3.73) nin  $s$  ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) T - a\epsilon_1 B_1. \quad (3.74)$$

bulunur. (3.74) den

$$\frac{d\beta^*}{ds} = -\epsilon_1 a [hT + B_1]. \quad (3.75)$$

elde edilir.(3.75) den

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = \sqrt{2\epsilon a^2 h} > 0. \quad (3.76)$$

$\epsilon = 1$  ise  $h > 0$ ,  $\epsilon = -1$  ise  $h < 0$  dir.

(3.75) ü yeniden yazarsak

$$T^* f' = -\epsilon_1 a [hT + B_1]. \quad (3.77)$$

olarak buluruz. (3.76) i (3.77) da yerine yazarsak

$$T^* = \frac{m\epsilon_1}{\sqrt{2\epsilon h}} [hT + B_1]. \quad (3.78)$$

$$g(T^*, T^*) = \frac{2m^2 \epsilon_1^2 h}{2\epsilon h} = \epsilon = \epsilon_1^* \quad (3.79)$$

bulunur. (3.78) nin  $s$  ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m\epsilon_1}{f' \sqrt{2\epsilon_1^* h}} [(h + \kappa_2) N + \kappa_3 B_2]. \quad (3.80)$$

olur. (3.80) u kullanarak

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}}{f'\sqrt{2\epsilon_1^*h}} \quad (3.81)$$

$p = \pm 1$  öyle ki  $p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2) > 0$  olur. (3.80) ve (3.81) den;

$$N^* = \frac{\epsilon_2^* dT^*}{\kappa_1^* ds^*} = \frac{m\epsilon_2^*\epsilon_1}{\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} [(h + \kappa_2)N + \kappa_3B_2]. \quad (3.82)$$

bulunur. (3.82) i kullanarak  $g(N^*, N^*) = p = \epsilon_2^* = \pm 1$ .

$$\lambda_7 = \frac{m\epsilon_2^*\epsilon_1(h + \kappa_2)}{\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} \text{ ve } \lambda_8 = \frac{m\epsilon_2^*\epsilon_1\kappa_3}{\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} \quad (3.83)$$

$$N^* = \lambda_7 N + \lambda_8 B_2. \quad (3.84)$$

(3.84) ün s ye göre türevi alınıp, (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$f' \frac{dN^*}{ds^*} = (-\epsilon_1\kappa_2\lambda_7 - \epsilon_2\kappa_3\lambda_8)T + \lambda_7'N - \epsilon_1\lambda_7B_1 + \lambda_8'B_2. \quad (3.85)$$

olarak elde edilir. (3.19) un 2.şartının s ye göre türevi alınırsa

$$\kappa_2'\kappa_3 - (h + \kappa_2)\kappa_3' = 0 \quad (3.86)$$

bulunur. (3.83) nin s ye göre türevi alınıp (3.86) kullanılırsa  $\lambda_7' = \lambda_8' = 0$  olur.

(3.83) ve (3.85) den

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m\epsilon_2^*}{f'\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} [(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)T - (h + \kappa_2)B_1]. \quad (3.87)$$

bulunur. (3.78) ve (3.81) den

$$\epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{pm\epsilon_1[\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2]}{2hf'\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} [hT + B_1]. \quad (3.88)$$

olur. (3.87) ve (3.88) den

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{\epsilon_2^*m[h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2]}{2hf'\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} [hT - B_1]. \quad (3.89)$$

elde edilir. Biz  $\kappa_2^*$  ı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\kappa_2^* = \frac{|h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2| \sqrt{|-2h|}}{2|h|f'\sqrt{p(\epsilon_1(h + \kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} > 0 \quad (3.90)$$

Sonra  $B_1^*$  birim vektörünü şu şekilde tanımlayalım.

$$B_1^* = \frac{\epsilon_3^*}{\kappa_2^*} \left[ \frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^* \kappa_1^* T^* \right] = \frac{\epsilon_3^* \epsilon_2^* m q}{\sqrt{2|h|}} [hT - B_1]. \quad (3.91)$$

$$q = \frac{\frac{h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2}{h}}{\left| \frac{h^2 - \kappa_2^2 + \kappa_3^2}{h} \right|} = \pm 1.$$

(3.91) den  $g(B_1^*, B_1^*) = \frac{-2h}{|-2h|} = \epsilon_3^* = \pm 1$ . Sonra biz  $B_2^*$  birim vektörünü şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$B_2^* = \lambda_8 N + \lambda_7 B_2$$

bu ise

$$B_2^* = \frac{m\epsilon_1\epsilon_2^*}{\sqrt{p(\epsilon_1(h+\kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} [\kappa_3 N + (h + \kappa_2) B_2]. \quad (3.92)$$

elde ederiz. (3.92) den  $g(B_2^*, B_2^*) = -p$ . Son olarak

$$\kappa_3^* = g\left(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*\right) = \frac{2\epsilon_3^* q \kappa_3 h}{f' \sqrt{|-2h|} \sqrt{p(\epsilon_1(h+\kappa_2)^2 + \epsilon_2\kappa_3^2)}} \neq 0.$$

Böylece  $\beta$ ,  $(1, 3)$ –Bertrand eğrisidir ve  $\beta$  nın  $(1, 3)$ –Bertrand eşlenik eğrisi timelike  $(1, 3)$ –normal düzleme sahip spacelike veya timelike eğridir.

(iii)  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  olan bir Cartan null eğri olsun. Kabul edelim ki  $\beta^*$  eğrisi pseudo null eğri olsun. Bu durumda, her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (3.93)$$

(3.93) nin  $s$  ye göre türevi alınıp (2.2) Frenet denklemi kullanılırsa,

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) T + a' N - a \epsilon_1 B_1 + b' B_2 \quad (3.94)$$

bulunur. (3.94) denklemi  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa  $a' = 0$  ve  $b' = 0$  olur.

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) T - a \epsilon_1 B_1 \quad (3.95)$$

$$\delta = \frac{(1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3)}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{-a \epsilon_1}{f'} \quad (3.96)$$

$$T^* = \delta T + \gamma B_1. \quad (3.97)$$

elde edilir. (3.97) nin s ye göre türevi alınıp (2.2) ve (2.3) Frenet denklemi kullanılırsa,

$$f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta + \gamma \kappa_2) N + \gamma' B_1 + \gamma \kappa_3 B_2. \quad (3.98)$$

elde edilir. (3.98)  $T$  ve  $B_1$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa  $\delta' = \gamma' = 0$  bulunur.

$$f' \kappa_1^* N^* = (\delta + \gamma \kappa_2) N + \gamma \kappa_3 B_2. \quad (3.99)$$

Kabul edelim ki  $\gamma = 0$  olsun. (3.99) den  $f' \kappa_1^* N^* = \delta N$  elde edilir. Bu ise  $N$  ve  $N^*$ ın lineer bağımlı olması anlamına gelir.  $N$  spacelike veya timelike,  $N^*$  null vektörler olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\gamma \neq 0$  dir.  $\gamma \neq 0$  olduğundan (3.96)dan  $a \neq 0$  ve  $h = \delta/\gamma$

$$1 - \epsilon_1 a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3 = -a h \epsilon_1. \quad (3.100)$$

$$1 + a h \epsilon_1 = \epsilon_1 a \kappa_2 + \epsilon_2 b \kappa_3.$$

(3.99) kendisiyle iç çarpılırsa;

$$0 = (\delta + \gamma \kappa_2)^2 \epsilon_1 + \gamma^2 \kappa_3^2 \epsilon_2. \quad (3.101)$$

bulunur.  $\gamma$  parantezine alırsak.

$$0 = (\gamma (h + \kappa_2))^2 \epsilon_1 + \gamma^2 \kappa_3^2 \epsilon_2. \quad (3.102)$$

elde edilir.  $\epsilon_2$  ile çarparsak

$$0 = -\gamma^2 (h + \kappa_2)^2 + \kappa_3^2 \gamma^2. \quad (3.103)$$

$$\kappa_3^2 = (h + \kappa_2)^2. \quad (3.104)$$

Tersine

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (3.105)$$

(3.105) ün s ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemi kullanılırsa,

