

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LUCAS KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

Gülçin GÖK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



**KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LUCAS KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

Gülçin GÖK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2021

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE
SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LUCAS KOLLOKASYON YÖNTEMİ**

Gülçin GÖK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 22.02.2021 tarihinde jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI (Danışman)

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM VE SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ İÇİN LUCAS KOLLOKASYON YÖNTEMİ

Gülçin GÖK

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Şubat 2021; 58 sayfa

Bu tezde kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemleri ve denklem sistemlerini nümerik olarak çözmemize yardımcı olacak Lucas polinomları üzerine kurulmuş bir kollokasyon metodu kullanılır. Bu metotta ilk olarak, incelenen diferansiyel denklemin yaklaşık çözümü sınırlı sayıda terimi olan Lucas polinom serisi şeklinde kabul edilir. Lucas polinomların katsayıları bilinmeyen olarak belirlenir. Kesirli türevlerin hesaplanmasında Caputo kesirli türev kullanılır. Daha sonra, yaklaşık çözüm ve kollokasyon noktaları kullanılarak, incelenen denklem bilinmeyenleri Lucas katsayıları olan, matrislerle ifade edilebilen lineer cebirsel sisteme dönüştürülür. Son olarak, matris aritmetiği kullanılarak yaklaşık çözüm katsayıları bulunur. Nümerik örnekler üzerinde çalışılarak yöntemin sonuçlarının literatürdeki diğer çalışmaların sonuçları ile kıyaslanması sağlanır. Bu çalışmada, problemlerin çözümünde gama fonksiyonu, beta fonksiyonu ve kesirli türev tanımlarından yararlanılmıştır. Bu denklemler ile ilgili örnekler çok paradigmalı sayısal hesaplama yazılımı olan Matlab da yazılan kod ile çözülerek elde edilen sonuçlar için grafik ve tablolar hazırlanarak kullanılan yöntemin yeterli hassasiyeti olduğu gözlemlenir. Ayrıca sonuçlar başka yöntemlerin sonuçları ile karşılaştırılır ve karşılaştırmalardan yöntemin iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

ANAHTAR KELİMELE: Kesirli mertebeli diferansiyel denklemler, Kesirli mertebeli diferansiyel denklem sistemleri, Kollokasyon noktaları, Kollokasyon yöntemi, Lucas kollokasyon yöntemi, Lucas polinomları.

JÜRİ: Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Prof. Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ABSTRACT

LUCAS COLLOCATION METHOD FOR SOLUTIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR SYSTEMS

Gülçin GÖK

Master Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

February 2021; 58 pages

In this thesis, a collocation method based on Lucas polynomials is used to solve fractional order linear differential equations and equation systems numerically. In this method, first, an approximate solution to the differential equation is expressed in terms of a finite series of Lucas polynomials with unknown coefficients. Then, using the approximate solution and collocation points, the initial differential equation is transformed into a linear algebraic system, in which Lucas coefficients are the unknowns. Caputo fractional derivative is used to calculate fractional derivatives. Then, using the approximate solution and collocation points, the studied equation is transformed into a linear algebraic system whose unknowns are Lucas coefficients, which can be expressed in matrices. Finally, using matrix arithmetic, approximate solution coefficients are found. By working on numerical examples, the results of the method are compared with the results of other studies in the literature. In this study, gamma function, beta function and fractional derivative definitions are used to solve problems. The examples related to these equations are solved with the code written in Matlab, a multi-paradigm numerical calculation software, and it is observed that the method used has sufficient precision by preparing graphics and tables for the results obtained. In addition, the results are compared with the results of other methods and it is seen from the comparisons that the method gives good results.

KEYWORDS: Fractional order differential equations, Systems of fractional order differential equations, Collocation points, Collocation method, Lucas collocation method, Lucas polynomials.

COMMITTEE: Assoc.Prof.Dr. Şuayip YÜZBAŞI

Prof.Dr. İlham ALİYEV

Prof.Dr. Nurcan BAYKUŞ SAVAŞANERİL



ÖNSÖZ

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım sayın hocam; Doç. Dr. Şuayip YÜZBAŞI'ya, tezimi bitirmem konusunda beni cesaretlendiren, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen arkadaşlarım Gamze YILDIRIM ve Damla Ceren BAKIRCI'ya, her anımda bana destek olan eşim Ahmet GÖK, kızım ARYA GÖK ve torunlarıyla ilgilenerek yükümü hafifleten annem Nilgün GÖK, babam Mehmet GÖK, kayınvalidem Şengül GÖK ve kayınbabam Hüseyin GÖK'e, değerli zamanını esirgemeyip her fırsatta yardım eden abim Gürkan GÖK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
ÖNSÖZ	v
AKADEMİK BEYAN	viii
SİMGELER	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ	x
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Koşul Sayısı	5
2.2.1. Koşul sayısının hesaplanması	5
2.3. Kesirli Analiz	6
2.3.1. Gama fonksiyonu	6
2.3.2. Beta fonksiyonu	7
2.3.3. Bir parametrelili ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu	8
2.4. Caputo Kesirli Türevi	8
2.5. Fibonacci ve Lucas Polinomları	10
2.5.1. Lucas polinomlarıyla fonksiyon yaklaşımı	14
3. MATERYAL VE METOT	16
3.1. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Çözümü İçin Lucas Kollokasyon Metodu	16
3.2. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemlerinin Çözümü İçin Lucas Kollokasyon Metodu	16
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	18
4.1. Yöntemim İçin Gerekli Kollokasyon Noktalarının Tanımlanması	18
4.2. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Temel Matris Bağıntıları	18
4.3. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Çözüm Yöntemi	22
4.4. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemleri İçin Temel Matris Bağıntıları	25

4.5. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Çözüm	
Yöntemi	29
4.6. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Nümerik Örnekler	31
4.7. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Nümerik	
Örnekler	42
5. SONUÇLAR	55
6. KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ	



AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler Ve Sistemlerinin Çözümleri İçin Lucas Kollokasyon Yöntemi” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

