

T.C.
EGE ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

F(G), F(R,G) VE F(G,T) KÜTLE ÇEKİM TEORİLERİ VE KOZMOLOJİK MODELLERE UYGULANMASI

Alper Böke ÖNDER

Danışman : Prof. Dr. Can BATTAL KILINÇ

Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı
Astrofizik Yüksek Lisans Programı

İzmir
2021

Alper Böke  nder tarafından yüksek lisans tezi olarak sunulan “ $f(G)$, $f(R,G)$ ve $f(G,T)$ Kütle  ekim Teorileri ve Kozmolojik Modellere Uygulanması” başlıklı bu  alışma E  Lisansüstü Eēitim ve  ēretim Y netmeliēi ile E  Fen Bilimleri Enstitüsü Eēitim ve  ēretim Yönergesi’nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan deēerlendirilerek savunmaya deēer bulunmuş ve tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliēi/oy okluēu ile başarılı bulunmuştur.

Jüri  yeleri:

 mza

Jüri Bařkanı	:	
Raportör �ye	:	
�ye	:	

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

EÜ Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi / Doktora Tezi olarak sunduğum “ $f(G)$, $f(R,G)$ ve $f(G,T)$ Kütle Çekim Teorileri ve Kozmolojik Modellere Uygulanması” başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

02 / 02 / 2021

Alper Böke ÖNDER

ÖZET

F(G), F(R,G) VE F(G,T) KÜTLE ÇEKİM TEORİLERİ VE KOZMOLOJİK MODELLERE UYGULANMASI

ÖNDER, Alper Böke

Yüksek Lisans Tezi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

Şubat 2021, 115 Sayfa

Günümüzde kabul gören en güncel kütle çekim teorisi, Einstein'ın genel görelilik teorisidir. Ancak bu teorinin genelleştirilmesi ve geliştirilmesi ile elde edilebilecek olası alternatif kütle çekim teorileri üzerinde çok uzun zamandan beri çalışılmaktadır. Brans-Dicke ile başlayan bu alternatif teori çalışmaları, öncelikle akademik ve teorik motivasyonla yapılmıştır.

Ancak, 1990'lı yılların sonlarında yapılan süpernova gözlemleri ile, evrenin ivmeli bir genişleme dönemi geçirmekte olduğu tespit edilmiştir. Genel görelilik bazlı, standart kozmolojik model, bu durumu açıklamak için kozmolojik sabit (Λ) kullanmakta ve buna fiziki temel olarak karanlık enerjiyi göstermektedir. Ne var ki, karanlık enerjinin doğasının açıklanması henüz mümkün olmamış ve buna bağlı olarak, GR'e alternatif kütle çekim teorilerinin araştırılması motivasyonu kuvvetlenmiştir.

Bu alternatifler arasında, son dönemde dikkat çeken bir grup, temel motivasyonunu süper sicim teorisinden alan, Gauss-Bonnet terimi içeren kütle çekim teorileridir. Bu çalışmada, Gauss-Bonnet terimi içeren, $f(G)$, $f(R,G)$, $f(G,T)$ kütle çekim teorileri incelenecek ve Bianchi Tip I evreni üzerindeki örnek uygulamaları, GR modeliyle karşılaştırılacaktır.

Anahtar sözcükler: genel görelilik, karanlık enerji, gauss-bonnet, $f(G)$ teorisi, $f(R,G)$ teorisi, $f(G,T)$ teorisi.

ABSTRACT

F(G), F(R,G) AND F(G,T) THEORIES AND THEIR APPLICATIONS TO COSMOLOGICAL MODELS

ÖNDER, Alper Böke

MSc. in Astrophysics

Supervisor: Prof. Dr. Can Battal KILINÇ

February 2021, 115 Pages

Einstein's theory of general relativity is the currently accepted theory of gravity. However, alternative gravitational theories that are constructed by modifying general relativity are being studied for a long time. In the beginning, the work on the alternative theories, starting with Brans-Dicke, was mainly motivated by theoretical completeness.

However, with the supernova observations done in late 1990s, it was found that the universe is experiencing an accelerated expansion period. The standard cosmological model that is based on general relativity, explains this with the use of a cosmological constant (Λ) and dark energy. However, the nature of dark energy is yet to be determined and this caused the motivation for studying alternative gravitational theories to get stronger.

An interesting group of alternative gravitational theories that gets its motivation from super string theory is the Gauss-Bonnet family of gravitational theories. In this study, $f(G)$, $f(R,G)$ and $f(G,T)$ theories of gravitation will be examined and their applications in the Bianchi Type I universe will be compared to the results of general relativity.

Keywords: general relativity, dark energy, gauss-bonnet, $f(G)$ theory, $f(R,G)$ theory, $f(G,T)$ theory

ÖNSÖZ

Evrenle ilgili en geniş ölçekli soruların yanıtlarını araştıran kozmoloji, bilimle ilgilenmeye başladığım ilk yıllardan beri benim için heyecan verici bir alan olmuştur. Yaklaşık yüz yıl gibi, oldukça kısa bir tarihi olmasına rağmen, gerek gözlemsel, gerekse teorik alanda çok büyük başarıların elde edildiği kozmoloji, bir yandan da hala çözülmemiş, büyük sırlarla doludur.

Bunlar arasında en gizemlilerinden biri olan karanlık enerji, yüksek lisans çalışmalarına başladığım andan itibaren ilgilendiğim bir konuydu. Özellikle, karanlık enerji gibi ek bir bileşen gerektirmeksizin, sadece kütle çekim teorisinin geliştirilmesiyle evrenin hızlanarak genişlemesini açıklama çabaları dikkatimi çekti. Bu alanda yoğun ve ümit vaadedici çalışmalar olduğunu gördüm ve dört temel kuvvetten bu en tanıdığının hala tam olarak anlaşılamamış olması beni hem şaşırttı hem de konuyla daha da yakından ilgilenmeme neden oldu.

Tezim için, oldukça yeni bir grup teori olan, $f(G)$, $f(R,G)$ ve $f(G,T)$ teorilerini seçtim. Karanlık enerji olmaksızın evrenin hızlanarak genişlemesini açıklama konusunda ümit vaadedici teoriler olmaları ve sicim teorisiyle ilişkili olmaları beni bu seçime yöneltti.

Çalışma esnasında, bu teorilerin, genel görelilik ile karşılaştırmasını yapmamın ve bunu anizotropik bir evren modeli üzerinden gerçekleştirmemin uygun olacağına danışman hocam Can Battal Kılınç ile birlikte karar verdik. Yaklaşık bir yıllık, yoğun bir literatür taraması, inceleme ve araştırma sonucunda elde ettiğim bulguları bu tez kapsamında derlemiş bulunmaktayım.

İZMİR

11.02.2021

Alper Böke ÖNDER

İÇİNDEKİLER

İÇ KAPAK	i
KABUL ONAY SAYFASI.....	ii
ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
TABLolar DİZİNİ	xii
İMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xiii
1. GİRİŞ	1
2. KÜTLE ÇEKİMİ VE GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ.....	6
2.1. Kütle Çekimi	6
2.1.1. Işığın İzlediği Yolun Kütle Çekim İle Eğrilmesi	9
2.1.2. Kütleçekimsel Kırmızıya Kayma	10
2.2. En Küçük Etki Prensibi	11
2.3. Genel Görelilik Teorisi	12
2.3.1. Einstein-Hilbert Etki Denklemi.....	14
2.3.2. Einstein Alan Denklemleri.....	15

2.3.3. Genel Göreliliğin Gözlemsel Testleri	16
2.4. Genel Görelilik ve Kozmoloji	18
2.4.1. Kozmolojik Prensip	19
2.4.2. Robertson-Walker Metriği.....	20
2.4.3. Enerji-Momentum Tensörü	21
2.4.4. Friedmann Denklemleri ve Kozmolojik Parametreler	22
2.4.5. Standart Kozmolojik Model (Λ CDM).....	24
2.4.6. Standart Kozmolojik Modelin İçerdiği Sorunlar	27
2.4.6.1. Ufuk Problemi	27
2.4.6.2. Düzlük Problemi.....	30
2.4.6.3. Büyük Yapıların Oluşum Problemi	31
2.4.6.4. Manyetik Monopol Problemi	32
2.4.7. Enflasyon Modeli : Ufuk ve Düzlük Problemlerine Bir Çözüm	32
2.4.8. Geç Dönem İvmelenmesi ve Kozmolojik Sabit	35
3. ALTERNATİF KÜTLE ÇEKİM TEORİLERİ.....	38
3.1. Brans-Dicke Kütle Çekim Teorisi	38
3.2. Yüksek Seviyeli Kütle Çekim Teorileri	40
3.2.1. $f(R)$ Kütle Çekim Teorisi.....	41
3.2.1.1. Metrik Formalizmde $f(R)$ Kütle Çekim Teorisi	42

3.2.1.2. Palatini Formalizminde $f(R)$ Kütle Çekim Teorisi.....	45
3.3. Gauss-Bonnet Skaler-Tensör Kütle Çekim Teorisi.....	46
4. GAUSS-BONNET DEĞİŞMEZİ İÇEREN TEORİLER.....	48
4.1. $f(G)$ Kütle Çekim Teorisi	48
4.1.1. Alan Denklemlerinin Çıkarılması	49
4.2. $f(R,G)$ Kütle Çekim Teorisi.....	55
4.2.1. Alan Denklemlerinin Çıkarılması	56
4.3. $f(G, T)$ Kütle Çekim Teorisi.....	58
4.3.1. Alan Denklemlerinin Çıkarılması	59
5. BIANCHI TİP-I EVREN MODELİNDE UYGULAMALAR.....	62
5.1. Genel Görelilik Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü.....	63
5.2. $f(G)$ Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü	68
5.2.1. Kuvvet Yasasına Göre Çözüm	69
5.3. $f(R, G)$ Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü	74
5.3.1. Kuvvet Yasasına Göre Çözüm	76
5.3. $f(G, T)$ Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü	78
5.4.1. Kuvvet Yasasına Göre Çözüm	80
5.3. Çözümlerin Karşılaştırılması	87
6. SONUÇ.....	89

KAYNAKLAR DİZİNİ.....	91
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	92
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	93
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	94
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	95
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	96
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	97
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	98
KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)	99
TEŞEKKÜR	100
ÖZGEÇMİŞ.....	101

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil

Sayfa

2.1.	Merkür gezegeninin yörüngesinde gözlenen kayma	8
2.2	Supernova Cosmology Project ve High-z Supernova takımları tarafından ölçümlenen Sne Ia süpernovalar için Hubble diagramı	36
5.1	Bianchi Tip-I evreninde GR ve kuvvet kanunu kullanılarak yapılan çözümlere göre evren parametrelerinin zamana göre değişimi	67
5.2	Bianchi Tip-I evreninde $f(G)$ teorisi ve kuvvet kanunu kullanılarak yapılan çözümlere göre evren parametrelerinin zamana göre değişimi	73
5.3	Bianchi Tip-I evreninde $f(R,G)$ teorisi ve kuvvet kanunu kullanılarak yapılan çözümlere göre yoğunluğun zamana göre değişimi	78
5.4	Bianchi Tip-I evreninde $f(G,T)$ teorisi ve kuvvet kanunu kullanılarak yapılan çözümlere göre yoğunluğun göre değişimi.....	82
5.5	$\omega=0$ için yoğunluk parametresinin davranışı.....	85
5.6	$\omega=1/4$ için yoğunluk parametresinin davranışı.....	85
5.7	$\omega=1/3$ için yoğunluk parametresinin davranışı.....	86
5.8	$\omega=1/2$ için yoğunluk parametresinin davranışı.....	86
5.9	$\omega=1$ için yoğunluk parametresinin davranışı.....	86
5.10	Yoğunluk parametresinin farklı teorilerdeki değişimi	88

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo

Sayfa

2.1 Plank uydusu verilerine göre 2018 yılında belirlenen bazı kozmolojik parametreler	27
---	----



İMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
H	Hubble parametresi
$G_{\mu\nu}$	Einstein tensörü
$T_{\mu\nu}$	Enerji-momentum tensörü
T	Enerji-momentum tensörü izi
$R_{\mu\nu}$	Ricci tensörü
R	Ricci skaleri
$\mathcal{G}$	Gauss-Bonnet değişmezi
$g_{\mu\nu}$	Metrik tensör
Λ	Kozmolojik sabit

Kısaltmalar

GR	Genel görelilik kuramı
SKM	Standart kozmolojik model
CMBR	Kozmik mikrodalga ardalan ışıınımı

İndisler

$i, j, k, \dots$	Latin alfabesiyle gösterilen tensör indisleri 1-3 şeklinde uzaysal koordinat eksenlerini göstermektedir
$\mu, \nu, \sigma, \dots$	Yunan alfabesi harfleriyle gösterilen tensör indisleri 0-3 şeklinde uzay-zaman koordinat eksenlerini göstermektedir

1. GİRİŞ

İnsanlar, ilk çağlardan beri, içinde yaşadıkları evrenin nasıl oluştuğunu ve nasıl yok olacağını merak etmiştir. Çok uzun bir zaman boyunca, bu soruların yanıtı, mitolojiler tarafından verilmiş ve hemen her uygarlık, kendi renkli evren öyküsünü oluşturmuştur.

Kozmolojinin bir bilim olarak ortaya çıkması ise oldukça yenidir. Zira evrenin gelişimi ile ilgili sorulara bilimsel bir yanıt bulabilmek için öncelikli olarak bir kütle çekim teorisi oluşturulması gerekir. Nitekim kozmoloji bilimi ile kütle çekim teorileri ayrılmaz bir bütün sergilemektedir.

Modern fiziğin tanımladığı dört temel kuvvet bulunmakla birlikte bunlardan kuvvetli nükleer kuvvet ve zayıf nükleer kuvvet, sadece çok kısa mesafelerde etkili olmaları, elektromanyetik kuvvet ise büyük ölçeklerde pozitif ve negatif yüklerin dengelenmesi nedeniyle kozmolojik gelişime sadece çok erken dönemlerde etkide bulunabilirler. Dolayısıyla, kozmolojinin yani evren biliminin teorik çalışmaları büyük oranda kütle çekimi etkisinde gelişen modelleri incelemektedir.

Gerçek anlamda ilk kütle çekim teorisi, Kepler'in empirik olarak elde ettiği kanunlarını matematiksel bir zemine oturtmayı başaran, Newton'un temel hareket yasalarını ve evrensel kütle çekim teorisidir. Güneş'in de bir yıldız olduğuna inanan Newton, homojen şekilde yerleştirilmiş yıldızlarla dolu bir evreni incelemiş, ancak böylesi bir yapının kararlı bir durum olmadığı sonucuna varmıştır.

Newton'un kütle çekim teorisi, ikiyüz yılı aşkın bir süre boyunca geçerliliğini sürdürmüş ve gök cisimlerinin hareketlerinin açıklanmasında büyük bir başarıyla kullanılmıştır. Ne var ki, 1855 yılında, Urban Le Verrier'in çalışmaları, Merkür'ün Güneş çevresinde dolanırken izlediği yörüngenin hesaplarla uyuşmayan bir kayma gözlemlediği sonucunu ortaya koymuştur. Bu kayma, diğer gök cisimlerinin uyguladığı kuvvetlerin etkisi ya da Güneş ve Merkür arasında yer alan ve henüz gözlemlenememiş bir başka gezegenin varlığı gibi farklı yöntemler ile açıklanılmaya çalışılsa da, teori ve gözlem arasındaki fark tatmin edici biçimde ortadan kaldırılamamıştır.

Modern fiziğin doğuşuna şahitlik eden 20. Yüzyılın başında, 1905 yılında Einstein'ın ortaya koyduğu özel görelilik kuramı, Newton'un kütle çekim teorisinin de

sorgulanmasını gerektirmiştir. Zira, özel görelilik teorisine göre, hiçbir etkileşimin ışığın vakum ortamındaki hızından daha hızlı gerçekleşmemesi gerekmektedir. Oysa ki Newton'un kütle çekim teorisinde, uzaklık ne olursa olsun, kütle çekimini anında etki göstermektedir.

Bu motivasyonla yola çıkan Einstein, ilk olarak 1907 yılında, kütle çekimi ile ivmeli referans sistemleri arasındaki eşdeğerliği (Einstein eşdeğerlik prensibi) öne sürmüştür. Bu eşdeğerlik, ivmeli hareket eden sistemler ile kütle çekimi etkisi altındaki sabit sistemlerin fizik deneyleri açısından aynı sonuçları vereceğini ve birbirinden ayırt edilemeyeceğini kabul eder. Örneğin, kapalı ve ivmeli şekilde yükselen bir asansör düşünelim. Asansörün bir duvarından, zemine paralel olarak gönderilecek bir ışın, asansörün hızlanarak yükselme hareketi yapması nedeniyle, içeride bulunan bir gözlemci için, eğri bir yol izliyor gibi görünecektir. Einstein eşdeğerlik prensibine göre, ivmeli bir sistemdeki gözlemcinin deneyleri, kütle çekim alanında bulunan bir gözlemci ile aynı sonucu vermesi gerekir. Buna göre, teori, ışığın, kütleli cisimlerin yakınından geçerken de eğri bir yol izlemesini öngörür. Nitekim bu öngörünün Eddington tarafından 1919 yılındaki güneş tutulması sırasında gözlemsel olarak da onaylanması, genel görelilik teorisinin yaygın kabul görmesinde en önemli etkenlerden biri olmuştur.

Sonraki yıllar boyunca, özel görelilik teorisini, ivmeli referans sistemlerine genişletecek ve eşdeğerlik prensibi sayesinde kütle çekim kuvvetini de açıklamış olacak teorisini üzerinde çalışan Einstein, 1915 yılında, genel görelilik teorisini yayınlamıştır. Bu teoriye göre, kütle ve eşdeğeri olan enerji, uzay-zaman geometrisinde eğilmeye yol açmakta ve dış kuvvetlerin etkisinde olmayan kütleli cisimler ve kütsüz parçacıklar, bu eğriliğe uygun biçimde, geodesic adı verilen en kısa yolları takip etmektedirler. Bu haliyle, kütle çekimi bir kuvvet olmaktan ziyade, uzay-zaman geometrisinin ortaya çıkardığı bir sonuçtur. Özetle, kütle ve enerji uzay-zamanın geometrisini belirlemekte, bu geometri de parçacıkların nasıl hareket edeceğini etkilemektedir.

Genel görelilik teorisinin ilk başarısı, Merkür'ün yörüngesindeki tuhaflığı açıklayabilmesi olmuştur. Bunun ötesinde de ışığın kütle çekimi ile eğilmesi, kütle çekimi kaynaklı kırmızıya kayma oluşması, kütle çekim dalgaları oluşması gibi, ilerleyen yıllarda gözlemler ile doğrulanan bir dizi öngöründe bulunmuştur. Günümüze

kadar gözlemsel testlerden başarıyla geçmeyi sürdüren teori, bu yüz yılı aşkın sürede, konumunu giderek sağlamlaştırmış ve genel kabul görmüştür.

Öte yandan, genel göreliliğin eksik yanları da mevcuttur. Öncelikle, klasik bir teori olması ve quantize edilememesi nedeniyle, bir diğer genel kabul görmüş ve çok doğru sonuçlar veren kuantum alan teorisi ile uyumlu değildir. Ayrıca, genel görelilik denklemleri, tekillik içermektedir ve bu genel olarak, teorinin tam olmadığı şeklinde yorumlanmaktadır. Bu nedenle, günümüzde halen genel göreliliğe alternatif teoriler ve kütle çekimini diğer üç kuvvet ile birleştirecek bir genel kuram arayışı sürmektedir. Örneğin kuvvetli adaylardan, sicim ya da süper sicim teorisi uzun zamandır üzerinde çalışılan bir genel teori olmakla birlikte henüz doğrulanması ya da yanlışlanması mümkün olmamıştır.

Kütle çekimi mekanizmasını açıklaması ve gözlemlerle desteklenmesi dışında genel görelilik teorisinin, en önemli getirilerinden biri, uzay-zamanı, parçacıkların içerisinde hareket ettiği bir arka plan olmaktan çıkarıp, parçacıklarla etkileşim içerisinde bulunan, dinamik bir yapı olarak tanımlamasıdır. Bu özelliğiyle, evrenin yapısını ve gelişimini tanımlayacak bir model oluşumuna olanak sağlar ve kozmolojinin somut bir bilim haline gelmesi bu nedenle, genel görelilik teorisinin doğuşuyla başlar. Genel görelilik teorisinin denklemlerini, uygun metrikler ile kullanarak, evrenin madde ve enerji içeriğine bağlı olarak nasıl bir gelişim göstereceğini hesaplamak mümkündür.

Bu imkanın farkında olan Einstein, teorisini ortaya koyduktan hemen sonra, homojen, izotropik ve düz bir uzay modeli oluşturmuş ve bu modelin davranışını incelemiştir. Ancak, kendi alan denklemlerini kullanarak oluşan bu modelde, evrenin statik olmadığını, genişleme ya da çökme eğilimi gösterdiğini görmüştür. O sırada, yaygın olarak kabul gören ve kendisinin de şüphe etmediği, değişim göstermeyen, statik bir evren modelini oluşturabilmek için, denklemlerine kozmolojik sabit (Λ) adını verdiği bir terim ekleme yolunu seçmiştir.

Kısa bir süre sonra, Hubble'ın yaptığı gözlemlenebilir galaksilerin bize olan uzaklıkları ve kırmızıya kaymaları çalışması ile, evrenin beklendiği gibi statik olmayıp genişlemekte olduğu görülmüş ve denklemlere eklenen bu kozmolojik sabit terimine ihtiyaç kalmamıştır. Bu genişlemenin, zaman içerisinde geriye doğru tersine işletilmesi

ile, evrenin başlangıcının çok yoğun ve çok sıcak bir nokta olduğu ilk kez yaygın kabul görmeye başlamıştır.

Sonraki yıllar boyunca geliştirilen standart kozmolojik model, evrenin ilk oluşum anlarından itibaren geçirdiği evreleri açıklamakta büyük bir başarı göstermiştir. Modelin öngördüğü biçimde kozmik mikrodalga ardaan ışıınının tespit edilmesi de genişleyen evren modelinin kabulü için önemli bir adım olmuştur.

Ancak yirminci yüzyılın son yıllarında iki farklı ekip tarafından evrenin genişleme hızının son dönemde artış göstermekte olduğunun gözlenmesi, standart kozmolojik modelin sarsılmasına neden olmuştur. (Riess et al. 1998; Schmidt et al. 1998; Perlmutter et al. 1999)

Genişleme hızının artışını açıklamak için, Einstein'ın statik evren modelini oluşturmak için kullandığı kozmolojik sabit tekrar denklemlere dahil edilmiş ve model günümüzde de geçerliliğini koruyan Λ -CDM modeline dönüşmüştür. Bu şekilde, matematiksel olarak gözlemlerle uyum sağlanmış olmakla birlikte, evrendeki enerji miktarının yaklaşık %69'unu oluşturan bu enerjinin fiziksel kaynağının açıklanması mümkün olmamıştır. (Planck Collaboration, 2018)

Genel görelilik tabanlı standart kozmolojik modelin karşılaştığı bu sıkıntıyı çözümleyebilmek adına, genel görelilik denklemlerinin genişletilmesiyle çeşitli kütle çekim teorileri oluşturulmuştur. Bu teoriler, kütle çekimine eğrilik sabiti dışında ek skaler ve/veya tensör alanlar eklenmesi, etki denklemlerine, eğriliğin daha üst seviye terimlerini içeren fonksiyonlar dahil edilmesi gibi çeşitli yöntemlerle gözlemlenen hızlanarak genişleme durumunu açıklamaya çalışmaktadırlar. (S.Nojiri, S.D.Odintsov and V.K.Oikonomou, 2017)

Bu tez kapsamında, öncelikle genel görelilik teorisi alan denklemlerine en küçük etki prensibi yöntemi ile ulaşılması görülecek ve ardından, FRW (Friedmann-Robertson-Walker) metriği kullanılarak oluşturulan standart kozmolojik model incelenecektir. Bir kozmolojik modele ait temel parametreler listelenecek ve ardından, standart kozmolojik modelin karşılaştığı temel zorluklar gösterilecektir.

Sonraki kısımda, genel göreliliğe alternatif olarak getirilen en yaygın bazı teoriler listelenecek ve bunların temel özellikleri incelenecektir. Bu teorilerin etki integralleri

ve alan denklemleri ortaya konularak, genel görelilik alan denklemlerinden olan farklılıkları görülecektir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş kütle çekim teorilerinden, Gauss-Bonnet değişmezi içeren $f(\mathcal{G})$, $f(R, \mathcal{G})$ ve $f(\mathcal{G}, T)$ teorileri incelenecektir. Her üç teori için de etki integralleri literatürde verilen biçimde ele alınacak ve en küçük etki prensibi yardımı ile alan denklemlerine ulaşarak, Einstein alan denklemleri ile farklılıkları ortaya konacaktır.

Son bölümde ise, öncelikle genel görelilik, $f(\mathcal{G})$, $f(R, \mathcal{G})$ ve $f(\mathcal{G}, T)$ kütle çekim teorisi kullanılarak elde edilmiş Bianchi Tip I metrikli evren modelleri ele alınacak ve her bir modelin temel parametreleri grafiklendirilerek birbirleri ile ve genel görelilik teorisi ile karşılaştırılacak ve gözlemlenen evrenle uyumlu olup olmadıkları tartışılacaktır.

2. KÜTLE ÇEKİMİ VE GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ

2.1. Kütle Çekimi

Modern fiziğin tanımladığı dört temel kuvvetten biri olan kütle çekimi, bunlar arasında günlük hayatta en kolay gözlemlenebilenidir. Diğer kuvvetlere kıyasla çok zayıf olmakla birlikte, hayatımız boyunca bu kuvvetin etkisini hisseder ve yaşantımızı buna göre düzenleriz. Bu aşinalığa zıt olarak, kütle çekimi, gizemini korumaktadır. Evrenin başlangıcında tüm temel kuvvetlerin birleştiği düşünülmeyle birlikte, henüz kütle çekimini de barındıran bir GUT oluşturulamamıştır.

Antik çağlarda, cisimlerin yere düşme sebebinin, maddenin doğal konumuna ulaşma isteği olduğu öne sürülmüş ve bu görüş 17. yüzyıla kadar geçerliliğini sürdürmüştür. Newton'un 1687 yılında Principia Mathematica kitabıyla hem 3 temel hareket kanununu hem de evrensel kütle çekim kanunu ortaya koymasıyla birlikte cisimlerin birbirine uyguladığı bir kuvvet olarak kütle çekimi ilk kez matematiksel biçimde tanımlanmıştır. Newton'un ters kare kuvvet kanunu günümüzde dahi, rölativistik olmayan gök cisimlerinin ve uyduların hareketlerinin hesaplanmasında büyük bir başarıyla kullanılmaktadır.

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \quad (2.1)$$

Newton'un evrensel kütle çekim kanunu, Galileo zamanından beri kabul edilmiş olan ve tüm cisimlerin iç yapılarından bağımsız olarak aynı hızda düştüklerini söyleyen, Zayıf Eşdeğerlik Prensipli (Weak Equivalence Principle) ile uyumlu olmakla birlikte bu prensibi temel almamıştır. Ayrıca, kütle çekiminin aracı bir ortam aracılığıyla diğer cisimlere ulaştığı düşüncesinden vazgeçmemiştir.

Kütle çekiminin astronomik ve kozmolojik önemini açıklayan bazı temel özellikleri, Newton'un kütleçekim kanunundan görülebilir; (Hartle, 2003)

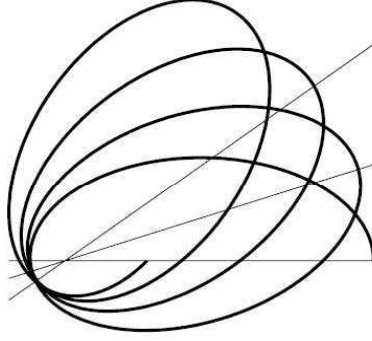
- Kütle çekimi, tüm kütleler arasında gerçekleşen bir etkileşimdir. (Einstein'ın özel görelilik kuramıyla ortaya koyduğu $E=mc^2$ enerji-kütle eşdeğerliği nedeniyle tüm enerji ve kütleler arasında gerçekleştiği söylenebilir.)
- Kütle çekimi nötrlenmez. Negatif kütle çekim değerine sahip cisimler bulunmadığından, kütle çekimini daima çekici etki gösterir.

- Kütle çekimi uzun mesafede etkilidir. Newton'un ters kare kuvvet kanununda ($1/r^2$) belirtildiği şekilde cisimler arasındaki uzaklık arttıkça çekim kuvveti azalmakla birlikte, sıfırlandığı bir sınır değeri yoktur.
- Kuvvet değerinin belirlenmesinde kullanılan Newton'un evrensel çekim sabiti G 'nin çok küçük bir değere ($6.67 \cdot 10^{-8} \text{ dyn.cm}^2/\text{g}^2$) sahip olmasından anlaşılacağı üzere, kütle çekim kuvveti diğer temel kuvvetlere göre çok daha zayıftır. Örneğin, iki protonun birbirlerine uyguladıkları kütle çekim kuvveti ile elektromanyetik itme kuvvetlerini karşılaştırdığımızda aşağıdaki oran karşımıza çıkacaktır.

$$\frac{F_{grav}}{F_{elec}} \approx 10^{-36}$$

Bu dört gerçek, bize kütle çekiminin oynadığı rolle ilgili önemli ipuçları vermektedir. Örneğin, en zayıf kuvvet olmasına rağmen, kozmolojik ve astrofiziksel ölçekte evreni düzenleyen kuvvet olma nedeni açıktır. Bu ölçekte, mesafeler, zayıf ve kuvvetli nükleer kuvvetlerin domine ettiği atom altı değerlerin çok üstündedir. Elektromanyetik kuvvet ise uzak mesafelerde etkili olabilirse de, evrenin elektrik yükü açısından nötr olması ve yerel yük farklılıklarının kısa zamanda birbirine çekilmek suretiyle nötrlenmesi nedeniyle bu ölçeklerde rol oynamaz. (Hartle, 2003)

Yaklaşık 300 yıl boyunca başarıyla kullanılmış olmasına rağmen Newton'un kütle çekim kanunu ile açıklanması zor olan gözlemler de bulunmaktaydı. Bunlardan en çarpıcı olanı şüphesiz, Merkür gezegeninin yörüngesindeki değişimin hesaplamalarla tutarlı olmamasıdır. Merkür'ün yörüngesi, kapalı bir elips olmayıp, enberi noktasında küçük ama gözlemlenebilir bir kayma bulunmaktadır. (Şekil 2.1)



Şekil 2.1 – Gezegenlerin gözlemlenen yörüngeleri mükemmel birer elips olmayıp, zaman içerisinde en beri ve en öte noktalarında sapma gözlemlenmektedir. Bu sapma kısmen diğer gezegenlerin çekim etkilerinin birleşiminden kaynaklanmaktaysa da, özellikle yakın mesafeler ve büyük kütleler söz konusu olduğunda (Güneş-Merkür ikilisi gibi) genel göreliliksel etkiler de hesaba katılmalıdır. (Plebanski and Krasinski, 2006)

İlk olarak, tam elips yörüngeden bu sapmanın, diğer gezegenlerin, Merkür üzerinde uyguladıkları çekim etkilerinden kaynaklı olduğu düşünülmüştür. Nitekim, Newton mekaniği, ikiden çok cismin etkileşimde bulunduğu Güneş Sistemi gibi sistemlerde, bu şekilde bir yörünge kayması olacağını öngörmektedir. Ancak, 1859 yılında, Le Verrier, diğer gezegenlerin hesaba katılmasıyla açıklanabilecek miktar ile, gözlemlenen kayma arasında yüzyılda 43 yay saniyelik bir fark olduğu ortaya koymuştur. (Verrier, 1859)

Bu farklılığı açıklamak için, Merkür ile Güneş arasında yer alan ve Vulcan olarak adlandırılan bir gezegen bulunduğu ya da Newton'un ters kare çekim kanununun küçük düzeltmelere tabi tutulması gerektiği gibi hipotezler ortaya atılmış ancak herhangi bir sonuç alınamamıştır. Kasım 1915 tarihinde Einstein, genel görelilik teorisi ile bu kaymanın açıklanabileceğini göstermiş ve bu başarı, teorinin kabul görmesinde önemli etmenlerden biri olmuştur. (Einstein, 1915)

Ayrıca, 1905 yılında, Einstein'ın Özel Görelilik Kuramı'nı yayınlamasıyla birlikte cisimlerin vakumdaki ışık hızından daha hızlı bir etkileşimde bulunamayacaklarının kabulünden sonra, sonsuz hızda etkide bulunan kütle çekim kuvveti içeren Newton'un evrensel çekim teorisinin değiştirilmesi gerekliliği kaçınılmaz olarak ortaya çıkmıştır.

