

T.C.
KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

e^{-x} FONKSİYONUNU KORUYAN
SZÁSZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH TIPLİ OPERATÖRLERİN
YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

HAVVA NUR PEKİNER

ARALIK 2020

Matematik Anabilim Dalında Havva Nur PEKİNER tarafından hazırlanan e^{-x} FONKSİYONUNU KORUYAN SZÁSZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ adlı Yüksek Lisans Tezinin Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Ali OLGUN

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumu ve tezin **Yüksek Lisans Tezi** olarak bütün gereklilikleri yerine getirdiğini onaylıyorum.

Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI

Danışman

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ali ARAL _____

Üye (Danışman) : Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI _____

Üye : Doç. Dr. Rabia AKTAŞ _____

28/12/2020

Bu tez ile Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onaylamıştır.

Prof. Dr. Recep ÇALIN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

e^{-x} FONKİYONUNU KORUYAN
SZÁSZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH TİPLİ
OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

HAVVA NUR PEKİNER

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi DİDEM AYDIN ARI

Aralık 2020, 35 sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmı olup, yaklaşımlar teorisi ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. İkinci bölüm bazı temel tanımlar ve teoremler içerir. Üçüncü bölümde e^{-x} fonksiyonunu koruyan Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörünün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde K_n^μ operatörlerinin yapısı ve bazı yakınsaklık özellikleri, üstel momentleri ve G_n ' in Kantorovich versiyonu incelenmiştir ve K_n^μ operatörünün yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü yardımı ile hesaplanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörleri, üstel fonksiyon, düzgün yakınsaklık, ağırlıklı süreklilik modülü.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF SZÁSZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH TYPE OPERATORS PRESERVING e^{-x}

Havva Nur PEKİNER

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, Master of Science Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Didem AYDIN ARI

December 2020, 35 pages

This thesis contains four parts. The first part is the introduction and some information about the approximation theory is given. The second part is consists of some basic definitions and theorems. In the third part, the convergence properties of Szász-Mirakyan-Kantorovich type operators which preserving e^{-x} are studied. In the fourth part, the structure and some approximation properties of K_n^μ operators, exponential moments, Kantorovich version of G_n and the rate of convergence of K_n^μ operators with the help of the weighted modulus of continuity are studied.

Key Words: Szász-Mirakyan-Kantorovich operators, exponential function, uniform convergence, weighted modulus of continuity.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın her aşamasında görüş ve önerileriyle bana yol gösteren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Didem AYDIN ARI' ya, eğitim hayatım boyunca maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili anneme, babama, kardeşlerime ve eşime çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	iv
1. GİRİŞ.....	1
2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	4
2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri.....	5
3. e^{-x} FONKSİYONUNU KORUYAN SZÁSZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH TIPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ.....	10
3.1. Operatörün İnşa Edilmesi ve Momentlerinin Hesaplanması.....	10
3.2. Operatörün Yakınsaklık Özellikleri.....	18
4. K_n^μ OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ.....	23
4.1. G_n Operatörünün Kantorovich Versiyonu.....	23
4.2. K_n^μ Operatörünün Ağırlıklı Uzaylarda Yakınsaklık Özellikleri.....	27
4.3. K_n^μ Operatörünün Yaklaşım Hızı.....	29
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	32
KAYNAKLAR.....	33

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{C}[0, \infty)$	$[0, \infty)$ ' da sürekli fonksiyonlar uzayı
$\omega(f; \delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$\omega^*(f; \delta)$	f fonksiyonunun farklı bir süreklilik modülü
$\tilde{\omega}(f; \delta)$	f fonksiyonunun ağırlıklı uzaylarda süreklilik modülü
(f_n)	f_n fonksiyon dizisi
L_n	lineer pozitif operatör
S_n	Szász-Mirakyan Operatörü
K_n	Szász-Mirakyan-Kantorovich Tipli Operatör
$G_n(f; x)$	Genelleştirilmiş Szász Operatörlerinin bir formu
D_μ	μ -türev
I_μ	μ -integral

1. GİRİŞ

Analizin önemli dallarından biri olan Yaklaşımlar Teorisi üzerine birçok çalışma yapılmaktadır. Bu alanda ki çalışmaların bir kısmı, Bernstein polinomları baz alınarak üretilmiş operatörlere ve Korovkin tipli yaklaşıma dayanmaktadır. Korovkin teoremi bu operatörlerin yaklaşım özelliklerinin elde edilmesine temel oluşturmaktadır. Bu teorem yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenebilen operatörlerin popüler olanlarından birisi de Szász operatörü ve bu operatörün çeşitli modifikasyonlarıdır. Szász-Mirakyan operatörleri;

$n \in \mathbb{N}, x \geq 0$ için ve $f \in C[0, \infty)$ olmak üzere

$$S_n(f, x) := e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanır. Szász-Mirakyan operatörleri sabit ve lineer fonksiyonları korur. Ancak bu operatörler, süreksiz fonksiyonların yaklaşımı için uygun olmadığından, sınırsız aralıklarda integrallenebilir fonksiyon uzaylarında bir yaklaşım elde etmek amacıyla, Butzer [1] tarafından aşağıdaki operatör tanımlanmıştır. Bu operatör Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörleri olarak adlandırılan, (1.1) ile verilen operatörlerin bir modifikasyonudur.

$n \in \mathbb{N}, x \geq 0$ için,

$$K_n(f, x) = ne^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f(t) dt \quad (1.2)$$

dir. Bu operatör ve çeşitli genelleştirmeleri ile ilgili çalışmalar, hâlâ yoğun bir şekilde devam etmektedir.

2003 yılında King, Bernstein polinomlarının x^2 fonksiyonunu koruyan bir modifikasyonu [2]' de vermiştir. Bu modifikasyon ile klasik Bernstein polinomlarından daha iyi bir yaklaşım elde edildiği görülmüştür.

Daha sonra Duman ve arkadaşları [3]' de, Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörlerine bir değişiklik getirerek, Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörlerinin lineer fonksiyonlarını koruyan ve $[0.5, \infty)$ ' da klasik Szász-Mirakyan-Kantorovich operatöründen daha iyi yaklaşım veren modifiye Szász-Mirakyan-Kantorovich

operatörünü çalışmışlardır. Bununla ilgili başka problemler [4 – 5]' deki kitaplarda görülebilir.

Acar ve arkadaşları [6]' da, üstel fonksiyon olan e^{2ax} ($a > 0$)' i üreten ve bu modifikasyon için bazı yaklaşık sonuçları ortaya koyan bir genelleştirme vermişlerdir. Szász-Mirakyan operatörlerinin diğer varyantlarının kuantitatif asimptotik formülü için bazı sonuçlardan [7 – 9] numaralı referanslarda bahsedilmiştir. Aslında son zamanlarda [6]' da göz önüne alınan modifiye form ile elde edilen yaklaşımdan daha iyi sonuçlar [10]' da elde edilmiştir.

Birçok araştırmacı Szász-Mirakyan operatörleri ve bu operatörlerin Kantorovich genelleştirmesi ile ilgili çalışmaları geliştirerek birçok makale yayınlamıştır. Bunlardan bazıları; Ditzian ve Totić [11], Duman ve arkadaşları [3], Aral ve arkadaşları [12], Acar ve arkadaşları [6 – 8], Boyanov ve Veselinov [13], Gupta ve Aral [14]' dir.

Szász-Mirakyan-Kantorovich tipli operatörler için yeni bir tanımlama yapılan farklı bir teknikte, bu operatörlerin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Bu çalışma için gerekli olan bazı ifadeleri aşağıda verelim.

(1.1) ile verilen S_n ve (1.2) ile verilen K_n operatörleri arasındaki ilişki

$$K_n = D \circ S_n \circ I \quad (1.3)$$

şeklinde verilmiştir. Burada $D(f) = f'$, $f \in C^1[0, \infty)$ ve $I(f; x) = \int_0^x f(t)dt$, $f \in C[0, \infty)$, $x \in [0, \infty)$ olarak tanımlıdır. Bu operatörler bize, $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ aralığı üzerinde ortalama değerleri vasıtasıyla Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon oluşturmamızı sağlar.