22/02/2021

Gülçin GÖK



SİMGELER

Simgeler:

a_n	: Lucas çözüm formunun katsayıları
$a_{i,n}$	: Lucas çözüm formlarının katsayıları
A	: Katsayı matrisi
A_j	: Katsayılar matrisi
$\tilde{G}$	: Sağ taraftaki koşullar kullanılmış yeni arttırılmış matris
$L_n(x)$	: Lucas polinomları
$L_n^\alpha(x)$	: Genelleştirilmiş Lucas fonksiyonları
N	: Kesme sınırı
$P_i(x)$	: Diferansiyel denklem katsayıları
$P_{i,j}(x)$	: Diferansiyel denklem sisteminin katsayıları
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
U	: Koşullar için arttırılmış matris
W	: Arttırılmış matris
$\bar{W}$	: Koşullar kullanılmış yeni arttırılmış matris
x_i	: Kollokasyon noktaları
$y(x)$	: Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler için tam çözüm
$y_i(x)$	: Kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemleri için tam çözüm

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Lucas polinomlarının ilk 8'inin grafiği	13
Şekil 2.2.	Genelleştirilmiş Lucas fonksiyonunun ilk 8'inin $\alpha = 0.5$ değeri için grafiği	14
Şekil 4.3.	Örnek 4.14'ün tam çözümü	36
Şekil 4.4.	Örnek 4.14'ün yaklaşık çözümü	36
Şekil 4.5.	Örnek 4.15'nin hata fonksiyonlarının karşılaştırılması	39
Şekil 4.6.	Örnek 4.15'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması	40
Şekil 4.7.	Kanallar ile bağlanmış göller modeli	45
Şekil 4.8.	Örnek 4.17'ün $y_1(x)$ çözümünün karşılaştırılması	47
Şekil 4.9.	Örnek 4.17'ün $y_2(x)$ çözümünün karşılaştırılması	48
Şekil 4.10.	Örnek 4.17'ün $y_3(x)$ çözümünün karşılaştırılması	49
Şekil 4.11.	$N = 3, N = 5$ ve $N = 8$ için $y_1(x)$ yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonları	51
Şekil 4.12.	$N = 3, N = 5$ ve $N = 8$ için $y_2(x)$ yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonları	52
Şekil 4.13.	$N = 3, N = 5$ ve $N = 8$ için $y_3(x)$ yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonları	53

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. İki değişkenli Lucas polinomlarının ilk 8'i	11
Çizelge 2.2. Tek değişkenli Lucas polinomlarının ilk 8'i	12
Çizelge 4.3. $N = 4$, $N = 5$, $N = 6$ ve $N = 7$ için örnek 4.15'nin nümerik sonuçları	41
Çizelge 4.4. Örnek 4.17 için $\alpha_i = 1$ değerinde nümerik sonuçların karşılaştırılması	50
Çizelge 4.5. Örnek 4.17 için $\alpha_i = 0.95$ değerinde nümerik sonuçlarının karşılaştırılması	50



1. GİRİŞ

Literatür incelendiğinde kesirli dereceden türevlerle ilgili olarak çok sayıda çalışma ve tanım yapılmış olduğu görülmektedir. Türev kavramı, üzerinde üç yüz yıldır çalışılan bir konu olmuştur. Newton, L'Hospital ve Leibniz türev kavramı ile ilgilenirken türev işleminde dereceyi bir olarak almışlardır. Fakat yapılan çalışmalar derinleştirildiğinde tamsayı mertebesinin dışında kesirli türev ve kesirli integral operatörleri bulunmuştur. Bu konu birçok bilim adamının dikkatini çekmiştir ve türevin derecesinin birden farklı olabileceği üzerinde çalışmalar başlatılmıştır (Karcı 2015; Kilbas vd. 2006). Kesirli analizin bu şekilde hızlı bir gelişme göstermesi ise 1974 yılındaki bir konferans ile gerçekleşmiştir. Bu konu üzerine daha sonra daha fazla ağırlık verilmeye başlanmıştır. Bu alanda birçok konferanslar düzenlenmiş, kitaplar yazılmış ve bilimsel dergiler bulunmaktadır. Gelişen teknoloji ile beraber çeşitli mühendislik bilimleri ve doğa bilimlerinde olduğu gibi uygulamalı bilim dallarındaki matematiksel modellemelerde karşılaşılan problemlerde tamsayılı türevin yetersiz kaldığı fark edilmiştir. Fiziksel sistemlerin modellenmesinde bu kavramların geliştirilmiş hali olan kesirli türev kullanıldığında daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür (Miller 1975; Mathai 2010). Örneğin; elektrik devre tasarımı, matematiksel modelleme teorisi, mekanik ve kimyasal işlemlerin sistemlerinin simülasyonu, güç sistemleri ve optimal kontrol gibi problemlerin matematiksel modellemelerinde daha çok bu türden denklemler ile karşılaşılmaktadır.

Çoğu kesirli diferansiyel denklemin analitik çözümü elde edilememektedir. Bu nedenle çözüme yakın yaklaşım ve sayısal teknikler kullanılmaktadır. Bunların başlıcaları Varyasyonel yineleme yöntemi (He 1997, 2004) ve Adomian ayrıştırma yöntemidir (Adomian 1988, 1994). Bu yöntemler doğrusal ve doğrusal olmayan problemlere analitik bir yaklaşım sağlamak için nispeten yeni yaklaşımlardır ve bilim adamlarının uygulamalı açısından özellikle değerlidir. Böylece gerçek fiziksel problemlerde çok hızlı bir şekilde birleşen daha gerçekçi seri çözümler elde edilir. Ayrıca iki yöntemin avantajı; doğrusallaştırma, ayrıklaştırma veya pertürbasyon gerektirmemesi ve doğrusal olmayan stokastik durumda kapanış yaklaşımı, küçüklük varsayımlarına veya fiziksel olarak gerçekçi olmayan beyaz gürültü varsayımına ihtiyaç duymamasıdır (Adomian 1994). Bunların yanında kesirli mertebeli denklemleri çözmek için diferensiyel dönüşüm metodu (Chen ve Liu

1998), sonlu farklar yaklaşım metodu (Chen ve Ju 2004), Lax-Wendroff metodu (Chen J.B. 2009), Euler metodu (Atkinson 1989), Runge-Kutta metodu (Runge 1895; Kutta 1901), geliştirilmiş rasyonel Chebyshev kollokasyon yöntemi (Ramdan vd. 2014), Bernstein sıralama yöntemi (Akyüz Daşcıoğlu vd. 2014) ve Lucas sıralama yöntemi (Çetin vd. 2015) gibi birçok metot kullanılmıştır. Bu yöntemlerin uygulandığı birçok çalışma tek veya az terimli denklem sistemlerini içermektedir. Bu yöntemlerden farklı olarak da literatürde farklı yöntemler kullanılmaktadır. Bütün bu metotları uygularken denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümlerine daha kısa sürede ulaşmak ve güvenilirliği arttırmak için bilgisayar programlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu alanda Matlab, Maple, Mathematica başlıca kullanılan programlar olmuştur.

