ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BAZI POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM VE ŞEKİL KORUMA ÖZELLİKLERİ

Murat BODUR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM VE ŞEKİL KORUMA ÖZELLİKLERİ

Murat BODUR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılacak olan temel tanımlara ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde Lupaş-Jain operatörleri kurulmuştur. Bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı ve konvekslik altında monotonluğu verilmiştir. Dahası, bir şekil koruma özelliği sunulmuştur.

Dördüncü bölümde bir önceki bölümde kurulan Lupaş-Jain operatörlerinin bir genelleştirilmesi verilmiştir. Daha sonra genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörlerinin ağırlıklı uzaylarda bazı yaklaşım özellikleri incelenmiş ve Voronovskaya tipli bir teorem ifade edilmiştir.

Beşinci bölüm, tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Mart 2021, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Lupaş-Jain operatörleri, ağırlıklı yaklaşım, şekil koruma özellikleri, konvekslik, monotonluk, süreklilik modülü fonksiyonu, Voronovskaya tipli teorem.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

APPROXIMATION AND SHAPE PRESERVING PROPERTIES FOR SOME POSITIVE LINEAR OPERATORS

Murat BODUR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitons and concepts used in the thesis are given.

In the third chapter, Lupaş-Jain operators are constructed. Approximation in weighted spaces and monotonicity under convexity of these operators are obtained. Moreover, a shape preserving property is presented.

In the fourth chapter, a generalization of the Lupaş-Jain operators constructed in the previous chapter is proposed then some approximation properties of generalized Lupaş-Jain operators in weighted spaces are investigated and a Voronovskaya type theorem is pointed out.

The last chapter is dedicated to discussion and conclusion.

March 2021, 46 pages

Key Words: Lupaş-Jain operators, weighted approximation, shape preserving properties, convexity, monotonicity, function of modulus of continuity, Voronovskaya type theorem.

TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu çalışmanın her aşamasında benim yanımda olan, sürekli motive eden, ilgilerini ve desteklerini asla esirgemeyen kıymetli hocalarım Sayın Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN YEŞİLDAL (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Prof. Dr. Gülen BAŞCANBAZ TUNCA (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya saygılarımı ve sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Yine, bana her zaman destek olan, sorularımı sabırla cevaplayan ve zaman ayıran Sayın Doç. Dr. Rabia AKTAŞ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve tüm bu süreç içerisinde emeğini ve ilgisini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ayşegül Erençin (Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e içten teşekkürlerimi sunarım. Son olarak, beraber pek çok araştırma ve çalışma yapma fırsatı bulduğum arkadaşlarıma ve varlıklarını derinden hissettiğim kıymetli aileme teşekkür ederim.

Murat BODUR
Ankara, Mart 2021

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$C\,[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$C_B[0,\infty)$	$[0,\infty)$ aralığında sınırlı, sürekli reel değerli fonksiyonların uzayı
$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$	$\left\{f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\mid \lVert f\rVert_\varphi=\sup_{x\geq 0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}<\infty\right\}$ ile tanımlı ağırlıklı uzay
$C_\varphi(\mathbb{R}^+)$	$\{f\in B_\varphi(\mathbb{R}^+),\ f \text{ sürekli}\}$ ile tanımlı ağırlıklı uzay
$C_\varphi^v(\mathbb{R}^+)$	$\left\{f\in C_\varphi(\mathbb{R}^+),\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=M_f<+\infty\right\}$ ile tanımlı ağırlıklı uzay
$U_\varphi(\mathbb{R}^+)$	$\left\{f\in C_\varphi(\mathbb{R}^+),\ \frac{f}{\varphi} \text{ düzgün sürekli}\right\}$ ile tanımlı ağırlıklı uzay
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega_\rho(f;\delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı süreklilik modülü
$(a)_m$	Pochhammer sembolü
J_m	Pozitif lineer operatörler
B_m	Bernstein operatörleri
τ	$[0,1]$ üzerinde her basamaktan diferensiyellenebilir bir fonksiyon
B_m^τ	τ fonksiyonu ile genelleştirilmiş Bernstein operatörleri
S_m	Szász-Mirakyan operatörleri
S_m^ξ	Genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörleri
ρ	$\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon
S_m^ρ	ρ fonksiyonu ile genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörleri
L_m	Lupaş operatörleri
J_m^ξ	Lupaş-Jain operatörleri
$J_m^{\xi,\rho}$	ρ fonksiyonu ile genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri

1. GİRİŞ

"Although this may seem a paradox, all exact science is dominated by the idea of approximation. When a man tells you that he knows the exact truth about anything, you are safe in inferring that he is an inexact man."

Bertrand Russell (Russell 1931) bu meşhur cümleleri ile sadece pozitif bilimlerin sınırlarını göstermekle kalmaz, aynı zamanda doğanın matematik yardımıyla nasıl tanımlanabileceğini, betimlenebileceğini de gösterir.

Yaklaşım ve yaklaşık belirleme (approximative determination) matematiğin en eski problemlerindendir. M. Ö. 1800-1600'lü yıllarda yazılmış tabletlerde, Babiller tarafından kareköklü ifadelerin ortaya atıldığı, yaklaşık değerler bulunduğu arkeologlar tarafından keşfedilmiştir.

İrrasyonellik kavramının ortaya atıldığı ve üzerinde ilk defa detaylı çalışıldığı zamanlarda da, irrasyonel sayılara ulaşma çabaları aslında yaklaşık belirlemekten başka bir şey değildir. Bundandır ki yaklaşım ve yaklaşık belirleme kavramları bu kadar eskiye dayanmaktadır.

Bununla birlikte yaklaşım teorisi "approximation theory" nispeten genç bir bilim dalıdır çünkü fonksiyon kavramına ihtiyacı vardır. Fonksiyon kavramına tarihsel olarak bakarsak her ne kadar 17. yy'ın sonlarından önce kavramla alakalı çıkarımlar olsa da L. Euler'in günümüz $f(x)$ notasyonuna yakın bir notasyon kullanması, fonksiyonlar üzerinde hesaplamalar yapması ve 1755 yılında yayımlanan "Institutiones Calculi Differentialis" adlı çalışmasında fonksiyonların formülleri ve özellikleri ile ilgili pek çok bilgi vermesiyle fonksiyon kavramının temelleri atılmış dahası bunun doğal bir sonucu olarak yaklaşım teorisinin temelleri ortaya atılmıştır. Hatta daha ileri gidersek ilk yaklaşım teorisi çalışması, L. Euler'in, Rus İmparatorluğunu haritalaması üzerine, "verilen enlemler arasındaki bir meridyenin tüm noktalarını göz önünde bulundurarak enlemler ve yükseklikler (rakımlar) arasındaki ilişkiye mümkün olan en iyi yaklaşımı bulma" problemini içeren "De proiectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii Russici usitata" (Euler 1777) adlı çalışmasına atfedilebilir (Steffens 2006).

Bu tarihten sonra C. F. Gauss, yaklaşım teorisinde çok kullanılan bir yöntem olan En Küçük Kareler Yöntemi'ni 1795 yılında geliştirmiştir ve bu yöntem ilk olarak 1801 yılında Ceres asteroidinin yörüngesinin belirlenmesinde kullanılmıştır. Daha sonra bu alanda J. L. Lagrange, P. S. Laplace, J. Fourier'in çalışmaları olmuştur (Steffens 2006).

Yaklaşım teorisi ile ilgili diğer bir önemli çalışma, 1857 yılında yazılan ancak 1859'da yayımlanan P. L. Chebyshev (Chebyshev 1859) tarafından çalışılan $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyona en iyi yakınsayan polinomu bulma problemine dayanmaktadır. P. L. Chebyshev'in hayatı, Saint Petersburg Matematik Okulu'nu kurması ve matematiğe yaptığı katkıları hakkında bilgiler için K. G. Steffens'ın 2006 yılında yayımlanan "The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein" adlı kitabına bakılabilir.

1885 yılına gelindiğinde yaklaşım teorisinde çığır açan bir teorem verilmiştir. Weierstrass'a ait olan, kendi ismiyle anılan ve Weierstrass yetmiş yaşındayken yayımlanan Weierstrass Yaklaşım Teoremi aşağıdaki gibi verilebilir:

$f \in C[a, b]$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x \in [a, b]$ için öyle bir $p_n(x)$ cebirsel polinomu bulunabilir ki $|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon$ sağlanır (Weierstrass 1885).

Günümüze kadar Weierstrass Yaklaşım Teoremi'nin pek çok ispatı yapılmıştır. Farklı ispatlar yapan belli başlı matematikçiler şöyle sıralanabilir: C. Runge (1885), H. Lebesgue (1898), L. Fejér (1900), É. Borel (1905), C. J. de la Vallée- Poussin (1908), E. Landau (1908) ve S. N. Bernstein (1912) (Pinkus 2000). Geçmişten günümüze Weierstrass Yaklaşım Teoremi, teoremin ispatı ve teorem yardımıyla yapılmış olan pek çok çalışma ile ilgili daha detaylı bilgi için A. Pinkus'un 2000 yılında yayımlanan "Weierstrass and Approximation Theory" adlı makalesine bakılabilir.

Yukarıda belirtilen ispatlar içerisinde en basit ve şık ispat Bernstein'a (Bernstein 1912) aittir. Bernstein polinomlarının ve Bernstein polinomlarının yol açıcılığıyla kurulan diğer pozitif lineer operatörlerin tarihsel gelişimi, Bernstein polinomlarının kullanıldığı alanlar ve bu alanlardaki belli başlı çalışmalar için Farouki'nin (Farouki 2012) "The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective" adlı kıymetli çalışmasına bakılabilir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileri bölümlerde kullanacağımız temel tanımlar verilecek ve gerekli kavramlara değinilecektir.

Tanım 2.1 V ve W iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer V den alınan herhangi bir f fonksiyonuna W uzayında bir g fonksiyonu karşılık getiren bir J kuralı varsa buna V uzayında bir operatördür denir ve $J(f;x) = g(x)$ biçiminde gösterilir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Burada $J(f;x) = J(f(t);x)$ olmak üzere J operatörü f fonksiyonunun bağlı olduğu t değişkenine göre uygulanmaktadır. Sonuç ise x değişkenine bağlı bir fonksiyondur. Bundan dolayı x değişkeni J işleminde sabit gibidir ve $J(f(x);x) = f(x)J(1;x)$ yazılabilir.

Tanım 2.2 V ve W lineer fonksiyon uzayları için $J : V \to W$ şeklindeki J operatörünü dikkate alalım. Eğer $\forall f, g \in V$ ve $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ için

$$J(\alpha f + \beta g; x) = \alpha J(f;x) + \beta J(g;x)$$

koşulu sağlanıyorsa J ye lineer operatör denir (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 2.3 X bir vektör uzayı olmak üzere her $f \in X$ için

$$f \geq 0 \text{ iken } J(f;x) \geq 0$$

oluyor ise J operatörüne pozitif operatör denir. (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995).

Hem pozitiflik hem de lineerlik şartlarını sağlayan J ye pozitif lineer operatör denir.

Teorem 2.1 $\{J_m\}_{m\geq 1}$, $C[a,b]$ uzayından $C[a,b]$ uzayına giden pozitif lineer operatörler dizisi olsun. $e_r(t) := t^r$, $r = 0,1,2$ olmak üzere, eğer J_m pozitif lineer operatörler dizisi $[a,b]$ üzerinde

$$\lim_{m\to\infty} \|J_m(e_r) - e_r\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda $[a,b]$ aralığında her $f \in C[a,b]$ için

$$\lim_{m\to\infty} \|J_m(f) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır (Korovkin 1953).

Tanım 2.4 $\forall t_1, t_2, ..., t_m \in [0,\infty)$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_m = 1$ olacak şekilde negatif olmayan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ sayıları için

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i t_i\right) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(t_i) \tag{2.1}$$

sağlanıyorsa reel değerli bir fonksiyon olan f ye, $[0,\infty)$ aralığında konveks fonksiyon denir (Altomare 2010).

Tanım 2.5 $\omega : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer ω fonksiyonu $\forall x, y \in [0,\infty)$ için

a) $\omega(x+y) \leq \omega(x) + \omega(y)$ (alt toplamsallık)

b) $x \geq y$ için $\omega(x) \geq \omega(y)$ (azalmayan)

c) $\lim_{x\to 0^+} \omega(x) = \omega(0) = 0$

özelliklerini sağlıyor ise ω fonksiyonuna süreklilik modülü fonksiyonu denir (Mhaskar ve Pai 2000).