Aral ve arkadaşları [8]'de, $\exp(\mu t)$ ve $\exp(2\mu t)$, $\mu > 0$ üstel fonksiyonlarını yeniden üreten Szász-Mirakyan tipli operatörler inşa etmiş ve bu operatörlerin uygun şartlar altında S_n ' den daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bu genelleştirilmiş Szász operatörleri, $f \in C[0, \infty)$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_n(f, x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu x} e^{-\mu \frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (1.4)$$

ile tanımlanmıştır. Burada;

$$\alpha_n(x) = \frac{\mu x}{n \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1 \right)} \quad (1.5)$$

olup eşitliğin sağ tarafında ki seri mutlak yakınsaktır. $\mu > 0$ sabit parametresi ve üstel fonksiyon $\exp_\mu(x) = e^{\mu x}$ için $G_n f(x)$ ile Szász-Mirakyan operatörleri arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişki aşağıda gösterilmektedir.

$$G_n f(x) = \exp_\mu(x) S_n \left(\frac{f}{\exp_\mu}; \alpha_n(x) \right) \quad (1.6)$$

Bununla ilgili farklı çalışmalar ve daha ayrıntılı sonuçlar için [5,15,16,20] numaralı referanslarda ki çalışmalara bakılabilir.

$G_n(f)$ operatörlerinin genelleşmesini vermek için Păltănea tarafından [17]' de verilen yöntemle benzer bir yöntem kullanılmıştır. Păltănea bu çalışmada,

$D_\mu: C^1[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ ve $I_\mu: C[0, \infty) \rightarrow C^1[0, \infty)$ için;

$$I_\mu(f, x) = e^{\mu x} \int_0^x e^{-\mu t} f(t) dt, \quad f \in C[0, \infty)$$

ve

$$D_\mu(f, x) = f'(x) - \mu f(x), \quad f \in C^1[0, \infty)$$

şeklinde ifade etmiştir. Buna göre $f \in C[0, \infty)$ için $(D_\mu \circ I_\mu)(f) = f$ ve $f \in C^1[0, \infty)$ için $(I_\mu \circ D_\mu)(f) = f$ dir öyle ki $f(0) = 0$ dir.

Yukarıda ki operatörleri ve (1.3)' deki benzer eşitliği kullanarak K_n^μ operatörleri

$$K_n^\mu = D_\mu \circ G_n \circ I_\mu \quad (1.7)$$

eşitliği ile elde edilebilir. Bu tanımlama yardımıyla, K_n^μ operatörlerinin yakınsaklık özellikleri tezin ilerleyen bölümlerinde verilecektir.

2.TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tezin bu bölümünde, tezde kullanılacak temel tanımlar ifade edilerek, lineer pozitif operatörlerin sağladığı bazı özellikler verilecektir. Ayrıca tezin diğer kısımlarında kullanılacak olan bazı teoremler de ifade ve ispat edilecektir.

Bazı Temel Tanımlar

Tanım 2.1 X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X' den alınan herhangi bir f fonksiyonuna Y' de bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa, buna X uzayında bir *operatör* denir. Bu operatör $L(f; x) = g(x)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.2 X ve Y lineer fonksiyon uzayları olmak üzere,

$$L: X \rightarrow Y$$

şeklindeki L operatörünü göz önüne alalım. Eğer $\forall f, g \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f; x) + \beta L(g; x)$$

koşulu sağlanıyor ise L operatörüne *lineer operatör* denir.

Tanım 2.3 Eğer bir L operatörü pozitif değerli fonksiyonu yine pozitif değerli bir fonksiyona dönüştürüyor ise yani, f bir fonksiyon ve L bir operatör olmak üzere

$$f \geq 0 \text{ için } L(f) \geq 0$$

ise L operatörüne *pozitif operatör* denir. Hem lineerlik hem de pozitiflik şartlarını sağlayan operatörlere *lineer pozitif operatörler* denir.

$f \leq 0$ iken $L(f; x) \leq 0$ eşitsizliği de sağlanır. Gerçekten bunu görmek için kabul edelim ki $f \leq 0$ olsun. Bu durumda $-f \geq 0$ olacaktır. L operatörü pozitif olduğundan dolayı

$$L(-f; x) \geq 0$$

olur. L operatörünün lineerlik özelliği de gözönünde bulundurulduğunda

$$-L(f; x) \geq 0 \Rightarrow L(f; x) \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$f \leq 0 \text{ iken } L(f; x) \leq 0$$

dir.

2.1. Lineer Pozitif Operatörlerin Özellikleri

Lemma 2.1. Lineer pozitif operatörler monoton artandır. Yani

$$f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

dır.

İspat: Kabul edelim ki $f \leq g$ olsun. Bu durumda $g - f \geq 0$ olacağından ve L operatörünün pozitifliğinden

$$L(g - f) \geq 0$$

yazılabilir. Diğer yandan L operatörü lineer olduğundan

$$L(g - f) = L(g) - L(f) \geq 0 \Rightarrow L(f) \leq L(g)$$

elde edilir.

Lemma 2.2. L lineer pozitif bir operatör ise

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Herhangi bir f fonksiyonu için

$$-|f| \leq f \leq |f| \tag{2.1}$$

dir. L , lineer pozitif bir operatör olduğundan Lemma 2.1' den monoton artandır.

Yukarıdaki eşitsizlik operatöre uygulanırsa

$$-L(|f|) \leq L(f) \leq L(|f|)$$

yazılabilir. Böylece

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

elde edilir.

Teorem 2.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyon uzayında olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde n .dereceden bir $P_n(x)$ polinom dizisi vardır. Yani her sürekli f fonksiyonuna karşılık gelen $P_n(x)$ polinomlar dizisi vardır.

Bernstein, Weierstrass teoreminde adı geçen polinomlara bir örnek olan Bernstein polinomlarını $x \in [0,1]$ için

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

şeklinde tanımlamıştır.

Yaklaşımlar teorisinde önemli teoremlerden birisi de Korovkin tarafından vermiştir. Bu teorem, lineer pozitif operatörler alanında yapılan çalışmalara büyük katkı sağlamıştır.

Teorem 2.2 P.P. Korovkin Teoremi (1951)

$f \in C[a, b]$ olsun. Tüm reel ekseninde

$$|f(x)| < M_f \quad (2.2)$$

olmak üzere, eğer $L_n(f; x)$ lineer pozitif operatör dizisi her $x \in [a, b]$ için

- i. $L_n(1; x) \rightarrow 1$
- ii. $L_n(t; x) \rightarrow x$
- iii. $L_n(t^2; x) \rightarrow x^2$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $[a, b]$ 'de $L_n(f; x) \rightarrow f(x)$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $f \in C[a, b]$ olsun. Sürekli fonksiyon tanımından her pozitif ε sayısına karşılık öyle bir δ bulabiliriz ki $|t - x| \leq \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ kalır. $|t - x| > \delta$ olduğunda ise (2.2)' den ve üçgen eşitsizliğinden dolayı,

$$|f(t) - f(x)| \leq |f(t)| + |f(x)| \leq 2M_f \quad (2.3)$$

yazılabilir. Diğer taraftan eğer $|t - x| > \delta$ ise $\frac{|t-x|}{\delta} > 1$ olacağından,

$$\frac{(t-x)^2}{\delta^2} > 1 \quad (2.4)$$

sağlanır. (2.3) ve (2.4)' den

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Özetle $|t - x| \leq \delta$ için, $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ ve $|t - x| > \delta$ için

$$|f(t) - f(x)| < 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2}$$

dir. Böylece her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için;

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon + 2M_f \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \quad (2.5)$$

dir. Eğer (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlayan (L_n) operatör dizisinin,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f(t); x - f(x))\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğini sağladığını gösterirsek ispat tamamlanmış olur. Şimdi bunu gösterelim.