Bu motivasyonla, özel görelilik teorisi ile ilgili çalışmalarının hemen ardından daha 1907 yılında Einstein kütle çekimi ve eşdeğerlik prensibi üzerine çalışmaya başlamıştır. İşte bu sene, kendisinin “En mutlu düşüncem” olarak tanımladığı genişletilmiş bir eşdeğerlik prensibini ortaya koymuştur. Einstein Eşdeğerlik Prensibi (Einstein Equivalence Principle) olarak adlandırılan bu prensip, zayıf eşdeğerlik prensibinin geçerliliği yanında, serbest düşme halindeki bir gözlemci için tüm (kütle çekimsel olmayan) deneylerin, gözlemcinin hızından ve uzaydaki pozisyonundan bağımsız olacağını öngörmektedir.

Einstein Eşdeğerlik Prensibi, aşağıdaki 3 madde ile özetlenebilir. (Camenzind, 2007)

- Zayıf eşdeğerlik prensibi geçerlidir.
- Gerçekleştirilebilecek her tür kütle çekim dışı yerel deneyin sonucu, ait olduğu, serbest düşüş yapmakta olan referans sisteminin hızından bağımsızdır. (Lorentz invariance – Lorentz değişmezliği)
- Gerçekleştirilebilecek her tür yerel deneyin sonucu, evrende bulunan uzaysal konumdan ve zamandan bağımsızdır. (Local position invariance – Yerel konum değişmezliği)

Temel olarak bu prensip, bize ivmeli hareket eden gözlemciler ve aynı çekim ivmesine sahip kütle çekim alanı içerisinde bulunan gözlemcilerinin deney sonuçlarının aynı olacağını söylemektedir. Örneğin, iki yüklü parçacık arasındaki elektromanyetik kuvvetin ölçümü, kütle çekim dışı bir deneydir ve bu deneyin sonucu serbest düşüş yapmakta olan sistemin hızından bağımsızdır.

Sadece bu tanımı göz önüne aldığımızda bile, ışığın kütle çekim alanında eğri bir yol izleyeceğini ve kütle çekim potansiyelinin yüksek olduğu bölgeden zayıf olduğu bölgeye ilerlerken kırmızıya kayma göstereceği sonucuna varabiliriz.

2.1.1. Işığın İzlediği Yolun Kütle Çekim İle Eğrilmesi

Eşdeğerlik prensibinin, direkt bir gözlemsel sonucu, kütle çekim alanındaki ışığın izlediği yolun eğrilmesidir. (Baumann, 2017) Bu sonucu anlamak için şu iki sistemi göz önüne alabiliriz; 1. Uzayda, sabit bir $a = g\hat{z}$ sabit ivmesi ile hareket eden,

2. Dünya yüzeyinde sabit duran ve dolayısıyla $g = -g\hat{z}$ şeklindeki bir kütle çekim alanına maruz kalan iki roket düşünelim.

Hareket halindeki roketin bir yanından, diğer tarafa doğru bir ışık gönderildiğini varsayalım. Bu durumda, roket ivmeli bir hareket halinde bulunduğundan, ışık, roketin referans sistemine göre, eğri bir yol izleyecek ve diğer taraftaki duvara ulaştığında, roketin gidiş yönünün tersine daha yakın bir konumda olacaktır.

Eşdeğerlik prensibine göre, kütle çekimsel olmayan böyle bir deneyin sonucunun dünya üzerinde sabit bulunan roket için de aynı olması, yani ışığın düz bir çizgi izlemeyip kütle çekim alanı etkisinde eğri bir yol izleyerek karşı duvarda daha alçak bir konuma gelmesi beklenir.

Eddington tarafından, 1919 yılındaki güneş tutulması sırasında, güneşe yakın yıldızların ışığında bu eğrilme etkisini gözlemlemesi, genel görelilik teorisinin genel kabul görmesi yönünde önemli bir adım olmuştur.

2.1.2. Kütleçekimsel Kırmızıya Kayma

Einstein eşdeğerlik prensibinin bir diğer sonucu da, kütle çekimsel kırmızıya kaymadır. (Camenzind, 2007) Aralarında h mesafesi bulunan, ve a sabit ivmesiyle hareket eden iki gözlemci olduğunu varsayalım. Bir t_0 anında, birinci gözlemci, λ_0 dalgaboyunda bir foton göndersin. İki gözlemci arasındaki uzaklık sabit olduğundan, diğer gözlemciye foton, kendi referans sistemlerinde, $\Delta t = h/c$ kadar bir süre sonra ulaşacaktır.

Ancak bu süre boyunca, gözlemciler $\Delta v = a\Delta t$ kadar hız kazanmış olacağından, Doppler etkisi nedeniyle, foton, aşağıdaki orana uygun şekilde kırmızıya kayacaktır.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta v}{c} = \frac{ah}{c^2}$$

Eşdeğerlik prensibine göre, aynı kırmızıya kayma etkisinin, uniform bir kütle çekim alanında bulunan iki gözlemci için de gözlenmesi gerekir. Nitekim bu etki, 1960 yılında Pound ve Rebka tarafından ilk kez gözlemlenmiştir.

Bu noktada, gerek ışığın izlediği yolun eğrilmesinin, gerekse kütle çekimsel kırmızıya kaymanın, eşdeğerlik prensibinin direkt sonucu olup, genel görelilik teorisinin detaylarından kaynaklanmadığını belirtmek gerekir. EEP'ye uyumlu diğer metrik kütle çekim teorileri de bu gözlemleri destekleyen sonuçlar verecektir.

Bu temel prensibin ardından Einstein, teorisinin alan denklemlerini tüm referans sistemleri için geçerli olacak formda (covariant) oluşturmak için çalışmaya başlamış ve 1915 yılında, Merkür'ün yörüngesindeki ve Güneş'e yakın bölgeye gelen yıldızın gözlemlenen pozisyonundaki sapmanın doğru biçimde hesaplanabilmesini sağlayan, Genel Görelilik Teorisi'ni yayınlamıştır.

2.2. En Küçük Etki Prensibi

Newton'un hareket kanunlarının genel kabul görmesinin ardından, cisimlerin hareketlerini formülize edecek alternatifler de ortaya çıkmıştır. Bunlar arasında en genel uygulanabileni, en küçük etki prensibi (the principle of least action) ya da Hamilton prensibidir. (Landau and Lifshitz, 1975)

Buna göre, tüm mekanik sistemler $L(q, \dot{q}, t)$ şeklinde bir fonksiyon ile karakterize edilebilirler ve sistemin hareketi,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.2)$$

integralinin mümkün olan en küçük değeri alma koşuluna uygun olacaktır. Burada L fonksiyonuna, sistemin Lagrangian'ı adı verilir ve (2.2) integraline de sistemin etki (action) denklemi denir. Lagrangian, koordinatlara (q) ve koordinatların birinci mertebe zaman türevlerine ($\dot{q}$) bağlıdır ve daha üst seviye türev içermez ki bu da mekanik sistemlerin koordinatları ve hızları verildiği takdirde tam olarak belirlenmiş oldukları sonucuyla uyumludur. (Landau and Lifshitz, 1975)

Örneğin klasik mekanik bir sistem için Lagrangian, (kinetik enerji - potansiyel enerji) şeklinde tanımlanır ve buna bağlı olarak da etki integrali aşağıdaki gibi ortaya çıkar.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (KE - PE) dt \quad (2.3)$$

Bu integralin minimum olduğu yolu bulmak için varyasyon işlemi gerçekleştirilir ve en küçük etki prensibine göre, varyasyon sıfıra eşitlenerek sonuca ulaşılır. Çözüm gerçekleştirilirken, yolun başlangıç ve bitiş noktalarındaki varyasyonun sıfır olduğu sınır koşulu geçerlidir.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (2.4)$$

Klasik mekanik Lagrangian'ı kullanılarak bu şekilde yapılan çözüm ile Newton'un hareket kanunu denklemlerine ulaşılabilir. Bu noktada, en küçük etki prensibi çözümünün sadece korunumlu kuvvetler için kullanılabilir olduğuna ve sürtünme gibi korunumsuz etkiler için geçerli olmadığına dikkat edilmelidir. Ancak, tüm temel fizik kanunları en küçük etki prensibi formunda gösterilebilirler. (Feynman, 1977)

Öte yandan, özel görelilik, genel görelilik, kuantum mekaniği gibi farklı alanlarda, uygun Lagrangian fonksiyonunu kullanılması şartıyla, aynı prensibin geçerli olması nedeniyle genel bir uygulanabilirliğe sahiptir ve farklı teorilerin karşılaştırılması için uygundur.

Bu çalışmada, genel göreliliğe alternatif teoriler incelenirken, ilgili alan denklemlerine en küçük etki prensibi ile ulaşılacak ve etki denklemlerinin GR ile farklılıkları üzerinde durulacaktır.

2.3. Genel Görelilik Teorisi

Einstein'ın kütle çekim teorisinin çıkış noktası, Newton hareket kanunlarının Mach'ın fikirlerine dayanan, temel bir eleştirisiyle başlar. (Plebanski and Krasinski, 2006) Newton'a göre, herhangi bir kuvvet etkisi altında olmayan cisimler ya hareketsiz kalacak ya da düzgün doğrusal hareket göstereceklerdir.

Ancak evren, hiçbir şekilde sıfırlanmayan kütle çekim kuvvet alanları içerir ve pratikte bu şekilde düz bir çizgide hareket eden cisim görülemez. Tüm cisimler, eğri yörüngeler izlerler. Burada da karşımıza kaçınılmaz bir zorluk çıkacaktır. Bir yörüngenin eğri olduğunu sadece düz çizgiyi tanımlayabildiğimiz durumda

söyleyebiliriz. Eğer hiçbir cisim gerçekte düz çizgi üzerinde hareket etmiyorsa bunu yapmak nasıl mümkün olabilir?

İlk akla gelen, ışığın izlediği yolu düz olarak kabul etmektir. Ancak 2.1.1. bölümünde görüldüğü üzere, Einstein eşdeğerlik prensibine göre, ışık da kütle çekiminden kütleli cisimler gibi etkilenmektedir.

Einstein, bu tanımlama zorluklarını tamamen ortadan kaldırmanın bir yolu olarak, kütle çekim kuvvetinin varlığını reddetmeyi bulmuştur. Bunun yerine, uzay-zaman geometrisinin kütle ve enerji nedeniyle değişime uğrayarak, serbest hareket eden parçacıkların, gözlemlediğimiz yörüngeleri takip etmesine sebep olduğu fikrini ortaya koymuştur. Bu şekilde bir teori, Newton kanunlarına göre daha karmaşık hesaplamalar içermekle birlikte, tamamen gözlemlere dayanacak ve gözlemlenemeyen bir mutlak uzay içermeyecektir. (Plebanski and Krasinski, 2006)

Bu şekilde değişmiş, eğrisel geometri artık klasik fiziğin öngördüğü şekilde öklid geometrisi değildir. Bu nedenle genel görelilik teorisi, Riemannian geometri üzerine kuruludur. Riemann uzayında, geodesic çizgiler, iki nokta arasındaki en kısa çizgiyi belirtir ve eğrilik sıfıra yaklaştıkça yani geometri öklid geometrisine yakınsadığında, düz çizgi halini alırlar. Bu özellikleriyle de serbest düşme hareketi yapan cisimlerin izlediği yol olmak için doğal bir adaydırlar. (Plebanski and Krasinski, 2006)

Einstein'ın genel görelilik teorisi, 4 temel varsayım içermektedir. Bunları kısaca aşağıdaki şekilde listeleyebiliriz; (Camenzind, 2007)

- Uzay-zaman, simetrik bir g metrik alanı içeren, 4-boyutlu bir M manifoldudur
- Kütle çekimi, bu Lorentzian manifoldunun Levi-Civita bağlantısı ile ilişkilidir. Bir diğer değişle, kütle çekimi ile ilişkili torsiyon yoktur.
- Kütle çekimi dışındaki tüm fiziksel etkileşimler, yerel eylemsiz referans sisteminde, kütle çekimi yokmuş gibi davranırlar.
- Uzay zaman geometrisini ve dolayısıyla kütle çekim alanını belirleyen Einstein tensörü ($G_{\mu\nu}$) enerji-momentum tensörü ile aşağıdaki şekilde bağdaştırılır. Buna göre, geometriyi ve dolayısıyla kütle çekim alanını belirleyen tek fonksiyon metriktir.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Genel görelilik teorisinde, kütle çekim alanları, uzay-zamanın eğriliği kaynaklı olduğundan, eğrilik tensörü (Riemann Tensörü - $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$) ile ilişkili olmalıdır. Riemann tensörü ($R^{\mu}_{\nu\rho\sigma}$) dördüncü seviye bir tensörken, alan denkleminin diğer tarafında bulunmasını beklediğimiz enerji-momentum tensörü ($T_{\mu\nu}$) ikinci seviyedendir. Bu durumda Riemann tensörünün kendisini değil, büzüşmesiyle oluşan Ricci tensörünü ($R_{\mu\nu}$) kullanmak doğal bir seçenek olarak ortaya çıkacaktır.

Ancak enerji-momentum tensörünün özellikleri nedeniyle Ricci tensörünün de direkt olarak kullanılması mümkün değildir. Bunun yerine, Bianchi özdeşlikleri kullanılarak, doğru alan denklemlerine ulaşılması gerekir.

2.3.1. Einstein-Hilbert Etki Denklemi

Einstein, alan denklemlerini oluştururken farklı bir yöntem izlemiş olsa da, onunla eşzamanlı biçimde, David Hilbert, en küçük etki prensibini ve dolayısıyla varyasyonu kullanarak aynı eşitliklere ulaşmayı başarmış ve alan denklemlerini ilk yayınlayan olmuştur. Bu nedenle, Einstein alan denklemlerini veren etki integrali Hilbert ya da Einstein-Hilbert etki denklemi olarak anılır.

Daha önce belirtildiği üzere, etki denklemi, Lagrange yoğunluğunun (Lagrangian), uzay-zaman içerisindeki bir yol integralinden oluşmalıdır.

$$S_{EH} = \int \mathcal{L} d^4x \quad (2.5)$$

Burada $\mathcal{L}$ sıfırıncı dereceden bir tensördür. Bu noktada, hangi skalerin kullanılabileceği sorusu ortaya çıkmaktadır. Kullanılacak skalerin, metriğin ikinci seviye türevlerini içermesi gerekir. Hilbert, gerekli koşulları sağlayan en basit skalerin, Riemann tensörünün iki kez büzüştürülmesiyle oluşturulan, Ricci skaleri R olduğunu bulmuş ve etki denklemini g metrik tensörün determinantı olmak üzere, R skalerinin $\sqrt{-g}$ ile çarpımı olarak belirlemiştir.

$$S_{EH} = \int \sqrt{-g} R d^4x \quad (2.6)$$

2.3.2. Einstein Alan Denklemleri

En küçük etki prensibiyle, Einstein alan denklemlerine ulaşmak için (2.6) ile verilen etki integralini, varyasyona tabi tutarak 0'a eşitlenmesi gerekir.

$$\delta S_{EH} = \delta \int \sqrt{-g} R d^4x = 0 \quad (2.7)$$

Madde de içeren alan denklemlerine ulaşmak için, Hilbert'in ortaya koyduğu, Einstein-Hilbert etki integrali kullanılabilir.

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \quad (2.8)$$

Burada, S_m , maddenin etki fonksiyonudur. Bu etki integralinin varyasyonunun, en küçük etki prensibi gereği, sıfır olması gerekir.

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \delta \left(\int \sqrt{-g} R d^4x + \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) d^4x \right) = 0 \quad (2.9)$$

Bu eşitlikte $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ olarak yerine konulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) \right] = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir. Varyasyonu açarsak,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \left[\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int d^4x \delta \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) \right] = 0 \quad (2.11)$$

olacaktır. Bu integralinde Ricci tensörünün varyasyonu,

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$$

ve $\delta \sqrt{-g}$ varyasyonu da

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu})$$

şeklinde yerlerine konulursa,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \left[\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\alpha \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha) + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) \right] = 0 \quad (2.12)$$

olacaktır. İlk terimde gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \left[\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\alpha (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - g^{\mu\alpha} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\nu) + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \int d^4x \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) \right] = 0 \quad (2.13)$$

formuna dönuşür. (2.13) Denkleminde birinci parantezin içindeki ifadeler incelendiğinde μ ve ν indisleri üzerinden toplam alındığı yani contraction (büzüleme) işlemi uygulandığı ve bunun sonucunda 1. Dereceden tensor kaldığı görülür. Gauss teoremine göre, bu integral, bir yüzey integraline dönüştürülebilir ve yüzeyde varyasyon sıfır kabul edildiğinden, bu terim ihmal edilebilir. Dolayısıyla, gerekli düzenlemeleri de yaparsak, elimizde,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa} \left[\int d^4x \sqrt{-g} (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} R) \delta g^{\mu\nu} + \delta \int S_m(g_{\mu\nu}, \psi_M) \right] = 0 \quad (2.14)$$

kalacaktır. İntegralin, madde içeren kısımdaki S_m varyasyonunu bulmak için, enerji momentum tensörüne ihtiyaç vardır. Enerji momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanabilir. (Carroll, 1997) Bu şekildeki , Einstein alan denklemleri,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

şeklinde elde edilecektir.

2.3.3. Genel Göreliliğin Gözlemsel Testleri

Teorisini ortaya koyduğunda, gözlemsel doğrulamanın Einstein için ikincil önemde olduğunu söyleyebiliriz. Her ne kadar Merkür'ün yörüngesindeki sapmayı ve ışığın kütle çekimi etkisinde izleyeceği eğri yörüngeyi hesaplamış olsa da, teorinin içsel uyumu ve zarafetiyle daha çok ilgilendiği bir gerçektir.

Ancak, geçen zaman içerisinde, deney ve gözlem hassasiyetlerinin de artmasıyla, kütle çekim gözlemleri, bu çalışma alanının önemli bir kısmını oluşturmaya başlamıştır.

Quasarlar, pulsarlar ve kozmik aralan ışıınımı gibi gözlemlerin başlamasıyla, 1960 yılından itibaren, genel göreliliğin, gözlemlenebilir öngörülleri üzerinde durulmuş ve bu öngörüllerin gözlemler ve olası alternatif kütle çekim teorileriyle karşılaştırılması çalışmaları yoğunlaşmıştır.

Genel göreliliğin, başarıyla geçtiği gözlemsel testleri aşağıdaki gibi özetleyebiliriz. (Will, 2015)

Işığın Eğrilmesi : Güneş'in gökkürede, yakınında bulunan yıldızların ışığını egeceği öngörüsü ve bu öngörünün Eddington tarafından gözlemlenmesi, genel görelilik teorisinin büyük zaferlerinden biridir. Ancak, Eddington ve ekibinin, bu ilk gözlemdeki doğruluklarının %30 olduğunu ve sonraki gözlemlerin de doğruluğu çok arttırmadığını belirtmek gerekir. Bulunan sapma değerleri, genel göreliliğin öngördüğünün yarısı ile iki katı arasında saçılma göstermektedir. Günümüzde ise, Hipparcos uydusu ve Sloan Digital Sky Survey (SDSS) aracılığıyla yapılan gözlemler ile hata payı yüzde 0.3'e kadar inmiş ve genel göreliliğin teorik öngörülleriyle tutarlılık tespit edilebilmiştir. (Bolton, Rappaport and Burles, 2006)

Merkür yörüngesinin enberi noktasındaki kayma : Le Verrier tarafından 1859 yılında ortaya konulan, Merkür'ün yörüngesi probleminin, genel görelilik tarafından çözülmesi, teorinin bir başka büyük başarısı olarak karşımıza çıkmaktadır. Merkür yörüngesine yerleştirilmiş, Messenger uydusu verileriyle yapılmış güncel gözlemler, teorik sonuçlarla 10^{-5} seviyesinde uyum sağlanmıştır. (A. K. Verma, A. Fienga, J. Laskar, H. Manche and M. Gastineau, 2014)

Merkür dışında yörünge kaymasıyla ilgili olarak tamamlanmış en güncel çalışmalardan biri de gökadamızın merkezinde bulunan Sgr A* SMBH etrafında dolanan S2 yıldızının incelenmesidir. (Gravity colloboration, 2020) Yörünge verisi üzerinde yapılan incelemeler, kaymanın genel görelilik hesaplamalarıyla uyumlu olduğunu ortaya koymuştur.

Eşdeğerlik prensibi testleri : Genel göreliliğin gözlemsel testleri içerisinde bir başka sınıfı da, eşdeğerlik prensibinin farklı seviyelerde kontrolüdür. Bunlar arasında,

zayıf eşdeğerlik prensibinin Dünya-Ay yörüngesinde tedirginlik kontrolüyle testi, konum ve referans sistemi bağımsızlığının ve gök cisimlerinin yörünge dinamikleri ve yapıları üzerindeki etkilerinin incelenmesi ve kütle çekim sabitinin kozmolojik zaman ölçeğindeki olası değişimlerin tespit edilmeye çalışılarak kontrolü sayılabilir.

Pulsar çifti gözlemleri : Yakın (yörünge periyodları bir günün altında) pulsar çiftlerinin gözlemlenmesiyle, genel görelilik teorisinin farklı parametreleri test edilebilmiştir. Bunlara örnek olarak, geodesic sapmanın, genel görelilik ile %13 oranında uyum ile tespit edilebildiği J0737-3039A, B çifti (Breton et al., 2008), yörünge bozulmasının genel görelilik ile %6 oranında uyum sağladığı J1141-6545 beyaz cüce, pulsar çifti (Bhat, Bailes, and Verbiest, 2008) verilebilir.

Kütle çekim dalgası gözlemleri : Einstein'ın genel görelilik teorisinin öngördüğü kütle çekim dalgalarının, 2015 yılında, LIGO gözlemevinde ilk tespitiyle birlikte, teorisinin testi ve astronomi gözlemleri alanında yeni bir araç ortaya çıkmıştır.(Abbott et al., 2016)

Kütle çekim dalgalarıyla testlerde, kütle çekim dalgalarının polarizasyonu, kütle çekimsel ışıının tespiti ve kütle çekim dalgalarının hızının tespiti gibi parametreler kullanılabilir.

Kuvvetli alan gözlemleri: Evrende gözlemlediğimiz kara deliklerin, genel göreliliğin öngördüğü özelliklere sahip olup olmadığının araştırılması, teorisinin limitlerde testi açısından önemlidir. Her ne kadar kara delik gözlemleri doğaları gereği zor olsa da, bu konuda önemli gelişmeler hayata geçirilmiştir. Yakın zamanda, Event Horizon teleskobu ile, M87 gökadası merkezinde bulunan Supermassive Black Hole (SMBH) gölgesinin gözlemlenebilmesi tarihi bir adım olmuştur. (The Event Horizon Telescope Collaboration, 2019)

2.4. Genel Görelilik ve Kozmoloji

Genel göreliliğin, en önemli uygulamalarından biri kozmoloji (evren bilim) alanında olmuştur. Einstein'ın teorisinden önce, Newton'un kütle çekim teorisi ve hareket kanunları, cisimler arasındaki etkileşimi tanımlıyor ve gök cisimlerinin hareketlerini açıklamakta kullanılıyordu ancak, evrenin gelişimini ve evrimini tanımlayacak bir çalışma yapılmaya uygun değildi.

GR ile birlikte, uzay-zamanın maddeden bağımsız bir kavram olarak ortaya konmasıyla, evrenin bir bütün olarak modellenmesi ve incelenmesi mümkün olmuştur.

Bu konuda ilk çalışmayı Einstein bizzat kendisi gerçekleştirmiş olmakla birlikte, ulaştığı sonucun statik bir evrenin aksine değişen (genişleyen ya da çöken) bir evrene işaret etmesi nedeniyle, denklemlerini değiştirme ihtiyacı hissetmiş ve statikliği sağlayacak, kozmolojik sabit dediği bir katsayı eklemiştir. (Λ)

Daha sonra, Hubble'ın gözlemleriyle, evrenin sabit olmayıp, genişlemekte olduğu ortaya konmuş ve Einstein “en büyük hatam” dediği bu sabiti kaldırmıştır. Ancak, 20. Yüzyılın son on yılındaki gözlemlerin, evrenin genişleme hızının artmakta olduğunu göstermesiyle, kozmolojik modellerde Λ sabiti tekrar kullanılmaya başlanmıştır.

2.4.1. Kozmolojik Prensip

Nicolaus Copernicus, 16. Yüzyılda, güneş merkezli evren modelini ortaya koyana dek, dünyanın evrenin merkezinde bulunduğu görüşü yaygın kabul görmekteydi. Ancak, bu modelle birlikte ilk kez, evrenin merkezi farklı bir noktaya geçmiş ve Güneş merkez olmuştur.

İlerleyen zamanla ve astronomik gözlemlerle birlikte, ne güneşin, ne de güneşi barındıran Samanyolu gökadasının evrenin merkezinde olmadığı gerçeği ortaya çıkmış ve bundan alınan dersle, “Evrende özel bir noktada bulunmuyoruz.” Şeklinde özetlenebilecek Kopernik Prensibi (Copernican Principle) temel alınmaya başlamıştır.

Bu prensibin, evrene uygulanması ise Kozmolojik Prensip (Cosmological Principle) ile olmaktadır. Buna göre; “Evren, homojen ve izotropiktir.”

Homojenlik kavramı, evrenin tüm noktalarının eşit olduğunu belirtir. Buna göre, evrenin her noktasındaki gözlemler birbirine benzer sonuçlar verecektir ve özel bir merkez bulunmamaktadır.

İzotropi ise, tüm yönlerin birbirine eşit olmasıdır. Bu özellik, tüm yönlerdeki gözlemlerin birbiriyle aynı sonucu vereceğini söyler.

Elbette, gerçek evren gözlemleri ile bu iki kavram arasında iki farklılık bulunmaktadır. Öncelikle, küçük ölçekte bu prensibin uygulanması mümkün değildir. Gezegenler, yıldızlar, gök adalar, homojenlikten uzaktır. Bu nedenle, prensibin, gerçek evreni, galaksi kümelerinden daha büyük ölçekte (>100 Mpc.) temsil ettiği kabul edilir.

İkinci farklılık da, prensipte bahsedilen homojenlik ve izotropinin istatistiksel olmasıdır. Buna göre, homojenlik ve izotropiden sapmalar yeterince büyük ölçeklerde ele alındığında, başka bölgelerdeki sapmalar ile aynı istatistiksel özelliklere sahip olacaktır.

2.4.2. Robertson-Walker Metriği

Kozmolojik prensibin, genel görelilik teorisine uygulanması, Friedmann-Robertson-Walker (FRW) ya da Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) modeli olarak adlandırılan kozmolojik model ile gerçekleştirilir. Bu modelde, homojenliğin sadece uzaysal olduğu ve evrenin zaman içinde değişim gösterebileceği kabul edilmektedir.

Uzaysal homojenlik ve izotropi kabulü, bizi, uzay-zamanı, uzaysal dilimlere bölme imkanımız olduğu noktasına götürür. Her bir uzaysal bölümü, kozmik zaman diyebileceğimiz bir t parametresiyle etiketleyebiliriz. İzotropi kabulü ise, e_t vektörü ile belirtebileceğimiz, zaman yönünün, uzaysal dilimlere dik olduğu sonucunu doğurur. Yani, T zaman boyutunu, $\sum_x$ ise uzaysal boyutları göstermek üzere, $T \times \sum_x$ şeklindeki uzay-zamanda, e_T , $\sum_x$ 'ye dik olarak seçilebilir. Aksi taktirde, bu zaman yönü vektörünün izdüşümü, uzaysal bir yön belirleyecek ve izotropiyi bozacaktır. (Grøn and Hervik, 2007)

Bu durumda, metrik,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \quad (2.17)$$

formatında olacaktır. Burada $a(t)$ fonksiyonu, ölçek faktörü olarak adlandırılır. Bu fonksiyon, günümüzdeki ölçek faktörü 1 olacak şekilde ($a_0 = a(t_0) = 1$) normalize edilmektedir. Bu durumda $a(t)$ değeri, uzak bir gökcisminin (örneğin bir gökada kümesi) keyfi bir t anında bizden olan uzaklığının, şu anki uzaklığına oranını verecektir.

Uzaysal homojenliğin getirdiği bir başka özellik de, eğriliğin her noktada aynı olması gereğidir. Bu durumda, eğrilik k şeklinde bir parametre ile temsil edilebilir ve $\{-1, 0, 1\}$ değerlerinden birini alır. Eğrilik katsayısının pozitif olması, kapalı, küresel ve sonlu evreni tanımlarken, sıfır katsayısı düz ve sonsuz, negatif katsayı ise açık, hiperbolik ve sonsuz evrenlerin modellenmesinde kullanılabilir.