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - a\epsilon_1\kappa_2 - b\epsilon_2\kappa_3)T - a\epsilon_1 B_1 \quad (3.106)$$

olarak bulunur. (3.100) ve (3.106) i kullanarak şunu yazabiliriz.

$$\frac{d\beta^*}{ds} = -ah\epsilon_1 T - a\epsilon_1 B_1 \quad (3.107)$$

$$g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds}\right) = 2a^2 h \text{ ise}$$

$$f' = \sqrt{2a^2 \epsilon h} \quad (3.108)$$

olur. (3.107) dan

$$T^* = \frac{m\epsilon_1}{\sqrt{2\epsilon h}} [hT + B_1] \quad (3.109)$$

$$\text{bulunur. } g(T^*, T^*) = \frac{2h}{2\epsilon h} = \epsilon = \epsilon_1^* = \pm 1$$

(3.109) in türevi alınırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m\epsilon_1}{f' \sqrt{2\epsilon h}} [(h + \kappa_2)N + \kappa_3 B_2] \quad (3.110)$$

$$N^* = \frac{m\epsilon_1}{f' \sqrt{2\epsilon h}} [(h + \kappa_2)N + \kappa_3 B_2] \quad (3.111)$$

Eğer biz  $\lambda_3$  ve  $\lambda_4$  ü şu şekilde alırsak;

$$\lambda_3 = \frac{m\epsilon_1 (h + \kappa_2)}{f' \sqrt{2\epsilon h}} \text{ ve } \lambda_4 = \frac{m\epsilon_1 \kappa_3}{f' \sqrt{2\epsilon h}} \quad (3.112)$$

buluruz. O zaman  $N^*$  ı şu şekilde yazabiliriz.

$$N^* = \lambda_3 N + \lambda_4 B_2 \quad (3.113)$$

(3.113) nin türevi alınırsa;

$$f' \frac{dN^*}{ds^*} = (-\epsilon_1 \kappa_2 \lambda_3 - \epsilon_2 \lambda_4 \kappa_3) T + \lambda_3' N - \epsilon_1 \lambda_3 B_1 + \lambda_4' B_2 \quad (3.114)$$

bulunur. (3.114) denklemini  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa  $\lambda_3' = 0$  ve  $\lambda_4' = 0$  olur.

$$f' \frac{dN^*}{ds^*} = (-\epsilon_1 \kappa_2 \lambda_3 - \epsilon_2 \lambda_4 \kappa_3) T - \epsilon_1 \lambda_3 B_1 \quad (3.115)$$

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}{(f')^2 \sqrt{2\epsilon h}} T - \frac{m(h + \kappa_2)}{(f')^2 \sqrt{2\epsilon h}} B_1 \quad (3.116)$$

$$g\left(\frac{dN^*}{ds^*}, \frac{dN^*}{ds^*}\right) = -\frac{2(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)(h + \kappa_2)}{(f')^4 (\sqrt{2\epsilon h})^2} \quad (3.117)$$

olur.

$$\left\| \frac{dN^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{2q(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}(h + \kappa_2)}{(f')^2 \sqrt{2\epsilon h}} > 0 \quad (3.118)$$

bulunur.

$$B_1^* = \frac{m(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}{\sqrt{2q(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}(h + \kappa_2)} T - \frac{m(h + \kappa_2)}{\sqrt{2q(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}(h + \kappa_2)} \quad (3.119)$$

$$g(B_1^*, B_1^*) = -q = \epsilon_2^*.$$

$B_2^*$  ı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$B_2^* = \frac{f' \sqrt{2\epsilon h}}{2m\epsilon_1} \left[ \frac{\epsilon_1}{h + \kappa_2} N + \frac{\epsilon_2}{\kappa_3} B_2 \right] \quad (3.120)$$

$$g(B_2^*, B_2^*) = 0, \quad g(N^*, B_2^*) = 1.$$

$$\kappa_1^* = g(T^{*'}, B_2^*) = 1. \quad (3.121)$$

$$\kappa_2^* = \epsilon_2 g(N^{*'}, B_1^*) = -\frac{\epsilon_2 q \sqrt{2q(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}(h + \kappa_2)}{(f')^2 \sqrt{2\epsilon h}} \quad (3.122)$$

$$\kappa_3^* = g(B_1^{*'}, B_2^*) = \frac{\sqrt{2\epsilon h}(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)(h + \kappa_2)}{2\epsilon_1 (h + \kappa_2) \sqrt{2q(\kappa_3^2 - h\kappa_2 - \kappa_2^2)}(h + \kappa_2)} \quad (3.123)$$

**Sonuç 3.1**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  de Cartan null eğri ile  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 \neq 0, \kappa_3 \neq 0$ . Eğer  $\beta, (1, 3)$ -Bertrand Cartan null eşlenik eğrisi ise öyle ki  $\kappa_2, \kappa_3$  sabitleri için  $|\kappa_2| \neq |\kappa_3|$ .

**Örnek 3.1**  $\mathbb{E}_2^4$  de Cartan null eğri düşünelim. Denklemini;

$$\beta(s) = \left( \frac{\sinh(As)}{\sqrt{2A}}, \frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2B}}, \frac{\cosh(As)}{\sqrt{2A}}, \frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2B}} \right)$$

$\beta$  nın Frenet çatısı ;

$$\begin{aligned} T(s) &= \left( \frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}} \right), \\ N(s) &= \left( \frac{A}{\sqrt{2}} \sinh(As), \frac{B}{\sqrt{2}} \cosh(Bs), \frac{A}{\sqrt{2}} \cosh(As), \frac{B}{\sqrt{2}} \sinh(Bs) \right), \\ B_1(s) &= \left( -\frac{\cosh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\sinh(Bs)}{\sqrt{2}}, -\frac{\sinh(As)}{\sqrt{2}}, \frac{\cosh(Bs)}{\sqrt{2}} \right), \\ B_2(s) &= \left( \frac{B}{\sqrt{2}} \sinh(As), \frac{A}{\sqrt{2}} \cosh(Bs), \frac{B}{\sqrt{2}} \cosh(As), \frac{A}{\sqrt{2}} \sinh(Bs) \right). \end{aligned}$$

$A = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$  ve  $B = \sqrt{-1 + \sqrt{2}}$ .  $\beta$  nin eğrilikleri

$$\kappa_1(s) = 1, \kappa_2(s) = -\sqrt{2}, \kappa_3 = 1.$$

Eğer  $a = -\sqrt{2}, b = 1, \gamma = \sqrt[4]{2}$  ve  $\mu = -\sqrt{2}$ . Teorem 3.2 nin (i) şikkından,

$$\beta^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \sinh(As), & \frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}} \cosh(Bs), & -\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \cosh(As), \\ & \frac{1}{\sqrt{-1+\sqrt{2}}} \sinh(Bs) & \end{pmatrix}.$$

Eğer  $a = \sqrt{2}, b = -2, h = -\sqrt{2}/2$  ve  $\mu = -3\sqrt{2}/2$ , Teorem 3.2 nin (ii) şikkından,

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \sinh(As), & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}} \cosh(Bs), & \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \cosh(As), \\ & \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}} \sinh(Bs) & \end{pmatrix}$$

Eğer  $a = -1, b = 2\sqrt{2}$  ve  $h = 1 + \sqrt{2}$  Teorem 3.2 nin (iii) şartından

$$\beta^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \sinh(As), & \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}} \cosh(Bs), & \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \cosh(As), \\ & \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}} \sinh(Bs) & \end{pmatrix}$$