Lineerlikten:

$$\begin{aligned} |L_n(f(t); x) - f(x)| &= |L_n(f(t); x) - f(x) + L_n(f(x); x) - L_n(f(x); x)| \\ &= |L_n(f(t); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)| \\ &= \left| L_n((f(t) - f(x)); x) + f(x)(L_n(1; x) - 1) \right| \end{aligned}$$

dir. Burada üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq \left| L_n((f(t) - f(x)); x) \right| + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. Diğer taraftan lineer pozitif operatörler monoton artan ve

$$(f(t) - f(x)) \leq |f(t) - f(x)|$$

eşitsizliği sağlandığından

$$\left| L_n((f(t) - f(x)); x) \right| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

yazılabilir. Operatör pozitif ve $|f(t) - f(x)| \geq 0$

olduğundan,

$$L_n(|f(t) - f(x)|; x) = L_n(|f(t) - f(x)|; x)$$

dir. Böylece

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + |f(x)| |L_n(1; x) - 1|$$

olduğu gösterilmiş olur. (2.2)'den

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n(|f(t) - f(x)|; x) + M_f |L_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. (L_n) monoton artan olduğundan (2.5)'in kullanılmasıyla;

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| \leq L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} (t-x)^2; x\right) + M_f |L_n(1; x) - 1| \quad (2.6)$$

bulunur. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned}
& L_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) = \\
& L(\varepsilon; x) + L_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2}(t-x)^2; x\right) \\
& = \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\
& = \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x)] \\
& = \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [L_n(t^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2xL_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - x^2] \\
& = \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - 1)]
\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlik (2.6)' da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& |L_n(f(t); x) - f(x)| \\
& \leq \varepsilon L_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [(L_n(t^2; x) - x^2) + 2x(x - L_n(t; x) + x^2 L_n(1; x) - 1)] \\
& \quad + M_f |(L_n(1; x) - 1)| \tag{2.7}
\end{aligned}$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) koşullarının (2.7)' de kullanılması ile

$$|L_n(f(t); x) - f(x)| < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |L_n(f(t); x) - f(x)| = 0$$

ile ispat tamamlanır.

Tanım 2.4 (Süreklilik Modülü)

$f \in C[a, b]$ olsun. $\forall \delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun *süreklilik modülü* denir.

Lemma 2.3 Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $\omega(f; \delta) \geq 0$
- ii. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$
- iii. $\forall m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$
- iv. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$
- v. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$
- vi. $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$
- vii. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$

Tanım 2.5 (Ağırlıklı Uzaylarda Farklı Bir Süreklilik Modülü)

$f \in C_\mu(\mathbb{R}^+)$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{e^{\mu x}} = k, \quad k > 0$ olsun.

$$\tilde{\omega}(f; \delta) = \sup_{|t-x| \leq \delta, x \geq 0} \frac{|f(t) - f(x)|}{e^{\mu t} + e^{\mu x}}$$

ile tanımlanan $\tilde{\omega}(f; \delta)$ ifadesine *ağırlıklı uzayda bir süreklilik modülü* denir ([8]).

Lemma 2.4 $f \in C_\mu(\mathbb{R}^+)$ fonksiyonu verilsin.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{\omega}(f; \delta) = 0$$

dır.

Lemma 2.5 Herhangi bir m tam sayısı ve $f \in C_\mu(\mathbb{R}^+)$ için,

$$\tilde{\omega}(f; m\delta) \leq 2m\tilde{\omega}(f; \delta)$$

dir.

3. e^{-x} FONKSİYONUNU KORUYAN SZÁSZ-MIRAKYAN-KANTOROVICH TİPLİ OPERATÖRLERİN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, e^{-x} fonksiyonunu koruyan Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörü ve bazı yakınsaklık özellikleri verilecektir. Bununla birlikte klasik operatörlere göre daha iyi yaklaşım elde edilebileceği gösterilecektir.

Szász-Mirakyan operatörü için yapılan çalışmalar genişletilerek Szász-Mirakyan-Kantorovich tipli genelleştirmeleri verilmekte ve hâlâ yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Şimdi operatörün kurulumu gösterilecektir.

3.1. Operatörün İnşa Edilmesi ve Momentlerinin Hesaplanması

Szász-Mirakyan-Kantorovich operatöründe, x yerine $a_n(x)$ alınarak modifiye Szász-Kantorovich operatörleri

$$K_n(f)(x) = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f(t) dt \quad (3.1)$$

şekilde tanımlanmıştır. (3.1) operatöründe $f(t) = e^{-t}$ alınırsa;

$$\begin{aligned} e^{-x} &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{-t} dt \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} [-e^{-t}]_{\frac{k}{n}}^{(k+1)/n} \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[-e^{-\frac{k+1}{n}} + e^{-\frac{k}{n}} \right] \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[e^{-\frac{k}{n}} \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \right] \\ &= n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left(e^{-\frac{1}{n}} \right)^k \\ &= n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} \left(na_n(x) e^{-\frac{1}{n}} \right)^k}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) e^{-na_n(x)} e^{na_n(x)} e^{-\frac{1}{n}} \\
&= n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right) e^{na_n(x) \left[e^{-\frac{1}{n}} - 1\right]} \\
&= e^{\ln \left(n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\right) + na_n(x) \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)} \\
&= e^{\ln \left(n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)\right) + na_n(x) \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan x çekilirse

$$-x = \ln \left(n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \right) + na_n(x) \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

dir. Burada $a_n(x)$ ifadesi yalnız bırakılırsa;

$$a_n(x) = \frac{-x - \ln \left(n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \right)}{n \left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)} \quad (3.2)$$

bulunur. Buradan (3.2), (3.1) denkleminde yerine yazılırsa;

$$K_n(f, x) = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} e^{\frac{x + \ln \left(n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \right)}{\left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)}} \left(\frac{x + \ln \left(n \left(1 - e^{-\frac{1}{n}} \right) \right)}{\left(e^{-\frac{1}{n}} - 1 \right)} \right)^k \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} f(t) dt \quad (3.3)$$

elde edilir. Şimdi bu operatörle yaklaşım için gerekli hesaplamalar verilecektir.

Lemma 3.1 $f = e^{At}$ olsun. Bu durumda

$$K_n(e^{At}, x) = \frac{n(e^{A/n} - 1)}{A} e^{na_n(x)[e^{A/n} - 1]}$$

dir.

İspat: (3.1)' de $f = e^{At}$ alınırsa,

$$K_n(e^{At}, x) = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{At} dt$$

$$\begin{aligned}
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{e^{At}}{A} \right]_{k/n}^{(k+1)/n} \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[e^{\frac{Ak}{n}} \left(e^{\frac{A}{n}} - 1 \right) \right] \\
&= \frac{n(e^{A/n} - 1)}{A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} \left(ne^{A/n} a_n(x) \right)^k}{k!} \\
&= \frac{n(e^{A/n} - 1)}{A} e^{-na_n(x)[e^{A/n}-1]}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.2. $e_r(t) = t^r$, $r = 0,1,2$ olmak üzere;

$$\text{i. } K_n(e_0, x) = 1 \quad (3.4)$$

$$\text{ii. } K_n(e_1, x) = a_n(x) + \frac{1}{2n} \quad (3.5)$$

$$\text{iii. } K_n(e_2, x) = a_n^2(x) + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{1}{3n^2} \quad (3.6)$$

dir.

