

66412

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENEL BİÇİMLİ KALIN KABUKLAR İÇİN
ÜÇ BOYUTLU BİR SONLU ELEMAN**

DOKTORA TEZİ

Y. Müh. Nail KARA

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 7 Nisan 1997

Tezin Savunulduğu Tarih : 27 Haziran 1997

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Nahit KUMBASAR

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahmet Işın SAYGUN

Prof. Dr. Melike ALTAN

Prof. Dr. Gülay ALTAY

Prof. Dr. Cengiz KARAKOÇ

HAZİRAN 1997

ÖNSÖZ

İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim dalı Yapı Mühendisliği programında gerçekleştirilen bu doktora çalışmasında, genel biçimli ve genel yüklemeler etkisindeki kalın kabukların çözümü, sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak geliştirilen bir bilgisayar programı ile yapılmıştır.

Doktora öğrenciliğine başladığımda teveccüh gösterip danışmanlığı kabul eden, çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım hocam sayın Prof.Dr. Nahit KUMBASAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu süre içinde ilgi ve yardımlarını gördüğüm tüm öğretim üyelerine, özellikle sayın Prof.Dr. Zekai CELEP ve Doç.Dr. Tülay AKSU' ya ve bana destek olan tüm araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Y.Ö.K. kanununun 35. maddesi “Bir üniversite adına, bir başka üniversitede lisans üstü eğitim gören araştırma görevlileri hakkında yönetmelik “ hükümleri gereğince doktora eğitimi yapma imkanını sağlayan tüm ilgililere teşekkür ederim.

Tüm hayatım boyunca hiç bir fedakarlıktan kaçınmayarak bana her türlü maddi ve manevi desteği sağlayan aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

Nisan 1997

Nail KARA

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 Konu	1
1.2 Kabuk Teorisi ve üç Boyutlu Elastisite Teorisi ile Kabuk Çözümü Üzerine Yapılan Teorik Çalışmalar	1
1.3 Kabuklar Üzerine Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması ile İlgili Çalışmalar	2
1.4 Çalışmanın Amacı	4
BÖLÜM 2 EĞRİSEL ORTOGONAL KOORDİNATLARDA ELASTOSTATİĞİN TEMEL BAĞINTILARI	5
2.1 Varsayımlar	5
2.2 Eğrisel Ortogonal Koordinatlar	5
2.3 Yüzey Geometrisi	6
2.3.1 Yüzeyin I. ve II. ana formu	6
2.4 Şekil Değiştirme Bağintıları	9
2.5 Gerilme Şekil Değiştirme Bağintıları	11
BÖLÜM 3 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ	13
3.1 Giriş	13
3.2 Yer Değiştirme Yöntemi	13
3.3 Eleman Karakteristik Matrislerinin Formülasyonu	14
3.3.1 Yer değiştirme fonksiyonu	14
3.3.2 Şekil değiştirmeler	15
3.3.3 Düğüm noktası gerilmeleri	15
3.3.4 Eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri	15
3.3.5 Minimum toplam potansiyel enerji prensibi	16
BÖLÜM 4 GENEL BİÇİMLİ KALIN KABUKLAR İÇİN ÜÇ BOYUTLU İZOPARAMETRİK SONLU ELEMAN	20
4.1 Genel Açıklama	20
4.2 Kullanılan Sonlu Eleman Modeli	21
4.3 Üç Boyutlu Genel Sonlu Eleman Formülasyonu	24
4.3.1 Gerilmelerle şekil değiştirmeler arası bağıntılar	24
4.3.2 Şekil değiştirme yer değiştirme bağıntıları	24

4.4 Eleman Rijitlik Matrisinin Hesabı	26
4.5 Sistem Rijitlik Matrisinin Oluşturulması	27
4.6 Yükleme Matrisleri	28
4.6.1 Genel koordinatlarda verilen yüzey yayılı yükleri	28
4.6.2 Yerel koordinatlarda verilen yüzey yayılı yükleri	31
4.6.3 Hacımsal kuvvetler	31
4.6.4 Dış tekil kuvvetler	32
4.6.5 Yüklerin süperpozisyonu	33
BÖLÜM 5 SONLU ELEMANLARDA KABUK GEOMETRİK BÜYÜKLÜKLERİ	34
5.1 Biçim Fonksiyonlarının Koordinat Dönüşümünde Kullanılması	34
5.2 Kabuk Ana Formları ve Eğrilik Yarıçapları	35
5.3 Kabuk Geometrik Büyüklüklerinin Matris İşlemleri İle Elde Edilmesi	37
5.4 Jacobien Matris	39
5.5 Dönüşüm Matrisi	40
5.6 Kabuk Geometrik Büyüklüklerinin Hesabı için Örnek	41
BÖLÜM 6 BİLGİSAYAR PROGRAMI	44
6.1 Programın Yapısı ve Çalışma Düzeni	44
6.1.1 MENU alt programı	45
6.1.2 SİSTEM ana program parçası ve sistem alt programları	46
6.1.3 RİJİTLİK matrisi ana program parçası	47
6.1.4 YUK alt programı	49
6.1.5 DENKLEM alt programı	50
6.1.6 GERİLME alt programı	50
6.2 Bilgisayar Programının Kullanılması	51
6.2.1 DUGUM.DAT ve KOORD.DAT dosyaları	51
6.2.2 YUZEY.DAT dosyası	52
6.2.3 YUK.DAT dosyası	53
6.2.4 SONUÇ.DAT dosyası	54
BÖLÜM 7 SAYISAL ÖRNEKLER	55
7.1 Örnek 1	55
7.2 Örnek 2	56
7.3 Örnek 3	58
7.4 Örnek 4	60
7.5 Örnek 5	64
BÖLÜM 8 SONUÇLAR	70
KAYNAKLAR	73
ÖZGEÇMİŞ	77

SEMBOL LİSTESİ

x, y, z	: Kartezyen koordinatlar
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	: Kabuğun eğrisel koordinatları
ξ, η, ζ	: Eleman yerel koordinatları
$\vec{r}$	: Kabuk üzerindeki bir noktanın konum vektörü
$\vec{n}$	: Yüzeyin birim normal vektörü
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	: Kartezyen koordinatlarda birim vektörler
A_1, A_2, A_3	: Kabukta koordinat sisteminin Lamé' katsayıları
ds	: Kabuk üzerinde diferansiyel yay boyu
ds_1, ds_2, ds_3	: Kabuk üzerinde diferansiyel bir yayın eğrisel koordinatlar doğrultusundaki parametrik boyları
K_n	: Kabuk üzerinde herhangi bir yüzeyin eğriliği
R_1, R_2, R_3	: Kabuk eğrilik yarıçapları
$\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$	: Eleman düğüm noktalarındaki birim uzama şekil değiştirmeleri
$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}$	: Eleman düğüm noktalarındaki birim kayma şekil değiştirmeleri
u, v, w	: Düğüm noktalarının yerel koordinatlar doğrultusundaki yer değiştirmeleri
$\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$	: Eleman düğüm noktalarında ki normal gerilmeler
$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}$	: Eleman düğüm noktalarında ki kayma gerilmeleri
E, ν	: Elastisite modülü, Poisson oranı
$\{ \}$	: Vektör gösterimi
$[\]$	: Matris gösterimi
$[\]^T$	: Matris tranpozisi gösterimi

$[N]$	: Biçim fonksiyonları
$\{\delta\}$	: Düğüm noktası yer değiştirme vektörü
$[D]$	: Elastisite matrisi
$[B]$	: Yer değiştirme-şekil değiştirme matrisi
$[S]^e$	: Eleman gerilme matrisi
$[k]^e$	: Eleman rijitlik matrisi
$[K]$	: Sistem rijitlik matrisi
$\{D\}$	: Sistem düğüm noktaları deplasman vektörü
$[J]$	: Jacobien matris
$ J $	: Jacobien matrisin determinanı
$[T]$	: Dönüşüm matrisi
$\{F\}$	: Sistem yük vektörü
$\{p\}^e$	: Genel koordinatlarda etkiyen yayılı yüzey yüklerinin düğüm noktalarında ki şiddeti
$[f_p]$	: Genel koordinatlarda etkiyen yayılı yüzey yüklerinden oluşan eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri matrisi
$\{p_r\}^e$	: Yerel koordinatlarda etkiyen yayılı yüzey yüklerinin düğüm noktalarında ki şiddeti
$[f_r]$	: Yerel koordinatlarda etkiyen yayılı yüzey yüklerinden oluşan eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri matrisi
$[f_s]$	: Hacımsal yayılı yüklerden oluşan eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri matrisi
$[f]$	: Eleman toplam eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri matrisi
$\{f\}$	: Eleman toplam eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri vektörü
$\{\varepsilon\}$	: Eleman düğüm noktaları birim şekil değiştirme vektörü
$\{\sigma\}$	: Eleman düğüm noktaları gerilme vektörü
w_i	: Gauss sayısal integralinde ağırlık katsayıları

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil 2.1	Kabuk yüzeyleri ve eğrisel koordinatlar	7
Şekil 2.2	Eğrisel koordinatlarda noktanın yer değiştirmesi	9
Şekil 4.1	Üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik eğrisel sonlu eleman	21
Şekil 5.1	Küresel kabuk eleman	42
Şekil 6.1	KUMKA bilgisayar programı genel akış diyagramı	44
Şekil 6.2	MENU alt programı akış diyagramı	45
Şekil 6.3	SİSTEM ana program parçası akış diyagramı	46
Şekil 6.4	Sistem rijitlik matrisi oluşturulması akış diyagramı	48
Şekil 6.5	YUK alt programı akış diyagramı	49
Şekil 6.6	GERİLME alt programı akış diyagramı	50
Şekil 6.7	Yüzey numaraları ve yüzeyin düğüm noktaları dosyası	52
Şekil 7.1	Dış basınç etkisindeki silindirik halka	55
Şekil 7.2	İç basınç etkisindeki küresel kalın kabuk	57
Şekil 7.3	Karşılıklı tekil yükle yüklü silindirik kabuk	58
Şekil 7.4	Karşılıklı tekil yükle yüklü silindirik kabukta sonlu eleman ağı	59
Şekil 7.5	Tekil yükle yüklü dört kenarı ankastre silindirik kabuk	60
Şekil 7.6	Tekil yükle yüklü ankastre silindirik kabukta sonlu eleman ağı	61
Şekil 7.7	I-I kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri	61
Şekil 7.8	II-II kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri	61
Şekil 7.9	A-A kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri	62
Şekil 7.10	B-B kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri	62
Şekil 7.11	A-A kesitindeki σ_{11} , σ_{22} ve σ_{33} normal gerilmeleri	63
Şekil 7.12	Sabit iç basınç etkisindeki dönel simetrik kabuk ve sisteme ait sonlu eleman ağı	66
Şekil 7.13a	$x=2.5 h$, $z=0.80 h$ kesitinde σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı	67

Şekil 7.13b	$x=2.5 h, z=0.80 h$ kesitinde σ_{33} ve τ_{13} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı	67
Şekil 7.14a	$x=2.5 h, z=4.20 h$ kesitinde σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı	68
Şekil 7.14b	$x=2.5 h, z=4.20 h$ kesitinde σ_{33} ve τ_{13} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı	68
Şekil 7.15a	$x=2.5 h, z=4.40 h$ kesitinde σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı	69
Şekil 7.15b	$x=2.5 h, z=4.40 h$ kesitinde σ_{33} ve τ_{13} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı	69



TABLO LİSTESİ

Tablo 4.1 Üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik sonlu eleman biçim fonksiyonları ve türevleri	22
Tablo 4.2 Gauss integrasyon katsayıları	27
Tablo 5.1 Küresel kabuk elemanda kabuk geometrik büyüklükleri	43
Tablo 7.1 Dış basınç etkisindeki silindirik halka için elde edilen wE/pa ve σ/p değerleri ($b=2a$; $\nu=0.2$)	56
Tablo 7.2 İç basınç etkisindeki küresel kalın kabukta u_r , σ_r ve σ_θ değerleri	57
Tablo 7.3a 1. yüklemeğe ait maksimum wEh/p değerleri	59
Tablo 7.3b 2. yüklemeğe ait maksimum wEh/p değerleri	59

ÖZET

Kabuklar yapı sistemleri içinde gerek geometrisi, gerekse çözümü açısından karmaşık yapılardır. Klasik kabuk teorisi olarak adlandırılan çözüm yöntemleri kalınlığın, eğrilik yarıçapları yanında küçük mertebede olduğu ince kabuklar için geliştirilmiştir. Kalınlığın diğer boyutlar yanında büyük olduğu kemer barajlar, basınç odaları ve sığınak örtüsü gibi yapılarda kalınlık doğrultusunda ki birim şekil değiştirme ve kayma şekil değiştirmelerinin etkisi önemli olmakta, Kirchhoff-Love hipotezi kullanılarak yapılan çözümlerin yaklaşıklığı tartışılır olmaktadır.

Bu amaçla kalınlık doğrultusunda ki şekil değiştirmelerin değişimini seriye açarak bu etkileri dikkate alan çözümler geliştirilmişse de genel biçim ve yüklemeler için elverişli değildirler.

Bu çalışmada sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak genel biçimli ve genel yüklemeler etkisindeki kalın kabuklar için eğrisel ortogonal koordinatlarda, üç boyutlu elastisite teorisinden hareketle 20 düğüm noktalı izoparametrik eleman elde edilmiş, bu sonlu eleman kullanılarak değişik problemler çözülmüş ve sonuçlar irdelenmiştir.

Sekiz bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölümde konu ile ilgili çalışmalar gözden geçirilmiştir.

İkinci bölümde eğrisel ortogonal koordinatlarda elastostatikğin temel bağıntıları ve klasik kabuk teorisi ile benzeşim sağlamak amacıyla yüzey geometrisi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde sonlu elemanlar yönteminin tanımı yapıldıktan sonra en yaygın olarak kullanılan yerdeğiştirme yöntemi ile potansiyel enerjinin minimum olması koşulundan üç boyutlu elemanlar için rijitlik matrisi ve yük vektörünün elde edilmesi kısaca özetlenmiştir.

Dördüncü bölümde 20 düğüm noktalı izoparametrik eğrisel sonlu eleman ve bu elemana ait biçim fonksiyonları ile ortogonal olan eleman yerel koordinatlarında eleman rijitlik matrisi ve eşdeğer eleman düğüm noktası kuvvetleri sayısal integrasyon kullanılarak elde edilmiştir.

Beşinci bölümde yer değiştirme-şekil değiştirme matrisinin elde edilmesinde gerekli olan kabuk geometrik büyüklükleri ve türevleri biçim fonksiyonları ile elde edilmiş ve bulunan değerler analitik olarak bulunan değerlerle karşılaştırılmıştır.

Altıncı bölümde problemin çözümü için FORTRAN 77 kodlama dilinde geliştirilen bilgisayar programının genel akış diyagramları ve programın kullanımı ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Yedinci bölümde geliştirilen bilgisayar programı ile çeşitli kalın kabuk uygulamaları çözülmüş ve literatürdeki değerlerle karşılaştırma yapılmıştır.

Sekizinci bölümde bulunan sonuçlar irdelenmiş, sonuçların mühendislik uygulamaları açısından yeterli yaklaşıma sahip olduğu belirtilmiştir.

THREE - DIMENSIONAL FINITE ELEMENT FOR THICK SHELL OF GENERAL SHAPE

SUMMARY

Shells in structural systems are complex structures due to their geometry and also the hardness of their solutions. Method of solutions known as “classic shell theory” are generally developed for thin shells in which the thickness of the shell is negligible with respect to the radius of curvature of the shell. When the thickness of a shell gains importance in comparison with other dimensions as seen in arch dams, pressure wessels and shelter roofs, the effect of the unit deformations and the shear deformations along the thickness becomes important, leads the solutions based on the *Kirchoff-Love* to be disputable hypothesis.

Although some solution techniques which take into consideration the effect of these deformations by expanding them in series are devoloped, they are not convenient for general shape and loading.

In this study, a finite element formulation for the thick shells of general shape is obtained by using a twenty noded isoparemetric finite element and the three-dimensional theory of elaticity in orthogonal curvilinear coordinates.

Strain-Displacement Relations

Strain-displacement relations in orthogonal curvilinear coordinates are known in 3-D theory of elaticity^[16].

In this study, all the expressions will be obtained in the orthogonal curvilinear coordinates, since the system stiffness matrix and load vector are formed along the local coordinates.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{u_{,1}}{A_1} + \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_1 A_2} + \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_1 A_3} & \varepsilon_{12} &= \frac{u_{,2}}{A_2} + \frac{v_{,1}}{A_1} - \frac{A_{1,2} \cdot u}{A_1 A_2} - \frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1 A_2} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{v_{,2}}{A_2} + \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1 A_2} + \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_2 A_3} & \varepsilon_{23} &= \frac{v_{,3}}{A_3} + \frac{w_{,2}}{A_2} - \frac{A_{2,3} \cdot v}{A_2 A_3} - \frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2 A_3} \\
 \varepsilon_{33} &= \frac{w_{,3}}{A_3} + \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1 A_3} + \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2 A_3} & \varepsilon_{31} &= \frac{u_{,3}}{A_3} + \frac{w_{,1}}{A_1} - \frac{A_{1,3} \cdot u}{A_1 A_3} - \frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1 A_3}
 \end{aligned} \tag{1}$$

u, v, w are the displacements of the nodes along the local coordinates, where A_1, A_2, A_3 are the *Lame' coefficients*, calculated by the derivatives of the position vector through the local coordinates.

Formulation of the Isoparametric Finite Element

The 3-D, 20 nodes shell element seen in Fig.1 will be used. The coordinates of a point in the element can be expressed in terms of the local coordinates and cartesian coordinates of the nodes as,

$$[x \ y \ z] = \sum_{i=1}^{20} N_i (\xi \ \eta \ \zeta) [x_i \ y_i \ z_i] . \quad (2)$$

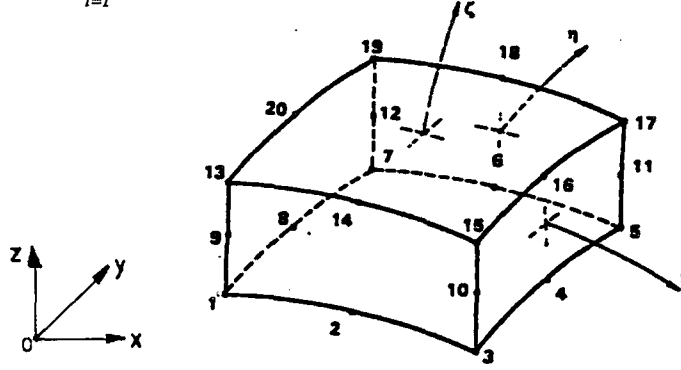


Figure 1 3-D 20 nodes isoparametric element

The shape function, N_i , here can be written in terms of quadratic functions as

$$\begin{aligned} \text{at corner nodes} \quad N_i &= 0.125(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0)(\xi_0 + \eta_0 + \zeta_0 - 2) \\ \text{at nodes of } \xi=0 \quad N_i &= 0.25(1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + \zeta_0) \\ \text{at nodes of } \eta=0 \quad N_i &= 0.25(1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + \zeta_0) \\ \text{at nodes of } \zeta=0 \quad N_i &= 0.25(1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(1 - \zeta^2) \end{aligned} \quad (3)$$

where $\xi_0 = \xi \xi_i$, $\eta_0 = \eta \eta_i$, $\zeta_0 = \zeta \zeta_i$.

In finite element solution, the displacement components u, v, w of each node along the curvilinear coordinates $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ are selected as degrees of freedom. In matrix form, the degrees of freedom are,

$$\{\delta^i\} = \begin{Bmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{Bmatrix} \quad \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \{\delta^{20}\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

and the displacement component of any point on the element are,

$$[u \ v \ w] = [N]_{(3 \times 60)} \{\delta\}^e \quad (5)$$

The strain may also be written in vector form.

$$\{\varepsilon\}_i^T = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{33} \ \gamma_{12} \ \gamma_{23} \ \gamma_{31}\} = \sum_{i=1}^{20} [B]_i \{\delta\} \quad (6)$$

Where, $[B]_i$ may be obtained in terms of shape functions by the use of strain-displacement submatrix given in (1).

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{N_{i,1}}{A_1} & \frac{A_{1,2} \cdot N_i}{A_1 A_2} & \frac{A_{1,3} \cdot N_i}{A_1 A_3} \\ \frac{A_{2,1} \cdot N_i}{A_1 A_2} & \frac{N_{i,2}}{A_2} & \frac{A_{2,3} \cdot N_i}{A_2 A_3} \\ \frac{A_{3,1} \cdot N_i}{A_1 A_3} & \frac{A_{3,2} \cdot N_i}{A_2 A_3} & \frac{N_{i,3}}{A_3} \\ -\frac{A_{1,2} \cdot N_i}{A_1 A_2} + \frac{N_{i,2}}{A_2} & -\frac{A_{2,1} \cdot N_i}{A_1 A_2} + \frac{N_{i,1}}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{A_{2,3} \cdot N_i}{A_2 A_3} + \frac{N_{i,3}}{A_3} & -\frac{A_{3,2} \cdot N_i}{A_2 A_3} + \frac{N_{i,2}}{A_2} \\ -\frac{A_{1,3} \cdot N_i}{A_1 A_3} + \frac{N_{i,3}}{A_3} & 0 & -\frac{A_{3,1} \cdot N_i}{A_1 A_3} + \frac{N_{i,1}}{A_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

In equation (7), 1,2,3 show the local coordinate directions of the element, through $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ respectively. The element stiffness matrix along local coordinates can be written by the use of (7) as,

$$[k_{ij}]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D] [B_j] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (8)$$

where $[D]$ is the 3-D elasticity matrix of order 6 by 6, $|J|$ is the determinant of Jacobien matrix. The integration can be made by the *Gauss-Legendre* numerical integration method.

Load Matrices

a) Surface loads in the global coordinate directions

The distributed loads, effecting the element surfaces can be given in the direction of global coordinates in the matrix form,

$$[p]^e = \begin{bmatrix} p_x^1 & p_y^1 & p_z^1 \\ p_x^2 & p_y^2 & p_z^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_x^{20} & p_y^{20} & p_z^{20} \end{bmatrix} \quad (9)$$

where P_x^i, P_y^i, P_z^i are the values of distributed load at i^{th} node along x, y, z global coordinate directions, respectively $[N]$ vector, consisting of shape functions can be written as,

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \dots N_{20}] \quad (10)$$

The equivalent nodal loads in the local coordinates determined from the surface distributed load in global coordinates can be found as,

$$[f_p] = \begin{bmatrix} f_{pu}^1 & f_{pv}^1 & f_{pw}^1 \\ f_{pu}^2 & f_{pv}^2 & f_{pw}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{pu}^{20} & f_{pv}^{20} & f_{pw}^{20} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] [p]^e [T] J |d\xi d\eta d\zeta \quad (11)$$

where, $[T]_{(3 \times 3)}$ is the transformation matrix.

Since the shape functions are three dimensional it is possible to obtain an approximate surface element if surface coordinates to which the loads effect are fixed while the node coordinates are brought very closer to the related surface in the moment of Jacobien matrix formation. Besides the nodes reaction components of the nodes other than the nodes of the loaded surface, can be transfered to the related nodes.

b) Surface loads in the local coordinate directions

The distributed loads, effecting the element surfaces can be given in the direction of local coordinates. If the distributed loads effecting the direction of local coordinates, $[P_r]^e$, are presented in matrix form similar to (9), then the equivalent nodal loads $[f_r]$ can be written as,

$$[f_r] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] [P_r]^e J |d\xi d\eta d\zeta \quad (12)$$

c) Voluminal loads

The nodal forces $[f_s]^e$ equivalent to the voluminal forces caused by the element self weight, can be calculated in the matrix form given below,

$$[f_s]^e = \begin{bmatrix} f_u^1 & f_v^1 & f_w^1 \\ f_u^2 & f_v^2 & f_w^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_u^{20} & f_v^{20} & f_w^{20} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 & N_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{20} & N_{20} & N_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} J |d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

where γ is density of the element and g is the acceleration of gravity.

d) Concentrated loads in the global coordinate directions

Load in the system nodes are assumed to be effecting to a related node of a neighbour node. The transformation is made in the related node of this element.

$$\{f_e^i\} = \begin{Bmatrix} f_{eu}^i \\ f_{ev}^i \\ f_{ew}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^i & T_{12}^i & T_{13}^i \\ T_{21}^i & T_{22}^i & T_{23}^i \\ T_{31}^i & T_{32}^i & T_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{ex}^i \\ f_{ey}^i \\ f_{ez}^i \end{Bmatrix} \quad (14)$$

The distributed surface loads effecting the element along global and local coordinates, voluminal distributed loads and the concentrated loads can be transferred to the places in the system load vector.

System stiffness matrix $[K]$ calculated along the element local coordinates and the system load vector $\{F\}$ form a linear equation system,

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (15)$$

From the solution of (15) the node displacement along the local coordinates $\{D\}$ can be found.

Nodal Stresses

The stresses at any point on the element can be calculated by the expressions below.

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_i^T &= \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31}\} \\ \{\sigma\}_i &= [D]\{\varepsilon\}_i = [D][B]_i\{\delta\}^e \end{aligned} \quad (16)$$

Geometric Properties of Shells in Finite Elements

The position vector $\vec{r}$ of any point on a shell defined in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ orthogonal curvilinear coordinates, can be written by the use of shape functions.

$$\vec{r} = \left(\sum N_i \cdot x_i\right)\vec{e}_1 + \left(\sum N_i \cdot y_i\right)\vec{e}_2 + \left(\sum N_i \cdot z_i\right)\vec{e}_3 \quad (17)$$

The first derivative of the position vector with respect to ξ, η, ζ can be obtained as follows.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{,1} &= \left(\sum N_{i,1} \cdot x_i\right)\vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,1} \cdot y_i\right)\vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,1} \cdot z_i\right)\vec{e}_3 \\ \vec{r}_{,2} &= \left(\sum N_{i,2} \cdot x_i\right)\vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,2} \cdot y_i\right)\vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,2} \cdot z_i\right)\vec{e}_3 \\ \vec{r}_{,3} &= \left(\sum N_{i,3} \cdot x_i\right)\vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,3} \cdot y_i\right)\vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,3} \cdot z_i\right)\vec{e}_3 \end{aligned} \quad (18)$$

The Lamé' coefficients A_1, A_2, A_3 which correspond to shell's local coordinates and the derivatives through any l directions can be determined as,

$$A_k = \sqrt{\left(\sum N_{i,k} \cdot x_i\right)^2 + \left(\sum N_{i,k} \cdot y_i\right)^2 + \left(\sum N_{i,k} \cdot z_i\right)^2} \quad (19)$$

$$A_{k,i} = \frac{1}{A_k} [(\sum N_{i,k} \cdot x_i)(\sum N_{i,kl} \cdot x_i) + (\sum N_{i,k} \cdot y_i)(\sum N_{i,kl} \cdot y_i) + (\sum N_{i,k} \cdot z_i)(\sum N_{i,kl} \cdot z_i)] \quad (20)$$

To obtain these values by matrix operations the node coordinate matrix $[KOOR]$ is presented as,

$$[KOOR] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{bmatrix}_{(20 \times 3)} \quad (21)$$

The matrices consisting of the first and second derivatives of shape functions can be formed numerically as,

$$[DER1] = \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & \cdots & N_{20,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & \cdots & N_{20,2} \\ N_{1,3} & N_{2,3} & N_{3,3} & \cdots & N_{20,3} \end{bmatrix}_{(3 \times 20)} \quad [DER2] = \begin{bmatrix} N_{1,11} & N_{2,11} & N_{3,11} & \cdots & N_{20,11} \\ N_{1,12} & N_{2,12} & N_{3,12} & \cdots & N_{20,12} \\ N_{1,13} & N_{2,13} & N_{3,13} & \cdots & N_{20,13} \\ N_{1,21} & N_{2,21} & N_{3,21} & \cdots & N_{20,21} \\ N_{1,22} & N_{2,22} & N_{3,22} & \cdots & N_{20,22} \\ N_{1,23} & N_{2,23} & N_{3,23} & \cdots & N_{20,23} \\ N_{1,31} & N_{2,31} & N_{3,31} & \cdots & N_{20,31} \\ N_{1,32} & N_{2,32} & N_{3,32} & \cdots & N_{20,32} \\ N_{1,33} & N_{2,33} & N_{3,33} & \cdots & N_{20,33} \end{bmatrix}_{(27 \times 20)} \quad (22)$$

If the matrix operations shown below are substituted in to the ones above, then,

$$\begin{aligned} [J] &= [DER1] [KOOR] \\ [L] &= [J] [J]^T \\ [DL] &= [DER2] [KOOR] [J]^T \end{aligned} \quad (23)$$

The Lamé' coefficients and their derivatives can then be calculated by the help of the new formed matrix's elements in (23) as,

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{L_{11}} & A_{1,1} &= \frac{1}{A_1} \cdot DL_{11} & A_{2,1} &= \frac{1}{A_2} \cdot DL_{42} & A_{3,1} &= \frac{1}{A_3} \cdot DL_{73} \\ A_2 &= \sqrt{L_{22}} & A_{1,2} &= \frac{1}{A_1} \cdot DL_{21} & A_{2,2} &= \frac{1}{A_2} \cdot DL_{52} & A_{3,2} &= \frac{1}{A_3} \cdot DL_{83} \\ A_3 &= \sqrt{L_{33}} & A_{1,3} &= \frac{1}{A_1} \cdot DL_{31} & A_{2,3} &= \frac{1}{A_2} \cdot DL_{62} & A_{3,3} &= \frac{1}{A_3} \cdot DL_{93} \end{aligned} \quad (24)$$

where $[J]$ is Jacobien matrix.