Aşağıdaki teoremin ispatı  $\mathbb{E}^3$  uzayında ifade edilen eğrinin esas teoremine benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 3.3**  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3$  ( $s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon$ ) aralığında diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun.  $p_0, \mathbb{E}_2^4$  de bir nokta ve  $\{T^0, N^0, B_1^0, B_2^0\}$  da  $\mathbb{E}_2^4$  bir pseudo-ortonormal bazı olsun öyle ki;

$$g(N^0, N^0) = 1, \quad g(B_2^0, B_2^0) = -1, \quad g(T^0, T^0) = g(B_1^0, B_1^0) = 0, \quad g(T^0, B_1^0) = 1,$$

$$g(T^0, N^0) = g(T^0, B_2^0) = g(N^0, B_1^0) = g(N^0, B_2^0) = g(B_1^0, B_2^0) = 0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durumda  $\mathbb{E}_2^4$  de  $\beta(s_0) = p_0$  pseudo yay uzunluğu parametresi  $s$  ve eğrilikleri  $\kappa_1 = 1, \kappa_2, \kappa_3$  olan Frenet çatısı  $\{T, N, B_1, B_2\}$

Bu durumda  $\mathbb{E}_2^4$  de bir değerli  $\beta(s)$  Cartan null eğrisi vardır.  $\beta(s_0) = p_0$ , pseudo yay uzunluğu parametresi  $s$  ve eğrilikleri ve Frenet çatısı

$$\kappa_1 = 1, \kappa_2, \kappa_3 \quad T(s_0) = T^0, \quad N(s_0) = N^0, \quad B_1(s_0) = B_1^0, \quad B_2(s_0) = B_2^0.$$

şartını sağlayan bir tek  $\beta(s)$  Cartan null eğrisi vardır.

**Örnek 3.2**  $\kappa_3$ , sabit olmayan herhangi bir fonksiyon olsun.

$$\kappa_2 = \kappa_3 + 1, \quad \mu = \epsilon_1 = 1, \quad h = \epsilon_2 = -1, \quad a = b = \frac{1}{2}.$$

olarak alınırsa teorem 3.2 nin (ii) şıkkı sağlanır. Teorem 3 den  $\mathbb{E}_2^4$  de sabit olmayan  $\kappa_2, \kappa_3$  eğrilikle (1,3)-Cartan null Bertrand eğrisinin var olduğu bulunabilir. Benzer şekilde

$$\kappa_2 = \kappa_3 + 1, \quad \epsilon_1 = 1, \quad h = \epsilon_2 = -1, \quad a = b = \frac{1}{2}.$$

Bu durumda Teorem 3.2 nin (iii) şartı sağlanır. Teorem 3 kullanılırsa,  $\mathbb{E}_2^4$  de sabit olmayan  $\kappa_2, \kappa_3$  eğrilik fonksiyonlarına sahip (1,3)-Cartan null Bertrand eğrisinin var olduğu gösterilebilir.



#### 4. 4-BOYUTLU 2-İNDEKSLİ YARI-ÖKLİDYEN UZAYDA (1, 3) - PSEUDO NULL BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde  $\mathbb{R}_2^4$  uzayında bir pseudo null eğrinin genelleştirilmiş Bertrand eşleniği araştırılacaktır. İlk olarak pseudo null eğrinin genelleştirilmiş Bertrand eşleniği tanımını verelim.

**Tanım 4.1**  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}_2^4$  eğriliği  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 \neq 0, \kappa_3$  olan bir pseudo null eğri ve  $\beta^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}_2^4$  eğri olsun. Eğer  $\beta$  ve  $\beta^*$  eğrilerinin karşılıklı  $s \in I$  ve  $s^* \in I^*$  noktalarında asli normal vektörleri eşit ise  $\beta$  bir Bertrand eğrisidir. Bu durumda  $\beta^*$  eğrisi  $\beta$  eğrisinin Bertrand eşleniğidir. Burada  $\beta$  nın her bir  $\beta(s)$  noktasını  $\beta^*$  eğrisinin  $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$  noktasına eşleyen  $f : I \rightarrow I^*$  regüler  $C^\infty$  dönüşümü vardır.

**Teorem 4.1**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  pseudo null eğri olsun. Eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 \neq 0, \kappa_3 \neq 0$  olmak üzere  $\beta$  pseudo null eğrisinin Bertrand eşlenik eğrisi sadece kendisidir.

**İspat 4.1**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  pseudo null eğri ve  $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  pseudo null Bertrand eşleniği olsun.  $\beta$  ve  $\beta^*$  in asli normalleri karşılıklı noktalarda

$s$  ve  $s^* = f(s)$   $f : I \rightarrow I^*$  normal  $C^\infty$  haritası öyle ki her bir nokta karşılıklı  $\beta(s)$  ve  $\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s))$ ,  $\beta^*$  her  $s \in I$  için. Biz bunu yazabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + \lambda(s)N(s). \quad (4.1)$$

Her  $s \in I$ ,  $\lambda(s)$  ise  $C^\infty$  fonksiyon olmak üzere (4.1) in  $s$  ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'T^* = T + \lambda'N + \lambda\kappa_2B_1 \quad (4.2)$$

elde edilir. (4.2) nin  $s$  ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$f''T^* + (f')^2 N^* = \left(1 + \lambda'' + \lambda\kappa_2\kappa_3\right) N + \left(\lambda'\kappa_2 + (\lambda\kappa_2)'\right) B_1 - \epsilon_2\lambda\kappa_2^2B_2 \quad (4.3)$$

bulunur. (4.3)  $N$  ile iç çarpılırsa

$$\lambda\kappa_2^2 = 0 \quad (4.4)$$

(4.4) den  $\lambda = 0$  olduğu görülür.  $\beta = \beta^*$  dir. Bu bize  $\beta$ 'nin pseudo null Bertrand eşlenik eğrisinin sadece kendisi olduğunu gösterir.

#### 4.1. $\mathbb{E}_2^4$ de (1,3) - PSEUDO NULL BERTRAND EĞRİLERİ

Bu bölümde  $\mathbb{E}_2^4$  de (1,3)-pseudo null Bertrand eğrileri göz önüne alınacaktır. Ayrıca bir pseudo null eğrinin (1,3)-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şartlar elde edilecektir.

**Tanım 4.2**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  bir  $C^\infty$  özel Frenet eğrisi olsun. Asli normal vektörü  $N(s)$ , ikinci binormal vektörü  $B_2(s)$  tarafından gerilen düzlem,  $s \in I$  noktasında  $\beta$  eğrisinin (1,3)-normal düzlemidir.

**Tanım 4.3**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  ve  $\beta^* : I^* \rightarrow \mathbb{E}_2^4$   $C^\infty$  Frenet eğrisi olsun. Eğer  $\beta$  eğrisinin Frenet (1,3) –Frenet normal düzlemine karşılık gelen noktaları  $\beta^*$  ın (1,3) –normal düzlemini içerirse,  $\beta$  bir (1,3) –Bertrand eğrisi ve  $\beta^*$ ,  $\beta$  eğrisinin (1,3) –Bertrand eşlenik eğrisi olarak adlandırılır.

$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  Frenet çatısı  $\{T, N, B_1, B_2\}$  ve eğrilikleri  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  olan bir (1,3) –pseudo null Bertrand eğrisi ve  $\beta^* : I^* \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$ , Frenet çatısı  $\{T^*, N^*, B_1^*, B_2^*\}$  ve eğrilikleri  $\kappa_1^*, \kappa_2^*, \kappa_3^*$  olan  $\beta$  nin (1,3) –Bertrand eşlenik eğrisidir.

**Teorem 4.2**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 \neq 0$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda  $\beta$ , Bertrand eşleniği  $\beta^*$  olan bir (1,3)-Bertrand eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan birinin sağlanmasıdır

(i)

$$a\kappa_2 + \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0, \epsilon_1 b - \kappa_3(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) = 1, \kappa_2 \neq 0, \kappa_3 = \pm 1 \quad (4.5)$$

olacak şekilde  $\beta^*$  eşlenik eğrisi  $\mathbb{E}_2^4$  de bir pseudo null eğridir.

(ii)

$$a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0, \epsilon_1 b + h(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) = 1 \quad (4.6)$$

$$- \epsilon_2 \mu \kappa_2 = h + \kappa_3, 1 + h^2 + 2h\kappa_3 \neq 0 \quad (4.7)$$

olacak şekilde  $a, b, h \neq \pm 1, \mu \neq 0$  reel sayıları vardır. Bu durumda  $\beta^*$  eşlenik eğrisi  $\mathbb{E}_2^4$  de bir spacelike veya timelike eğridir.