RW metriğinin tanımlanması için serbest parçacıklar ile birlikte hareket eden (comoving) bir kutupsal koordinat sistemi kullanılır. $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ olarak tanımlanmak üzere, RW metriği,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (2.18)$$

şeklinde verilir.

2.4.3. Enerji-Momentum Tensörü

Bir kozmolojik model oluşturabilmek için, Einstein alan denklemlerinin (2.16) sağ tarafını teşkil eden $T_{\mu\nu}$ enerji momentum tensörüne ihtiyaç vardır. Evrenin homojenliği ve izotropisini göz önüne aldığımızda, büyük ölçeklerde, maddenin ideal akışkan özelliklere sahip ve sürekli dağılım gösteren rölativistik olmayan bir yapıda olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda enerji-momentum tensörü bileşenleri aşağıdaki özelliklere sahip olacaktır. (Roos, 2003)

- i. Zaman-zaman bileşeni T_{00} , ρc^2 şeklinde verilen, enerji yoğunluğudur ve kütle dışında içsel ve kinetik enerjileri içerir.
- ii. Diagonal uzaysal bileşenler T_{ii} , i yönündeki basıncı (p^i) içerir ve birim alandaki momentum bileşenini verirler.
- iii. Zaman-uzay bileşenleri cT_{0i} , i yönündeki enerji akışını cT_{0i} olarak içerir. Ancak, varsayılan akışkan ile birlikte hareket eden (comoving) bir referans sistemi için akış olmayacağından bu bileşenler sıfır olacaktır.
- iv. Uzay-zaman bileşenleri, cT_{i0} , i yönündeki momentum yoğunluklarını verir. Ancak aynı zaman-uzay bileşenleri gibi bu bileşenler de comoving bir referans sisteminde sıfırlanırlar.

- v. Diagonal olmayan uzay-uzay bileşenleri ise T_{ij} şeklinde j yönündeki p^i kesme (shear) bileşenini verirler. Ancak homojen ve izotropik bir uzayda bu bileşenlerin sıfır olması gerekir.

Bu şekildeki koşullar sağlandığında, enerji-momentum tensörü sadece diagonal bileşenlere indirgenebilir ve

$$T_{\mu\mu} = (p + \rho c^2) \frac{v_\mu v_\mu}{c^2} - p g_{\mu\mu} \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Akışkanla birlikte hareket eden (comoving) referans sisteminde dörtlü hız vektörü $v^\mu = (c, 0, 0, 0)$ olarak verildiğinden enerji momentum tensörü bileşenleri (2.20) şeklinde sadeleşecektir.

$$T_{00} = (p + \rho c^2) - p g_{00} \quad ve \quad T_{ii} = -p g_{ii} \quad (2.20)$$

2.4.4. Friedmann Denklemleri ve Kozmolojik Parametreler

Bu noktada, Einstein alan denklemleri (2.16), Robertson-Walker metriği (2.18) ve ideal akışkan enerji momentum tensörü (2.20) kullanılmak suretiyle çözülebilir. Bu çözüm 1922 yılında Friedmann tarafından, Hubble'ın uzak galaksilerin kırmızıya kayması gözleminde yedi yıl önce gerçekleştirilmiştir.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} (\rho + 3p) \quad (2.22)$$

Bu denklemlerde a ölçek faktörünü, noktalı terimler de $a(t)$ ölçek faktörü fonksiyonunun zaman koordinatına göre birinci ve ikinci türevlerini belirtmektedir.

Friedmann'ın ölümünden sonra, Georges Lemaître tarafından 1927 yılında, bağımsız olarak çıkarılmalarına dek, bu denklemler genel bir kabul görmemiştir.

Friedmann denklemleri yardımıyla, gözlemlerle değerleri tespit edilebilecek, bazı temel kozmolojik parametrelere ulaşılır. Bu parametrelerden ilki günümüzde gözlenebilen değeri Hubble sabiti olarak bilinen Hubble parametresidir.

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (2.23)$$

Hubble parametresi, evrenin genişleme (ya da çökme) hızının ölçek çarpanına oranından oluşmaktadır ve günümüzdeki ölçek çarpanı 1 olarak normalize edildiğinden Hubble sabiti (H_0), günümüzdeki genişleme hızını verir. Hubble sabitinin değerinin tespiti, güncel gözlemsel kozmolojinin temel çalışma alanlarından biridir. İki büyük çalışma grubu tarafından elde edilen güncel değerler aşağıdaki gibi verilebilir.

$$H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \text{ (Planck Collaboration, 2018)}$$

$$H_0 = 74.03 \pm 1.42 \text{ km.s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \text{ (Hubble Space Telescope(HST) Group, 2019)}$$

Planck uydusu değerleri kozmik aralan ışıınımı (CMB) verisi üzerinden tespit edilmiştir. HST metodunda ise, gökadamızdaki ve yakın gökadalardaki cepheidler üzerinden Hubble sabiti hesaplanmıştır. İki grup arasındaki farklılık, yeni çalışmalarla azalmaktan ziyade artış gösterdiği görülmektedir.

Friedmann denklemleri yardımı ile elde edilebilecek önemli bir başka parametre de ivmelenme parametresidir. Evrenin genişleme hızındaki değişimi gösteren bu parametre

$$q = \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlanır. (2.21) eşitliğinden görüleceği üzere, yoğunluğun özel bir değeri için eğrilik parametresi $k = 0$ olmaktadır. Bu değere karşılık gelen yoğunluğa, kritik yoğunluk adı verilir.

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (2.25)$$

Gözlemlenen yoğunluğun, kritik yoğunluğa oranı olarak verilen Ω parametresi ise yoğunluk parametresi olarak adlandırılır.

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} \quad (2.26)$$

Günümüzdeki gözlemler, güncel yoğunluk parametresinin $\Omega \approx 1$ olduğunu göstermektedir.

Yoğunluk parametresi bu şekilde tanımlandığında (2.21) Friedmann denklemi, aşağıdaki şekilde bu parametre cinsinden yazılabilir.

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (2.27)$$

Bu eşitlikten de görüleceği üzere, uzaysal eğriliği belirten k faktörü ile, yoğunluk parametresi Ω ve dolayısıyla yoğunluk arasında bir ilişki bulunmaktadır. Yoğunluğun, kritik yoğunluktan küçük olduğu ($\rho < \rho_{\text{crit}}$) durumda, $0 < \Omega < 1$ ve $k = -1$ olacak ve açık evren modeli ortaya çıkacaktır. Yoğunluğun, kritik yoğunluğa eşit olduğu durum ise ($\rho = \rho_{\text{crit}}$) düz evreni belirtir ve $\Omega = 1$ ve $k = 0$ değerlerini alır. Son olarak, yoğunluğun kritik yoğunluğun üzerinde olması hali ($\rho > \rho_{\text{crit}}$), kapalı evreni gösterir ve $\Omega > 1$ ve $k = +1$ değerlerini alır.

2.4.5. Standart Kozmolojik Model (Λ CDM)

Friedmann denklemlerinin ilk kez ortaya konmasından günümüze kadar geçen sürede yapılan gözlemler, evrenin homojen ve izotropik olduğu varsayımı ile uyumlu sonuçlara ulaşmamızı sağlamıştır. Aynı şekilde, gözlemler bize, içinde yaşadığımız evrenin düze çok yakın bir eğrilik değerine sahip olduğunu göstermiştir.

Öte yandan, RW metriği ve FRW modelinin beklemediği gözlem sonuçları da vardır. Fritz Zwicky tarafından, Coma gökada kümesindeki üye gökadalardan hareketlerinden elde edilen toplam kütle miktarı ile bu kümeden alınan ışık miktarından tahmin edilen kütle arasındaki farkın ortaya konması ilk kez Karanlık Madde (Dark Matter) adını verdiğimiz madde bileşeninin literatüre girmesini sağlamıştır. (Zwicky, 1933) Daha sonra, gökadalardaki yıldızların dolanma hızı eğrilerinin incelenmesi karanlık madde konusunda önemli bir kanıt oluşturmuştur. (Rubin, 1980)

Günümüzde, karanlık maddeyle ilgili kütle çekimsel mercekleme, kozmik aralan ışıınımı ve büyük ölçekli yapıların incelenmesiyle karanlık maddenin varlığı konusunda reddedilmesi zor kanıtlar ortaya konmuş durumdadır ve teori genel kabul

görmektedir. Gözlemler karanlık maddenin soğuk olması gerektiğini ve evrendeki toplam madde-enerji içeriğinin yaklaşık %27'sini oluşturduğunu göstermektedir.

Bir başka beklenmedik gözlem sonucu da, evrenin geç zaman genişleme hızının artış göstermesidir. Yirminci yüzyılın son on yılında yapılan gözlemlerle ortaya konan bu durum, evrenin enerji içeriğinin çok büyük bir kısmının, doğası bilinmeyen ve Karanlık Enerji (Dark Energy) adını verdiğimiz bir enerjiden oluştuğu sonucuna varılmasına yol açmıştır. (Riess et al. 1998; Schmidt et al. 1998; Perlmutter et al. 1999)

Her ne kadar son dönemde, bu çalışmaların geçerliliğini sorgulayan yayımlar olduysa da, karanlık enerji bileşeni, standart modelin bir parçası haline gelmiştir. (Kang et al., 2020)

Karanlık enerjinin kozmolojik modele dahil olması, en basit yöntem olarak kozmolojik sabit (Λ) dediğimiz bir negatif basınç teriminin Einstein alan denklemlerine eklenmesi şeklinde gerçekleştirilmiştir.

Aslında bu terim, GR'nin ilk kozmolojik uygulamalarını yaparken, Einstein tarafından ortaya çıkarılmış olup, evrenin sabit kalması amacıyla denklemlere dahil edilmiştir. Ancak 1920'li yıllarda, Hubble tarafından evrenin genişlediğini gösteren gökadalardan kırmızıya kayma miktarları gözleminden sonra Einstein bu terimi denklemlerinden çıkarmıştır.

Kozmolojik sabitin de eklenmesiyle ve ışığın vakumdaki hızı $c=1$ alınarak, Λ CDM adı verilen, standart kozmolojik modelin güncel Friedmann denklemlerine aşağıdaki şekilde ulaşılmış olur.

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.28)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.29)$$

H_0 , Hubble parametresinin günümüzdeki değeri olmak üzere, evrenin kütle, eğrilik ve karanlık enerji (vakum enerjisi) yoğunluk parametreleri boyutsuz halde

$$\Omega_m = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0, \quad \Omega_k = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu parametreleri kullanılarak, toplam yoğunluk parametresinin, günümüzdeki hali

$$\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad (2.31)$$

şeklinde yazılabilir. Yine gözlemlerimize göre, evrendeki madde yoğunluğu, baryonik madde ve soğuk karanlık madde yoğunluklarının toplamı olarak iki bileşene sahiptir. ($\Omega_m = \Omega_b + \Omega_c$) Bu durumda, Ω_{top} şeklinde göstereceğimiz toplam madde-enerji yoğunluğunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\Omega_{top} = \Omega_b + \Omega_c + \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_k \quad (2.32)$$

Güncel standart kozmolojik model, eğrilik parametresinin 0 (düz uzay) olacağını öngörmektedir. Bu durumda baryonik madde, karanlık madde ve vakum enerji yoğunlukları toplamı 1 olarak karşımıza çıkmaktadır. Güncel gözlemler, düz uzay varsayımına büyük yaklaşıklıkla uyumludur.

Standart kozmolojik model, 6 kozmolojik parametre ile tanımlanmaktadır. İlk 3 parametre, yukarıda tanımlarını yaptığımız, Hubble parametresi (H_0), baryonik madde yoğunluğu (Ω_b) ve soğuk karanlık madde yoğunluğu (Ω_c) olarak karşımıza çıkar. Ancak, çalışmalarda sıklıkla, H_0 yerine, diğer kozmolojik parametrelerle daha az korelasyon göstermesi nedeniyle, yeniden birleşim anındaki açısız akustik ölçeği (θ_{MC}) parametresi kullanılmaktadır.

Bunlara ek olarak, ilk zaman yoğunluk farklılıklarının şiddetini (σ_8), tayfsal indeksi (n_s) ile Thompson saçılmasının yeniden birleşim (recombination) dönemindeki optik derinliği (τ) parametreleri de kozmolojik modelin temel parametreleridir. (Génova-Santos, 2020)

Planck uydusundan alınan verilerle yapılan en güncel çalışmaya göre, evrenin yoğunluk parametreleri Tablo 2.1.'de görülebilir. (Planck Collaboration, 2018)

Tablo 2.1. Planck uydusu verilerine göre 2018 yılında belirlenen bazı kozmolojik parametreler.

Parametre	Açıklama	Değer
H_0	Hubble parametresi	$67.4 \pm 0.5 \text{ km/sMpc}$
$100\theta_*$	Açısal akustik ölçek	1.0411 ± 0.0003
$\Omega_b h^2$	Baryonik madde yoğunluğu	0.0224 ± 0.0001
$\Omega_c h^2$	Karanlık madde yoğunluğu	0.120 ± 0.001
Ω_m	Toplam madde yoğunluğu	0.315 ± 0.007
n_s	Skaler tayfsal indeks	0.965 ± 0.004
σ_8	Yoğunluk dalgalanma şiddeti	0.811 ± 0.006
τ	Optik derinlik	0.054 ± 0.007

2.4.6. Standart Kozmolojik Modelin İçerdiği Sorunlar

Standart kozmolojik model, gerek gözlemlerle uyumluluğu, gerekse kozmik mikrodalga ışıınımı, kütleçekim dalgaları gibi öngörülerinin doğrulanması sayesinde büyük başarı gösteren bir teori olarak literatürde yerini almıştır.

Ne var ki, bu modelin de sorunsuz biçimde tüm gözlemleri açıklayabildiğini ve öngördüğünü söylemek mümkün değildir. Bu bölümde, standart model ile açıklanmakta güçlük çekilen bazı gözlemsel sonuçlar üzerinde durulacaktır.

2.4.6.1. Ufuk Problemi

Genel görelilik ve standart kozmolojik model, ışığın vakum ortamda limitli ve belli bir hızda ilerlediğini ve evrenin bir başlangıç anı olduğunu belirtir. Bu da belli bir anda, ancak, evrenin oluşumundan o ana kadar geçen sürede ışığın alabileceği yol kadar uzaklıktan veri alabilmemiz sonucunu ortaya çıkarır. Buna bağlı olarak, hesap edilebilir bir kesin ufuk mesafesi bulunmaktadır.

Örneğin, günümüz için ele alırsak, $t_0 \approx 13.8$ Gyr olduğundan, gözlemlenebilir evren, yaklaşık 13.8 milyar ışık yılı yarıçapında olacaktır. Evrenin daha uzakta yer alan kısımları, bizim için gözlenemez durumdadır.

Benzer şekilde herhangi bir t anındaki ufuk genişliğini hesaplamak da mümkündür. Işık, dt zaman aralığında, $c dt$ kadar bir mesafe katedecektir. Bu da a

evrenin ölçek faktörü olmak üzere, comoving uzaklık aralığı olarak düşündüğümüzde $dx=c dt/a$ şeklinde olur. Büyük patlamadan, herhangi bir t anına (ya da z kırmızıya kaymaya) kadar geçen sürede, ışığın katettiği comoving mesafe,

$$r_{H,com}(t) = \int_0^t \frac{cdt}{a(t)} \quad (2.33)$$

şeklinde yazılabilir. Kırmızıya kayma cinsinden ise

$$r_{H,com}(z) = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{cda}{a^2 H(a)} \quad (2.34)$$

biçiminde ifade edilebilir. Kırmızıya kaymanın düşük olduğu, basınçsız maddenin baskın olduğu geç dönem için,

$$H(a) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m} a^{-\frac{3}{2}} \quad (2.35)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda, ufuk yarıçapı

$$r_{H,com}(z) \approx 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)\Omega_m}} \quad (2.36)$$

şeklinde hesaplanabilir. Işınlımın (radyasyon) daha güçlü etki gösterdiği erken dönemde ise,

$$H(a) \approx H_0 \sqrt{\Omega_r} \frac{1}{a^2} \quad (2.37)$$

şeklinde verilir ve buna bağlı olarak da ufuk yarıçapı

$$r_{H,com}(z) \approx 2 \frac{c}{H_0 \sqrt{\Omega_r}} \frac{1}{(1+z)} \quad (2.38)$$

şeklinde olacaktır. Beklendiği şekilde, z değeri ne kadar büyükse, evrenin yaşı o kadar genç ve ufuk genişliği de buna bağlı olarak küçük olacaktır.

Kozmik ardalan ışınlımının da kaynağı olan, yeniden birleşme (recombination) dönemindeki ufuk değerini göze alalım. Bu zamana ait kırmızıya kayma değeri $z \approx 1000$ olarak verilebilir. Bu dönemde (2.36) eşitliği geçerlidir.

Bu eşitliği kullanarak, o anki ufuk genişliğinin, gökyüzünde tekabül ettiği açısal boyutu tespit etmek mümkündür. Bunun için D_A açısal çap,

$$D_A(z) \approx \frac{c}{H_0} \frac{2}{\Omega_m z} \quad (2.39)$$

şeklinde ifade edilir. (Schneider, 2015) Bu durumda, $\Theta_{H,rec}$ yeniden birleşme anı için göküzündeki açısal genişlik,

$$\Theta_{H,rec} = \frac{r_{H,prop}(z_{rec})}{D_A} \quad (2.40)$$

şeklinde, yani ufuk yarıçapının, şu anki açısal genişliğe oranı şeklinde yazılabilir. (2.38) ve (2.39) kullanılarak, (2.40) eşitliği,

$$\Theta_{H,rec} \approx \sqrt{\frac{\Omega_m}{z_{rec}}} \sim \frac{\sqrt{\Omega_m}}{30} \sim \sqrt{\Omega_m} 2^o \quad (2.41)$$

olacaktır ki bu da, günümüzdeki Ω_m değeri olarak yaklaşık 0.3 almamız halinde, yeniden birleşme anındaki ufuk genişliğinin, şu an gökyüzünde, sadece 1° civarında bir açıya tekabül ettiğini gösterir.

Bilindiği üzere, hiçbir etkileşimin hızı, ışığın vakumdaki hızından fazla olamaz. Bu durumda, şu anda gözlemlediğimiz kozmik ardaan ışıınının birbirinden bir dereceden daha uzakta bulunan kısımları, nedensel olarak bağımsız bölgelerden kaynaklanmaktadır. Doğal olarak da, sıcaklık da dahil olmak üzere herhangi bir bilgi alışverişinde bulunmuş olamazlar.

Oysa ki kozmik ardaan ışıınının ölçümleri, ışıınınla ilişkilenen 2.73 K 'lik sıcaklığın gökyüzünün her yönünde sadece $\Delta T/T \approx 10^{-5}$ olacak şekilde dalgalanma gösterdiğini ortaya koymaktadır. Nedensel ilişki içinde bulunmayan bölgelerin böylesine benzer sıcaklığa sahip olması standart kozmolojik modelin açıklayamadığı bir durumdur.

2.4.6.2. Düzlük Problemi

Yoğunluk parametresi (2.26) eşitliğinde belirtildiği üzere, günümüzdeki yoğunluğun (ρ), kritik yoğunluğa (ρ_{crit}) bölünmesiyle elde edilirler. Bu parametreleri, evrenin tüm zamanları için geçerli olacak şekilde genelleştirebiliriz.

$$\Omega_0(z) = \frac{\rho_m(z) + \rho_r(z) + \rho_v(z)}{\rho_{crit}(z)} \quad (2.42)$$

Hubble parametresinin zamanla değişen yapısı nedeniyle (2.42) eşitliğinde görüldüğü üzere, kritik yoğunluk da doğal olarak kırmızıya kaymanın bir fonksiyonudur.

$$\rho_{crit}(z) = \frac{3H^2(z)}{8\pi G} \quad (2.43)$$

Madde yoğunluğu, ışıınım yoğunluğu ve vakum enerjisi yoğunluğu ölçek faktörü (a) ile,

$$\rho_m(t) = \rho_{m,0} a^{-3}(t), \quad \rho_r(t) = \rho_{r,0} a^{-4}(t), \quad \rho_v(t) = \rho_{v,0} = sbt. \quad (2.44)$$

şeklinde ilişkili olduğundan, yoğunluk parametreleri,

$$\Omega_m = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{crit,0}}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{crit,0}}, \quad \Omega_v = \frac{\rho_{v,0}}{\rho_{crit,0}} \quad (2.45)$$

şeklinde yazılabilir ve günümüzdeki kritik yoğunluk değeri ($\rho_{crit,0}$), olarak da

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (2.46)$$

kullanılırsa, (2.42) eşitliğini aşağıdaki formda yazmak mümkün olacaktır.

$$\Omega_0(z) = \left(\frac{H_0}{H}\right)^2 \left(\frac{\Omega_m}{a^3} + \frac{\Omega_r}{a^4} + \Omega_\Lambda\right) \quad (2.47)$$

Buna bağlı olarak da,

$$1 - \Omega_0(z) = F [1 - \Omega_0(0)], \quad F = \left(\frac{H_0}{aH(z)}\right)^2 \quad (2.48)$$

eşitliğine ulaşılabilir. Burada ilk dikkatimizi çeken özellik, F fonksiyonunun daima pozitif olduğudur. Bu da, $1-\Omega_0(z)$ değerinin işaretinin zaman içinde değişmediğini gösterir. Bu değer işaretinin, evrenin eğrilik parametresi ile aynı işarete sahip olması da, kozmik evrim boyunca, eğriliğinin aynı işarete kalacağını gösterir. Yani düz bir evren hep düz kalacak, pozitif eğrilikli, kapalı bir evren daima kapalı olmaya devam edecektir.

İkinci sonuca ulaşmak için belirlemiş olduğumuz F fonksiyonunun erken dönem davranışını incelemek gerekmektedir. Işınının baskın olduğu bu dönemde,

$$F = \frac{1}{\Omega_r(1+z)^2} \quad (2.49)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan görüleceği şekilde, erken dönemde (büyük z değerleri) F , çok küçülecektir. Örneğin $z \approx 10^{10}$ olduğu, nötrino yoğunlaşma evresinde F değeri 10^{-15} mertebesinde dir.

Günümüzde, $\Omega_0(0)$ değerinin, 1'e çok yakın olduğunu gözlemlemekteyiz. Bu durumda, $|1-\Omega_0(0)| < 1$ olduğunu söyleyebiliriz. Büyük kırmızıya kayma değerlerinde, F çok küçük olduğuna göre, buna karşılık gelen Ω_0 değerinin 1'e çok yakın olması gerekir. Örneğin yukarıda bulduğumuz $z \approx 10^{10}$ dönemi için $|\Omega_0-1| < 10^{-15}$ seviyesinde olmalıdır.

Bu da bizi, günümüzde gözlemlediğimiz toplam yoğunluk parametresinin 1 civarında olabilmesi için, başlangıç döneminde 1'e çok büyük yaklaşıklıkta olması gerektiği sonucuna götürür. Standart kozmolojik modelin ihtiyaç duyduğu bu hassas başlangıç koşulu, teorelin açıklamakta zorlandığı bir noktadır ve düzlük problemi (flatness problem) olarak literatürde yer almaktadır.

2.4.6.3. Büyük Yapıların Oluşum Problemi

Ufuk ve düzlük problemlerinin tersi denilebilecek bir başka problem de günümüzde gözlemlediğimiz yapıların oluşması problemidir. Standart kozmolojik model, evrenin tamamen homojen bir başlangıç koşulu gerektirir. Ancak bu homojen başlangıcın günümüzdeki büyük ölçekli yapıları oluşturmaları için bir mekanizma ortaya koymaz. (Plebanski and Krasinski, 2006)

Mevcut yapıların, genel kabul gören açıklaması, evrenin ilk oluşumu sırasındaki kuantum dalgalanmalarının, enflasyon nedeniyle genişleyerek büyük ölçekli yoğunluk dalgalanmaları şeklindedir.

2.4.6.4. Manyetik Monopol Problemi

Elektromanyetik kuvvet içeren her GUT, yüksek simetri bozunmasını, elektrik yüklerinin kuantizasyonu için doğal bir mekanizma olarak kullanır. Bu simetri bozunması ise, manyetik monopol oluşması sonucunu öngörmektedir. (Coles and Lucchin, 2002)

Parçacık fiziği modelleri, evrenin ilk oluşumu sırasındaki soğumanın belli bir T_{GUT} sıcaklığında, bu tip bir simetri kırılmasına yol açacağını göstermektedir. Bu geçiş sırasında, manyetik monopollerin oluşması gerekir ve bu monopollerin sayısı hesaplanabilir. Buna göre, günümüzdeki manyetik monopol yoğunluğunun, baryonik madde yoğunluğunun 10^{11} katı kadar olması beklenmektedir. (Liddle, 2015)

Yoğun biçimde bulunması gereken monopollerden henüz hiç gözlenememiş olması, bu öngörünün doğru olmadığını ortaya koymaktadır.

2.4.7. Enflasyon Modeli : Ufuk ve Düzlük Problemlerine Bir Çözüm

Einstein alan denklemleri, bilindiği üzere diferansiyel denklemlerdir. Diğer tüm diferansiyel denklem sistemleri gibi, çözümleri denklemlerin kendisine ve başlangıç koşullarına göre yapılır. Eğer başlangıç koşulları, 2.4.6.1. ve 2.4.6.2 bölümlerinde tartışılan şartlara uygun ise, düzlük ve ufuk problemlerinden söz edemeyiz. Ancak başlangıç koşullarının neden bu şekilde hassas ayarlanmış olduğunu açıklayabilmemiz gerekir.

Bu açıklamalardan ilki, çoklu evren hipotezidir. Bu hipoteze göre çok sayıda evren farklı başlangıç koşullarıyla ortaya çıkmış olabilir. Bu durumda, hayat ancak uygun başlangıç koşullarına sahip evrenlerde ortaya çıkabilecektir. Örneğin, yoğunluk parametresinin gözlemlediğimiz değerden çok daha büyük olduğu evrenler kısa zaman içerisinde tekrar çökecek, canlıların ortaya çıkması için yeterli zaman olmayacaktır. Tersisi durumda ise, hızla genişleyen evrende madde yoğunlaşarak galaksiler ve yıldızlar gibi yapıları oluşturamayacaktır.

Bu durumda, yaptığımız gözlemlerde bu uygun başlangıç koşullarına şahit olmamız, varolabilmemizin doğal bir sonucudur. Çoklu evren hipotezinin bu açıklamasına anthropic prensip adını veriyoruz.

Çoklu evren hipotezini bir kenara bıraktığımızda, standart kozmolojik modelin sağlamlaştırılması için, neden başlangıç koşullarının bu şekilde olduğuna fiziksel bir açıklama getirmemiz gerekir.

Bilindiği üzere, günümüzde, parçacık hızlandırıcılarda, temel parçacıkların 100 GeV seviyelerine kadar enerjilerde uydukları fizik kanunlarını ve özelliklerini gözlemleyebilmekteyiz. Ancak çok daha yüksek enerjilerde ortaya çıkabilecek yeni davranışlar henüz belirsizdir. Bu nedenle büyük patlama anına çok yakın zamanlarda farklı fiziksel fenomenlerin varolması muhtemeldir.

Bu motivasyonla yola çıkan Alan Guth, 1981 yılında, standart kozmolojik modeli, Enflasyon mekanizmasıyla geliştirme önerisini ortaya atmıştır. (Guth, 1981). Bu model, çok erken dönemde, vakum enerjisinin, günümüzde gözlenen değerden çok daha yüksek olduğunu öngörür. Bu durumda (2.29) eşitliği, diğer terimler ihmal edilebilir seviyede küçük kalacaklarından,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \approx \frac{\Lambda}{3} \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (2.50)$$

şekline indirgenebilir. Bu denklem sisteminin çözümü, doğal olarak eksponansiyel bir fonksiyon olacaktır.

$$a(t) = a_i \exp\left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t\right) \quad (2.51)$$

Bu kısa süren ama çok büyük genişlemeye yol açan eksponansiyel genişleme safhasına enflasyon adını veriyoruz. (2.51) Eşitliğinde, a_i , enflasyon dönemi başındaki ölçek faktörünü belirtmektedir. Şimdi, enflasyonun, ufuk ve düzlük problemlerine nasıl yanıt verdiğini inceleyelim.

Enflasyon döneminde $H(a)$ aşağıdaki gibi sabit bir değer olacaktır.

$$H(a) = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (2.52)$$

Öte yandan, ufuk genişliği, (2.51) eşitliğiyle bağlantılı olarak eksponansiyel bir artış gösterecektir. Örneğin enflasyon öncesinde yaklaşık 10^{-24} cm boyutunda olan ve nedensel ilişki içinde bulunan bir bölgeyi ele alalım. Enflasyon, bu bölgeyi, çok büyük ölçüde (örneğin 10^{40} kat) genişletecektir. Bu şekilde, enflasyon dönemi sonunda bu bölge yaklaşık 10^{16} cm çapına kadar genişlemiş olur. Günümüze kadar geçen süreçte ise aynı bölge, 10^{41} cm çapına ulaşmış olur ki bu da gözlemlenebilir evrenden çok daha büyük bir bölgeye tekabül eder.

Bu şekilde, enflasyon senaryosuna göre, günümüzde gözlemleyebildiğimiz tüm evren, başlangıçta nedensel ilişki içindedir ve bu nedenle kozmik aralan ışınlamının neredeyse mükemmel izotropisi bunun doğal bir sonucudur. Ufuk problemi ortadan kalkmıştır.

Benzer şekilde, başlangıçta varolabilecek bir eğriliğin enflasyon ile düzleşmesi söz konusudur. Enflasyon fazında, vakum enerji yoğunluğu parametresinin domine olduğunu kabul ediyoruz. Bu parametre, enflasyon döneminde 1 olacaktır.

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1 \quad (2.53)$$

Enflasyon fazı süresinin, vakum enerjisinin tam olarak domine edici olmasını sağlayacak kadar uzun olduğunu kabul ettiğimizde, sürecin sonunda, toplam yoğunluk parametresi de $\Omega_0 = 1$ ve dolayısıyla evren çok büyük bir yaklaşıklıkla düz olacaktır. Bu şekilde, düzlük problemi de ortadan kalkmış olur.

Enflasyon modeli, ufuk ve düzlük problemlerini çözebilmekle birlikte, fiziksel temelleri tam anlaşılmış değildir. Özellikle enflasyonun sonundaki faz değişiminin ve zamanlamasının nedeni açıklanabilmiş değildir.

Öte yandan, gözlemlerle uyumluluğu, manyetik monopol ve büyük ölçekli yapı oluşumu sorunlarına da yanıt verebilmesi nedeniyle, enflasyon modeli geniş kabul görmektedir ve günümüz evren modellerinin önemli bir parçasıdır.