İspat: $r = 0$ için $e_0(t) = t^0 = 1$ dir. (3.2)' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
K_n(e_0, t) &= K_n(1, t) = n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} 1 dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} t \Big|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \frac{1}{n} \\
&= n \frac{1}{n} e^{-na_n(x)} e^{na_n(x)} \\
&= e^0
\end{aligned}$$

$$= 1$$

elde edilir. Yani, $K_n(e_0, t) = K_n(1, x) = 1$ bulunur. Şimdi $K_n(t, x)$ ' i hesaplayalım.
 $e_1(t) = t^1 = t$, (3.1)' de yazılırsa;

$$\begin{aligned}
K_n(t, x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} t dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \frac{t^2}{2} \Big|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}{2} - \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{2} \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{k^2 + 2k + 1 - k^2}{2n^2} \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{2k + 1}{2n^2} \right] \\
&= \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} 2k \right] + \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \right] \\
&= \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{(k-1)!} 2k \right] + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1}}{k!} \\
&= \frac{1}{2n} + \frac{na_n(x)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \\
&= a_n(x) + \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $K_n(e_1, t) = K_n(t, x) = a_n(x) + \frac{1}{2n}$ bulunur. Son olarak $e_2(t) = t^2$, (3.1)' de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
K_n(t^2, x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} t^2 dt \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \frac{t^3}{3} \Big|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{\left(\frac{k+1}{n}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{3} \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3}{3n^3} \right] \\
&= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{3k^2 + 3k + 1}{3n^3} \right] \\
&= \frac{1}{3n^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{k^2 + k}{n^2} \right] \\
&= \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k k^2}{k!} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k k}{k!} \\
&= \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k k}{(k-1)!} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{(k-1)!} \\
&= \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1} (k+1)}{k!} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1}}{k!} \\
&= \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1} k}{k!} \\
&\quad + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1}}{k!} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k (na_n(x))}{k!} \\
&= \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k (na_n(x)) k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k (na_n(x))}{k!} \\
& + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k (na_n(x))}{k!} + \frac{na_n(x)}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \\
& = \frac{1}{3n^2} + \frac{2a_n(x)}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{(k-1)!} \\
& = \frac{1}{3n^2} + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{a_n(x)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1}}{k!} \\
& = \frac{1}{3n^2} + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{a_n(x)}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k (na_n(x))}{k!} \\
& = \frac{1}{3n^2} + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{na_n^2(x)}{n} \\
& = \frac{1}{3n^2} + \frac{2a_n(x)}{n} + a_n^2(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$K_n(e_2, t) = K_n(t^2, x) = a_n^2(x) + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{1}{3n^2} \quad (3.6)$$

dir.

Lemma 3.3. $K_n(\phi_x^m(t), x) = K_n((t-x)^m, x)$ $m = 0, 1, 2, 4$ değerleri için;

- i. $K_n(\phi_x^0(t), x) = 1$
- ii. $K_n(\phi_x^1(t), x) = a_n(x) + \frac{1}{2n} - x$
- iii. $K_n(\phi_x^2(t), x) = (a_n(x) - x)^2 + \frac{2a_n(x)}{n} - \frac{x}{n} + \frac{1}{3n^2}$
- iv. $K_n(\phi_x^4(t), x) = \frac{1}{5n^4} [1 - 5nx + 10n^2x^2 - 10n^3x^3 + 5n^4x^4 + 30na_n(x) - 70n^2x\alpha_n(x) + 60n^3x^2\alpha_n(x) - 20n^4x^3\alpha_n(x) + 75n^2\alpha_n^2(x) - 90n^3x\alpha_n^2(x) + 30n^4x^2\alpha_n^2(x) + 40n^3\alpha_n^3(x) - 20n^4x\alpha_n^3(x) + 5n^4\alpha_n^4(x)]$

eşitlikleri sağlanır.

İspat:

$\phi_x^0(t) = (t - x)^0 = 1$ olduğundan, (3.4) ile

$$K_n(\phi_x^0(t), x) = K_n(1, x) = 1$$

olduğu gösterilmiştir. $\phi_x^1(t) = (t - x)^1 = t - x$ için;

$$K_n((t - x), x)$$

$$\begin{aligned} &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} (t - x) dt \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{t^2}{2} - xt \right] \Big|_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{(k+1)^2}{2n^2} - x \frac{(k+1)}{n} - \left(\frac{k^2}{2n^2} - \frac{kx}{n} \right) \right] \\ &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{k^2 + 2k + 1 - k^2}{2n^2} + \frac{-kx - x + kx}{n} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \left[\frac{2k + 1}{n} - x \right] \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k (2k + 1)}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k x}{k!} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k 2k}{k!} + \frac{1}{2n} - x \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k k}{k!} + \frac{1}{2n} - x \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k k}{(k-1)!} + \frac{1}{2n} - x \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^{k+1}}{k!} + \frac{1}{2n} - x \end{aligned}$$

$$= \frac{na_n(x)}{n} + \frac{1}{2n} - x$$

$$= a_n(x) + \frac{1}{2n} - x$$

bulunur. (3.6) ile $\phi_x^2(t) = (t - x)^2 = t^2 - 2tx + x^2$ için,

$$K_n(\phi_x^2(t), x) = K_n((t - x)^2, x)$$

$$= a_n^2(x) + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{1}{3n^2} - 2x \left(a_n(x) + \frac{1}{2n} \right) + x^2$$

$$= a_n^2(x) + \frac{2a_n(x)}{n} + \frac{1}{3n^2} - 2xa_n(x) - \frac{x}{n} + x^2$$

$$= (a_n(x) - x)^2 + \frac{2a_n(x)}{n} - \frac{x}{n} + \frac{1}{3n^2}$$

elde edilir. Matematika programı kullanılarak;

$$\begin{aligned} K_n(\phi_x^4(t), x) &= \frac{1}{5n^4} [1 - 5nx + 10n^2x^2 - 10n^3x^3 + 5n^4x^4 + 30na_n(x) \\ &\quad - 70n^2x\alpha_n(x) + 60n^3x^2\alpha_n(x) - 20n^4x^3\alpha_n(x) + 75n^2\alpha_n^2(x) \\ &\quad - 90n^3x\alpha_n^2(x) + 30n^4x^2\alpha_n^2(x) + 40n^3\alpha_n^3(x) - 20n^4x\alpha_n^3(x) \\ &\quad + 5n^4\alpha_n^4(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Matematika programı yardımıyla;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{-x - \ln(n(1 - e^{-1/n}))}{n(e^{-1/n} - 1)} + \frac{1}{2n} - x \right] = \frac{x}{2}$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{-x - \ln(n(1 - e^{-1/n}))}{n(e^{-1/n} - 1)} - x \right)^2 + \frac{2[-x - \ln(n(1 - e^{-1/n}))]}{n^2(e^{-1/n} - 1)} - \frac{x}{n} + \frac{1}{3n^2} \right] = x$$

limitleri hesaplanır.

3.2 Operatörün Yakınsaklık Özellikleri

$C^*[0, \infty)$ uzayı, sonsuza giderken sonlu limite sahip, üzerinde düzgün norm tanımlı, reel değerli sürekli fonksiyonların alt uzayını gösterebilirsin. Bu tip uzaylarda, Boyanov ve Veselinov lineer pozitif operatör dizileri için düzgün yakınsaklık tahminini [13]' de vermiştir. Holhoş ise [19]' da aşağıdaki teoremi ifade etmiştir.

Teorem Eğer $L_n : C^*[0, \infty) \rightarrow C^*[0, \infty)$ lineer pozitif operatör dizisi

$$\|L_n(e_0) - 1\|_{[0, \infty)} = \alpha_n$$

$$\|L_n(e^{-t}) - e^{-x}\|_{[0, \infty)} = \beta_n$$

$$\|L_n(e^{-2t}) - e^{-2x}\|_{[0, \infty)} = \gamma_n$$

eşitliklerini sağlarsa,

$$\|L_n f - f\|_{[0, \infty)} \leq \alpha_n \|f\|_{[0, \infty)} + (2 + \alpha_n) \omega^*(f, \sqrt{\alpha_n + 2\beta_n + \gamma_n}) \quad , \quad f \in C^*[0, \infty)$$

dir. Buradaki süreklilik modülü

$$\omega^*(f, \delta) := \sup_{\substack{|e^{-x} - e^{-t}| \leq \delta \\ x, t > 0}} |f(t) - f(x)|$$

dir. Holhoş'un teoreminin e^{-x} i koruyan Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörüne uygulaması aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.1. $f \in C^*[0, \infty)$ için,

$$\|K_n f - f\|_{[0, \infty)} \leq 2\omega^*(f, \sqrt{\gamma_n}).$$

Burada γ_n , n sonsuza giderken sıfıra yaklaşır. Böylece $K_n f$, f ' e düzgün yakınsar.