(iii)

$$a\kappa_2 + \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0, \epsilon_1 b + h(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) = 1 \quad (4.8)$$

olacak şekilde  $a, b, h \neq \pm 1$  reel sayıları vardır. Bu durumda  $\beta^*$  eşlenik eğrisi  $\mathbb{E}_2^4$  de bir Cartan null eğridir.

**İspat 4.2** (i)  $\beta^*$  Pseudo null eğri olsun.  $\beta^*$  şu şekilde yazabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (4.9)$$

Her  $s \in I$ ,  $a(s)$  ve  $b(s)$   $C^\infty$  fonksiyon olmak üzere (4.9) ün s ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^*f' = (1 - \epsilon_1 b)T + a'N + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)B_1 + b'B_2 \quad (4.10)$$

olur. (4.10) ayrı ayrı  $N$  ve  $B_2$  ile iç çarpılırsa;

$$a' = 0 \text{ ve } b' = 0 \quad (4.11)$$

elde edilir. (4.11), (4.10) da yerine yazılırsa;

$$T^*f' = (1 - \epsilon_1 b)T + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)B_1 \quad (4.12)$$

bulunur. (4.12) eşitliği kendisiyle iç çarpılırsa

$$\epsilon_1^*(f')^2 = \epsilon_1(1 - \epsilon_1 b)^2 + \epsilon_2(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 \neq 0 \quad (4.13)$$

elde edilir. Eğer  $\delta$  ve  $\gamma$  yı şu şekilde alırsak;

$$\delta = \frac{1 - \epsilon_1 b}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3}{f'} \quad (4.14)$$

bulunur. O zaman  $T^*$  ı şu şekilde yazabiliriz.

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \quad (4.15)$$

sonra (4.15) in s ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$f'N^* = \delta'T + (\delta + \gamma\kappa_3)N + \gamma'B_1 - \epsilon_2\kappa_2\gamma B_2 \quad (4.16)$$

elde edilir. (4.16) ayrı ayrı  $T$  ve  $B_1$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa

$$\delta' = 0 \text{ ve } \gamma' = 0 \quad (4.17)$$

Varsayalım ki  $\gamma = 0$  olsun. Buna göre (4.15) den  $N$  ve  $N^*$  lineer bağımlı olurlar. Bu ise önceki teoremle çelişir. Bu nedenle  $\gamma \neq 0$

(4.14) den

$$a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0 \quad (4.18)$$

ve

$$1 = \epsilon_1 b + h(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \quad (4.19)$$

olarak bulunur. (4.17) yi (4.16) da yerine yazarsak

$$f'N^* = (\delta + \gamma\kappa_3)N + -\epsilon_2\kappa_2\gamma B_2 \quad (4.20)$$

(4.20) yi kendisiyle iç çarparsak

$$0 = 2\epsilon_2\kappa_2\gamma + (\delta + \gamma\kappa_3) \quad (4.21)$$

elde edilir. (4.21) den

$$h = -\kappa_3 \quad (4.22)$$

olur. (4.22) yı (4.19) da yerine yazarsak

$$1 = \epsilon_1 b - \kappa_3(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \quad (4.23)$$

bulunur. (4.23) ve (4.13) den

$$(f')^2 = \epsilon_1^*(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 (\epsilon_1\kappa_3^2 + \epsilon_2) \quad (4.24)$$

olarak elde edilir. (4.24) den  $\kappa_3 \neq \pm 1$  (4.22) yı (4.20) de yerine yazarsak

$$N^* = -\frac{\epsilon_2\kappa_2\gamma}{f'}B_2 \quad (4.25)$$

sonra (4.25) in türevini alırsak

$$\kappa_2^* B_1^* f' = \left(-\frac{\epsilon_2\kappa_2\gamma}{f'}\right)' B_2 - \frac{\kappa_2\gamma}{f'}T + \frac{\kappa_2\gamma\kappa_3}{f'}B_1 \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) yı  $N$  ile çarparsak

$$0 = \left(-\frac{\epsilon_2\kappa_2\gamma}{f'}\right)' B_2$$

bulunur. Türevi 0 olduğuna göre kendisi sabittir.

$$\frac{\kappa_2}{f'} = \text{sabit} \quad (4.27)$$

(4.25) de  $\frac{\kappa_2}{f'} = \text{sabit}$  ve  $\kappa_2, \kappa_3$  ü sabit alarak türev alalım. Kabul edelim ki  $\beta$ , s yay uzunluğu parametresi ile parametrize edilmiş bir pseudo null eğri olsun.  $\kappa_1 = 1$  ve  $\kappa_2 = \kappa_3 \neq 0$ .

(4.5) den  $a$  ve  $b$  sabit reel sayı olmak üzere,  $\beta$  yı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \quad (4.28)$$

olarak bulunur. (4.28) in s ye göre türevi alınıp (2.3) frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - \epsilon_1 b)T + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)B_1 \quad (4.29)$$

olur. (4.29) dan

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = m_1(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|} \quad (4.30)$$

(4.30) u (4.29) da yerine yazarsak

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \frac{m_1}{\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}} (-\kappa_3 T + B_1) \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.31) in s ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d^2\beta^*}{ds^{*2}} = \frac{-m_1\epsilon_2\kappa_2}{f'\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}} B_2 \quad (4.32)$$

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}} (-\kappa_3 T + B_1) \quad (4.33)$$

$$N^* = \frac{-m_1\epsilon_2\kappa_2}{f'\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}} B_2 \quad (4.34)$$

olarak bulunur.  $g(T^*, T^*) = \frac{\epsilon_1(\kappa_3^2 - 1)}{|\kappa_3^2 - 1|} = \epsilon_1^* = \pm 1$  ve  $g(N^*, N^*) = 0$  dır.

(4.32) nin s ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d^3\beta^*}{ds^{*3}} = -\frac{m_1\kappa_2}{(f')^2\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}} (T - \kappa_3 B_1) \quad (4.35)$$

Buradan kolayca görebiliriz ki,

$$g\left(\frac{d^3\beta^*}{ds^{*3}}, \frac{d\beta^*}{ds^*}\right) = 0 \text{ ve } g\left(\frac{d^3\beta^*}{ds^{*3}}, \frac{d^2\beta^*}{ds^{*2}}\right) = 0$$

olur. (4.35) kendisiyle iç çarpılırsa;

$$g\left(\frac{d^3\beta^*}{ds^{*3}}, \frac{d^3\beta^*}{ds^{*3}}\right) = \frac{\kappa_2^2}{(f')^4} \neq 0$$

olarak bulunur. Sonra biz  $B_1^*$  ı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$B_1^* = \frac{-m_1m_2}{\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}}(T - \kappa_3B_1)$$

$$m_2 = \frac{\kappa_2}{|\kappa_2|}. \text{ Buradan } g(B_1^*, B_1^*) = \epsilon_2 \frac{(\kappa_3^2 - 1)}{|\kappa_3^2 - 1|} = \epsilon_2^*$$

$$B_2^* = \frac{f'\sqrt{|\kappa_3^2 - 1|}}{-m_1\epsilon_2\kappa_2}N$$

Buradan  $g(B_2^*, N^*) = 1$ .

Şunları kolayca hesaplayabiliriz.

$$\kappa_1^* = g\left(\frac{dT^*}{ds^*}, B_2^*\right) = 1,$$

$$\kappa_2^* = \epsilon_2^* g\left(\frac{dN^*}{ds^*}, B_1^*\right) = \frac{m_2\kappa_2}{f'},$$

$$\kappa_3^* = g\left(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*\right) = m_2\kappa_3.$$

Eğer  $\beta$ , (1, 3)-Bertrand eğrisi ise (1, 3)-Bertrand eşlenik eğrisi pseudo null eğridir.

(ii)  $\beta^*$ ,  $\mathbb{E}_2^4$  de timelike veya spacelike bir eğri olsun.