Bu çalışmada, kesirli mertebeden denklem ve denklem sistemlerinin yaklaşık çözümlerini Lucas polinomlarından ve kollokasyon yönteminden yararlanarak bulmaktır. Elde edilen sonuçlar ile literatürdeki diğer sonuçlardan daha iyi ve isabetli sonuçların elde edilmesi amaçlanmıştır.

2. KAYNAK TARAMASI

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1. İçerisinde bir bağımlı değişken ile bağımsız değişken bulunduran ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevini veren denklemlere adi diferansiyel denklem denir. Bir bağımlı değişkenli adi diferansiyel denklem genel olarak

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilir. $y^{(n)}$ ifadesi, y 'nin x 'e göre n 'inci türevini göstermektedir.

Tanım 2.2. x_k 'ler değişkenler ($k = 1, 2, \dots, n$), ve $a_k, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

biçimindeki ifade edilen denklemlere lineer denklem denir (Boelkins 2009).

Tanım 2.3. $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ ve x_j bilinmeyenler olup ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde ifadelere lineer denklem sistemi denir (Boelkins 2009).

Tanım 2.4. (2.2) de tanımlanan lineer denklem sistemi $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ şeklinde matrisler ile gösterilir. Burada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ ve } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

şeklinde olmak üzere

$$[\mathbf{A} : \mathbf{B}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & ; & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & ; & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & ; & b_m \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

ifadesine lineer sistemin genişletilmiş katsayılar matrisi denir (Goode 2000).

Tanım 2.5. Lineer denklem sisteminde, sistemin çözümü genişletilmiş katsayılar matrisinde yapılan elementer satır ve sütun işlemleriyle değişmeyeceğinden dolayı, $[\mathbf{A} : \mathbf{B}]$ genişletilmiş katsayılar matrisinin indirgenmiş eşelon formu ile çözümler elde edilir. Bu şekilde sistemleri çözme metoduna Gauss-Jordan yok etme metodu denir (Goode 2000).

Tanım 2.6. $\mathbf{A}$, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere, $|\mathbf{A}| = 0$ olduğunda $\mathbf{A}$ matrisine singüler (tekil) matris, $|\mathbf{A}| \neq 0$ olduğunda da $\mathbf{A}$ matrisine non-singüler (tekil olmayan) matris adı verilir.

Eğer, her $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ için, $\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$ lineer denklem sistemi tek bir çözüme sahipse, $\mathbf{A}$ olmayan matrisi tersinir denir ve bu sistemin çözümü

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

ile bulunur (Boelkins 2009).

Tanım 2.7.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (2.4)$$

Lineer denklem sistemini ele alalım. Bu sistemin katsayı matrisinin de determinanı

$\Delta \neq 0$ olmak üzere

$$\Delta_{\mathbf{x}_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_{\mathbf{x}_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{\mathbf{x}_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

olsun. O zaman

$$x_1 = \frac{\Delta_{\mathbf{x}_1}}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_{\mathbf{x}_2}}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_{\mathbf{x}_n}}{\Delta}, \quad \Delta \neq 0$$

lineer denklem sistemi ile (2.5) ile çözümünün bulunması kuralına Cramer Kuralı denir (Goode 2000).

2.2. Koşul Sayısı

Koşul sayısı, fonksiyonlarda yapılan hataları veya fonksiyonun girdilerindeki değişikliğe ne kadar duyarlı olduğunu ve fonksiyonun girdilerinde oluşan hatanın çıktılarına yansıyan miktarını ölçmek için kullanılır.

Koşul sayısının düşük olması bir sorunun iyi şartlandırıldığı, koşul sayısının yüksek olması sorunun kötü koşullandırıldığı hakkında bilgi verir. Ancak algoritmada oluşan hatanın maksimum değerini koşul sayısı tam olarak vermeyebilir (Belsley 1980).

2.2.1. Koşul sayısının hesaplanması

Koşul sayısının doğrusal bir sisteme olan kullanışlılığı için şu şekilde hesaplayabiliriz. Normun özelliğinden yola çıkalım. $z, Ax = y$ 'nin çözümü olsun.

$$\|z\| = \|A^{-1}y\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|y\|, \quad \frac{\|z\|}{\|y\|} \leq \|A^{-1}\| \quad (2.5)$$

oluşan bu sınır, iyi şekilde seçilmiş bazı y vektörleri ile ilişkilidir. $\frac{\|z\|}{\|y\|}$ olarak elde edilen oranı olabildiğince büyük yapan y vektörleri seçiminde $\|A^{-1}\|$ için makul bir tahmin bulunur (Watkins 2002).