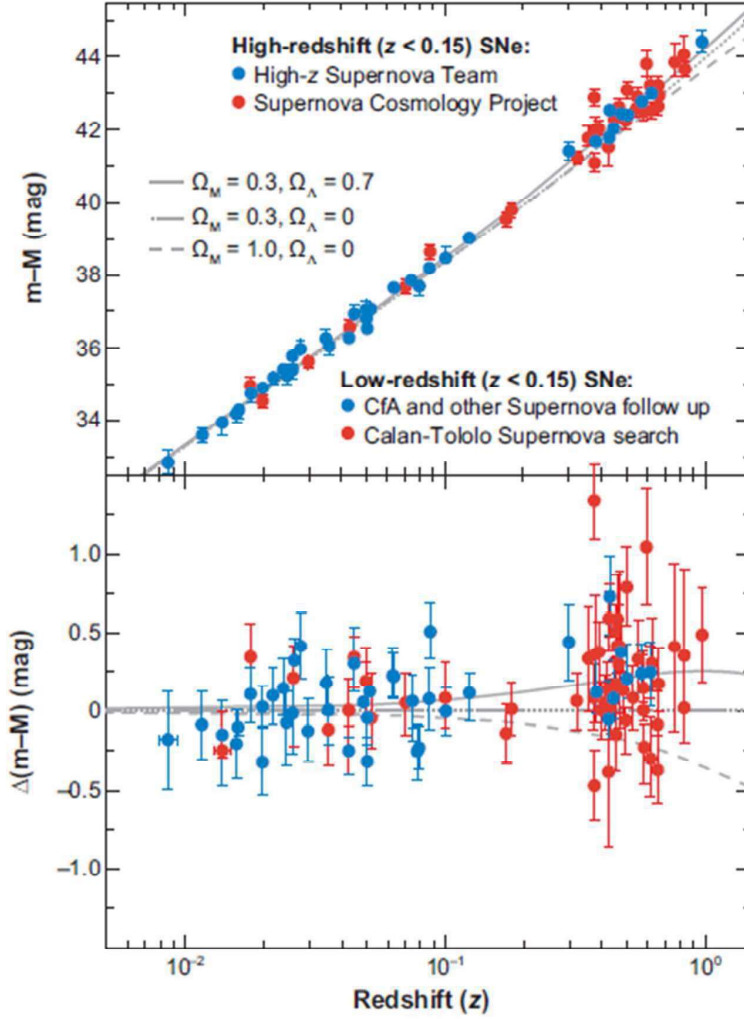
2.4.8. Geç Dönem İvmelenmesi ve Kozmolojik Sabit

Kozmolojik sabit (Λ), ilk olarak, yüz yılı aşkın bir süre önce Einstein tarafından GR alan denklemlerine eklenmiştir. (Einstein, 1917) Einstein'ın teorisine bu eklemeyi yapmayı gerekli görmesinin, GR ile oluşturduğu evren modelinin stabil olmayıp, çökme ya da genişleme göstermesidir. Bu durumun önüne geçmek ve modelin o sırada doğru olduğu düşünülen, statik, değişmeyen evreni tanımlayabilmesi için denklemlere, negatif basınç içeren bir sabit eklemiştir. Daha sonra, Hubble tarafından yapılan gözlemlerle, evrenin genişlemekte olduğu görüldüğünde, bu motivasyonu ortadan kalkmış ve dolayısıyla kozmolojik sabit denklemlerden çıkarılarak tekrar genel göreliliğin ilk haline geri dönmüştür. (Hubble, 1929)

Uzun bir aradan sonra, Zel'dovich (1968) kozmolojik sabitin, boş uzayın stres enerji tensörüne eşdeğer olduğunu ve ihmal edilmemesi gerektiğini farketmiştir. Kuantum alan teorisinde, vakum, ortaya çıkıp yok olan sanal parçacıklar içerir ve dolayısıyla bir enerji yoğunluğuna sahiptir. Ancak bu enerji hesaplandığında çok büyük değerler ortaya çıkması nedeniyle, kozmolojik sabit kullanımı genel kabul görmemiştir. (Frieman, Turner and Huterer, 2008)

Ancak, 20. yüzyılın son yıllarında iki farklı ekip tarafından yapılan gözlemler, kozmolojik sabitin tekrar gündeme gelmesine ve standart kozmolojik modelin bir parçası olmasına yol açmıştır.

Supernova Cosmology Project ve High- z Supernova Search adlı iki ekip, daha önce gözlemi mümkün olmayan uzaklıklardaki SNe Ia tipi süpernova parlaklıklarını ölçümlemiş ve bunların yavaşlayan bir evrende olması beklenenden yaklaşık 0.25 kadir kadar daha sönük olduklarını belirlemiştir. (Riess et al., 1998, Perlmutter et al., 1999) Farklı kırmızıya kayma değerlerindeki süpernova parlaklıkları analiz edildiğinde, evrenin son 5 GYr içerisinde hızlanan bir genişleme süreci yaşamakta olduğu sonucuna ulaşılmıştır. (Şekil 2.2.)



Şekil 2.2 – Üst kısım: Supernova Cosmology Project ve High-z Supernova takımları tarafından ölçümlenen SNe Ia süpernovaları için Hubble diagramı. Alt kısım: $\Omega_0 = \Omega_m = 0.3$ şeklinde belirlenmiş bir açık evrene göre uzaklık modüllerindeki farklılıklar. (Frieman, Turner and Huterer, 2008)

Kaşiflerine nobel ödülü kazandıran bu önemli keşif ardından, evrenin pozitif ivmeli biçimde genişlemesinin açıklanması kozmolojinin ve fiziğin temel bir problemi haline gelmiştir.

Şüphesiz, en basit açıklama kozmolojik sabitin varlığıdır ve nitekim standart kozmolojik model basitliği nedeniyle bu çözümü kabul etmiştir. Ancak, kozmolojik sabitin fiziksel temeli ve değerinin neden gözlemlediğimiz şekilde olduğu konuları açıklanmamıştır ve çözüm beklemektedir.

Kozmolojik sabit dışında evrenin genişlemesinin hızlanmasının olası açıklamaları aşağıdaki gibi sayılabilir. (Frieman, Turner and Huterer, 2008)

- Vakum enerjisi : Fiziksel motivasyonu açık ve matematiksel olarak kozmolojik sabite eşdeğer olmakla birlikte, hesaplanması için denenen tüm çalışmalar, çok büyük değerler ortaya çıkarmış ve gözlemlerle uyuşmamıştır.
- Skaler alanlar : Bazı ek skaler alanların denklemlere eklenmesiyle hızlanma açıklanabilmekle birlikte, ek bazı temel kuvvetlerin ortaya çıkması sonucunu doğurabilmektedirler.
- Homojen olmayan evren modelleri : Gözlemlerle uyumlu bir homojen olmayan evren modeli oluşturulabilir gibi görünmekle birlikte, bu tarz çözümler cazip görünmemektedir.
- Yeni kütleçekim fiziği : Hızlanarak genişleme, genel göreliliğin büyük ölçekte yeterli olmadığı ve geliştirilmesi gerektiğinin bir belirtisi olabilir. Henüz genel kabul gören bir genişletilmiş kütle çekim teorisi bulunmamakla birlikte bu konuda yoğun çalışmalar sürmektedir. Bu çalışmada da Einstein'ın genel görelilik teorisinin geliştirilmesiyle ortaya çıkan teoriler ve bunlar arasında da özellikle Gauss-Bonnet değişmezi (G) içeren teoriler bulunmaktadır.

3. ALTERNATİF KÜTLE ÇEKİM TEORİLERİ

Einstein'ın genel görelilik teorisi günümüzde geçerliliğini korumakla birlikte, neredeyse yüz yıldır olası alternatif teoriler üzerinde de çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalar başlangıçta daha çok teorik, bilimsel bir merakla ortaya çıkmışsa da, özellikle evrenin hızlanarak genişlemesinin gözlemlenmesinin ardından, karanlık enerjiye alternatif çözümler sunma amacı ağırlık kazanmıştır.

Daha önce 2.3 kısmında belirtildiği üzere, Einstein'ın genel görelilik teorisinin bazı varsayımları bulunmaktadır. Genişletilmiş (Modified) kütle çekim teorileri, genellikle bu varsayımlardan bir ya da bir kaçının ortadan kalkması şeklinde oluşturulmaktadır. Genişletilmiş kütle çekim teorileri, genel görelilik varsayımlarından ayrıldıkları şekillere göre birkaç grup oluştururular.

Yoğun biçimde işlenmiş, standart kitaplarda da yerini almış bir yöntem, metrik ile bağlantı (Levi-Civita bağlantısı - $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$) arasındaki ilişki olmaması halidir. Bu durumda bağlantı kendisi de metrik gibi bağımsız bir alan oluşturacaktır. Bu şekildeki tanımlamaya Palatini formalizmi denilmektedir. (Wald, 1984)

Bir diğer yaklaşım, metrik dışında ek alanların da, ki bunlar skaler, vektörel ya da tensör olabilir, kütle çekimi tanımlamakta kullanılmasıdır. Ek skaler alan barındıran Brans-Dicke kütle çekim teorisi bu grubun öncüsüdür ve genel olarak bu tarz teoriler Skaler-Tensör kütle çekim teorileri olarak adlandırılırlar. (Faroni and Capozziello, 2011)

Bu ve sonraki bölümde detaylıca inceleyeceğimiz bir başka grup ise, etki denklemlerinde, eğrilik değişiminin daha üst seviyelerini ($R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ gibi) içeren teorilerdir. (Sotiriou, 2007)

3.1. Brans-Dicke Kütle Çekim Teorisi

Çıkış motivasyonu, Mach prensibine tamamen uyumlu bir kütle çekim teorisi ortaya koymak olan Brans-Dicke teorisi, genel göreliliğe ilk alternatiflerden biridir. (Brans and Dicke, 1961)

Mach prensibinin farklı yorumları bulunmakla birlikte, temel olarak alınabilecek yaklaşıma göre, cisimlerin ataletlerini ve dolayısıyla kütle çekimini, evrendeki tüm maddenin ortak etkisi oluşturmaktadır. (Bondi and Samuel, 1996)

Evrendeki maddenin üniform bir dağılım göstermediği ve genişleme nedeniyle zaman içerisinde yoğunluğunun değiştiği göz önüne alındığında, kütle çekiminin de yere ve zamana göre değişim görmesi beklenir. Bu durumda, Newton'dan beri kullanılan G kütle çekim sabiti sabit olarak ele alınamaz, değişim içerisindedir. İşte Brans-Dicke teorisinde, bu kütle çekim sabitinin yerini, evrendeki madde dağılımının etkisini temsil eden bir ϕ skaler alanı alır. (Brans and Dicke, 1961)

Brans-Dicke teorisinde, etki integrali aşağıdaki gibi verilmektedir. (Kofinas and Tsoukalas, 2016)

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Phi R - \frac{\omega}{\Phi} \partial_\alpha \Phi \partial^\alpha \Phi - V(\Phi) \right) + \int L_m \sqrt{-g} d^4x \quad (3.1)$$

Burada ϕ , skaler alan, ω ise Brans-Dicke parametresidir. Madde lagrangianında, ϕ bulunmaması, alanın, madde ile etkileşimi olmadığını göstermektedir. Öte yandan Ricci skaleri ve metrik ile doğrudan etkileşim halindedir.

Eğer, G , Newton kütle çekim sabiti olmak üzere, G_{eff} ,

$$G_{eff} = \frac{G}{\Phi} \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan, ϕ skaler alanına göre değişim gösteren bir etkin kütle çekim sabiti elde etmiş oluruz. Bu da teorinin çıkış noktası olan Mach prensibi ile uyumu ortaya koymaktadır.

Brans-Dicke kütle çekim teorisi, Einstein'ın genel görelilik teorisine ek bir parametre barındırmaktadır. Brans-Dicke parametresi (ω) olarak adlandırılan bu parametrenin değerinin gözlemler ile sınırlandırılması mümkündür. Plank verisi üzerinden yapılan güncel çalışmalar $\omega \approx 1000$ seviyesinde belirlemekle birlikte (Avilez and Skordis, 2013) güneş sistemi içi yerel ölçümler $\omega > 40,000$ gibi çok büyük değerler verebilmektedir. (Bertotti, Iess and Tortora, 2003)

Genel görelilikte olduğu gibi, Brans-Dicke teorisinde de alan denklemlerine, en küçük etki prensibi ile ulaşmak mümkündür. Bunun için (3.1) integralinin hem metrik, hem de skaler alana göre varyasyonunun alınarak bunların sıfıra eşitlenmesi gerekir.

Metriğe göre varyasyon sonucu;

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\Phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\Phi^2} \left(\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi \right) + \frac{1}{\Phi} \left(\nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \square \Phi \right) - \frac{V}{2\Phi} g_{\mu\nu} \quad (3.3)$$

şeklinde olacaktır. (Sotirou, 2007) Burada $G_{\mu\nu}$, Einstein tensörü, $T_{\mu\nu}$, (2.15) formatında, enerji-momentum tensörü ve $\square \equiv \nabla^\alpha \nabla_\alpha$ şeklinde tanımlanan, Laplace operatörüdür.

Benzer şekilde, skaler alana göre varyasyon olarak sıfıra eşitlenmesi halinde ise,

$$\Phi = -\frac{\Phi}{2\omega} (R - V') - \frac{1}{2} \nabla^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi \left(\frac{\omega'}{\omega} - \frac{1}{\Phi} \right) \quad (3.4)$$

sonucuna ulaşılabacaktır. (Sotirou, 2007) Burada V' ve ω' şeklindeki üslü gösterimler, ilgili terimlerin skaler alana göre türevlerini göstermektedir.

Bundan sonra (3.3) eşitliğinin izini alarak, buradan elde edilen sonucu, (3.4) eşitliğindeki R yerine yazarsak, Brans-Dicke teorisi için alan denkleminde ulaşılmış oluruz.

$$(2\omega + 3)\square\Phi = 8\pi T + \Phi V' - 2V \quad (3.5)$$

Brans-Dicke teorisi, günümüzde salt haliyle, genel görelilik için güçlü bir alternatif olarak düşünülmemekle birlikte, genelleştirilmesiyle oluşturulan skaler-tensör kütle çekim teorileri, yoğun olarak çalışılmaktadır.

3.2. Yüksek Seviyeli Kütle Çekim Teorileri

Etki denkelemine, eğrilik skalerinin yüksek seviye terimlerinin eklenmesi matematiksel olarak mümkündür. Bu konudaki çalışmalar, genel göreliliğin ilk ortaya çıktığı günden beri yapılmış olmakla birlikte, başlangıçtaki tek motivasyonun, teorik olduğu söylenebilir.

Ancak görünür bir sebep olmaksızın etki denklemin ve buna bağlı olarak da alan denklemlerinin bu şekilde karmaşılaştırılması doğal olarak çok cazip görülmemiştir. Nitekim, etki denklemindeki bu genişlemeler, alan denklemlerinin, ikinci dereceden daha yüksek diferansiyel denklemler olmasına yol açacaktır ve mevcut fiziksel teorilerimizin hiçbirisi bu özelliğe sahip değildir.

Ancak, 1960'lı yıllardan itibaren, etki denkleminin genişletilmesinin bazı yararları olacağı görülmeye başlanmıştır. Örneğin, orjinal haliyle renormalize ve dolayısıyla kuantize edilemeyen genel görelilik teorisinin, etki denkleminin üst seviye eğrilik skalerleriyle genişletilmesi durumunda kuantize edilebileceği görülmüştür.

Başlangıçta etki denklemine eklenecek yüksek seviyeli terimlerin, sadece çok yüksek gravitasyonel alanlarda anlamlı olabileceği düşünülse de, son dönemde, karanlık enerji gibi kozmolojik problemlere, bu terimler vasıtasıyla çözüm bulunabileceği üzerinde durulmaktadır.

Yüksek seviyeli kütle çekim teorileri arasında en çok çalışılmış olan gruplardan biri, şüphesiz etki integralinde, Ricci skalerinin üslü terimlerini içeren $f(R)$ kütle çekim teorileridir. Etki denklemine bu şekilde uygun terimlerin eklenmesiyle karanlık madde ve karanlık enerji içermeksizin, evrenin gözlemlenen evriminin açıklanabiliyor olması, $f(R)$ kütle çekim teorilerinin temel motivasyonlarından birini oluşturmaktadır. (Nojiri, Odintsov and Oikonomou, 2017)

3.2.1. $f(R)$ Kütle Çekim Teorisi

$f(R)$ kütle çekim teorileri, metrik formalizmle oluşturulabildiği gibi, bağlantının metrikten bağımsız olduğu Palatini formalizmiyle de ele alınabilirler. Bu durumda elbette ki, etki denkleminde alışık olduğumuz biçimde Ricci skaleri değil, bağımsız Γ ile hesaplanmış özel bir eğrilik skaleri kullanılacaktır.

Matematiksel olarak, $f(R)$ kütle çekim teorilerinin gerek metrik gerekse Palatini formalizmindeki gösterimlerine eşdeğer skaler-tensör teori karşılıkları bulmak mümkündür. Ancak, uygulamada, $f(R)$ gösteriminin kolaylık sağladığı durumlar olabilir. (Sotirou, 2007)

3.2.1.1. Metrik Formalizmde f(R) Kütle Çekim Teorisi

Genel görelilik teorisinin temel varsayımlarından biri, eğrilik skalerinin hesaplanmasında kullanılacak bağlantının Levi-Civita bağlantısı olduğudur. Bu bağlantı kullanılarak eğrilik skaleri hesaplanırken, metrik kovaryant olarak korunur (non-metricity sıfırdır) ve sistem bir torsiyon içermez.

Riemann tensörü ise, ilk iki indisine göre antisimetrik, ilk ve ikinci indis çiftlerine göreyse simetrik olarak ortaya çıkacaktır. Bu sayede, metrik kullanmaksızın, basit bir büzüşme uygulanarak, sadece tek bir ikinci seviye tensör oluşturulabilir ki bu da çok bilinen Ricci tensörüdür. Bu tensörün tam büzüştürülmesi de bize eğrilik skalerini yani Ricci skalerini verecektir.

Gravitasyonel etkileşimi, metrik dışında hiçbir alan etkilemediğinden ve bağlantı da metriğe bağlı olduğundan, etki denkleminde sadece metriğe bağlı bir varyasyon uygulanması bizi alan denklemlerine ulaştıracaktır.

Bu şekilde, genel göreliliğin temel varsayımlarını da kullanan f(R) teorisi uygulamaları Metrik Formalizm olarak adlandırılırlar.

Metrik formalizmde, etki integrali aşağıdaki şekilde verilmektedir. (Sporea, 2014)

$$S_{met} = \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.6)$$

Burada S_M , maddeye ilişkin etki kısmıdır ve Ψ madde alanını göstermektedir. Bu etki integralini, metriğe göre varyasyona tabi tutar ve gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\delta S_{met} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ f'(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f(R) g_{\mu\nu} - \nabla_\lambda \nabla_\nu f'(R) + g_{\mu\nu} \nabla^2 f'(R) - \kappa T_{\mu\nu} \right\} \delta g^{\mu\nu} \quad (3.7)$$

ulaşırız. (Sporea, 2014) Burada, $f'(R)$, f 'in Ricci skalerine göre türevi ve $\nabla^2 \equiv \nabla^\mu \nabla_\mu$ şeklinde tanımlanan, Laplace operatörüdür. En küçük etki prensibine göre integrali sıfıra eşitlersek, kolaylıkla f(R) teorisi için alan denklemlerine ulaşabiliriz.

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\lambda \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

Bu alan denklemleri, $g_{\mu\nu}$ metriği için dördüncü seviyeden kısmi diferansiyel denklemlerdir. $f'(R)$ türevinin, sabit olduğu özel durumda, eşitliğin sol tarafındaki son iki terim yok olur. Bu durumda $f(R)$ fonksiyonu Ricci skalerinin lineer bir fonksiyonudur ve teori standart genel göreliliğe indirgenmiş olur. (Sporea, 2014)

Eğer (3.8) eşitliklerinin izini alırsak,

$$f'(R)R - 2f(R) + 3\nabla^2 f'(R) = \kappa T \quad (3.9)$$

şeklindeki R ve T arasında bir diferansiyel ilişkiye ulaşılmış oluruz. Genel görelilikte ise bu ikisi arasında $R+T = 0$ şeklinde cebirsel bir ilişki bulunmaktadır. Bu bize, $f(R)$ teorilerinin, klasik genel göreliliğe göre daha fazla çözüme sahip olduğunu göstermektedir. (Sporea, 2014)

Görüldüğü üzere (3.9) eşitliğinde, $T=0$ olması, genel görelilikte olduğunun aksine bize $R=0$ olmasını garantilemez. Bilindiği gibi, R 'nin sabit olduğu durum, genel görelilikte maksimum simetrik çözümü vermektedir. Aynı koşulu $f(R)$ için ele alalım. Eğer $R = \text{sabit}$ ve $T_{\mu\nu} = 0$ olarak ele alırsak, (3.9) eşitliği,

$$f'(R)R - 2f(R) = 0 \quad (3.10)$$

şekline indirgenecektir. Herhangi bir $f(R)$ fonksiyonu için bu cebirsel denklemi R için çözmek mümkündür.

Eğer, $R = 0$, bu denklemin çözümlerinden biriye ve bu değeri (3.8)'e uygularsak, $R_{\mu\nu}=0$ sonucuna ulaşırız ve tam simetrik çözümümüz, Minkowski uzay-zamanı olur. (Sporea, 2014)

Benzer şekilde eğer (3.10) denkleminin çözümlerinden biri herhangi bir C sabit sayısı ise, bu durumda, (3.8) eşitliğinden,

$$R_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \frac{C}{4} \quad (3.11)$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize pozitif C sabit sayıları için de Sitter ve negatif C sabit sayıları için ise anti-de Sitter çözümlerini verecektir. (Sporea, 2014)

Literatürde, sıklıkla, $f(R)$ teorisi alan denklemleri, Einstein alan denklemlerine benzer forma getirilerek kullanılmaktadır. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde, (3.8) eşitliği,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{kT_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{f(R) - Rf'(R)}{2f'(R)} + \frac{\nabla_\lambda \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \nabla^2 f'(R)}{f'(R)} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliği sadeleştirmek amacıyla, aşağıdaki gibi bir etkin stress-enerji tensörü tanımlayabiliriz.

$$T_{\mu\nu}^{eff} \equiv \left[\frac{f(R) - Rf'(R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\lambda \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \nabla^2 f'(R) \right] \quad (3.13)$$

Bu durumda, Einstein alan denklemleri formuna getirilmiş alan denklemleri,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{kT_{\mu\nu}}{f'(R)} [T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}] \quad (3.14)$$

şeklinde ortaya çıkar. (Sporea, 2014)

Alan denklemlerinin nihai hali, görüldüğü gibi, seçilen $f(R)$ fonksiyonuna bağlıdır. Farklı $f(R)$ fonksiyonları seçilmek suretiyle farklı davranışlar gösteren $f(R)$ ve farklı sorunların çözümü için kullanılabilen $f(R)$ teorileri ortaya çıkarılabilir.

Literatüre baktığımızda, geç zaman ivmelenmesini açıklayabilmek için, Hu ve Sawicki'nin 2007 yılındaki makalelerinde,

$$f(R) = R - \mu R_c \left[1 - \left(1 + \frac{R^2}{R_c^2} \right)^{-n} \right] \quad (3.15)$$

şeklinde bir fonksiyon kullandıklarını görmekteyiz. (Hu and Sawicky, 2007) Öte yandan, Ruggerio ve Iorio, Güneş sistemindeki gezegen hareketlerinin hesaplanması amacıyla,

$$f(R) = R - \frac{\mu^4}{R}, \mu \leq 2.80 \times 10^{-28} eV \quad (3.16)$$

fonksiyonunu kullanmışlardır. (Ruggerio and Iorio, 2006).

Erken dönem üstel genişleme şeklindeki enflasyon modelini oluşturabilmek için ise,

$$f(R) \cong C_1 R^\mu + C_2 R^\nu, \quad C_1, C_2 = \text{sabit} \quad (3.17)$$

formunda bir $f(R)$ fonksiyonu kullanılmıştır. (Oikonomou, 2018)

3.2.1.2. Palatini Formalizminde $f(R)$ Kütle Çekim Teorisi

Eğrilik skaleri hesaplanması için kullanılabilecek tek bağlantı, genel göreliliğin ön gördüğü Levi-Civita bağlantısı değildir. En genel haliyle, bağlantının, metrikten bağımsız olması mümkündür ve madde lagrangianı da bu bağlantının fonksiyonunu içeriyor olabilir.

Bu şekilde, bağımsız bir metrik ve bağlantı içeren $f(R)$ teorileri, Palatini formasyonu olarak gruplanırlar. (Sotirou, 2007) Bu yöntemde, etki integraline hem metrik hem de bağlantı için varyasyon uygulanması gerekecektir. Etki integrali, metrik formasyondaki ile benzer yapıda olmakla birlikte, kullanılan Ricci tensörü ve Ricci skaleri ($\mathcal{R}$) metrik formalizmden farklıdır. (Sporea, 2014)

$$S_{pal} = \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.18)$$

Bu etki integralinde $g_{\mu\nu}$ ve Γ için varyasyon uygulanır ve en küçük etki prensibi gereği, bu varyasyon sıfıra eşitlenirse aşağıdaki alan denklemlerine ulaşılabilir. (Sporea, 2014)

$$G_{\mu\nu} = \frac{kT_{\mu\nu}}{f'(\mathcal{R})} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\mathcal{R} - \frac{f(\mathcal{R})}{f'(\mathcal{R})} \right) + \frac{1}{f'(\mathcal{R})} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^2) f'(\mathcal{R}) - \frac{3}{2} \frac{1}{f'(\mathcal{R})^2} \left[\nabla_\mu f'(\mathcal{R}) \nabla_\nu f'(\mathcal{R}) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla f'(\mathcal{R}))^2 \right] \quad (3.19)$$

Palatini formasyonunda ortaya çıkan alan denklemleri (3.19), yapısal olarak metrik gösterimdeki denklemlere (3.12) benzemekle birlikte, fonksiyonun bağlı olduğu $\mathcal{R}$ terimi Ricci skaleri olmayıp, bağımsız bir bağlantı kullanılarak oluşturulan bir eğrilik skaleridir. Kullanılan geometri de bu nedenle pseudo-Riemannian olarak adlandırılır.

Bu nedenle, metrik ve palatini formalizmi için seçilen $f(R)$ ve $f(\mathcal{R})$ fonksiyonları birbirine benzer olsa da, davranışları açısından farklılık göstereceklerdir.

Bunun yanı sıra, enerji momentum tensörü izi T 'nin 0 olmadığı durumlarda, alan denklemleri, enerji momentum tensörünün türevlerini de içerecektir. (Sporea, 2014)

Metrik ve palatini formalizminin yanı sıra, etki denkleminin sadece R terimine değil, buna ek olarak enerji-momentum tensörünün izine de bağlı olabildiği $f(R,T)$ kütle çekim teorisi de literatürde çalışılmaktadır. (Harko et al., 2011)

3.3. Gauss-Bonnet Skaler-Tensör Kütle Çekim Teorisi

Einstein-Hilbert etki integrali oluşturulurken belirtildiği üzere, Ricci skaleri etki için en basit seçenek olmakla birlikte daha yüksek seviyeli eğrilik değişmezleri kullanmak da mümkündür. (Sotirou, 2007) Bu prensiple yola çıkılırsa, bir skaler-tensör teorideki skaler alanın, Ricci skalerine değil de örneğin $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ gibi daha yüksek seviyeden bir değişmeze eşleşmiş olması mümkündür. (Sotirou, 2007)

Sicim teorisi çalışmaları, skaler alanın, aşağıdaki şekilde tanımlanmış, Gauss-Bonnet değişmezi ile eşleşmiş olabileceğine dair ipuçları vermektedir.

$$\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\sigma\tau}R_{\mu\nu\sigma\tau} \quad (3.20)$$

Gauss-Bonnet değişmeziyle eşleşmiş bir skaler alan içeren etki denklemi,

$$S_{GB} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{\lambda}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + f(\phi) \mathcal{G} \right] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \quad (3.21)$$

şeklinde verilmektedir. (Nojiri, Odintsov and Sasaki, 2005) Burada, λ , klasik skaler alan için +1, fantom (phantom) alanlar için ise -1 olarak alınmaktadır. Bu integral üzerinden, en küçük etki prensibinin uygulanması ile alan denklemlerine ulaşmak mümkündür. (Sotirou, 2007)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} G^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} f(\phi) \mathcal{G} + 2f(\phi) R R^{\mu\nu} - 2\nabla^\mu \nabla^\nu (f(\phi) R) + 2g^{\mu\nu} \nabla^2 (f(\phi) R) \\
& - 8f(\phi) R_\rho^\mu R^{\nu\rho} + 4\nabla_\rho \nabla^\mu (f(\phi) R^{\nu\rho}) + 4\nabla_\rho \nabla^\nu (f(\phi) R^{\mu\rho}) \\
& - 4\nabla^2 (f(\phi) R^{\mu\nu}) - 4g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma (f(\phi) R^{\rho\sigma}) + 2f(\phi) R^{\mu\rho\sigma\tau} R_{\rho\sigma\tau}^\nu \\
& - 4\nabla_\rho \nabla_\sigma (f(\phi) R^{\mu\rho\sigma\nu}) = T^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.22}$$

Gauss-Bonnet kütle çekiminin, tekillikler ve kozmolojik uygulamalar anlamında çekici yanları bulunduğu görülmüştür. (Antoniadis, Rizos and Tamvakis, 1994) (Antoniadis, Gava and Narain, 1992)

Şu ana kadar, genel görelilik ve genel göreliliğe alternatif bazı kütle çekim teorileri incelenmiş ve bu teoriler arasındaki farklılıklar ortaya konulmuştur. Bir sonraki kısımda ise tezin asıl amacı olan, $f(G)$, $f(R, G)$ ve $f(G, T)$ teorileri üzerinde durulacaktır.