$\beta^*$  eğrisini şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \quad (4.36)$$

Her  $s \in I$ ,  $a(s)$  ve  $b(s)$   $C^\infty$  fonksiyon olmak üzere (4.36) nin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$T^*f' = (1 - \epsilon_1b)T + a'N + (a\kappa_2 - \epsilon_2b\kappa_3)B_1 + b'B_2 \quad (4.37)$$

olarak bulunur. (4.37)  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa;

$$a' = 0 \text{ ve } b' = 0 \quad (4.38)$$

olur. (4.38) , (4.37) de yerine yazılırsa;

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 b) T + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) B_1 \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.39) kendisiyle iç çarpılırsa

$$\epsilon_1^* (f')^2 = \epsilon_1 (1 - \epsilon_1 b)^2 + \epsilon_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 \neq 0 \quad (4.40)$$

$$\delta = \frac{1 - \epsilon_1 b}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3}{f'} \quad (4.41)$$

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \quad (4.42)$$

(4.42) nin s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta + \gamma \kappa_3) N + \gamma' B_1 - \epsilon_2 \kappa_2 \gamma B_2 \quad (4.43)$$

olarak bulunur. (4.43)  $T$  ve  $B_1$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa;

$$\delta' = 0 \text{ ve } \gamma' = 0 \quad (4.44)$$

$\gamma \neq 0$  olmalı. Çünkü  $\gamma = 0$  olursa  $T$  ve  $T^*$  lineer bağımlı olur.

$\gamma \neq 0$  ise (4.41) den

$$a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0 \quad (4.45)$$

ve

$$1 = \epsilon_1 b + h (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \quad (4.46)$$

$$h = \frac{1 - \epsilon_1 b}{a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3}$$

elde edilir. (4.44) ü (4.43) de yerine yazarsak;

$$\epsilon_2^* f' \kappa_1^* N^* = (\delta + \gamma \kappa_3) N - \epsilon_2 \kappa_2 \gamma B_2 \quad (4.47)$$

bulunur. (4.47) kendisiyle iç çarpılırsa

$$\epsilon_2^* (f')^2 (\kappa_1^*)^2 = -2\epsilon_2 \kappa_2 \gamma (\delta + \gamma \kappa_3) \quad (4.48)$$

sonra (4.41) i (4.48) de yerine yazarsak

$$\epsilon_2^* (f')^2 (\kappa_1^*)^2 = \frac{-2\epsilon_2 \kappa_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2}{(f')^2} [h + \kappa_3] \quad (4.49)$$

buluruz. (4.46) yı (4.40) da yerine yazılırsa;

$$\epsilon_1^*(f')^2 = (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 [\epsilon_1 h^2 + \epsilon_2] \quad (4.50)$$

(4.46) da  $h \neq \pm 1$

(4.50) , (4.49) da yerine yazılırsa;

$$\epsilon_2^*(f')^2 (\kappa_1^*)^2 = \frac{-2\epsilon_1^* \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}{\epsilon_1 h^2 + \epsilon_2} \quad (4.51)$$

bulunur. (4.51) da  $h + \kappa_3 \neq 0$

$$\lambda_1 = \frac{\delta + \gamma \kappa_3}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} \text{ ve } \lambda_2 = \frac{-\epsilon_2 \kappa_2 \gamma}{\epsilon_2^* f' \kappa_1^*} \quad (4.52)$$

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \quad (4.53)$$

(4.53) ün s ye göre türevi alınıp (2.1) ve (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$-\epsilon_1^* f' \kappa_1^* T^* + \epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* = -\epsilon_1 \lambda_2 T + \lambda_1' N + (\lambda_1 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_2 \kappa_3) B_1 + \lambda_2' B_2 \quad (4.54)$$

eşitliği elde edilir. (4.54)  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa;

$$\lambda_1' = 0 \text{ ve } \lambda_2' = 0 \quad (4.55)$$

Eğer (4.41) , (4.52) de yerine yazılırsa;

$$\lambda_1 = \frac{(h + \kappa_3) (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)}{\epsilon_2^* (f')^2 \kappa_1^*} \quad (4.56)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\epsilon_2 \kappa_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)}{\epsilon_2^* (f')^2 \kappa_1^*} \quad (4.57)$$

olarak bulunur.

$$\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h + \kappa_3}{-\epsilon_2 \kappa_2}$$

ise

$$-\epsilon_2 \mu \kappa_2 = h + \kappa_3 \quad (4.58)$$

Biz (4.55) i (4.54) de yerine yazarsak

$$-\epsilon_1^* f' \kappa_1^* T^* + \epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* = -\epsilon_1 \lambda_2 T + (\lambda_1 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_2 \kappa_3) B_1 \quad (4.59)$$

(4.39) ve (4.59) dan

$$\epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* = A(s)T + B(s)B_1 \quad (4.60)$$

$$A(s) = \frac{-\epsilon_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \kappa_2}{\epsilon_2^* (f')^2 \kappa_1^* (\epsilon_1 h^2 + \epsilon_2)} [1 + h^2 + 2h\kappa_3] \quad (4.61)$$

$$B(s) = \frac{-\epsilon_2 (a\kappa_2 - b\kappa_3) \kappa_2 h}{\epsilon_2^* (f')^2 \kappa_1^* (\epsilon_1 h^2 + \epsilon_2)} [1 + h^2 + 2h\kappa_3] \quad (4.62)$$

olarak bulunur.  $\epsilon_3^* f' \kappa_2^* B_1^* \neq 0$  dır. teoremin şartından dolayı

$$1 + h^2 + 2h\kappa_3 \neq 0 \quad (4.63)$$

Tersine  $\beta$  pseudo null eğri  $s$  yay uzunluğu parametresi ile parametrize edilmiş olsun.  $\kappa_1 = 1, \kappa_2, \kappa_3 \neq 0$  (4.6) şartından  $a, b, h \neq \pm 1, \mu \neq 0$  sabit reel sayıları vardır. Biz  $\beta^*$  ı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta(s) + aN(s) + bB_2(s) \quad (4.64)$$

(4.64) ün  $s$  ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - \epsilon_1 b)T + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)B_1 \quad (4.65)$$

olur. (4.65) den

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) [hT + B_1] \quad (4.66)$$

bulunur. (4.66) dan biz

$$f' = \frac{ds^*}{ds} = \left\| \frac{d\beta^*}{ds} \right\| = m_1 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \sqrt{m_2 (h^2 - 1)} > 0 \quad (4.67)$$

$m_1 \neq \pm 1$  öyle ki  $m_1 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) > 0$  ve  $m_2 = \pm 1$  öyle ki  $m (h^2 - 1) > 0$ .

Şimdi (4.66) yı yeniden yazalım.

$$T^* = \frac{m_1}{\sqrt{m_2 (h^2 - 1)}} [hT + B_1]. \quad (4.68)$$

$g(T^*, T^*) = \epsilon_1 m_2 = \epsilon_1^*$  (4.68) un  $s$  ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1}{f' \sqrt{m_2 (h^2 - 1)}} [(h + \kappa_3)N - \epsilon_2 \kappa_2 B_2]. \quad (4.69)$$

olarak elde edilir. (4.69) u kullanarak

$$\kappa_1^* = \left\| \frac{dT^*}{ds^*} \right\| = \frac{\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}}{f'\sqrt{m_2(h^2-1)}} \quad (4.70)$$

$m_3 \neq \pm 1$  öyle ki

$$2m_3\kappa_2(h+\kappa_3) > 0$$

sağlanır. (4.69) ve (4.70) den

$$N^* = \frac{\epsilon_2^*}{\kappa_1^*} \frac{dT^*}{ds^*} = \frac{m_1\epsilon_2^*}{\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}} [(h+\kappa_3)N - \epsilon_2\kappa_2B_2]. \quad (4.71)$$

olarak bulunur. (4.69) u kullanarak  $g(N^*, N^*) = -\epsilon_2m_3 = \epsilon_2^*$ .