The transformation matrix $[T]$ is determined by the element of the matrix shown below.

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{J_{11}}{A_1} & \frac{J_{12}}{A_1} & \frac{J_{13}}{A_1} \\ \frac{J_{21}}{A_2} & \frac{J_{22}}{A_2} & \frac{J_{23}}{A_2} \\ \frac{J_{31}}{A_3} & \frac{J_{32}}{A_3} & \frac{J_{33}}{A_3} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Conclusions

A computer program written in FORTRAN 77 is formed for the calculation of shells by finite element method of general shapes and under general loading. By the use of this program, the solutions of thick shells having various geometry and loadings are made. Calculations made are compared with the values given in literatures. It is obviously seen that the results have approximation for engineering applications.

BÖLÜM 1 GİRİŞ

1.1 Konu

Kabuklar yapı sistemleri içinde gerek geometrisi, gerekse çözümü açısından karmaşık yapılardır. Yapılan teorik çalışmalarda ortaya çıkan zorluklar nedeniyle çözümler bazı koşullar altında basitleştirilerek yapılabilmektedir. Kabuğun eğrilik yarıçapları yanında, kalınlığının çok küçük mertebede olduğu durumlarda, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri ihmal edilerek *ince kabuk teorisi* olarak adlandırılan çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Kabuk kalınlığının büyük olduğu kemer barajlar, basınç odaları ve sığınak türü yapılarda kalınlık doğrultusundaki normal gerilme ve kayma şekil değiştirmelerinin etkisi ihmal edilemeyecek mertebelere ulaşmaktadır. Bu durumda bu etkileri de gözönüne alan üç boyutlu elastisite teorisi ile yapılan çözümlere ihtiyaç duyulur. Matematiksel güçlükler nedeniyle bazı özel geometri ve yükleme durumları hariç kapalı çözümler zorlaşmakta veya yapılamamaktadır. Kapalı çözümlerde karşılaşılan bu güçlükler; bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeye paralel olarak; sayısal hesap yöntemleri ile elde edilen çözümlerin gelişmesine neden olmuştur.

Bu çalışmada sayısal hesap yöntemlerinden *sonlu elemanlar yöntemi* kullanılarak, genel biçimli ve genel yüklemeler etkisindeki kalın kabuklar için eğrisel ortogonal koordinatlardaki üç boyutlu elastisite teorisinden hareketle 20 düğüm noktalı izoparametrik eleman kullanılarak değişik problemlerin çözümü yapılmış ve sonuçlar irdelenmiştir.

1.2 Kabuk Teorisi ve üç Boyutlu Elastisite Teorisi ile Kabuk Çözümü Üzerine Yapılan Teorik Çalışmalar

Kabuk teorisi üzerine yazılmış çok sayıda yayın mevcuttur. Bu yayınların büyük çoğunluğu kabuk uygulamalarının en yaygın olarak kullanıldığı ince kabuklar

üzerine yapılmıştır [1-10]

[11]'de kalınlık boyunca yer değiştirmelerin ve kayma şekil değiştirmelerinin değişimi kuvvet serisine açılarak ifade edilmiş ve ince kabuk teorisinde kullanılan yaklaşımlarla birlikte kullanılarak dönel kalın kabuklar için kapalı çözümler elde edilmiştir. Bilgisayara uygulanması açısından elverişli olmayan bu yöntem yerine kalınlık doğrultusundaki yer değiştirme ve kayma şekil değiştirmeleri; kabuk ortalama yüzeyi üzerindeki bir noktanın yerel eğrilikleri boyunca alınan iki nokta ve bu noktaların kabuk dış yüzeylerindeki izdüşümleri ile; geometrik bağıntılarla ifade edilmeye çalışılmıştır [12].

[13]'te radyal yük etkisindeki kalın silindirik kabukların davranışı, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri ve radyal normal gerilme de hesaba katılarak teorik olarak incelenmiş ve bulunan sonuçların iyi olduğu belirtilmiştir.

Özellikle dönel kabukların bazı özel geometri ve yükleme durumları için eğrisel ortogonal koordinatlardaki iki veya üç boyutlu elastisite teorisi ile çözümleri çeşitli yayınlarda verilmiştir. Bu çözümlere örnek olarak, sabit iç veya dış basınç etkisindeki silindirik kabuk [14], çizgisel dönel yayılı yük etkisindeki silindirik kabuk [6], sabit iç basınç etkisindeki küresel kabuk [15] ve radyal doğrultuda karşılıklı tekil kuvvetlerin etkisindeki dairesel basit mesnetli silindirik kabuk [16] gibi problemleri verebiliriz. [14] ve [15]'te polinom şeklinde gerçek sonuçlar elde edilmiş, [6] ve [16]'da ise bulunan diferansiyel ifadeler seriye açılarak sonuçlar elde edilmiştir.

Üç boyutlu elastisite teorisi ile eğrisel ortogonal koordinatlarda gerilme ve şekil değiştirme ifadeleri çeşitli yayınlarda verilmiştir [1, 17, 18].

1.3 Kabuklar Üzerine Sonlu Elemanlar Yönteminin Uygulanması ile İlgili Çalışmalar

Sonlu elemanlar yöntemi ve uygulamaları üzerine yazılmış çok sayıda kitap mevcuttur [19-30].

Kabuklar üzerine sonlu elemanlar yöntemi ilk olarak 1960 lı yıllarda üçgen ve dörtgen düzlem elemanlar kullanılarak uygulanmıştır. Ancak düzlem elemanların yakınsaklığının iyi olmaması nedeniyle eğrisel sonlu elemanlar kullanılması düşünülmüş ve sonlu elemanlarda yeni bir boyut açılmıştır. Kabuğun yüzey geometrisine uygun eğrisel üçgen veya dörtgen elemanlarla yer değiştirmelerin polinom yaklaşım fonksiyonları ile tanımlandığı ve uygulamalarının yapıldığı çeşitli araştırmalar mevcuttur [32-33].

Üç boyutlu sistemlerin çözümü için çeşitli üç boyutlu elemanlar geliştirilmişse de kısıtlı bilgisayar imkanları çalışmalara büyük engel teşkil etmiştir.

[34]'te ince kabuk teorisi ile benzeşim kurmak amacıyla kabuk üzerinde ortalama yüzey tarif edilmiş, iki boyutlu eğrisel izoparametrik sonlu elemanlar yardımıyla alt ve üst yüzeylerdeki değişim, ortalama yüzey üzerindeki biçim fonksiyonları ile ifade edilerek kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmelerinin etkisi gözüne alınmıştır

[35]'te dönel yük etkisindeki dönel simetrik kalın kabuklar için yüksek mertebeden terimler içeren bir sonlu eleman geliştirilmiştir.

[36]'da kalın silindirik kabukların üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik sonlu elemanlarla çözümü yapılmıştır .

[37]'de hybrit gerilme modeli kullanılarak üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik eleman için gerilme alanları elde edilmiştir.

[38]'de kabuk ve katı (solid) elemanlar için değişim metodları kullanılarak bağımsız dönme alanları elde edilmiş , katı elemanlar için 8 düğüm noktalı ve 48 serbestlik dereceli üç boyutlu prizmatik eleman, kabuk elemanlar için ise 8 düğüm noktalı ve 40 serbestlik dereceli iki boyutlu eğrisel eleman kullanılarak çözümler elde edilmiştir.

[39]'da üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik elemanlar ile sistemin sonlu elemanlar ağıının düzenlenmesi üzerine çalışmalar yapılmıştır.

[40] ve [41]'de kalın sayılabilecek genel biçimli kabuklar için iki boyutlu 8 ve 12 düğüm noktalı ve her bir düğüm noktasında 5 serbestlik derecesi olan kabuk eleman geliştirilmiş, kalınlık doğrultusundaki kayma şekil değiştirmeleri ortalama yüzey üzerindeki biçim fonksiyonları ile ifade edilmiş, sonuçların yaklaşımının iyi olduğu belirtilmiştir.

[42]'de 20 düğüm noktalı izoparametrik elemanın kalınlık doğrultusundaki orta noktaları iptal edilmiş ve kalınlık doğrultusundaki birim şekil değiştirme ϵ_{33} değeri sıfır kabul edilerek 16 düğüm noktalı ve 40 serbestlik dereceli orta kalınlıklı kabuklara uygulanabilecek bir eleman geliştirilmiş ve uygulamaları yapılmıştır.

[43]'te 20 düğüm noktalı izoparametrik eleman kullanılarak giriş genişliğinin optimizasyonu yapılmıştır

1.4 Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı genel biçimli ve genel statik yükler etkisindeki kalın kabuklarda bütün etkiler dikkate alınarak yerel eğrisel ortogonal koordinatlarda sonlu elemanlar yöntemi ile analizinin yapılmasıdır.

BÖLÜM 2 EĞRİSEL ORTOGONAL KOORDİNATLARDA ELASTOSTATİĞİN TEMEL BAĞINTILARI

Sonraki bölümlerde yararlanılmak üzere üç boyutlu kabuk elemana ait gerilme ve şekil değiştirme bağıntıları, elastisite teorisi yardımıyla elde edilmeye çalışılacaktır.

2.1 Varsayımlar

Hesaplarda aşağıda belirtilen varsayımlara dayanılacaktır.

- Malzeme homogen, izotrop ve lineer elastiktir.
- Yer değiştirmeler yeterince küçük olup, denge denklemleri ve geometrik uygunluk koşullarında ikinci mertebe etkiler ihmal edilecektir.

2.2 Eğrisel Ortogonal Koordinatlar

Eğrisel elemanlar içeren problemlerin çözümünde eğrisel koordinatların kullanılma zorunluluğu ortaya çıkar. x, y, z uzaysal dik koordinatlar ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eğrisel ortogonal koordinatlar olmak üzere aralarındaki bağıntı,

$$x = f_1 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$y = f_2 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$z = f_3 (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

şeklinde olsun, f_1, f_2, f_3 birbirinden bağımsız ve tersi alınabilir fonksiyonlar olmak üzere değişken dönüşümü yapılabiliyorsa yeni koordinatlara “eğrisel koordinatlar” adı verilir. α_1 parametresi sabit tutulursa, iki parametrelili bir fonksiyon olur ki bir yüzeyi belirler. Bu yüzey “koordinat yüzeyi” olarak adlandırılır. Benzer şekilde α_1 ve α_2 parametreleri sabit tutularak diğer koordinat

yüzeyleri belirlenir. Ayrıca $\alpha_2=sb.$ ve $\alpha_3=sb.$ yüzeylerinin kesişmesiyle oluşan eğri " α_1 koordinat çizgisi" olarak adlandırılır. Benzer şekilde α_2 ve α_3 koordinat çizgileri de belirlenebilir. α_1 , α_2 ve α_3 değişkenleri, koordinat yüzeyleri ve çizgileri genelleştirilmiş eğrisel (kutupsal) koordinat sistemi olarak adlandırılır. Koordinat yüzeyleri üçlü ortogonal ise koordinat çizgileri karşılıklı olarak "ortogonal ağ" oluşturur. Eğrisel ortogonal koordinatlara silindirik ve küresel koordinatlar örnek olarak verilebilir.

2.3 Yüzey Geometrisi

2.3.1 Yüzeyin I. ve II. ana formu

Kabuk kalınlığının orta noktalarının geometrik yeri, kabuk ortalama yüzeyi olarak tanımlanır. Bu yüzey α_1 , α_2 ve α_3 parametreleri cinsinden ifade edilebilir. Çalışılan koordinat yüzeyine ait sabit olan parametrenin işlemlerde etkin olmamasına karşın bağıntılar bu parametrenin de değişken olabileceği kabulüne dayanarak en genel halde elde edilecektir.

Kabuk üzerindeki herhangi bir noktanın $\vec{r}$ konum vektörü kartezyen koordinatlarda

$$\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = f_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \vec{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \vec{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \vec{e}_3 \quad (2.1)$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{r}$ vektörünün $d\vec{r}$ diferansiyel değişimi,

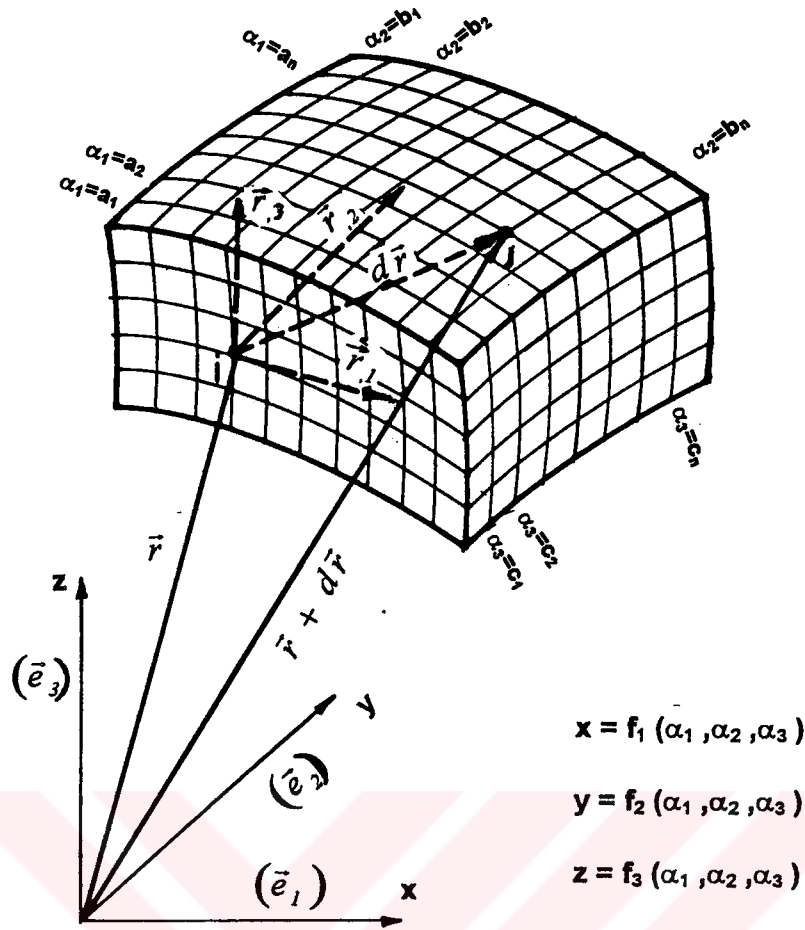
$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha_3} d\alpha_3 \quad (2.2a)$$

veya diğer bir gösterimle

$$d\vec{r} = \vec{r}_{,1} d\alpha_1 + \vec{r}_{,2} d\alpha_2 + \vec{r}_{,3} d\alpha_3 \quad (2.2b)$$

şeklindedir.

Kabuk geometrisi gereği $\vec{r}_{,1}$ $\alpha_1=sb.$ eğrisine, $\vec{r}_{,2}$ ise $\alpha_2=sb.$ eğrisine teğet olan vektörleri gösterir. Eğrisel ortogonal koordinat sisteminin gereği olarak $\vec{r}_{,3}$ ise



Şekil 2.1 Kabuk yüzeyleri ve eğrisel koordinatlar

$\alpha_1=sb.$ ve $\alpha_2=sb.$ olan, α_3 koordinat yüzeyinin normali doğrultusunda bir vektördür. Bu durumda $\vec{r}_{,3}$ vektörü $\vec{r}_{,1}$ ve $\vec{r}_{,2}$ vektörleri yardımıyla elde edilebileceğinden α_3 parametre olarak alınmayabilir.

$$\vec{r}_{,3} = k \cdot \vec{n} = \frac{\vec{r}_{,1} \times \vec{r}_{,2}}{|\vec{r}_{,1} \times \vec{r}_{,2}|} \quad (2.3)$$

Burada $\vec{n}$ normal birim vektör olup, k sabit bir katsayıdır.

Kabuk üzerindeki herhangi bir yay elemanın boyu ds olmak üzere,

$$ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,1} d\alpha_1^2 + \vec{r}_{,2} \cdot \vec{r}_{,2} d\alpha_2^2 + \vec{r}_{,3} \cdot \vec{r}_{,3} d\alpha_3^2$$

şeklinde elde edilir.

$$E = \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,1}$$

$$G = \vec{r}_{,2} \cdot \vec{r}_{,2}$$

$$H = \vec{r}_{,3} \cdot \vec{r}_{,3}$$

olarak alınırsa,

$$ds^2 = E.d\alpha_1^2 + G.d\alpha_2^2 + H.d\alpha_3^2 \quad (2.4)$$

şeklini alırken, bu ifade kabuk üzerindeki herhangi bir yüzeyin *I. ANA FORMU* olarak tanımlanır.

$$A_1 = \sqrt{E} \quad A_2 = \sqrt{G} \quad \text{ve} \quad A_3 = \sqrt{H} \quad \text{alınırsa,}$$

$$ds^2 = A_1^2.d\alpha_1^2 + A_2^2.d\alpha_2^2 + A_3^2.d\alpha_3^2 \quad (2.5)$$

şeklinde elde edilebilir.

$\vec{r}$ den $\vec{r} + d\vec{r}$ 'e yönelmiş yayın parametrik düzlemler üzerindeki kenar boyları,

$$ds_1 = A_1.d\alpha_1$$

$$ds_2 = A_2.d\alpha_2$$

$$ds_3 = A_3.d\alpha_3$$

şeklindedir. Hesaplar kabuk ortalama yüzeyi üzerinde yapılıyorsa $ds_3=0$ olur.

Ayrıca $\vec{r}_{,j} = k.\vec{n}$ bilindiğine göre kabuk ortalama yüzeyinin eğriliği,

$$K_n = \frac{d\vec{n}.d\vec{r}}{d\vec{r}.d\vec{r}}$$

teşkil edilirse,

$$k.d\vec{n} = \vec{r}_{,31}d\alpha_1 + \vec{r}_{,32}d\alpha_2 + \vec{r}_{,33}d\alpha_3$$

$$k.d\vec{n}.d\vec{r} = \vec{r}_{,31}\vec{r}_{,1}d\alpha_1^2 + \vec{r}_{,32}\vec{r}_{,2}d\alpha_2^2 + \vec{r}_{,33}\vec{r}_{,3}d\alpha_3^2$$

elde edilir.

$$L = \vec{r}_{,31}\vec{r}_{,1} \cdot \frac{1}{k}$$

$$N = \vec{r}_{,32}\vec{r}_{,2} \cdot \frac{1}{k}$$

$$O = \vec{r}_{,33}\vec{r}_{,3} \cdot \frac{1}{k}$$

alınırsa,

$$d\vec{n}.d\vec{r} = L.d\alpha_1^2 + N.d\alpha_2^2 + O.d\alpha_3^2 \quad (2.6)$$

şekline gelirken bu ifade yüzeyin *II. ANA FORMU* olarak tanımlanır. Bu durumda yüzeyin eğriliği,

$$K_n = \frac{L.d\alpha_1^2 + N.d\alpha_2^2 + O.d\alpha_3^2}{E.d\alpha_1^2 + G.d\alpha_2^2 + H.d\alpha_3^2} \quad (2.7)$$

şekline gelir. $\alpha_1=sb.$, $\alpha_2=sb.$ ve $\alpha_3=sb.$ eğrilerine karşılık gelen eğrilikler,

$$K_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} \quad ; \quad K_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \quad ; \quad K_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{O}{H}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada R_1, R_2 ve R_3 ilgili koordinat çizgilerine ait eğrilik yarıçaplarıdır.

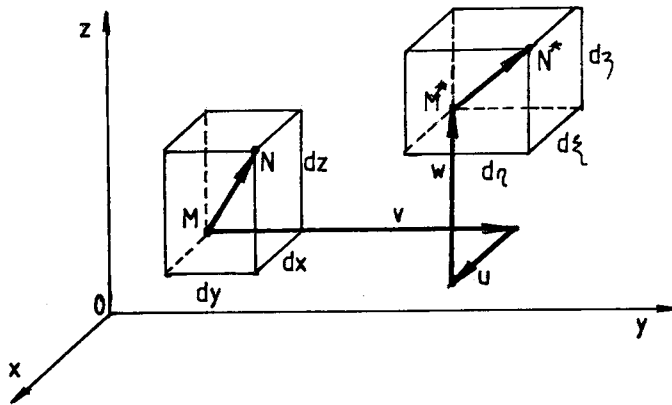
2.4 Şekil Değiştirme Bağlılıkları

Elastisite teorisi ile ilgili kitaplarda eğrisel ortogonal koordinatlarda şekil değiştirme bağıntıları verilmiştir [1,17,18].

Eğrisel ortogonal koordinatlarda (x,y,z) koordinatlarına sahip bir nokta yer değiştirmeden sonra $(x+u, y+v, z+w)$ koordinatlarına ulaşsın , yer değiştirme vektörünün bileşenleri olan (u, v, w) , (x,y,z) nin fonksiyonlarıdır.

Başlangıçta ds boyuna sahip çizgisel eleman yer değiştirmeden sonra ds^* boyuna ulaşsın. Bu elemandaki şekil değiştirme,

$$\varepsilon = \frac{ds^* - ds}{ds} \dots\dots (\varepsilon \geq -1) \quad \text{dir.}$$



Şekil 2.2 Eğrisel koordinatlarda noktanın yer değiştirmesi

Eğrisel ortogonal koordinatlarda şekil değiştirme bağıntıları,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{1}{A_1} \left[u_{,1} + \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_2} + \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_3} + \frac{1}{2A_1} \left(u_{,1} + \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_2} + \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_3} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2A_1} \left(v_{,1} - \frac{A_{1,2} \cdot u}{A_2} \right)^2 + \frac{1}{2A_1} \left(w_{,1} - \frac{A_{1,3} \cdot u}{A_3} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{A_2} \left[v_{,2} + \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_3} + \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1} + \frac{1}{2A_2} \left(v_{,2} + \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_3} + \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2A_2} \left(w_{,2} - \frac{A_{2,3} \cdot v}{A_3} \right)^2 + \frac{1}{2A_2} \left(u_{,2} - \frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{A_3} \left[w_{,3} + \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1} + \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2} + \frac{1}{2A_3} \left(w_{,3} + \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1} + \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2A_3} \left(u_{,3} - \frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1} \right)^2 + \frac{1}{2A_3} \left(v_{,3} - \frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2} \right)^2 \right]\end{aligned}\quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \frac{u_{,2}}{A_2} + \frac{v_{,1}}{A_1} - \frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1 A_2} - \frac{A_{1,2} \cdot u}{A_1 A_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left(u_{,1} + \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_2} + \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_3} \right) \cdot \left(u_{,2} - \frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{A_1 A_2} \left(v_{,1} - \frac{A_{1,2} \cdot u}{A_2} \right) \cdot \left(v_{,2} + \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1} + \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_3} \right) + \frac{1}{A_1 A_2} \left(w_{,1} - \frac{A_{1,3} \cdot u}{A_3} \right) \cdot \left(w_{,2} - \frac{A_{2,3} \cdot v}{A_3} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{23} &= \frac{v_{,3}}{A_3} + \frac{w_{,2}}{A_2} - \frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2 A_3} - \frac{A_{2,3} \cdot v}{A_2 A_3} + \frac{1}{A_2 A_3} \left(v_{,2} + \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_3} + \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1} \right) \cdot \left(v_{,3} - \frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{A_2 A_3} \left(w_{,2} - \frac{A_{2,3} \cdot v}{A_3} \right) \cdot \left(w_{,3} + \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2} + \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1} \right) + \frac{1}{A_2 A_3} \left(u_{,2} - \frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1} \right) \cdot \left(u_{,3} - \frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{31} &= \frac{w_{,1}}{A_1} + \frac{u_{,3}}{A_3} - \frac{A_{1,3} \cdot u}{A_1 A_3} - \frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1 A_3} + \frac{1}{A_1 A_3} \left(w_{,3} + \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1} + \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2} \right) \cdot \left(w_{,1} - \frac{A_{1,3} \cdot u}{A_3} \right) \\ &\quad + \frac{1}{A_1 A_3} \left(u_{,3} - \frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1} \right) \cdot \left(u_{,1} + \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_3} + \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_2} \right) + \frac{1}{A_1 A_3} \left(v_{,3} - \frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2} \right) \cdot \left(v_{,1} - \frac{A_{1,2} \cdot u}{A_2} \right)\end{aligned}$$

şeklinde verilmiştir. Lineer olmayan terimler atılırsa,

$$\varepsilon_{11} = \frac{u_{,1}}{A_1} + \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_1 A_2} + \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_1 A_3}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{v_{,2}}{A_2} + \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1 A_2} + \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_2 A_3}$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{w_{,3}}{A_3} + \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1 A_3} + \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2 A_3}$$

(2.9)

$$\varepsilon_{12} = \frac{u_{,2}}{A_2} + \frac{v_{,1}}{A_1} - \frac{A_{1,2} \cdot u}{A_1 A_2} - \frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1 A_2}$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{v_{,3}}{A_3} + \frac{w_{,2}}{A_2} - \frac{A_{2,3} \cdot v}{A_2 A_3} - \frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2 A_3}$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{u_{,3}}{A_3} + \frac{w_{,1}}{A_1} - \frac{A_{1,3} \cdot u}{A_1 A_3} - \frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1 A_3}$$

bağıntıları elde edilir. Burada;

ε_{11} , ε_{22} , ε_{33} eleman düğüm noktalarındaki birim uzama şekil değiştirmeleri,

ε_{12} , ε_{23} , ε_{31} eleman düğüm noktalarındaki birim kayma şekil değiştirmeleri,

u , v , w düğüm noktalarının yerel koordinatlar doğrultusundaki yer değiştirmeleri,

A_1 , A_2 , A_3 koordinat sisteminin Lamé katsayılarıdır.

2.5 Gerilme Şekil Değiştirme Bağıntıları

Kabuk elemanın düğüm noktalarındaki gerilmeler, şekil değiştirmeler cinsinden bilinen elastisite bağıntıları yardımıyla hesaplanabilir [18].