Lemma 3.1 ve Lemma 3.3' den

$$\begin{aligned} K_n(e^{-2t}, x) &= n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-na_n(x)} (na_n(x))^k}{k!} \int_{k/n}^{(k+1)/n} e^{-2t} dt \\ &= \frac{n(1 - e^{-2/n})}{2} e^{na_n(x)[e^{-2/n} - 1]} \end{aligned}$$

elde edilir. Matematika programı yardımıyla;

$$K_n(e^{-2t}, x) = \frac{n(1 - e^{-2/n})}{2} e^{na_n(x)[e^{-2/n} - 1]}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{n(1 - e^{-2/n})}{2} e^{[-x - \ln(n(1 - e^{-1/n}))][e^{-2/n} - 1]} \\
&= e^{-2x} + \frac{x e^{-2x}}{n} + \frac{e^{-2x}(6x^2 - 6x - 5)}{n^2} + o(n^{-3})
\end{aligned}$$

bulunur. Supremum alınarak,

$$\sup_{x \in [0, \infty)} x e^{-2x} = \frac{1}{2e}, \quad \sup_{x \in [0, \infty)} x^2 e^{-2x} = \frac{1}{e^2}$$

elde edilir. Böylece;

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \|K_n(e^{-2t}) - e^{-2x}\|_{[0, \infty)} \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} |K_n(e^{-2t}) - e^{-2x}| \leq \frac{1}{2ne} + \frac{1}{n^2} \left(\frac{9}{2e} + 5 \right) + o(n^{-3}) \\
&\leq o(n^{-1})
\end{aligned}$$

dir.

Not 3.1. S_n klasik Szász-Kantorovich operatörleri için Teorem 3.1' nin koşulları ile

$$\|S_n f - f\|_{[0, \infty)} \leq 2\omega^*(f, \sqrt{2\beta_n + \gamma_n})$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan;

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \sup_{x \in [0, \infty)} |S_n(e^{-t}) - e^{-x}| \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| n(1 - e^{-1/n}) e^{nx[e^{-1/n} - 1]} - e^{-x} \right| \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} e^{-x} \left| n(1 - e^{-1/n}) e^{x(n[e^{-1/n} - 1] + 1)} - 1 \right| \\
&\leq (n(1 - e^{-1/n}) - 1), \quad (x = 0 \text{ için})
\end{aligned}$$

ortalama değer teoreminden, $\frac{e^{-1/n} - 1}{1/n} = -e^{x_0} \leq -1 \Rightarrow n[e^{-1/n} - 1] + 1 \leq 0$ ve

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \sup_{x \in [0, \infty)} |S_n(e^{-2t}) - e^{-2x}| \\
&= \sup_{x \in [0, \infty)} \left| \frac{n(1 - e^{-2/n})}{2} e^{nx[e^{-2/n} - 1]} - e^{-2x} \right|
\end{aligned}$$

$$= \sup_{x \in [0, \infty)} e^{-2x} \left| n(1 - e^{-2/n}) e^{2x \left(\frac{n}{2} [e^{-2/n} - 1] + 1 \right)} - 1 \right|$$

$$\leq (n(1 - e^{-2/n}) - 1), (x = 0 \text{ için})$$

elde edilir.

Yine ortalama değeri teoreminden $\frac{e^{-2/n} - 1}{2/n} = -e^{x_0} \leq -1 \Rightarrow \frac{n}{2} [e^{-2/n} - 1] + 1 \leq 0$
ve

$$\sup_{x \in [0, \infty)} e^{-2x} = 1$$

dir. Sonuç olarak Teorem 3.1' de K_n operatörleri için klasik Szász-Kantorovich operatöründen daha iyi yaklaşım elde edilmiştir.

Teorem 3.2. $f, f'' \in C^*[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ olsun.

$$p_n(x) := nK_n(\phi_x^1(t), x) - \frac{x}{2},$$

$$q_n(x) := \frac{1}{2}(nK_n(\phi_x^2(t), x) - x),$$

$$r_n(x) := n^2 \sqrt{K_n((e^{-x} - e^{-t})^4, x)} \sqrt{K_n(\phi_x^4(t), x)}$$

için

$$\left| n[K_n(f, x) - f(x)] - \frac{x}{2}[f'(x) + f''(x)] \right|$$

$$\leq |p_n(x)| |f'(x)| + |q_n(x)| |f''(x)| + 2(2q_n(x) + x + r_n(x)) \omega^*\left(f'', n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Taylor açılımı ile $x < \eta < t$ ve $h(t, x) = \frac{f''(\eta) - f''(x)}{2}$ için

$$f(t) = f(x) + (t - x)f'(x) + \frac{1}{2}(t - x)^2 f''(x) + h(t, x)(t - x)^2$$

dir. Taylor açılımı K_n operatörüne uygulanırsa,

$$\left| K_n(f, x) - f(x) - K_n(\phi_x^1(t), x)f'(x) - \frac{1}{2}K_n(\phi_x^2(t), x)f''(x) \right|$$

$$\leq |K_n(h(t, x)(t - x)^2, x)|$$

elde edilir. Buradan Lemma 3.3' ü uygulayarak;

$$\begin{aligned}
& \left| n[K_n(f, x) - f(x)] - \frac{x}{2}f'(x) - \frac{x}{2}f''(x) \right| \\
& \leq \left| nK_n(\phi_x^1(t), x) + \frac{x}{2} \right| |f'(x)| + \frac{1}{2} |nK_n(\phi_x^2(t), x) - x| |f''(x)| \\
& \quad + |K_n(h(t, x)(t - x)^2, x)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Teoremin ispatını tamamlamak için $|K_n(h(t, x)(t - x)^2, x)|$ ifadesi göz önüne alınsın.

$p_n(x) := nK_n(\phi_x^1(t), x) - \frac{x}{2}$ ile $q_n(x) := \frac{1}{2} [nK_n(\phi_x^2(t), x) - x]$ ifadeleri eşitsizlikte yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left| n[K_n(f, x) - f(x)] - \frac{x}{2}f'(x) - \frac{x}{2}f''(x) \right| \\
& \leq |p_n(x)| \cdot |f'(x)| + |q_n(x)| \cdot |f''(x)| + |K_n(h(t, x)(t - x)^2, x)|
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-t} - e^{-x})^2}{\delta^2} \right) \omega^*(f, \delta), \quad \delta > 0$$

alınırsa;

$$|h(t, x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-t} - e^{-x})^2}{\delta^2} \right) \omega^*(f'', \delta)$$

bulunur. $|e^{-t} - e^{-x}| < \delta$ durumunda, $|h(t, x)| < 2\omega^*(f'', \delta)$ dir. $|e^{-t} - e^{-x}| < \delta$ için,

$$|h(t, x)| < 2 \frac{(e^{-t} - e^{-x})^2}{\delta^2} \omega^*(f'', \delta)$$

dir. Böylece,

$$|h(t, x)| < 2 \left(1 + \frac{(e^{-t} - e^{-x})^2}{\delta^2} \omega^*(f'', \delta) \right) \quad (3.7)$$

elde edilir. (3.7) ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& nK_n(|h(t, x)|(t - x)^2, x) \\
& \leq 2n\omega^*(f''(x), \delta)K_n(\phi_x^2(t), x)
\end{aligned}$$

$$+\frac{2n}{\delta^2} \omega^*(f''(x), \delta) [K_n((e^{-x} - e^{-t})^4, x)]^{\frac{1}{2}} \cdot [K_n(\phi_x^4(t), x)]^{1/2}$$