Eğer biz  $\delta_1$  ve  $\gamma_1$  şöyle alırsak;

$$\delta_1 = \frac{m_1\epsilon_2^*(h+\kappa_3)}{\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}} \text{ ve } \gamma_1 = \frac{-m_1\epsilon_2^*\epsilon_2\kappa_2}{\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}} \quad (4.72)$$

O zaman  $N^*$  ı şu şekilde yazabiliriz.

$$N^* = \delta_1N + \gamma_1B_2. \quad (4.73)$$

(4.73) ün s ye göre türevi alınıp (2.3) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$f' \frac{dN^*}{ds^*} = -\epsilon_1\gamma_1T + \delta_1'N + (\delta_1\kappa_2 - \epsilon_2\gamma_1\kappa_3)B_1 + \gamma_1'B_2 \quad (4.74)$$

eşitliği elde edilir. (4.6) nin s ye türevini alırsak;

$$\kappa_3'\kappa_2 - \kappa_2'(h+\kappa_3) = 0 \quad (4.75)$$

bulunur. (4.72) nin s ye türevi alınıp (4.75) kullanılırsa;

$$\delta_1' = 0 \text{ ve } \gamma_1' = 0 \quad (4.76)$$

(4.72) ve (4.76) , (4.74) de yerine yazılırsa

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{-m_1\epsilon_2^*\kappa_2}{f'\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}}T + \frac{-m_1\epsilon_2^*\kappa_2(h+2\kappa_3)}{f'\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}}B_1. \quad (4.77)$$

(4.68) ve (4.70) den

$$\epsilon_1^*\kappa_1^*T^* = \frac{\epsilon_1m_1\sqrt{2m_3\kappa_2(h+\kappa_3)}}{f'm_2(h^2-1)} [hT + B_1]. \quad (4.78)$$

olur. (4.77) ve (4.78)

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^* \kappa_1^* T^* = \frac{P(s)}{R(s)} T + \frac{Q(s)}{R(s)} B_1 \quad (4.79)$$

$$P(s) = m_1 m_3 \epsilon_1 \kappa_2 [1 + h^2 + 2h\kappa_3] \neq 0 \quad (4.80)$$

$$Q(s) = m_1 m_3 \epsilon_1 \kappa_2 h [1 + h^2 + 2h\kappa_3] \neq 0 \quad (4.81)$$

$$R(s) = f'(h^2 - 1) \sqrt{2m_3 \kappa_3 (h + \kappa_3)} \neq 0 \quad (4.82)$$

$\kappa_2^*$  ı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\kappa_2^* = \frac{|\kappa_2 + \kappa_2 h^2 + 2h\kappa_2 \kappa_3|}{f' \sqrt{2m_3 \kappa_2 (h + \kappa_3)} \sqrt{m_2 (h^2 - 1)}} \quad (4.83)$$

Sonra  $B_1^*$  birim vektörü şöyle tanımlayalım.

$$B_1^* = \frac{\epsilon_3^*}{\kappa_2^*} \left[ \frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^* \kappa_1^* T^* \right] = \frac{m_1 m_2 m_3 m_4 \epsilon_1 \epsilon_3^*}{\sqrt{m_2 (h^2 - 1)}} [T + hB_1]. \quad (4.84)$$

$$m_4 = \frac{|\kappa_2 + \kappa_2 h^2 + 2h\kappa_2 \kappa_3|}{(\kappa_2 + \kappa_2 h^2 + 2h\kappa_2 \kappa_3)} = \pm 1 \quad (4.85)$$

olur. (4.84) den  $g(B_1^*, B_1^*) = \epsilon_2 m_2 = \epsilon_3^*$ .

Sonra,  $B_2^* = \delta_1 N - \gamma_1 B_2$ .

$$B_2^* = \frac{m_1 \epsilon_2^*}{\sqrt{2m_3 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [(h + \kappa_3) N + \epsilon_2 \kappa_2 B_2]. \quad (4.86)$$

(4.86) den  $g(B_2^*, B_2^*) = \epsilon_2 m_3 = \epsilon_4^*$ .

$$\kappa_3^* = g\left(\frac{dB_1^*}{ds^*}, B_2^*\right) = \frac{m_4 \kappa_2 (1 - h^2)}{f' \sqrt{m_2 (h^2 - 1)} \sqrt{2m_3 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} \neq 0. \quad (4.87)$$

Sonra  $\beta$ , (1, 3)-Bertrand eğrisi ise (1, 3)-Bertrand eşleniği spacelike veya timelike eğridir.

(iii)  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  olan bir Pseudo null eğri olsun. Kabul edelim ki  $\beta^*$  Cartan null eğri olsun. Bu durumda, her  $s^* \in I^*$  ve her  $s \in I$  için  $\beta^*$  aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (4.88)$$

(4.88) nin s ye göre türevi alınıp (2.2) Frenet denklemi kullanılırsa,

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 b) T + a' N + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) B_1 + b' B_2 \quad (4.89)$$

elde edilir. (4.89) denklemi  $N$  ve  $B_2$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa  $a' = 0$  ve  $b' = 0$  olur.

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 b) T + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) B_1 \quad (4.90)$$

(4.90) dan

$$(1 - \epsilon_1 b)^2 = (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 \quad (4.91)$$

$$\delta = \frac{1 - \epsilon_1 b}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3}{f'} \quad (4.92)$$

$T^*$  şu şekilde yazıp

$$T^* = \delta T + \gamma B_1. \quad (4.93)$$

(4.93) nin s ye göre türevi alınıp (2.2) ve (2.3) Frenet denklemi kullanılırsa,

$$f'^* N^* = \delta' T + (\delta + \gamma\kappa_3) N + \gamma' B_1 - \gamma\epsilon_2\kappa_2 B_2. \quad (4.94)$$

(4.94)  $T$  ve  $B_1$  ile ayrı ayrı iç çarpılırsa  $\delta' = \gamma' = 0$  bulunur.

$$f' N^* = (\delta + \gamma\kappa_3) N - \gamma\epsilon_2\kappa_2 B_2. \quad (4.95)$$

Kabul edelim ki  $\gamma = 0$  olsun. (4.95) den  $f' N^* = \delta N$  elde edilir. Bu ise  $N$  ve  $N^*$ ın lineer bağımlı olması anlamına gelir.  $N$  spacelike veya timelike,  $N^*$  null vektörler olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla  $\gamma \neq 0$  dır.  $\gamma \neq 0$  olduğundan (4.92) den  $a \neq 0$  ve  $h = \delta/\gamma$

$$a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0 \quad (4.96)$$

$$1 - \epsilon_1 b = h (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3). \quad (4.97)$$

(4.91) dan  $h = \pm 1, b \neq \pm 1$

(4.95) kendisiyle iç çarpılırsa;

$$\epsilon_1^*(f')^2 = -\frac{2\epsilon_2\kappa_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2}{(f')^2} [h + \kappa_3] \quad (4.98)$$

olarak bulunur.

$$\lambda_1 = \frac{\delta + \gamma\kappa_3}{f'} = \frac{(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)(h + \kappa_3)}{(f')^2} \quad (4.99)$$

$$\lambda_2 = -\frac{\epsilon_2\kappa_2\gamma}{f'} = -\frac{\epsilon_2\kappa_2(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)}{(f')^2} \quad (4.100)$$

$N^*$  ı şu şekilde tanımlayıp

$$N^* = \lambda_1 N + \lambda_2 B_2 \quad (4.101)$$

(4.99) ve (4.100) da  $\lambda_2 \neq 0$  olmak üzere  $\mu = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{h + \kappa_3}{-\epsilon_2\kappa_2}$

$$-\epsilon_2\kappa_2\mu = h + \kappa_3 \quad (4.102)$$

(4.101) ün türevi alınıp (2.2) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-f' \epsilon_1^* \kappa_2^* T^* - f' \epsilon_1^* B_1^* = -\epsilon_1 \lambda_2 T + \lambda_1' N + (\lambda_1 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_2 \kappa_3) B_1 + \lambda_2' B_2 \quad (4.103)$$

$$\lambda_1' = 0 \text{ ve } \lambda_2' = 0 \quad (4.104)$$

olur. (4.104) ü (4.103) de yerine yazarsak

$$-f' \epsilon_1^* \kappa_2^* T^* - f' \epsilon_1^* B_1^* = -\epsilon_1 \lambda_2 T + (\lambda_1 \kappa_2 - \epsilon_2 \lambda_2 \kappa_3) B_1 \quad (4.105)$$

bulunur. (4.105) ü kendisiyle iç çarparsak

$$2\kappa_2^*(f')^2 = -\frac{4\epsilon_1(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 \kappa_2^2 \kappa_3 (h + \kappa_3)}{(f')^4} \quad (4.106)$$

(4.98) ve (4.106) den

$$\kappa_2^*(f')^2 = -\epsilon_1^* \kappa_2 \kappa_3 \quad (4.107)$$

$$\epsilon_1^* \kappa_2^* f' T^* = \epsilon_1^* \kappa_2^* (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) [hT + B_1] \quad (4.108)$$

(4.105) ve (4.108) den

$$A(s) = -\frac{\kappa_2(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)}{(f')^2} (h + \kappa_3) \quad (4.109)$$

$$B(s) = \frac{\kappa_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) h}{(f')^2} (h + \kappa_3) \quad (4.110)$$

$$B_1^* = -\frac{\epsilon_1^* (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \kappa_2 (h + \kappa_3)}{(f')^3} [-hT + B_1] \quad (4.111)$$

bulunur.