2.3. Kesirli Analiz

Kesirli analiz ilk olarak 1967’de L’Hospital’ın, Leibniz’e gönderdiği mektuptaki bir soru ile başlamıştır. $\frac{d^n y}{dx^n}$ gösterimini bulan Leibniz’e $n = 1/2$ olduğunda ne olacağı sorusunu sormuştur. Leibniz’e göre bu bir paradokstur. Leibniz bu soruya cevaben

$$\frac{d^{1/2}x}{dx^{1/2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}$$

şeklinde gösterileceğini belirtmiş ve bu süreç kesirli analizin başlangıcı olmuştur (Oldham 1974; Şakran 2020). 19. yy’da Abel, Euler, Grunwald, Weyl, Fourier Liouville, Riemann, Laplace, Lagrange, Lacroix ve Letniko ve birçok ünlü matematikçi de bu konuyla ilgili çalışmalar yapmıştır (Podlubny 1999; Diethelm 2004). 1730’lu yıllardan bugüne kadar kesirli türevle ilgili farklı tanımlar yapılmıştır. Bu tanımlara dayanarak kesirli analiz, katlı integral ve tamsayı mertebeli türev kavramlarının genişletilmesi ve birleştirilmesiyle oluşan herhangi bir reel veya kompleks mertebeli türev ve integralin incelenmesi şeklinde ifade edilir. Klasik türevi baz alarak kesirli mertebeden türevleri hesaplama işleminde önemli yer tutan yardımcı fonksiyonlar vardır (Podlubny 1999). Probleme en uygun olan fonksiyonun kullanılması ile problemde en iyi sonucun elde edilmesi sağlanmaktadır. Bu fonksiyonların tanımları aşağıda verilmiştir.

2.3.1. Gama fonksiyonu

Gama fonksiyonu kesirli analizin en temel fonksiyonlarından biridir. Bu fonksiyon, pozitif değerli n için Euler integrali ile tanımlanır (Podlubny 1999; Cannapan 2009).

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

n ’nin pozitif değerleri için, $\Gamma(n)$ fonksiyonu yakınsaktır. Tümevarım yöntemi ile $\Gamma(n)$ fonksiyonunun yakınsadığı değeri incelersek $n!$ ’a yakınsadığı görülmektedir.

$$n = 1 \text{ için, } \Gamma(1) = \int_0^{\infty} x^0 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} (1 - e^{-T}) = 1$$

elde edilir.

n yerine $n + 1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T x^n e^{-x} dx \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (x^n)(e^{-x}) \Big|_0^T - \int_0^\infty (-e^{-x})(nx^{n-1}) dx \right\} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (-T^n)(e^{-T}) + n \int_0^T (x^{n-1})(e^{-x}) dx \right\} = n\Gamma(n)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $n = 1, 2, \dots$ için değerler verilirse;

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= 1 \\
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 \\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2! \\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3.2! = 3! \\
\vdots &= \vdots = \vdots = \vdots = \vdots \\
\Gamma(n+1) &= n!
\end{aligned}$$

şeklinde gama fonksiyonunun $n!$ 'e yakınsadığı elde edilmiş olur. Bu nedenle Gama fonksiyonuna genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu adı verilmektedir.

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n! \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
\Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\
\Gamma(n)\Gamma(1-n) &= \frac{\pi}{\sin \pi n}
\end{aligned}$$

$$0 < n < 1 \quad \text{için} \quad \Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin \pi n} \quad \text{ve} \quad n = \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ eşitliğinden $\Gamma(n)$ çekilirse gama fonksiyonunun n 'nin tamsayı olmayan tüm negatif değerleri için tanımlı olduğu görülmektedir (Davis 1959).

2.3.2. Beta fonksiyonu

Euler'in ikinci integrali olarak tanımlanan Beta fonksiyonu için x ve y pozitif değerli olmak üzere,

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

şeklinde tanımlanır. Herhangi pozitif olmayan x ya da y değerleri için bu integral ıraksaktır. Bunun yanında Beta ve Gama fonksiyonu arasındaki ilişkiye dair bağıntı ise (Podlubny 1999)

$$\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

şeklindedir.

2.3.3. Bir parametrelili ve iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad , \quad \alpha > 0$$

diye tanımlanan E_α fonksiyonuna (seri yakınsak olduğunda) α mertebeli Mittag-Leffler fonksiyonu denir. Bu gösterim Mittag-Leffler fonksiyonunun bir parametrelili gösterimidir.

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad , \quad \alpha > 0$$

ile tanımlanan $E_{\alpha,\beta}$ fonksiyonuna (seri yakınsak olduğunda) α ve β parametreleri ile birlikte iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu denir (Dattoli vd. 2017).

2.4. Caputo Kesirli Türevi

Günümüzde kullanılmakta olan birçok farklı kesirli türev operatörü vardır. Reimann-Liouville, Grunwald-Letnikov, Caputo, Weyl ve Erdely-Kober bunlardan bazılarıdır. En sık kullanılan ikisi bunlardan Reimann-Liouville ve Grunwald-Letnikov olmuştur. Fakat sağladığı avantajlar yönünden tercih edilen ve Reimann-Liouville differansiyel operatörünün bir varyasyonu olarak karşımıza çıkan Caputo türevi de sıklıkla kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemler yardımı ile yapılan matematiksel uygulama problemlerinde $f(a)$, $f'(a)$ gibi yorumlanabilir başlangıç koşullarına gerek duyulmaktadır. Bu tarz soruların çözümleri için Caputo tarafından tanım verilmiştir (Podlubny 1999).

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad , \quad (n-1 < \alpha < n) \quad (2.6)$$

$f(t)$ fonksiyonunun $\alpha \rightarrow n$ iken Caputo kesirli türevi, $f(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden bilinen türevi halini alır. Varsayalım ki, $0 \leq n-1 < \alpha < n$ ve $f(t)$ her $T > \alpha$ için

$[\alpha, T]$ aralığında $(n + 1)$ sürekli türeve sahip olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(\alpha)(t-\alpha)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_\alpha^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(\alpha) + \int_\alpha^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\ &= f^{(n)}(t)\end{aligned}$$

olur. Bu da diğer kesirli türev tanımlarındaki yaklaşımlarına benzer olarak Caputo yaklaşımının da tamsayı mertebeden türev ile arasında bir interpolasyon olduğunu göstermektedir. Şimdi (2.6)'de $f(t) = x^\beta$ alıp yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned}D_t^\alpha t^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n}{d\tau^n} \tau^\beta d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1) \tau^{\beta-n} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1} u^{\beta-n} du \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1) B(n-\alpha, \beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-n+1)} t^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}\end{aligned}$$

elde edilir (Podlubny 1999). Burada kullanılan n pozitif bir tamsayı, $n - 1 < \alpha < n$ ve $Re(\beta) > -1$ dir.