4. GAUSS-BONNET DEĞİŞMEZİ ($\mathcal{G}$) İÇEREN KÜTLE ÇEKİM TEORİLERİ

Gauss-Bonnet değişiminin (3.17) skaler bir alan ile eşleşmesini içeren bir etki denklemiyle oluşturulan kütle çekim teorilerini 3.3 bölümünde gördük. Dört boyutta, topolojik bir değişmez (invariant) olan Gauss-Bonnet teriminin $\sqrt{-g}\mathcal{G}$ şeklinde oluşturulacak bir yoğunluğunun varyasyonu, iraksar ve alan denklemlerine etki etmez. (Bunch, 1981) Ayrıca $\mathcal{G}$ terimi, kovaryant bir skalerdir. Bundan faydalanmak suretiyle, $\mathcal{G}$ değişiminin fonksiyonlarını içeren etki denklemleri oluşturmak mümkündür. (Sotirou, 2007)

Tabii bu noktada, $\sqrt{-g}\mathcal{G}$ tek başınayken alan denklemlerine etki etmese de, bu terimin fonksiyonlarını içeren etki denklemlerinin, farklı dinamiklere yol açacağını belirtmek gerekir. Dolayısıyla alan denklemleri Einstein alan denklemlerinden farklı olacaktır. (Sotirou, 2007)

Bu şekilde oluşturulan teoriler, alan denklemleri dördüncü seviye diferansiyel denklemler olarak ortaya çıkacağından, dördüncü seviye kütle çekim teorileri (forth-order gravity) olarak adlandırılırlar. (Sotirou, 2007)

Gauss-Bonnet terimi içeren etki denklemlerinin temel motivasyonu, sicim teorisi kaynaklıdır. (Nojiri, Odintsov and Oikonomou, 2017)

4.1. $f(\mathcal{G})$ Kütle Çekim Teorisi

Sicim teorisi kaynaklı, genişletilmiş Gauss-Bonnet kütle çekim teorileri, nispeten yeni bir çalışma alanıdır. Shin'ichi Nojiri ve Sergei D. Odintsov, 2005 yılında, karanlık enerjinin kütle çekimsel olarak açıklanması amacına yönelik olarak, Einstein-Hilbert etki denkleminin, Gauss-Bonnet teriminin keyfi bir fonksiyonunun eklenmesiyle oluşan etki integrali içeren genişletilmiş kütle çekim teorilerini yayınlamışlardır. (Nojiri and Odintsov, 2005)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\left(\frac{1}{2\kappa^2} R + f(\mathcal{G}) \right) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \right] \quad (4.1)$$

Bu makalelerinde, bu şekilde oluşturulacak bir teorinin, temel güneş sistemi içi testleri başarıyla geçebileceği ve teorinin, yavaşlayan genişlemeden, hızlanmaya geçişi açıklayabileceği sonucuna ulaşmışlardır. (Nojiri and Odintsov, 2005)

Yine 2006 yılında, bu şekilde oluşturulan ve $f(G)$ kütle çekim teorileri olarak adlandırılan teorilerin, zengin bir kozmolojik yapı oluşturduğunu ve herhangi bir ek skaler alan ihtiyacı duymaksızın, yavaşlamadan hızlanmaya geçişi açıklama imkanı da bulunan etkin bir kozmolojik sabit görevi üstlenebileceğini gösteren bir çalışma yayınlanmıştır. (Cognola, Elizalde, Nojiri, Odintsov and Zerbini, 2006)

Karanlık enerjiye ihtiyaç bulunmayan ve kozmolojik açıdan geçerli olabilecek bazı $f(G)$ fonksiyonları, Felice ve Tsujikawa tarafından 2009 yılında incelenmiş ve bunların, düşük ve yüksek kırmızıya kayma değerlerindeki yaklaşık sonuçları karşılaştırılmıştır. (Felice and Tsujikawa, 2009)

Aynı yıl yayınlanan bir diğer makalelerinde, Felice ve Tsujikawa, $f(G)$ teorileri üzerindeki güneş sistemi gözlemlerinden kaynaklı kısıtları incelemiş ve kozmolojik olarak geçerli olabilecek $f(G)$ teorilerinin, geniş bir parametre aralığı için, güneş sistemi gözlemleriyle de uyumlu oldukları sonucuna varmışlardır. (Felice and Tsujikawa, 2009) Gözlemlerden yararlanarak, olası modellerin çıkartıldığı güncel çalışmalar da vardır. (Seokcheon Leea, Gansukh Tumurtusha, 2020)

Kozmolojik çalışmalar dışında, $f(G)$ teorisi altında, kara delik çözümleri (Rodrigues and Silva, 2018,2019), yıldız yapıları (Shamir and Naz, 2020), kompakt cisimler (Ilyas, 2018) ve enerji koşulları da (Bamba, Ilyas, Bhatti and Yousaf, 2017) incelenmiştir.

4.1.1. Alan Denklemlerinin Çıkarılması

Alan denklemlerine ulaşmak için, en küçük etki prensibini uygulayabiliriz. Bunun için ilk olarak, (4.1) şeklinde verilen etki integralinin varyasyonunu sıfıra eşitleyelim.

$$\delta S = \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} R + f \right) + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2} \delta R + f' \delta G \right) + \delta S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \right] = 0 \quad (4.2)$$

Burada, gösterim kolaylığı açısından $f = f(G)$ ve $f' = \partial f / \partial G$ şeklinde kısaltılmıştır. Eşitliği çözümleyebilmek için ihtiyacımız olan bazı terimlerin varyasyonları aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \quad (4.3)$$

$$\delta R = (-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \nabla^2) \delta g_{\mu\nu} \quad (4.4)$$

$$\delta \mathcal{G} = \delta R^2 - 4\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + \delta(R_{\mu\nu\epsilon\eta}R^{\mu\nu\epsilon\eta}) \quad (4.5)$$

$$\delta R^2 = 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2R\nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2 \delta g^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

$$\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) = (R^{\alpha\nu}\nabla^\mu \nabla_\alpha + R^{\beta\nu}\nabla^\mu \nabla_\beta - R^{\mu\nu}\nabla^2 - R^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\beta \nabla_\alpha - 2R^{\nu\beta}R^\mu_\beta)\delta g_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

$$\delta R_{\mu\nu\epsilon\sigma}R^{\mu\nu\epsilon\sigma} = -2R^\mu_{\nu\epsilon\sigma}R^{\alpha\nu\epsilon\sigma}\delta g_{\mu\alpha} - 2R^{\mu\beta\nu\tau}\nabla_\tau \nabla_\beta \delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}\nabla_\tau \nabla_\alpha \delta g_{\mu\nu} \quad (4.8)$$

Burada, $\nabla^2 = \nabla^\mu \nabla_\mu$ şeklinde tanımlanan, Laplace operatörüdür. Etki integrali varyasyonunda (4.3) ve (4.4) eşitliklerini (4.2) denkleminde yerlerine yerleştirirsek,

$$\delta S = \int d^4x \left[\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \right) \left(\frac{1}{2\kappa^2}R + f \right) + \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa^2}(-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)\delta g_{\mu\nu} + f'\delta \mathcal{G} \right) + \delta S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \right] = 0 \quad (4.9)$$

formuna ulaşmış oluruz. Gerekli düzenlemeler yapıldığında bu eşitlik,

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{4\kappa^2}Rg_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2\kappa^2}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f\delta g^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa^2}(\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)\delta g_{\mu\nu} + f'\delta \mathcal{G} \right] d^4x + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = 0 \quad (4.10)$$

şeklinde sadeleştirilebilir. Bu eşitlikte, ilk üç terimde indis düzenlemesi yapalım ve dördüncü terimde, parantez içindeki terimlerin farkının sıfır olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda eşitliğimiz,

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2}(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f + f'\delta \mathcal{G} \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) = 0 \quad (4.11)$$

formuna gelecektir. Şimdi burada $f'\delta \mathcal{G}$ terimini kendi başına ele alarak hesaplayalım. Gauss-Bonnet değişmezinin varyasyonunu (4.5) formunda kullandığımızda,

$$f'\delta \mathcal{G} = f'[\delta R^2 - 4\delta(R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) + \delta(R_{\mu\nu\epsilon\sigma}R^{\mu\nu\epsilon\sigma})] \quad (4.12)$$

olacaktır. Burada da, (4.6), (4.7) ve (4.8) denklemlerini yerlerine yazabiliriz.

$$f'\delta\mathcal{G} = f' \left[2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + 2R\nabla^\mu\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} + 2Rg_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} - 4R^{\alpha\nu}\nabla^\mu\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} - 4R^{\beta\nu}\nabla^\mu\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} + 4R^{\mu\nu}\nabla^2\delta g_{\mu\nu} + 4R^{\alpha\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} + 8R^{\nu\beta}R^\mu_\beta\delta g_{\mu\nu} - 2R^\mu_{\nu\epsilon\sigma}R^{\alpha\nu\epsilon\sigma}\delta g_{\mu\alpha} - 2R^{\mu\beta\nu\tau}\nabla_\tau\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} \right] \quad (4.13)$$

olacaktır. Bu eşitlikte, parantezi açarken, aşağıdaki dönüşümden yararlanabiliriz.

$$f'R^{\nu\beta}\nabla^\mu\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla^\mu(R^{\nu\beta}f') \quad (4.14)$$

Şimdi, (4.13) eşitliğindeki her bir terimi tek ele alarak, hesaplayalım.

$$\langle 1 \rangle 2RR_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}f' = -2RR^{\mu\nu}f'\delta g_{\mu\nu} \quad (4.15)$$

$$\langle 2 \rangle 2Rf'\nabla^\mu\nabla^\nu\delta g_{\mu\nu} = 2Rf'g^{\nu\alpha}\nabla^\mu\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} = 2\nabla^\mu\nabla^\nu(Rf')\delta g_{\mu\nu} \quad (4.16)$$

$$\langle 3 \rangle 2Rf'g_{\mu\nu}\nabla^2\delta g^{\mu\nu} = -2Rf'g^{\mu\nu}\nabla^2\delta g_{\mu\nu} = -2g^{\mu\nu}\nabla^2(Rf')\delta g_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

$$\langle 4 \rangle -4R^{\alpha\nu}f'\nabla^\mu\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} = -4\nabla_\alpha\nabla^\mu(R^{\alpha\nu}f')\delta g_{\mu\nu} \quad (4.18)$$

$$\langle 5 \rangle -4R^{\beta\nu}f'\nabla^\mu\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} = -4\nabla_\beta\nabla^\mu(R^{\beta\nu}f')\delta g_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

$$\langle 6 \rangle 4R^{\mu\nu}f'\nabla^2\delta g_{\mu\nu} = 4\nabla^2(R^{\mu\nu}f')\delta g_{\mu\nu} \quad (4.20)$$

$$\langle 7 \rangle 4R^{\alpha\beta}f'g^{\mu\nu}\nabla_\beta\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} = 4g^{\mu\nu}\nabla_\alpha\nabla_\beta(R^{\alpha\beta}f')\delta g_{\mu\nu} \quad (4.21)$$

$$\langle 8 \rangle 8R^{\nu\beta}R^\mu_\beta f'\delta g_{\mu\nu} = 8R^{\beta\nu}R^\mu_\beta f'\delta g_{\mu\nu} \quad (4.22)$$

$$\langle 9 \rangle -2R^\mu_{\nu\epsilon\sigma}R^{\alpha\nu\epsilon\sigma}f'\delta g_{\mu\alpha} = -2R^\mu_{\alpha\epsilon\sigma}R^{\nu\alpha\epsilon\sigma}f'\delta g_{\mu\nu} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \langle 10 \rangle & -2R^{\mu\beta\nu\tau}f'\nabla_\tau\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}f'\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} \\ & = -2R^{\mu\alpha\nu\tau}f'\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}f'\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} \\ & = 2R^{\alpha\mu\nu\tau}f'\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} + 2R^{\alpha\mu\nu\tau}f'\nabla_\tau\nabla_\alpha\delta g_{\mu\nu} \\ & = 4\nabla_\alpha\nabla_\tau(R^{\alpha\mu\nu\tau}f')\delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Eğer (4.14-24) eşitliklerini, (4.13) eşitliğinde yerlerine koyar ve metrik varyasyonuna göre paranteze alırsak,

$$f' \delta G = \left[-2RR^{\mu\nu}f' + 2\nabla^\mu \nabla^\nu (Rf') - 2g^{\mu\nu} \nabla^2 (Rf') - 4\nabla_\alpha \nabla^\mu (R^{\alpha\nu}f') - 4\nabla_\beta \nabla^\mu (R^{\nu\beta}f') + 4\nabla^2 (R^{\mu\nu}f') + 4g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (R^{\alpha\beta}f') + 8R^{\beta\nu} R^\mu_\beta f' - 2R^\mu_{\alpha\epsilon\sigma} R^{\nu\alpha\epsilon\sigma} f' + 4\nabla_\alpha \nabla_\tau (R^{\alpha\mu\nu\tau}f') \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (4.25)$$

formuna ulaşırız. Gerekli indis düzenlemeleri yapılır ve parantez içleri, çarpım türevi kuralına uyulmak suretiyle açılırsa (4.25) eşitliği, aşağıdaki şekle dönüştürülebilir.

$$f' \delta G = \left[-2RR^{\mu\nu}f' + 2f' \nabla^\mu \nabla^\nu (R) + 2R \nabla^\mu \nabla^\nu (f') - 2g^{\mu\nu} f' \nabla^2 (R) - 2g^{\mu\nu} R \nabla^2 (f') - 4R^{\beta\nu} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') - 4f' \nabla_\beta \nabla^\nu (R^{\beta\nu}) - 4R^{\nu\beta} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') - 4f' \nabla_\beta \nabla^\mu (R^{\nu\beta}) + 4R^{\mu\nu} \nabla^2 (f') + 4f' \nabla^2 (R^{\mu\nu}) + 4f' g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (R^{\alpha\beta}) + 4R^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta (f') + 8R^{\beta\nu} R^\mu_\nu f' - 2R^\mu_{\alpha\epsilon\sigma} R^{\nu\alpha\epsilon\sigma} f' + 4f' \nabla_\alpha \nabla_\tau (R^{\alpha\mu\nu\tau}) - 4R^{\mu\alpha\nu\tau} \nabla_\alpha \nabla_\tau (f') \right] \delta g_{\mu\nu} \quad (4.26)$$

Şimdi (4.26) eşitliğindeki bazı terimleri tek başlarına ele alalım.

$$\langle 4 \rangle - 2g^{\mu\nu} f' \nabla^2 (R) = -2f' \nabla^2 (R^{\mu\nu}) \quad (4.27)$$

$$\langle 7 \rangle - 4f' \nabla_\beta \nabla^\nu (R^{\beta\nu}) = -2f' \nabla^\mu \nabla^\nu R - 4f' R^{\alpha\mu} R^\nu_\alpha + 4f' R^{\alpha\mu\beta\nu} R_{\alpha\beta} \quad (4.28)$$

$$\langle 9 \rangle - 4f' \nabla_\beta \nabla^\nu (R^{\beta\nu}) = -2f' \nabla^\mu \nabla^\nu R - 4f' R^{\alpha\mu} R^\nu_\alpha + 4f' R^{\alpha\mu\beta\nu} R_{\alpha\beta} \quad (4.29)$$

$$\langle 11 \rangle 4f' \nabla^2 (R^{\mu\nu}) \quad (4.30)$$

$$\langle 12 \rangle 4f' g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla_\beta R^{\alpha\beta} = 4f' g^{\mu\nu} \nabla^\alpha \nabla^\beta R_{\beta\alpha} = 4f' g^{\mu\nu} \frac{1}{2} \nabla^2 R = 2f' g^{\mu\nu} R \quad (4.31)$$

$$\langle 14 \rangle 8R^{\beta\nu} R^\mu_\nu f' = 8f' R^{\alpha\nu} R^\mu_\alpha \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \langle 16 \rangle 4f' \nabla_\alpha \nabla_\tau (R^{\alpha\mu\nu\tau}) &= -4f' \nabla_\alpha \nabla_\tau (R^{\tau\nu\alpha\mu}) = -4f' \nabla_\sigma \nabla_\alpha (R^{\alpha\nu\sigma\mu}) = \\ &= -4f' g^{\rho\nu} g^{\beta\mu} \nabla^\sigma \nabla^\alpha R_{\alpha\rho\sigma\beta} = -4f' g^{\rho\nu} g^{\beta\mu} \left(\nabla^2 R_{\rho\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\beta \nabla_\rho R - R_{\alpha\beta} R^\alpha_\rho + \right. \\ &\left. R^{\alpha\sigma} R_{\alpha\rho\sigma\beta} \right) = -4f' g^{\rho\nu} g^{\beta\mu} \nabla^2 R_{\rho\beta} - 2f' g^{\rho\nu} g^{\beta\mu} \nabla_\beta \nabla_\rho R + 4f' g^{\rho\nu} g^{\beta\mu} R_{\alpha\beta} R^\alpha_\rho - \\ &4f' g^{\rho\nu} g^{\beta\mu} R^{\alpha\sigma} R_{\alpha\rho\sigma\beta} = -4f' \nabla^2 R^{\mu\nu} + 2f' \nabla^\mu \nabla^\nu R + 4f' R^\mu_\alpha R^{\alpha\nu} - 4f' R_{\alpha\beta} R^{\alpha\mu\beta\nu} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Eşitlikler düzenlenirken, aşağıdaki Bianchi eşitliklerini kullanılmıştır. (Keskin, 2015)

$$\nabla^\sigma \nabla^\alpha R_{\alpha\sigma} = \frac{1}{2} \nabla^2 R \quad (4.34)$$

$$\nabla^\sigma \nabla^\alpha R_{\alpha\mu\sigma\beta} = \nabla^2 R_{\mu\beta} - \frac{1}{2} \nabla_\beta \nabla_\mu R - R_{\alpha\beta} R_\mu^\alpha + R^{\alpha\sigma} R_{\alpha\mu\sigma\beta} \quad (4.35)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\rho R^{\mu\beta} = \frac{1}{2} \nabla^\rho \nabla^\beta R + R^{\alpha\beta} R_\alpha^\rho - R^{\alpha\beta\mu\rho} R_{\alpha\mu} \quad (4.36)$$

Eğer, (4.27-33) sonuçlarını ve (4.26) denkleminde yerine yerleştirir ve α - ρ indis dönüşümü yaparsak

$$\begin{aligned} f' \delta G = & [-2RR^{\mu\nu} f' - 4f' R^{\mu\beta\sigma\nu} R_{\beta\sigma} + 4f' R_\rho^\mu R^{\nu\rho} - 2f' R_{\rho\varepsilon\sigma}^\mu R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R\nabla^\mu \nabla^\nu (f') - \\ & 2g^{\mu\nu} R\nabla^2 (f') - 4R^{\beta\nu} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') - 4R^{\nu\beta} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') + 4R^{\mu\nu} \nabla^2 (f') + \\ & 4R^{\rho\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\beta (f') - 4R^{\mu\rho\nu\tau} \nabla_\rho \nabla_\tau (f')] \delta g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.37)$$

sonucuna ulaşırız. Elde ettiğimiz bu terimi (4.11) etki integralinin varyasyonunda yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \delta S = \int \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa^2} \left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} f - 2RR^{\mu\nu} f' - 4f' R^{\mu\beta\sigma\nu} R_{\beta\sigma} + \right. \\ \left. 4f' R_\rho^\mu R^{\nu\rho} - 2f' R_{\rho\varepsilon\sigma}^\mu R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R\nabla^\mu \nabla^\nu (f') - 2g^{\mu\nu} R\nabla^2 (f') - 4R^{\beta\nu} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') - \right. \\ \left. 4R^{\nu\beta} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') + 4R^{\mu\nu} \nabla^2 (f') + 4R^{\rho\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\beta (f') - 4R^{\mu\rho\nu\tau} \nabla_\rho \nabla_\tau (f') \right] \delta g_{\mu\nu} d^4x + \\ \int d^4x \delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m) = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

formuna ulaşmış oluruz. Madde içeren terim için de enerji momentum tensörünü yerine koymamız halinde, $f(G)$ teorileri için alan denklemleri,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} + \frac{1}{2\kappa^2} \left(-R^{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} f - 2RR^{\mu\nu} f' - 4f' R^{\mu\beta\sigma\nu} R_{\beta\sigma} + 4f' R_\rho^\mu R^{\nu\rho} - \\ 2f' R_{\rho\varepsilon\sigma}^\mu R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R\nabla^\mu \nabla^\nu (f') - 2g^{\mu\nu} R\nabla^2 (f') - 4R^{\beta\nu} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') - 4R^{\nu\beta} \nabla_\beta \nabla^\mu (f') + \\ 4R^{\mu\nu} \nabla^2 (f') + 4R^{\rho\beta} g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\beta (f') - 4R^{\mu\rho\nu\tau} \nabla_\rho \nabla_\tau (f') = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

şeklinde ortaya çıkacaktır. (Nojiri and Odintsov, 2005)

Kullanılan $f(G)$ fonksiyonu, alan denklemlerinin yapısını ve davranışını belirleyecektir. Literatürde, farklı amaçlar için farklı formlarda fonksiyonlar kullanılmıştır.

Geç dönem ivmelenmesini karanlık enerji kullanmaksızın açıklayabilmek amacıyla, ilk olarak 2006 yılında,

$$f(G) = f_0 |G|^\beta \quad (4.40)$$

formunda bir fonksiyon kullanılarak çalışma yapılmıştır. (Cognola, Elizade, Nojiri, Odintsov and Zerbini, 2006) Burada β bir sabittir ve Cognola ve arkadaşları, bu çalışmalarında, β değerinin 0.5'ten daha küçük olduğu durumlarda, $f(G)$ teriminin baskın hale geldiğini gösterilmiştir.

Antonio de Felice ve Shinki Tsujikawa, 2009 yılında yayınladıkları makalelerinde, güneş sistemi gözlemlerinin, $f(G)$ kütle çekim modellerine getirdiği sınırlamaları incelemişler ve bu çalışmalarında, α ve λ birer sabit olmak üzere,

$$f(G) = \lambda \frac{G}{\sqrt{G_*}} \arctan\left(\frac{G}{G_*}\right) - \frac{1}{2} \lambda \sqrt{G_*} \ln\left(1 + \frac{G^2}{G_*^2}\right) - \alpha \lambda \sqrt{G_*}, G_* \equiv H_0^4 \quad (4.41)$$

$$f(G) = \lambda \frac{G}{\sqrt{G_*}} \arctan\left(\frac{G}{G_*}\right) - \alpha \lambda \sqrt{G_*}, \lambda, \alpha > 0 \text{ ve } G_* \equiv H_0^4 \quad (4.42)$$

şeklindeki fonksiyonları ele almışlardır. (Felice and Tsujikawa, 2009)

Gözlemlerle uyumlu olabilecek modeller üzerine yaptıkları 2020 yılı çalışmalarında, Lee ve Tumurtushaa, a, b, c, d, m ve n birer sabit olmak üzere,

$$f(G) = G^m [a + bG^n] \quad (4.43)$$

$$f(G) = \frac{a+bG^m}{c+dG^n} \quad (4.44)$$

şeklindeki analitik fonksiyonların, nümerik olarak elde ettikleri sonuçları karşılayabileceğini göstermişlerdir. (Lee and Tumurtushaa, 2020)

2018 Yılındaki çalışmasında, Muhammad Ilyas, yüklü sıkışık yıldızların $f(\mathcal{G})$ kütle çekimi altındaki iç yapılarını incelemiş ve bu çalışmasında,

$$f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^n + \beta \mathcal{G} \log \mathcal{G} \quad (4.45)$$

$$f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^n (\beta \mathcal{G}^m + 1) \quad (4.46)$$

$$f(\mathcal{G}) = \frac{a_1 \mathcal{G}^{n+b_1}}{a_2 \mathcal{G}^{n+b_2}} \quad (4.47)$$

formundaki modelleri incelemiştir. (Ilyas, 2018) Burada $\alpha, \beta, a_1, a_2, b_1, b_2, m$, ve n birer sabittir.

4.2. $f(R, \mathcal{G})$ Kütle Çekim Teorisi

Gauss-Bonnet terimi içeren bir başka kütle çekim teorisi ailesi de, $f(\mathcal{G})$ teorilerinin genelleştirilmiş bir hali ve doğal bir uzantısı olan, $f(R, \mathcal{G})$ kütle çekim teorileridir. Bu teorilerde, etki integrali, Gauss-Bonnet terimi dışında Ricci skalerinin de bir fonksiyonunu içerir. (Cognola, Elizalde, Nojiri, Odintsov, and Zerbini, 2006)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2\kappa^2} [(f(R, \mathcal{G})) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi)] \quad (4.48)$$

Bu şekilde genişletilmiş kütle çekim teorilerinde, düz uzayda hangi fonksiyonların stabil ve önem arz eden kozmolojilere yol açtığı, Cruz-Dombriz ve Saez-Gomez tarafından incelenmiştir. (Cruz-Dombriz and Saez-Gomez, 2012)

2015 yılında, eksponansiyel ya da kuvvet kanununa uygun bir enflasyon döneminin, $f(R, \mathcal{G})$ teorisi yardımıyla oluşturulabilme olasılığını araştıran bir çalışmayla, bu tip bir modelin sahip olması gereken temel özellikler üzerinde durulmuştur. (Laurentis, Paoletta, and Capozziello, 2015)

Teorinin, gözlemlerle uyumunu inceleyen bir çalışmada, kuvvet kanunu biçimindeki bir fonksiyon kullanılması halinde, $f(R, \mathcal{G})$ kütle çekiminin, kozmik aralan ışıınımı gözlemleri ve güncel Hubble parametresi ile uyumlu sonuçlar verdiği sonucuna varılmıştır. (Benetti, Costa, Capozziello, Alcaniz and Laurentis, 2018)

Yine 2018 yılında yayınlanan çalışmalarında, Odintsov ve arkadaşları, $f(R, \mathcal{G})$ teorisinin karanlık enerji ve enflasyon dönemlerini açıklayabildiğini göstermişler ve enflasyon, karanlık enerji ve ikisi arasında Einstein-Hilbert kütle çekimine yakınsayan bir ara dönem içeren kombine bir model de oluşturmuşlardır. (Odintsov, Oikonomou and Banerjee, 2018)

4.2.1. Alan Denklemlerinin Çıkarılması

Alan denklemlerine yine en küçük etki prensibi ile ulaşmak mümkündür. Öncelikle (4.48) etki integralinin metrik tensöre göre varyasyonunu alalım ve bunu sıfıra eşitleyelim.

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \delta \sqrt{-g} f(R, \mathcal{G}) + \sqrt{-g} \frac{\partial f(R, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}} \delta \mathcal{G} + \sqrt{-g} \frac{\partial f(R, \mathcal{G})}{\partial R} \delta R + \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}) = 0 \quad (4.49)$$

Yazım kolaylığı için, f fonksiyonunun, türevlerini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$f_{\mathcal{G}} \equiv \frac{\partial f(R, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}}, \quad f_R \equiv \frac{\partial f(R, \mathcal{G})}{\partial R}, \quad f = f(R, \mathcal{G}) \quad (4.50)$$

Bu durumda, eşitlik aşağıdaki forma gelecektir.

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [\delta \sqrt{-g} f + \sqrt{-g} (f_{\mathcal{G}} \delta \mathcal{G} + f_R \delta R)] + \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}) = 0 \quad (4.51)$$

(4.4) Denklemindeki şekilde Ricci skalerinin varyasyonu ve (4.3) formunda $\sqrt{-g}$ terimi varyasyonu, (4.51) denkleminde yerine konulursa,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu})) f + \sqrt{-g} (f_{\mathcal{G}} \delta \mathcal{G} + f_R (-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \nabla^2) \delta g_{\mu\nu})] + \int d^4x \delta (\sqrt{-g} \mathcal{L}) = 0 \quad (4.52)$$

olacaktır. Bu denklemde, $f_{\mathcal{G}} \delta \mathcal{G}$ için (4.37) denkleminde bulunan sonuç yerine konulursa,

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta (g^{\mu\nu})) f + \sqrt{-g} ([-2RR^{\mu\nu} f_{\mathcal{G}} - 4f_{\mathcal{G}} R^{\mu\beta\sigma\nu} R_{\beta\sigma} + 4f_{\mathcal{G}} R_{\rho}^{\mu} R^{\nu\rho} - 2f_{\mathcal{G}} R_{\rho\varepsilon\sigma}^{\mu} R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + 2R \nabla^\mu \nabla^\nu (f_{\mathcal{G}}) - 2g^{\mu\nu} R \nabla^2 (f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\beta\nu} \nabla_\beta \nabla^\mu (f_{\mathcal{G}}) -$$

$$4R^{\nu\beta}\nabla_\beta\nabla^\mu(f_{\mathcal{G}}) + 4R^{\mu\nu}\nabla^2(f_{\mathcal{G}}) + 4R^{\rho\beta}g^{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla_\beta(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\nabla_\rho\nabla_\tau(f_{\mathcal{G}})] + f_R(-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu\nabla^\nu - g^{\mu\nu}\nabla^2)\delta g_{\mu\nu}] + \int d^4x\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = 0 \quad (4.53)$$

formuna ulaşılır. Bu durumda, $f(R, \mathcal{G})$ teorileri için, alan denklemleri aşağıdaki şekilde ortaya çıkmış olacaktır. (Cognola, Elizalde, Nojiri, Odintsov, and Zerbini, 2006)

$$T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}f - 2f_{\mathcal{G}}RR^{\mu\nu} + 4f_{\mathcal{G}}R^\mu_\rho R^{\nu\rho} - 2f_{\mathcal{G}}R^\nu_{\rho\sigma\tau}R^{\rho\sigma\tau} - 4f_{\mathcal{G}}R^{\mu\rho\sigma\nu}R_{\rho\sigma} + 2R\nabla^\mu\nabla^\nu(f_{\mathcal{G}}) - 2g^{\mu\nu}R\nabla^2(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\nu\rho}\nabla_\rho\nabla^\mu(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\mu\rho}\nabla_\rho\nabla^\nu(f_{\mathcal{G}}) + 4R^{\mu\nu}\nabla^2(f_{\mathcal{G}}) + 4R^{\rho\sigma}g^{\mu\nu}\nabla_\rho\nabla_\sigma(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\mu\rho\nu\sigma}\nabla_\rho\nabla_\sigma(f_{\mathcal{G}}) - f_R R^{\mu\nu} + \nabla^\mu\nabla^\nu f_R - g^{\mu\nu}\nabla^2 f_R = 0 \quad (4.54)$$

Literatürde kullanılan farklı $f(R, \mathcal{G})$ modelleri olduğunu görmekteyiz. Laurentis, Paoletta ve Capozziello, FRW Metriği altında enflasyon davranışını inceledikleri 2015 yılı makalelerinde, α ve β birer sabit olmak üzere,

$$f(R, \mathcal{G}) = R + \alpha R^2 + \beta \mathcal{G}^2 \quad (4.55)$$

formunda bir Lagrangian fonksiyonu kullanarak, R ve $\mathcal{G}$ kaynaklı, çok erken ve erken dönemde olmak üzere iki enflasyon aşaması olabileceğini göstermişlerdir.