Tersine  $\kappa_2$  ve  $\kappa_3$  ü sabit kabul edelim.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s) \quad (4.112)$$

(4.112) in türevi alınır

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (1 - \epsilon_1 b) T + (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) B_1 \quad (4.113)$$

$$\frac{d\beta^*}{ds} = (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) [hT + B_1] \quad (4.114)$$

(4.114) den biz şuna sahibiz.

$$\frac{d^2\beta^*}{ds^2} = (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) [(h + \kappa_3) N - \epsilon_2 \kappa_2 B_2] \quad (4.115)$$

$$g\left(\frac{d\beta^*}{ds}, \frac{d\beta^*}{ds}\right) = 0, g\left(\frac{d^2\beta^*}{ds^2}, \frac{d\beta^*}{ds}\right) = (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 (-2\epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3))$$

$$f' = \sqrt[2]{m_1 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)} \sqrt[4]{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)} \quad (4.116)$$

$$T^* = \frac{m_1 \sqrt{m_1 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)}}{\sqrt[4]{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [hT + B_1] \quad (4.117)$$

$$N^* = \frac{m_1}{\sqrt{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [(h + \kappa_3) N - \epsilon_2 \kappa_2 B_2] \quad (4.118)$$

$g(N^*, N^*) = -m_2 = \epsilon_1^*$ . (4.118) nin türevi alınır

$$\frac{dN^*}{ds^*} = \frac{m_1}{f' \sqrt{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [-\kappa_2 T + ((h + \kappa_3) \kappa_2 + \kappa_2 \kappa_3) B_1] \quad (4.119)$$

$$\kappa_2^* = \frac{m_2 \kappa_2 \kappa_3}{(f')^2} \quad (4.120)$$

$$\epsilon_1^* \kappa_2^* T^* = -\frac{m_1 \sqrt{m_1 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)} \kappa_2 \kappa_3}{\sqrt[4]{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)} (f')^2} [hT + B_1] \quad (4.121)$$

$$\frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^* \kappa_2^* T^* = \frac{m_1 \kappa_2 (h + \kappa_3)}{f' \sqrt{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [-hT + B_1] \quad (4.122)$$

$$B_1^* = -\epsilon_1^* \left( \frac{dN^*}{ds^*} + \epsilon_1^* \kappa_2^* T^* \right) = \frac{m_1 m_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}{f' \sqrt{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [-hT + B_1] \quad (4.123)$$

$$g(T^*, B_1^*) = 1$$

$$B_2^* = \frac{m_1}{\sqrt{2m_2 \epsilon_2 \kappa_2 (h + \kappa_3)}} [(h + \kappa_3) N + \epsilon_2 \kappa_2 B_2] \quad (4.124)$$

$$g(B_2^*, B_2^*) = m_2 = \epsilon_2^*$$

$$\kappa_3^* = -\frac{m_2 h \kappa_2}{(f')^2} \quad (4.125)$$

Sonra  $\beta$ , (1, 3)-Bertrand eğrisi ise (1, 3)-Bertrand eşleniği cartan null eğridir.

**Teorem 4.3**  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_2^4$  eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  ve  $\kappa_3 \neq 0$  olan bir pseudo null eğri olsun. Bu durumda  $\beta$ , Bertrand eşleniği  $\beta^*$  olan bir (1, 3)-Partially null Bertrand eşlenik eğrisine sahip değildir. Birinci ve ikinci eğrilikleri sıfırdan farklıdır.

Kabul edelim ki  $\beta$ ,  $s$  yay uzunluğu parametresi olmak üzere (1, 3)-Pseudo null eğri olsun. Eğrilik fonksiyonları  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 \neq 0$  ve  $\kappa_3 \neq 0$   $\beta^*$  ise  $s^*$  yay uzunluğu parametresi ile bir (1, 3)-Partially null Bertrand eşleniği olsun. Biz  $\beta^*$  şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\beta^*(s^*) = \beta^*(f(s)) = \beta(s) + a(s)N(s) + b(s)B_2(s). \quad (4.126)$$

Her  $s \in I$ ,  $a(s)$  ve  $b(s)$   $C^\infty$  fonksiyon olmak üzere (4.126) in  $s$  ye göre türevi alınıp (2.3) ve (2.4) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 b) T + a' N + (a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) B_1 + b' B_2 \quad (4.127)$$

(4.127) sırasıyla  $N$  ve  $B_2$  ile iç çarpılırsa

$$a' = 0 \text{ ve } b' = 0 \quad (4.128)$$

Eğer (4.128) yi (4.127) da yerine yazarsak;

$$T^* f' = (1 - \epsilon_1 b) T + (a \kappa_2 - \epsilon_2 b \kappa_3) B_1 \quad (4.129)$$

elde edilir. (4.129) kendisiyle iç çarpılırsa;

$$(f')^2 = \epsilon_1 (1 - \epsilon_1 b)^2 + \epsilon_2 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 \neq 0 \quad (4.130)$$

Eğer biz  $\delta$  ve  $\gamma$  yı şu şekilde alırsak

$$\delta = \frac{1 - \epsilon_1 b}{f'} \text{ ve } \gamma = \frac{a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3}{f'} \quad (4.131)$$

O zaman  $T^*$  ı şu şekilde yazabiliriz.

$$T^* = \delta T + \gamma B_1 \quad (4.132)$$

(4.132) in s ye göre türevi alınıp (2.3) ve (2.4) Frenet denklemleri kullanılırsa;

$$f' \kappa_1^* N^* = \delta' T + (\delta + \gamma \kappa_3) N + \gamma' B_1 - \epsilon_2 \kappa_2 \gamma B_2 \quad (4.133)$$

olarak bulunur. (4.133) sırasıyla  $T$  ve  $B_1$  ile iç çarpılırsa;

$$\delta' = 0 \text{ ve } \gamma' = 0 \quad (4.134)$$

$\gamma \neq 0$  ise (4.131) dan

$$a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3 \neq 0 \quad (4.135)$$

ve

$$1 = \epsilon_1 b + h (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \quad (4.136)$$

$h = \frac{\delta}{\gamma}$ . (4.136) i (4.130) da yerine yazarsak;

$$(f')^2 = \epsilon_1 (a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3)^2 [h^2 - 1] \quad (4.137)$$

elde edilir. (4.137) dan  $h \neq \pm 1$  buluruz.

$$f' \kappa_2^* B_1^* = A(s)T + B(s)B_1$$

$$A(s) = \frac{(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) \kappa_2}{(f')^2 \kappa_1^* (h^2 - 1)} [1 + h^2 + 2h\kappa_3]$$

ve

$$B(s) = \frac{(a\kappa_2 - \epsilon_2 b\kappa_3) h\kappa_2}{(f')^2 \kappa_1^* (h^2 - 1)} [1 + h^2 + 2h\kappa_3]$$

$f' \kappa_2^* B_1^* \neq 0$  ve  $g(B_1^*, B_1^*) = 0$ .  $1 + h^2 + 2h\kappa_3 \neq 0$  ve  $h^2 = 1$  bu bir çelişkidir.