Çalışmamızda ise kolaylıkla kesirli mertebeden türevlerimizi bu şekilde hesaplayacağız.

Son olarak, Caputo kesirli türev tanımının diğer tanımlardan farklı olarak sağladığı avantajları şu şekilde belirtebiliriz.

- Tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerinde kullanılan başlangıç koşulları ile kesirli mertebeli diferansiyel denklemlerinin başlangıç koşullarının aynı olması bunlardan birincisi ve en temelidir.
- İkinci olarak sabitin türevinin sıfır olması durumudur. Örneğin Riemann-Liouville kesirli türevi sonlu alt sınır değeri için sıfır değildir. Sabitin türevinin sıfıra eşit olması bizim problemlerimizin fiziksel yorumunu yapabilmemiz açısından önemlidir.

Caputo kesirli türev tanımının sağladığı bu avantajlar dolayısıyla çalışmamızda biz de bu yaklaşımı kullanacağız.

2.5. Fibonacci ve Lucas Polinomları

Fibonacci ve Lucas polinomları, Chebyshev polinomlarının özel durumudur ve birçok matematikçi tarafından ileri düzeyde incelenmiştir (Bicknell 1970). Biz ise çalışmamızda Fibonacci ve Lucas polinomlarından kısaca bahsedeceğiz.

Fibonacci polinomları şu şekilde tanımlanmıştır (Catalani 2004).

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), & n \geq 2 \end{cases} \quad (2.7)$$

(2.7) tanımından yararlanarak ilk sekiz Fibonacci polinomlarını şu şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0, \\ F_1(x) &= 1, \\ F_2(x) &= x, \\ F_3(x) &= x^2 + 1, \\ F_4(x) &= x^3 + 2x, \\ F_5(x) &= x^4 + 3x^2 + 1, \\ F_6(x) &= x^5 + 4x^3 + 3x, \\ F_7(x) &= x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1, \\ F_8(x) &= x^7 + 6x^5 + 10x^3 + 4x, \end{aligned}$$

Fibonacci polinomlarında $x = 1$ alındığında, Fibonacci sayılarını elde etmiş oluruz.

Tanım 2.8.

$$n \geq 2 \quad \text{için} \quad L_n(x, y) = xL_{n-1}(x, y) + yL_{n-2}(x, y)$$

rekürans bağıntısı ve

$$L_0(x, y) = 2, L_1(x, y) = x$$

başlangıç şartları ile tanımlanan polinoma iki değişkenli Lucas polinomu denir (Catalani 2004).

Teorem 2.9. İki değişkenli Lucas polinomu $L_n(x, y)$, $x + y - 1 \neq 0$ ise

$$\sum_{k=0}^n L_k(x, y) = \frac{1}{x + y - 1} (L_{n+1}(x, y) - yL_n(x, y) - x + 2) \quad (2.8)$$

dir (Tuğlu vd. 2011).

Teorem 2.10. $L_N(x, y)$ iki değişkenli Lucas polinomu olmak üzere

$$L_N(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{N}{N-k} \binom{N-k}{k} x^{N-2k} y^k \quad (2.9)$$

dir (Belbachir ve Bencherif 2008).

Teorem 2.11. $L_n(x, y)$ iki değişkenli Lucas polinomunun üreteç fonksiyonu

$$g_2(t) = \frac{2 - xt}{1 - xt - yt^2} \quad (2.10)$$

dir (Catalani 2004).

İki değişkenli Lucas polinomlarının ilk 8'i aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 2.1. İki değişkenli Lucas polinomlarının ilk 8'i

n	$L_n(x, y)$
0	2
1	x
2	$x^2 + 2y$
3	$x^3 + 3xy$
4	$x^4 + 4x^2y + 2y^2$
5	$x^5 + 5x^3y + 5xy^2$
6	$x^6 + 6x^4y + 9x^2y^2 + 2y^3$
7	$x^7 + 7x^5y + 14x^3y^2 + 7xy^3$
8	$x^8 + 8x^6y + 20x^4y^2 + 16x^2y^3 + 2y^4$

İki değişkenli Lucas polinomunu için bazı özel durumlar aşağıda verilmiştir.

$y = 1$ için $L_n(x, 1)$ iki değişkenli Lucas polinomu klasik Lucas polinomuna dönüşür.

$y = 1$ ve x yerine $2x$ alınırsa $L_n(2x, 1)$ iki değişkenli Lucas polinomu Pell-Lucas polinomuna dönüşür.

$x = 1$ ve y yerine $2y$ alınırsa $L_n(1, 2y)$ iki değişkenli Lucas polinomu Jacobsthal-Lucas polinomuna dönüşür.

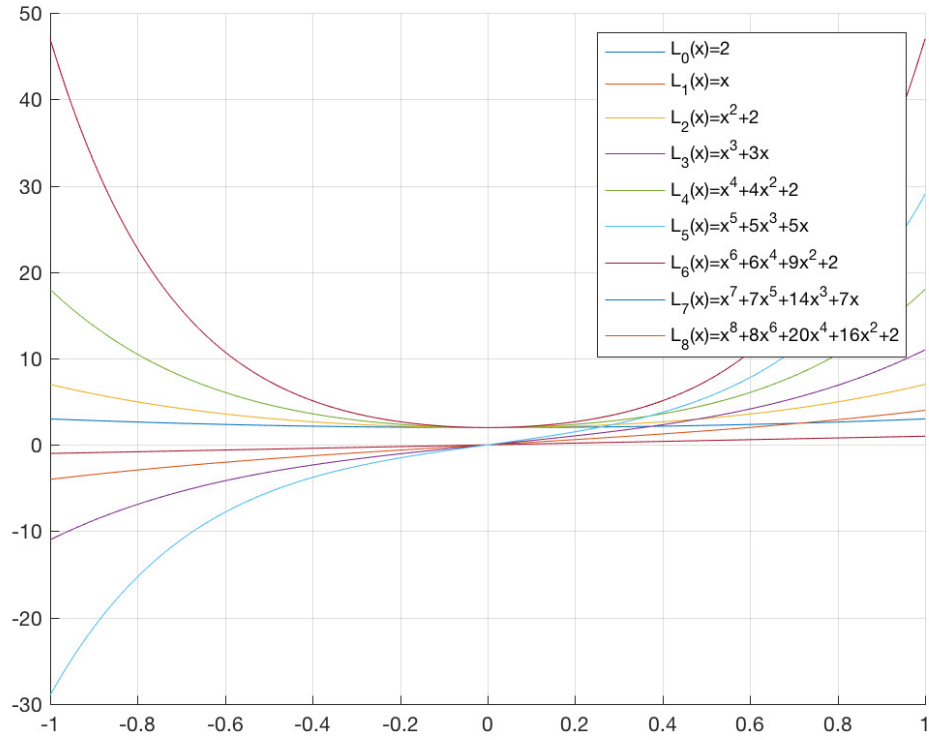
$y = -1$ ve x yerine $2x$ alınırsa $L_n(2x, -1)$ iki değişkenli Lucas polinomu birinci çeşit Chebyshev polinomuna dönüşür.