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \\
\sigma_{22} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{22} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right] \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{33} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \right]
\end{aligned} \tag{2.10a}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12} \\
\tau_{23} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{23} \\
\tau_{31} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{31}
\end{aligned} \tag{2.10b}$$



BÖLÜM 3 SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

3.1 Giriş

Mühendislik yapıları genellikle sürekli ortama sahiptir. Sürekli ortamın çözümü ise diferansiyel denklem çözümüne dönüşür. Sistem geometrisinin ve yüklerin uygun olmaması çoğu zaman diferansiyel denklemin oluşturulması ve çözümünü güçleştirir veya çözüm bulunamaz. Bu durumda yaklaşık hesap metodlarına ihtiyaç duyulur. Sürekli ortam sonlu sayıda geometrisi belirli ve şekil değiştirme bağıntıları kendi içinde hesaplanabilen *sonlu eleman* adı verilen alt bölgelere ayrılır. Sonlu elemanlar birbiriyle sanal çizgilerle ayrılmış, sadece düğüm noktalarından birbiriyle bağlanmış olarak düşünülür ve formülasyon düğüm noktalarının birbiriyle ilişkileri üzerine kurulur. Bu durumda sürekli sisteme ait diferansiyel denklemin integrasyonu ayrık sistemlere ait cebrik bir denklem takımının çözümüne indirgenir.

Elemanların birbiriyle birleştiği düğüm noktalarında bilinmeyen olarak alınan statik büyüklükler: kuvvetler, yer değiştirmeler veya kuvvet ve yerdeğiştirmelerin karışımı şeklinde alınabilir. Bu çalışmada uygulamasının basit, kullanışlı ve genel olması nedeniyle yer değiştirme yöntemi kullanılmıştır.

3.2 Yer Değiştirme Yöntemi

Eleman davranışı elastik ise 'e' elemanında düğüm noktaları kuvvetlerinin dengesi

$$\{f\}^e = [k]^e \{d\}^e + \{f\}^e_p + \{f\}^e_{\infty} \quad (3.1)$$

şeklinde olur. Burada $\{f\}^e_p$ elemana tesir eden yayılı yükleri dengelemek için, $\{f\}^e_{\infty}$ ise ısı değişimi ve başlangıç kuvvetlerini dengelemek için gerekli düğüm noktası kuvvetlerini, $\{f\}^e$ eleman düğüm noktalarının yer değiştirmesinden oluşan

düğüm noktası kuvvetlerini, $[k]^e$ eleman rijitlik matrisini ve $\{d\}^e$ düğüm noktası yer değiştirmelerini göstermektedir. Benzer şekilde eleman düğüm noktası gerilmeleri şekil değiştirmeler cinsinden yazılırsa,

$$\{\sigma\}^e = [S]^e \{d\}^e + \{\sigma\}^e_p + \{\sigma\}^e_{\varepsilon 0} \quad (3.2)$$

elde edilir. Burada $\{\sigma\}^e$ şekil değiştirmelerden, $\{\sigma\}^e_p$ ise eleman üzerindeki yayılı yüklerden oluşan gerilmeleri, $\{\sigma\}^e_{\varepsilon 0}$ ise elemandaki başlangıç gerilmelerini ve $[S]^e$ eleman gerilme matrisini göstermektedir. Söz konusu matrisler minimum potansiyel enerji veya virtüel iş prensibi yardımıyla elde edilebilir:

3.3 Eleman Karakteristik Matrislerinin Formülasyonu

3.3.1 Yer değiştirme fonksiyonu

Tanımlı bir 'e' elemanının sınırlarında veya içinde bulunan herhangi bir noktadaki $\{u\}$ yer değiştirme fonksiyonu,

$$\{u\} = [N] \{d\}^e = \left[[N^i], [N^j], [N^k], \dots \right] \begin{Bmatrix} \{d^i\} \\ \{d^j\} \\ \{d^k\} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[N]$ serbestliklerle yer değiştirmeler arasında eleman koordinatlarının bir fonksiyonu olan biçim fonksiyonlarıdır. $[N^i]$ alt matrisinin herhangi bir N^i_{mn} elemanı i . düğüm noktasındaki m . serbestliğin birim, diğer bütün serbestliklerin sıfır olması durumunda n . yerdeğiştirme fonksiyonunun, elemanın sınırlarında veya içindeki değişimini ifade eder. Biçim fonksiyonları,

$$\sum_{i=1}^n N_i(x, y) = 1$$

$$N_i(x_i, y_i) = 1 \quad ; \quad N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_n) = 0 \quad (3.4)$$

olacak şekilde seçilmelidir.

3.3.2 Şekil değiştirmeler

Eleman üzerinde $[B]$ yer değiştirme şekil değiştirme matrisi, $[N]$ biçim fonksiyonları üzerinde $[\partial]$ diferansiyel bir operatör olmak üzere,

$$[B] = [\partial][N] \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. $[B]$ matrisi bilinirse elemanın düğüm noktası yer değiştirmeleri yardımıyla elemanın herhangi bir i . düğüm noktasındaki şekil değiştirme vektörü $\{\varepsilon\}_i$

$$\{\varepsilon\}_i = [B]_i \{d\}^e \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilebilir.

3.3.3 Düğüm noktası gerilmeleri

En genel halde eleman düğüm noktası gerilmeleri ile şekil değiştirmeler arasındaki bağıntı i . düğüm noktasında,

$$\{\sigma\}_i = [D](\{\varepsilon\}_i - \{\varepsilon_0\}_i) + \{\sigma_0\}_i \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilebilir. Burada, $[D]$ malzemenin homogen ve izotrop olması halinde elastisite modülü E ve Poisson oranı ν ye bağlı olan elastisite matrisidir, $\{\varepsilon\}$ yer değiştirmelerden oluşan şekil değiştirmer, $\{\varepsilon_0\}$ ısı ve rötire gibi etkilere oluşan başlangıç şekil değiştirmeleri ve $\{\sigma_0\}$ ise başlangıç gerilmeleridir.

3.4.3 Eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri

Eleman üzerindeki yayılı yüklere ve sınır gerilmelerine statik olarak eşdeğer, eleman düğüm noktası kuvvetleri vektörü $\{f\}^e$,

$$\{f\}^e = \begin{Bmatrix} \{f^i\} \\ \{f^j\} \\ \{f^k\} \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

olarak tarif edilirse her $\{f^i\}$ alt vektörünün elemanları $\{d^i\}$ yer değiştirme alt vektöründeki uç serbestliklerine eşit sayıda ve ilgili serbestlik doğrultusunda olan eşdeğer düğüm noktası kuvvetleridir.

3.3.5 Minimum toplam potansiyel enerji prensibi

Deplasman formülasyonlarında ağırlıklı olarak kullanılan bu prensip, “Süreklilik ve esas sınır koşullarını sağlayan şekil değiştirme alanları arasında, denge koşullarını da sağlayan sistemin potansiyel enerjisini en az yapandır.” şeklinde açıklanabilir.

Enerji kaybetmeyen korunumlu sistemlerde toplam potansiyel enerji π , sistemin şekil değiştirme enerjisi U_i ile dış yüklerin potansiyel enerjisi U_e nin toplamından oluştuğu kabul edilir. Yükleme sırasında yüklerin potansiyelindeki azalma, yüklerin sistemde yaptığı işe eşit alınırsa ($U_e = -W_e$),

$$\pi = U_i + U_e = U_i - W_e \quad (3.9)$$

elde edilir. Şekil ve yer değiştirmelerin bir fonksiyonu olan π dengenin kararlı olması halinde enerjinin minimum olması için, şekil değiştirmelerin $\delta\{\varepsilon\}$ değişimi halinde, şekil değiştirme enerjisindeki değişim δU_i ve yer değiştirmelerin $\delta\{u\}$ değişimi halinde, yüklerin sistemde yaptığı işte meydana gelen değişim δW_e olmak üzere,

$$\delta U_i = \delta W_e \quad (3.10)$$

eşitliği gerçekleşmelidir. Sistemde kütle kuvvetlerinden oluşan $\{b\}$ vektörü,

$$\{b\} = \{b_1 \ b_2 \ b_3\}^T \quad (3.11)$$

yüzey kuvvetlerinden oluşan $\{s\}$ vektörü,

$$\{s\} = \{s_1 \ s_2 \ s_3\}^T \quad (3.12)$$

ve düğüm noktalarına doğrudan etkiyen noktasal yüklerden oluşan $\{f_p\}$ vektörleri,

$$\{f_p\} = \{f_{p1} \ f_{p2} \ f_{p3}\}^T \quad (3.13)$$

şeklinde alınırsa (3.10) ifadesi,

$$\int_v (\delta\{\varepsilon\})^T \{\sigma\} dv = \int_v (\delta\{u\})^T \{b\} dv + \int_s (\delta\{u\})^T \{s\} ds + \sum_{p=1}^n (\delta\{u\}_p)^T \{f\}_p \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. Malzeme özelliklerine bağlı olmayan bu ifadede yer ve şekil değiştirme vektörlerindeki değişim,

$$\delta\{\varepsilon\} = \{\delta u \ \delta v \ \delta w\}^T \quad (3.15)$$

$$\delta\{\varepsilon\} = \{\delta\varepsilon_{11} \ \delta\varepsilon_{22} \ \delta\varepsilon_{33} \ \delta\varepsilon_{12} \ \delta\varepsilon_{23} \ \delta\varepsilon_{31}\}^T \quad (3.16)$$

şeklindedir. Herhangi bir noktadaki $\{\sigma\}$ gerilme vektörü,

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{23} \ \sigma_{31}\}^T \quad (3.17)$$

şeklinde alınır ve (3.14) ifadesinde yukarıda verilen ifadeler yerine konursa,

$$\begin{aligned} \int_v (\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12} + \sigma_{23}\delta\varepsilon_{23} + \sigma_{31}\delta\varepsilon_{31}) dv &= \int_v (b_1\delta u + b_2\delta v + b_3\delta w) dv \\ &+ \int_s (s_1\delta u + s_2\delta v + s_3\delta w) ds + \sum_{p=1}^n (f_{p1}\delta u + f_{p2}\delta v + f_{p3}\delta w) \end{aligned} \quad (3.18)$$

ifadesi elde edilir. (3.14) de gerilmeler (3.7) yardımıyla şekil değiştirmeler cinsinden yazılırsa sadece yüklere ve şekil değiştirmelere bağlı bir ifade,

$$\int_v (\delta\{\varepsilon\})^T [D]\{\varepsilon\} dv = \int_v (\delta\{u\})^T \{b\} dv + \int_s (\delta\{u\})^T \{s\} ds + \sum_{p=1}^n (\delta\{u\}_p)^T \{f\}_p \quad (3.19)$$

şekline dönüşür. Burada aranan şekil değiştirme fonksiyonları, birinci türevlerinin kareleri integre edilebilir fonksiyonlar olmalıdır.

(3.6) ifadesindeki $[B]$ matrisinin elemanları sabitler veya koordinatların bir fonksiyonudur. Bu durumda,

$$\delta\{\varepsilon\} = \delta[B]\{d\} = [B] \delta\{d\}$$

şeklini alır. Traspozesi alınır,

$$(\delta\{\varepsilon\})^T = (\delta\{d\})^T [B]^T \quad (3.20)$$

şekline gelir. Benzer şekilde (3.3) ifadesi,

$$\{u\} = [N]\{d\}$$

$$\delta\{u\} = \delta[N]\{d\} = [N] \delta\{d\}$$

şeklini alır. Transpozesi alınır,

$$(\delta\{u\})^T = (\delta\{d\})^T [N]^T \quad (3.21)$$

şeklini alır. Buradaki $\{d\}$ düğüm noktası yer değiştirmeleri, koordinatların fonksiyonu değildir, bundan dolayı integral dışına alınabilir. Bu durumda (3.20) ve (3.21) ifadeleri (3.19) da yerlerine konulursa,

$$(\delta\{u\})^T \left(\int_v [B]^T [D] [B] dv \{d\} - \int_v [N]^T \{b\} dv - \int_s [N]^T \{s\} ds - \sum_{p=1}^n [N_p]^T \{f\}_p \right) = 0 \quad (3.22)$$

şeklini alır. $\delta\{u\}$ keyfi bir değişimdir, bu durumda parantez içindeki ifade sıfır olur.

$$\{f^e\} = \{f_b^e\} + \{f_s^e\} + \{f_p^e\} = \int_v [N]^T \{b\} dv + \int_s [N]^T \{s\} ds + \sum_{p=1}^n [N_p]^T \{f\}_p \quad (3.23)$$

$$[k^e] = \int_v [B]^T [D] [B] dv \quad (3.24)$$

şeklinde alınır ve bu ifadeler (3.22) de yerleştirilirse,

$$[k^e]\{d^e\} = \{f^e\} \quad (3.25)$$

şeklinde cebrik bir denklem olan eleman düğüm noktaları denge denklemi elde

edilir. Burada $[k^e]$ eleman rijitlik matrisi, $\{d^e\}$ eleman düğüm noktaları yer değiştirme vektörü ve $\{f^e\}$ eleman düğüm noktaları yük vektörü olarak adlandırılır.

Aranılan eleman düğüm noktaları yer değiştirmeleri ' d_i ' ler sistemde de aynı olur. $[K]$ sistem rijitlik matrisi, $\{D\}$ sistem düğüm noktaları yer değiştirme vektörü ve $\{F\}$ sistem düğüm noktaları yük vektörü olarak adlandırılır ve cebrik denklemin özellikleri kullanılıp eleman rijitlik matrisinin ve yük vektörünün herbir terimi sistemdeki serbestlikler gözönüne alınarak toplanırsa,

$$[K]\{D\} = \{F\} \quad (3.26)$$

lineer denklem takımı elde edilir. Bu denklem çözülürse aranan düğüm noktaları yer değiştirmeleri bulunur.

BÖLÜM 4 GENEL BİÇİMLİ KALIN KABUKLAR İÇİN ÜÇ BOYUTLU İZOPARAMETRİK SONLU ELEMAN

4.1 Genel Açıklama

Sonlu elemanlarda işlemler genel koordinatlarda yapılırsa, elemanların düğüm noktalarında, yerel koordinatlarda belirlenen özellikleri, dönüşüm matrisi olarak adlandırılan matris yardımıyla genel koordinatlara dönüştürülür. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra genel koordinatlarda belirlenen özellikleri de, dönüşüm matrisinin tersi yardımıyla yerel koordinatlara dönüştürülür. Bazı eleman tanımlarında dönüşüm matrisinin tersinin hesaplanmasında güçlükler ortaya çıkabilir. Bu durumda eleman geometrisi uygun ise tüm sonlu eleman işlemleri yerel koordinatlarda yapılabilir.

Genel ve yerel koordinatlar arasındaki dönüşüm; eleman içinde değişimi tam olarak bilinmeyen fonksiyonları temsil eden ve gerekli dereceden türevleri mevcut olan; tiplendirilmiş biçim fonksiyonları kullanılarak kolayca yapılabilir. Dönüşüm, elemanın her bir düğüm noktası için yazılırsa;

$$\begin{aligned} x &= N_1 \cdot x_1 + N_2 \cdot x_2 + \dots = [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sum N_i \cdot x_i \\ y &= N_1 \cdot y_1 + N_2 \cdot y_2 + \dots = [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sum N_i \cdot y_i \\ z &= N_1 \cdot z_1 + N_2 \cdot z_2 + \dots = [N_1 \quad N_2 \quad \dots] \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \sum N_i \cdot z_i \end{aligned} \quad (4.1)$$

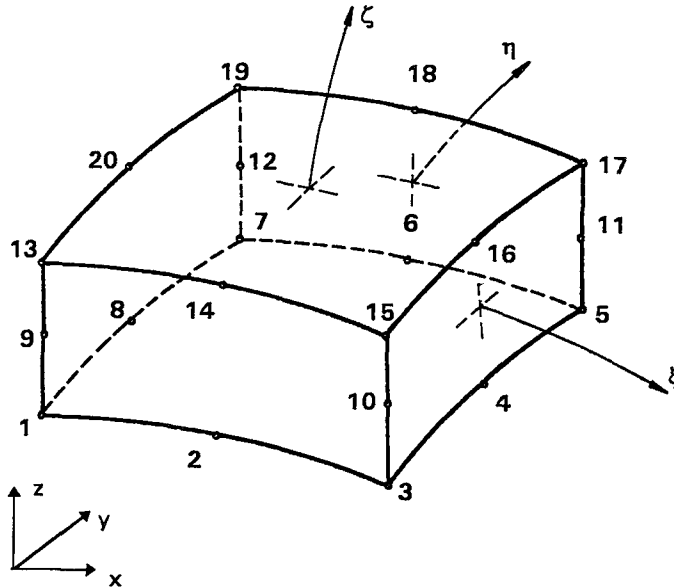
şeklinde olur. Burada N_i ler yerel koordinatlarda verilen biçim fonksiyonları, x_i , y_i , z_i ise eleman düğüm noktaları genel koordinatlarıdır.

Biçim fonksiyonları ile elemanın sadece geometrisi belirlenebiliyorsa bu tip elemana *parametrik sonlu eleman*, geometri ile beraber biçim değiştirme fonksiyonları bileşenleri de belirlenebiliyorsa, *izoparametrik sonlu eleman* denir. Biçim fonksiyonlarının eleman düğüm noktalarındaki değerleri, ilgili düğüm noktasında birim, diğer düğüm noktalarında ise sıfır olmalıdır. Biçim fonksiyonları eleman kenarlarındaki geometrik değişimi de belirtecek dereceden seçilmelidir.

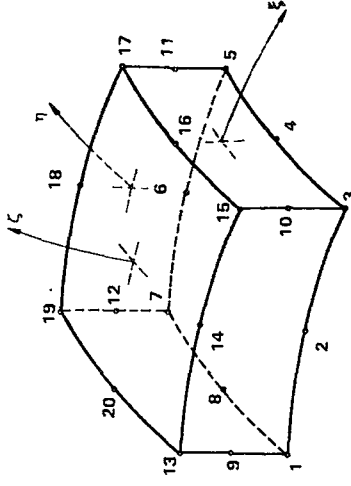
4.2 Kullanılan Sonlu Eleman Modeli

Genel biçimli kalın kabukların çözümü için Şekil 4.1 de görülen, biçim fonksiyonlarında ikinci dereceden terimler bulunan üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik eğrisel sonlu elemanlar kullanılmıştır. Biçim fonksiyonları ve bu fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri, köşe ve orta noktalar için gruplar halinde Tablo 4.1 de verilmiştir.

Eleman rijitlik matrisinin formülasyonunda söz konusu izoparametrik eğrisel sonlu elemanın biçim fonksiyonu ve türevlerinden faydalanılmıştır.



Şekil 4.1 Üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik eğrisel sonlu eleman



Tablo 4.1 Üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik sonlu eleman biçim fonksiyonları ve türevleri

Köşe (1,3,5,7,13,15,17,19) noktalar	$\xi=0$ olan (2,6,14,18) noktalar	$\eta=0$ olan (4,8,16,20) noktalar	$\zeta=0$ olan (9,10,11,12) noktalar
$N_1=0.125(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+\eta_0+\zeta_0-2)$	$N_1=0.25(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$	$N_1=0.25(1+\xi_0)(1-\eta^2)(1+\zeta_0)$	$N_1=0.25(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1-\zeta^2)$
Birinci Türevler	Birinci Türevler	Birinci Türevler	Birinci Türevler
$N_{i,1}=0.125\xi_i(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(2\xi_0+\eta_0+\zeta_0-1)$	$N_{i,1}=-0.5\xi_i(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$	$N_{i,1}=0.25\xi_i(1-\eta^2)(1+\zeta_0)$	$N_{i,1}=0.25\xi_i(1+\eta_0)(1-\zeta^2)$
$N_{i,2}=0.125\eta_i(1+\xi_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+2\eta_0+\zeta_0-1)$	$N_{i,2}=0.25\eta_i(1-\xi^2)(1+\zeta_0)$	$N_{i,2}=-0.5\eta_i(1+\xi_0)(1+\zeta_0)$	$N_{i,2}=0.25\eta_i(1+\xi_0)(1-\zeta^2)$
$N_{i,3}=0.125\zeta_i(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0+2\zeta_0-1)$	$N_{i,3}=0.25\zeta_i(1-\xi^2)(1+\eta_0)$	$N_{i,3}=0.25\zeta_i(1+\xi_0)(1-\eta^2)$	$N_{i,3}=-0.5\zeta_i(1+\xi_0)(1+\eta_0)$
İkinci Türevler	İkinci Türevler	İkinci Türevler	İkinci Türevler
$N_{i,11}=0.25\xi_i^2(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$	$N_{i,11}=-0.5(1+\eta_0)(1+\zeta_0)$	$N_{i,11}=0.0$	$N_{i,11}=0.0$
$N_{i,12}=0.125\xi_i\eta_i(1+\zeta_0)(2\xi_0+2\eta_0+\zeta_0)$	$N_{i,12}=-0.5\xi_i\eta_i(1+\zeta_0)$	$N_{i,12}=-0.5\xi_i\eta_i(1+\zeta_0)$	$N_{i,12}=0.25\xi_i\eta_i(1-\zeta^2)$
$N_{i,13}=0.125\xi_i\zeta_i(1+\eta_0)(2\xi_0+\eta_0+2\zeta_0)$	$N_{i,13}=-0.5\xi_i\zeta_i(1+\eta_0)$	$N_{i,13}=0.25\xi_i\zeta_i(1-\eta^2)$	$N_{i,13}=-0.5\xi_i\zeta_i(1+\eta_0)$
$N_{i,21}=0.125\xi_i\eta_i(1+\zeta_0)(2\xi_0+2\eta_0+\zeta_0)$	$N_{i,21}=-0.5\xi_i\eta_i(1+\zeta_0)$	$N_{i,21}=-0.5\xi_i\eta_i(1+\zeta_0)$	$N_{i,21}=0.25\xi_i\eta_i(1-\zeta^2)$
$N_{i,22}=0.25\eta_i^2(1+\xi_0)(1+\zeta_0)$	$N_{i,22}=0.0$	$N_{i,22}=-0.5(1+\xi_0)(1+\zeta_0)$	$N_{i,22}=0.0$
$N_{i,23}=0.125\eta_i\zeta_i(1+\xi_0)(\xi_0+2\eta_0+2\zeta_0)$	$N_{i,23}=0.25\eta_i\zeta_i(1-\xi^2)$	$N_{i,23}=-0.5\eta_i\zeta_i(1+\xi_0)$	$N_{i,23}=-0.5\eta_i\zeta_i(1+\xi_0)$
$N_{i,31}=0.125\xi_i\zeta_i(1+\eta_0)(2\xi_0+\eta_0+2\zeta_0)$	$N_{i,31}=-0.5\xi_i\zeta_i(1+\eta_0)$	$N_{i,31}=0.25\xi_i\zeta_i(1-\eta^2)$	$N_{i,31}=-0.5\xi_i\zeta_i(1+\eta_0)$
$N_{i,32}=0.125\eta_i\zeta_i(1+\xi_0)(\xi_0+2\eta_0+2\zeta_0)$	$N_{i,32}=0.25\eta_i\zeta_i(1-\xi^2)$	$N_{i,32}=-0.5\eta_i\zeta_i(1+\xi_0)$	$N_{i,32}=-0.5\eta_i\zeta_i(1+\xi_0)$
$N_{i,33}=0.25\zeta_i^2(1+\xi_0)(1+\eta_0)$	$N_{i,33}=0.0$	$N_{i,33}=0.0$	$N_{i,33}=-0.5(1+\xi_0)(1+\eta_0)$

ξ, η, ζ Biçim fonksiyonu istenen noktanın yerel koordinatları

ξ_i, η_i, ζ_i Eleman düğüm noktalarının yerel koordinatları (-1, 0, 1)

$\xi_0=\xi\xi_i$ $\eta_0=\eta\eta_i$ $\zeta_0=\zeta\zeta_i$

Sonlu eleman çözümünde her bir düğüm noktasında $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ eğrisel koordinatları doğrultusundaki u, v, w yer değiştirme bileşenleri, uç serbestlikleri olarak alınmıştır. Eleman uç serbestlikleri matris formunda,

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \{\delta^{20}\} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada i düğüm noktasının serbestliklerinden oluşan $\{\delta^i\}$ vektörü,

$$\{\delta^i\} = \begin{Bmatrix} u^i \\ v^i \\ w^i \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

şeklindedir. Elemanın her bir noktasında 3 serbestlik derecesi olmak üzere, elemanda toplam serbestlik derecesi 60 olarak alınmaktadır. Elemana ait yer değiştirme fonksiyonları

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N]_{(3 \times 60)} \cdot \{\delta\}_{(60 \times 1)}^e \quad (4.4)$$

$$\{f\} = \left[[N^1], [N^2], \dots, [N^{20}] \right] \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \{\delta^{20}\} \end{Bmatrix}$$

olarak alınmıştır. Burada (3×3) boyutundaki $[N^i]$ ($i=1,2,3,\dots,20$) matrisinin herhangi bir elemanı, o elemanın bulunduğu kolona ait serbestliğin; bulunulan satıra karşılık gelen doğrultuda; birim diğer bütün serbestliklerin sıfır olması halinde u, v, w yer değiştirmelerini ifade eden Tablo 4.1 de verilen biçim fonksiyonlarıdır.

4.3 Üç Boyutlu genel sonlu eleman formülasyonu

4.3.1 Gerilmelerle şekil değiştirmeler arası bağıntılar

Gerilmelerle şekil değiştirmeler arası bağıntılar, şekil değiştirmelerin elastik sınır içinde kalması durumunda elastisite bağıntıları ile oluşturulan, üç boyutlu elemana ait (6x6) boyutundaki $[D]$ elastisite matrisi yardımı ile bulunabilir.

Eleman kesit tesirlerinden dolayı i noktasındaki gerilmelerden oluşan $\{\sigma\}_i$ vektörü

$$\{\sigma\}_i^T = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \tau_{12} \quad \tau_{23} \quad \tau_{31}\} \quad (4.5)$$

ve elemanın ilgili düğümündeki şekil değiştirmelerden oluşan $\{\varepsilon\}_i$ vektörü,

$$\{\varepsilon\}_i^T = \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31}\} \quad (4.6)$$

olmak üzere,

$$\{\sigma\}_i = [D]\{\varepsilon\}_i \quad (4.7)$$

bağıntısı yardımıyla bulunur. Elastisite matrisi $[D]$,

$$[D] = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

şeklinde verilmiştir.