**Örnek 4.1**  $E_2^4$  de bir pseudo null eğri,  $A = \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ ,  $B = \sqrt{-1 + \sqrt{2}}$  olmak üzere

$$\beta(s) = \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \sinh(As), \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cosh(Bs), \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \cosh(As), -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sinh(Bs) \right).$$

denklemleri ile verilsin.  $\beta$  eğrisinin eğrilikleri  $\kappa_1 = 1$ ,  $\kappa_2 = 1$ ,  $\kappa_3 = \sqrt{2}$  dir. Eğer Teorem 2 nin (i) şıkında  $a = -(1 + \sqrt{2})$  ve  $b = (1 + \sqrt{2})$  alırsak,  $\beta^*$  pseudo null eğrisini

$$\beta^* = \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \sinh(As), -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cosh(Bs), \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \cosh(As), -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \sinh(Bs) \right).$$

olarak elde edebiliriz. Basit hesaplamalar ile

$$N^*(s) = B_2(s) \text{ ve } B_2^*(s) = N(s).$$

bulunur. Bu durumda  $\beta^*$ ,  $\beta$  eğrisinin (1, 3)- Bertrand eşlenik eğrisidir.

**Örnek 4.2** 1.örnekteki pseudo null  $\beta$  eğrisi için Teorem 2 nin (ii) şıkında  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $h = 0$  ve  $\mu = \sqrt{2}$  alırsak  $\beta^*$  timelike eğrisini

$$\beta^*(s) = (\sinh(As), \cosh(Bs), \cosh(As), \sinh(Bs)).$$

olarak elde ederiz. Basit hesaplamalarla

$$N^*(s) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} N(s) + \frac{1}{\sqrt[4]{8}} B_2(s),$$

$$B_2^*(s) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} N(s) - \frac{1}{\sqrt[4]{8}} B_2(s).$$

bulunur. Bu durumda  $\beta^*$  eğrisi,  $\beta$  eğrisinin (1, 3)-Bertrand eşlenik eğrisidir.

**Örnek 4.3** 1.örnekteki  $\beta$  pseudo null eğrisi için Teorem 4.2 nin (iii) şıkında  $a = \sqrt{2} + 2$  ve  $b = -1$  alırsak  $\beta^*$  Cartan null eğrisini

$$\beta^*(s) = \left( 2 \sinh(As), \left( 2 + 2\sqrt{2} \right) \cosh(Bs), 2 \cosh(As), \left( 2 + 2\sqrt{2} \right) \sinh(Bs) \right).$$

olarak elde ederiz. Basit hesaplamalarla

$$N^*(s) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} N(s) + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} B_2(s),$$

$$B_2^*(s) = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} N(s) - \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}} B_2(s).$$

bulunur. Bu durumda  $\beta^*$  eğrisi,  $\beta$  nin (1, 3)-Bertrand eşlenik eğrisidir.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada 4-boyutlu 2-indeksli Yarı-Öklidyen uzayda genelleştirilmiş Pseudo null ve Cartan null Bertrand eğrilerinin özellikleri incelenmiştir. Bunun için referanslarda belirtilen [24] ve (Uçum,Keçilioğlu,İlarslan) makaleleri detaylı bir şekilde incelenmiştir. Genelleştirilmiş Bertrand eğrileri diğer adıyla (1,3)-Bertrand eğrileri son yıllarda diferansiyel geometri araştırmacıları tarafından yoğun bir şekilde çalışılan bir çeşidedir. Yapılan bu tez çalışmasında kavramlar ve ispatlar açık ve net olarak ifade edilmiş ve bu tip eğriler üzerinde çalışacak araştırmacılar için faydalı bir kaynak olacağı değerlendirilmektedir.

Genelleştirilmiş Bertrand eğrileri Cartan çatılı ve Frenet çatılı olacağı gibi Bishop çatılı eğriler içinde çalışılabilecek uygun bir problemidir. Dolayısıyla bu tip eğriler üzerine yeni çalışmalar yapılması beklenebilir.

## KAYNAKLAR

- [1] Kuhnel, W., Differential geometry: curves-surfaces-manifolds. Braunschweig, Wiesbaden, 1999.
- [2] Montiel, S., Ros, A., Curves and surfaces. Real Sociedad Matematica Espanola Madrid, Spain, 1998.
- [3] O'Neill, B., Semi-Riemannian geometry with applications to relativity. Academic Press, New York, 1983.
- [4] Bertrand, J. M., Mémoire sur la théorie des courbes á double courbure. Comptes Rendus. 15: 332-350, 1850.
- [5] Saint Venant, B., Mémoire sur les lignes courbes non planes. Journal de l'Ecole Polytechnique. 18: 1-76, 1845.
- [6] Bioche, Ch., Sur les courbes de M. Bertrand. Bull. Soc. Math. France. 17: 109-112, 1889.
- [7] Burke, J. F., Bertrand Curves Associated with a Pair of Curves. Mathematics Magazine. 34 (1): 60-62, 1960.
- [8] Matsuda, H., Yorozu, S., Notes on Bertrand curves. Yokohama Math. J. 50 (1-2): 41-58, 2003.
- [9] Pears, L. R., Bertrand curves in Riemannian space. J London Math. Soc. 2 (1-10): 180-183, 1935.
- [10] Sakaki, M.: Null cartan curves in  $R_2^4$ . Toyama Math. J. 32, 31-39 (2009).
- [11] Balgetir, H., Bektaş, M., Inoguchi, J., Null Bertrand curves in Minkowski 3-space and their characterizations. Note Mat. 23 (1): 7-13, 2004/2005.
- [12] Ekmekci, N., İlarslan, K., On Bertrand curves and their characterization. Differ. Geom. Dyn. Syst. 3 (2): 17-24, 2001.

- [13] Ersoy, S., İnalçık, A., Generalized spacelike Bertrand curves in Minkowski 5-space. *Quaestiones Mathematicae*. 37 (1): 19-29, 2014.
- [14] Gök, İ., Nurkan, S. K., İlarıslan, K., On Pseudo Null Bertrand Curves in Minkowski Space-Time. *Kyungpook Math. J.* 54 (4): 685-697, 2014.
- [15] Jin, D. H., Null Bertrand curves in a Lorentz manifold. *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure Appl. Math.* 15 (3): 209-215, 2008.
- [16] M. Petrovic-Torgasev, K. İlarıslan and E. Nesovic, On partially null and pseudo null curves in the semi-euclidean space  $R_2^4$ , *J. Geo.* 84(2005), 106-116.
- [17] Whittemore, J. K., Bertrand curves and helices. *Duke Math J.* 6: 235-245, 1940.
- [18] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarıslan, K., Generalized Bertrand curves with spacelike (1,3)-normal plane in Minkowski space-time. *Turkish J. Math.* (40) (2006), no. 3, 10-27. 53A04
- [19] Uçum, A., Keçilioğlu, O., İlarıslan, K., Generalized Bertrand curves with timelike (1,3)-normal plane in Minkowski space-time. *Kuwait J. Sci.* 42 (3): 113-130, 2015.
- [20] Bonnor, W. B., Null curves in a Minkowski space-time. *Tensor.* 20: 229-242, 1969.
- [21] Uçum, Ali; Keçilioğlu, Osman; İlarıslan, Kazım Generalized pseudo null Bertrand curves in semi-Euclidean 4-space with index 2. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 65 (2016), no. 3, 459-472. 53A04 (53A35)
- [22] Lopez, R., Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *Int. Electron. J. Geom.* 7 (1): 44-107, 2014.
- [23] Çöken, A. C., Çiftçi, Ü., On the cartan curvatures of a null curve in Minkowski spacetime. *Geom. Dedicata.* 114: 71-78, 2005.

- [24] Uçum, A., İlarıslan, K., Sakaki, M., On  $(1, 3)$ -Cartan null Bertrand curves in semi-Euclidean 4-space with index 2, accepted in Journal of Geometry, 2015.