elde edilir. Matematika programı kullanılarak;

$$\begin{aligned} K_n(\phi_x^4(t), x) = & \frac{1}{5n^4} [1 - 5nx + 10n^2x^2 - 10n^3x^3 + 5n^4x^4 + 30n\alpha_n(x) \\ & - 70n^2x\alpha_n(x) + 60n^3x^2\alpha_n(x) - 20n^4x^3\alpha_n(x) + 75n^2\alpha_n^2(x) \\ & - 90n^3x\alpha_n^2(x) + 30n^4x^2\alpha_n^2(x) + 40n^3\alpha_n^3(x) - 20n^4x\alpha_n^3(x) \\ & + 5n^4\alpha_n^4(x)] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} K_n((e^{-x} - e^{-t})^4, x) &= \frac{1}{12} e^{\frac{-4}{n} - 4x - n\alpha_n(x)} \left(12e^{\frac{4}{n} + n\alpha_n(x)} - 3ne^{4x + e^{\frac{-4}{n}} n\alpha_n(x)} \right. \\ &+ 3ne^{\frac{4}{n} + 4x + e^{\frac{-4}{n}} n\alpha_n(x)} + 16ne^{\frac{1}{n} + 3x + e^{\frac{-3}{n}} n\alpha_n(x)} - 16ne^{\frac{4}{n} + 3x + e^{\frac{-3}{n}} n\alpha_n(x)} \\ &- 36ne^{\frac{2}{n} + 2x + e^{\frac{-2}{n}} n\alpha_n(x)} + 36ne^{\frac{4}{n} + 2x + e^{\frac{-2}{n}} n\alpha_n(x)} \\ &\left. + 48ne^{\frac{3}{n} + x + e^{\frac{-1}{n}} n\alpha_n(x)} - 48ne^{\frac{3}{n} + 2x + e^{\frac{-2}{n}} n\alpha_n(x)} \right) \end{aligned}$$

hesaplanır. $\delta = n^{-1/2}$ seçilirse ve

$$r_n(x) = n^2 [K_n((e^{-x} - e^{-t})^4, x)]^{1/2} \cdot [K_n((t - x)^4, x)]^{1/2}$$

şeklinde alınırsa, ispat tamamlanır.

Not 3.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 K_n((t - x)^4, x) = 3x^3$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 K_n((e^{-x} - e^{-t})^4, x) = 3e^{-3x} x^2$

olduğundan, Teorem 3.3' de elde edilen yakınsaklık, yeterince büyük n ' ler için sağlanır.

Sonuç 3.1. $f, f'' \in C^*[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [K_n(f, x) - f(x)] = \frac{x}{2} [f'(x) + f''(x)]$$

dir.

Böylece e^{-x} fonksiyonunu koruyan Szász-Mirakyan-Kantorovich operatörleri için istenilen sonuçlar elde edilmiştir.

4. K_n^μ OPERATÖRÜNÜN YAKINSAKLIK ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde K_n^μ operatörlerinin yapısı açıklanacaktır. Üstel momentleri hesaplanarak bazı temel özellikleri verilecektir.

4.1. G_n Operatörünün Kantorovich Versiyonu

K_n^μ operatörünün üstel momentlerinin hesaplanması ve G_n ' in Kantorovich versiyonunu tanıtmak için farklı bir teknik kullanılacaktır. Bu operatörün sadece $\exp(2\mu t)$ ($\mu > 0$) fonksiyonundan üretileceği gösterilecektir. Ayrıca yeni operatörün, G_n ' nin bileşkesi alınarak klasik Szász operatörü yardımıyla tanımlanabileceği gösterilecektir.

Tanım 4.1 $\mu \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ olmak üzere $K_n^\mu: C[0, \infty) \rightarrow C[0, \infty)$ operatörü için,

$$K_n^\mu(f, x) = n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{-\mu t} f(t) dt, \quad (4.1)$$

dir. Burada ki $\alpha_n(x)$, (1.5)' de verilmişti. $f \in L_1[0, \infty)$ ' da

$$F_\mu(x) = \int_0^x e^{-\mu t} f(t) dt \quad (4.2)$$

dir.

Teorem 4.1. $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, \infty)$ için,

$$K_n^\mu = D_\mu \circ G_n \circ I_\mu$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $f \in C[0, \infty)$ ve $x \in [0, \infty)$ için (1.6) ve (4.2) yardımıyla

$$\begin{aligned} (D_\mu \circ G_n \circ I_\mu)f(x) &= (G_n(I_\mu(f), x), x)' - \mu(G_n \circ I_\mu)f(x) \\ &= \left(\exp_\mu(x) S_n(F_\mu, a_n(x)) \right)' - \mu \exp_\mu(x) S_n(F_\mu, a_n(x)) \\ &= \mu \exp_\mu(x) S_n(F_\mu(t), a_n(x)) + \exp_\mu(x) S'_n(F_\mu(t), a_n(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mu \exp_{\mu}(x) S_n \left(F_{\mu}(t), a_n(x) \right) \\
& = \exp_{\mu}(x) S'_n \left(F_{\mu}(t), \alpha_n(x) \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Şimdi $S'_n \left(F_{\mu}(t), \alpha_n(x) \right)$ ifadesi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
S'_n \left(F_{\mu}(t), \alpha_n(x) \right) & = -n\alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} F_{\mu} \left(\frac{k}{n} \right) \\
& \quad + e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kn\alpha'_n(x)(n\alpha_n(x))^{k-1}}{k!} F_{\mu} \left(\frac{k}{n} \right) \\
& = n\alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \left(F_{\mu} \left(\frac{k+1}{n} \right) - F_{\mu} \left(\frac{k}{n} \right) \right) \\
& = n\alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-\mu x} f(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece;

$$K_n^{\mu}(f, x) = n\alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} e^{-\mu x} f(t) dt$$

dir.

Lemma 4.1 $\mu \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $x \geq 0$ için,

- i. $G_n(1, x) = e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^{\mu/n}}\right)}$
- ii. $G_n(\exp_{\mu}, x) = e^{\mu x}$
- iii. $G_n(\exp_{\mu}^2, x) = e^{2\mu x}$

eşitlikleri sağlanır.

İspat

(1.4) denkleminde $f \left(\frac{k}{n} \right) = 1$ alınırsa,

$$G_n(1, x) = e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu x} e^{-\mu \frac{k}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x) e^{-\frac{\mu}{n}})^k}{k!} \\
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x) e^{-\frac{\mu}{n}}} \\
&= e^{\mu x} e^{n\alpha_n(x) \left(e^{-\frac{\mu}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\mu x} e^{\frac{n\frac{\mu x}{e^{\frac{\mu}{n}} - 1}}{n\left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1 \right)} \left(e^{-\frac{\mu}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\mu x} e^{\frac{\frac{\mu x}{e^{\frac{\mu}{n}} - 1}}{e^{\frac{\mu}{n}} - 1} \left(e^{-\frac{\mu}{n}} - 1 \right)} \\
&= e^{\mu x} e^{\frac{\mu x}{e^{\frac{\mu}{n}}}} \\
&= e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^{\mu/n}} \right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $f\left(\frac{k}{n}\right) = e^{\mu \frac{k}{n}}$ için incelenirse,

$$\begin{aligned}
G_n(\exp_{\mu}, x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu x} e^{-\mu \frac{k}{n}} e^{\mu \frac{k}{n}} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu x} \\
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \\
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x)} \\
&= e^{\mu x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak $f\left(\frac{k}{n}\right) = e^{2\mu \frac{k}{n}}$ için incelenirse,