4.3.2 Şekil değiştirme yer değiştirme bağıntıları

Eleman düğüm noktası şekil değiştirmeleri ile düğüm noktası yer değiştirmeleri arasındaki bağıntı 'e' elemanında i . düğüm noktası için,

$$\{\varepsilon\}_i^e = [B]_i\{\delta\}_i^e \quad (4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Aradaki bağıntıyı tanımlayan $[B]$ yer değiştirme şekil değiştirme matrisi $[\partial]$ diferansiyel bir operatör olmak üzere

$[B]_i = [\partial][N_i]$ şeklinde yazılırsa, $[B]$ matrisi (2.9) bağıntısı yardımı ile,

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{u_{,1}}{A_1} & \frac{A_{1,2} \cdot v}{A_1 A_2} & \frac{A_{1,3} \cdot w}{A_1 A_3} \\ \frac{A_{2,1} \cdot u}{A_1 A_2} & \frac{v_{,2}}{A_2} & \frac{A_{2,3} \cdot w}{A_2 A_3} \\ \frac{A_{3,1} \cdot u}{A_1 A_3} & \frac{A_{3,2} \cdot v}{A_2 A_3} & \frac{w_{,3}}{A_3} \\ -\frac{A_{1,2} \cdot u}{A_1 A_2} + \frac{u_{,2}}{A_2} & -\frac{A_{2,1} \cdot v}{A_1 A_2} + \frac{v_{,1}}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{A_{2,3} \cdot v}{A_2 A_3} + \frac{v_{,3}}{A_3} & -\frac{A_{3,2} \cdot w}{A_2 A_3} + \frac{w_{,2}}{A_2} \\ -\frac{A_{1,3} \cdot u}{A_1 A_3} + \frac{u_{,3}}{A_3} & 0 & -\frac{A_{3,1} \cdot w}{A_1 A_3} + \frac{w_{,1}}{A_1} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

şeklinde oluşturulur. Elemanın düğüm noktası yer değiştirmeleri biçim fonksiyonları yardımıyla,

$$\begin{aligned} u &= \sum N_i \cdot u_i \\ v &= \sum N_i \cdot v_i \\ w &= \sum N_i \cdot w_i \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde yazılabilir. (4.11) bağıntısı, (4.10) da yer değiştirmeler için yazılırsa (6x3) boyutundaki $[B]_i$ alt matrisi,

$$[B]_i = \begin{bmatrix} \frac{N_{i,1}}{A_1} & \frac{A_{1,2} \cdot N_i}{A_1 A_2} & \frac{A_{1,3} \cdot N_i}{A_1 A_3} \\ \frac{A_{2,1} \cdot N_i}{A_1 A_2} & \frac{N_{i,2}}{A_2} & \frac{A_{2,3} \cdot N_i}{A_2 A_3} \\ \frac{A_{3,1} \cdot N_i}{A_1 A_3} & \frac{A_{3,2} \cdot N_i}{A_2 A_3} & \frac{N_{i,3}}{A_3} \\ -\frac{A_{1,2} \cdot N_i}{A_1 A_2} + \frac{N_{i,2}}{A_2} & -\frac{A_{2,1} \cdot N_i}{A_1 A_2} + \frac{N_{i,1}}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{A_{2,3} \cdot N_i}{A_2 A_3} + \frac{N_{i,3}}{A_3} & -\frac{A_{3,2} \cdot N_i}{A_2 A_3} + \frac{N_{i,2}}{A_2} \\ -\frac{A_{1,3} \cdot N_i}{A_1 A_3} + \frac{N_{i,3}}{A_3} & 0 & -\frac{A_{3,1} \cdot N_i}{A_1 A_3} + \frac{N_{i,1}}{A_1} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

olmak üzere $[B]$ matrisi $i=1$ den 20 ye kadar bu alt matrislerin yanyana konulması ile oluşan (60×6) boyutunda bir matristir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{Bmatrix}_{(6 \times 1)} = \begin{bmatrix} [B]_1 & [B]_2 & \cdots & [B]_{20} \end{bmatrix}_{(60 \times 6)} \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} u_{20} \\ v_{20} \\ w_{20} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}_{(60 \times 1)} \quad (4.13)$$

4.4 Eleman Rijitlik Matrisinin Hesabı

$[k]^e$ eleman rijitlik matrisi (60×60) boyutunda kare bir matristir. Bu matrisin herhangi bir ij elemanı,

$$[k_{ij}]^e = \int_v [B_i]^T [D] [B_j] dv \quad (4.14)$$

şeklinde hesaplanabilir. Verilen biçim fonksiyonları -1 ile $+1$ arasında verilen yerel koordinatlarda olduğu için eleman rijitlik matrisinde yerel koordinatlarda hesaplanması için dönüşüm yapılırsa,

$$[k_{ij}]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_i]^T [D] [B_j] |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.14)$$

şeklini alır. Burada $|J|$ Jacobien matrisin determinantıdır. İntegralde sınırlar -1 ile $+1$ arasında değiştiği için integral *Gauss-Legendre sayısal integrasyonu* ile,

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k \cdot f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k). \quad (4.16)$$

şeklinde hesaplanabilir. Gauss integrasyonunda fonksiyona; n pivot noktası olmak üzere; n . dereceden Legendre polinomunun kök değerleri verilir ve w_i ağırlık katsayıları ile çarpımlarının iç toplamı integrasyonun sayısal sonucunu verir. İntegre edilen fonksiyonda en yüksek polinom derecesi $(2 \times n - 1)$ ise, n adet pivot noktası alınırsa kesin sonuç bulunabilir. Gauss integrasyonu ile ilgili katsayılar Tablo 4.2 de verilmiştir.

Tablo 4.2 Gauss integrasyon katsayıları

n	x_i	w_i
1	$x_1=0$	$w_1=2$
2	$-x_1=x_2=0.577350269$	$w_1=w_2=1.00$
3	$-x_1=x_3=0.774596669$ $x_2=0.00$	$w_1=w_3=0.555555556$ $w_2=0.888888889$
4	$-x_1=x_4=0.861136312$ $-x_2=x_3=0.339981044$	$w_1=w_4=0.347854845$ $w_2=w_3=0.652145155$

4.5 Sistem Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

Sistemde herhangi bir düğüm noktasının, herhangi bir serbestliği doğrultusundaki rijitliği, bu düğüme komşu elemanların ilgili serbestlik doğrultusundaki rijitliklerinin toplamına eşittir. Sistemde serbestlikler doğrultusundaki rijitliklerin matris formunda yazılması ile sistem rijitlik matrisi $[K]$,

$$[K]\{D\}=\{F\} \quad (4.17)$$

şeklinde oluşturulur. Burada $\{F\}$ serbestlikler doğrultusundaki yüklerden oluşan, $\{D\}$ ise serbestlikler doğrultusundaki yer değiştirmelerden oluşan vektörlerdir.

$[K]$ sistem rijitlik matrisi kare matristir. Bu matrisin elemanlarını esas köşegen boyunca bant şeklinde elde etmek için sistem düğüm noktaları serbestlikleri uygun bir şekilde numaralandırılır. Sistem rijitlik matrisi maksimum yarı bant genişliği, her bir eleman içindeki serbestliklere verilen numaralar arası farkların en

büyükünün bir fazlasıdır. Katsayılar matrisi simetrik olduğu için sadece yarı bant üzerindeki elemanlarla işlem yapan denklem çözüm yöntemleri kullanılabilir. Bu durumda bilgisayarda sadece yarı bant kısım saklanır ve hafızadan tasarruf sağlanır. Lineer denklem sisteminin çözümünde *Cholesky yöntemi* kullanılmıştır.

Sistemde elemanların birleşim noktalarında ki tegetleri birbirine dik olacak şekilde seçilirse, sistem rijitlik matrisi eleman yerel koordinatlarında oluşturulabilir. Bu durumda dış yükler de yerel eksenlerdeki bileşenlerine dönüştürülür.

4.6 Yükleme Matrisleri

4.6.1 Genel koordinatlarda verilen yüzey yayılı yükleri

$\{p\}$ yüzey yayılı yüklerinin eleman üzerindeki dağılımı,

$$\{p\} = [N_p] \{p\}^e \quad (4.18)$$

şeklinde verilebilir. Burada $[N_p]$ yük dağılımı için seçilmiş biçim fonksiyonları, $\{p\}^e$ ise yayılı yüklerin düğüm noktalarındaki şiddetleridir.

$\{p\}$ nin u, v, w doğrultusundaki bileşenleri p_u, p_v, p_w seçilen biçim fonksiyonları ile

$$\begin{aligned} p_u &= \sum_{i=1}^n N_p^i \cdot p_u^i \\ p_v &= \sum_{i=1}^n N_p^i \cdot p_v^i \\ p_w &= \sum_{i=1}^n N_p^i \cdot p_w^i \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada p_u^i, p_v^i, p_w^i dış yayılı yüklerin düğüm noktalarındaki yer değiştirmeler (serbestlikler) doğrultusundaki bileşenleridir.

$$\{p^i\} = \begin{Bmatrix} p_u^i \\ p_v^i \\ p_w^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x^i \\ p_y^i \\ p_z^i \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

ve

$$\{p\}^e = \begin{Bmatrix} \{p^1\} \\ \{p^2\} \\ \vdots \\ \{p^{20}\} \end{Bmatrix}_{(60)} \quad (4.21)$$

olmak üzere,

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & 0 & 0 & \dots & N_{p20} & 0 & 0 \\ 0 & N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & 0 & \dots & 0 & N_{p20} & 0 \\ 0 & 0 & N_{p1} & 0 & 0 & N_{p2} & \dots & 0 & 0 & N_{p20} \end{bmatrix}_{(3 \times 60)} \{p\}^e \quad (4.22)$$

şeklinde yazılabilir. Eleman üzerindeki $\{p\}$ yayılı dış yüklerin bileşkesinin düğümlerdeki yer değiştirmeler doğrultusunda bileşenleri olan eşdeğer düğüm noktası kuvvetlerinden oluşan $\{f\}_p^e$ vektörü potansiyel enerjinin minimum olması koşulundan (3.22) bağıntısı ile

$$\{f\}_p^e = - \int_v [\underline{N}]^T \{p\} dv$$

şeklinde elde edilmişti. (4.18) deki $\{p\}$ değeri yerine konursa,

$$\{f\}_p^e = - \int_v [\underline{N}]^T [N_p] \{p\}^e dv \quad (4.23)$$

bulunur. Burada $\underline{N}$ ve N_p enterpolasyon fonksiyonları olarak daha önce rijitlik matrisinin eldesinde kullanılan biçim fonksiyonları kullanılabilir. Yayılı yük yüzey üzerinde etki etmektedir. buna karşın biçim fonksiyonları hacim üzerinde hesaplanmaktadır. Bu durumda hataları yoketmek için hacımsal elemanda yükün etki ettiği yüzeydeki düğüm noktası koordinatları sabit bırakılıp, elemanın diğer koordinatları ilgili yüzeye çok yaklaştırılırsa eleman bir yüzey elemanına dönüştürülebilir. Ayrıca elemanın iç düğüm noktalarında elde edilen yükler ilgili yüzey düğüm noktalarına aktarılırsa yüzeysel biçim fonksiyonlarına gerek kalmadan elemanda yüzey yayılı yüklerinden oluşan düğüm noktası kuvvetleri

elde edilebilir. Sistemde eleman yüzeylerine etkiyen yayılı yükler genel koordinatlar doğrultusunda verilirse yükleme matrisleri aşağıdaki şekilde düzenlenebilir.

$$[p]^e = \begin{bmatrix} p_x^1 & p_y^1 & p_z^1 \\ p_x^2 & p_y^2 & p_z^2 \\ p_x^3 & p_y^3 & p_z^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_x^{20} & p_y^{20} & p_z^{20} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Burada p_x^i, p_y^i, p_z^i eleman üzerindeki yayılı yükün i . düğüm noktasındaki x, y, z doğrultusundaki değerleridir.

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ \dots \ N_{20}]$$

$$[N_p] = [N_{p1} \ N_{p2} \ N_{p3} \ \dots \ N_{p20}]$$

olmak üzere N ve N_p olarak daha önce rijitlik matrisinin eldesinde kullanılan biçim fonksiyonları kullanılabilir. Sistem koordinatlarında verilen yükleri yerel koordinatlara dönüştürebilmek için dönüşüm matrisi $[T]_{3 \times 3}$ ve $[J]$ Jacobien matrisin determinantı olmak üzere ve yayılı yüzey yüklerinden oluşan eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri, yerel koordinatlarda aşağıdaki matris şeklinde gösterilirse,

$$[f_p] = \begin{bmatrix} f_{pu}^1 & f_{pv}^1 & f_{pw}^1 \\ f_{pu}^2 & f_{pv}^2 & f_{pw}^2 \\ f_{pu}^3 & f_{pv}^3 & f_{pw}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{pu}^{20} & f_{pv}^{20} & f_{pw}^{20} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$[f_p] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] [p]^e [T] [J] d\xi d\eta d\zeta \quad (4.26)$$

şeklinde genel koordinatlarda verilen yayılı yüzey yüklerinden oluşan eşdeğer eleman düğüm noktası kuvvetleri bulunur.

4.6.2 Yerel koordinatlarda verilen yüzey yayılı yükleri

Eleman üzerine etki eden yüzey yayılı yükleri yüzeyin normali doğrultusunda olduğu gibi yerel koordinatlar doğrultusunda verilmiş olabilir. Bu durumda $[p_r]$ yüzey yayılı yükleri için dönüşüm işlemine gerek yoktur. Yerel koordinatlarda verilen yüzey yayılı yüklerinden oluşan eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri,

$$[f_r] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T [N] [p_r]^e |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.27)$$

bağıntısı ile hesaplanabilir.

4.6.3 Hacımsal kuvvetler

Elemanın kendi öz ağırlığından oluşan hacımsal kuvvetlere eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri,

$$\{f_s\}^e = \int_v [N]^T \{X\} dv \quad (4.28)$$

Elemanda öz ağırlığının tesir etmesi halinde yerçekimi kuvvetinin tesiri sözkonusudur. Bu durumda,

$$[X] = \begin{Bmatrix} X_x = 0 \\ X_y = 0 \\ X_z = \gamma g \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Burada γ eleman birim hacim ağırlığı, g ise yerçekimi ivmesidir

$$[f_s]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\underline{N}]^T [X] [T] |J| d\xi d\eta d\zeta$$

$$[f_s]^e = \begin{bmatrix} f_u^1 & f_v^1 & f_w^1 \\ f_u^2 & f_v^2 & f_w^2 \\ f_u^3 & f_v^3 & f_w^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_u^{20} & f_v^{20} & f_w^{20} \end{bmatrix} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 & N_1 & N_1 \\ N_2 & N_2 & N_2 \\ N_3 & N_3 & N_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_{20} & N_{20} & N_{20} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta d\zeta \quad (4.30)$$

şeklinde hacımsal kuvvetlerden oluşan eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri bulunabilir. Burada yükün özelliğinden dolayı genel koordinatlardaki düğüm noktası yükleri dönüşüm matrisi ile çarpılıp yerel koordinatlara dönüştürüleceğinden matrisler yeniden düzenlenmiştir.

4.6.4 Dış tekil kuvvetler

Genel koordinatlarda doğrudan düğüm noktalarına etki eden yüklerdir. Bu yükler yerel koordinatlara dönüştürüleceğinden ilgili yük sistem düğüm noktasına değil, o düğüme bağlı olan herhangi bir elemanın ilgili düğüm noktasına etki ediyormuş gibi düşünülür, yükün dönüşümü eleman üzerinde yapılır.

$$\{f_e\} = \begin{Bmatrix} \{f_e^1\} \\ \{f_e^2\} \\ \vdots \\ \{f_e^{20}\} \end{Bmatrix}_{(60 \times 1)} \quad (4.31)$$

şeklinde düğüm noktası kuvvetleri matrisi yeniden düzenlenir,

$$\{f_e^i\} = \begin{Bmatrix} f_{eu}^i \\ f_{ev}^i \\ f_{ew}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}^i & T_{12}^i & T_{13}^i \\ T_{21}^i & T_{22}^i & T_{23}^i \\ T_{31}^i & T_{32}^i & T_{33}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{ex}^i \\ f_{ey}^i \\ f_{ez}^i \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

ve dönüşüm yapılırsa elemanda dış tekil kuvvetlerden oluşan matris,

$$[f_e^i] = \begin{bmatrix} f_{eu}^1 & f_{ev}^1 & f_{ew}^1 \\ f_{eu}^2 & f_{ev}^2 & f_{ew}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{eu}^{20} & f_{ev}^{20} & f_{ew}^{20} \end{bmatrix}_{(20 \times 3)} \quad (4.33)$$

şeklinde elde edilir.

4.6.5 Yüklerin süperpozisyonu

Eleman üzerine etkiyen, $[f_p]$ genel koordinatlarda ki yüzey yayılı yüklerinden, $[f_r]$ yerel koordinatlarda ki yüzey yayılı yüklerinden, $[f_s]$ hacımsal yayılı yüklerden ve $[f_e]$ dış tekil yüklerden oluşan düğüm noktaları kuvvetleri,

$$[f] = \begin{bmatrix} f_u^1 & f_v^1 & f_w^1 \\ f_u^2 & f_v^2 & f_w^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_u^{20} & f_v^{20} & f_w^{20} \end{bmatrix} = [f_p] + [f_r] + [f_s] + [f_e] \quad (4.34)$$

şeklinde süperpoze edilir. Hesap kolaylığı için iki boyutlu elde edilen eleman düğüm noktaları eşdeğer toplam yük matrisi vektöre dönüştürülerek, eleman serbestlik numaralarına göre sistem yük vektöründeki yerlerine aktarımı yapılır ve sistem yük vektörü oluşturulur.

$$\{f\}^T = [f_u^1 \ f_v^1 \ f_w^1 \ f_u^2 \ f_v^2 \ f_w^2 \ \dots \ f_u^{20} \ f_v^{20} \ f_w^{20}]_{(60 \times 1)} \quad (4.35)$$

BÖLÜM 5 SONLU ELEMANLARDA KABUK GEOMETRİK BÜYÜKLÜKLERİ

Bu bölümde kabuk yüzey geometrisini tanımlamak amacı ile seçilen biçim fonksiyonları yardımıyla, kabuk sonlu elemanın hesabında kullanılmak üzere noktadan noktaya değişen kabuk geometrik büyüklükleri olarak adlandırılan Lamé katsayıları ve eğrilik yarıçapları ve bunlara ait türevler hesaplanacaktır.

5.1 Biçim Fonksiyonlarının Koordinat Dönüşümünde Kullanılması

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ yüzey eğrisel koordinatları cinsinden tanımlanan kabuk üzerindeki herhangi bir noktanın $\vec{r}$ konum vektörü (2.1) bağıntısı ile bilinmektedir. $\vec{r}$ konum vektörü elemanda yüzey geometrisini tanımlamak amacıyla kullanılan $N_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ biçim fonksiyonları cinsinden,

$$\vec{r}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \sum_{i=1}^n N_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \cdot \vec{r}(x, y, z)$$

şeklinde yazılabilir. Daha açık ifadeyle,

$$\vec{r} = \left(\sum N_{i,1} x_i \right) \vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,2} y_i \right) \vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,3} z_i \right) \vec{e}_3 \quad (5.1)$$

olur. (2.5) ve (2.6) ifadelerinde kabuğun I. ve II. ana formunu belirleyen E , G , H , L , N ve O değerleri konum vektörüne, dolayısı ile biçim fonksiyonlarına bağlı olarak elde edilmesi gereken büyüklüklerdir. $\alpha_1 \rightarrow \xi$ ye, $\alpha_2 \rightarrow \eta$ ya ve $\alpha_3 \rightarrow \zeta$ ya karşılık gelmek üzere $\vec{r}$ konum vektörünün 1. türevleri,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{,1} &= \left(\sum N_{i,1} x_i \right) \vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,2} y_i \right) \vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,3} z_i \right) \vec{e}_3 \\ \vec{r}_{,2} &= \left(\sum N_{i,2} x_i \right) \vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,2} y_i \right) \vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,2} z_i \right) \vec{e}_3 \\ \vec{r}_{,3} &= \left(\sum N_{i,3} x_i \right) \vec{e}_1 + \left(\sum N_{i,3} y_i \right) \vec{e}_2 + \left(\sum N_{i,3} z_i \right) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu türevler yardımıyla kabuk Lamé katsayıları A_1 , A_2 , A_3 ,

$$\begin{aligned}
A_1^2 &= \vec{r}_{,1} \cdot \vec{r}_{,1} = \left(\sum N_{i,1} x_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,1} y_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,1} z_i \right)^2 \\
A_1 &= \sqrt{\left(\sum N_{i,1} x_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,1} y_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,1} z_i \right)^2} \\
A_2 &= \sqrt{\left(\sum N_{i,2} x_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,2} y_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,2} z_i \right)^2} \\
A_3 &= \sqrt{\left(\sum N_{i,3} x_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,3} y_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,3} z_i \right)^2}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir, ifade genelleştirilirse,

$$A_k = \sqrt{\left(\sum N_{i,k} x_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,k} y_i \right)^2 + \left(\sum N_{i,k} z_i \right)^2} \quad (5.3)$$

elde edilir. A_k nın l doğrultusunda türevi alınır,

$$A_{k,l} = \frac{1}{A_k} \left[\left(\sum N_{i,k} x_i \right) \left(\sum N_{i,l} x_i \right) + \left(\sum N_{i,k} y_i \right) \left(\sum N_{i,l} y_i \right) + \left(\sum N_{i,k} z_i \right) \left(\sum N_{i,l} z_i \right) \right] \quad (5.4)$$

şeklinde elde edilir. Burada $N_{i,k}$ i . şekil fonksiyonunun k doğrultusundaki türevinin, l doğrultusundaki türevidir.

5.2 Kabuk Ana Formları ve Eğrilik Yarıçapları

Bölüm 2.2.1 de genel olarak verilen ifadelerde, kabuk üzerindeki yay elemanın boyu,

$$ds^2 = A_1^2 d\xi^2 + A_2^2 d\eta^2 + A_3^2 d\zeta^2 \quad (5.5)$$

kabuk *I. Ana Formu* şeklinde verilmişti. Bu ifadedeki A_1, A_2, A_3 değerleri biçim fonksiyonları yardımıyla, (5.3) bağıntıları ile sayısal olarak elde edilebilir.

Kabuğun 3. doğrultudaki türevi, bu doğrultunun teğetidir. Bu teğet aynı zamanda yüzeyin normali doğrultusundadır. Bu durumda yüzeyin normali için,

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_{,3}}{|\vec{r}_{,3}|} \quad (5.6a)$$

özdeşliği sözkonusudur. İfade daha açık yazılırsa,

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_{,3}}{|\vec{r}_{,3}|} = \frac{(\sum N_{i,3} \cdot x_i) \vec{e}_1 + (\sum N_{i,3} \cdot y_i) \vec{e}_2 + (\sum N_{i,3} \cdot z_i) \vec{e}_3}{\sqrt{(\sum N_{i,3} \cdot x_i)^2 + (\sum N_{i,3} \cdot y_i)^2 + (\sum N_{i,3} \cdot z_i)^2}} \quad (5.6b)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{A_3} \vec{r}_{,3}$$

şeklinde elde edilir. (2.6) ifadesinde ki kabuk *II. Ana Formu*'nda,

$$\begin{aligned} L &= -\vec{r}_{,11} \cdot \vec{n} \\ N &= -\vec{r}_{,22} \cdot \vec{n} \\ O &= -\vec{r}_{,33} \cdot \vec{n} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$d\vec{n} \cdot d\vec{r} = L \cdot d\xi^2 + N \cdot d\eta^2 + O \cdot d\zeta^2 \quad (5.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada konum vektörünün ikinci türevleri,

$$\begin{aligned} \vec{r}_{,11} &= (\sum N_{i,11} \cdot x_i) \vec{e}_1 + (\sum N_{i,11} \cdot y_i) \vec{e}_2 + (\sum N_{i,11} \cdot z_i) \vec{e}_3 \\ \vec{r}_{,22} &= (\sum N_{i,22} \cdot x_i) \vec{e}_1 + (\sum N_{i,22} \cdot y_i) \vec{e}_2 + (\sum N_{i,22} \cdot z_i) \vec{e}_3 \\ \vec{r}_{,33} &= (\sum N_{i,33} \cdot x_i) \vec{e}_1 + (\sum N_{i,33} \cdot y_i) \vec{e}_2 + (\sum N_{i,33} \cdot z_i) \vec{e}_3 \end{aligned} \quad (5.8)$$

şeklinde elde edilir. Kabuk üzerinde herhangi bir eğrilik,

$$K_n = \frac{L \cdot d\xi^2 + N \cdot d\eta^2 + O \cdot d\zeta^2}{E \cdot d\xi^2 + G \cdot d\eta^2 + H \cdot d\zeta^2} \quad (5.9)$$

ve asal eğrilikler,

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{L}{E} \\ K_2 &= \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \\ K_3 &= \frac{1}{R_3} = \frac{O}{H} \end{aligned} \quad (5.10)$$

şeklinde, yine biçim fonksiyonları yardımıyla elde edilebilir.

5.3 Kabuk Geometrik Büyüklüklerinin Matris İşlemleri ile Elde Edilmesi

Kabuk geometrik büyüklüklerini matris işlemleri ile elde edebilmek için aşağıdaki matrisler oluşturulursa, eleman düğüm noktaları koordinatları matrisi $[KOOR]$,

$$[KOOR] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{20} & y_{20} & z_{20} \end{bmatrix}_{(20 \times 3)} \quad (5.11)$$

Biçim fonksiyonlarının birinci türevlerinden oluşan matris $[DER1]$,

$$[DER1] = \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{2,1} & N_{3,1} & \cdots & N_{20,1} \\ N_{1,2} & N_{2,2} & N_{3,2} & \cdots & N_{20,2} \\ N_{1,3} & N_{2,3} & N_{3,3} & \cdots & N_{20,3} \end{bmatrix}_{(20 \times 3)} \quad (5.12)$$

ve biçim fonksiyonlarının ikinci türevlerinden oluşan matris $[DER2]$,

$$[DER2] = \begin{bmatrix} N_{1,11} & N_{2,11} & N_{3,11} & \cdots & N_{20,11} \\ N_{1,12} & N_{2,12} & N_{3,12} & \cdots & N_{20,12} \\ N_{1,13} & N_{2,13} & N_{3,13} & \cdots & N_{20,13} \\ N_{1,21} & N_{2,21} & N_{3,21} & \cdots & N_{20,21} \\ N_{1,22} & N_{2,22} & N_{3,22} & \cdots & N_{20,22} \\ N_{1,23} & N_{2,23} & N_{3,23} & \cdots & N_{20,23} \\ N_{1,31} & N_{2,31} & N_{3,31} & \cdots & N_{20,31} \\ N_{1,32} & N_{2,32} & N_{3,32} & \cdots & N_{20,32} \\ N_{1,33} & N_{2,33} & N_{3,33} & \cdots & N_{20,33} \end{bmatrix}_{(20 \times 9)} \quad (5.13)$$

şeklinde oluşturulabilir. Bu matrislerin elemanları biçim fonksiyonları ve türevleri yardımıyla istenilen noktada sayısal olarak elde edilebilir.

Oluşturulan bu matrislerle aşağıdaki matris işlemleri yapılırsa.

$$[JAC] = [DER1] \cdot [KOOR] = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$[D2K] = [DER2].[KOOR] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} \\ K_{91} & K_{92} & K_{93} \end{bmatrix}_{(9 \times 3)} \quad (5.15)$$

$$[D1J] = [JAC].[JAC]^T = \begin{bmatrix} DJ_{11} & DJ_{12} & DJ_{13} \\ DJ_{21} & DJ_{22} & DJ_{23} \\ DJ_{31} & DJ_{32} & DJ_{33} \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad (5.16)$$

$$[D2J] = [D2K].[JAC]^T = \begin{bmatrix} KJ_{11} & KJ_{12} & KJ_{13} \\ KJ_{21} & KJ_{22} & KJ_{23} \\ KJ_{31} & KJ_{32} & KJ_{33} \\ KJ_{41} & KJ_{42} & KJ_{43} \\ KJ_{51} & KJ_{52} & KJ_{53} \\ KJ_{61} & KJ_{62} & KJ_{63} \\ KJ_{71} & KJ_{72} & KJ_{73} \\ KJ_{81} & KJ_{82} & KJ_{83} \\ KJ_{91} & KJ_{92} & KJ_{93} \end{bmatrix}_{(9 \times 3)} \quad (5.17)$$

matrisleri elde edilir. Bu durumda kabuk geometrik büyüklükleri ve türevleri,

$$\begin{aligned} A_1 &= \sqrt{DJ_{11}} \\ A_2 &= \sqrt{DJ_{22}} \\ A_3 &= \sqrt{DJ_{33}} \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{1}{A_1} \cdot KJ_{11} \\ A_{1,2} &= \frac{1}{A_1} \cdot KJ_{21} \\ A_{1,3} &= \frac{1}{A_1} \cdot KJ_{31} \end{aligned} \quad (5.19a)$$

$$\begin{aligned}
A_{2,1} &= \frac{1}{A_2} \cdot KJ_{42} \\
A_{2,2} &= \frac{1}{A_2} \cdot KJ_{52} \\
A_{2,3} &= \frac{1}{A_2} \cdot KJ_{62} \\
A_{3,1} &= \frac{1}{A_3} \cdot KJ_{73} \\
A_{3,2} &= \frac{1}{A_3} \cdot KJ_{83} \\
A_{3,3} &= \frac{1}{A_3} \cdot KJ_{93}
\end{aligned} \tag{5.19b}$$

şeklinde, kabuk *II.Ana Formu* katsayıları,

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{A_3} KJ_{13} \\
N &= -\frac{1}{A_3} KJ_{53} \\
O &= -\frac{1}{A_3} KJ_{93}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

şeklinde, kabuk eğrilik yarıçapları ise

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{A_1^2}{L} = \frac{A_1^2 \cdot A_3}{KJ_{13}} \\
R_2 &= \frac{A_2^2}{N} = \frac{A_2^2 \cdot A_3}{KJ_{53}} \\
R_3 &= \frac{A_3^2}{O} = \frac{A_3^2 \cdot A_3}{KJ_{93}}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

şeklinde, bütün büyüklükler elde edilen matrislerin elemanlarından elde edilir.