3. LUPAŞ-JAIN OPERATÖRLERİ

1972 yılında yayımlanan "Approximation of functions by a new class of linear operators" adlı çalışmasında Jain (Jain 1972), $f \in C[0,\infty) \to \mathbb{R}$ olmak üzere $m \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ ve $0 \leq \xi < 1$ için, Szász-Mirakyan operatörlerini şu şekilde genelleştirmiştir:

$$S_m^{\xi}(f)(x) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx(mx+\upsilon\xi)^{\upsilon-1}}{\upsilon!} e^{-(mx+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right). \tag{3.1}$$

Daha sonra yapılan çalışmalarda, Szász-Mirakyan operatörlerinin genelleştirilmesi olan bu operatörler, literatürde Jain operatörleri olarak adlandırılmıştır. İlerleyen yıllarda Jain operatörlerinin özellikleri ve Jain operatörlerinin genelleştirilmeleri ile ilgili yapılmış pek çok çalışma olmakla birlikte birkaç çalışma şu şekilde sıralanabilir: (Umar ve Razi 1985), (Abel ve Ivan 2007), (Farcaş 2012), (Tarabie 2012a), (Agratini 2013), (Abel ve Agratini 2016), (Deniz 2016), (Özarslan 2016), (Agratini 2018), (Özarslan 2020). Dahası, 2018 yılında Agratini, Jain operatörleri üzerine çalışmaları derleyen ve Jain operatörlerinin tarihsel gelişimi hakkında fikir veren bir çalışma yapmıştır. Jain operatörleri ile ilgili daha fazla detaylı bilgi için (Agratini 2018) çalışmasına bakılabilir.

Lupaş tarafından (Lupaş 1995), $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere Lupaş operatörleri

$$L_m(f;x) = (1-a)^{mx} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(mx)_\upsilon}{\upsilon!} a^\upsilon f\left(\frac{\upsilon}{m}\right), \ \ |a| < 1, \ x \geq 0,$$

şeklinde tanımlanmıştır. Lupaş operatörlerinin özel bir formu ($a = 1/2$ hali) ise Agratini (Agratini 1999) tarafından çalışılmış ve Lupaş operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$L_m(f)(x) = 2^{-mx} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(mx)_\upsilon}{2^\upsilon \upsilon!} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right). \tag{3.2}$$

Lupaş operatörleri ile ilgili bir derleme ve ileri çalışmalar, 2016 yılında Bodur tarafından yazılan "Lupaş Operatörlerinin Bazı Özellikleri" (Bodur 2016) adlı yüksek lisans tezinde bulunabilir. Lupaş operatörlerinin özellikleri ve Lupaş operatörlerinin genelleştirilmeleri ile ilgili yapılmış pek çok çalışma olmakla birlikte birkaç çalışma şu şekilde yine sıralanabilir: (Agratini 1999), (Agratini 2000), (Finta 2001), (Finta 2002), (Dirik 2007), (Erençin ve Taşdelen 2007), (Erençin ve Taşdelen 2009), (Sofonea 2009), (Tarabie 2012b), (Erençin vd. 2014), (Bodur vd. 2018). Burada derinlemesine değinilmeden küçük bir parantez açılmalıdır ki yapı bakımından Szász-Mirakyan operatörleri ile Lupaş operatörleri arasında bir benzerlik bulunmaktadır. Bazı genelleştirilmiş Szász-Mirakyan operatörleri ile Lupaş tarafından tanımlanan (Miheşan 1997) ve (Agratini 1999) tarafından çalışılan Lupaş operatörleri bazı özel durumlarda birbirlerini sağlarlar. Bu benzerlik ile ilgili ayrıntılı bilgi için (Finta 2001) ve (Erençin vd. 2014) çalışmalarına bakılabilir.

Patel ve Mishra tarafından (Patel ve Mishra 2015), $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$L_m^{\beta}(f)(x) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(mx+\upsilon\beta)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\beta)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \tag{3.3}$$

şeklinde Lupaş operatörlerinin bir genelleştirilmesi verilmiş olup yaklaşım özellikleri incelenmiş; Durrmeyer ve Kantorovich tipli modifikasyonları tanımlanmıştır. Bizim amacımız da, negatif indisli Pochhammer sembolü kullanarak hesaplamaları kayda değer olarak daha kolay hale getiren yukarıdaki operatörün farklı bir versiyonu olan ve Lupaş-Jain operatörleri olarak adlandırdığımız operatörleri inşa etmektir.

Bu bölümde ilk olarak Lupaş-Jain operatörlerinin inşası kurulacak olup sonra da ileri bölümlerde ispatlayacağımız teoremlerde kullanacağımız bazı yardımcı sonuçlar verilecektir. Daha sonra da inşa edilen operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı üzerinde durulacak; konvekslik altında monotonluğu ve bir şekil koruma özelliği gösterilecektir.

3.1 Lupaş-Jain Operatörlerinin Kuruluşu

Jain tarafından (3.1) ile tanımlanan Jain operatörlerinden yararlanarak; Lupaş operatörlerinin bir genelleştirmesini yapacağız. γ ve ξ iki parametre olmak üzere

$0 < \gamma < \infty$ ve $0 \leq \xi < 1$ şartları sağlansın. Jain'in operatör kurmak için kullandığı ve (Jain 1972) çalışmasında belirttiği Lagrange formülü de aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\phi(\eta) = \phi(0) + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon!} \left[\frac{d^{\upsilon-1}}{d\eta^{\upsilon-1}} (f(\eta))^{\upsilon} \phi'(\eta) \right]_{\eta=0} \left(\frac{\eta}{f(\eta)} \right)^{\upsilon}.$$

Burada $\phi(\eta) = \frac{1}{(1-\eta)^{\gamma}}$, $f(\eta) = \frac{1}{(1-\eta)^{\xi}}$ ve $|\eta| < 1$ alalım. $\phi'(\eta) = \gamma(1-\eta)^{-(\gamma+1)}$ ve

$$(f(\eta))^{\upsilon} \phi'(\eta) = \gamma(1-\eta)^{-\upsilon\xi}(1-\eta)^{-\gamma-1} = \gamma(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+1)}$$

olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\eta}\left(\gamma(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+1)}\right) &= \gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+2)} \\
\frac{d^2}{d\eta^2}\left(\gamma(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+1)}\right) &= \gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)(\gamma+\upsilon\xi+2)(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+3)} \\
\vdots &= \vdots \\
\left.\frac{d^{\upsilon-1}}{d\eta^{\upsilon-1}}\gamma(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+1)}\right)\Big|_{\eta=0} &= \gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)(\gamma+\upsilon\xi+2)\cdots(1-\eta)^{-(\gamma+\upsilon\xi+\upsilon)}\Big|_{\eta=0} \\
&= \gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)(\gamma+\upsilon\xi+2)\cdots(\gamma+\upsilon\xi+\upsilon-1) \\
&= \gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Çünkü $(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1} = (\gamma+\upsilon\xi+1)(\gamma+\upsilon\xi+2)\cdots(\gamma+\upsilon\xi+1+\upsilon-2)$ sağlanır. Burada

$$(a)_m = \begin{cases} a\,(a+1)\cdots(a+m-1) & m \in \mathbb{N} \\ 1 & m = 0,\ a \neq 0, \end{cases}$$

Pochhammer sembolü olup

$$(a)_{-m} = \frac{1}{(a-1)\,(a-2)\cdots(a-m)} = \frac{1}{(a-m)_m} = \frac{(-1)^m}{(1-a)_m}$$

$a \neq 1, 2, ..., m$ dir (Gasper ve Rahman 2004). $(\gamma+1)_{-1} = \frac{1}{(\gamma)_1} = \frac{1}{\gamma}$ sağlanır. Dahası, $\phi(0) = \frac{1}{(1-0)^{\gamma}} = 1$ olmak üzere Lagrange formülünden

$$\frac{1}{(1-\eta)^{\gamma}} = 1 + \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \frac{1}{\upsilon!}\gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}\eta^{\upsilon}(1-\eta)^{\upsilon\xi} \tag{3.4}$$

elde edilir. Gerçekten

$$\frac{1}{(1-\eta)^{\gamma}} = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{1}{\upsilon!}\gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}\eta^{\upsilon}(1-\eta)^{\upsilon\xi}$$

ve $0<\gamma<\infty$, $|\eta|<1$ ve $0\leq\xi<1$ şartları hatırlanırsa

$$\lim_{\upsilon\to\infty}\left|\frac{\upsilon!(\gamma+\upsilon\xi+\xi+1)_{\upsilon}\eta^{\upsilon+1}(1-\eta)^{(\upsilon+1)\xi}}{(\upsilon+1)!(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}\eta^{\upsilon}(1-z)^{\upsilon\xi}}\right| = \left|\eta(1-\eta)^{\xi}\right| \lim_{\upsilon\to\infty}\frac{(\gamma+\upsilon\xi+\xi+1)_{\upsilon}}{(\upsilon+1)(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}}$$

olup limit alınırsa $\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi}(\xi+1)\eta(1-\eta)^{\xi}$ elde edilir. Mathematica 11.3 programı yardımıyla $\eta=\frac{1}{2}$ için $\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{\xi}(\xi+1)\eta(1-\eta)^{\xi}<1$ gerçeklendiği görülür.

Şimdi (3.4) de her iki taraf $(1-\eta)^{\gamma}$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} 1 &= (1-\eta)^{\gamma} + \sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{1}{\upsilon!}\gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}\eta^{\upsilon}(1-\eta)^{\gamma+\upsilon\xi} \\ 1 &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}}{\upsilon!}\eta^{\upsilon}(1-\eta)^{\gamma+\upsilon\xi} \end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. (3.5) eşitliğinde $\eta=\frac{1}{2}$ alınırsa

$$1 = \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)} \tag{3.6}$$

bulunur. Böylece $\gamma=mx,\ m\in\mathbb{N}$ için Lupaş-Jain operatörleri

$$J_m^{\xi}(f;x) := J_m^{\xi}(f)(x) = \begin{cases} \sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}f\left(\frac{\upsilon}{m}\right), & x>0, \\ f(0), & x=0 \end{cases} \tag{3.7}$$

şeklindedir. ξ parametresi $0\leq\xi<1$ aralığında sadece m ye bağlı olup reel değerli ve sınırlı f fonksiyonu $[0,\infty)$ da tanımlıdır. Açıktır ki; $\xi=0$ için Lupaş-Jain operatörleri, (3.2) ile tanımlanan Lupaş operatörlerine indirgenir. Lupaş-Jain operatörleri pozitif ve lineerdir. Gerçekten, Tanım 2.2 ve Tanım 2.3 göz önünde bulundurulursa $x \in [0,\infty)$, $0 \leq \xi < 1$, $m \in \mathbb{N}$ şartları altında

$$J_m^{\xi}(f)(x) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) > 0$$

olduğu görülür. Dahası, $\forall f,\ g \in C_B[0,\infty)$ ve $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ için

$$J_m^{\xi}(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha J_m^{\xi}(f)(x) + \beta J_m^{\xi}(g)(x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}(\alpha f+\beta g)(x) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} \left(\alpha f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) + \beta g\left(\frac{\upsilon}{m}\right)\right) \\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} \alpha f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\
&\quad + \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} \beta g\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\
&= \alpha \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\
&\quad + \beta \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} g\left(\frac{\upsilon}{m}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, operatörün pozitif ve lineer olduğunu gösterdikten sonra inşası için

$$J(0,\gamma,\xi) := \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}$$

olduğunu kabul edelim. (3.6) yardımıyla $\gamma J(0,\gamma,\xi) = 1$ eşitliği elde edilir. Böylece Lupaş-Jain operatörlerinin momentlerini hesaplamak için kullanacağımız $J(\sigma,\gamma,\xi)$ yardımcı fonksiyonu için rekürans formülünü verelim.

Lemma 3.1 $0 < \gamma < \infty,\ 0 \leq \xi < 1,\ \sigma \in \mathbb{N}$ ve

$$J(\sigma,\gamma,\xi) := \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+\sigma-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(\gamma+\upsilon\xi)} \tag{3.8}$$

olsun. O halde

$$J(\sigma,\gamma,\xi)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+\sigma-1+\upsilon\xi)\,J(\sigma-1,\gamma+\upsilon\xi,\xi)$$

gerçeklenir.