$$\begin{aligned}
G_n(\exp_{\mu}^2, x) &= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu x} e^{-\mu \frac{k}{n}} e^{2\mu \frac{k}{n}} \\
&= e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu x} e^{\mu \frac{k}{n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} e^{\mu \frac{k}{n}} \\
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n\alpha_n(x) e^{\frac{\mu}{n}}\right)^k}{k!} \\
&= e^{\mu x} e^{-n\alpha_n(x)} e^{n\alpha_n(x) e^{\frac{\mu}{n}}} \\
&= e^{\mu x} e^{n\alpha_n(x) \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} \\
&= e^{\mu x} e^{n \frac{\mu x}{n \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} \\
&= e^{2\mu x}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 4.2. $\mu \geq 0, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, \infty)$ için K_n^μ , nün üstel momentleri için

$$\text{i. } K_n^\mu(1, x) = e^{-\frac{\mu}{n}} e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\mu}{n}}}\right)} \quad (4.3)$$

$$\text{ii. } K_n^\mu(\exp_\mu, x) = \frac{\mu}{n \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right) e^{\mu x}} \quad (4.4)$$

$$\text{iii. } K_n^\mu(\exp_\mu^2, x) = e^{2\mu x} \quad (4.5)$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: (4.1)' de $f(x) = 1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
K_n^\mu(1, x) &= n\alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{-\mu t} dt \\
&= -\frac{n}{\mu} \alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} e^{\mu x} \left(e^{-\frac{\mu}{n}} - 1\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(n\alpha_n(x) e^{-\frac{\mu}{n}}\right)^k}{k!} \\
&= \frac{n}{\mu} \frac{\mu}{n \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} e^{-n\alpha_n(x)} e^{\mu x} e^{-\frac{\mu}{n}} \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right) e^{n\alpha_n(x) e^{-\frac{\mu}{n}}} \\
&= e^{-\frac{\mu}{n}} e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\mu}{n}}}\right)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $f(x) = e^{\mu x}$ alınarak devam edilirse,

$$\begin{aligned}
K_n^\mu(\exp_\mu, x) &= n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{-\mu x} e^{\mu x} dt \\
&= n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \frac{1}{n} \\
&= \frac{\mu}{n\left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} e^{-n\alpha_n(x)} e^{\mu x} e^{n\alpha_n(x)} \\
&= \frac{\mu}{n\left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} e^{\mu x}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $f(x) = e^{2\mu x}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
K_n^\mu(\exp_\mu^2, x) &= n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{-\mu x} e^{2\mu x} dt \\
&= n\alpha'_n(x)e^{-n\alpha_n(x)}e^{\mu x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x))^k}{k!} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{(k+1)}{n}} e^{\mu x} dt \\
&= \frac{n}{\mu} \alpha'_n(x) e^{-n\alpha_n(x)} e^{\mu x} \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n\alpha_n(x)e^{\frac{\mu}{n}})^k}{k!} \\
&= \frac{n}{\mu} \alpha'_n(x) \left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right) e^{\mu x} e^{n\alpha_n(x)\left(e^{\frac{\mu}{n}} - 1\right)} \\
&= e^{2\mu x}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. K_n^μ Operatörünün Ağırlıklı Uzaylarda Yakınsaklık Özellikleri

Bu bölümde Gadjiev tarafından [18]' de verilen ağırlıklı Korovkin tipli teorem yardımı ile K_n^μ operatörlerinin yakınsaklık özellikleri incelenecektir. Bunun için bazı tanım ve gösterimleri hatırlatalım.

$B_\varphi(\mathbb{R}^+)$, $|f(x)| \leq M_f \varphi(x)$ özelliğini sağlayan tüm fonksiyonların uzayını gösterebiliriz. $\varphi(x) = 1 + e^{2\mu x}$, $x \in \mathbb{R}^+$ olsun. Burada, M_f sadece f ' e bağlı pozitif bir sabittir. $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ uzayında norm

$$\|f\|_\varphi = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)}$$

ile tanımlıdır. $C_\varphi(\mathbb{R}^+)$, $B_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ' e ait tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ ile $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} < \infty$ koşulunu sağlayan $f \in C_\varphi(\mathbb{R}^+)$ ' nin alt uzayı gösterilsin.

Teorem 4.2. $f \in C_\varphi^k(\mathbb{R}^+)$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|K_n^\mu(f) - f\|_\varphi = 0$$

dir.

İspat: $v = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \|K_n^\mu(\exp_\mu) - e^{v\mu}\|_\varphi = 0 \quad (4.6)$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. (4.3)' den,

$$\|K_n^\mu(1, x) - 1\|_\varphi = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| e^{-\frac{\mu}{n}} e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)} - 1 \right|}{1 + e^{2\mu x}}$$

dir. $x \geq 0$ için $e^x - 1 \leq x e^x$ eşitsizliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{\mu}{n}} e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)} - 1}{1 + e^{2\mu x}} &\leq \frac{\left(\mu x \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) - \frac{\mu}{n} \right) e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^n}\right) - \frac{\mu}{n}}}{1 + e^{2\mu x}} \\ &\leq \frac{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}{e^{2\mu x}} e^{\mu x} e^{-\frac{\mu}{n}} \end{aligned}$$

elde edilir. $\max_{x>0} x e^{-\mu x} = \frac{1}{\mu e}$ olduğundan,

$$\frac{e^{-\frac{\mu}{n}} e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)} - 1}{1 + e^{2\mu x}} \leq \frac{\mu x}{e^{\mu x}} \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\mu}{n}}} \right) \quad (4.7)$$

eşitsizliği yeterince büyük n ' ler için sağlanır. Bu ise (4.6) koşulunun $v = 0$ için sağlandığı anlamına gelir. Benzer şekilde (4.4) için;

$$\begin{aligned} \|K_n^\mu(\exp_\mu, x) - e^{v\mu}\|_\varphi &= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| e^{\frac{\mu}{n} e^{\mu x \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\mu}{n}}}\right)}} - 1 \right|}{1 + e^{2\mu x}} \\ &\leq \frac{e^{\mu x \left(\frac{\mu}{n(e^{\frac{\mu}{n}} - 1)} - 1 \right)}}{e^{2\mu x}} \\ &\leq \left| \frac{\frac{\mu}{n}}{e^{\frac{\mu}{n}} - 1} - 1 \right| \end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \|K_n^\mu(f) - f\|_\varphi = 0$ bulunur.

(4.6)' da $v = 2$ için $K_n^\mu(\exp_\mu^2, x) = e^{2\mu x}$ olduğu açıktır. Böylece ispat tamamlanır.

4.3. K_n^μ Operatörünün Yaklaşım Hızı

Burada K_n^μ operatörünün yaklaşım hızı, ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanmıştır. Sınırsız fonksiyonlarla yakınsaklık için ağırlıklı uzaylarda çalışmak gerekir. Bu nedenle $C_\mu(\mathbb{R}^+)$ ($\mu > 0$ sabit) üstel ağırlıklı uzayı göz önüne alınır.

$C_\mu(\mathbb{R}^+)$, $|f(x)| \leq M e^{\mu x}$ (M pozitif bir sabit) koşulunu sağlayan $\mathbb{R}^+$ ' da tüm sürekli reel değerli f fonksiyonların kümesi olsun. Buradaki norm;

$$\|f\|_\mu = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{e^{\mu x}}$$

şeklinde tanımlıdır. $C_\mu^k(\mathbb{R}^+)$, $\lim_{x \rightarrow \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{e^{\mu x}} = k, k > 0$ koşulunu sağlayan $f \in C_\mu(\mathbb{R}^+)$ uzayının alt uzayı olsun.

Şimdi K_n^μ operatörü için aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3. $\{K_n^\mu\}$, (4.1) ile tanımlanan lineer pozitif operatörlerin bir dizisi olsun.

Her $f \in C_\mu^k(\mathbb{R}^+)$ için $h_n = \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^n} \right) + 2 \left(1 - \frac{\mu}{n(e^n - 1)} \right) \right]^{1/2}$ olmak üzere

$$\|K_n^\mu(f) - f\|_{\varphi^3} \leq \left(\frac{\mu}{n(e^n - 1)} + 2 \right) \tilde{w}(f; h_n)$$

dir.