5.4 Jacobien Matris

Bilindiği gibi Jacobien matris genel koordinatlara göre türevlerin ,yerel koordinatlara göre türevlerine dönüşümünü sağlayan matristir.

$$[J] = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

Bu matris sayısal olarak matris işlemleri ile (5.14) bağıntısı ile elde edilmiştir.

5.5 Dönüşüm Matrisi

Genel koordinatlarda verilen yükleri yerel koordinatlara dönüştürmek için kullanılan dönüşüm matrisi,

$$\begin{aligned} \vec{t}_{,1} &= \frac{\vec{r}_{,1}}{|\vec{r}_{,1}|} = \frac{\vec{r}_{,1}}{A_1} \\ \vec{t}_{,2} &= \frac{\vec{r}_{,2}}{|\vec{r}_{,2}|} = \frac{\vec{r}_{,2}}{A_2} \\ \vec{n} &= \frac{\vec{r}_{,1} \times \vec{r}_{,2}}{A_1 \cdot A_2} = \frac{\vec{r}_{,3}}{A_3} \end{aligned} \quad (5.23)$$

şeklinde herhangi bir noktadaki birim vektör elemanları elde edilebilir.

Yükler, $P_x \cdot \vec{e}_1 + P_y \cdot \vec{e}_2 + P_z \cdot \vec{e}_3$ olarak verilirse,

$$\xi \text{ doğrultusunda} \quad \frac{1}{A_1} (P_x \sum N_{i,1} \cdot x_i + P_y \sum N_{i,1} \cdot y_i + P_z \sum N_{i,1} \cdot z_i)$$

$$\eta \text{ doğrultusunda} \quad \frac{1}{A_2} (P_x \sum N_{i,2} \cdot x_i + P_y \sum N_{i,2} \cdot y_i + P_z \sum N_{i,2} \cdot z_i)$$

$$\zeta \text{ doğrultusunda} \quad \frac{1}{A_3} (P_x \sum N_{i,3} \cdot x_i + P_y \sum N_{i,3} \cdot y_i + P_z \sum N_{i,3} \cdot z_i)$$

şeklinde bulunur. İfadeler matris formunda yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} P_{\xi} \\ P_{\eta} \\ P_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum N_{i,1} \cdot x_i}{A_1} & \frac{\sum N_{i,1} \cdot y_i}{A_1} & \frac{\sum N_{i,1} \cdot z_i}{A_1} \\ \frac{\sum N_{i,2} \cdot x_i}{A_2} & \frac{\sum N_{i,2} \cdot y_i}{A_2} & \frac{\sum N_{i,2} \cdot z_i}{A_2} \\ \frac{\sum N_{i,3} \cdot x_i}{A_3} & \frac{\sum N_{i,3} \cdot y_i}{A_3} & \frac{\sum N_{i,3} \cdot z_i}{A_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

şeklinde elde edilir. Aradaki dönüşümü sağlayan $[T]$ dönüşüm matrisi,

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{J_{11}}{A_1} & \frac{J_{12}}{A_1} & \frac{J_{13}}{A_1} \\ \frac{J_{21}}{A_2} & \frac{J_{22}}{A_2} & \frac{J_{23}}{A_2} \\ \frac{J_{31}}{A_3} & \frac{J_{32}}{A_3} & \frac{J_{33}}{A_3} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

şeklinde kabuk geometrik büyüklüklerine bağlı olarak hesaplanır.

Bu matrisin dönüşüm matrisi olduğunu göstermek üzere,

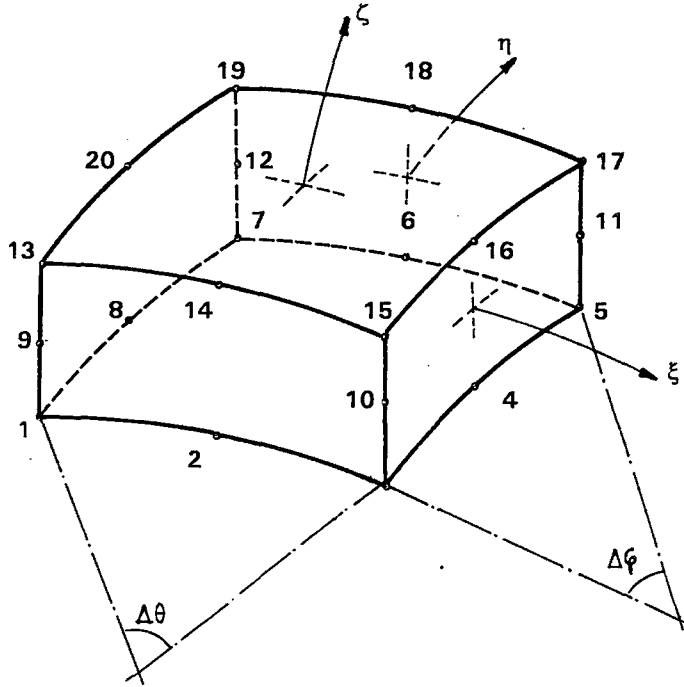
$$|T| = 1.0$$

$$[T] \cdot [T]^T = [I]$$

işlemleri yapılmış, sonuçların sağladığı görülmüştür.

5.6 Kabuk Geometrik Büyüklüklerinin Hesabı için Örnek

Kabuk geometrik büyüklükleri, Şekil 5.1 de görülen küresel bir kabuk elemanda analitik olarak hesaplanmış ve biçim fonksiyonları ile bulunan değerlerle karşılaştırma yapmak için Tablo 5.1 de ayrı ayrı verilmiştir. Sonuçların birbirine yeterli yaklaşıklıkta olduğu görülmüştür.



$$\Theta = -2.5^\circ / +2.5^\circ$$

$$\varphi = +5.0^\circ / +10.0^\circ$$

$$R_0 = 10.0 \text{ m}$$

$$h_k = 0.40 \text{ m}$$

$$\alpha_1 \rightarrow \Theta$$

$$\alpha_2 \rightarrow \varphi$$

$$\alpha_3 \rightarrow r$$

r :küre yarıçapı

h_k :kabuk kalınlığı

Şekil 5.1 Küresel kabuk eleman

Kartezyen koordinatlarda

$$ds_1 = r \cdot \sin \varphi \cdot d\alpha_1$$

$$ds_2 = r \cdot d\alpha_2$$

$$ds_3 = d\alpha_3$$

$$d\xi = C_1 \cdot d\Theta$$

$$\Delta\xi = C_1 \cdot \Delta\Theta \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta\xi}{\Delta\Theta} = \frac{2}{\frac{5\pi}{180^\circ}} = 22.9183181$$

$$ds_1 = A_1 \cdot d\xi = \frac{r \cdot \sin \varphi}{C_1} \dots \Rightarrow A_1 = \frac{r \cdot \sin \varphi}{C_1} \quad (5.26a)$$

$$d\eta = C_2 \cdot d\varphi$$

$$\Delta\eta = C_2 \cdot \Delta\varphi \Rightarrow C_2 = \frac{\Delta\eta}{\Delta\varphi} = \frac{2}{\frac{5\pi}{180^\circ}} = 22.9183181$$

$$ds_2 = A_2 \cdot d\eta = \frac{r}{C_2} \dots \Rightarrow A_2 = \frac{r}{C_2} \quad (5.26b)$$

$$d\zeta = C_3 \cdot dr$$

$$\Delta\zeta = C_3 \cdot \Delta r \Rightarrow C_3 = \frac{\Delta\zeta}{\Delta r} = \frac{2}{h_k}$$

$$ds_3 = A_3 \cdot d\zeta = \frac{1}{C_3} \dots \Rightarrow A_3 = \frac{1}{C_3} = \frac{h_k}{2} \quad (5.26c)$$

Tablo 5.1 Küresel kabuk elemanda kabuk geometrik büyüklükleri

(R=10.00m $\varphi = 5.0^\circ - 10.0^\circ$ $\theta = -2.5^\circ - +2.5^\circ$ $h_k=0.40m$)

No	A1	A2	A3	A1,1	A1,2	A1,3	A2,1	A2,2	A2,3	A3,1	A3,2	A3,3	R1	R2
1	0.074300	0.427877	0.20000	-0.000141	-0.018398	0.001516	0.000004	-0.000813	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	9.823341	9.823341
1	0.074253	0.427806	0.20000	-0.000141	-0.018374	0.001515	0.000000	-0.000814	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
2	0.074229	0.427879	0.20000	0.000000	-0.018380	0.001515	0.000000	-0.000816	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	9.795336	9.823658
2	0.074253	0.427806	0.20000	0.000000	-0.018374	0.001515	0.000000	-0.000814	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
3	0.074300	0.427877	0.20000	0.000141	-0.018398	0.001516	-0.000004	-0.000813	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	9.823341	9.823341
3	0.074253	0.427806	0.20000	0.000141	-0.018374	0.001515	0.000000	-0.000814	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
4	0.055849	0.427470	0.20000	0.000106	-0.018504	0.001140	0.000000	0.000000	0.008724	0.00000	0.00000	0.00000	9.832664	9.795336
4	0.055814	0.427606	0.20000	0.000106	-0.018498	0.001139	0.000000	0.000000	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
5	0.037292	0.427877	0.20000	0.000071	-0.018610	0.000761	0.000005	0.000813	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	9.823341	9.823341
5	0.037268	0.427806	0.20000	0.000071	-0.018587	0.000761	0.000000	0.000814	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
6	0.037266	0.427875	0.20000	0.000000	-0.018593	0.000760	0.000000	0.000811	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	9.795336	9.823341
6	0.037268	0.427806	0.20000	0.000000	-0.018587	0.000761	0.000000	0.000814	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
7	0.037292	0.427877	0.20000	-0.000071	-0.018610	0.000761	-0.000005	0.000813	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	9.823341	9.823341
7	0.037268	0.427806	0.20000	-0.000071	-0.018587	0.000761	0.000000	0.000814	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
8	0.055849	0.427470	0.20000	-0.000106	-0.018504	0.001140	0.000000	0.000000	0.008724	0.00000	0.00000	0.00000	9.832664	9.795336
8	0.055814	0.427606	0.20000	-0.000106	-0.018498	0.001139	0.000000	0.000000	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	9.800000	9.800000
9	0.075768	0.436609	0.20000	-0.000144	-0.018773	0.001516	0.000004	-0.000830	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.02382	10.02382
9	0.075768	0.436332	0.20000	-0.000144	-0.018749	0.001515	0.000000	-0.000831	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.00000	10.00000
10	0.075768	0.436609	0.20000	0.000144	-0.018773	0.001516	-0.000004	-0.000830	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.02382	10.02382
10	0.075768	0.436332	0.20000	0.000144	-0.018749	0.001515	0.000000	-0.000831	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.00000	10.00000
11	0.038053	0.436609	0.20000	0.000072	-0.018990	0.000761	0.000005	0.000830	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.02382	10.02382
11	0.038029	0.436332	0.20000	0.000072	-0.018966	0.000761	0.000000	0.000831	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.00000	10.00000
12	0.038053	0.436609	0.20000	-0.000072	-0.018990	0.000761	-0.000005	0.000830	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.02382	10.02382
12	0.038029	0.436332	0.20000	-0.000072	-0.018966	0.000761	0.000000	0.000831	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.00000	10.00000
13	0.077333	0.445341	0.20000	-0.000147	-0.019149	0.001516	0.000004	-0.000847	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.22429	10.22429
13	0.077284	0.445059	0.20000	-0.000147	-0.019124	0.001515	0.000000	-0.000847	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
14	0.077259	0.445344	0.20000	0.000000	-0.019130	0.001515	0.000000	-0.000849	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.19515	10.22462
14	0.077284	0.445059	0.20000	0.000000	-0.019124	0.001515	0.000000	-0.000847	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
15	0.077333	0.445341	0.20000	0.000147	-0.019149	0.001516	-0.000004	-0.000847	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.22429	10.22429
15	0.077284	0.445059	0.20000	0.000147	-0.019124	0.001515	0.000000	-0.000847	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
16	0.058129	0.444918	0.20000	0.000110	-0.019259	0.001140	0.000000	0.000000	0.008724	0.00000	0.00000	0.00000	10.23399	10.19515
16	0.058092	0.445059	0.20000	0.000111	-0.019253	0.001139	0.000000	0.000000	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
17	0.038814	0.445341	0.20000	0.000074	-0.019370	0.000761	0.000005	0.000847	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.22429	10.22429
17	0.038789	0.445059	0.20000	0.000074	-0.019345	0.000761	0.000000	0.000847	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
18	0.038777	0.445339	0.20000	0.000000	-0.019352	0.000760	0.000000	0.000844	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.19515	10.22429
18	0.038789	0.445059	0.20000	0.000000	-0.019345	0.000761	0.000000	0.000847	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
19	0.038814	0.445341	0.20000	-0.000074	-0.019370	0.000761	-0.000005	0.000847	0.008732	0.00000	0.00000	0.00000	10.22429	10.22429
19	0.038789	0.445059	0.20000	-0.000074	-0.019345	0.000761	0.000000	0.000847	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000
20	0.058129	0.444918	0.20000	-0.000110	-0.019259	0.001140	0.000000	0.000000	0.008724	0.00000	0.00000	0.00000	10.23399	10.19515
20	0.058092	0.445059	0.20000	-0.000111	-0.019253	0.001139	0.000000	0.000000	0.008727	0.00000	0.00000	0.00000	10.20000	10.20000

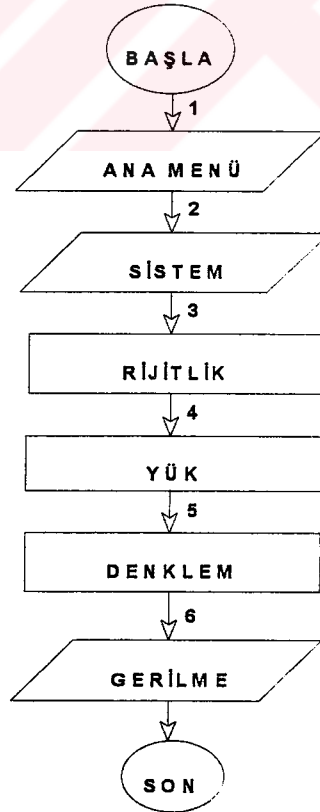
Koyu ve üstteki rakamlar Biçim fonksiyonları ile, açık ve alttaki rakamlar ise Analitik çözüm ile bulunan değerlerdir.

BÖLÜM 6 BİLGİSAYAR PROGRAMI

Genel biçimli kalın kabukların üç boyutlu 20 düğüm noktalı izoparametrik sonlu elemanlarla çözümü için, FORTRAN 77 programlama dilinde kodlanmış KUMKA isimli bir bilgisayar programı geliştirilmiştir.

6.1 Programın Yapısı ve Çalışma Düzeni

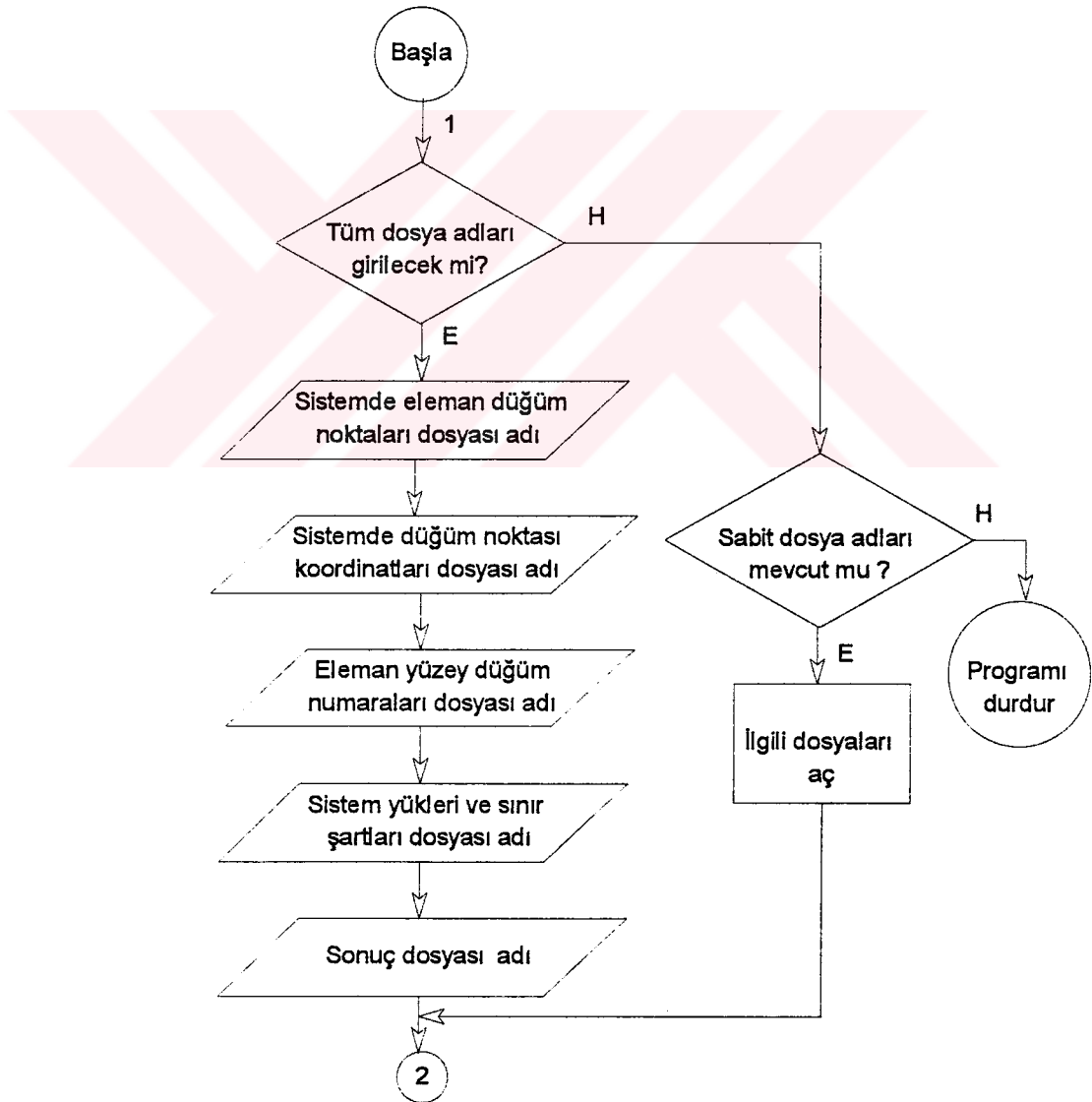
KUMKA programında, ana program başka tip elemanlara da kolayca dönüşüm sağlamak amacıyla, işlemlerin alt programlara yönlendirilerek sonuçlandırıldığı bir düzende kurulmaya çalışılmıştır. Alt programlar seçilen elemanla ilgili işlemlerin yapıldığı *özel* ve genel işlemlerin yapıldığı *arşiv* alt programları şeklinde iki grupta düzenlenmiştir [44]. Genel akış diyagramı Şekil 6.1 de verilmiştir.



Şekil 6.1 KUMKA bilgisayar programı genel akış diyagramı

6.1.1 MENU alt programı

Program çalıştırıldığında önce bu alt programa yönlendirilmektedir. Bu programda icra sırasında okunacak dosyalar ki sırasıyla sistem elemanlarının bağlı bulunduğu düğüm noktaları, sistem düğüm noktası koordinatları, elemanın yüzeylerinin düğüm numaraları ve sisteme etki eden yüklerin ve sınır şartlarının verildiği önceden hazırlanan 4 dosyanın ve sonuçların yazılacağı dosyanın adları belirlenmekte ve ilgili dosyaların mevcut olup olmadığı kontrol edilmektedir. Eğer giriş çıkış dosya adları sabit ise dosya adları sorulmamakta, dosya isimleri hatalı ise program durdurulmaktadır. Akış diyagramı Şekil 6.2 de verilmiştir.



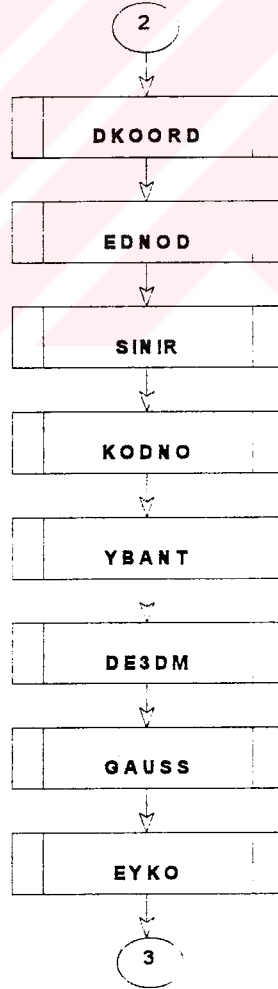
Şekil 6.2 MENU alt programı akış diyagramı

6.1.2 SİSTEM ana program parçası ve sistem alt programları

Yapı sisteminin eleman ve düğüm noktası sayısı DUGUM dosyasından, malzeme özellikleri, deplasmanları tutulan düğüm noktaları ve yük sayıları YUK dosyasından okutulmaktadır. Bu bilgiler ışığında sistem alt programları çağrılmaktadır. Akış diyagramı Şekil 6.3 te verilmiştir. Çağrılan alt programlarla ilgili kısa açıklamalar aşağıda verilmiştir.

DKOORD alt programı: Sistem düğüm noktası koordinatlarının KOORD dosyasından okunmasını sağlayan bir alt programdır.

EDNOD alt programı: Elemanların sistemde bağlı bulunduğu düğüm noktalarını sıra ile DUGUM dosyasından okunmasını sağlayan bir alt programdır.



Şekil 6.3 SİSTEM ana program parçası akış diyagramı

SINIR alt programı: Bu alt programda YUK dosyasından deplasmanları tutulmuş düğüm noktaları ve doğrultuları okunur. Serbest bırakılan doğrultulara 0, tutulmuş doğrultulara 1 değişkeni verilerek, I numaralı düğümün, J. serbestliği olmak üzere NDT(I,J) dizisindeki yerine atanır.

KODNO alt programı: Bu alt programda sistem düğüm noktalarına sıra ile deplasman numarası (kod numarası) verilir. Deplasmanı tutulu düğüm noktalarında ise ilgili deplasman doğrultusunda deplasman numarası olarak sıfır verilir.

YBANT alt programı: Bu alt program sistem rijitlik matrisi maksimum yarı bant genişliğini bulur. Her bir elemandaki deplasman numaraları arası farkın bir fazlasının en büyük değeri sistem rijitlik matrisi maksimum yarı bant genişliğine eşittir.

DE3DM alt programı: 3 boyutlu eleman elastisite matrisini hesaplayan bir alt programdır.

GAUSS alt programı: Bu alt program Gauss pivot noktası sayısına bağlı olarak Gauss-Legendre integral katsayılarını okur.

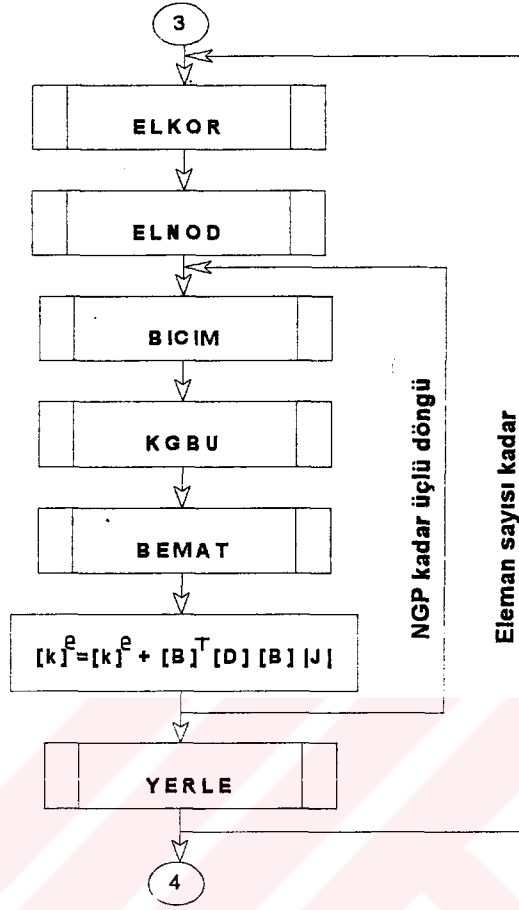
EYKO alt programı: Bu alt program 20 düğüm noktalı izoparametrik sonlu elemana ait -1 ile +1 arasında değişen eleman yerel koordinatları okur.

6.1.3 RİJİTLİK matrisi ana program parçası

Bu program Gauss pivot noktası kadar üçlü döngü yaparak her bir elamanda eleman rijitlik matrisini hesaplar ve bu matris elemanlarını sistem rijitlik matrisindeki yerlerine atar. Akış diyagramı Şekil 6.4 de verilmiştir.

ELKOR alt programı: Her bir elemanın düğüm noktalarının genel eksenlerdeki koordinatlarını hesaplayan bir alt programdır.

BICIM alt programı: Elemana ait biçim fonksiyonları ve biçim fonksiyonlarının 1. ve 2. türevlerini sayısal olarak hesaplayan bir alt programdır.



Şekil 6.4 Sistem rijitlik matrisi oluşturulması akış diyagramı

ELNOD alt programı: Elemanın sistemle ilgili tek boyutlu dizi olarak hesaplanan bilgilerini i.düğümün j. serbestliği doğrultusundaki bilgi şeklinde iki boyutlu dizilere dönüştüren bir alt programdır.