İspat.

$$J(0,\gamma,\xi):=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}$$

ise $\gamma J(0,\gamma,\xi)=1$ olduğunu söylemiştik. Pochhammer sembolü yardımıyla

$$\begin{aligned}&(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}\\=\;&(\gamma+1+\upsilon\xi)(\gamma+1+\upsilon\xi+1)\cdots(\gamma+1+\upsilon\xi+\upsilon-2)(\gamma+1+\upsilon\xi+\upsilon-1)\\=\;&(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}(\gamma+\upsilon+\upsilon\xi)\end{aligned}$$

gerçeklenir. O halde yukarıda verilen ifadeyi $J(1,\gamma,\xi)$ için kullanalım. (3.8) eşitliğinde $\sigma=1$ için

$$\begin{aligned}J(1,\gamma,\xi)&=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}\\&=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}(\gamma+\upsilon+\upsilon\xi)2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}\\&=\gamma\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}+(\xi+1)\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}\upsilon 2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}\\&=\gamma J(0,\gamma,\xi)+(\xi+1)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\xi+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(\gamma+\xi+\upsilon\xi)}\end{aligned}$$

olup buradan

$$J(1,\gamma,\xi)=\gamma J(0,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}J(1,\gamma+\xi,\xi)$$

elde edilen bu eşitliği sağdaki terime art arda uygulayalım.

$$\begin{aligned}J(1,\gamma,\xi)&=\gamma J(0,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}\left[(\gamma+\xi)J(0,\gamma+\xi,\xi)+\frac{\xi+1}{2}J(1,\gamma+2\xi,\xi)\right]\\&=\gamma J(0,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}(\gamma+\xi)J(0,\gamma+\xi,\xi)\\&\quad+\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{2}\left[(\gamma+2\xi)J(0,\gamma+2\xi,\xi)+\frac{\xi+1}{2}J(1,\gamma+3\xi,\xi)\right]\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
J\left(1,\gamma,\xi\right) &= \gamma J(0,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}(\gamma+\xi)J(0,\gamma+\xi,\xi) \\
&\quad +\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{2}(\gamma+2\xi)J(0,\gamma+2\xi,\xi) \\
&\quad +\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{3}\left[(\gamma+3\xi)J(0,\gamma+3\xi,\xi)+\frac{\xi+1}{2}J(1,\gamma+4\xi,\xi)\right] \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

şeklinde devam edilirse

$$J\left(1,\gamma,\xi\right)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+\upsilon\xi\right)J\left(0,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right)$$

bulunur. Şimdi buradan $J\left(\sigma,\gamma,\xi\right)$ ifadesine geçebiliriz.

$$J\left(\sigma,\gamma,\xi\right):=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+\sigma-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}$$

alalım. Burada

$$\begin{aligned}
&\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+\sigma-1} \\
=\;& (\gamma+1+\upsilon\xi)(\gamma+2+\upsilon\xi)\cdots(\gamma+1+\upsilon\xi+\upsilon+\sigma-3)(\gamma+1+\upsilon\xi+\upsilon+\sigma-2) \\
=\;& (\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+\sigma-2}(\gamma+\sigma-1+\upsilon+\upsilon\xi)
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Yani $(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+\sigma-1}=(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+\sigma-2}(\gamma+\sigma-1+\upsilon+\upsilon\xi)$ eşitliğinden

$$J\left(\sigma,\gamma,\xi\right):=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+\sigma-2}}{2^{\upsilon}\upsilon!}\left[\gamma+\sigma-1+\upsilon(\xi+1)\right]2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}$$

olup eşitliğin sağ tarafında dağılma işlemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
&J\left(\sigma,\gamma,\xi\right) \\
=\;& (\gamma+\sigma-1)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+\sigma-2}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)} \\
&+(\xi+1)\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+\sigma-2}}{2^{\upsilon}\upsilon!}\upsilon 2^{-(\gamma+\upsilon\xi)} \\
=\;& (\gamma+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma,\xi)+(\xi+1)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma+1+\xi+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+\sigma-1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(\gamma+\xi+\upsilon\xi)}
\end{aligned}$$

olup

$$J\left(\sigma,\gamma,\xi\right)=(\gamma+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}J(\sigma,\gamma+\xi,\xi)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlik sağdaki terime yine art arda uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& J\left(\sigma,\gamma,\xi\right) \\
= \; & (\gamma+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}\Big[(\gamma+\xi+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma+\xi,\xi) \\
& +\frac{\xi+1}{2}J(\sigma,\gamma+2\xi,\xi)\Big] \\
= \; & (\gamma+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma,\xi)+\frac{\xi+1}{2}(\gamma+\xi+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma+\xi,\xi) \\
& +\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^2\left[(\gamma+2\xi+\sigma-1)J(\sigma-1,\gamma+2\xi,\xi)+\frac{\xi+1}{2}J(\sigma,\gamma+3\xi,\xi)\right] \\
= \; & \cdots
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$J\left(\sigma,\gamma,\xi\right)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+\sigma-1+\upsilon\xi\right)J\left(\sigma-1,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right)$$

bulunur ki ispat tamamlanır. ■

Sonuç 3.1

$$h_m\left(x\right):=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\upsilon^m x^{\upsilon} \qquad -1<x<1,\ m\in\mathbb{N}$$

ve

$$h_0\left(x\right):=\frac{1}{1-x}=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}x^{\upsilon} \tag{3.9}$$

geometrik serisini ele alalım. Terim-terime türevleri alınırsa

$$h_m'\left(x\right)=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon^{m+1}x^{\upsilon-1}$$

olup

$$xh_m'\left(x\right)=\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon^{m+1}x^{\upsilon}=h_{m+1}\left(x\right)$$

eşitliği elde edilir. Bu rekürans sayesinde, $m = 1, 2$ ve 3 için

$$h_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \upsilon x^{\upsilon}, \tag{3.10}$$

$$h_2(x) = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \upsilon^2 x^{\upsilon}, \tag{3.11}$$

$$h_3(x) = x\left(\frac{x^2+x}{(1-x)^3}\right)' = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} \upsilon^3 x^{\upsilon} \tag{3.12}$$

elde edilir (Velleman 1995).

Lemma 3.2 (3.8) yardımıyla aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$J(1,\gamma,\xi) = \frac{2}{1-\xi}, \tag{3.13}$$

$$J(2,\gamma,\xi) = \frac{4(\gamma+1)}{(1-\xi)^2} + \frac{4\xi(\xi+1)}{(1-\xi)^3}, \tag{3.14}$$

$$J(3,\gamma,\xi) = \frac{8(\gamma+1)(\gamma+2)}{(1-\xi)^3} + \frac{8\xi(\xi+1)(3\gamma+5)}{(1-\xi)^4} + \frac{8\xi^2(2\xi^2+6\xi+4)}{(1-\xi)^5}, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} J(4,\gamma,\xi) &= \frac{16(\gamma^3+6\gamma^2+11\gamma+6)}{(1-\xi)^4} + \frac{16\xi(\xi+1)(6\gamma^2+26\gamma+26)}{(1-\xi)^5} \\ &\quad + \frac{16\xi^2(\xi+1)\left[(\xi+3)(3\gamma+6)+(\xi+1)(6\gamma+14)+(2\xi+4)(\gamma+3)\right]}{(1-\xi)^6} \\ &\quad + \frac{16\xi^3(\xi+1)(6\xi^2+28\xi+6)}{(1-\xi)^7} \end{aligned} \tag{3.16}$$

İspat. $0 \le \xi < 1$ olmak üzere $x = \frac{\xi+1}{2}$ için $\frac{1}{2} < \frac{\xi+1}{2} < 1$ olduğu açıktır. Yukarıda verilen yardımcı eşitlikleri ispatlamak için kullanacağımız $h_0(x), h_1(x), h_2(x), h_3(x)$ ifadelerine karşılık gelen değerleri bulalım.

$$h_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} = \frac{1}{1-\frac{\xi+1}{2}} = \frac{2}{1-\xi}, \tag{3.17}$$

$$h_1\left(\frac{\xi+1}{2}\right) = \sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} = \frac{\frac{\xi+1}{2}}{(1-\frac{\xi+1}{2})^2} = \frac{2(\xi+1)}{(1-\xi)^2}, \tag{3.18}$$

$$h_2\left(\frac{\xi+1}{2}\right) = \sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon^2\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} = \frac{(\frac{\xi+1}{2})^2+\frac{\xi+1}{2}}{\left(1-\frac{\xi+1}{2}\right)^3} = \frac{2(\xi^2+4\xi+3)}{(1-\xi)^3}, \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned} h_3\left(\frac{\xi+1}{2}\right) &= \sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon^3\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} = \frac{(\frac{\xi+1}{2})^3+4(\frac{\xi+1}{2})^2+\frac{\xi+1}{2}}{\left(1-\frac{\xi+1}{2}\right)^4} \\ &= \frac{2(\xi^3+11\xi^2+23\xi+13)}{(1-\xi)^4}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Şimdi de

$$J\left(\sigma,\gamma,\xi\right)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+\sigma-1+\upsilon\xi\right)J\left(\sigma-1,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right)$$

rekürans bağıntısını ve

$$J(0,\gamma,\xi)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(\gamma+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}$$

ise $\gamma J(0,\gamma,\xi)=1$ olduğunu hatırlayalım. Yukarıda belirtilen (3.17) eşitliği yardımıyla

$$J(1,\gamma,\xi)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+\upsilon\xi\right)J\left(0,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}=\frac{2}{1-\xi}$$

bulunur. Benzer şekilde $J(2,\gamma,\xi)$ için (3.18)

$$\begin{aligned}
J(2,\gamma,\xi) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)J\left(1,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right)\\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\underbrace{\left(\gamma+\upsilon\xi+\upsilon\xi\right)J\left(0,\gamma+\upsilon\xi+\upsilon\xi,\xi\right)}_{=1}\right)\\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)\left(\frac{2}{1-\xi}\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere $(\gamma+1+\upsilon\xi)$ ifadesi dağıtılır; (3.17) ve (3.18) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
J(2,\gamma,\xi) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+1)\left(\frac{2}{1-\xi}\right)+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\upsilon\xi)\left(\frac{2}{1-\xi}\right)\\
&= \left(\frac{2}{1-\xi}\right)(\gamma+1)\left(\frac{2}{1-\xi}\right)+\left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right)\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\\
&= \frac{4\left(\gamma+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{2}}+\left(\frac{2\xi}{1-\xi}\right)h_{1}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\\
&= \frac{4\left(\gamma+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{2}}+\frac{2\xi}{1-\xi}\frac{2(\xi+1)}{(1-\xi)^{2}}\\
&= \frac{4\left(\gamma+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{2}}+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde $J(3,\gamma,\xi)$ için yukarıdaki adımlar tekrarlanırsa

$$\begin{aligned} J(3,\gamma,\xi) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+2+\upsilon\xi)\,J\left(2,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right) \\ &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+2+\upsilon\xi)\left(\frac{4\left(\gamma+\upsilon\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{2}}+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}\right) \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} J(3,\gamma,\xi) &= \frac{4}{\left(1-\xi\right)^{2}}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+1+\upsilon\xi)\left(\gamma+2+\upsilon\xi\right) \\ &\quad+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+2+\upsilon\xi) \end{aligned}$$

bulunur. $(\gamma+1+\upsilon\xi)\left(\gamma+2+\upsilon\xi\right)=(\gamma+1)\left(\gamma+2\right)+(2\gamma+3)\upsilon\xi+\upsilon^{2}\xi^{2}$ olduğu ve (3.17), (3.18) ve (3.19) dikkate alınır ve tekrar dağıtılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} J(3,\gamma,\xi) &= \frac{4}{\left(1-\xi\right)^{2}}\left\{\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+1)\left(\gamma+2\right)\right. \\ &\quad\left.+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(2\gamma+3)\upsilon\xi+\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\upsilon^{2}\xi^{2}\right\} \\ &\quad+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+2)+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}\upsilon\xi \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} J(3,\gamma,\xi) &= \frac{4\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^{2}}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}+\frac{4\xi(2\gamma+3)}{\left(1-\xi\right)^{2}}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} \\ &\quad+\frac{4\xi^{2}}{\left(1-\xi\right)^{2}}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon^{2}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} \\ &\quad+\frac{4\xi^{2}\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^{3}}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\upsilon\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon} \end{aligned}$$

ara işlemlere devam edilirse

$$
\begin{aligned}
J(3,\gamma,\xi) &= \frac{4\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^2}\frac{2}{1-\xi}+\frac{4\xi(2\gamma+3)}{\left(1-\xi\right)^2}\frac{2(\xi+1)}{(1-\xi)^2}+\frac{4\xi^2}{\left(1-\xi\right)^2}\frac{2(\xi^2+4\xi+3)}{(1-\xi)^3}\\
&+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^3}\frac{2}{1-\xi}+\frac{4\xi^2\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^3}\frac{2(\xi+1)}{(1-\xi)^2}\\
&= \frac{8\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^3}+\frac{8\xi(\xi+1)(2\gamma+3)}{\left(1-\xi\right)^4}+\frac{8\xi^2(\xi^2+4\xi+3)}{\left(1-\xi\right)^5}\\
&+\frac{8\xi\left(\xi+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^4}+\frac{8\xi^2\left(\xi+1\right)^2}{\left(1-\xi\right)^5}\\
&= \frac{8\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right)}{\left(1-\xi\right)^3}+\frac{8\xi(\xi+1)(3\gamma+5)}{\left(1-\xi\right)^4}+\frac{8\xi^2(2\xi^2+6\xi+4)}{\left(1-\xi\right)^5}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. $J(4,\gamma,\xi)$ için