İspat:

$x, t \geq 0$ için, K_n^μ lineer ve monoton olduğundan,

$$\begin{aligned} |K_n^\mu(f, x) - f(x)| &= |K_n^\mu(f, x) - K_n^\mu(f(x), x) + f(x)K_n^\mu(1, x) - f(x)| \\ &\leq |K_n^\mu(f(t) - f(x), x)| + f(x)|K_n^\mu(1, x) - 1| \\ &\leq K_n^\mu(|f(t) - f(x)|, x) + f(x)|K_n^\mu(1, x) - 1| \end{aligned} \quad (4.8)$$

yazılabilir. Ayrıca süreklilik modülü tanımından,

$$|f(t) - f(x)| \leq 2(e^{\mu t} + e^{\mu x}) \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta} \right) \tilde{w}(f; \delta)$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik K_n^μ için uygulanırsa;

$$\begin{aligned} K_n^\mu(|f(t) - f(x)|, x) &\leq 3K_n^\mu \left((e^{\mu t} + e^{\mu x}) \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta} \right) \tilde{w}(f; \delta); x \right) \\ &\leq \tilde{w}(f; \delta) \left(K_n^\mu(\exp_\mu; x) + e^{\mu x} K_n^\mu(1; x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta} K_n^\mu((e^{\mu t} + e^{\mu x})|t - x|; x) \right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$K_n^\mu((e^{\mu t} + e^{\mu x})|t - x|; x)$ elde etmek için, Hölder eşitsizliği ve $\mu(t - x)^2 \leq (e^{\mu t} - e^{\mu x})^2$ eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
K_n^\mu((e^{\mu t} + e^{\mu x})|t - x|; x) &\leq K_n^\mu(e^{\mu t}|t - x|; x) + e^{\mu x} K_n^\mu(|t - x|; x) \\
&\leq [K_n^\mu(\exp_\mu^2; x)]^{\frac{1}{2}} [K_n^\mu((t - x)^2; x)]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + e^{\mu x} [K_n^\mu(1; x)]^{\frac{1}{2}} [K_n^\mu((t - x)^2; x)]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq [K_n^\mu((t - x)^2; x)]^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{\mu x} + e^{\mu x} [K_n^\mu(1; x)]^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq \frac{1}{\mu} [K_n^\mu((e^{\mu t} - e^{\mu x})^2; x)]^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{\mu x} + e^{\mu x} [K_n^\mu(1; x)]^{\frac{1}{2}} \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
\|K_n^\mu((e^{\mu t} + e^{\mu x})|t - x|; x)\|_{\varphi^3} &\leq \left[\frac{1}{e} \left(1 - \frac{1}{e^{\frac{\mu}{n}}} \right) + 2 \left(1 - \frac{\mu}{n(e^{\frac{\mu}{n}} - 1)} \right) \right]^{1/2} \\
&:= h_n
\end{aligned}$$

elde edilir ve $\delta = h_n$ seçilirse (4.8)' den ispat tamamlanır.

Sonuç olarak teoremlerin ispatları gösterilmiştir.

5. TARTIşMA VE SONUÇ

Matematiksel Analiz’ in önemli bir dalı da Yaklaşımlar Teorisidir. Bu teori de kendi içinde birçok dala ayrılmaktadır. Bu dallardan birisi de lineer pozitif operatörlerin yakınsaklık durumlarının incelenmesidir. Bu konu geçmişten günümüze kadar popülerliğini hâlâ sürdürmektedir. En iyi bilinen lineer pozitif operatörler Bernstein, Baskakov, Szász-Mirakyan operatörleridir. Bu operatörlerin çeşitli genelleştirmeleri tanımlanarak, belli koşullar altında yakınsaklık özellikleri incelenmektedir.

Bu tezde üstel fonksiyonu koruyan Szász-Mirakyan-Kantorovich tipli operatörler ile ilgili iki adet makale incelenmiştir. Bunlardan birincisi Vijay Gupta ve Ali Aral tarafından yazılan “A Note on Szász-Mirakyan-Kantorovich type Operators Preserving e^{-x} ” dir. Bu çalışmada, modifiye operatör için momentler hesaplanmış ve düzgün yakınsaklık için quantitatif hesaplamalar yapılmıştır. İkinci makale ise Ali Aral, Mohammed Lemine Limmam ve Fırat Özaraç tarafından yazılan “Approximation Properties of Szász-Mirakyan-Kantorovich Type Operators” dir. Bu çalışmada üstel ağırlıklı uzaylarda modifiye operatörün yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Böylece modifiye operatörlerin, klasik operatörlerden daha iyi yaklaşım sonuçları verdiği gösterilmiştir.

Bu tezi hazırlamaktaki amacımız, son yıllarda modifiye operatörlerle ilgili yapılan çalışmaları takip eden Türkçe bir kaynak oluşturmaktır.

KAYNAKLAR

- [1] P. L. Butzer, ‘‘On the extensionsof Bernstein polynomials to the infinite interval,’’ Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 5, pp. 547-553, 1954.
- [2] King, J.P.: Positive linear operators which preserve x^2 . Acta Math. Hungar.99(3),203-208, 2003.
- [3] Duman, O., Ozarslan, M.A., Della Vecchia, B.: Modified Szász-Mirakyan-Kantorovich operators preserving linear functions. Turk. J. Math. 33, 151-158, 2009.
- [4] Gupta, V., Agarwal, R.P.: Convergence Estimates in Approximation Theory. Springer, Cham, 2014.
- [5] Gupta, V., Tachev, G.: Approximation with Positive Linear Operators and Linear Combinations. Springer, Cham, 2017.
- [6] Acar, T., Aral, A., Gonska, H.: On Szász Mirakyan operators preserving $e^{2ax}, a > 0$. Mediterr. J. Math. 14(1):Art. 6, 2017.
- [7] Acar, T.: Asymptotic formulas for generallized Szász Mirakyan operators. Appl. Math. Comput. 263,233-239, 2015.
- [8] Acar T, Aral A, Cárdenas-Morales D, Garrancho P. Szász-Mirakyan type operators which fix exponentials. Result Math. 2017;72(3):1393-1404.

- [9] Acar, T., Aral, A., Rasa, I.: The new forms of Voronovskaya's theorem in weighted spaces. *Positivity* 20(1), 25-40, 2016.
- [10] Gupta, V., Malik, N.: Approximation with certain Szász-Mirakyan operators. *Khayyam J. Math.* 3(2), 90-97, 2017.
- [11] Ditzian Z, Totik V. *Moduli of Smoothness*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 9. New-York: Springer; 1987.
- [12] Aral A, Inoan D, Rasa I. On the generalized Szász-Mirakyan operators. *Results Math.* 2014; 65:441-452.
- [13] Boyanov, B.D., Veselinov, V.M.: A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roum.* 14(62), 9-13, 1970.
- [14] Gupta V, Aral A. A note on Szász-Mirakyan-Kantorovich type operators preserving e^{-x} . *Positivity.* 2018; 22:415-423.
- [15] Bodur M, Yılmaz ÖG, Aral A. Approximation by Baskakov-Szász-Stancu operators preserving exponential functions. *Constructive Math Anal.* 2018;1(1):1-8.
- [16] Gupta V, Acu A.M. On Baskakov-Szász-Mirakyan type operators preserving exponential functions. *Positivity.* 2018;22(3):1-11.
- [17] Păltănea R. A note on Bernstein Kantorovich operators. *Bull Univ Transilvania Braşov, Series III.* 2013;6(55): No. 2, 27-32.

[18] Gadjiev AD. Theorems of the type of P. P. Korovkin's theorems. *Mat Zametki*. 1976;20(5):781-786.

[19] Holhoş, A.: The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators. *Stud Univ Babes-Bolyai Math. 2*, 133-142, 2010.

[20] Deniz E, Aral A, Gupta V. Note on Szász-Mirakyan-Durrmeyer operators preserving e^{2ax} , $a > 0$. *Number Funct Anal Optim*. 2018;39(2):201-207.