Odintsov, Oikonomo ve Banerjee ise, 2018 yılı makalelerinde, α bir sabit olmak üzere,

$$f(R, \mathcal{G}) = R + A \mathcal{G}^\alpha \quad (4.56)$$

formunda bir fonksiyon kullanmış ve gerek enflasyon gerekse karanlık enerji dönemlerini bu şekilde açıklayabileceklerini göstermişlerdir. (Odintsov, Oikonomo and Banerjee, 2018)

Santos Costa ve arkadaşları ise, 2018 yılında yaptıkları çalışmada, α ve n birer sabit olmak üzere,

$$f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n} \quad (4.57)$$

şeklindeki fonksiyon ile oluşturulan teorilerin dinamik analizini gerçekleştirmişler ve bu tip modellerin, kozmolojik açıdan anlamlı olduğu sonucuna varmışlardır. (Costa et al., 2018)

Bianchi I evreni kullanarak yaptıkları 2017 tarihli çalışmalarında, Shamir ve Komal, β , γ , k_1 , k_2 , k_3 , k_4 , k_5 , k_6 , k_7 , m , ve u birer sabit olmak üzere,

$$f(R, \mathcal{G}) = k_1 R^\beta \mathcal{G}^\gamma \quad (4.58)$$

$$f(R, \mathcal{G}) = k_2 R + k_3 R^u \mathcal{G}^m \quad (4.59)$$

$$f(R, \mathcal{G}) = k_4 R^u \mathcal{G}^{(1-m)} \quad (4.59)$$

$$f(R, \mathcal{G}) = \frac{k_5 R^u}{k_6 R^{u+1}} + k_7 \mathcal{G}^m \quad (4.60)$$

formundaki dört farklı tip fonksiyon içeren model incelemiş ve olası enerji koşullarını grafiklendirmişlerdir. (Shamir and Komal, 2017)

4.3. $f(\mathcal{G}, T)$ Kütle Çekim Teorisi

Gauss-Bonnet terimi içeren kütle çekim teorilerinin en yenilerinden biri de, etki integralinin, Gauss-Bonnet terimi dışında, enerji-momentum tensörünün izinin de bir fonksiyonu olan $f(\mathcal{G}, T)$ teorisidir. Bu teorilerde, etki integrali, Einstein-Hilbert etki integraline ek olarak bir $f(\mathcal{G}, T)$ terimi içerir. (Sharif and Ikram, 2016)

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [R + f(\mathcal{G}, T)] + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} \quad (4.61)$$

Sharif ve Iksam, 2017 yılındaki bir çalışmalarında, teorinin lineer ve homojen tedirginlikler altındaki davranışını incelemiş ve kararlı evren modelleri oluşturmanın mümkün olduğu sonucuna varmışlardır. (Sharif and Ikram, 2017)

Ali İhsan Keskin, 2018 yılında yayınladığı makalesinde, erken dönem enflasyonu ve geç dönem hızlanmasını birleştiren ve ek olarak skaler bir alan içeren $f(\mathcal{G}, T)$ modelini incelemiş ve tutarlı bir kozmolojik sistem oluşturulabildiğini göstermiştir. (Keskin, 2018)

Güncel bir karanlık enerji modeli olan “New Agegraphic Dark Energy” modeli de, $f(\mathcal{G}, T)$ kütle çekim teorisi altında, düz uzay ve mükemmel akışkan parametreleri ile incelenmiş ve tutarlı bir model oluşturulabildiği görülmüştür. (Saba and Sharif, 2019)

4.3.1. Alan Denklemlerinin Çıkarılması

Teorinin alan denklemlerine yine en küçük etki prensibi ile ulaşabiliriz. Öncelikle (4.61) etki integralinin metrik tensöre göre varyasyonunu sıfıra eşitleyelim.

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [\delta\sqrt{-g}(R + f(\mathcal{G}, T)) + \sqrt{-g}(\delta R + \delta f(\mathcal{G}, T))] + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = 0 \quad (4.62)$$

Formülasyon kolaylığı açısından, $f(\mathcal{G}, T)$ fonksiyonunu ve türevlerini aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$f_{\mathcal{G}} \equiv \frac{\partial f(\mathcal{G}, T)}{\partial \mathcal{G}}, \quad f_T \equiv \frac{\partial f(\mathcal{G}, T)}{\partial T}, \quad f = f(\mathcal{G}, T) \quad (4.63)$$

Bu durumda, (4.62) eşitliği aşağıdaki forma gelecektir.

$$\delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x [(R + f)\delta\sqrt{-g} + \sqrt{-g}(\delta R + f_{\mathcal{G}}\delta\mathcal{G} + f_T\delta T)] + \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = 0 \quad (4.64)$$

Bu eşitliği çözebilmek için, enerji-momentum tensörü izinin varyasyonuna ihtiyacımız vardır. Bu varyasyonu, aşağıdaki şekilde alabiliriz. (Sharif and Ikram, 2016)

$$\delta T = (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu}, \quad \Theta_{\mu\nu} = g^{\xi\eta} \frac{\delta T_{\xi\eta}}{\delta g_{\mu\nu}} \quad (4.65)$$

R, Ricci skalerinin ve metrik determinantının karekökü $\sqrt{-g}$ varyasyonları (4.3) ve (4.4) denklemlerini, (4.64) denkleminde yerlerine koyarsak,

$$\begin{aligned} \delta S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x & \left[\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\nu}) \right) (R + f) + \sqrt{-g} \left((-R^{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu - \right. \right. \\ & g^{\mu\nu} \nabla^2) \delta g_{\mu\nu} + [-2RR^{\mu\nu}f_{\mathcal{G}} - 4f_{\mathcal{G}}R^{\mu\beta\sigma\nu}R_{\beta\sigma} + 4f_{\mathcal{G}}R_{\rho}^{\mu}R^{\nu\rho} - 2f_{\mathcal{G}}R_{\rho\varepsilon\sigma}^{\mu}R^{\nu\rho\varepsilon\sigma} + \\ & 2R\nabla^\mu \nabla^\nu (f_{\mathcal{G}}) - 2g^{\mu\nu}R\nabla^2(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\beta\nu}\nabla_{\beta}\nabla^{\mu}(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\nu\beta}\nabla_{\beta}\nabla^{\mu}(f_{\mathcal{G}}) + 4R^{\mu\nu}\nabla^2(f_{\mathcal{G}}) + \\ & 4R^{\rho\beta}g^{\mu\nu}\nabla_{\rho}\nabla_{\beta}(f_{\mathcal{G}}) - 4R^{\mu\rho\nu\tau}\nabla_{\rho}\nabla_{\tau}(f_{\mathcal{G}})] \delta g_{\mu\nu} + f_T(T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})\delta g^{\mu\nu} \Big] + \\ & \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}) = 0 \end{aligned} \quad (4.66)$$

formuna ulaşılır. Burada gerekli sadeleştirmeler ve indis dönüşümleri yapıldığında, $f(\mathcal{G}, T)$ alan denklemlerine ulaşmış oluruz. (Sharif and Ikram, 2016)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu} - (T_{\mu\nu} + \Theta_{\mu\nu})f_T + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f - \left(2RR_{\mu\nu} - 4R_{\mu}^{\xi}R_{\xi\nu} - 4R_{\mu\xi\nu\eta}R^{\xi\eta} + 2R_{\mu}^{\xi\eta\sigma}R_{\nu\xi\eta\sigma}\right)f_{\mathcal{G}} - \left(2Rg_{\mu\nu}\nabla^2 - 2R\nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - 4g_{\mu\nu}R^{\xi\eta}\nabla_{\xi}\nabla_{\eta} - 4R_{\mu\nu}\nabla^2 + 4R_{\mu}^{\xi}\nabla_{\nu}\nabla_{\xi} + 4R_{\nu}^{\xi}\nabla_{\mu}\nabla_{\xi} + 4R_{\mu\xi\nu\eta}\nabla^{\xi}\nabla^{\eta}\right)f_{\mathcal{G}} \quad (4.67)$$

Görüldüğü üzere, teoremin alan denklemleri, $f(\mathcal{G}, T) = 0$ durumunda genel görelilik, $f(\mathcal{G}, T) = f(\mathcal{G})$ durumunda ise $f(\mathcal{G})$ teorisi alan denklemlerine indirgenmektedir.

Literatüre baktığımızda, Sharif ve Ikram'ın 2017 yılında, Noether simetrilerden yararlanarak yaptıkları analiz sonucunda,

$$f(\mathcal{G}, T) = a_0\mathcal{G}^2 + b_0T^2, a_0 \text{ ve } b_0 \text{ sabit} \quad (4.68)$$

$$f(\mathcal{G}, T) = \mathcal{G}^k T^{1-k}, k \text{ sabit} \quad (4.69)$$

formunda kozmolojik açıdan geçerli olabilecek fonksiyon tespit etmişlerdir. (Sharif and Ikram, 2017)

Shamir ve Ahmad tarafından 2019 yılında yapılan ve sıkışık yıldızların $f(\mathcal{G}, T)$ kütle çekimi altındaki yapısını inceleyen makalede ise, α ve λ birer sabit olmak üzere,

$$f(\mathcal{G}, T) = \alpha\mathcal{G}^n + \lambda T \quad (4.70)$$

formunda bir fonksiyon ele alındığını görmekteyiz. Bu çalışmada, bu tarz $f(\mathcal{G}, T)$ modelleri altındaki maksimum yıldız kütlelerinin, gözlemlenen limitlerden fazla olabileceği sonucuna varılmıştır. (Shamir and Ahmad, 2019)

Yine Sharif tarafından 2017 yılında yapılan ve anizotropik evren modellerini $f(\mathcal{G}, T)$ kütle çekimi altında inceleyen çalışmada ise, ϵ bir sabit olmak üzere,

$$f(\mathcal{G}, T) = \sqrt{\mathcal{G}} + T \quad (4.71)$$

$$f(\mathcal{G}, T) = \sqrt{\mathcal{G}} + T + \epsilon T^2 \quad (4.72)$$

fonksiyonlarının kullanıldığını görüyoruz. (Sharif, 2017)

Şu ana kadar, genel görelilik, $f(R)$, $f(\mathcal{G})$, $f(R, \mathcal{G})$ ve $f(\mathcal{G}, T)$ teorilerinin hareket denklemlerini ve çeşitli çalışmalarda bu teoriler için kullanılan fonksiyonları özetledik. Bundan sonraki bölümde genel görelilik ve $f(\mathcal{G})$, $f(R, \mathcal{G})$ ve $f(\mathcal{G}, T)$ teorilerinin kozmolojik uygulamalarını inceleyeceğiz.



5. BIANCHI TİP-I EVREN MODELİNDE UYGULAMALAR

Her ne kadar (2.18) şeklinde verilen ve homojen, izotropik ve düz uzayı modelleyen FRW metriği en çok kullanılan metrik olsa ve gözlemler, FRW metriğinin varsayımları ile büyük oranda uyum sağlasa da literatürde çok çalışılan başka metrikler de mevcuttur.

Bunlardan, Luigi Bianchi tarafından ortaya konulan ve homojen ama izotropik olmayan üç boyutlu uzayları tanımlayan metrikler üzerine geliştirilmiş kozmolojik modellere Bianchi evrenleri adı verilmektedir. (Bianchi, 1898)

Bianchi evrenleri, gözlemlerle sıklıkla karşılaştırılmış ancak henüz gerçek evrende, belirgin bir anizotropi tespit edilmemiştir. Buna rağmen, gerek izotropiden olası bir sapmanın alabileceği maksimum değerin tespiti için kullanılabilmesi gerekse pedagojik değeri nedeniyle bu metrikler literatürde yoğun olarak çalışılmaya devam etmektedir.

Oluşturulabilecek farklı homojen uzaylar için parametre değerlerine göre belirlenmiş 11 farklı tipte Bianchi evreni mevcuttur. (Bianchi, 1918) Bunlardan en basiti, öklid uzayını tanımlayan Bianchi Tip-I metriğidir. Ancak, bu tür metrikle yapılan kozmolojik modeller, limit durumlarda homojen ve izotropik evren modellerine indirgenebilirler.

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dx^2 - B^2 dy^2 - C^2 dz^2 \quad (5.1)$$

Burada, A, B ve C, sadece zamana bağlı birer fonksiyondur ve ilgili yöndeki ölçek faktörünü belirlerler. Bu sayede, FRW metriğinden farklı olarak, her bir yöndeki ölçek faktörü farklı olabilmektedir.

Bianchi Tip I metriğindeki, A, B ve C fonksiyonlarının üçünün tam bağımsız olmayıp, birbirleriyle farklı ilişkilere sahip olduğu özel durumlar literatürde sıklıkla kullanılmaktadır. Bunlardan, B = C olduğu varsayılan, LRS Bianchi Tip I (Locally Rotationally Symmetric – Yerel Dönüş Simetrisi) metriği,

$$ds^2 = dt^2 - A^2 dx^2 - B^2 (dy^2 + dz^2) \quad (5.2)$$

şeklinde verilmektedir. (Feng and Hou, 2020)

Bu bölümde, LRS Bianchi Tip-I metriği (5.2) baz alınarak, ideal akışkan durumunda, genel görelilik ile $f(\mathcal{G})$, $f(R, \mathcal{G})$ ve $f(\mathcal{G}, T)$ teorileri için ortaya çıkan evren parametreleri karşılaştırmalı olarak incelenecek ve değerlendirilecektir.

5.1. Genel Görelilik Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü

Genel görelilik teorisinin, Bianchi Tip-I evreni için uygulamasını incelemek için (5.2) metriğini, (2.16) ile verilen Einstein alan denklemlerine uygulamamız gerekir.

Karanlık enerji barındıran LRS Bianchi Tip I evrenini incelemek için, ideal akışkan formundaki madde ve karanlık enerji için enerji momentum tensörlerinin toplamından oluşan,

$$T^i_j = T^{(m)i}_j + T^{(de)i}_j \quad (5.3)$$

şeklindeki toplam enerji momentum tensörü ele alınabilir. (Yadav and Saha, 2011) Burada, baryonik madde için enerji momentum tensörü,

$$T^{(m)i}_j = \text{diag}[-\rho^{(m)}, p^{(m)}, p^{(m)}, p^{(m)}], = \text{diag}[-1, \omega^{(m)}, \omega^{(m)}, \omega^{(m)}] \quad (5.4)$$

ve karanlık enerji için enerji momentum tensörü olarak da

$$T^{(de)i}_j = \text{diag}[-\rho^{(de)}, p^{(de)}, p^{(de)}, p^{(de)}], = \text{diag}[-1, \omega^{(de)}, \omega^{(de)}, \omega^{(de)}] \quad (5.5)$$

alınmıştır. Bu eşitliklerde, $\rho^{(m)}$ ve $p^{(m)}$ sırasıyla, ideal akışkan madde için enerji yoğunluğu ve basınç iken, $\omega^{(m)} = p^{(m)}/\rho^{(m)}$ ise yine madde için hal denklemi parametresidir. Benzer şekilde $\rho^{(de)}$ ve $p^{(de)}$ karanlık enerji için enerji yoğunluğu ve basıncı göstermek üzere, $\omega^{(de)} = p^{(de)}/\rho^{(de)}$ karanlık enerjiye karşılık gelen hal denklemi parametresidir.

LRS Bianchi Tip-I metrik (5.2) için, Einstein alan denklemleri (2.16) ele alınırsa,

$$\frac{\dot{B}^2}{B^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = \rho^{(m)} + \rho^{(de)} \quad (5.6)$$

$$2\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} = -\omega^{(m)}\rho^{(m)} - \omega^{(de)}\rho^{(de)} \quad (5.7)$$

$$\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = -\omega^{(m)}\rho^{(m)} - \omega^{(de)}\rho^{(de)} \quad (5.8)$$

şeklindeki denklem setine ulaşılır. Burada tek nokta ile gösterilen terimler, zamana göre birinci türevleri, çift noktalı terimler zamana göre ikinci türevleri belirtmektedir. (Yadav and Saha, 2011)

Bianchi özdeşliği $G^{\bar{i}\bar{j}}_{;\bar{j}}=0$ incelendiğinde,

$$\dot{\rho}^{(m)} + 3(1 + \omega^{(m)})\rho^{(m)}H + \dot{\rho}^{(de)} + 3(1 + \omega^{(de)})\rho^{(de)}H = 0 \quad (5.9)$$

eşitliğini verecektir. Burada H, LRS Bianchi Tip-I metriği için,

$$H = \frac{1}{3}\left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{2\dot{B}}{B}\right) \quad (5.10)$$

şeklinde tanımlanan, ortalama Hubble parametresidir. Yine LRS Bianchi Tip-I metriği için ortalama ölçek faktörü,

$$a = \sqrt[3]{AB^2} \quad (5.11)$$

hacim,

$$V = AB^2 \quad (5.12)$$

genişleme skaleri (θ),

$$\theta = 3H = \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{2\dot{B}}{B}\right) \quad (5.13)$$

ortalama anizotropi parametresi (A_m),

$$A_m = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\left(\frac{H_i-H}{H}\right)^2 \quad (5.14)$$

ve burulma parametresi (σ),

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 H_i^2 - \frac{1}{3} \theta^2 \right) \quad (5.15)$$

şeklinde vermiştir. (Yadav and Saha, 2011)

Alan denklemlerinin tam çözümüne ulaşabilmek için bazı kabuller yapılması gerekir. Yadav ve Saha, 2011 yılı makalelerinde bu amaçla, ilk olarak, ideal akışkan madde ve karanlık enerji bileşenlerinin birbiriyle etkileşimsiz olduğunu öngörmüşlerdir. Bu sayede, iki kaynak için enerji momentum tensörleri bağımsız olarak korunumlu olacaktır.

Buna göre, ideal akışkan için enerjinin korunumundan

$$\dot{\rho}^{(m)} + 3(1 + \omega^{(m)})\rho^{(m)}H = 0 \quad (5.16)$$

ve karanlık enerji için enerji korunumundan ise,

$$\dot{\rho}^{(de)} + 3(1 + \omega^{(de)})\rho^{(de)}H = 0 \quad (5.17)$$

elde etmişlerdir. Yazarlar, denklem sisteminin çözümüne ulaşabilmek için, genişleme skaleri (θ) ve burulma parametresi (σ) arasında bir orantısallık olma durumu ele almışlardır. Bu kabul, ölçek faktörleri arasında,

$$A = B^n \quad (5.18)$$

şeklinde bir ilişki bulunması sonucunu doğurmaktadır. Eğer, (5.6) ve (5.8) eşitliklerinde (5.18) bağıntısını yerine konulursa,

$$\frac{\ddot{B}}{B} + (n+1) \frac{\dot{B}^2}{B^2} = 0 \quad (5.19)$$

formuna gelinir. Bu denklemin çözümü,

$$B = (k_1 t + k_0)^{\frac{1}{n+2}} \quad (5.20)$$

şeklinde dir. Burada k_1 ve k_0 entegrasyon sabitleridir. Yine (5.18) eşitliği nedeniyle,

$$A = (k_1 t + k_0)^{\frac{n}{n+2}} \quad (5.21)$$

ölçek faktörü de elde edilebilir. (Yadav and Saha, 2011) Burada dikkat çeken bir nokta, genişleme skaleri (θ) ve burulma parametresi (σ) arasındaki orantısallık kabulünün, kuvvet kanunu modeliyle genişleme sonucuna doğal olarak ulaştığıdır. (Yadav and Saha, 2011)

Yadav ve Saha'nın 2011 yılı makalelerinde, karanlık enerjinin anizotropik olması durumu ele alınmış ve buna göre yoğunluk ve basınç parametreleri elde edilmiştir. Ancak biz bu çalışmamızda, incelediğimiz diğer teorilerle karşılaştırılabilirliği sağlamak amacıyla, karanlık enerji dağılımının da izotropik olduğu kabulüyle devam edeceğiz. Bu kabul altında, madde ve karanlık enerji bileşenleri için enerji yoğunluk değişimi ise sırasıyla,

$$\rho^{(m)} = \rho_0 (k_1 t + k_0)^{-(\omega^{(m)}+1)} \quad (5.22)$$

$$\rho^{(de)} = \frac{(2n+1)k_1^2}{(n+2)^2(k_1 t + k_0)^2} - \frac{\rho_0}{(k_1 t + k_0)^{(\omega^{(m)}+1)}} \quad (5.23)$$

şeklinde olacaktır. Burada ρ_0 pozitif değerli, integrasyon sabitidir. (Yadav and Saha, 2011) İvmelenme faktörü q ise,

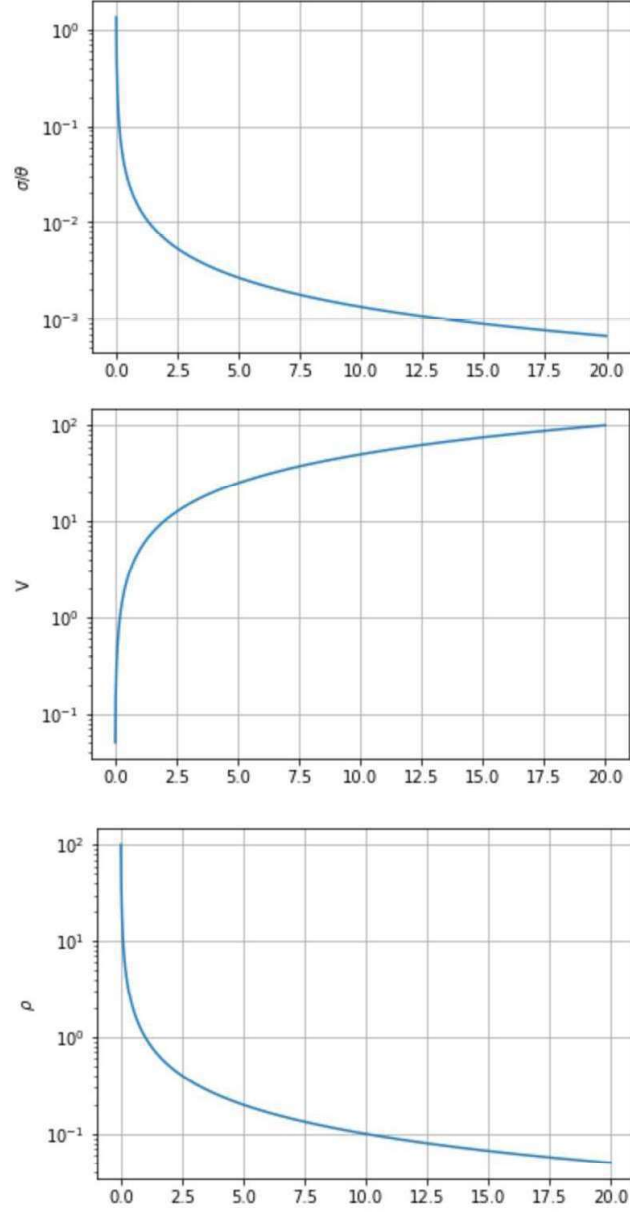
$$q = \frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 2 \quad (5.24)$$

olarak ortaya çıkar.

Genel göreliliğin LRS Bianchi Tip-I evrenindeki modeli, sonraki kısımda inceleyeceğimiz Gauss-Bonnet değişmezi içeren teorilerle karşılaştırabilmek için, temel evren parametrelerinin grafiklerini oluşturmakta fayda vardır.

Buna göre σ/θ , V ve ρ değerlerinin, zamana (t) göre değişimlerini hesapladık ve bu şekilde elde ettiğimiz grafikler Şekil-5.1'de gösterilmiştir. Grafikten görüleceği üzere, hesaplanan σ/θ ve ρ değerleri zamanla azalmakta, V değeri ise artış göstermektedir. Bu sonuç, gözlemlerle tutarlıdır. Limit durumunda, anizotropi

parametresi (σ/θ) değerinin izotropik evrene yakınsamaktadır. Yoğunluk ise, sonsuzda, beklendiği üzere 0 olmaktadır.



Şekil 5.1- LSR Bianchi Tip-I evreni için, genel görelilik ve kuvvet kanunu kullanılarak elde edilen çözümlere göre σ/θ , V , ve ρ değerlerinin zamana göre değişimi. Serbest sabitler, $k_1=1$, $k_0=0$, $\rho_0=1$, $n=0.5$, ve $\omega=0$ olarak alınmıştır.

5.2. $f(\mathcal{G})$ Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü

$f(\mathcal{G})$ Teorisi için alan denklemlerini (4.39) formunda elde etmiştik. Şimdi bu alan denklemlerine, Bianchi Tip-I metriğini uygulayalım.

Tezimizdeki amaca uygun olarak, (5.2) şeklinde verilen LRS (Locally Rotational Symetric – Yerel Dönüş Simetrili) Bianchi Tip I metriğini $f(\mathcal{G})$ durumunda ele alacağız.

Öncelikle, Gauss-Bonnet ve Ricci skalerlerinin, ölçek faktörleri cinsinden gösterimini Farasat Shamir tarafından verildiği şekilde elde edelim. (Shamir, 2016)

$$\mathcal{G} = 8 \left[\frac{\ddot{A}\dot{B}^2}{AB^2} + 2 \frac{\dot{A}\ddot{B}\ddot{B}}{AB^2} \right] \quad (5.25)$$

$$R = -2 \left[\frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right] \quad (5.26)$$

Eğer (5.2) metriği, (4.39) alan denklemlerine uygulanırsa, aşağıdaki denklem seti elde edilir.

$$2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} - 24 \frac{\dot{A}\dot{B}^2}{AB^2} \dot{f}_G + \mathcal{G}f_G - f = kp \quad (5.27)$$

$$-2 \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\ddot{B}^2}{B^2} + 16 \frac{\ddot{B}\ddot{B}}{B^2} \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = kp \quad (5.28)$$

$$-\frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + 8 \left(\frac{\dot{A}\ddot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\ddot{A}}{AB} \right) \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = kp \quad (5.29)$$

Bu eşitlikler, beş bilinmeyenli, yüksek seviye, lineer olmayan üç adet diferansiyel denklemdir ve karmaşıktır. Bu nedenle, çözüm için bazı ek varsayımlara ihtiyaç duyulur. Tezimizdeki amaca uygun olarak, genel görelilik teorisi incelenirken kullanılan varsayımlarla aynı varsayımlar altında yapılmış çalışmaları inceledik. Bu nedenle, A ve B metrik katsayıları arasında, l ve n birer sabit olmak üzere, aşağıdaki gibi bir ilişki barındıran evren modellerini ele aldık.

$$A = lB^n \quad (5.30)$$

Bu koşul altında, (5.27)-(5.29) alan denklemleri, aşağıdaki formu alırlar. (Shamir, 2016)

$$(1 + 2n) \frac{\dot{B}^2}{B^2} - 24n \frac{\dot{B}^3}{B^3} \dot{f}_G + \mathcal{G}f_G - f = k\rho \quad (5.31)$$

$$-2 \frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 16 \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = kp \quad (5.32)$$

$$-(n+1) \frac{\ddot{B}}{B} - n^2 \frac{\dot{B}^2}{B^2} + 8 \left(2n \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} + n(n-1) \frac{\dot{B}^3}{B^3} \right) \dot{f}_G + 8n \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = kp \quad (5.33)$$

Çözüm için bir de $f(\mathcal{G})$ fonksiyonu seçilmesi gerekmektedir. Bunun için, literatürde incelenmiş ve kozmolojik açıdan geçerli olabileceği görülen,

$$f(\mathcal{G}) = \alpha \mathcal{G}^{m+1} \quad (5.34)$$

formu kullanılabilir. (Shamir, 2016) Burada α ve m keyfi birer sabittir. Eğer (5.32) ve (5.33) eşitlikleri arasında çıkarma işlemi uygulanırsa,

$$\frac{\ddot{B}}{B} + (n+1) \frac{\dot{B}^2}{B^2} - 8 \left(2 \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} + n \frac{\dot{B}^3}{B^3} \right) \dot{f}_G - 8 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G = 0 \quad (5.35)$$

elde edilir. Seçilmiş olan (5.34) formundaki $f(\mathcal{G})$ fonksiyonu nedeniyle,

$$f_G(\mathcal{G}) = \alpha(m+1)\mathcal{G}^m \quad (5.35)$$

olacağı açıktır. Bu noktada herhangi bir genellik kaybı olmaksızın, $\alpha=1/(m+1)$ kabulü yapılabilir ve (5.35) eşitliği,

$$\frac{\ddot{B}}{B} + (n+1) \frac{\dot{B}^2}{B^2} - 8m\mathcal{G}^m \left[\left(2 \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} + n \frac{\dot{B}^3}{B^3} \right) \frac{\dot{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} \left((m-1) \frac{\dot{\mathcal{G}}^2}{\mathcal{G}^2} + \frac{\ddot{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}} \right) \right] = 0 \quad (5.36)$$

formuna getirilebilir. (Shamir, 2016)

5.2.1. Kuvvet Yasasına Göre Çözüm

Elde edilen (5.36) eşitliğinin pek çok çözümü vardır. Bu çalışmamızda, genel görelilik uygulamasındaki sonuçlarla karşılaştırabilmek amacıyla, evrenin zamana

bağlı genişlemesinin bir kuvvet kanunu ile olduğu kabulü ile yapılan çözümü inceledik. Buna göre,

$$B(t) = at^b \quad (5.37)$$

olarak alınabilir. Bu noktada, a ve b keyfi sabitlerdir. İşlem kolaylığı açısından, a=1 olduğu durumu inceleyeceğiz. Bu koşulun ve Gauss-Bonnet değişmezi için (5.25) formunun, (5.36) eşitliğinde kullanılması halinde,

$$t^2(bn + 2b - 1) + 32mk[8nb^3(bn + 2b + 3)]^m(32bn + 64b - 96 - 128m) = 0 \quad (5.38)$$

şeklindeki koşul denkleminde ulaşılır. Bu eşitlik b=1/n+2 durumunda,

$$m(2m + 1) = 0 \quad (5.39)$$

sonucuna gidecektir. Bu durumda, $f(\mathcal{G})$ fonksiyonu için iki olası çözüm olduğu görülür. (Shamir, 2016)

$$f(\mathcal{G}) = \mathcal{G} + c_1, \quad f(\mathcal{G}) = \sqrt{\mathcal{G}} + c_2 \quad (5.40)$$

Bunlardan, kareköklü terim içeren ikinci denklem, olası bir enflasyon içerdiğinden, önemlidir. (Shamir, 2016)

Bu kabuller altında evren parametrelerini incelememiz durumunda, Hubble parametresi,

$$H = \frac{1}{3t} \quad (5.41)$$

ortalama ölçek faktörü,

$$a = t^{\frac{b(2+n)}{3}} \quad (5.42)$$

hacim ölçek faktörü,

$$V = t^{b(2+n)} \quad (5.43)$$

genişleme skaleri,

$$\theta = \frac{b(n+2)}{t} \quad (5.44)$$

ve burulma parametresi,

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{b(n-1)}{t} \right]^2 \quad (5.45)$$

şeklinde olacaktır. (Shamir, 2016) Burada $t=0$ anında, hacim ölçek faktörünün sıfır olması nedeniyle bir başlangıç tekilliği mevcuttur.