$$
\begin{aligned}
J(4,\gamma,\xi) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+3+\upsilon\xi)\,J\left(3,\gamma+\upsilon\xi,\xi\right)\\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+3+\upsilon\xi)\left(\frac{8\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)\left(\gamma+2+\upsilon\xi\right)}{\left(1-\xi\right)^3}\right.\\
&= \left.+\frac{8\xi(\xi+1)(3(\gamma+k\xi)+5)}{\left(1-\xi\right)^4}+\frac{8\xi^2(2\xi^2+6\xi+4)}{\left(1-\xi\right)^5}\right)\\
&= \frac{8}{\left(1-\xi\right)^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+3+\upsilon\xi)\left(\gamma+1+\upsilon\xi\right)\left(\gamma+2+\upsilon\xi\right)\\
&+\frac{8\xi(\xi+1)}{\left(1-\xi\right)^4}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+3+\upsilon\xi)\left(3\gamma+5+3\upsilon\xi\right)\\
&+\frac{8\xi^2(2\xi^2+6\xi+4)}{\left(1-\xi\right)^5}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\left(\frac{\xi+1}{2}\right)^{\upsilon}(\gamma+3+\upsilon\xi)
\end{aligned}
$$

olmak üzere yukarıda yapılan işlemler benzer şekilde tekrar edilir ve işlemlerin devamında gerekli yerlere (3.17), (3.18), (3.19) ve (3.20) eşitlikleri yazılırsa

$$
\begin{aligned}
J\left(4,\gamma,\xi\right) &= \frac{16(\gamma^3+6\gamma^2+11\gamma+6)}{\left(1-\xi\right)^4}+\frac{16\xi\left(\xi+1\right)\left(6\gamma^2+26\gamma+26\right)}{\left(1-\xi\right)^5}\\
&+\frac{16\xi^2\left(\xi+1\right)\left[(\xi+3)(3\gamma+6)+(\xi+1)(6\gamma+14)+(2\xi+4)(\gamma+3)\right]}{\left(1-\xi\right)^6}\\
&+\frac{16\xi^3\left(\xi+1\right)\left(6\xi^2+28\xi+6\right)}{\left(1-\xi\right)^7}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.3 $e_r(t)=t^r, r=\overline{0,4}$ test fonksiyonları olmak üzere (3.7) ile tanımlanan Lupaş-Jain operatörleri J_m^{ξ} için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}(e_0)(x) &= 1,\\
J_m^{\xi}(e_1)(x) &= \frac{x}{1-\xi},\\
J_m^{\xi}(e_2)(x) &= \frac{x^2}{(1-\xi)^2}+\frac{2x}{m(1-\xi)^3},\\
J_m^{\xi}(e_3)(x) &= \frac{x^3}{(1-\xi)^3}+\frac{6x^2}{m(1-\xi)^4}+\frac{6x(\xi+1)}{m^2(1-\xi)^5},\\
J_m^{\xi}(e_4)(x) &= \frac{x^4}{(1-\xi)^4}+\frac{12x^3}{m(1-\xi)^5}+\frac{12x^2(2\xi+3)}{m^2(1-\xi)^6}+\frac{2x(13\xi^2+34\xi+13)}{m^3(1-\xi)^7}.
\end{aligned}$$

İspat.

$$J_m^{\xi}(f)(x)=\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}f\left(\frac{\upsilon}{m}\right)$$

Lupaş-Jain operatörleri olmak üzere $f=e_0$ durumunda (3.6) eşitliğinden ötürü $\sum\limits_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}=1$ dir. O halde, $J_m^{\xi}(e_0)(x)=1$ olduğu açıktır. $f=e_1$ için

$$\begin{aligned}
&J_m^{\xi}(e_1)(x)\\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\frac{\upsilon}{m}=x\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\\
&= x\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+1+\xi+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}=\frac{x}{2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\\
&= \frac{x}{2}J(1,mx+\xi,\xi)=\frac{x}{2}\frac{2}{1-\xi}=\frac{x}{1-\xi}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$J_m^{\xi}(e_1)(x)=\frac{x}{1-\xi}$$

bulunur. $f=e_2$ test fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
&J_m^{\xi}(e_2)(x)\\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\frac{\upsilon^2}{m^2}=\frac{x}{m}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\upsilon\\
&= \frac{x}{m}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+1+\xi+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}(\upsilon+1)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
& J_m^{\xi}\left(e_2\right)(x) \\
= \;& \frac{x}{m}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+1+\xi+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon+\frac{x}{m}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+1+\xi+\upsilon\xi\right)_{k}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)} \\
= \;& \frac{x}{2m}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{2m}J(1,mx+\xi,\xi) \\
= \;& \frac{x}{2m}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+(\upsilon+1)\xi\right)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+(\upsilon+1)\xi)}+\frac{x}{2m}\frac{2}{1-\xi} \\
= \;& \frac{x}{4m}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+2\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{m(1-\xi)} \\
= \;& \frac{x}{4m}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m(1-\xi)} \\
= \;& \frac{x}{4m}\left(\frac{4\left(mx+2\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^2}+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^3}\right)+\frac{x}{m(1-\xi)} \\
= \;& \frac{x^2}{\left(1-\xi\right)^2}+\frac{2x}{m\left(1-\xi\right)^3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$J_m^{\xi}\left(e_2\right)(x)=\frac{x^2}{\left(1-\xi\right)^2}+\frac{2x}{m\left(1-\xi\right)^3}$$

eşitliğine ulaşılır. $f=e_3$ test fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}\left(e_3\right)(x) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx\left(mx+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\frac{\upsilon^3}{m^3} \\
&= \frac{x}{m^2}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{\left(mx+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\upsilon^2 \\
&= \frac{x}{m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+1+(\upsilon+1)\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+(\upsilon+1)\xi)}(\upsilon+1)^2 \\
&= \frac{x}{2m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon^2 \\
&\quad +\frac{x}{2m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}2\upsilon \\
&\quad +\frac{x}{2m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)} \\
&= \frac{x}{2m^2}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon \\
&\quad +\frac{x}{m^2}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{\left(mx+\xi+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{2m^2}J(1,mx+\xi,\xi)
\end{aligned}$$

olup devam edilirse

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}\left(e_3\right)(x) &= \frac{x}{2m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}(\upsilon+1) \\
&\quad +\frac{x}{m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{m^2(1-\xi)} \\
&= \frac{x}{4m^2}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad +\frac{x}{4m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad +\frac{x}{2m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{m^2(1-\xi)} \\
&= \frac{x}{4m^2}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+3\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+2}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+3\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad +\frac{x}{4m^2}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{2m^2}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^2(1-\xi)} \\
&= \frac{x}{8m^2}J(3,mx+3\xi,\xi)+\frac{3x}{4m^2}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^2(1-\xi)}
\end{aligned}$$

(3.14) ve (3.15) ile verilen $J\left(2,\gamma,\xi\right)$ ve $J\left(3,\gamma,\xi\right)$ eşitliklerinde sırasıyla $\gamma=mx+2\xi$ ve $\gamma=mx+3\xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
J\left(2,mx+2\xi,\xi\right) &= \frac{4\left(mx+2\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^2}+\frac{4\xi\left(\xi+1\right)}{\left(1-\xi\right)^3}, \\
J\left(3,mx+3\xi,\xi\right) &= \frac{8(mx+3\xi+1)(mx+3\xi+2)}{\left(1-\xi\right)^3}+\frac{8\xi\left(\xi+1\right)\left(3(mx+3\xi)+5\right)}{\left(1-\xi\right)^4} \\
&\quad +\frac{8\xi^2(2\xi^2+6\xi+4)}{\left(1-\xi\right)^5}
\end{aligned}$$

ve gerekli tüm ara işlemler titizlikle yapılırsa

$$J_m^{\xi}\left(e_3\right)(x)=\frac{x^3}{\left(1-\xi\right)^3}+\frac{6x^2}{m\left(1-\xi\right)^4}+\frac{6x(\xi+1)}{m^2\left(1-\xi\right)^5}$$

sonucuna ulaşılır. Son olarak $f=e_4$ için benzer işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}\left(e_4\right)(x) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{mx\left(mx+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\frac{\upsilon^4}{m^4} \\
&= \frac{x}{m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\upsilon\xi)}\upsilon^3 \\
&= \frac{x}{m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+1+(\upsilon+1)\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+(\upsilon+1)\xi)}(\upsilon+1)^3 \\
&= \frac{x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}(\upsilon^3+3\upsilon^2+3\upsilon+1)
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}\left(e_4\right)(x) &= \frac{x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon^3 \\
&\quad+\frac{3x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon^2 \\
&\quad+\frac{3x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon \\
&\quad+\frac{x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)} \\
&= \frac{x}{2m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon^2 \\
&\quad+\frac{3x}{2m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}\upsilon \\
&\quad+\frac{3x}{2m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{2m^3}J(1,mx+\xi,\xi)
\end{aligned}$$

devam edilirse

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}\left(e_4\right)(x) &= \frac{x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}(\upsilon+1)^2 \\
&\quad+\frac{3x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}(\upsilon+1) \\
&\quad+\frac{3x}{2m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}+\frac{x}{m^3(1-\xi)} \\
&= \frac{x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}\upsilon^2 \\
&\quad+\frac{x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}2\upsilon \\
&\quad+\frac{x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad+\frac{3x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}\upsilon \\
&\quad+\frac{3x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad+\frac{3x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^3(1-\xi)}
\end{aligned}$$

bulunur. Düzenlemeye devam edilirse

$$\begin{aligned}
&J_m^{\xi}(e_4)(x) \\
=\ & \frac{x}{4m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)}\upsilon \\
&+\frac{2x}{4m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)} \\
&+\frac{x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{3x}{4m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+2\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+2\xi+\upsilon\xi)} \\
&+\frac{3x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{3x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^3(1-\xi)}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}(e_4)(x) &= \frac{x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+3\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+2}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+3\xi+\upsilon\xi)}(\upsilon+1) \\
&\quad+\frac{2x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+3\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+2}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+3\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad+\frac{3x}{4m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+3\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+2}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+3\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad+\frac{7x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^3(1-\xi)} \\
&= \frac{x}{8m^3}\sum_{\upsilon=1}^{\infty}\frac{(mx+3\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+2}}{2^{\upsilon}(\upsilon-1)!}2^{-(mx+3\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad+\frac{x}{8m^3}\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(mx+3\xi+1+\upsilon\xi)_{\upsilon+2}}{2^{\upsilon+1}\upsilon!}2^{-(mx+3\xi+\upsilon\xi)} \\
&\quad+\frac{2x}{8m^3}J(3,mx+3\xi,\xi)+\frac{3x}{8m^3}J(3,mx+3\xi,\xi) \\
&\quad+\frac{7x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^3(1-\xi)}
\end{aligned}$$

bulunur. Dahası

$$\begin{aligned}
J_m^{\xi}(e_4)(x) &= \frac{x}{16m^3}J(4,mx+4\xi,\xi)+\frac{6x}{8m^3}J(3,mx+3\xi,\xi) \\
&\quad+\frac{7x}{4m^3}J(2,mx+2\xi,\xi)+\frac{x}{m^3(1-\xi)}
\end{aligned}$$

ulaşılır. (3.14), (3.15) ve (3.16) ile verilen $J(2,\gamma,\xi)$, $J(3,\gamma,\xi)$ ve $J(4,\gamma,\xi)$ eşitliklerinde sırasıyla $\gamma=mx+2\xi$, $\gamma=mx+3\xi$ ve $\gamma=mx+4\xi$ alınır ve ara işlemler yapılırsa

$$J_m^{\xi}(e_4)(x) = \frac{x^4}{(1-\xi)^4} + \frac{12x^3}{m(1-\xi)^5} + \frac{12x^2(2\xi+3)}{m^2(1-\xi)^6} + \frac{2x(13\xi^2+34\xi+13)}{m^3(1-\xi)^7}$$

sonucuna ulaşılır ve ispat tamamlanır. ■

3.2 Lupaş-Jain Operatörleri İçin Ağırlıklı Düzgün Yaklaşım

Bu bölümde, Gadzhiev tarafından 1976'da verilen ağırlıklı Korovkin tipli teorem yardımıyla Lupaş-Jain operatörleri ile ağırlıklı yaklaşım üzerinde durulacaktır. Bunun için Gadzhiev tarafından aşağıdaki gibi gösterimleri verilen fonksiyon uzaylarına değinelim. $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, monoton artan ve sürekli fonksiyonu için $\varphi(x) = 1 + \rho^2(x)$ bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayı

$$B_\varphi(\mathbb{R}^+) = \left\{ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \mid \|f\|_\varphi = \sup_{x\geq 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} < \infty \right\} \tag{3.21}$$

ile tanımlı olsun. Ayrıca $C_\varphi(\mathbb{R}^+),\ C_\varphi^v(\mathbb{R}^+),\ U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayları

$$C_\varphi(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in B_\varphi(\mathbb{R}^+),\ f \text{ sürekli} \right\}, \tag{3.22}$$

$$C_\varphi^v(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+),\ \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = M_f < +\infty \right\}, \tag{3.23}$$

$$U_\varphi(\mathbb{R}^+) = \left\{ f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+),\ \frac{f}{\varphi} \text{ düzgün sürekli} \right\} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlansınlar. Burada, $C_\varphi^v(\mathbb{R}^+)$ uzayında M_f, f ye bağlı bir sabittir. Böylece,

$$C_\varphi^v(\mathbb{R}^+) \subset U_\varphi(\mathbb{R}^+) \subset C_\varphi(\mathbb{R}^+) \subset B_\varphi(\mathbb{R}^+)$$

sağlanır (Gadzhiev 1976).