$x = -2$ ve x yerine $3x$ alınırsa $L_n(3x, -2)$ iki değişkenli Lucas polinomu Fermat-Lucas polinomuna dönüşür.

$L_n(x, y)$ Lucas polinomlarını $y = 1$ alarak klasik Lucas polinomu haline getirip $n = 8$ değerine kadar listeleyip şekil üzerinde gösterelim.

Çizelge 2.2. Tek değişkenli Lucas polinomlarının ilk 8'i

n	$L_n(x)$
0	2
1	x
2	$x^2 + 2$
3	$x^3 + 3x$
4	$x^4 + 4x^2 + 2$
5	$x^5 + 5x^3 + 5x$
6	$x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2$
7	$x^7 + 7x^5 + 14x^3 + 7x$
8	$x^8 + 8x^6 + 20x^4 + 16x^2 + 2$



Şekil 2.1. Lucas polinomlarının ilk 8'inin grafiği

Şimdi, (2.9)'i $y = 1$ olarak tek değişkenli Lucas polinomları haline getirelim.

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{N}{N-k} \binom{N-k}{k} x^{(N-2k)}, \quad N \geq 1 \quad (2.11)$$

$$\lfloor N/2 \rfloor = \begin{cases} \frac{N}{2}, & N \text{ çift} \\ \frac{N-1}{2}, & N \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde yazılır.

Çalışmamızda kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri kullandığımızdan dolayı sonuçlarımızın daha iyi gelmesi açısından elde ettiğimiz tek değişkenli Lucas polinom fonksiyonunda x yerine x^α yazarak genelleştirilmiş Lucas fonksiyonunu tanıyalım.

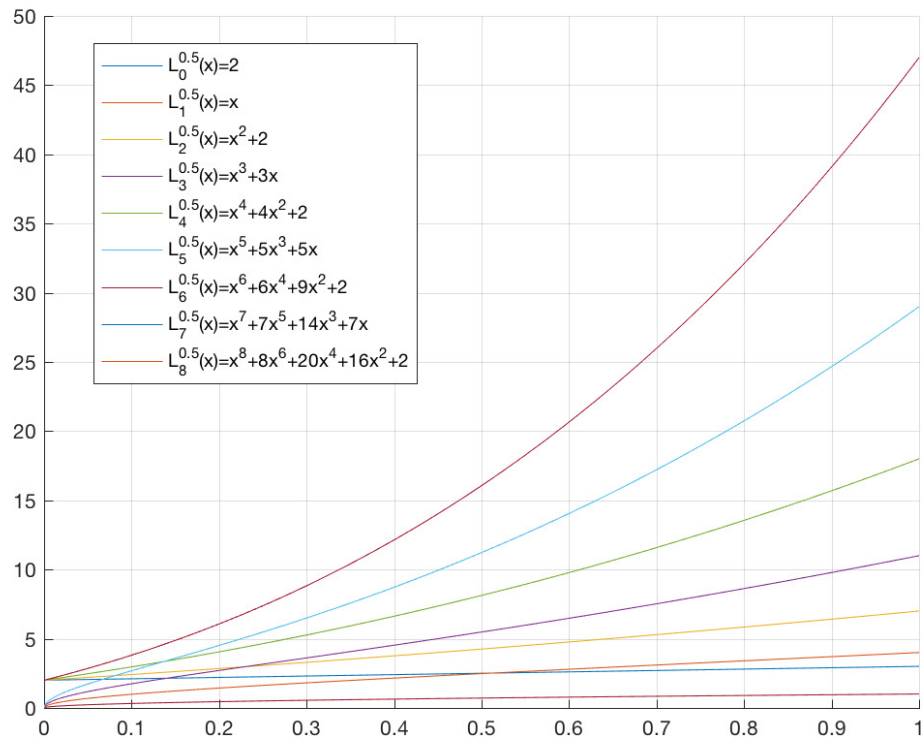
Tanım 2.12. $\alpha > 0$,

$$L_N^\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{N}{N-k} \binom{N-k}{k} x^{(N-2k)\alpha}, \quad N \geq 1 \quad (2.12)$$

$$\lfloor N/2 \rfloor = \begin{cases} \frac{N}{2}, & N \text{ çift} \\ \frac{N-1}{2}, & N \text{ tek} \end{cases}$$

olmak üzere (2.12)'e genelleştirilmiş Lucas fonksiyonu denir.

Şimdi (2.12) de tanımladığımız Lucas polinomlarını $\alpha = 0.5$ değerinde çizelim.



Şekil 2.2. Genelleştirilmiş Lucas fonksiyonunun ilk 8'inin $\alpha = 0.5$ değeri için grafiği

2.5.1. Lucas polinomlarıyla fonksiyon yaklaşımı

Lucas Polinomları cinsinden ifade edilebilen, sürekli olan $s(x)$ fonksiyonunu düşünelim (Oruç 2017).