Evrenin genişleme ivmesini veren q (deceleration) parametresi ise,

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{6b+bn-6}{b^2(n+2)^2} \quad (5.46)$$

şeklinde ortaya çıkacaktır. Yapılan kabuller altında, q parametresi zamandan bağımsızdır ve seçilen b ve n sabitlerine göre bir değer alacaktır. Günümüzde gözlemlenen ivmeli hızlanmayla örtüşecek negatif bir q değerine ulaşmak için bu sabitlerin uygun şekilde seçilmesi yeterlidir. (Örneğin, $b=2$, $n=1.5$ olması durumunda $q=-0.183$)

Enerji yoğunluğu ve basınç ise sırasıyla,

$$\rho = \frac{t^2(m+1)(2n^2+5n+2)+16mn(5+6m)\left(\frac{-16m}{t^4(n+2)^3}\right)^m}{t^4(m+1)(n+2)^3k}, \quad (5.47)$$

$$p = \frac{1}{t^4(m+1)(n+2)^3k} \left[t^2(m+1)(2n^2+5n+2) + 16 \left(\frac{-16n}{t^4(n+2)^3} \right)^m (m^2n^2 + mn^2 + 4m^3n + 7mn + 10m^2n + 8m^3 + 12m^2 + 4m) \right] \quad (5.48)$$

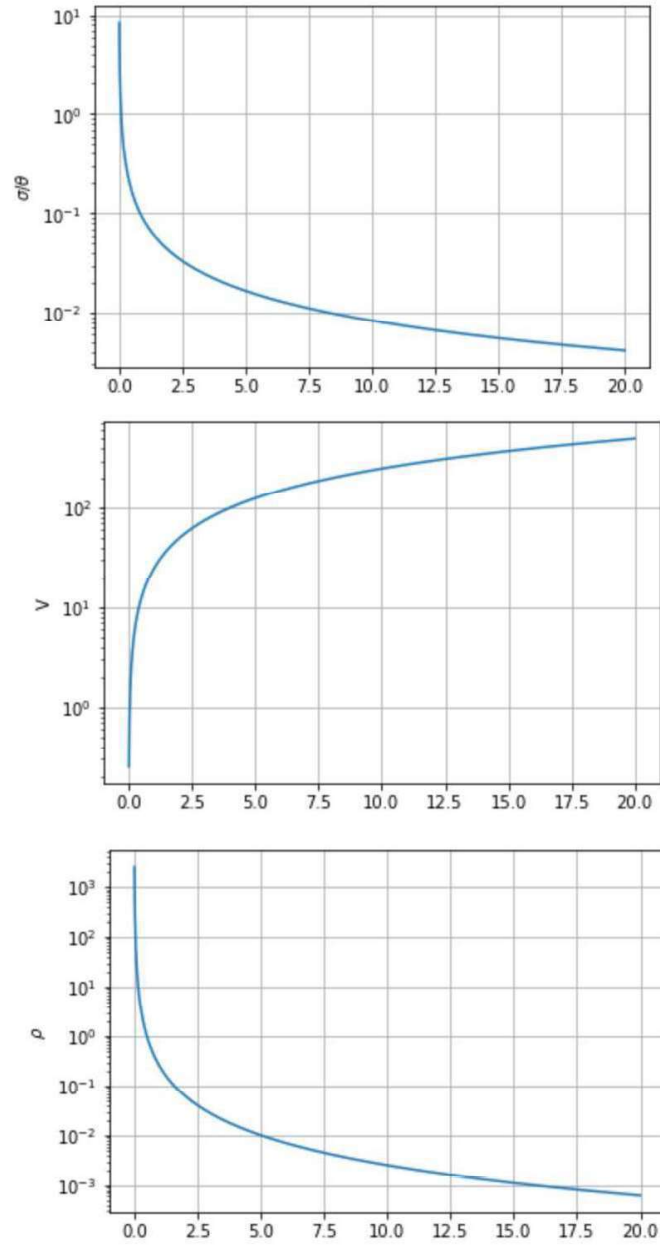
formunda verilmiştir. (Shamir, 2016) Burada, $m=-1/2$ olduğunda, $-\infty < n < -2$ ve $-2 < n < 0$ değerleri için çözüm mevcuttur.

Enerji yoğunluğunun ve diğer parametrelerin, zamana göre evrimini veren grafikler Şekil 5.2'de görülebilir.

Sadece metriğe bağılı olarak ortaya çıkan hacim parametresi (V), genişleme skaleri (θ) ve burulma parametresi (σ^2) parametreleri, benzer koşullar altında çalışıldığından genel görelilik ve incelenecek diğer teoriler ile aynı sonucu verecektir.

Öte yandan, $f(\mathcal{G})$ teorisiyle elde ettiğimiz yoğunluk parametresinin de, genel görelilik teorisi ve gözlemlerle uyum sağlamakta olduğunu görmekteyiz. Yoğunluk zamanla azalan bir eğilim göstermektedir ve $t=0$ anında genel göreliliktekine benzer biçimde bir tekillik barındırmaktadır.





Şekil 5.2- Bianchi Tip-I evreni için, $f(G)$ ve kuvvet kanunu kullanılarak elde edilen çözümlere göre σ/θ , V , ve ρ değerlerinin zamana göre değişimi.

5.3. $f(R, \mathcal{G})$ Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü

$f(R, \mathcal{G})$ Teorisi için alan denklemleri (4.54) formunda elde edilmişti. Yine tezimizin amacı gereği, bu alan denklemlerine, (5.2) şeklinde verilen LRS (Locally Rotational Symmetric – Yerel Dönüş Simettrili) Bianchi Tip I metriğinin uygulanması ile oluşturulmuş modelleri inceleyeceğiz.

Metriğe bağlı olarak, Gauss-Bonnet değişmezi ve Ricci skaleri,

$$\mathcal{G} = 8 \left[\frac{\ddot{A}\dot{B}^2}{AB^2} + 2 \frac{\dot{A}\ddot{B}\dot{B}}{AB^2} \right] \quad (5.49)$$

$$R = -2 \left[\frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right] \quad (5.50)$$

Şeklinde ortaya çıkacaktır.

LRS Bianchi Tip I metriği (5.2) metriği, (4.54) alan denklemlerine uygulandığında, aşağıdaki alan denklemlerine ulaşılır. (Shamir and Kanwal, 2017)

$$kp = \left(2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) f_R - 12 \frac{\dot{A}\dot{B}^2}{AB^2} \dot{f}_G + \left(\frac{\dot{A}}{A} + 2 \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{f}_R + \frac{1}{2} (Rf_R + \mathcal{G}f_G - f) \quad (5.51)$$

$$kp = -\ddot{f}_R - 2 \frac{\ddot{B}}{B} \dot{f}_R + 8 \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} \dot{f}_G + 4 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \frac{1}{2} (Rf_R + \mathcal{G}f_G - f) - \left(\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) f_R \quad (5.52)$$

$$kp = -\ddot{f}_R - \left(\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{f}_R + 4 \left(\frac{\dot{A}\ddot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\ddot{A}}{AB} \right) \dot{f}_G + 4 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \ddot{f}_G - \frac{1}{2} (Rf_R + \mathcal{G}f_G - f) - \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) f_R \quad (5.53)$$

Burada f_G , Gauss-Bonnet değişmezine göre, f_R ise Ricci skalerine göre türevleri belirtmektedir.

Elimizde 3 denklem ve 5 bilinmeyen bulunması ve denklemlerin karmaşıklığı ve lineer olmaması nedeniyle, çözümü ancak bir takım ek koşullar getirerek yapılabilir. Karşılaştırılabilirlik açısından, Genel görelilik ve $f(\mathcal{G})$ teorileri çözümü için uygulanan A ve B fonksiyonları arasında (5.30) şeklinde bir ilişkinin burada da geçerli olduğu kabulü ile yapılmış çalışmaları ele aldık.

Bu kabul, (5.51), (5.52) ve (5.53) alan denklemlerine uygulandığında,

$$k\rho = \left(2\frac{n\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}\right)f_R - 12\frac{n\dot{B}^3}{B^3}\dot{f}_G + \left(\frac{n\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{f}_R + \frac{1}{2}(Rf_R + Gf_G - f) \quad (5.54)$$

$$kp = -\ddot{f}_R - 2\frac{\ddot{B}}{B}\dot{f}_R + 8\frac{\dot{B}\ddot{B}}{B^2}\dot{f}_G + 4\frac{\dot{B}^2}{B^2}\ddot{f}_G - \frac{1}{2}(Rf_R + Gf_G - f) - \left(\frac{2\dot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}\right)f_R \quad (5.55)$$

$$kp = -\ddot{f}_R - \left(n\frac{\dot{B}}{B} + \frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{f}_R + 4\left(\frac{2n\dot{B}\ddot{B}}{B^2} + \frac{n(n-1)\dot{B}^3}{B^3}\right)\dot{f}_G + 4\frac{\dot{B}^2}{B^2}\ddot{f}_G - \frac{1}{2}(Rf_R + Gf_G - f) - \left(\frac{(n+2)\dot{B}}{B} + \frac{n^2\dot{B}^2}{B^2}\right)f_R \quad (5.56)$$

denklem seti elde edilir. (Shamir and Kanwal, 2017) Dolayısıyla $\kappa = 1$ alınması durumunda enerji yoğunluğu,

$$\rho = \left(2\frac{n\dot{B}^2}{B^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2}\right)f_R - 12\frac{n\dot{B}^3}{B^3}\dot{f}_G + \left(\frac{n\dot{B}}{B} + 2\frac{\dot{B}}{B}\right)\dot{f}_R + \frac{1}{2}(Rf_R + Gf_G - f) \quad (5.57)$$

olarak ortaya çıkacaktır. (Shamir and Kanwal, 2017)

Shamir ve Kanwal, 2017 yılı makalelerinde, çözüm incelemesi için, gözlemlerle uyumlu olduğu belirlenmiş olan,

$$f(R, G) = f_0 R^\beta G^{1-\beta} \quad (5.58)$$

formundaki fonksiyonları ele almışlardır. Burada anlamlı ve en basit fonksiyon olarak da $f_0=1$ ve $\beta=2$ şeklindeki,

$$f(R, G) = \frac{R^2}{G} \quad (5.59)$$

fonksiyonu için çözümleme yapmışlardır. (Shamir and Kanwal, 2017) Bu durumda, Lagrangian olarak

$$\mathcal{L} = \frac{4f_0\dot{B}}{G} \left[(n^2 + 2n)B^{2n-1}\dot{B}R + (2n+1)B^{2n}\dot{R} - (2n+1)B^{2n}\dot{G}\frac{R}{G} + 4n^2B^{2n-2}\dot{B}^2R\frac{R}{G} - 4n^2B^{2n-2}\dot{B}^2G\left(\frac{R}{G}\right)^2 \right] \quad (5.60)$$

ve buna bağılı olarak da Euler-Lagrange eşitliği olarak

$$\begin{aligned}
& (2n^2 + 3n - 2)B^{2n-2}\dot{B}^2\frac{R}{g} + 2n(n+2)B^{2n-1}\ddot{B}\frac{R}{g} + 2n(n+2)B^{2n-1}\dot{B}\frac{\dot{R}}{g} - 2n(n+2)B^{2n-1}\dot{B}\frac{R\dot{G}}{g^2} - 2(n+1)B^{2n}\frac{R\ddot{G}}{g^2} + 2(2n+1)B^{2n}\frac{R\dot{G}^2}{g^3} + 16n^2(n-1)B^{2n-3}\dot{B}^3\frac{R\dot{R}}{g^2} + \\
& 24n^2B^{2n-2}\dot{B}\ddot{B}\frac{R\dot{R}}{g^2} + 12n^2(n-1)B^{2n-3}\dot{B}^2\frac{\dot{R}^2}{g^2} + 12n^2B^{2n-2}\dot{B}^2\frac{R\ddot{R}}{g^2} - \\
& 48n^2B^{2n-2}\dot{B}^2\frac{R\dot{R}\dot{G}}{g^2} - 12n^2(n-1)B^{2n-3}\dot{B}^3\frac{R^2\dot{G}}{g^3} - 24n^2B^{2n-2}\dot{B}^2\frac{R^2\dot{G}}{g^3} + \\
& 36n^2B^{2n-2}\dot{B}^2\frac{R^2\dot{G}}{g^3} = 0,
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$(2n+1)B^{2n}\ddot{B} + 3n^2B^{2n-1}\dot{B}^2 + 8n^2(n-1)B^{2n-3}\dot{B}^4\frac{R}{g} + 12n^2B^{2n-2}\dot{B}^2\ddot{B}\frac{R}{g} = 0 \tag{5.62}$$

olacaktır. (Shamir and Kanwal, 2017) Ricci skaleri ve Gauss-Bonnet değişmezi için değerlerin (5.62) eşitliğinde yerine konulması durumunda ise,

$$\begin{aligned}
& 12n^4(n^4 - 5n^3 + 2n + 2)\dot{B}^8 + n(132n^5 - 52n^4 - 41n^3 - 57n^2 - 53n - 10)B^2\dot{B}^4\ddot{B}^3 + (16n^4 + 8n^3 - 12n^2 - 10n - 2)B^4\dot{B}^4 + (80n^5 + 36n^4 + 40n^3 + 61n^2 + 24n + 2)B^3\dot{B}^2\ddot{B}^3 + n(4n^4 + 8n^3 - 3n^2 - 7n - 2)B^3\dot{B}^3\ddot{B}\ddot{B} + n^2(92n^5 - 110n^4 - 45n^3 - 44n^2 + 14n + 12)B\dot{B}^6\ddot{B} + n^2(10n^4 + 29n^3 + 24n^2 + 14n + 4)B^2\dot{B}^5\ddot{B} = 0
\end{aligned} \tag{5.63}$$

sonucuna ulaşılır. Bu denklemlerin çözülebilmesi için, B ölçek faktörünün formuyla ilgili bir varsayımda bulunulması gerekmektedir.

5.3.1. Kuvvet Yasasına Göre Çözüm

Shamir ve Kanwal'ın 2017 makalesinde inceledikleri şekilde, ölçek faktörlerinin, zamanın üstel bir fonksiyonu olduğu kabulüyle devam edelim. Bu durumda, B ölçek faktörü olarak

$$B(t) = at^b \tag{5.64}$$

alınabilir. (Shamir and Komal, 2017) Burada, a ve b keyfi sabitlerdir. İşlem kolaylığı sağlamak için a=1 alınması halinde ve A ile B arasında (5.30) ilişkisi olduğu göz önüne alındığında,

$$A = t^{bn} \quad (5.65)$$

olacaktır. Buna bağılı olarak elde edilecek enerji yoğunluğu ve basınç parametrelerinin zamana göre değişimi ise sırasıyla,

$$\rho = \frac{1}{t^4(n+1)(b+2)^3(1-b^2)} \left[t^2(n+1)(b^2-1)(2b^2+5b+2) - 8 \left(\frac{-2}{t^4(b+2)^3} \right)^n (4n^3(b+2) + n^2(b^2+10b-6((1-b)^2b+12) + n(b^2+7b-5(1-b)^2b+4)), \right] \quad (5.66)$$

$$p = \frac{1}{t^4(n+1)^2(2+m^2)} \left[t^2(b^2-1)(2b^2+5b+2)(n+3) - \left(\frac{-b}{t^4(b+2)^3} \right)^n (7n^3 + n^2(2b^2+4b+12) + n(2b^2+3b-(1-b)^2b)) \right]. \quad (5.67)$$

olarak elde edilir. (Shamir and Kanwal, 2017) Parametreler arasındaki ilişkiden ortaya çıkacak kısıt denklemi ise,

$$12n^4(n^4-5n^3+2n+2)b^4+2(n-1)(2n+1)^3(b^4-4b^3+6b^2-4b+1)+n(2n+1)\left(-10+n\left(-33+n(9+n(-59+66n))\right)\right)(b^4-2b^3+b^2)+n^2\left(12+n\left(14+n\left(-44+n(-45+2n(-55+46n))\right)\right)\right)(b^4-b^3)+(2n+1)^2\left(2+n(16+n(-11+20n))\right)(b^4-3b^3+3b^2-b)+n^2(2+n)(2n+1)(2+n(2+5n))(b^4-3b^3+2b^2)+n(2n+1)^2(n^2+n-2)(b^4-4b^3+5b^2-2b)=0 \quad (5.68)$$

olacaktır. Shamir ve Kanwal, 2017 yılı makalelerinde, özel bir çözüm olarak $b=1/3$ durumunu ele almış ve buna karşılık olarak

$$n = -\frac{1}{2}, n = -1, n = -\frac{3}{2} \quad (5.69)$$

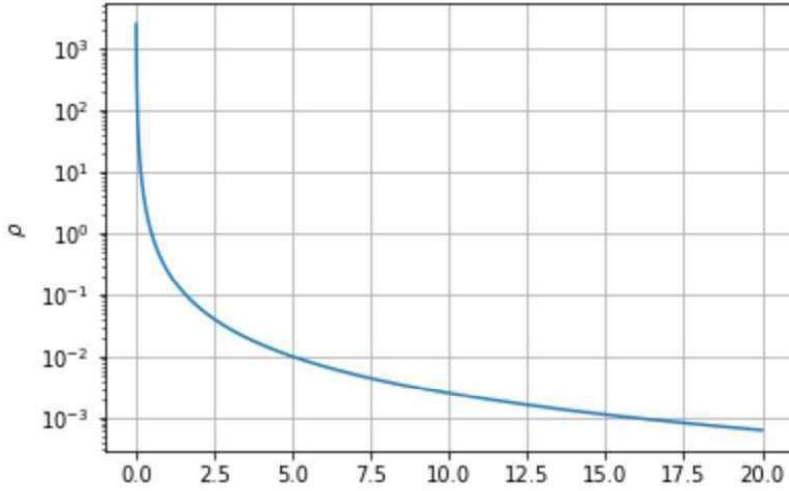
şeklinde üç seçenek olduğunu göstermişlerdir. Bu çözümlerden $-1/2$ seçilirse, elde edilecek metrik,

$$ds^2 = dt^2 - t^{\frac{2}{3}}dx^2 - B^{\frac{4}{3}}(dy^2 - dz^2) \quad (5.70)$$

olacaktır ki bu da bilindik Kasner metriğidir. (Shamir and Kanwal, 2017)

Metriğe bağılı olarak hesaplanacak genişleme skaleri (θ), burulma parametresi (σ^2), hacim parametresi (V) ve ivmelenme parametresi (q), LRS Bianchi Tip I metriğini benzer kabuller altında incelemiş olmamız nedeniyle $f(G)$ teorisinde bulunan değerlerle aynı olacaktır.

Yoğunluğun zamana göre değişimi ise Şekil 5.3'te gösterilmiştir. Yoğunluğun zamanla azalım trendinde olduğu görülmektedir ki bu da gözlemlerle tutarlıdır.



Şekil 5.3- Bianchi Tip-I evreni için, $f(R,G)$ ve kuvvet kanunu kullanılarak elde edilen çözümlere göre yoğunluğun zamana göre değişimi.

5.3. $f(G, T)$ Teorisi ve Bianchi Tip I Çözümü

Son olarak incelenecek olan $f(G, T)$ teorisinin alan denklemleri (4.67) şeklinde bulunmuştu. Daha önce yapıldığı şekilde, LRS (Locally Rotational Symetric – Yerel Dönüş Simetrik) Bianchi Tip I metriğini kullanarak $f(G, T)$ altında oluşturulan evren modelleri inceleyeceğiz.

Öncelikle, metriğe bağılı olarak Gauss-Bonnet değişmezi ve Ricci skalerini,

$$\mathcal{G} = 8 \left[\frac{\ddot{A}\dot{B}^2}{AB^2} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}\ddot{B}}{AB^2} \right] \quad (5.71)$$

$$R = -2 \left[\frac{\ddot{A}}{A} + 2 \frac{\ddot{B}}{B} + 2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right] \quad (5.72)$$

formunda ele alalım.

Alan denklemlerine (4.67), metriğin (5.2) uygulanması halinde ise aşağıdaki denklem seti ortaya çıkacaktır. (Shamir, 2017)

$$2 \left(2 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) - 24 \frac{\dot{A}\dot{B}^2}{AB^2} \dot{f}_G + \mathcal{G}f_G - f - 2(\rho + p)f_T = 2k^2\rho \quad (5.73)$$

$$-2 \left(\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) + 16 \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = 2k^2p \quad (5.74)$$

$$-2 \left(\frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \right) + 8 \left(\frac{\dot{A}\ddot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}\ddot{A}}{AB} \right) \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = 2k^2p \quad (5.75)$$

Daha önce $f(\mathcal{G})$ ve $f(R, \mathcal{G})$ teorilerinde yapıldığı gibi, burada da, 5 bilinmeyen içeren, 3 denklemden oluşan bu denklem setinin çözülebilir olması için bazı ek kısıtlamalara ihtiyaç vardır. Karşılaştırılabilirlik açısından yine daha önceki kısımlarda yapıldığı üzere, A ve B ölçek fonksiyonları arasında (5.30) formunda bir ilişki olduğu kabulü ile yapılan çalışmalar incelenecektir.

Bu kabul altında, (5.73), (5.74) ve (5.75) denklemleri,

$$2(2n+1) \frac{\dot{B}^2}{B^2} - 24n \frac{\dot{B}^3}{B^3} \dot{f}_G + \mathcal{G}f_G - f - 2(\rho + p)f_T = 2k^2\rho \quad (5.76)$$

$$-2 \left(\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) + 16 \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = 2k^2\rho \quad (5.77)$$

$$-2 \left((n+1) \frac{\ddot{B}}{B} + n^2 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \right) + 8 \left(2n \frac{\ddot{B}\dot{B}}{B^2} + n(n-1) \frac{\dot{B}^3}{B^3} \right) \dot{f}_G + 8 \frac{\dot{B}^2}{B^2} \ddot{f}_G - \mathcal{G}f_G + f = 2k^2\rho \quad (5.78)$$

formuna dönüşür. (Shamir, 2017)

5.4.1. Kuvvet Yasasına Göre Çözüm

(5.76-78) Denklem setinin tam olarak çözülebilmesi için ölçek faktörlerinin yapısı konusunda da bir varsayımda bulunulabilir. Diğer kısımlarda yapıldığı gibi, B ölçek faktörü ile zaman arasında, n keyfi bir sabit olmak üzere,

$$B = t^n \quad (5.79)$$

şeklinde bir kuvvet kanunu ilişkisi olduğu varsayımını ele alalım.

Teorinin incelenmesinde, etki denkleminde eklenecek fonksiyon formatı olarak,

$$f(\mathcal{G}, T) = \alpha f_1(\mathcal{G}) + \beta f_2(T) \quad (5.80)$$

şeklinde, Gauss-Bonnet terimine bağlı ve enerji-momentum tensörü izine bağlı iki ayrı fonksiyondan oluşan bir yapı kullanılabilir. (Shamir, 2017) $f(\mathcal{G})$ teorisi için yapılan çalışmayla kıyaslanabilirlik için, Shamir'in 2017 yılında yayınlanan ve f_1 fonksiyonu olarak,

$$f_1(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^{m+1} \quad (5.81)$$

yapısının özel bir şekli olan,

$$f_1(\mathcal{G}) = \sqrt{\mathcal{G}} \quad (5.82)$$

halini ele aldığı çalışmasını inceleyeceğiz. Bu çalışmasında Farasat Shamir, enerji momentum tensörü izine bağlı olan, $f_2(T)$ fonksiyonu için ise, iki olası durum ele almıştır.

a. $f_2(T) = T$ Modeli

Bu modelde, etki denkleminde fonksiyonu,

$$f(\mathcal{G}, T) = \sqrt{\mathcal{G}} + T \quad (5.83)$$

olacaktır. Eğer, (5.79) ve (5.83) denklemleri, (5.76), (5.77) ve (5.78) alan denklemleri üzerine uygulanırsa, evrenin enerji yoğunluğunun ve basıncın zamana göre değişimleri,

$$\rho = \frac{1}{t^4(m+1)(n+2)^3k^2(k^2+1)} \left[t^2(m+1)(k^2-1)(2n^2+5n+2) - 8 \left(\frac{-16n}{t^4(n+2)^3} \right)^m (4m^3(n+2) + m^2(n^2+10n-6k^2n+12) + m(n^2+7n-5k^2n+4)) \right] - \frac{T}{2k^2} \quad (5.84)$$

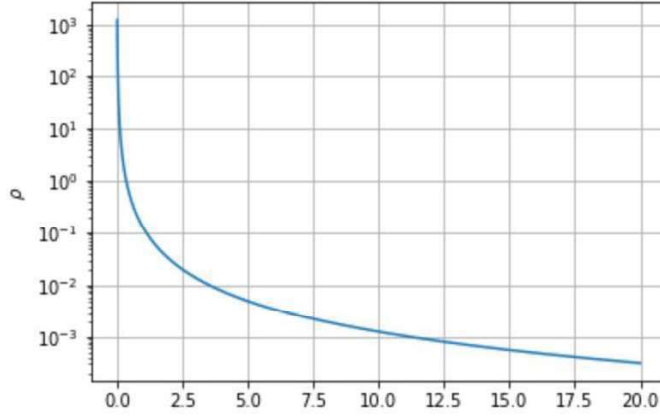
$$p = \frac{1}{t^4(m+1)(n+2)^3k^2} \left[t^2(m+1)(2n^2+5n+2) + 8 \left(\frac{-16}{t^4(n+2)^3} \right)^m (4m^3(n+2) + m^2(n^2+10n-6k^2n+12) + m(n^2+7n-5k^2n+4)) \right] - \frac{T}{2k^2} \quad (5.85)$$

formunda elde edilir. (Shamir, 2017) Eğer (5.84) ve (5.85) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa, basınç ve enerji yoğunluğunun toplam davranışı

$$\rho + p = \frac{2t^2(2n^2+5n+2) + 8 \left(\frac{-16n}{t^4(n+2)^3} \right)^m (4m^2(n+2) + m^2(n^2+12n+4))}{t^4(n+2)^3(k^2+1)} \quad (5.86)$$

şeklinde ortaya çıkar. (Shamir, 2017) Burada önemli bir nokta, diğer teorilerden farklı olarak, yoğunluk parametresinin, zaman dışında, enerji momentum tensörünün izine de bağlı olmasıdır. Bu durumda, kullanılacak her bir hal denklemine göre farklı bir yoğunluk davranışı ortaya çıkacaktır.

$f(\mathcal{G}, T) = \sqrt{\mathcal{G}} + T$ fonksiyonu kullanılarak ve $p=0$ ve $\kappa=1$ kabulü altında, enerji yoğunluğunun zamana göre değişimi, Şekil 5.4'te görülebilir. Beklendiği şekilde, yoğunluğun zamanla azaldığı şekilden görülmektedir. Ancak $t=0$ anındaki tekillik burada da mevcuttur.



Şekil 5.4- LSR Bianchi Tip-I evreni için, $f(G, T)$ ve kuvvet kanunu ile toz evren ($p=0$) kabulü altında yapılan çözüm için yoğunluğun zamana göre değişimi.

b. $f_2(T) = T + \mu T^2$ Modeli

İncelemiş olduğumuz (5.83) formundaki $f(G, T)$ fonksiyonu için farklı bir seçenek olarak ise μ keyfi bir sabit olmak üzere,

$$f(G, T) = \sqrt{G} + T + \mu T^2 \quad (5.87)$$

şeklinde enerji momentum tensörünün izinin ikinci seviyeden terimini içeren bir fonksiyon da önerilmiştir. (Shamir, 2017) Eğer bu model, (5.76), (5.77) ve (5.78) alan denklemlerine uygulanırsa, yoğunluk ve basınç toplamı için,

$$(\rho + p)(1 + \kappa^2 + 2\mu\rho - 6\mu p) = \frac{2}{t^4(n+2)^3} \left[t^2(2n^2 + 5n + 2) + 8 \left(\frac{-16n}{t^4(n+2)^3} \right)^m (2m^2(n^2 + 3n + 2) + m(n^2 + 7n + 2)) \right] \quad (5.88)$$

elde edilir. Hal denklemleri parametresi $p=\omega\rho$ olduğu göz önüne alınır,

$$2\mu(1 - 2\omega - 3\omega^2)\rho^2 + (1 + \kappa^2)(1 + \omega)\rho - \frac{2}{t^4(n+2)^3} \left[t^2(2n^2 + 5n + 2) + 8 \left(\frac{-16n}{t^4(n+2)^3} \right)^m (2m^2(n^2 + 3n + 2) + m(n^2 + 7n + 2)) \right] = 0 \quad (5.89)$$

olduğu görülebilir. (Shamir, 2017) Elde edilen (5.89) eşitliği kullanılarak, farklı hal denklemi parametreleri için evrenin davranışını analiz etmek mümkündür.

- $\omega = 0$ (Toz Evren)

Bu durumda, evrenin yoğunluk değişimi,

$$\rho = \frac{-(1+\kappa^2) \pm \sqrt{(1+\kappa^2)^2 + 4l}}{2\mu} \quad (5.90)$$

olarak verilmiştir. (Shamir, 2017) Bu eşitlikte,

$$l \equiv \frac{2}{t^4(n+2)^3} \left[t^2(2n^2 + 5n + 2) + 8 \left(\frac{-16n}{t^4(n+2)^3} \right)^m (2m^2(n^2 + 3n + 2) + m(n^2 + 7n + 2)) \right] \quad (5.91)$$

olarak tanımlanmıştır. Yoğunluk parametresinin farklı n değerlerine göre ve (5.90) eşitliğinin her iki kökü için de davranışı Şekil 5.5'te görülebilir. İlk kök (5.5.a), pozitif bir enerji yoğunluğu vermekle birlikte zamanla sifıra yakınsamaktadır. İkinci kök (5.5.b) ise, ileri dönemde enerji yoğunluğu negatif değerlere ulaştığı için gerçekçi bir davranış sergilememektedir.

- $\omega = 1/4$ (Rölativistik olmayan akışkan)

Bu kabul altında, evrenin yoğunluk değişimi,

$$\rho = \frac{-10(1+\kappa^2) \pm 2\sqrt{25(1+\kappa^2)^2 + 20l}}{5\mu} \quad (5.92)$$

olarak verilmiştir. (Shamir, 2017) Bu şekildeki evrenin davranışı Şekil 5.6'da görülebilir. Bu durumda ilk kök (5.6.a), pozitif bir enerji yoğunluğu vermekte ve toz durumdakine benzer bir limit davranışı sergilemektedir. Ancak ikinci kök (5.6.b) negatif enerji yoğunluğu vermektedir ki bu da negatif basınca karşılık gelmektedir. Karanlık enerjinin negatif basınçlı olduğu düşünüldüğünden bu sonuç ilginçtir.