Lemma 3.4 $\{J_m\}_{m\geq 1}$, operatörlerinin $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayından $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayına pozitif lineer operatörler olması için gerek ve yeter şart $m \geq 1,\ x \geq 0$ için

$$|J_m(\varphi; x)| \leq K_m \varphi(x)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Burada K_m pozitif bir sabittir (Gadzhiev 1976).

Teorem 3.1 $\{J_m\}_{m\geq 1}$, $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayından $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayına giden pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m\left(\rho^i\right) - \rho^i \right\|_\varphi = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

şartı sağlanıyorsa bu durumda herhangi bir $f \in C_\varphi^v$ için

$$\lim_{m\to\infty} \left|\left|J_m f - f\right|\right|_\varphi = 0 \tag{3.25}$$

gerçeklenir (Gadzhiev 1976).

Şimdi, Lupaş-Jain operatörleri ile ağırlıklı düzgün yaklaşımı inceleyelim. Bunun için $\rho(x) = x$ ve ξ parametresini de $0 \leq \xi_m < 1$ ve $\lim_{m\to\infty} \xi_m = 0$ şartları altında $\xi = \xi_m$ dizisi şeklinde alalım.

Teorem 3.2 $0 \leq \xi_m < 1$ ve $\lim_{m\to\infty} \xi_m = 0$ olmak üzere $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi alalım. O halde, her $f \in C_\varphi^v(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m}(f) - f \right\|_\varphi = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Lemma 3.3 ve Lemma 3.4 göz önünde bulundurulursa Lupaş-Jain operatörleri $J_m^{\xi_m}$, $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayından $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayına pozitif lineer bir operatördür. Theorem 3.1 dikkate alınarak $J_m^{\xi_m}$ operatörler dizisi için ispatlayalım.

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m}(e_0) - e_0 \right\|_\varphi = 0$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\left\| J_m^{\xi_m}(e_1) - e_1 \right\|_\varphi &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| J_m^{\xi_m}(e_1) - e_1 \right|}{1+x^2} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| \frac{x}{1-\xi_m} - x \right|}{1+x^2} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{x}{1+x^2} \frac{\xi_m}{1-\xi_m} \right| \\
&\leq \frac{\xi_m}{1-\xi_m}
\end{aligned}$$

ifadesinden

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m}(e_1) - e_1 \right\|_\varphi = 0$$

elde edilir. Son olarak $2x \leq 1+x^2$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left\| J_m^{\xi_m}(e_2) - e_2 \right\|_{\varphi} &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| J_m^{\xi_m}(e_2) - e_2 \right|}{1+x^2} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{x^2}{(1-\xi_m)^2} + \frac{2x}{m(1-\xi_m)^3} - x^2 \right) \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{x^2}{1+x^2} \frac{2\xi_m - \xi_m^2}{(1-\xi_m)^2} + \frac{2x}{1+x^2} \frac{1}{m(1-\xi_m)^3} \right| \\
&\leq \frac{2\xi_m - \xi_m^2}{(1-\xi_m)^2} + \frac{1}{m(1-\xi_m)^3}
\end{aligned}$$

ifadesinden

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m}(e_2) - e_2 \right\|_{\varphi} = 0.$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar. ■

3.3 Lupaş-Jain Operatörleri Dizisinin Monotonluğu

Şimdi Lupaş-Jain operatörlerinin m ye göre monotonluğunu inceleyelim. Daha önce (2.1) ile verilen konvekslik tanımını anımsayarak aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.3 f, $[0,\infty)$ aralığında konveks bir fonksiyon olsun. O halde, $\forall m \in \mathbb{N}$ için J_m^{ξ} ile gösterilen Lupaş-Jain operatörleri de m ye göre artmayandır.

İspat. Operatörün tanımı göz önünde bulundurulur ve (3.6) ile verilen aşağıdaki eşitlikte

$$1 = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(\gamma+\upsilon\xi)}$$

$\gamma = x$ alınırsa

$$2^x = \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{x(x+\upsilon\xi+1)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-\upsilon\xi}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
& J_m^{\xi}(f)(x) - J_{m+1}^{\xi}(f)(x) \\
= \;& 2^x \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-((m+1)x+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\
& - \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(m+1)x((m+1)x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-((m+1)x+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m+1}\right)
\end{aligned}$$

olup

$$
\begin{aligned}
& J_m^{\xi}(f)(x) - J_{m+1}^{\xi}(f)(x) \\
= \; & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x(x+1+l\xi)_{l-1}}{2^l l!} 2^{-l\xi} \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-((m+1)x+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\
& - \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(m+1)x((m+1)x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-((m+1)x+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m+1}\right) \\
= \; & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x(x+1+l\xi)_{l-1}}{2^l l!} 2^{-l\xi} \sum_{\upsilon=l}^{\infty} \frac{mx(mx+1+(\upsilon-l)\xi)_{\upsilon-l-1}}{2^{(\upsilon-l)}(\upsilon-l)!} 2^{-((m+1)x+(\upsilon-l)\xi)} f\left(\frac{\upsilon-l}{m}\right) \\
& - \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(m+1)x((m+1)x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-((m+1)x+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m+1}\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Şimdi de toplamların sırası değiştirilir ve ortak paranteze alnırsa

$$
\begin{aligned}
& J_m^{\xi}(f)(x) - J_{m+1}^{\xi}(f)(x) \\
= \; & \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\upsilon} \frac{x(x+1+l\xi)_{l-1}}{l!} \frac{mx(mx+1+(\upsilon-l)\xi)_{\upsilon-l-1}}{2^{\upsilon}(\upsilon-l)!} 2^{-[(m+1)x+\upsilon\xi]} f\left(\frac{\upsilon-l}{m}\right) \\
& - \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{(m+1)x((m+1)x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-[(m+1)x+\upsilon\xi]} f\left(\frac{\upsilon}{m+1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& J_m^{\xi}(f)(x) - J_{m+1}^{\xi}(f)(x) \\
= \; & \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{\upsilon} \frac{mx(mx+1+l\xi)_{l-1}}{2^{\upsilon} l!} \frac{x(x+1+(\upsilon-l)\xi)_{\upsilon-l-1}}{(\upsilon-l)!} f\left(\frac{l}{m}\right) \right. \\
& \left. - \frac{(m+1)x((m+1)x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} f\left(\frac{\upsilon}{m+1}\right) \right\} 2^{-[(m+1)x+\upsilon\xi]} \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

bulunur. Konvekslik tanımı da dikkate alınarak, burada sırasıyla

$$
\alpha_l := \binom{\upsilon}{l} \frac{mx(mx+1+l\xi)_{l-1}\, x(x+1+(\upsilon-l)\xi)_{\upsilon-l-1}}{(m+1)x((m+1)x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}} \geq 0
$$

ve $t_l := \frac{l}{m}$ seçelim. Şimdi, Stancu ve Occorsio (Stancu ve Occorsio 1998) tarafından (3.27) ve (3.28) ile verilen Jensen ve Abel eşitliklerini hatırlayalım.

$$
\begin{aligned}
& (u+p)(u+p+1+s\xi)_{s-1} \\
= \; & \sum_{\upsilon=0}^{s} \binom{s}{\upsilon} u(u+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}\, p(p+1+(s-\upsilon)\xi)_{s-\upsilon-1} \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

ve

$$(u+p+s\xi)_s=\sum_{\upsilon=0}^{s}\binom{s}{\upsilon}(u+\upsilon\xi)_\upsilon\, p\,(p+1+(s-\upsilon)\xi)_{s-\upsilon-1}\,. \tag{3.28}$$

(3.27) ile gösterilen Jensen eşitliğinde $u=mx,\ p=x$ ve $s=\upsilon$ yazılırsa

$$\begin{aligned}&(m+1)\,x\,((m+1)\,x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}\\ =\ &\sum_{l=0}^{\upsilon}\binom{\upsilon}{l}mx\,(mx+1+l\xi)_{l-1}\,x\,(x+1+(\upsilon-l)\,\xi)_{\upsilon-l-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Yani

$$\sum_{l=0}^{\upsilon}\binom{\upsilon}{l}\frac{mx\,(mx+1+l\xi)_{l-1}\,x\,(x+1+(\upsilon-l)\,\xi)_{\upsilon-l-1}}{(m+1)\,x\,((m+1)\,x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}=\sum_{l=0}^{\upsilon}\alpha_l=1$$

olur. Diğer yandan (3.28) ile verilen Abel eşitliğinde $u=mx+\xi+1,\ p=x$ ve $s=\upsilon-1$ alınırsa

$$\begin{aligned}&((m+1)\,x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}\\ =\ &(mx+\xi+1+x+(\upsilon-1)\,\xi)_{\upsilon-1}\\ =\ &\sum_{l=0}^{\upsilon-1}\binom{\upsilon-1}{l}(mx+\xi+1+l\xi)_l\,x\,(x+1+(\upsilon-1-l)\,\xi)_{\upsilon-l-2}\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{\upsilon}\alpha_l t_l &= \frac{\sum_{l=1}^{\upsilon}\binom{\upsilon}{l}mx\,(mx+1+l\xi)_{l-1}\,x\,(x+1+(\upsilon-l)\,\xi)_{\upsilon-l-1}\left(\frac{l}{m}\right)}{(m+1)\,x\,((m+1)\,x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}\\ &= \frac{\upsilon\sum_{l=0}^{\upsilon-1}\binom{\upsilon-1}{l}mx\,(mx+\xi+1+l\xi)_l\,x\,(x+1+(\upsilon-1-l)\,\xi)_{\upsilon-l-2}}{m\,(m+1)\,x\,((m+1)\,x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}\\ &= \frac{\upsilon}{m+1}\,\frac{\sum_{l=0}^{\upsilon-1}\binom{\upsilon-1}{l}(mx+\xi+1+l\xi)_l\,x\,(x+1+(\upsilon-1-l)\,\xi)_{\upsilon-l-2}}{((m+1)\,x+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}\\ &= \frac{\upsilon}{m+1}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece f fonksiyonunun konveksliği de kullanılırsa (3.26) ifadesi bize

$$J_m^{\xi}(f)(x)\geq J_{m+1}^{\xi}(f)(x)$$

sonucunu verir ve ispat tamamlanır. ■

3.4 Lupaş-Jain Operatörlerinin Bir Şekil Koruma Özelliği

Bu kesimde de Li'nin (Li 2000) "ω süreklilik modülü fonksiyonu ise $B_m(\omega)$ Bernstein operatörleri de süreklilik modülü fonksiyonudur." teoreminden yola çıkarak ve benzer teknikler kullanarak J_m^{ξ} operatörlerimiz için aşağıdaki teorem üzerinde duralım.

Teorem 3.4 ω süreklilik modülü fonksiyonu olsun. O halde $\forall m \in \mathbb{N}$ için $J_m^{\xi}(\omega)$ da süreklilik modülü fonksiyonudur.