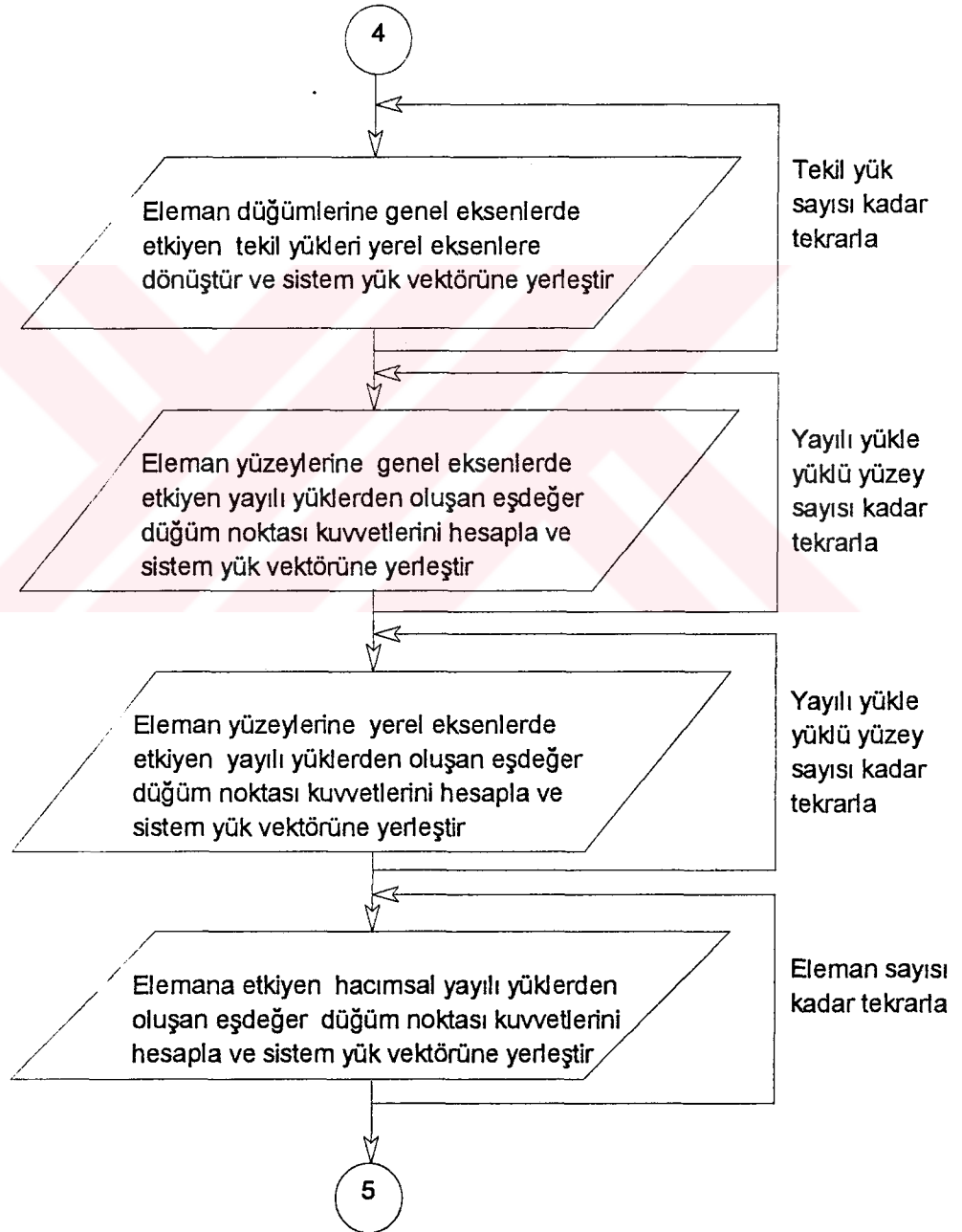
KGBU alt programı: Biçim fonksiyonları ve türevleri yardımıyla kabuk elemanın [B] matrisi oluşturulurken gerekli olacak kabuk geometrik büyüklükleri ve türevlerini sayısal olarak hesaplayan bir alt programdır.

BEMAT alt programı: Elemanın [B] matrisinin elemanlarını sayısal olarak hesaplayan bir alt programdır.

YERLE alt programı: Elemanın düğüm noktalarının deplasman numaraları yardımıyla eleman rijitlik matrisi elemanlarını, sistem rijitlik matrisindeki yerlerine atayan bir alt programdır.

6.1.4 YUK alt programı

Eleman yüzeylerine genel veya yerel koordinatlar doğrultusunda etki eden yayılı yükler, hacımsal yayılı yükler ve eleman düğüm noktalarına genel koordinatlar doğrultusunda etki eden tekil yüklerden dolayı oluşan eleman eşdeğer düğüm noktası kuvvetlerini hesaplayan ve sistem yük vektöründeki yerlerine yerleştiren bir alt programdır. Akış diyagramı Şekil 6.5 te verilmiştir.



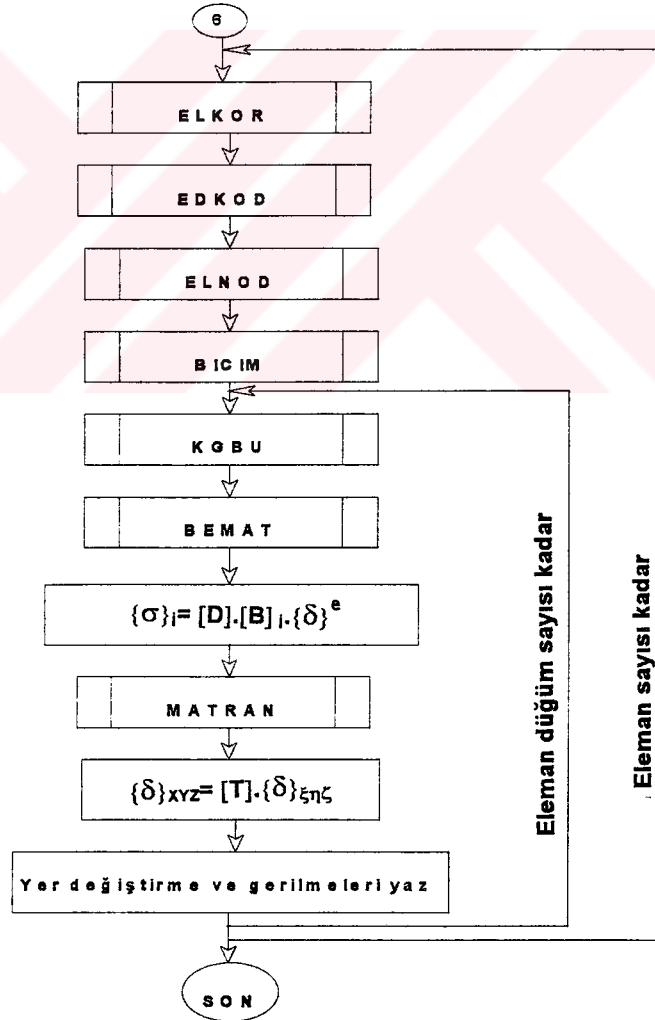
Şekil 6.5 YUK alt programı akış diyagramı

6.1.5 DENKLEM alt programı

Yarı bant şeklinde oluşturulan denklem takımını çözen bir alt programdır. Çözümde Cholesky metodu kullanılmıştır.

6.1.6 GERİLME alt programı

Hesaplanan eleman düğüm noktası yer değiştirmeleri ve eleman sistem bilgileri ile elemanın düğüm noktalarında oluşan gerilmeleri hesaplayan ve sonuç dosyasına yazan bir alt programdır. Daha anlamlı olması için yer değiştirmeler genel, gerilmeler ise yerel koordinatlar doğrultusunda hesaplanmıştır. Akış diyagramı Şekil 6.6 da verilmiştir.



Şekil 6.6 GERİLME alt programı akış diyagramı

MATRAN alt programı : Elemanın her bir düğüm noktasında biçim fonksiyonları ve eleman düğüm noktası genel ve yerel koordinatları yardımıyla ilgili düğüm noktasına ait dönüşüm matrisini hesaplayan bir alt programdır.

6.2 Bilgisayar Programının Kullanılması

Genel biçimli kalın kabukların çözümü için geliştirilen bu programda öncelikle; örnek olarak adları DUGUM.DAT, KOORD.DAT, YUZEY.DAT ve YUK.DAT şeklinde olabilecek; içerikleri aşağıda açıklanan 4 adet dosya hazırlanacaktır.

6.2.1 DUGUM.DAT ve KOORD.DAT dosyaları

Ana programın icrası sırasında kullanılacak bu dosyalarda, sistemde elemanların bağlı bulunduğu düğüm noktası numaraları ve genel koordinatlarda sistem düğüm noktası koordinatlarının bulunması gerekir. Prizmatik, silindirik ve küresel kabuk gibi geometrisi ve sistem ağırları düzenli olan kabuk biçimleri için yukarıda belirtilen dosyaları otomatik olarak hesaplayan *Dikkor*, *Silkor* ve *Kurekor* adlarında üç ayrı program geliştirilmiştir. gerektiğinde karmaşık geometriye sahip olmayan kabuk biçimleri içinde bu programlar geliştirilebilir. Karışık geometriye sahip kabuk biçimlerinde ise bu dosyaların el ile veya yarı otomatik olarak yazılması gerekir. Yukarıda belirtilen biçimlere sahip kabuk parçaları için geliştirilen programlara ait data dosyaları ve değişkenlerin açıklamaları aşağıda verilmiştir.

dikkor.dat dosyası :

MBS, MES, MYS, DKOX, DKOY, DKOZ, TBL, TEL, HK

silkor.dat dosyası :

MBS, MES, MYS, DKOX, DKOY, DKOZ, TBL, TE1, TE2, RI1, HK

kurekor.dat dosyası :

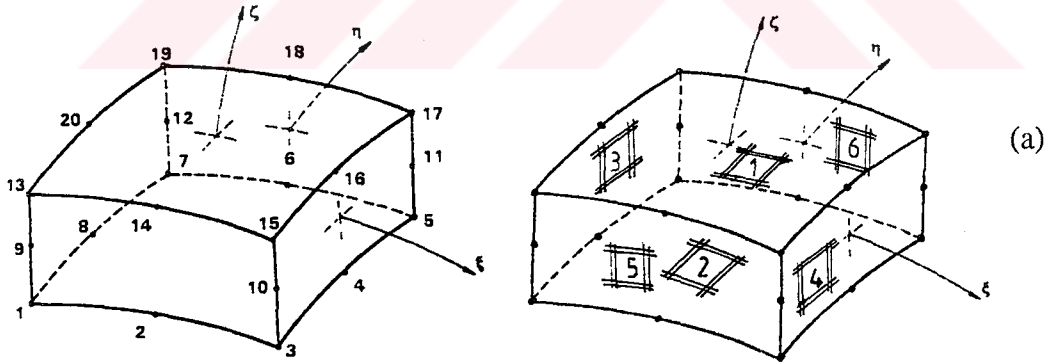
MBS, MES, MYS, DKOX, DKOY, DKOZ, FI1, FI2, TE1, TE2, RI1, HK

MBS, MES	: Boyuna ve enine ağ sayısı
MYS	: Kalınlık doğrultusunda ağ sayısı
DKOX, DKOY, DKOZ	: Başlangıç noktası koordinatları
TBL, TEL	: Toplam boyuna ve enine uzunluk
HK	: Kabuk kalınlığı
TE1, TE2	: Sistem geometrisinde başlangıç ve son θ açısı
FI1, FI2	: Sistem geometrisinde başlangıç ve son ϕ açısı
RI1	: Kabuğun başlangıç noktasının yarıçapı

Her üç program verilen ağa göre sistemdeki eleman ve düğüm noktası sayısını otomatik olarak hesaplayıp *dugum.dat* dosyasının ilk satırına yazar.

6.2.2 YUZEY.DAT dosyası

Yüzey yayılı yüklerinden oluşan eşdeğer eleman düğüm noktası kuvvetleri hesabı için yükün etki ettiği yüzeylerin numaraları ve bu yüzeylere ait esas ve tali düğüm noktası numaralarının okutulduğu sabit bir dosyadır şekil 6.7a da eleman yüzey numaraları ve şekil 6.7b de *yuzey.dat* dosyasının içeriği verilmiştir.



YÜZEY NODLARI

1	, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
2	, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 9, 10, 11, 12, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
3	, 5, 4, 3, 10, 15, 16, 17, 11, 6, 2, 14, 18, 7, 8, 1, 9, 13, 20, 19, 12
4	, 7, 8, 1, 9, 13, 20, 19, 12, 6, 2, 14, 18, 5, 4, 3, 10, 15, 16, 17, 11
5	, 7, 6, 5, 11, 17, 18, 19, 12, 8, 4, 16, 20, 1, 2, 3, 10, 15, 14, 13, 9
6	, 1, 2, 3, 10, 15, 14, 13, 9, 8, 4, 16, 20, 7, 6, 5, 11, 17, 18, 19, 12

(b)

şekil 6.7 Yüzey numaraları ve yüzeyin düğüm noktaları dosyası

6.2.3 YUK.DAT dosyası

Bu dosyadan sınır koşulları, yükleme özellikleri ve malzemeye ait bilgiler okunur. Serbest formatla bilgilerin yazılış sırası aşağıdaki gibidir.

```

PROBLEM ADI
NDTGS,NYYYS,NRYYS,NTYS
E, V, GAG
İLK D, SON D, ADİM, KSI D, İTA D, ZETA D
1 ,5 ,1 ,1 ,1 ,0
6 ,48 ,1 ,1 ,0 ,0
... ,... ,... ,... ,... ,...
... ,... ,... ,... ,... ,...
... ,... ,... ,... ,... ,...
TEKİL YÜKLER
ELN0, DÜĞ.NO, DOĞRULTU, TEKİL YÜK ŞİDDETİ
1 ,1 ,2 ,125.0
... ,... ,... ,...
... ,... ,... ,...
YAYILI YÜKLER
ELNO, YÜZEY, DOĞRULTU, YAYILI YÜK DEĞERİ
3 ,2 ,3 ,-25.0
... ,... ,... ,...
... ,... ,... ,...
RADYAL YÜKLER
ELNO, YÜZEY, DOĞRULTU, YAYILI YÜK DEĞERİ
4 ,1 ,2 ,50.0
... ,... ,... ,...
... ,... ,... ,...

```

Değişken açıklamaları:

Problem adı : Problemin kısaca adı

NDTGS : Deplasmanları tutulu düğüm grubu sayısı

NYYYS : Sistemde genel koordinatlar doğrultusunda yayılı yüklerle yüklü toplam eleman yüzey sayısı

NRYYS : Sistemde yerel koordinatlar doğrultusunda yayılı yüklerle yüklü toplam eleman yüzey sayısı

NTYS : Sistemde tekil yüklerle yüklenmiş toplam düğüm sayısı

E : Elastisite modülü

V : Poisson oranı

- GAG** : Malzemenin birim hacim ağırlığı (hacımsal yük yoksa sıfır girilir.)
- İLKD,SOND** : Deplasmanları tutulu grupta başlangıç ve son düğüm numarası
- ADIM** : Deplasmanları tutulu grupta sıra ile atlanan düğüm numarası adımı
- ELNO** : Yükün etki ettiği eleman numarası
- DÜĞÜM NO** : Yükün etki ettiği eleman düğüm numarası
- DOĞRULTU** : Yükün etki ettiği doğrultu (genel koordinatlarda etki eden tekil ve yayılı yüklerde ($x=1, y=2, z=3$), yerel koordinatlarda etki eden yayılı yüklerde ($\xi=1, \eta=2, \zeta=3$))
- YÜZEY** : Elemanda yayılı yükün etki ettiği yüzey numarası (1,2,3,4,5,6)
- KSI.D,ITA.D,ZETA.D** : İlgili doğrultu tutulu ise 1, serbest ise 0 girilir.
- TEKİL YÜK ŞİDDETİ** : Tekil yükün şiddeti ve işareti
- YAYILI YÜK ŞİDDETİ** : Yayılı yükün şiddeti ve işareti

6.2.4 SONUÇ.DAT dosyası

Program icra edilirken dosyalanması gerekli bilgilerin yazılacağı dosyadır. Bu dosyaya sistemde elemanların bağlı olduğu düğüm numaraları, sistem eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri, sistem düğüm noktalarının yerel koordinatlar doğrultusundaki deplasmanları ve her bir elemanın bütün düğüm noktalarının genel koordinatlar doğrultusundaki yer değişimleri ve genel koordinatlar doğrultusundaki gerilmeleri yazılır.

Probleme ait sonuçlar bu dosya derlenerek elde edilir.

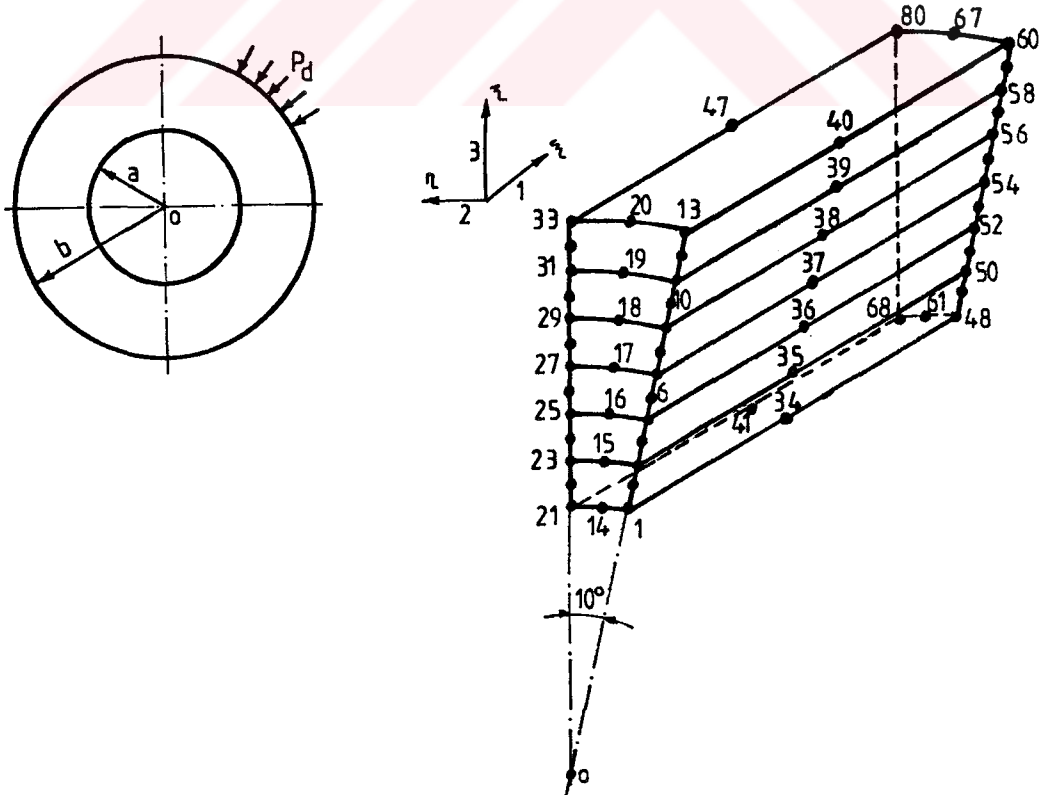
BÖLÜM 7 SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde genel biçimli kalın kabuklar için elde edilen sonlu eleman kullanılarak örnekler çözülmüştür. İlk üç örnek yöntemin yaklaşıklık düzeyinin belirlenmesi için çözülmüştür.

7.1 Örnek 1

Elastisite teorisinde çözümü bilinen Şekil 7.1 de görülen dış basınç etkisindeki silindirik halka, geliştirilen sonlu eleman programı ile çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Elastisite çözümü için [2,s166]'de verilen bağıntılardan faydalanılmıştır. Yük elmanın dış yüzeyinden etki etmekte olup, elde edilen sonuçlar Tablo 7.1 de gösterilmiştir.



Şekil 7.1 Dış basınç etkisindeki silindirik halka

Tablo 7.1 Dış basınç etkisindeki silindirik halka için elde edilen wE/pa ve σ/p değerleri ($b=2a$; $\nu=0.2$)

r/a	wE/pa		σ_{θ}/p		σ_r/p	
	EÇ	KÇ	EÇ	KÇ	EÇ	KÇ
1.00	-2.66667	-2.66239	-2.66667	-2.66000	0.00000	-0.00200
1.25	-2.61333	-2.60905	-2.18667	-2.18000	-0.48000	-0.47000
1.50	-2.66667	-2.66226	-1.92593	-1.92000	-0.74074	-0.74000
1.75	-2.78095	-2.77637	-1.76871	-1.76000	-0.89796	-0.89000
2.00	-2.93333	-2.92828	-1.66667	-1.66667	-1.00000	-1.00000

EÇ :ElastisiteÇözümü

KÇ :Kullanılan Çözüm

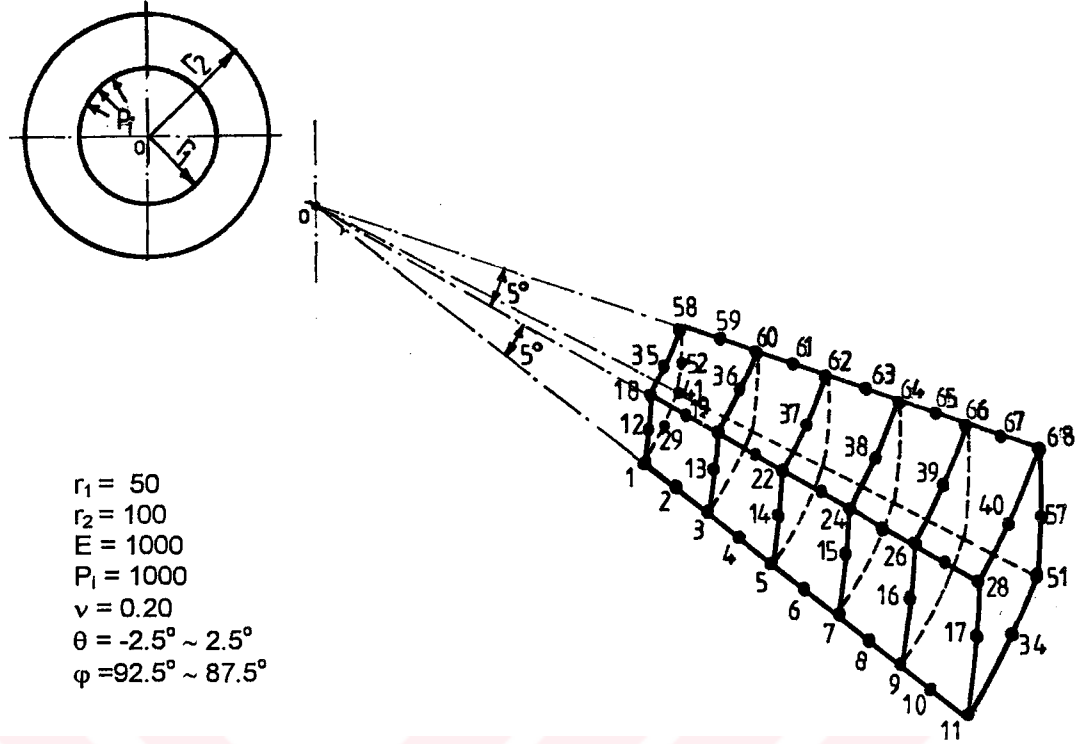
Çözülen örnekte, elastisite teorisinde yapılan kabullere göre elde edilen gerçek çözüme göre, radyal doğrultudaki yer değiştirme dıştan içe doğru küçülmekte, kalınlığın yarısından itibaren yaklaşık sabit kalmaktadır. Radyal gerilmeler dıştan içe doğru hızla küçülmektedir, çembersel gerilmeler ise dıştan içe doğru büyümektedir, dıştaki çembersel gerilmenin içteki gerilmeye oranı yaklaşık %63 tür. Geliştirilen sonlu eleman programı ile bulunan sonuçlar gerçek çözüme göre çok yaklaşıktır, hata derecesi kalınlık boyunca %1 civarında veya daha düşüktür.

7.2 Örnek 2

İkinci örnek olarak Şekil 7.2 de görülen, elastisite çözümü bilinen sabit iç basınç etkisindeki küresel kalın kabuk ele alınmıştır. Elastisite çözümü için [15,s.407]'de verilen bağıntılardan faydalanılmıştır. Aynı örnek SAP90 ile de çözülmüş, sonuçlar karşılaştırma için Tablo 7.2 de verilmiştir.

Çözülen örnekte radyal doğrultuda yer değiştirme kabuk iç yüzeyinden dışa doğru azalmaktadır, yer değiştirmedeki azalım içte büyük olmakta, dışa doğru küçülmektedir. İçteki yer değiştirmenin dıştaki yer değiştirmeye oranı %44 civarındadır. Gerilmeler ise içten dışa doğru hızla azalmaktadır, teğetsel gerilmelerde dıştaki değerin içtekine oranı %44 civarındadır.

Bulunan sonuçlar gerçek çözüm sonuçlarına çok yakındır, en büyük hata derecesi kalınlık boyunca yer değiştirmelerde % 0.2 , gerilmelerde % 2.1 mertebesindedir.



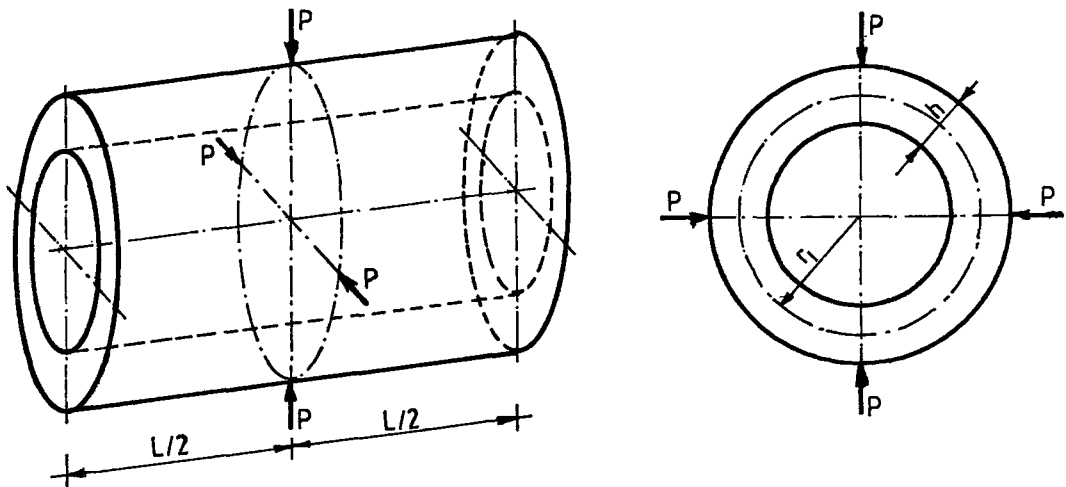
Şekil 7.2 İç basınç etkisindeki küresel kalın kabuk

Tablo 7.2 İç basınç etkisindeki küresel kalın kabukta u_r , σ_r ve σ_θ değerleri

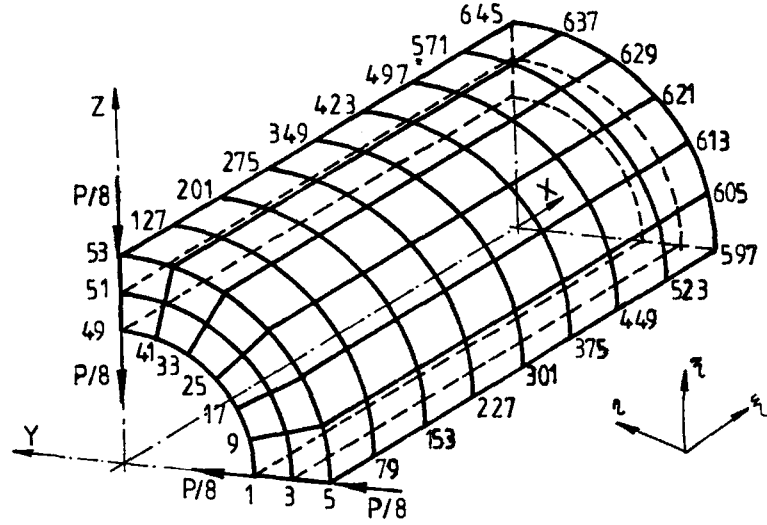
r	u_r			σ_r			σ_θ		
	TEORİ	KUMKA	SAP90	TEORİ	KUMKA	SAP90	TEORİ	KUMKA	SAP90
50	0.0386	0.0386	0.0396	-1000	-956	—	714	726	887
55	0.0330	0.0331	0.0351	-716	-736	—	572	568	653
60	0.0290	0.290	0.0304	-519	-494	-526	474	480	460
65	0.0259	0.0259	0.0272	-377	-386	-400	403	401	435
70	0.0235	0.0235	0.0247	-274	-262	-276	351	354	370
75	0.0217	0.0217	0.0228	-196	-200	-208	312	312	334
80	0.0203	0.0203	0.0213	-136	-130	-138	282	284	297
85	0.0191	0.0191	0.0201	-90	-92	-96	259	259	275
90	0.0183	0.0183	0.0192	-53	-50	-54	240	242	253
95	0.0176	0.0176	0.0185	-24	-25	-26	226	226	240
100	0.0171	0.0171	0.0180	0	2	2	214	215	225

7.2 ÖRNEK 3

Üçüncü örnek olarak Şekil 7.3 te görülen yatay ve düşey olarak radyal yönde karşılıklı P tekil kuvvetlerinin etkisinde ve dairesel kenarları basit mesnetli, kalın silindirik kabuk çözülmüştür. Çözülen örneğe ait kesin sayılabilecek elastisite çözümü [16]'da verilmiştir. h/r_1 ve L/r_1 oranlarına bağlı olarak boyutsuz maksimum radyal yer değiştirme değeri wEh/p şeklinde hesaplanmıştır. Sonlu eleman ağı, Şekil 7.4 te görüldüğü gibi simetriden faydalanılarak sistemin sekizde bir parçası, kalınlık doğrultusunda 2, çembersel doğrultuda 6 ve boyuna doğrultuda 8'e bölünerek oluşturulmuştur. Sistemin eleman sayısı 96, düğüm sayısı 645, bilinmeyen sayısı 1648 ve yarı bant genişliği 287 dir. Çözümde iki farklı yükleme kullanılmıştır. Birinci yüklemede tekil kuvvetler sadece düşey yönde, ikinci yüklemede ise hem düşey, hemde yatay yöndedir. Her iki yüklemeyle ait çözümlerde bulunan boyutsuz maksimum radyal yer değiştirme değerleri wEh/p şeklinde Tablo 7.3a ve Tablo 7.3b de [16]'daki değerlerle karşılaştırmalı olarak ayrı ayrı verilmiştir. Elde edilen değerler [16]'da verilen değerlere oldukça yakındır. Yaklaşım eleman sayısı artırıldığı zaman doğal olarak artmaktadır.