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k(x) \quad (2.13)$$

(2.13) seri açılımı sonsuz terim içerir. Biz N sonlu terimine kadar yazarsak,

$$\mathbf{s}(x) \cong \sum_{k=0}^N a_k L_k(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{A} \quad (2.14)$$

şeklinde olur. Burada

$$\mathbf{L}(x) = [L_0(x), L_1(x), L_2(x), \dots, L_N(x)] \quad \text{ve} \quad \mathbf{A} = [a_0, a_1, \dots, a_N]^T$$

dir. Şimdi $s(x)$ fonksiyonunun m 'inci türevini sonsuz ve sonlu seri açılımında sırasıyla şu şekilde yazalım.

$$\begin{aligned} s^{(m)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k L_k^{(m)}(x) \\ s^{(m)}(x) &\cong \sum_{k=0}^N a_k L_k^{(m)}(x) = \mathbf{L}^{(m)}(x) \mathbf{A}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\mathbf{L}^{(m)}(x) = [L_0^{(m)}(x), L_1^{(m)}(x), \dots, L_N^{(m)}(x)]$$

dir.

Teorem 2.13. $L_n(x)$ ve $F_n(x)$ 'ler Lucas ve Fibonacci polinomları olmak üzere, aralarındaki ilişkiyi şu şekilde yazabiliriz.

$$L_n''(x) = nF_n'(x).$$

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Çözümü İçin Lucas Kollokasyon Metodu

Araştırmamızda , $0 < \alpha < 1$ ve $a \leq x \leq b$

$$\sum_{k=0}^m P_k(x) D_*^{k\alpha} y(x) = g(x) \quad 0 \leq a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

kesirli mertebeden diferansiyel denleminin,

$$D_*^i y(c_i) = \beta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad a \leq c_i \leq b \quad (3.2)$$

koşulları altında Lucas kollokasyon metodu oluşturularak yaklaşık çözümler elde edilecektir. Burada,

$$y(x) \cong y_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n^\alpha(x) \quad (3.3)$$

şeklinde yaklaşık çözümleri bulunacaktır. Burada N keyfi olarak seçilen pozitif bir tam sayı a_n 'ler belirlenecek olan Lucas katsayıları olup $L_n^\alpha(x)$ 'ler ise genelleştirilmiş Lucas fonksiyonudur.

3.2. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Çözümü İçin Lucas Kollokasyon Metodu

Araştırmamızın bir diğer problemi , m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı

$$\sum_{n=0}^m \sum_{i=1}^k P_{i,j}^n(x) D_*^{n\alpha} y_i(x) = g_j(x), \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad 0 \leq a \leq x \leq b, \quad (3.4)$$

kesirli lineer diferansiyel denklem sisteminin

$$\sum_{n=0}^{m-1} (a_{j,n}^i D_*^{n\alpha} y_i(a) + b_{j,n}^i D_*^{n\alpha} y_i(b)) = \beta_{i,j} \quad j = 0, 1, 2, \dots, m-1, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.5)$$

karışık koşulları altında yaklaşık çözümlerini elde etmek için Lucas kollokasyon metodu oluşturulacaktır. Burada problem k tane kesirli mertebeli denklem ve m tane koşuldan

oluşur ve

$y_i(x)$ bilinmeyen fonksiyon,

$P_{i,j}^n(x)$ ve $g_j(x)$, $a \leq x \leq b$ aralıklarında tanımlı fonksiyonlar,

$a_{j,n}$, $b_{j,n}$ ve $\beta_{i,j}$ uygun sabitler

$n\alpha$, kesirli mertebeden türevi tanımlayan bir sabittir.

Lucas kollokasyon metodunda amaç; (3.4) denklem sisteminin (3.5) koşulları altında

$$y_i(x) = \sum_{n=0}^N a_{i,n} L_n^\alpha(x), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlı N . mertebeden kesilmiş Lucas serisi cinsinden yaklaşık çözümünü elde etmektir. Burada N pozitif tamsayı ve serinin kesme sınırı, a_n 'ler belirlenecek olan Lucas katsayıları ve $L_n^\alpha(x)$ 'ler ise (2.12)'de tanımlanan genelleştirilmiş Lucas fonksiyonlarıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, karışık koşullar altında verilen kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin, yaklaşık çözümlerini elde ettiğimiz çözüm yöntemi açıklanır. Kollokasyon noktaları tanımlanıp matris bağıntıları açıklanır. Yöntemin doğruya yakınlığını ve etkili oluşunu gözlemlemek için sayısal örnekler için yöntem uygulanır. İşlemler Matlab’da kolayca hesaplanıp farklı yöntemler ile karşılaştırmalara yer verilerek yöntemin etkinliği gösterilir.

4.1. Yöntemim İçin Gerekli Kollokasyon Noktalarının Tanımlanması

Çalışmamızda kullandığımız kollokasyon noktaları;

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (4.1)$$

ile tanımlanan eşit aralıklı kollokasyon noktalarıdır. Burada;

$$a \leq x \leq b \quad \text{ve} \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad (4.2)$$

dır.

4.2. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Temel Matris Bağıntıları

Öncelikle çözüm fonksiyonu olan (3.3)’ün matris formunu;

$$y(x) = \mathbf{L}^\alpha(x)\mathbf{A} \quad (4.3)$$

şeklinde yazalım. Burada;

$$\mathbf{L}^\alpha(x) = \begin{bmatrix} L_0^\alpha(x) & L_1^\alpha(x) & \dots & L_N^\alpha(x) \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_N \end{bmatrix}^T,$$

şeklinde tanımlanır.

$$\mathbf{X}^\alpha(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^{1\alpha} & x^{2\alpha} & \dots & x^{N\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \quad (4.4)$$

olmak üzere,

(2.12)'de verilen genelleştirilmiş Lucas fonksiyonlarını kullanarak N 'in tek ve çift değerlerine göre düşündüğümüzde aşağıdaki gibi matris formlarını elde etmiş oluruz (Çetin vd. 2015)

Eğer N tek ise,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n-1}{(n-1)/2} \binom{(n-1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-3)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-5)/2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{(n+1)/2} \binom{(n+1)/2}{(n-1)/2} & 0 & \frac{n}{(n+3)/2} \binom{(n+3)/2}{(n-3)/2} & 0 & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Eğer N çift ise,