İspat. $x, y \in [0,\infty)$ ve $x \leq y$ olsun.

$$J_m^{\xi}(f)(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{my\,(my+1+j\xi)_{j-1}}{2^j j!} 2^{-(my+j\xi)} f\left(\frac{j}{m}\right)$$

operatörleri için Jensen (3.27) eşitliğinde $u = mx$, $p = my - mx$ ve $s = j$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&(mx+my-mx)\,(mx+my-mx+1+j\xi)_{j-1} \\
&= \sum_{\upsilon=0}^{j} \binom{j}{\upsilon} mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}\,(my-mx)\,(my-mx+1+(j-\upsilon)\,\xi)_{j-\upsilon-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.Yukarıdaki eşitlik, Lupaş-Jain operatörlerinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&J_m^{\xi}(f)(y) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\upsilon=0}^{j} \binom{j}{\upsilon} \frac{mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}\,(my-mx)\,(my-mx+1+(j-\upsilon)\,\xi)_{j-\upsilon-1}}{2^j j!} \\
&\quad \times 2^{-(my+j\xi)} f\left(\frac{j}{m}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Sırasıyla, toplamların sırası değiştirilir ve $j - \upsilon = l$ alınırsa

$$\begin{aligned}
&J_m^{\xi}(f)(y) \\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\sum_{j=\upsilon}^{\infty} \frac{1}{2^j (j-\upsilon)!\upsilon!} mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1} \\
&\quad \times (my-mx)\,(my-mx+1+(j-\upsilon)\,\xi)_{j-\upsilon-1}\, 2^{-(my+j\xi)} f\left(\frac{j}{m}\right) \\
&= \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\upsilon+l} l!\upsilon!} mx\,(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}\,(my-mx)\,(my-mx+1+l\xi)_{l-1} \\
&\quad \times 2^{-(my+(\upsilon+l)\xi)} f\left(\frac{\upsilon+l}{m}\right) \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} J_m^{\xi}(f)(x) &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(mx+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\ &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(m(y-(y-x))+\upsilon\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\ &= \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!} 2^{-(my+\upsilon\xi)} 2^{my-mx} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$2^{my-mx} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(my-mx)(my-mx+1+l\xi)_{l-1}}{2^l l!} 2^{-l\xi}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & J_m^{\xi}(f)(x) \\ = & \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\upsilon+l} l! \upsilon!} mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}(my-mx)(my-mx+1+l\xi)_{l-1} \\ & \times 2^{-(my+(\upsilon+l)\xi)} f\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

bulunur. (3.29) den (3.30) çıkarılırsa

$$\begin{aligned} & J_m^{\xi}(f)(y) - J_m^{\xi}(f)(x) \\ = & \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\upsilon+l} l! \upsilon!} mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}(my-mx) \\ & \times (my-mx+1+l\xi)_{l-1} 2^{-(my+(\upsilon+l)\xi)} \left[f\left(\frac{\upsilon+l}{m}\right) - f\left(\frac{\upsilon}{m}\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıda f fonksiyonu yerine ω süreklilik modülü fonksiyonu kullanılırsa

$$\begin{aligned} & J_m^{\xi}(\omega)(y) - J_m^{\xi}(\omega)(x) \\ = & \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\upsilon+l} l! \upsilon!} mx(mx+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}(my-mx) \\ & \times (my-mx+1+l\xi)_{l-1} 2^{-(my+(\upsilon+l)\xi)} \left[\omega\left(\frac{\upsilon+l}{m}\right) - \omega\left(\frac{\upsilon}{m}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

bulunur. Dahası

$$
\begin{aligned}
& J_m^{\xi}(\omega)(y) - J_m^{\xi}(\omega)(x) \\
\leq\ & \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\upsilon+l}l!\upsilon!} mx\left(mx+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon-1}\left(my-mx\right) \\
& \times\left(my-mx+1+l\xi\right)_{l-1} 2^{-(my+(\upsilon+l)\xi)}\omega\left(\frac{l}{m}\right) \\
=\ & \sum_{\upsilon=0}^{\infty} \frac{mx\left(mx+1+\upsilon\xi\right)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-\upsilon\xi} \\
& \times\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(my-mx\right)\left(my-mx+1+l\xi\right)_{l-1}}{2^{l}l!}2^{-(my+l\xi)}\omega\left(\frac{l}{m}\right) \\
=\ & \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(my-mx\right)\left(my-mx+1+l\xi\right)_{l-1}}{2^{l}l!}2^{-(m(y-x)+l\xi)}\omega\left(\frac{l}{m}\right) \\
=\ & J_m^{\xi}(\omega)(y-x)
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuçta bize $J_m^{\xi}(\omega)$ nun alt toplamsallık özelliğini sağladığını gösterir. Süreklilik modülü fonksiyonu ω azalmayan olduğu için $y \geq x$ iken $J_m^{\xi}(\omega)(y) - J_m^{\xi}(\omega)(x) \geq 0$, yani $J_m^{\xi}(\omega)$ azalmayandır. Son olarak Lupaş-Jain operatörlerinin tanımı dikkate alınarak $\lim_{x\to 0^+} J_m^{\xi}(\omega)(x) = J_m^{\xi}(\omega)(0) = \omega(0) = 0$ dır. Böylece $J_m^{\xi}(\omega)$ süreklilik modülü fonksiyonudur. İspat tamamlanır. ■

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LUPAŞ-JAIN OPERATÖRLERİ

Bu bölümde, önceki bölümlerde kurduğumuz ve üzerinde çalıştığımız Lupaş-Jain operatörleri yardımıyla Cárdenas-Morales vd. (2011) ve Aral vd. (2014) yazarlarının yaptıkları çalışmalara benzer yapıya sahip olan genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörlerini tanımlayacağız ve yaklaşım özellikleri üzerinde duracağız.
$f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$, $m \in \mathbb{N}$ ve τ fonksiyonu

(τ_1) τ, $[0,1]$ üzerinde her basamaktan diferensiyellenebilir bir fonksiyon,
(τ_2) $[0,1]$ üzerinde $\tau'(x) > 0$ ve $\tau(0) = 0$, $\tau(1) = 1$
şartlarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere genelleştirilmiş Bernstein operatörleri

$$\begin{aligned} B_m^{\tau}(f)(x) &= \sum_{\upsilon=0}^{m} \binom{m}{\upsilon} \tau^{\upsilon}(x)(1-\tau(x))^{m-\upsilon}(f \circ \tau^{-1})\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\ &= (B_m(f \circ \tau^{-1}) \circ \tau)(x) \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Cárdenas-Morales vd. 2011). Oluşturdukları bu fikir (King 2003), (Cárdenas-Morales vd. 2006) çalışmalarının devamı niteliğinde olup bu çalışmalarında operatörün şekil koruma ve yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Dahası, tanıttıkları operatörün klasik Bernstein operatörlerine kıyasla daha iyi şekil koruma özelliklerine sahip olduklarını göstermişlerdir. Burada ayrıca belirtilmelidir ki τ fonksiyonu sadece pozitif lineer operatörlerin genelleştirilmesi için değil aynı zamanda $\{1, \tau, \tau^2\}$ -uygun τ şartları altında- fonksiyonlarını test fonksiyonları kabul eden tanımlanma için de önem arz etmektedir.

2014 yılına geldiğimizde (Aral vd. 2014), Bernstein polinomları için (4.1) deki genelleştirmeye benzer olarak genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörlerini aşağıdaki gibi inşa etmişlerdir:

(ρ_1) ρ, $\mathbb{R}^+$ üzerinde sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\rho(0) = 0$,
(ρ_2) $\inf\limits_{x \in \mathbb{R}^+} \rho'(x) \geq 1$
şartları sağlansın. Bu durumda genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörü

$$
\begin{aligned}
S_m^{\rho}(f)(x) &= \exp(-m\rho(x))\sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{(m\rho(x))^{\upsilon}}{\upsilon!}\left(f\circ\rho^{-1}\right)\left(\frac{\upsilon}{m}\right) \\
&= (S_m(f\circ\rho^{-1})\circ\rho)(x) \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. (ρ_1) ve (ρ_2) koşulları, $\mathbb{R}^+$ üzerinde ρ fonksiyonunun tersinin varlığını ve kesin artanlığını garanti eder. Örneğin, $\rho(x) = x + x^2$ fonksiyonu (ρ_1) ve (ρ_2) koşullarını sağlar. Not edelim ki $\rho(x)$ fonksiyonunun tersi $\rho^{-1}(x)$ olmak üzere $\left(f\circ\rho^{-1}\right)\left(\frac{\upsilon}{m}\right) = f\left(\rho^{-1}\left(\frac{\upsilon}{m}\right)\right)$ dir. (Aral vd. 2014), genelleştirilmiş Szász-Mirakjan operatörlerinin çeşitli yöntemlerle yaklaşım ve şekil koruma özelliklerini göstermişlerdir.

2011 yılından bu yana yukarıdaki şartları sağlayan klasik operatörlerden daha iyi ya da en az onlar kadar iyi yaklaşım veya şekil koruma özelliklerine sahip olan pek çok çalışma yapılmıştır. Bunlardan birkaçını şöyle sıralayabiliriz: (Acar 2014), (Cárdenas-Morales vd. 2014), (Acar 2015), (Olgun vd. 2015), (Erençin ve Raşa 2016), (Başcanbaz-Tunca vd. 2016), (Acu vd. 2017), (Erençin vd. 2017), (Bodur vd. 2018), (Taşdelen Yeşildal ve Bodur 2019), (Qasim vd. 2020).

Biz de (Cárdenas-Morales vd. 2011) ve (Aral vd. 2014) yaptıkları çalışmaları motivasyon olarak alıp (Başcanbaz-Tunca vd. 2018) tarafından tanımlanan J_m^{ξ} operatörü için benzer bir genelleştirmeyi inşa edeceğiz. Yukarıdaki (ρ_1) ve (ρ_2) ile tanımlanan şartları sağlayan ρ fonksiyonu için genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri

$$
J_m^{\xi,\rho}(f;x) := J_m^{\xi,\rho}(f)(x) = \sum_{\upsilon=0}^{\infty}\frac{m\rho(x)(m\rho(x)+1+\upsilon\xi)_{\upsilon-1}}{2^{\upsilon}\upsilon!}2^{-(m\rho(x)+\upsilon\xi)}\left(f\circ\rho^{-1}\right)\left(\frac{\upsilon}{m}\right), \tag{4.3}
$$

$x\in(0,\infty)$ ve $J_m^{\xi,\rho}(f)(0) = f(0)$ dır. ξ parametresi $0\le\xi<1$ aralığında sadece m ye bağlı olup reel değerli ve sürekli f fonksiyonu $[0,\infty)$ da tanımlıdır. Açıktır ki; $\rho(x) = x$ durumunda (4.3) ile tanımlanan $J_m^{\xi,\rho}$ operatörleri (3.7) ile tanımlanan J_m^{ξ} operatörlerine indirgenir. Burada, önce genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörlerinin momentleri ve merkezi momentleri gösterilecek olup daha sonra operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı incelenecektir. Son olarak da Voronovskaya tipli teorem verilecektir.

Lemma 4.1 (4.3) ile tanımlanan genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri $J_m^{\xi,\rho}$ için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

$$
\begin{aligned}
J_m^{\xi,\rho}(1)(x) &= 1, \\
J_m^{\xi,\rho}(\rho)(x) &= \frac{\rho(x)}{1-\xi}, \\
J_m^{\xi,\rho}\left(\rho^2\right)(x) &= \frac{\rho^2(x)}{(1-\xi)^2} + \frac{2\rho(x)}{m(1-\xi)^3}, \\
J_m^{\xi,\rho}\left(\rho^3\right)(x) &= \frac{\rho^3(x)}{(1-\xi)^3} + \frac{6\rho^2(x)}{m(1-\xi)^4} + \frac{6\rho(x)(\xi+1)}{m^2(1-\xi)^5}, \\
J_m^{\xi,\rho}\left(\rho^4\right)(x) &= \frac{\rho^4(x)}{(1-\xi)^4} + \frac{12\rho^3(x)}{m(1-\xi)^5} + \frac{12\rho^2(x)(2\xi+3)}{m^2(1-\xi)^6} + \frac{2\rho(x)(13\xi^2+34\xi+13)}{m^3(1-\xi)^7}.
\end{aligned}
$$

İspat. Lemma 3.3 yardımıyla ispat kolayca görülebilir. ■

Lemma 4.2 $r = 1, 2$ ve 4 olmak üzere $\theta_r(t) = (\rho(t) - \rho(x))^r$ olsun. Lemma 4.1 dikkate alınarak genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri $J_m^{\xi,\rho}$ için aşağıdaki eşitlikler gerçeklenir.

$$
J_m^{\xi,\rho}(\theta_1)(x) = \frac{\rho(x)\xi}{1-\xi}, \tag{4.4}
$$

$$
J_m^{\xi,\rho}(\theta_2)(x) = \frac{\rho^2(x)\xi^2}{(1-\xi)^2} + \frac{2\rho(x)}{m(1-\xi)^3}, \tag{4.5}
$$

$$
\begin{aligned}
J_m^{\xi,\rho}(\theta_4)(x) = {} & \frac{\rho^4(x)\xi^4}{(1-\xi)^4} + \frac{12\rho^3(x)\xi^2}{m(1-\xi)^5} + \frac{12\rho^2(x)(2\xi^2+2\xi+1)}{m^2(1-\xi)^6} \\
& + \frac{2\rho(x)(13\xi^2+34\xi+13)}{m^3(1-\xi)^7}.
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

İspat. Lemma 4.1 dikkate alınır ve ara işlemler yapılırsa yukarıdaki eşitlikler elde edilir. ■

4.1 Genelleştirilmiş Lupaş-Jain Operatörleri İçin Ağırlıklı Yaklaşım

Bu bölümde, Gadzhiev tarafından 1976'da verilen ağırlıklı Korovkin tipli teorem yardımıyla genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri için ağırlıklı yaklaşım üzerinde durulacaktır. $\rho : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, monoton artan ve sürekli fonksiyon olsun. $\varphi(x) = 1 + \rho^2(x)$ ağırlık fonksiyonu (3.2) ile belirtilen kesimde ağırlıklı uzaylarla birlikte tanımlanmıştı.