- $\omega = 1/3$ (Işınım)

Bu koşulda çözüm yapıldığında, evrenin yoğunluk değişimi,

$$\rho = \frac{-3l}{4(1+\kappa^2)} \quad (5.93)$$

olacaktır. (Shamir, 2017) Bu şekildeki evrenin davranışı Şekil 5.7’de görülebilir.

- $\omega = 1/2$ (Ultra-Rölativistik akışkan)

Bu kabul altında, evrenin yoğunluk değişimi,

$$\rho = \frac{3(1+\kappa^2) \pm \sqrt{25(1+\kappa^2)^2 - 12l}}{3\mu} \quad (5.94)$$

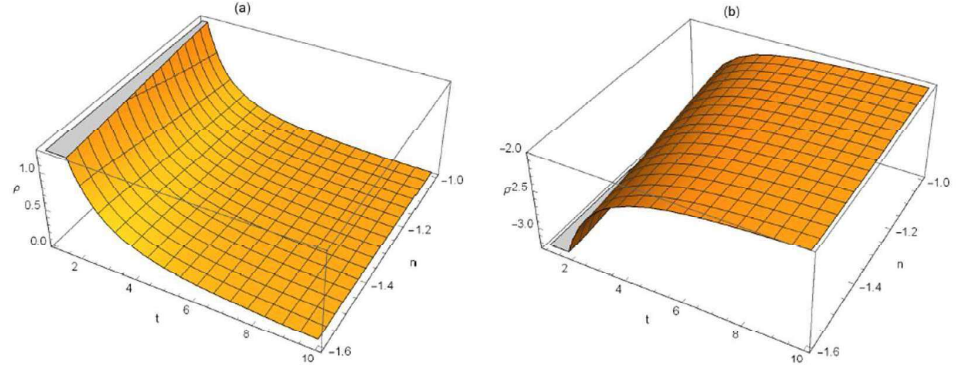
olarak verilmiştir. (Shamir, 2017) Bu şekildeki evrenin davranışı Şekil 5.8’de görülebilir. Burada her iki kök de pozitif değerler vermekle birlikte ilk kök (5.8.a) zamanla azalan bir davranış gösterirken, ikinci kök (5.8.b) artma eğilimindedir.

- $\omega = 1$ (Stiff)

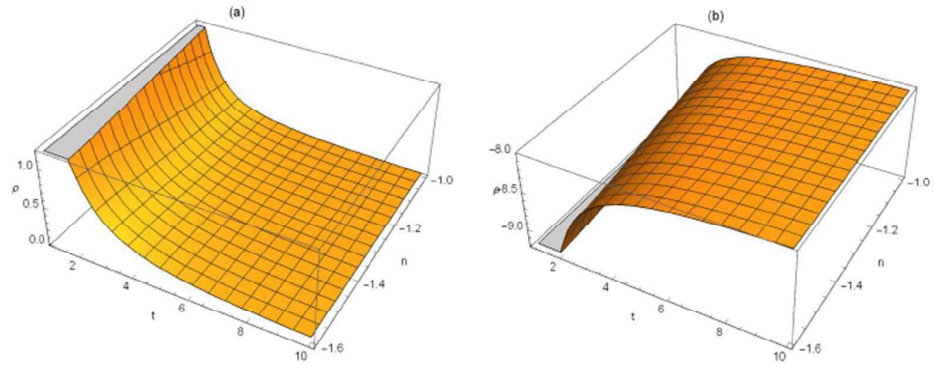
Bu kabul altında, evrenin yoğunluk değişimi,

$$\rho = \frac{(1+\kappa^2) \pm \sqrt{(1+\kappa^2)^2 - 4l}}{4\mu} \quad (5.94)$$

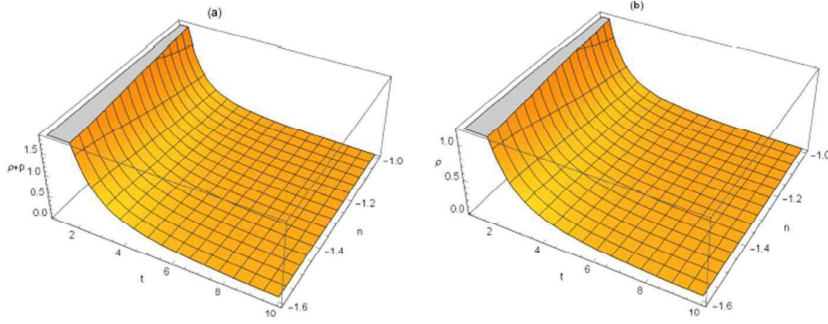
olacaktır. (Shamir, 2017) Bu şekildeki evrenin davranışı Şekil 5.9’da görülebilir.



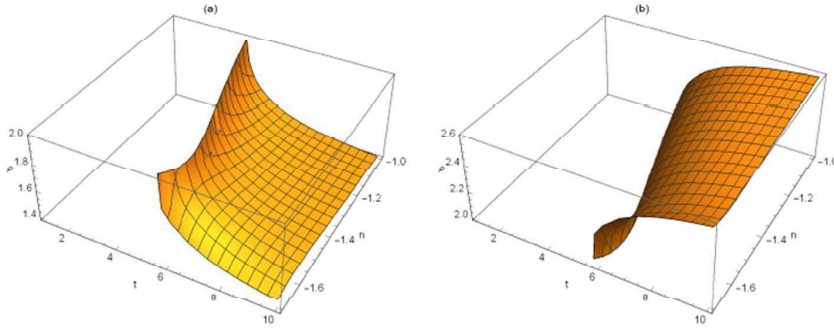
Şekil 5.5- $\omega = 0$ için yoğunluğun davranışı. (Shamir, 2017)



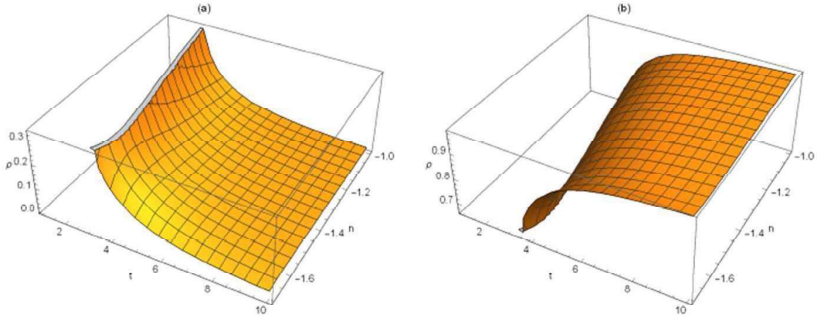
Şekil 5.6- $\omega = 1/4$ için yoğunluğun davranışı. (Shamir, 2017)



Şekil 5.7- $\omega = 1/3$ için yoğunluğun davranışı. (Shamir, 2017)



Şekil 5.8- $\omega = 1/2$ için yoğunluğun davranışı. (Shamir, 2017)



Şekil 5.9- $\omega = 1$ için yoğunluğun davranışı. (Shamir, 2017)

Diğer kozmolojik parametreler (θ , σ , V) ise, LRS Bianchi Tip I metriğini benzer kabuller altında incelediğimiz için, daha öncekilerle aynı olacaktır. (Shamir, 2017)

Yine diğer teorilerde olduğu gibi bir $t=0$ tekilliğine bu teoride de rastlandığı görülmektedir.

5.3. Çözümlerin Karşılaştırılması

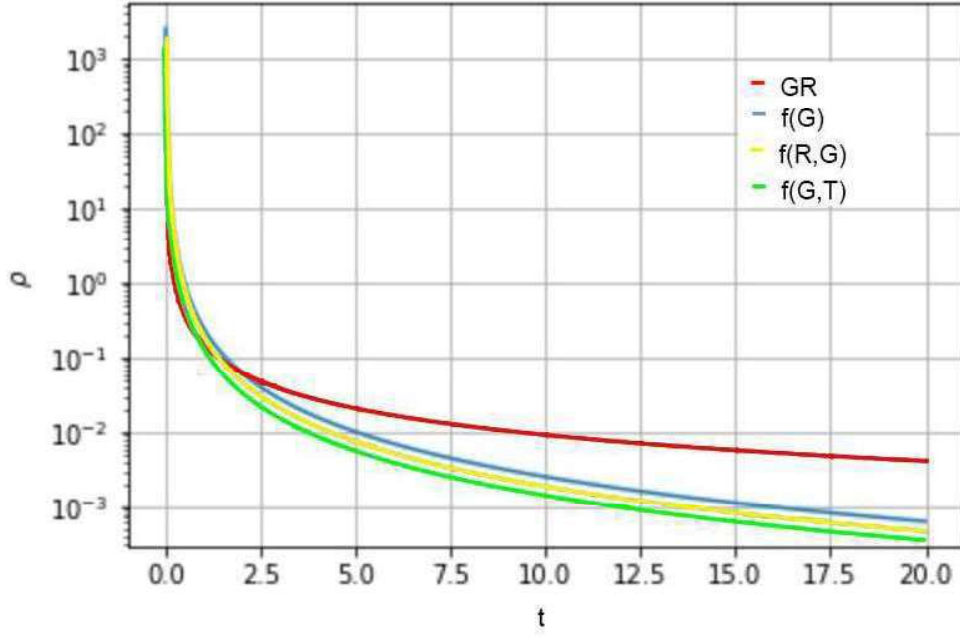
LRS Bianchi Tip I metriği kullanılarak yapılan modellemelerde, anizotropi parametresi değerinin zamanla azalarak izotropik evrene yakınsadığı görülmektedir. Bu da günümüzde gözlemlenen izotropi durumunu, hassas bir başlangıç değeri gerektirmeksizin açıklayabilmemizi sağlamaktadır.

Yaptığımız kabuller altında, LRS Bianchi Tip I metriğinden oluşturulan ve evrenin genişleme hızının ivmesini veren q parametresi, kabulde seçilecek keyfi sabitlere göre belirlenmektedir. Geç dönem ivmelenerek hızlanma aşamasını sağlayabilmek için bu sabitlerin uygun şekilde seçilmesi ve negatif q değerleri elde edilmesi mümkündür.

Ayrıca, Ricci skaleri (R) ve Gauss-Bonnet değişmezi (G) değerlerinin sırasıyla zamanın karesi ve dördüncü kuvveti ile ters ilişkili olduğu görülmektedir. Bu da geç dönemde her iki skalerin de etkisini yitireceğini ancak özellikle Gauss-Bonnet değişmezi için etki yitiminin çok daha hızlı olacağını göstermektedir.

İncelediğimiz her üç kütle çekim teorisi için yoğunluk değerinin ise, genel görelilik ile benzer bir değişim gösterdiğini görmekteyiz. Ancak her üç teori için de yoğunluğun düşüşü, GR'ye göre daha hızlı gerçekleşmiş ve buna bağlı olarak geç dönemde beklenen yoğunluk değerleri de GR için beklenen değerlerin altında kalmıştır. (Şekil 5.10)

Teorilerin bu noktada birbirleriyle değersel farklılıklarını test edebilmek için, hassas gözlemlere ihtiyaç bulunmaktadır. Ayrıca yapmış olduğumuz kabullerin geçerliliğinin de test edilmesi gereklidir.



Şekil 5.10- Genel görelilik (Kırmızı), $f(G)$ (Mavi), $f(R,G)$ (Sarı) ve $f(G,T)$ (Yeşil) kütle çekim teorileri için yoğunluk parametresinin zamana göre değişimi. Her dört durumda da ele aldığımız kabuller altında değişimin benzer bir eğilim gösterdiği görülmektedir, ancak her üç teoride de düşüşün, GR'ye göre daha hızlıdır ve geç dönemde beklenen yoğunluk değerlerinin daha düşük seviyelere inmesi beklenmektedir.

6. SONUÇ

Bu tez kapsamında, günümüzde en geçerli kütle çekim teorisi olan genel görelilik teorisine alternatif genişletilmiş kütle çekim teorilerinden $f(G)$, $f(R,G)$ ve $f(G,T)$ teorileri incelenmiş ve bunların Bianchi Tip I evreninde örnek birer uygulamaları yapılmıştır.

Bu kapsamda, Bölüm 2’de kütle genel görelilik teorisi ve teoriye ait alan denklemlerinin en küçük etki prensibi yardımı ile elde edilişi incelenmiş, teorinin başarıyla açıkladığı Merkür’ün yörüngesindeki kayma ve daha sonra gözlemsel olarak onaylanan öngörülleri, ışığın kütle çekimi ile eğri bir yol izlemesi, kütle çekimsel kırmızıya kayma, kütle çekim dalgalarından bahsedilmiştir. Daha sonra ise, standart kozmolojik model adı verilen ve günümüzde yaygın biçimde kabul gören kozmolojik modelin oluşumu gösterilmiştir. Bu modelin yaşadığı sorunlar ve sorunlara çözüm olabilmesi için getirilen enflasyon, karanlık enerji gibi eklentiler incelenmiştir.

3. Bölümde, genel göreliliğin eksik yanlarını gidermek amaçlı öne sürülen alternatif teorilerden genel olarak bahsedilmiştir. Bu teorilere ait etki integralleri ve alan denklemleri gösterilmiş, her birinin avantajlı yanlarından bahsedilmiştir.

Bölüm 4’te, bu çalışmanın ana konusu olan, Gauss-Bonnet değişiminin çeşitli fonksiyonlarını içeren $f(G)$, $f(R,G)$ ve $f(G,T)$ kütle çekim teorileri incelenmiştir. Bu teorilere ait etki integralleri listelenmiş, en küçük etki prensibi yardımı ile her birinin alan denklemlerinin çıkarılışı gösterilmiştir.

Bölüm 5’te ise, genel görelilik ve 4. Bölüm’de incelenen $f(G)$, $f(R,G)$ ve $f(G,T)$ teorilerinin LRS Bianchi Tip I metriği kullanılarak uygulanması yapılmıştır. Karşılaştırmaların yapılabilmesi için genel görelilik uygulamasında (Tade and Sambhe, 2012), $f(G)$ teorisi uygulamasında (Shamir, 2016), $f(R,G)$ teorisi uygulamasında (Shamir and Kanwal, 2017), ve $f(G,T)$ teorisi uygulamasında ise (Shamir, 2017) çalışmaları temel alınmıştır.

Bianchi Tip I evreninde, kuvvet kanunu kullanılarak incelenen teorilerin hacim ölçek faktörü, burulma parametresi ve ölçek skalerinin oranı, sadece kullanılan metrik ölçek katsayılarına bağlıdır. Teorileri karşılaştırmak için benzer kabuller altında çalışılmış ve dolayısıyla bu parametrelerin değişimleri aynı olmuştur. Kullanılan kütle

çekim teorisine ve alan denklemlerine bağlı olarak ortaya çıkan yoğunluk parametresinin zaman içerisindeki değişimleri her bir teori için grafiklendirilmiştir.

Yine uygun kabullerin yapılması halinde, ivmelenme parametresi (q) değerinin negatif olabileceği ve karanlık enerji içermeksizin, karanlık enerjili standart kozmolojik model ile benzer sonuçlar vereceği ve gözlemlerle uyumlu olabileceği görülmüştür.

Ancak gerek genel görelilikte, gerekse diğer incelenen teorilerde $t=0$ anında bir teklik olduğu gözlenmektedir. Bu da bu teorilerin tamamının gelişmeye açık olduklarını ve tam olmadıklarını gösterir.

Ayrıca bu teoriler ile ortaya çıkan alan denklemlerinin, genel göreliliğe kıyasla çok daha karmaşık ve çözümü zor olduğu da bir gerçektir. Yüksek seviyeli diferansiyel denklemler içeren bu denklemlerin, tercih edilebilir hale gelmesi için, genel görelilik ile farklılık gösterdikleri noktalar incelenmeli ve gözlemler ile desteklenmeleri gerekmektedir.

Henüz genel görelilik dahil, elimizde bulunan hiçbir teorisinin kütle çekimini her aşamada açıklayamadığını görmekteyiz. Tüm teoriler çeşitli teklikler içermekte ve özellikle plank boyutu altı çok küçük ölçeklerde kütle çekiminin nasıl davranacağı konusunda açıklama getirememektedirler.

Ancak, genişletilmiş kütle çekim teorilerinin çalışılması ve olası evren çözümlerine ait parametrelerin tespit edilmesi, gözlemlerin doğru yorumlanması ve gerçek evrenin olası anizotropisi gibi değerlerin üst sınırlarının belirlenmesi açısından önemlidir.

Teorik alandaki gelişmeler ve gözlemlerdeki belirsizliklerin teknolojinin ilerlemesi ile giderek azalması sayesinde nihai bir kütle çekim teorisine ulaşılması mümkün olabilecektir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Abbott B.P. et al., 2016, Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Phys. Rev. Lett. 116, 061102

Andoniadis I., Rizos J. and Tamvakis K. , 1994, Nucl. Phys. B 415,497

Andoniadis I., Gava E. and Narain K.S. , 1992, Nucl. Phys. B 383,93

Avilez A., Skordis C., 2013, Cosmological constraints on Brans–Dicke theory. arXiv:1303.4330

Bamba K., Ilyas M., Bhatti M. Z. and Yousaf Z., 2017, Energy conditions in modified $f(G)$ gravity, General Relativity and Gravitation volume 49, Article number: 112

Baumann, 2017, Cosmology Lecure Notes, University of Amsterdam, <http://cosmology.amsterdam/education/cosmology/>, Erişim tarihi : 19.03.2020

Benetti M., da Costa S.S., Capozziello S., Jailson S. A. and De Laurentis M., 2018, Observational constraints on Gauss–Bonnet cosmology, International Journal of Modern Physics DVol. 27, No. 08, 1850084, 2018

Bertotti B., Iess, L. and Tortora P., 2003, A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft. Nature 425, 374–376 (2003). <https://doi.org/10.1038/nature01997>

Bhat N.D.R., Bailes M., and Verbiest J.P.W., 2008, Gravitational-radiation losses from the pulsar–white-dwarf binary PSR J1141–6545, Phys. Rev. D 77, 124017 – Published 12 June 2008

Bianchi, L., 1898, Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti, Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze, Serie Terza, 11

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Bianchi, L., 1918, Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni. Pisa: E. Spoerri. OCLC 4383253.

Bolton A.S., Rappaport S., and Burles S., 2006, Constraint on the post-Newtonian parameter γ on galactic size scales, Phys. Rev. D 74, 061501@

Bondi H., Samuel J., 1996, The Lense–Thirring Effect and Mach's Principle, Physics Letters A. 228 (3): 121–126. arXiv:gr-qc/9607009. Bibcode:1997PhLA..228..121B. doi:10.1016/S0375-9601(97)00117-5

Brans C. and Dicke H.R., 1961, Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation, Physical Review, Volume 124, Number 3

Breton et al., 2008, Relativistic Spin Precession in the Double Pulsar, Science, Vol. 321, Issue 5885, pp. 104-107

Bunch T.S., 1981, J. Phys. A: Math. Gen. 14, L139

Camenzind M., 2007, Compact Objects in Astrophysics, Springer Press, ISBN 978-3-540-25770-7

Carroll S.M. 1997, Lecture notes on general relativity, University of California, Oakland

Clifford M.W., 2015, Was Einstein Right? A Centenary Assessment, Clifford M. Will, Cambridge University Press, <https://doi.org/10.1017/CBO9781139583961.004>

Cognola G., Elizade E., Nojiri S., Odintsov S.D. and Zerbini S., 2006, Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem, Physical Review, D73, 084007

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Cognola G., Elizalde E., Nojiri S., Odintsov S.D., Zerbini S., 2006, Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem, Phys. Rev. D 73, 084007 – Published 6 April 2006

Coles P. and Lucchin F., 2002, Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure, John Wiley and Sons Ltd., ISBN 0 471 48909 3

Cruz-Dombriz Á. and Sáez-Gómez D., 2012, On the stability of the cosmological solutions in $f(R, G)$ gravity, Classical and Quantum Gravity, Volume 29, Number 24

Costa S, Roig F.V, Alcaniz J.S., Capozziello S., Laurentis M. and Benetti M., 2018, Dynamical analysis on $f(R, G)$ cosmology, Classical and Quantum Gravity, Volume 35, Number 7

Einstein, A., 1915, Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from the General Theory of Relativity

Einstein, A., 1917, Sitzungsber. K. Akad. 6:142

The Event Horizon Telescope Collaboration, 2019, First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole, The American Astronomical Society.

Faroni V., and Capozziello S., 2011, Beyond Einstein Gravity, Springer, 450p.

Felice A. and Tsujikawa S., 2009, Solar system constraints on $f(G)$ gravity models, Physical Review D, 80, 063516

Felice A. and Tsujikawa S., 2009, Construction of cosmologically viable $f(G)$ gravity models, Physics Letters B, 675

Feng Y. and Hou L., 2020, Approximate solutions of the LRS Bianchi Type-I cosmological model, Basel, Vol 12, Iss. 3, DOI: 10.3390/sym12030403

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Feynman R., 1977, The Feynman Lectures on Physics: Volume 2 ,Addison-Wesley (February 1, 1977) ,ISBN 978-0201021172

Frieman J.A., Turner M.S. and Huterer D., 2008, Dark Energy and the Accelerating Universe, Annual Review of Astronomy and Astrophysics, Vol. 46:385-432

Génova-Santos R.T., 2020, The establishment of the Standard Cosmological Model through observations, arXiv:2001.08297

Gravity Colloboration, 2020, Detection of the Schwarzschild precession in the orbit of the star S2 near the Galactic centre massive black hole, A&A Volume 636, April 2020,<https://doi.org/10.1051/0004-6361/202037813>,

Grøn Ø., Hervik S., 2007, Einstein's General Theory of Relativity – With Modern Applications in Cosmology, Springer, 2007, ISBN-13: 978-0-387-69199-2

Guth A., 1981, Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems, Phys. Rev. D 23

Harko et al., 2011, $f(R,T)$ Gravity, Phys. Rev. D 84,024020

Hartle J., 2003, Gravity – An Introduction to Einstein's General Relativity, Pearson Education Inc, 2003, ISBN 0-8053-8662-9

Hu W. and Sawicky I., 2007, Models of $f(R)$ Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests, Phy. Rev. D76 064004

Hubble E., 1929, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 15:168

Hubble Space Telescope Group, Riess A.G. , Casertano S., Yuan W., Macri L.M. and Scolnic D., 2019, Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics Beyond LambdaCDM, Astrophys J. 2019, 876, 85, 13 pp. (arXiv: 1903.07603)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Ilyas M., 2018, Charged compact stars in $f(G)$ gravity, The European Physical Journal C volume 78, Article number: 757

Kang Y., Lee Y.W., Kim Y., Chung C., and Ree C.H., 2020, Early-type Host Galaxies of Type Ia Supernovae. II. Evidence for Luminosity Evolution in Supernova Cosmology, The Astrophysical Journal, Volume 889, Number 1,

Keskin A.İ., 2015, Genişletilmiş Gauss-Bonnet Kuramında Kozmolojik Genişleme Problemi ve Entropinin Doğası, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

Keskin A.İ., 2018, Coexistence of early-time inflation and late-time acceleration with scalar fields in theory of $f(G,T)$ gravity, International Journal of Modern Physics DVol. 27, No. 08, 1850078 (2018), <https://doi.org/10.1142/S0218271818500785>, 2018

Kofinas G. and Tsoukalas M., 2016, On the action of the complete Brans–Dicke theory. Eur. Phys. J. C 76, 686 (2016). <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-016-4505>

Landau L.D. and Lifshitz E.M., 1975, Course of Theoretical Physics, Volume 2, The Classical Theory of Fields, Forth Revised English Edition, 1975, Butterword-Heinemann Publishing, ISBN 978-0750627689

Laurentis M., Paoletta M., and Capozziello S., 2015, Cosmological inflation in $f(R,G)$ gravity, Phys. Rev. D 91, 083531

Le Verrier U.J., 2859,, Annales de l’Observatoire de Paris 5, 1

Leea S. and Tumurtushaa G., 2020, The viable $f(G)$ gravity models via reconstruction from the observations, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, Volume 2020

Liddle A., 2015, An Introduction to Modern Cosmology 3rd Edition, John Wiley and Sons.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Newton I., Bentley'e Mektuplar, 1692/3 - www.newtonproject.ox.ac.uk/THEM00258, October 2007

Nojiri S., Odintsov S.D. and Sasaki M., 2005, Gauss-Bonnet dark energy, Physical Review D 71, 123509

Nojiri S., Odintsov S.D., and Oikonomou V.K., 2017, Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution, Physics Reports, Volume 692, 2 June 2017, Pages 1-104

Nojiri S. and Odintsov S.D., 2005, Modified Gauss-Bonnet theory as gravitational alternative to dark energy, Physics Letters B 631, 1-6

Odintsov S.D., Oikonomou V.K. and Banerjee S., 2018, Dynamics of Inflation and dark energy from $f(G)$ gravity, Science Direct Nuclear Physics B, Volume 938, January 2019, Pages 935-95, <https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2018.07.013>

Oikonomou V.K., 2018, Exponential Inflation with $f(R)$ Gravity, Phys. Rev. D 97, 064001

Perlmutter et al., 1999, Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae, The Astrophysical Journal, Volume 517, Number 2

Planck Collaboration, Aghanim N. et al., 2018, Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. (arXiv: 1807.06209)

Plebanski J. and Krasinski A., 2006, An Introduction to General Relativity and Cosmology, Cambridge University Press, 2006, ISBN-13 978-0-521-85623-2

Plebanski J. and Krasinski A., 2006, An Introduction to General Relativity and Cosmology, Cambridge University Press, ISBN-13: 978-0-511-24125-3

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Riess et al., 1998, Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, The Astronomical Journal, Volume 116, Number 3

Rodrigues M.E. and Silva M.V.S., 2018, Regular black holes in $f(G)$ gravity, The European Physical Journal C volume 78, Article number: 638 (2018), 2018

Rodrigues M.E. and Silva M.V.S., 2019, Regular multihorizon black holes in $f(G)$ gravity with nonlinear electrodynamics, Phys. Rev. D 99, 124010 – Published 10 June 2019

Roos M., 2003, Introduction to Cosmology, Wiley Publishing, ISBN 0 470 84909 6

Rubin V. C., Ford W. K. Jr., and Thonnard N., 1980, Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 ($R=4\text{kpc}$) to UGC 2885 ($R=122\text{kpc}$), ApJ, 238, 471

Ruggerio M.L. and Iorio L., 2006, Solar System Planetary Orbital Motions and $f(R)$ Theories of Gravity, JCAP 0701:010

Saba S., and Sharif M., 2019, New agegraphic dark energy in $f(G, T)$ gravity, Chinese Journal of Physics, Volume 59, June 2019, Pages 393-409

Schneider P., 2015, Extragalactic Astronomy and Cosmology – An introduction, 2015, Springer publishing, ISBN 978-3-642-54083-7

Shamir M.F., and Naz T., 2020, Stellar structures in $f(G)$ gravity with Tolman–Kuchowicz spacetime, <https://doi.org/10.1016/j.dark.2020.100472>, Physics of the Dark Universe Volume 27, January 2020, 100472, 2020

Shamir M.F., 2016, Anisotropic cosmological models in $f(G)$ gravity, Astrophysics and Space Science volume 361, Article number: 147 (2016)

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Shamir M.F., 2017, Anisotropic Universe in $f(G,T)$ Gravity, Advances in High Energy Physics, Volume 2017 , Article ID 6378904, 2017

Shamir M.F., and Komal A., 2017, Energy bounds in $f(R,G)$ gravity with anisotropic background, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 14, No. 12, 1750169 (2017)

Shamir M.F., and Kanwal F., 2017, Noether symmetry analysis of anisotropic universe in modified gravity, Eur. Phys. J. C (2017) 77:286, DOI 10.1140/epjc/s10052-017-4869-7

Shamir M.F., and Naz T., 2020, Stellar structures in $f(G)$ gravity admitting Noether symmetries, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135519>, Physics Letters B, Volume 806, 10 July 2020, 135519, 2020

Sharif M., and Ahmad M., 2019, Stellar Hydrostatic Equilibrium Compact Structures in $f(G,T)$ Gravity, Mod. Phys. Lett. A 34(05), 1950038

Sharif M., and Ikram A., 2016, Energy conditions in $f(G,T)$ gravity, The European Physical Journal C, 76:640, DOI 10.1140/epjc/s10052-016-4502-1

Sharif M., and Ikram A., 2017, Stability analysis of Einstein universe in $f(G,T)$ Gravity, International Journal of Modern Physics D Vol. 26, No. 08, 1750084 (2017), 2017

Sotirou T., 2007, Modified Actions for Gravity: Theory and Phenomenology, PhD Thesis, ArXiv:0710.4438

Sporea C.A., 2014, Notes on $f(R)$ Theories of Gravity, arXiv:1403.3852 [gr-qc]

Tade S.D., and Sambhe M.M., 2012, Bianchi Type-I cosmological models for binary mixture of perfect fluid and dark energy, Astrphys Space Sci (2012) 338:179-185, DOI 10.1007/s10509-011-0910-8

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

Verma A.K., Fienga A., Laskar J., Manche H., and Gastineau M., 2014, Use of MESSENGER radioscience data to improve planetary ephemeris and to test general relativity, A&A, Volume 561

Wald R.M., 1984, General Relativity, University of Chicago Press, ISBN 0-226-87033-2

Will, C.M., 1981, Theory and Experiment in gravitational physics, Cambridge university press, ISBN:9780-5115-642-46

Yadav, A.K and Saha B., 2011, LRS Bianchi-I anisotropic cosmological model with dominance of dark energy, Astrophys Space Sci (2012) 337:759–765, DOI 10.1007/s10509-011-0861-0

Zwicky, F. 1933, Helvetica Physica Acta, 6, 110

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana yol gösteren ve eksik kaldığım noktalarda yardımını esirgemeyen danışmanım ve kıymetli hocam Prof. Dr. Can Battal Kılınç’a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, gerek bilimsel hazırlık senesinde, gerek sonrasında bana çok şey katan, tüm Ege Üniversitesi, Astronomi ve Uzay Bilimleri Bölümü akademik kadrosuna teşekkür ederim.

Son olarak, tekrar okula dönme kararında yanımda olan ve hayatım boyunca olduğu gibi destekleriyle moralimi yüksek tutan aileme ve özellikle annem Ayfer Önder ve babam Vural Önder’e tüm kalbimle teşekkür ederim.

21 / 12 / 2020

İmzası

Alper Böke ÖNDER

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

İsim – Soyisim	Alper Böke ÖNDER
----------------	------------------

EĞİTİM

2017- : Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Astrofizik Anabilimdalı
(Yüksek Lisans)

1991-2000 : İstanbul Teknik Üniversitesi, Makina Fakültesi, Tekstil Mühendisliği
(Lisans)

1988-1991 : Çorlu Lisesi (Tekirdağ)