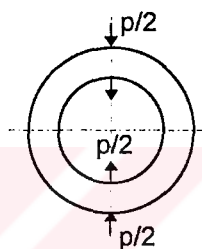


Şekil 7.3 Karşılıklı tekil yüklemeyle yüklü silindirik kabuk



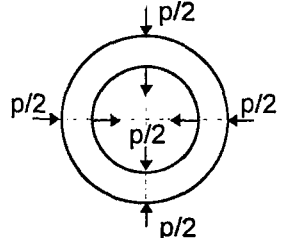
Şekil 7.4 Karşılıklı tekil yüklerle yüklü silindirik kabukta sonlu eleman ağı

Tablo 7.3a 1. yükleme için maksimum wEh/p değerleri



h/r_1	L/r_1				
	2	4	6	8	10
0.1	10.412	18.369	23.906	24.591	23.807
	(10.000)	(17.660)	(23.080)	(24.030)	(23.660)
0.5	1.637	2.280	2.405	2.471	2.517
	(1.650)	(2.060)	(2.069)	(2.060)	(2.059)

Tablo 7.3b 2. yükleme için maksimum wEh/p değerleri

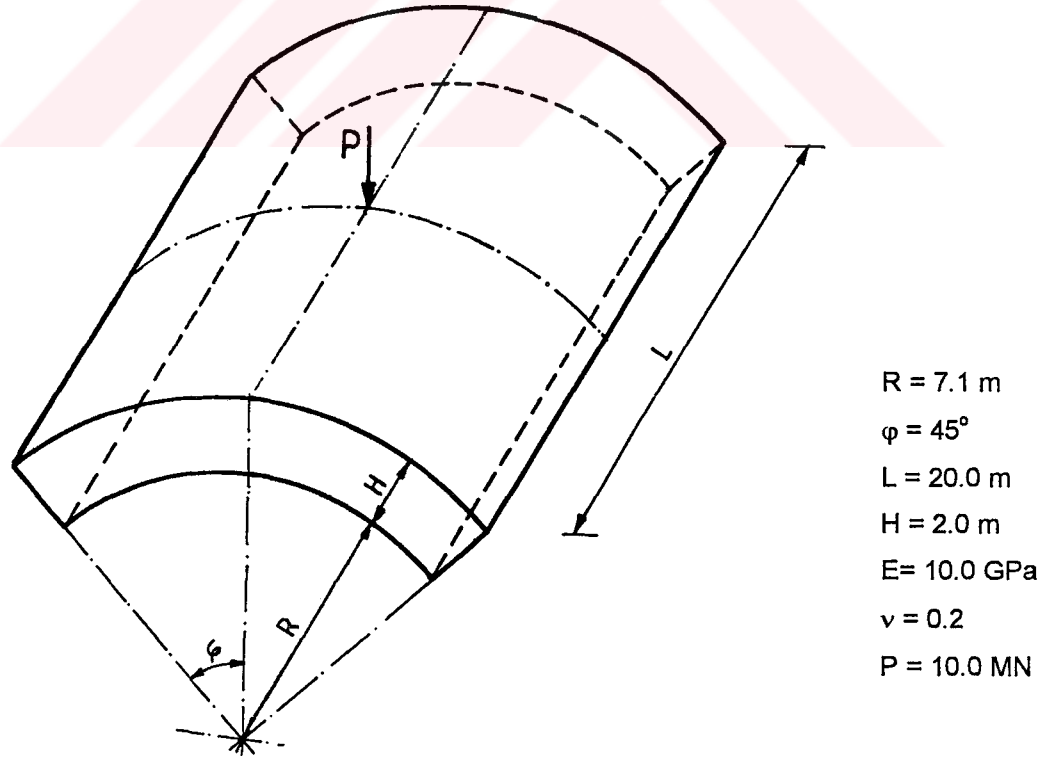


h/r_1	L/r_1				
	2	4	6	8	10
0.1	9.890	8.645	8.262	7.838	7.427
	(8.547)	(8.543)	(8.566)	(8.568)	(8.550)
0.5	1.031	1.105	1.217	1.297	1.346
	(1.179)	(1.155)	(1.155)	(1.155)	(1.155)

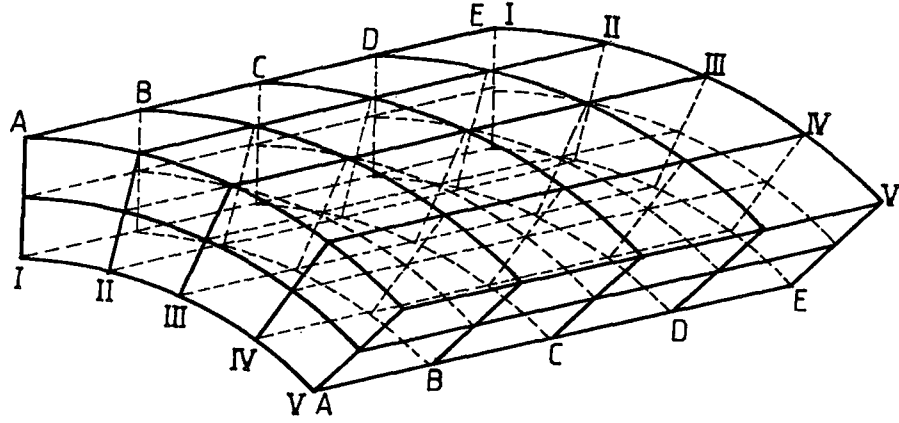
Parantez içindeki değerler [16]'da verilen değerlerdir.

7.4 ÖRNEK 4

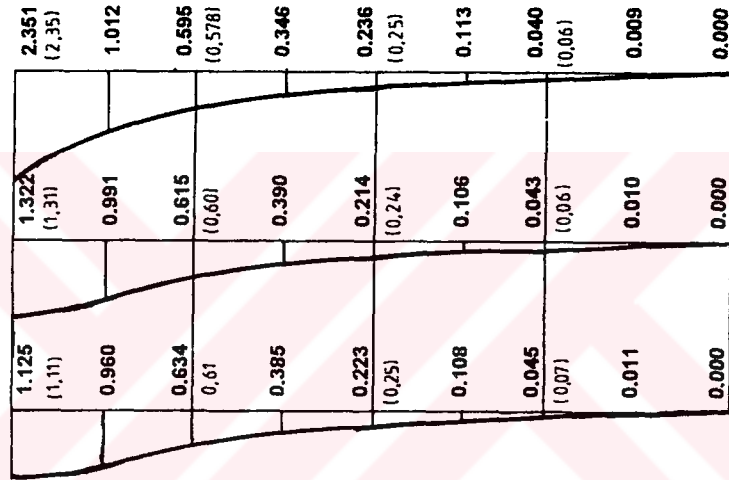
Şekil 7.5 te boyutları verilen sığınak örtüsü olarak kullanılan dört kenarı ankastre silindirik kabuk parçasının simetri eksenlerinin kesim noktasına $P=10000$ kN luk tekil kuvvetin etkimesi durumunda çözümü yapılmıştır [36]. Sistem ve yük simetrisi gözönüne alınırsa sistemin dörtte biri ile hesap yapılabilir. Sonlu eleman ağı Şekil 7.6 da görüldüğü gibi kalınlık doğrultusunda 2, çembersel doğrultuda 4 ve boyuna doğrultuda 4 eleman alınarak hesap yapılmıştır. Eleman sayısı 32 düğüm noktası sayısı 245 ve bilinmeyen sayısı 464 tür. Sonuçlar Şekil 7.7 ve Şekil 7.8 de ilgili kesitlerde kalınlık boyunca radyal yer değiştirmeler, Şekil 7.9 da ise A-A kesitindeki düğüm noktalarındaki normal gerilmeler ayrı ayrı gösterilmiştir. Bulunan sonuçlar [36]' ile karşılaştırılmış ve değerlerin yaklaşık üst üste düştüğü gözlenmiştir. [36]'da verilen değerler şekiller üzerinde parantez içinde belirtilmiştir. Çözümün yakınsaklığı oldukça iyidir.



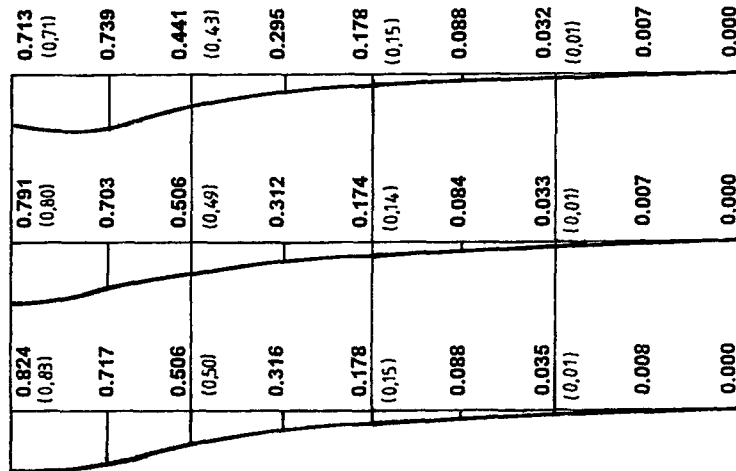
Şekil 7.5 Tekil yükle yüklü dört kenarı ankastre silindirik kabuk



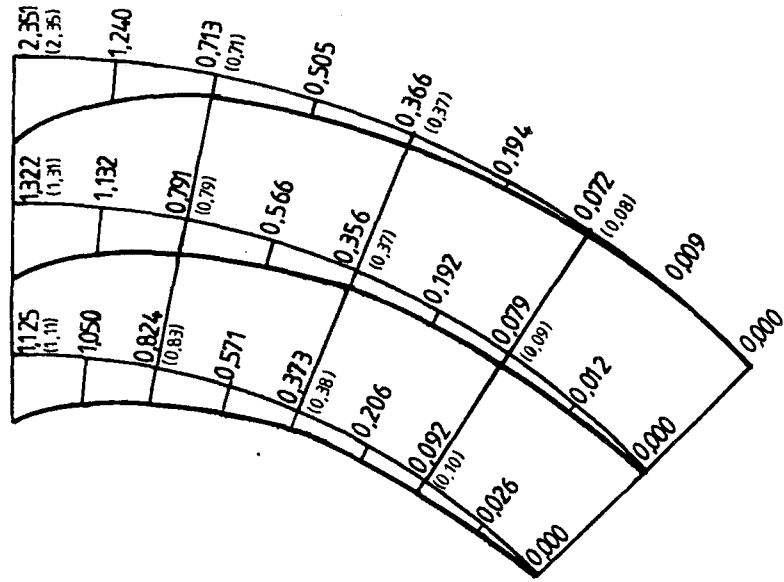
Şekil 7.6 Tekil yükle yüklü ankastre silindirik kabukta sonlu eleman ağı



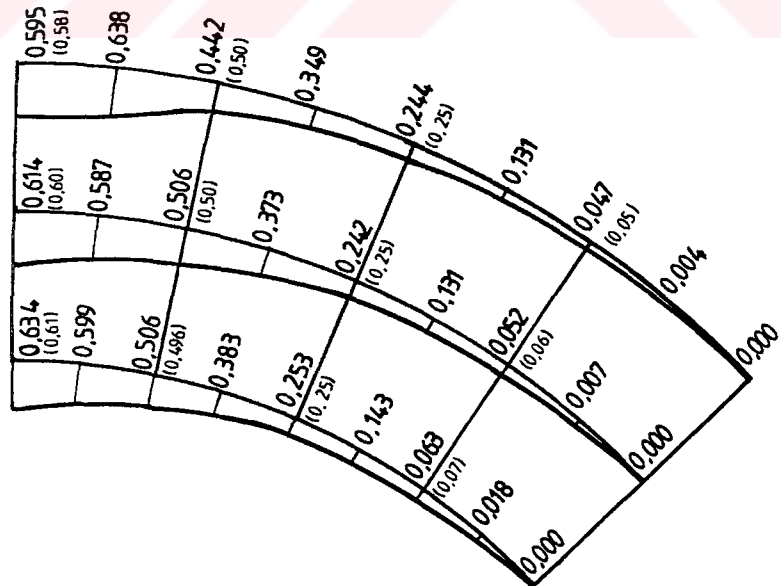
Şekil 7.7 I-I kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri (mm)



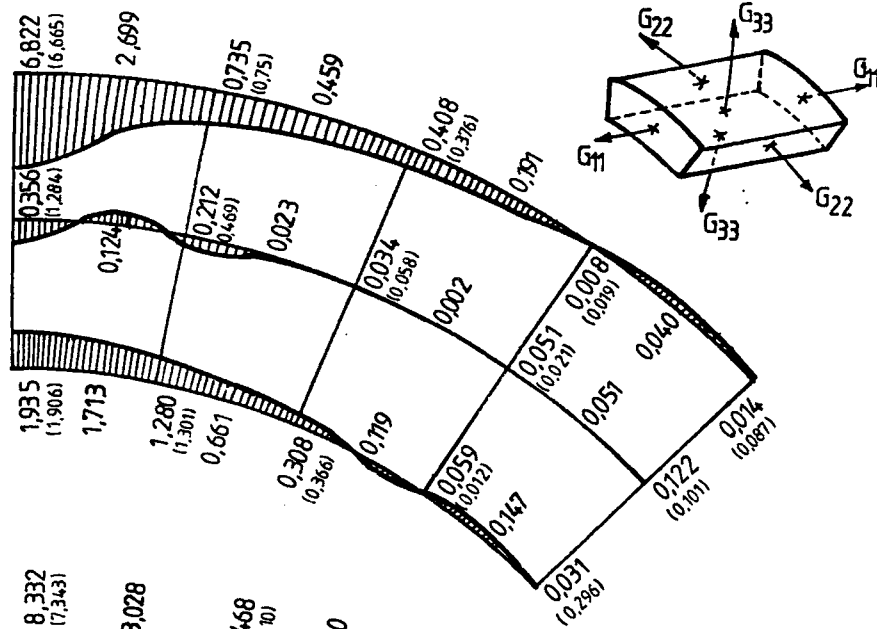
Şekil 7.8 II-II kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri (mm)



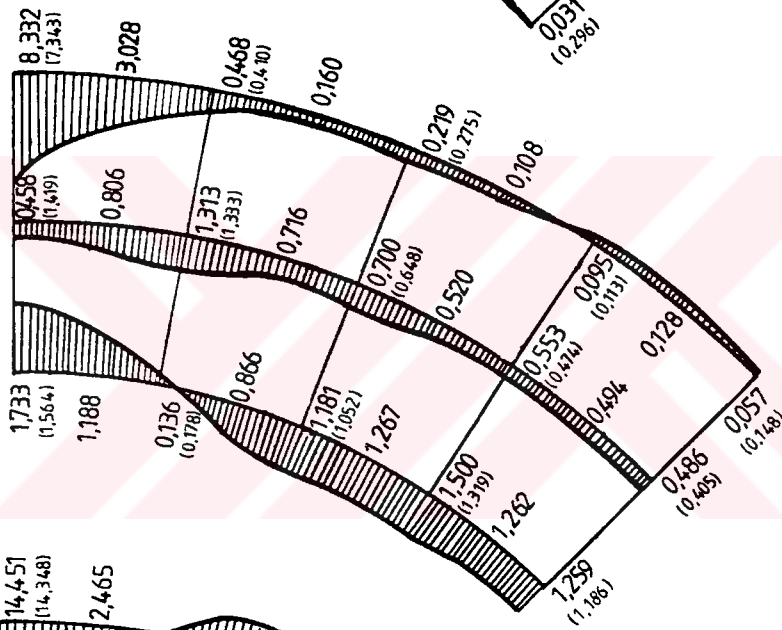
Şekil 7.9 A-A kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri (mm)



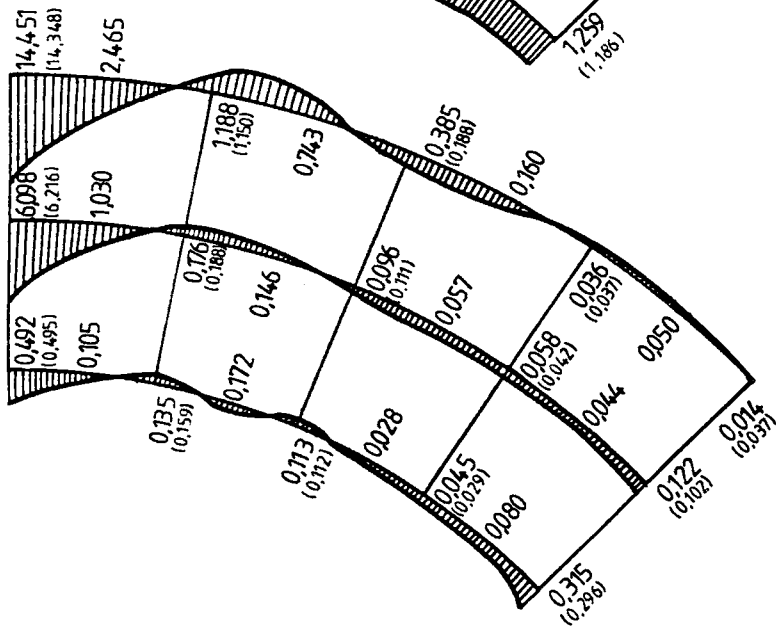
Şekil 7.10 B-B kesitindeki düğüm noktaları radyal yerdeğiştirmeleri (mm)



(a)

 σ_{11} (MPa)

(b)

 σ_{22} (MPa)

(c)

 σ_{33} (MPa)

Şekil 7.11 A-A kesitindeki σ_{11} , σ_{22} ve σ_{33} normal gerilmeleri

7.5 ÖRNEK 5

Şekil 7.12 de boyutları verilen sabit iç basınç etkisindeki dönel simetrik kabuk dairesel plak, tor yüzey ve silindirik kabuğun birleşmesinden oluşmuştur. Kabuk kalınlığı sabittir. Silindir yarıçapının kabuk kalınlığına oranı 5/2 ve tor yüzeyin iç yarıçapının kabuk kalınlığına oranı 1/20 dir. Silindirik yüzey üst ucundan ankastre mesnetlenmiştir.

Örnek Barret ve Soler tarafından HOT eleman olarak adlandırılan yüksek mertebeden terimler içeren, kalınlık doğrultusundaki normal gerilme ve kayma şekil değiştirmelerini de içeren sonlu eleman modeli ile çözülmüştür [35]. Aynı çalışmada 399 elemandan oluşan 4 noktalı sonlu eleman modeli ile de çözüm yapılmış ve bu çözüme ait sonuçlar grafiklerde AXIWIL399 olarak görülmektedir.

Sistemin ve yükün simetrik olması nedeniyle $\sin\theta=0.1$ olan bir dilim alınarak çözüm yapılmıştır. Sistemin eksen takımı ve sonlu eleman ağı Şekil 7.12 de gösterilmiştir. Çözümde sistemin eleman ve düğüm noktası numaraları otomatik olarak hesaplanmıştır. Düğüm noktası koordinatları ise yarı otomatik olarak hesaplanmış ve data dosyasında gerekli düzeltmeler yapılarak hazırlanmıştır. Seçilen sonlu eleman ağında eleman sayısı 92, düğüm noktası sayısı 782 ve bilinmeyen sayısı 1605 olarak alınmıştır. Rijitlik matrisi maksimum yarı bant genişliği 110 olarak hesaplanmıştır. Yükler sistemin iç yüzeylerine sabit 1 birim şiddetinde yerel eksenlerde etki eden yayılı yük olarak alınmıştır.

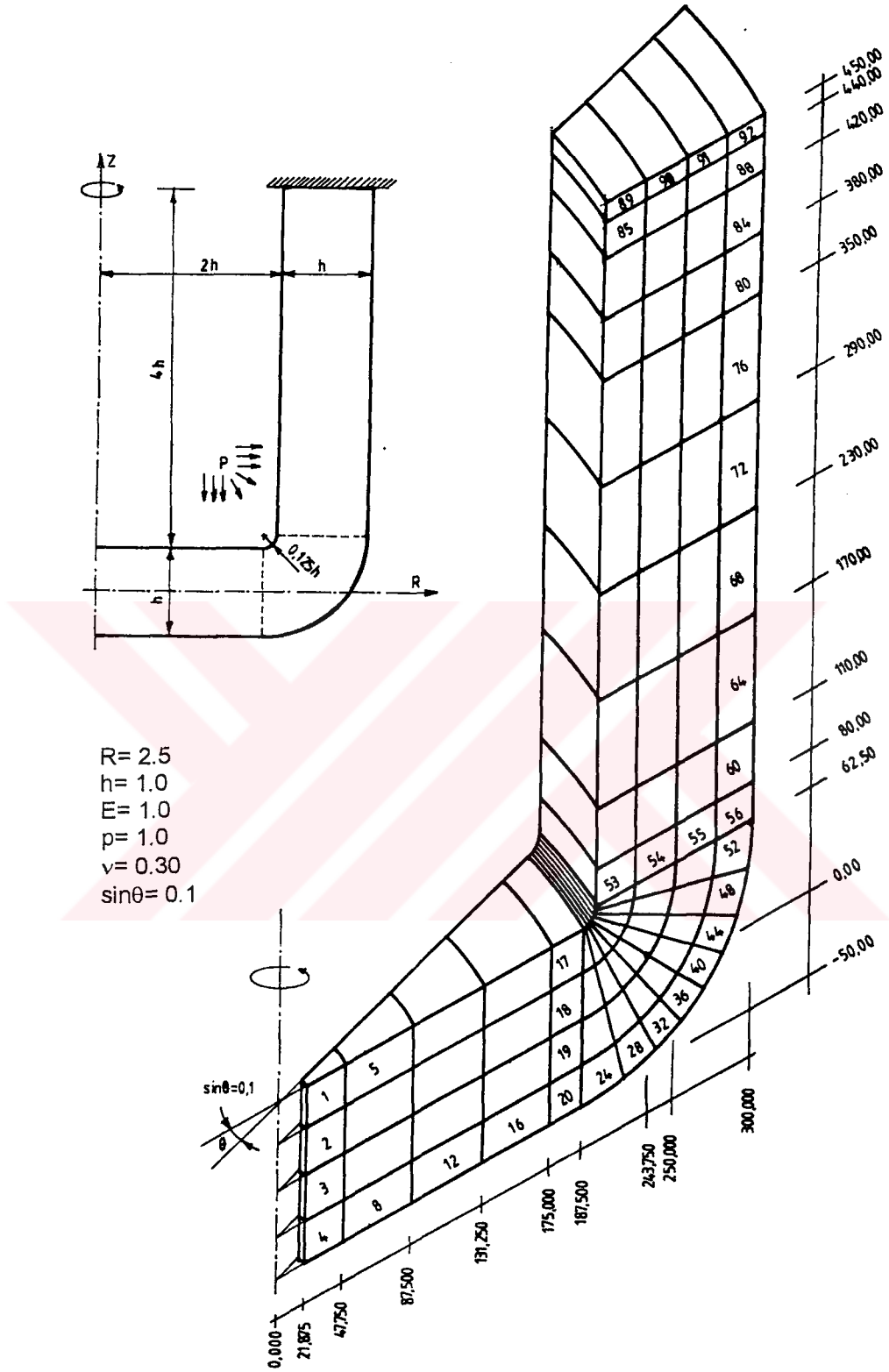
Kullanılan sonlu eleman ile elde edilen teğetsel σ_{11} , meridyen boyunca σ_{22} ve kalınlık doğrultusunda σ_{33} normal gerilmeleri ve yine kalınlık doğrultusunda τ_{13} kayma gerilmesi [35]'te verilen değerlerle karşılaştırma yapmak üzere birimlerden bağımsız olarak ilgili kesitlerde kalınlık doğrultusunda gerilmelerin değişimi hesaplanmıştır.

Silindirik kabuğun alt bölgesinde tor yüzeyden silindirik yüzeye geçişten hemen sonra $z=0.8$ h kesitinde grafikleri Şekil 7.13a da görüldüğü gibi teğetsel gerilme σ_{11} değerleri kabuk iç yüzeylerine yakın bölgeler hariç AXIWIL399 a göre

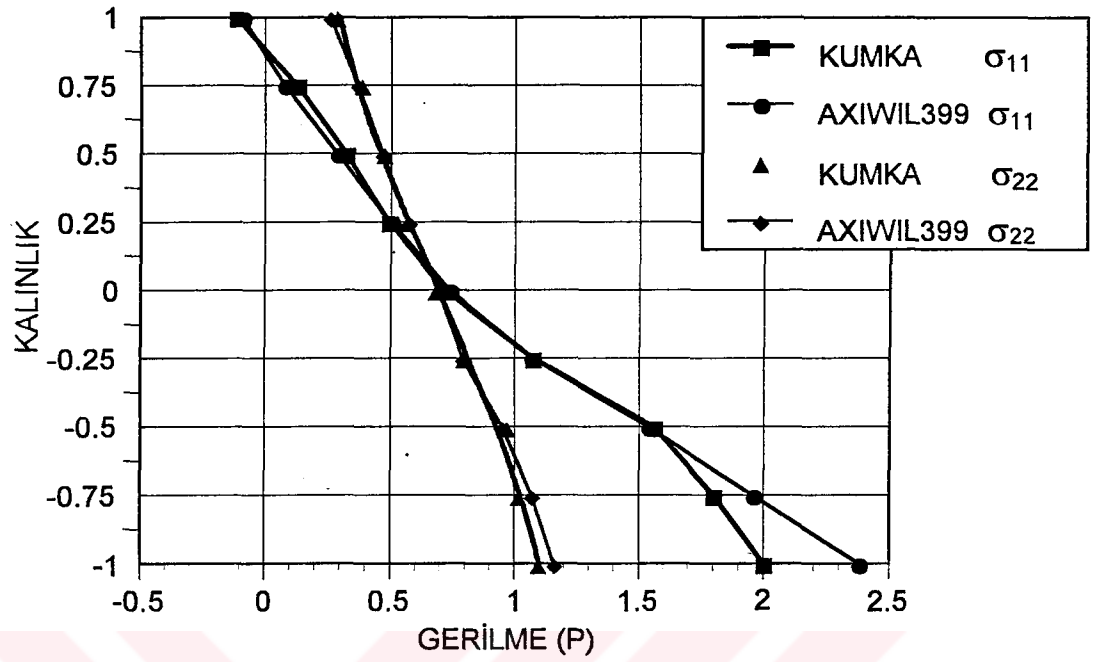
oldukça iyi yaklaşım göstermekle beraber kabuğun en iç yüzeyinde % 15 mertebesinde fark vardır, dış yüzeylere doğru fark %2~3 mertebesinde. Meridyen boyunca gerilme σ_{22} değerlerinde ise kabuk iç yüzeyine yakın bölgelerde fark % 5 mertebesinde iken, dış yüzeylere doğru fark %1~2 mertebesinde. Yine $z=0.8$ h kesitinde grafikleri Şekil 7.13b de görüldüğü gibi kalınlık doğrultusundaki gerilme σ_{33} değerleri oldukça iyi yaklaşım göstermekte olup maksimum fark %1 mertebesinde. Kalınlık boyunca kayma gerilmesi τ_{13} değerlerinde ise yine yaklaşım iyi olup maksimum fark % 2 mertebesinde.