Teorem 4.1 $0 \leq \xi_m < 1$ ve $\lim_{m\to\infty} \xi_m = 0$ olmak üzere $\{\xi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi alalım. O halde $J_m^{\xi_m,\rho}$ genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri olmak üzere her $f \in C_\varphi^v(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu için

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m,\rho}(f) - f \right\|_\varphi = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Lemma 4.1 ve Lemma 3.4 göz önünde bulundurulursa Lupaş-Jain operatörleri dizisi $J_m^{\xi_m,\rho}$, $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayından $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayına pozitif lineer bir operatördür. Theorem 3.1 dikkate alınarak $J_m^{\xi_m,\rho}$ operatörler dizisi için ispatlayalım.

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m,\rho}(1) - 1 \right\|_\varphi = 0$$

olduğu açıktır.

$$\begin{aligned}
\left\| J_m^{\xi_m,\rho}(\rho) - \rho \right\|_\varphi &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| J_m^{\xi_m,\rho}(\rho) - \rho \right|}{1+\rho^2(x)} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| \frac{\rho(x)}{1-\xi_m} - \rho(x) \right|}{1+\rho^2(x)} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{\rho(x)}{1+\rho^2(x)} \frac{\xi_m}{1-\xi_m} \right| \\
&\leq \frac{\xi_m}{1-\xi_m}
\end{aligned}$$

ifadesinden

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m,\rho}(\rho) - \rho \right\|_\varphi = 0$$

elde edilir. Son olarak $2\rho(x) \leq 1 + \rho^2(x)$ iken

$$\begin{aligned}
\left\| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^2\right) - \rho^2 \right\|_\varphi &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^2\right) - \rho^2 \right|}{1+\rho^2(x)} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{1}{1+\rho^2(x)} \left(\frac{\rho^2(x)}{(1-\xi_m)^2} + \frac{2\rho(x)}{m(1-\xi_m)^3} - \rho^2(x) \right) \right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{\rho^2(x)}{1+\rho^2(x)} \frac{-\xi_m^2 + 2\xi_m}{(1-\xi_m)^2} + \frac{2\rho(x)}{1+\rho^2(x)} \frac{1}{m(1-\xi_m)^3} \right| \\
&\leq \frac{-\xi_m^2 + 2\xi_m}{(1-\xi_m)^2} + \frac{1}{m(1-\xi_m)^3} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\lim_{m\to\infty} \left\| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^2\right) - \rho^2 \right\|_\varphi = 0.$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar. ■

4.2 Ağırlıklı Süreklilik Modülü Yardımıyla Yaklaşım Hızı

Şimdi de ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızını inceleyeceğiz. 2008'de, Holhoş bu tahminleri verebilmek için yeni bir süreklilik modülü tanımlamıştır. Her bir $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ve her $\delta \geq 0$ için

$$\omega_\rho(f;\delta) := \omega_\rho(f;\delta)_{\mathbb{R}^+} = \sup_{\substack{x,t\in\mathbb{R}^+ \\ |\rho(t)-\rho(x)|\leq\delta}} \frac{|f(t)-f(x)|}{\varphi(t)-\varphi(x)} \tag{4.8}$$

ile tanımlıdır (Holhoş 2008). Her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için $\omega_\rho(f;0) = 0$ ve $\omega_\rho(f;\delta)$, δ ya göre negatif olmayan ve azalmayan fonksiyondur. Ayrıca, her $f \in U_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için $\lim_{\delta\to0}\omega_\rho(f;\delta) = 0$ dır (Holhoş 2008).

Teorem 4.2 $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayından $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayına giden J_m pozitif lineer operatörü

$$\begin{aligned}
\left|\left|J_m(\rho^0)-\rho^0\right|\right|_{\varphi^0} &= a_m \\
\left|\left|J_m(\rho)-\rho\right|\right|_{\varphi^{1/2}} &= b_m \\
\left|\left|J_m(\rho^2)-\rho^2\right|\right|_{\varphi} &= c_m \\
\left|\left|J_m(\rho^3)-\rho^3\right|\right|_{\varphi^{3/2}} &= d_m
\end{aligned}$$

eşitliklerini sağlasın. Burada $m \to \infty$ iken a_m, b_m, c_m ve d_m sıfıra yakınsasın. Bu durumda her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için

$$||J_m(f)-f||_{\varphi^{3/2}} \leq (7+4a_m+2c_m)\omega_\rho(f;\delta_m) + ||f||_\varphi a_m$$

eşitsizliği gerçeklenir. Yukarıdaki eşitsizlikte

$$\delta_m = 2\sqrt{(a_m+2b_m+c_m)(1+a_m)} + a_m + 3b_m + 3c_m + d_m$$

alınmıştır (Holhoş 2008).

Uyarı 4.1 Yukarıda verilen (4.2) teoremi koşulları altında $\lim_{\delta\to0}\omega_\rho(f;\delta) = 0$ olduğu dikkate alınarak her $f \in U_{\varphi^{3/2}}(\mathbb{R}^+)$ için

$$\lim_{m\to\infty} ||J_m(f)-f||_{\varphi^{3/2}} = 0$$

gerçeklenir (Holhoş 2008).

Teorem 4.3 $0 \leq \xi_m < 1$ ve $\lim_{m\to\infty} \xi_m = 0$ olmak üzere $\left\{ J_m^{\xi_m,\rho} \right\}_{m\in\mathbb{N}}$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. O halde, her $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ için

$$\left\| J_m^{\xi_m,\rho}(f) - f \right\|_{\varphi^{3/2}} \leq \left(7 + \frac{-2\xi_m^2 + 4\xi_m}{(1-\xi_m)^2} + \frac{2}{m(1-\xi_m)^3} \right) \omega_\rho(f;\delta_m)$$

gerçeklenir. Burada δ_m için

$$\begin{aligned}\delta_m =& 2\left(\frac{2\xi_m}{1-\xi_m} + \frac{-\xi_m^2 + 2\xi_m}{(1-\xi_m)^2} + \frac{1}{m(1-\xi_m)^3} \right)^{1/2} + \frac{3\xi_m}{1-\xi_m} + \frac{-3\xi_m^2 + 6\xi_m}{(1-\xi_m)^2} \\ &+ \frac{3}{m(1-\xi_m)^3} + \frac{\xi_m^3 - 3\xi_m^2 + 3\xi_m}{(1-\xi_m)^3} + \frac{3}{m(1-\xi_m)^4} + \frac{3+3\xi_m}{m^2(1-\xi_m)^5}\end{aligned}$$

eşitliği vardır.

İspat. Lemma 4.1 dikkate alınarak

$$a_m = \left\| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^0\right) - \rho^0 \right\|_{\varphi^0} = 0,$$

$$\begin{aligned} b_m &= \left\| J_m^{\xi_m,\rho}(\rho) - \rho \right\|_{\varphi^{1/2}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| J_m^{\xi_m,\rho}(\rho) - \rho \right|}{(1+\rho^2(x))^{1/2}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| \frac{\rho(x)}{1-\xi_m} - \rho(x) \right|}{(1+\rho^2(x))^{1/2}} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{\rho(x)}{(1+\rho^2(x))^{1/2}} \frac{\xi_m}{1-\xi_m} \right| \\ &\leq \frac{\xi_m}{1-\xi_m} \end{aligned}$$

bulunur. Teorem 4.1 in ispatında (4.7) referansı ile bulunduğu üzere

$$c_m = \left\| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^2\right) - \rho^2 \right\|_\varphi \leq \frac{-\xi_m^2 + 2\xi_m}{(1-\xi_m)^2} + \frac{1}{m(1-\xi_m)^3}$$

sağlanır. Son olarak

$$\begin{aligned} d_m &= \left\| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^3\right) - \rho^3 \right\|_{\varphi^{3/2}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{\left| J_m^{\xi_m,\rho}\left(\rho^3\right) - \rho^3 \right|}{(1+\rho^2(x))^{3/2}} \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{1}{(1+\rho^2(x))^{3/2}} \left(\frac{\rho^3(x)}{(1-\xi_m)^3} + \frac{6\rho^2(x)}{m(1-\xi_m)^4} + \frac{6\rho(x)(\xi_m+1)}{m^2(1-\xi_m)^5} - \rho^3(x) \right) \right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{1}{(1+\rho^2(x))^{3/2}} \left(\frac{\rho^3(x) - \rho^3(x)(1-\xi_m)^3}{(1-\xi_m)^3} + \frac{6\rho^2(x)}{m(1-\xi_m)^4} + \frac{6\rho(x)(\xi_m+1)}{m^2(1-\xi_m)^5} \right) \right| \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left| \frac{1}{(1+\rho^2(x))^{3/2}} \frac{\rho^3(x) - \rho^3(x)(1-3\xi_m+3\xi_m^2-\xi_m^3)}{(1-\xi_m)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+\rho^2(x))^{3/2}} \frac{6\rho^2(x)}{m(1-\xi_m)^4} + \frac{1}{(1+\rho^2(x))^{3/2}} \frac{6\rho(x)(\xi+1)}{m^2(1-\xi_m)^5} \right| \end{aligned}$$

olup

$$
\begin{aligned}
d_m &= \sup_{x\in\mathbb{R}^+}\left|\frac{\rho^3(x)}{(1+\rho^2(x))^{3/2}}\left(\frac{\xi_m^3-3\xi_m^2+3\xi_m}{(1-\xi_m)^3}\right)+\frac{2\rho^2(x)}{(1+\rho^2(x))^{3/2}}\frac{3}{m\,(1-\xi_m)^4}\right.\\
&\quad\left.+\frac{2\rho(x)}{(1+\rho^2(x))^{3/2}}\frac{3+3\xi_m}{m^2\,(1-\xi_m)^5}\right|\\
&\le \frac{\xi_m^3-3\xi_m^2+3\xi_m}{(1-\xi_m)^3}+\frac{3}{m\,(1-\xi_m)^4}+\frac{3+3\xi_m}{m^2\,(1-\xi_m)^5}
\end{aligned}
$$

bulunur. $\lim_{m\to\infty}\xi_m=0$ olduğu için $m\to\infty$ iken a_m, b_m, c_m ve d_m dizileri sıfıra yakınsar. Dahası δ_m, Teorem 4.3 ifadesinde verildiği gibi seçilirse,

$$
\left\|J_m^{\xi_m,\rho}(f)-f\right\|_{\varphi^{3/2}}\le\left(7+\frac{-2\xi_m^2+4\xi_m}{(1-\xi_m)^2}+\frac{2}{m\,(1-\xi_m)^3}\right)\omega_\rho(f;\delta_m)
$$

bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Uyarı 4.2 $0\le\xi_m<1$ ve $\lim_{m\to\infty}\xi_m=0$ olsun. O halde, her $f\in U_{\varphi^{3/2}}(\mathbb{R}^+)$ için Uyarı 4.1 dikkate alınarak

$$
\lim_{m\to\infty}\left\|J_m^{\xi_m,\rho}(f)-f\right\|_{\varphi^{3/2}}=0
$$

olduğu görülebilir.

4.3 Genelleştirilmiş Lupaş-Jain Operatörleri İçin Voronovskaya Tipli Bir Teorem

Son olarak, bu kesimde Voronovskaya tipli teorem yardımıyla $L_m^{\xi_m,\rho}$ için asimptotik yaklaşım elde edelim.

Teorem 4.4 $0\le\xi_m<1$ ve $\lim_{m\to\infty}m\xi_m=0$, $f\in C(\mathbb{R}^+)$ ve $x\in\mathbb{R}^+$ olsun. $f\circ\rho^{-1}$ in $\rho(x)$ noktasında birinci ve ikinci türevi olduğunu varsayalım. Eğer $f\circ\rho^{-1}$ in ikinci türevi $\mathbb{R}^+$ üzerinde sınırlı ise

$$
\lim_{m\to\infty}m\left(J_m^{\xi_m,\rho}(f;x)-f(x)\right)=\rho(x)\left(f\circ\rho^{-1}\right)''(\rho(x))
$$

gerçeklenir.

İspat. $f\circ\rho^{-1}$ fonksiyonunun $\rho(x)\in\mathbb{R}^{+}$ noktasındaki Taylor formülünden

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(f\circ\rho^{-1}\right)(\rho(t)) = \left(f\circ\rho^{-1}\right)(\rho(x)) + \left(f\circ\rho^{-1}\right)'(\rho(x))\,(\rho(t)-\rho(x)) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(f\circ\rho^{-1}\right)''(\rho(x))\,(\rho(t)-\rho(x))^{2} + h_x(t)\,(\rho(t)-\rho(x))^{2} \end{aligned} \tag{4.9}$$

yazılabilir, burada, x ile t arasında

$$h_x(t) := \frac{\left(f\circ\rho^{-1}\right)''(\rho(\lambda)) - \left(f\circ\rho^{-1}\right)''(\rho(x))}{2} \tag{4.10}$$

olacak şekilde bir λ vardır. Operatörün lineerliği dikkate alınır ve (4.9) ile verilen Taylor açılımının her iki yanına $J_m^{\xi_m,\rho}$ uygulanır ve $\theta_r(t)=(\rho(t)-\rho(x))^r$ ifadesinin Lemma 4.2 ile daha önce belirtildiği hatırlanırsa

$$\begin{aligned} m(J_m^{\xi_m,\rho}(f;x)-f(x)) &= mJ_m^{\xi_m,\rho}(\theta_1;x)\left(f\circ\rho^{-1}\right)'(\rho(x)) \\ &\quad + mJ_m^{\xi_m,\rho}(\theta_2;x)\frac{\left(f\circ\rho^{-1}\right)''(\rho(x))}{2} + mJ_m^{\xi_m,\rho}(h_x(t)\theta_2;x) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.4), (4.5) sırasıyla birinci ve ikinci merkezi momentleri göz önünde bulundurularak,

$$\lim_{m\to\infty} mJ_m^{\xi_m,\rho}(\theta_1;x) = \lim_{m\to\infty} m\frac{\rho(x)\xi_m}{1-\xi_m} = 0$$

ve

$$\lim_{m\to\infty} mJ_m^{\xi_m,\rho}(\theta_2,x) = \lim_{m\to\infty} m\left(\frac{\rho^2(x)\xi_m^2}{(1-\xi_m)^2} + \frac{2\rho(x)}{m\,(1-\xi_m)^3}\right) = 2\rho(x)$$

elde edilir. Dahası,

$$\lim_{m\to\infty} m(J_m^{\xi_m,\rho}(f;x)-f(x)) = \rho(x)\left(f\circ\rho^{-1}\right)''(\rho(x)) + \lim_{m\to\infty} mJ_m^{\xi_m,\rho}(h_x(t)\theta_2;x)$$

olduğu görülür. Şimdi de eşitliğin sağ tarafındaki son terimin üzerinde duralım. Teorem gereği $|h_x(t)|<M$ (M bir sabit.) ve $\lim_{t\to x} h_x(t)=0$ dır. $\varepsilon>0$ olsun ve $\delta>0$ seçelim öyle ki $|t-x|<\delta$ iken $|h_x(t)|<\varepsilon$ yazılabilir. Ayrıca (ρ_2) den $|\rho(t)-\rho(x)|\geq|t-x|$ olduğu kolayca görülecektir. Böylece, eğer $|\rho(t)-\rho(x)|<\delta$ iken $\left|h_x(t)\,(\rho(t)-\rho(x))^2\right|<\varepsilon\,(\rho(t)-\rho(x))^2$ ve eğer $|\rho(t)-\rho(x)|\geq\delta$ iken $|h_x(t)|<M$ olacağından $\left|h_x(t)\,(\rho(t)-\rho(x))^2\right|\leq\frac{M}{\delta^2}\,(\rho(t)-\rho(x))^4$ yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} J_m^{\xi_m,\rho}\left(h_x(t)\,(\rho(t)-\rho(x))^2;x\right) &\leq \varepsilon J_m^{\xi_m,\rho}\left((\rho(t)-\rho(x))^2;x\right) \\ &\quad +\frac{M}{\delta^2}J_m^{\xi_m,\rho}((\rho(t)-\rho(x))^4;x) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.5) ve (4.6) göz önünde bulundurulursa

$$\lim_{m\to\infty} mJ_m^{\xi_m,\rho}(h_x(t)\left(\rho(t)-\rho(x)\right)^2;x)=0$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde, yaklaşım teorisinin önemli alt alanlarından biri olan pozitif lineer operatörler üzerinde durulmuştur. Öncelikle temel tanım ve kavramlar verilmiş daha sonra da Lupaş-Jain operatörleri ve genelleştirilmiş Lupaş-Jain operatörleri kurulmuş; kurulan operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşımı, monotonluğu, bir şekil koruma özelliği ve Voronovskaya tipli teoremi incelenmiştir. Pozitif lineer operatörler içerisinde önemli bir yer edinen Szász ve Lupaş operatörlerinin benzerlikleri yardımıyla kurulmuş olan operatörleri içeren bu tez; bu konularla ilgili motive edici bir çalışma olmayı amaçlar.

Sonuç olarak da, çok yakın zamanda incelenmeye başlanmış olan Lupaş-Jain operatörlerinin bir versiyonu ve bir genelleştirilmesi olmak üzere iki yaklaşım operatörleri literatüre kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

Abel, U., Ivan, M., 2007. *On a generalization of an approximation operator defined by A. Lupaş,* Gen. Math., 15 (1), 21–34.

Abel, U., Agratini, O., 2016. *Asymptotic behaviour of Jain operators,* Numer. Algorithms*,* 71, 553–565.

Acar, T., Aral, A., Raşa, I., 2014. *Modified Bernstein-Durrmeyer operators*, Gen. Math., 22 (1), 27-41.

Acar, T., 2015. *Asymptotic formulas for generalized Szász-Mirakyan operators*, Appl. Math. Comput., 263, 223-239.

Acu, A. M., Agrawal, P. N., Neer, T., 2017. *Approximation properties of modified Stancu operators*, Numer. Funct. Anal. Optim., 38 (3), 279–292.

Agratini, O.,1999. *On a sequence of linear positive operators,* Facta Univ. Ser. Math. Inform., 14, 41–48.

Agratini, O., 2000. *On the rate of convergence of a positive approximation process,* Nihonkai Math. J., 11, 47-56.

Agratini, O., 2013. *Approximation properties of a class of linear operators,* Math. Methods Appl. Sci.*,* 36 (17), 2353–2358.

Agratini, O., 2018. *A stop over Jain operators and their generalizations*, An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat. Inform., 2, 28-42.

Altomare, F. 2010. Korovkin-type Theorems and Approximation by Positive Linear Operators, Surveys in Approximation Theory, 5, 92-64

Başcanbaz-Tunca, G., İnce İlarslan, H. G., Erençin A., 2016. *Bivariate Bernstein type operators*, Appl. Math. Comput., 273, 543-552.

Başcanbaz-Tunca, G., Bodur, M., Söylemez, D., 2018. *On Lupaş-Jain Operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 63 (4), 525-537.

Bernstein, S. N., 1912. *Démonstration du théoréme de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités.* Communications de la Société Mathematique de Kharkov, 13, 1-2.

Bodur, M., 2016. *Lupaş Operatörlerinin Bazı Özellikleri*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Bodur, M., Taşdelen, F., Başcanbaz Tunca, G., 2018. *On multivariate Lupaş operators*, Hacet. J. Math. Stat., 47 (4), 783-792.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho P., Muñoz-Delgado, F. J., 2006. *Shape preserving approximation by Bernstein-type operators which fix polynomials*, Appl. Math. Comput., 182 (2), 1615-1622.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho P., Raşa, I., 2011. *Bernstein-type operators which preserve polynomials*, Comput. Math. Appl., 62, 158–163.

Cárdenas-Morales, D., Garrancho P., Raşa, I., 2014. *Approximation properties of Bernstein-Durrmeyer type operators,* Appl. Math. Comput., 232, 1-8.

Chebyshev, P. L., 1859. *Sur les questions de minima qui se rattachent a la représentation approximative des fonctions*, Mém. de l'Acad. de St. Pétersbourg, série VI, t. VII, 199-291.

Deniz, E., 2016. *Quantitative estimates for Jain-Kantorovich operators*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat., 65, 2, 121-132.

Dirik, F., 2007 *Statistical convergence and rate of convergence of a sequence of positive linear operators*, Math. Commun., 12 (2), 147–153.

Erençin, A., Taşdelen F., 2007. *On a family of linear and positive operators in weighted spaces*, J. Inequal. Pure Appl. Math.,8 (2), 6 pp.

Erençin, A., Taşdelen F., 2009. *On certain Kantorovich type operators*, Fasc. Math., 41, 65-71.

Erençin, A., Başcanbaz-Tunca, G., Taşdelen, F., 2014. *Some properties of the operators defined by Lupaş,* Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 43 (2), 168–174.

Erençin, A., Raşa, I., 2016. *Voronovskaya type theorems in weighted spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim., 37 (12), 1517–1528.

Erençin A., Olgun A., Taşdelen F., 2017. *Generalized Baskakov type operators*, Math. Slovaca, 67 (5), 1269-1277.

Euler, L.,1777. *De proiectione geographica De Lisliana in mappa generali imperii Russici usitata*, Acta academiae scientiarum Petropolitanae I, 1178, 143-153 (also in: Leonhardi Euleri opera omnia, ser. I, vol. XXVIII, Lausanne 1955).

Farcaş, A., 2012. *An asymptotic formula for Jain's operators,* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 57 (4), 511–517.

Farouki, R., 2012. The Bernstein polynomial basis: A centennial retrospective, Comput. Aided Geom. Des., 29, 379–419.

Finta, Z., 2001. *Pointwise approximation by generalized Szász-Mirakjan operators,* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 46 (4), 61–67.

Finta, Z., 2002. *Quantitative estimates for some linear and positive operators,* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 47 (3), 71–84.

Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A., 1995. *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, Ankara.

Gadzhiev, A. D., 1976. *Theorems of the type of P. P. Korovkin's type theorems,* Mat. Zametki, 20 (5), 781-786.

Gasper, G., Rahman, M., 2004. *Basic Hypergeometric Series,* Cambridge University Press.

Jain, G. C., 1972. *Approximation of functions by a new class of linear operators,* J. Aust. Math. Soc. J., 13 (3), 271–276.

Korovkin, P. P., 1953. *Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions* (Russian), Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.), 90, 961–964.

Li, Z., 2000. *Bernstein polynomials and modulus of continuity*, J. Approx. Theory, 102 (1), 171-174.

Lupaş, A., 1995. *The approximation by some positive linear operators,* In: Proceedings of the International Dortmund Meeting on Approximation Theory (M.W. Muller et al.,eds.), Mathematical Research, 86, 201-229, Akademie Verlag, Berlin.

Mhaskar H. N., Pai, D. V., 2000. *Fundamentals of approximation theory*, CRC Press, Boca Raton, FL; Narosa Publishing House, New Delhi.

Miheşan, V., 1997. *Approximation of continuous functions by linear and positive operators*, (Romanian), Ph. D. Thesis, Cluj.

Olgun, A., Taşdelen F., Erençin, A., 2015. *A generalization of Jain's operators,* Appl. Math. Comput., 266, 6–11.

Özarslan, M. A., 2016. *Approximation Properties of Jain-Stancu Operators,* Filomat, 30 (4), 1081–1088.

Özarslan, M. A., 2020. *Approximation properties of Jain-Appell operators*, Appl. Anal. Discrete Math., https://doi.org/10.2298/AADM190223044O.

Patel, P., Mishra, V. N., 2015. *On new class of linear and positive operators,* Boll. Unione Mat. Ital., 8 (2), 81–96.

Pinkus, A., 2000. *Weierstrass and approximation theory*. J. Approx. Theory, 107, 1–66.

Qasim, M., Khan, A., Abbas, Z., Raina, P., Cai, Q. B., 2020. *Rate of Approximation for Modified Lupaş-Jain-Beta Operators*, J. Funct. Spaces, Article ID 5090282. https://doi.org/10.1155/2020/5090282

Russell, B., 1931,1954. *The scientific outlook*. New York: W. W. Norton & Company Inc.

Sofonea, D. F., 2009. *On a sequence of linear and positive operators*. Results Math., 53 (3-4), 435–444.

Stancu, D. D., Occorsio, M. R., 1998. *On Approximation by binomial operators of Tiberiu Popoviciu type,* Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 27, 167-181.

Steffens, K. G., 2006. *The History of Approximation Theory: From Euler to Bernstein*, Birkhäuser, Boston.

Tarabie, S., 2012a. *On Jain-Beta linear operators*, Appl. Math. Inf. Sci., 6 (2), 213-216.

Tarabie, S., 2012b. *On some A-statistical approximation processes*, Int. J. Pure Appl. Math.,76 (3), 327–332.

Taşdelen Yeşildal, F., Bodur, M., 2019. *Bivariate Baskakov type operators*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math., 113 (4), 3269-3281.

Umar, S., Razi, Q., 1985. *Approximation of function by generalized Szász operators*, Commun. Fac. Sci. de l'Université d'Ankara, Serie A1: Mathématique 34, 45-52.

Velleman, D. J., Call, G. S., 1995. *Permutation and combination locks*, Math. Mag., 68 (4), 243-253.

Weierstrass, K., 1885. *Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin., 633-639, 789-805.