Silindirik kabukta $z=4.20$ h kesitinde grafikleri Şekil 7.14a da görüldüğü gibi teğetsel gerilme σ_{11} değerleri AXIWIL399 a göre iyi yaklaşım göstermekte olup maksimum fark % 5 mertebesinde. Meridyen boyunca gerilme σ_{22} değerlerinde yine oldukça iyi yaklaşım göstermekte olup maksimum fark % 1 mertebesinde. Yine $z=4.20$ h kesitinde grafikleri Şekil 7.14b de görüldüğü gibi kalınlık doğrultusundaki gerilme σ_{33} değerleri iyi yaklaşım göstermekte olup maksimum fark % 3 mertebesinde. Kalınlık boyunca kayma gerilmesi τ_{13} değerlerinde ise maksimum fark % 6 mertebesinde olup yaklaşımı iyidir.

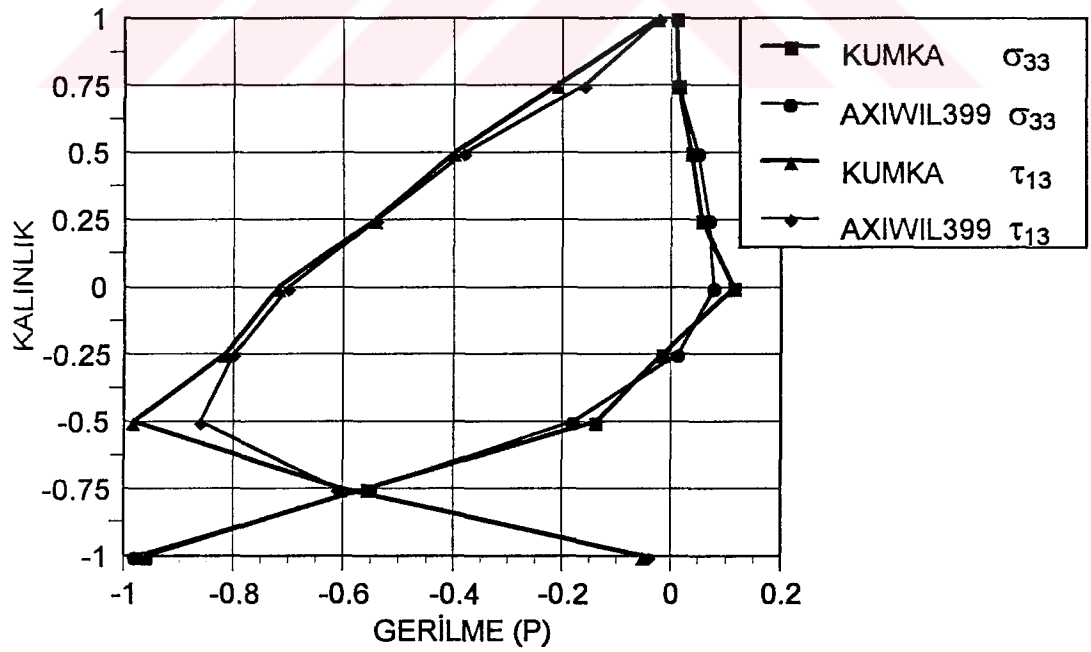
Silindirik kabuğun ankastre olarak mesnetlendiği bölgeye çok yakın olan $z=4.40$ h kesitinde grafikleri Şekil 7.15a da görüldüğü gibi teğetsel gerilme σ_{11} değerleri AXIWIL399 a göre oldukça iyi yaklaşım göstermekte olup maksimum fark % 1 mertebesinde. Meridyen boyunca gerilme σ_{22} değerlerinde ise kabuk iç yüzeylerine yakın bölgelerde % 10 mertebesinde fark varken, dış yüzeylere doğru %1~2 mertebesinde. Yine $z=4.40$ h kesitinde grafikleri Şekil 7.15b de görüldüğü gibi kalınlık doğrultusundaki gerilme σ_{33} değerlerinde iç yüzeyden 0.125 h kadar içerde ki bölgede fark büyük iken bu bölge dışında fark %10~15 mertebesinde. Kalınlık boyunca kayma gerilmesi τ_{13} değerlerinde ise iç yüzeyden 0.25 h kadar içerde ki bölgede fark % 25 mertebesinde iken diğer bölgelerde %10 mertebesinde. Eğriler birbirine yakın ve aynı formdadır. Bu sonuçlara göre geliştirilen sonlu eleman yeter yaklaşımda sonuç vermektedir.



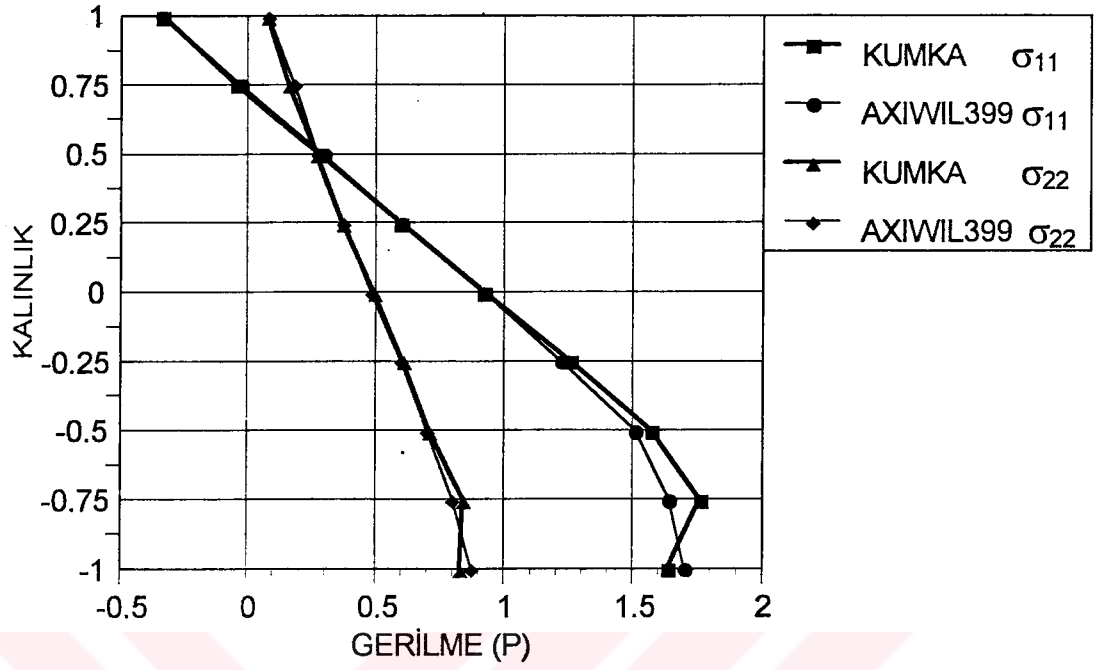
Şekil 7.12 Sabit iç basınç etkisindeki dönel simetrik kabuk ve sisteme ait sonlu eleman ağı



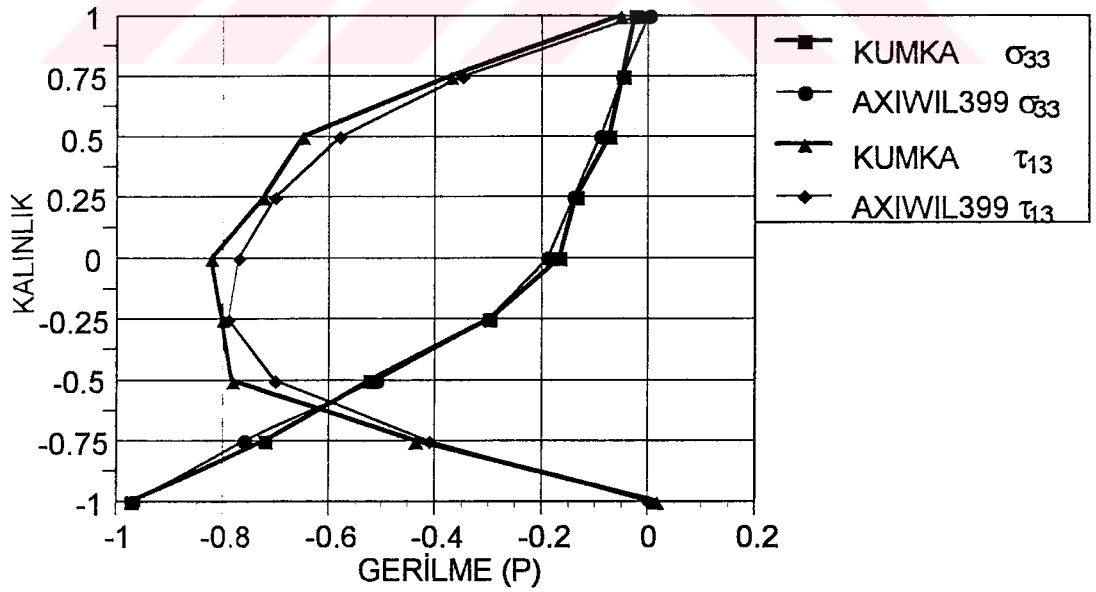
Şekil 7.13a $x=2.5$ h, $z=0.80$ h kesitinde σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı



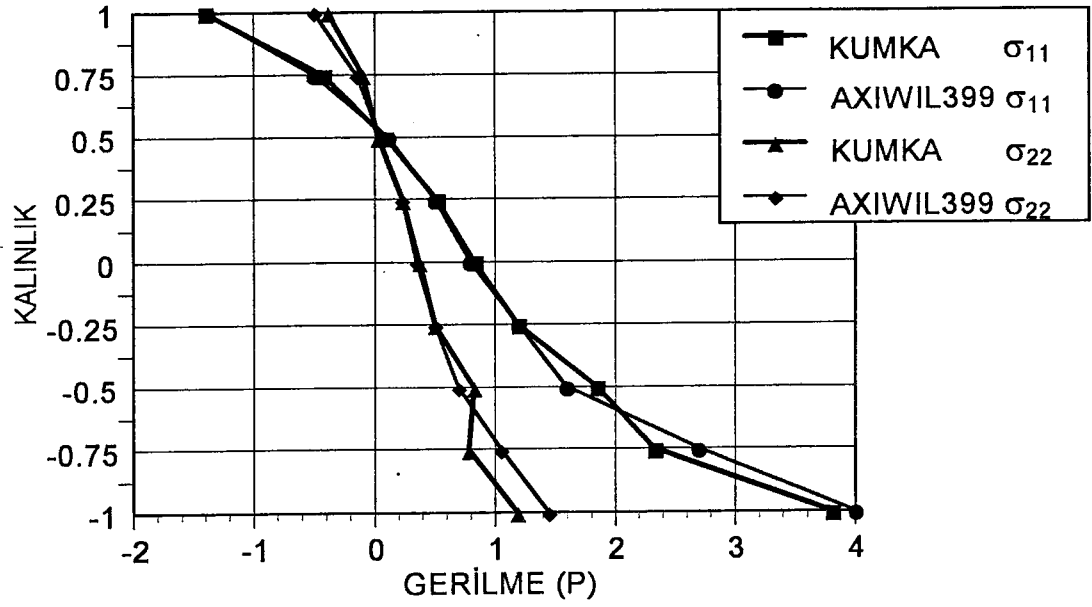
Şekil 7.13b $x=2.5$ h, $z=0.80$ h kesitinde σ_{33} ve τ_{13} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı



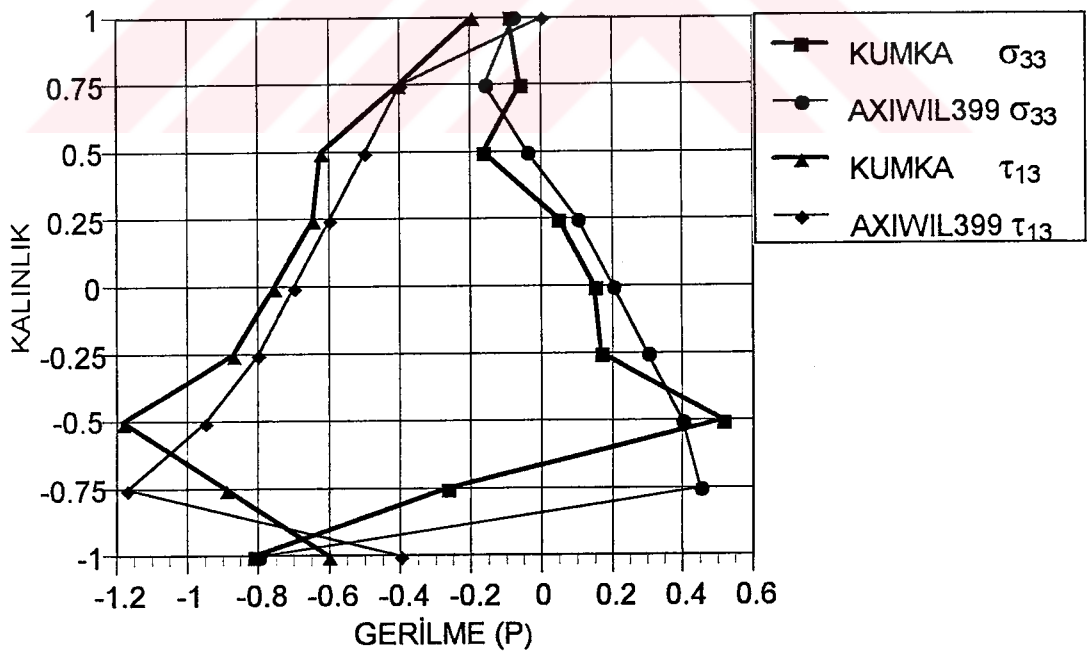
Şekil 7.14a $x=2.5$ h , $z=4.20$ h kesitinde σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı



Şekil 7.14b $x=2.5$ h , $z=4.20$ h kesitinde σ_{33} ve τ_{13} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı



Şekil 7.15a $x=2.5 h, z=4.40 h$ kesitinde σ_{11} ve σ_{22} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı



Şekil 7.15b $x=2.5 h, z=4.40 h$ kesitinde σ_{33} ve τ_{13} gerilmelerinin kalınlık boyunca dağılımı

BÖLÜM 8 SONUÇLAR

Genel biçimli kalın kabuk sistemlerinin çözümü için kullanılan üç boyutlu eğrisel izoparametrik eleman ve bu elemanın uygulamalarını kapsayan bu çalışmada elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

a) Bölüm 4'te açıklandığı gibi genel biçimli sonlu elemanda, üç boyutlu eğrisel ortogonal koordinatlardaki elastisite teorisinden hareket edilmiştir. Kabuğun formu genel olduğu gibi kalınlığı da değişken olabilir. Statik olması kaydı ile, genel yükler sisteme etkiyebilir. Yayıllı yükler elemanın herhangi bir yüzeyine genel eksenler doğrultularında veya yerel eksenler (yüzeyin normali veya teğeti) doğrultularında etki edebilir.

b) Kullanılan elemanda yer değiştirme fonksiyonları, rijit ötelenme kriteri ile geometrik uyguluk koşullarını sağlamıştır.

c) Elde edilen şekil değiştirme ifadesi ve geliştirilen sonlu eleman, programının yaklaşıklık düzeyini belirlemek amacı ile elastisite teorisinde gerçek çözümleri bilinen dış basınç etkisindeki silindirik halka, iç basınç etkisindeki küresel kabuk ve yatay ve düşey doğrultuda karşılıklı radyal tekil yüklerin etkisindeki dairesel basit mesnetli silindirik kabuk problemleri çözülmüştür. Her üç çözümde de çökme ve gerilme değerleri elastisite çözümleri ile karşılaştırılmış ve bulunan sonuçların yaklaşıklığının çok iyi olduğu görülmüştür.

d) Çözümlerde 20 düğüm noktalı izoparametrik sonlu eleman kullanılmıştır. Eleman şekil değiştirme matrisinin elde edilmesinde verilen elemana ait ikinci derece biçim fonksiyonları ve elastisite teorisinde eğrisel ortogonal koordinatlar için verilen şekil değiştirme bağıntılarından faydalanılmıştır. Eleman üzerinde ilgili parametrelerin (kabuk geometrik büyüklükleri) değişiminin çok hızlı olmadığı düşünülerek eleman rijitlik matrisinin genel koordinatlara dönüşümü yapılmadan doğrudan sistem rijitlik matrisine atanmış, dolayısı ile sistem rijitlik

matrisi eleman yerel koordinatları doğrultusunda hesaplanmıştır. Şekil değiştirme bağıntılarında ikinci merteye terimler hariç hiçbir terim diğerleri yanında ihmal edilmemiştir. Kalınlık doğrultusundaki şekil değiştirmelerin değişimi de gözönüne alınmıştır.

e) Hesaplar yapılırken kabuğun yüzey geometrisine ve kabuk geometrik büyüklüklerinin önceden bilinmesine ihtiyaç yoktur. Eğer düğüm noktası koordinatları verilmiş ise, program bu koordinatlar ve biçim fonksiyonları ve türevlerinden yararlanarak kabuğa ait eğrilikleri ve hesapta gerekli olan kabuk geometrik büyüklükleri ve türevlerini sayısal olarak hesaplamaktadır. Bu değerlerin yaklaşıklığı Bölüm 5'te araştırılmış, bulunan değerlerin yeterince yaklaşık olduğu görülmüştür.

f) Çalışma düzeni ve kullanım bilgileri Bölüm 6'da açıklanan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. FORTRAN 77 programlama dilinde kodlanan bu program, çift incelikle çalışarak 8 Mb Ram'e sahip bilgisayarda, bant genişliğine bağlı olarak bilinmeyen sayısı yaklaşık 1800 olan, kabuk sistemlerinin çözümlerini yapabilmektedir. Bilinmeyen sayısı denklem çözüm programının geliştirilmesi veya bilgisayar hafızasının yükseltilmesi ile artırılabilir.

g) Kullanılan elemanın etkinlik düzeyini belirlemek amacı ile Bölüm 7'de Örnek 4'te dört kenarından ankastre mesnetli kalın silindirik kabukta bulunan sonuçlar [36] ile karşılaştırılmıştır. Çözümün yaklaşıklık düzeyi oldukça iyidir. Yine Bölüm 7'de Örnek 5'te dairesel plak, tor yüzey ve silindirik kabuğun birleşmesinden oluşan, iç basınç etkisindeki kabukta bulunan sonuçlar [35]'te verilen değerlerle karşılaştırılmıştır. Yine çözümün yaklaşıklık düzeyi oldukça iyidir.

h) Esas olarak kalın kabuklar için geliştirilen bu sonlu eleman programında gerektiğinde yüksek kirişler, kalın plak ve benzeri uygulamalarda da rahatlıkla kullanılabilir. Kalınlık doğrultusunda istenildiği kadar eleman alınarak kalınlık doğrultusunda ki normal gerilmelerden ve kayma şekil değiştirmelerinden meydana gelen etkiler kolaylıkla gözlenebilir.

i) Geliştirilen sonlu eleman programında bilinmeyenler yerel eksenler; kabuğun asal eğrilikleri ; doğrultusunda alındığı için çözümde bazı kısıtlamalar mevcuttur.

- Elemanların birbiriyle birleştiği düğüm noktalarındaki tegetler; karşılıklı olarak iki komşu elemanda; aynı doğrultuda olacak şekilde sonlu eleman ağı seçilmelidir.
- Sistemde elemanlar arasında ani geometri değişimleri olmamalı, kabuk kalınlığının değişimi çok hızlı olmamalıdır.

j) Sayısal örneklerin değişik geometrilere uygulanması ile elemanın mühendislik uygulamaları için yeterli yaklaşıma sahip olduğu ve iyi sonuç verdiği görülmüştür.



KAYNAKLAR

- [1] **LANGHAAR, H. L.** , Energy Methots in Applied Mechanics, John Wiley and Sons Inc., New York , (1962)
- [2] **TIMOSHENKO, S.** , -çeviri: **İNAN, M.** , **SÖNMEZ, F.** , Plak ve Kabuklar Teorisi, İ.T.Ü. , İstanbul, (1964)
- [3] **GIRKMANN, K.** , -çeviri: **TAMEROĞLU, S. S.** , Yüzeysel Taşıyıcı Sistemler I-II , İ.T.Ü. , İstanbul,(1965)
- [4] **KRAUS, H.** , Thin Elastic Shells, John Wiley and Sons Inc. , New York, (1967)
- [5] **NOVOZHILOV, V. V.** , Thin Shell Theory, Woiters Noordhoff Publihing, Groningen, (1970)
- [6] **FLÜGGE, W.** , Stresses in Shells, Springer-Werlag, New York ,(1973)
- [7] **ÖZDEN, K.** , Dönel Kabuklar, İ.T.Ü. , İstanbul,(1975)
- [8] **KESKİNEL, F.** , **KUMBASAR, N.** , Sürekli Temeller ve Dönel Kabuklar, Sonlu Tesir Çizgileri ile Çözüm, İ.T.Ü. , İstanbul, (1976)
- [9] **REKACH, V. G.** , Static Theory of Thin-Walled Space Strutures,Mir Publishers Moskow, (1978)
- [10] **GOLDENVEIZER, A. L.** , Theory of Elastic Thin Shells, Pergamon Press, (1961)
- [11] **BERCHA, F. G.** , **GLOCKNER, P. G.** , **ASCE, M.** , Numerical Analysis of Thick Shell of Revolution, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.99, pp.1053-1073, (1973)
- [12] **DONNELL, L. H.** , Thick General Shells Under General Loading, Journal of Applied Mechanics, Vol.56, pp.391-394, (1989)
- [13] **VOYIADJIS, G. Z.** , **SHI, G.** ,A Refined Two-Dimensional Theory for Thick Cylindrical Shells, International Journal Solids Structures,Vol.27, No.3, pp.261-282, (1991)
- [14] **İNAN, M.** ,Düzlemde Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. , İstanbul, (1969)
- [15] **SOKOLNIKOFF, I. S.** , -çeviri: **ŞUHUBİ, E. S.** ,Matematik Elastisite Teorisi, İ.T.Ü. , İstanbul, (1965)

- [16] **KUMBASAR, K. , CELEP, Z. ,**Three Dimensional Elasticity Solution of Thick Cylindrical Shells for Rotationally Asymmetrical Loading, Bulletin of the Technical University of Istanbul, Vol.47, pp.459-471, (1994)
- [17] **LOVE, A. E. H. ,** A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover Publications, New York, (1944)
- [18] **NOVOZHILOV, V. V. ,** Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity, Graylock Press Rochester, New York , (1953)
- [19] **MARTIN, H. ,C. , CAREY,G. ,** Introduction to Finite Element Analysis, Mc Graw-Hill Book Company, London,(1973)
- [20] **ZIENKIEWICZ, O. C. , TAYLOR, R. L.** The Finite Element Method Vol.I, Mc Graw Hill, London, (1990)
- [21] **ZIENKIEWICZ, O. C. , TAYLOR, R. L.** The Finite Element Method Vol.II, Mc Graw Hill, London, (1991)
- [22] **HUCBNER, K. H. , THORNTON, E. A. ,** The Finite Element Method for Engineering, John Wiley and Sons , New York ,(1982)
- [23] **BATHE, K. J.** Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall,Inc. , New Jersey, (1982)
- [24] **COOK, R. D. ,MALKUS, D. S. ,PLESHA, M. E. ,** Consept and Aplications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, New York, (1989)
- [25] **REDDY, J. N. ,** An Introduction to the Finite Element Method, McGraw-Hill, New York, (1993)
- [26] **BECKER, E. B. , CAREY, G. F. ,ODEN, J. T.,** Finite Elements an Introduction Volume I, Prentice Hall,Inc. , New Jersey, (1982)
- [27] **CAREY, G. F. ,ODEN, J. T.,** Finite Elements a Second Course Volume II, Prentice Hall,Inc. , New Jersey, (1983)
- [28] **CAREY, G. F. ,ODEN, J. T.,** Finite Elements Computational Aspects Volume III, Prentice Hall,Inc. , New Jersey, (1984)
- [29] **ODEN, J. T., CAREY, G. F. ,** Finite Elements Mathematical Aspects Volume IV, Prentice Hall,Inc. , New Jersey, (1983)
- [30] **ODEN, J. T., CAREY, G. F. ,** Finite Elements Special Problem in Solid Mechanics Volume V, Prentice Hall,Inc. , New Jersey, (1985)

- [31] JONES, R. E. , STROME, D. R. ,Direct Stiffness Method Analysis of Shells of Revolution Utilizing Curved Elements, AIAA Journal,Vol.4, No.9, pp.1519-1525, (1966)
- [32] CANTIN, G. ,CLOUGH, R. W. , A Curved Cylindrical Shell Finite Element, AIAA Journal,Vol.6, pp.1057-1063, (1968)
- [33] AYDOĞAN, M., Silindirik Kabukların Gerilme Durumuna Delik Etkisi, Doktora Tezi, İ.T.Ü. , İstanbul, (1981)
- [34] AHMAD, S. , IRONS, B. M. and, ZIENKIEWICZ, O. C. ,Analysis of Thick Shell Structures by Curved Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol.2, pp.419-451, (1970)
- [35] BARRETT, D. J. , SOLER, A. , A Finite Element Model for Thick Walled Axisymmetric Shells, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.104, pp.215-222, (1982)
- [36] ALTAN, M. ,Kalın Silindirik Kabukların Çözümü için Üç Boyutlu bir Sonlu eleman ve Uygulamaları, Doktora Tezi, İ.T.Ü. , İstanbul,(1981)
- [37] SPILKER, R. L. , SINGH, S. P. ,Three-Dimensional Hybrit-Stress Isoparametric Quadratic Displacement Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol.18, pp.445-465, (1982)
- [38] IBRAHIMBEGOVIC, A. , WILSON, E. L. , Thick Shell and Solid Finite Elements with Independent Rotation Fields, International Journal for Numerical Methods in Engineering,Vol.31, pp.1393-1414, (1991)
- [39] MARTINS, P. A. F. and BARATA MARQUES, J. M. , Model3- A Three-Dimensional Mesh Generator, Computers and Structures, Vol.42, No.4, pp.511-529, (1992)
- [40] AKSU, T. , Genel Biçimli Kabuklar için bir Sonlu Eleman Formülasyonu, Doktora Tezi, İ.T.Ü., İstanbul, (1993)
- [41] KUMBASAR, N. , AKSU, T. ,A Finite Element Formulation for Moderately Thick Shells of General Shape, Computers and Structures, Vol.54, No.1, pp.49-57, (1995)
- [42] XU, X. , CAI, R. , A New Plate Shell Element of 16 Nodes and 40 Degrees of Freedom by Relative Displacement Method, Communications in Numerical Methods in Engineering,Vol.9, pp.15-20, (1993)

- [43] **REZAIEE-PAJANT, M. and SALARY, M. R. ,** Three-Dimensional Sensitivity Analysis using a Factoring Technique, Computers and Structures, Vol.49, No.1, pp.157-165, (1993)
- [44] **SMITH, I. M. and GRIFFITHS, D. V. ,**Programming the Finite Element Method, John Wiley and Sons, New York, (1988)



OZGEÇMİŞ

Nail KARA 1962 Konya’da doğdu. 1980 yılında Konya Teknik Lise Makina Bölümünden mezun oldu.

Lisansı Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü’nde 1985 yılında, Yüksek lisansı Yıldız Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği, Yapı programında 1988 yılında tamamladı.

1988-1989 Yıllarında askerlik görevini yedek subay olarak tamamladı.

1986 yılında Selçuk Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Anabilim Dalı’nda Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 1992 yılında doktora öğrenciliği süresince geçici görevle, İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü’ne Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen İ.T.Ü. İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü Yapı Anabilim Dalı Betonarme Çalışma Birimi’nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

Evli ve bir çocuğu vardır.