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{1} \binom{1}{0} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{2}{1} \binom{1}{1} & 0 & \frac{2}{2} \binom{2}{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \binom{2}{1} & 0 & \frac{3}{3} \binom{3}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{4}{2} \binom{2}{2} & 0 & \frac{4}{3} \binom{3}{1} & 0 & \frac{4}{4} \binom{4}{0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{n-1}{(n)/2} \binom{n/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n-1}{(n+2)/2} \binom{(n+4)/2}{(n-4)/2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{n}{(n)/2} \binom{(n)/2}{(n)/2} & 0 & \frac{n}{(n+2)/2} \binom{(n+2)/2}{(n-2)/2} & 0 & \frac{n}{(n+4)/2} \binom{(n+4)/2}{(n-4)/2} & \cdots & \frac{n}{n} \binom{n}{0} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

olmak üzere,

$$L^\alpha(x) = X^\alpha(x)D \quad (4.5)$$

şeklinde elde edilir. (4.5)'i (4.3)'te yerine yazarsak,

$$y(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.6)$$

denklemini elde edilir. Bulmuş olduğumuz (4.6) ifadesinin matris formunda (4.1)'de verilen kollokasyon noktalarını yazdığımızda

$$y(x_i) = \mathbf{X}^\alpha(x_i) \mathbf{D} \mathbf{A}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (4.7)$$

olur. (4.6)'nın α . mertebeden türevini aldığımızda

$$D_*^\alpha y(x) = D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.8)$$

olup, $D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x)$ için Caputo kesirli türev tanımını kullandığımızda,

$$\begin{aligned} D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x) &= \begin{bmatrix} D_*^\alpha 1 & D_*^\alpha x^\alpha & D_*^\alpha x^{2\alpha} & \dots & D_*^\alpha x^{N\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} x^{(N-1)\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \\ &= \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Burda

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

(4.9)'da elde edilen ifade (4.8) de yerine yazılırsa,

$$D_*^\alpha y(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.10)$$

şeklinde olur. Benzer şekilde (4.6)'nın 2α . mertebeden türevini aldığımızda,

$$D_*^{2\alpha} y(x) = D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.11)$$

olup, burada

$$\begin{aligned}
 D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x) &= \begin{bmatrix} D_*^{2\alpha} 1 & D_*^{2\alpha} x^\alpha & D_*^{2\alpha} x^\alpha & \dots & D_*^{2\alpha} x^{N\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(1)} & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-2)\alpha+1)} x^{(N-2)\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \\
 &= \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_2
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $\mathbf{R}_2$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(1)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-2)\alpha+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}.$$

$D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x)$ ile $\mathbf{X}^\alpha(x)$ arasındaki bağıntı ise

$$D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_2 \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.12)$$

şeklindedir. Benzer şekilde $y(x)$ 'in $k\alpha$. mertebeden türevinin matris formu

$$D_*^{k\alpha} y(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{A} \quad (4.13)$$

olur. Burada $\mathbf{R}_k$ matrisi

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Gamma((k+1)\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-i)\alpha+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \underbrace{0}_{(k+1).\text{sütun}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

şeklindedir.

4.3. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Çözüm Yöntemi

$x = x_i$ için (3.1)'i tekrar yazacak olursak

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x_i) D_*^{k\alpha} y(x_i) = g(x_i) \quad (4.14)$$

elde ederiz. Bulmuş olduğumuz (4.13) ifadesi (4.14)'te yerine yazılırsa

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k(x_i) \mathbf{X}^\alpha(x_i) \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{A} = g(x_i) \quad (4.15)$$

şeklinde olup matrisler ile ifade edersek

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X}^\alpha \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.16)$$

gösterilmiş olur. Buradaki $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{X}^\alpha$ ve $\mathbf{G}$ matrislerini göstermek gerekirse

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} P_k(x_0) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P_k(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P_k(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P_k(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$\mathbf{X}^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & x_0^\alpha & x_0^{2\alpha} & \cdots & x_0^{N\alpha} \\ 1 & x_1^\alpha & x_1^{2\alpha} & \cdots & x_1^{N\alpha} \\ 1 & x_2^\alpha & x_2^{2\alpha} & \cdots & x_2^{N\alpha} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N^\alpha & x_N^{2\alpha} & \cdots & x_N^{N\alpha} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} g(x_0) \\ g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (1)}$$

şeklinde olur. Şimdi (4.16)'teki $\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X}^\alpha \mathbf{R}_k \mathbf{D}$ ifadesine $\mathbf{W}$ dersek,

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X}^\alpha \mathbf{R}_k \mathbf{D} = [\omega_{i,j}], \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

şeklinde yazabiliriz. Elde edilen bu denklemi

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad \text{veya} \quad [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.17)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu da $(N + 1)$ bilinmeyen Lucas katsayıları ile $(N + 1)$ cebirsel denklemin bir lineer sistemine karşılık gelir. Burada,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} w_{00} & w_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & g(x_0) \\ w_{10} & w_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & g(x_1) \\ w_{20} & w_{21} & \cdots & w_{2N} & ; & g(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N0} & w_{N1} & \cdots & w_{NN} & ; & g(x_N) \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+2)} \quad (4.18)$$

şeklinindedir. Koşulları düzenlediğimizde ise

$$\mathbf{D}_*^i y(c_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad a \leq c_i \leq b \quad (4.19)$$

koşul denklemini olan (3.2) ve (4.19) kullanılarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i \mathbf{A} &= \mathbf{D}_*^i y(c_i) \\ &= \mathbf{D}_*^i \mathbf{X}^\alpha(c_i) \mathbf{D} \mathbf{A} \\ &= \mathbf{X}^\alpha(c_i) \mathbf{R}_i \mathbf{D} \mathbf{A} \\ &= [u_{i0} \ u_{i1} \ u_{i2} \ \cdots \ u_{iN}] \mathbf{A}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

elde ederiz.

$$\mathbf{U}_i \mathbf{A} = [\beta_i] \quad (4.21)$$

veya arttırılmış matris formunu yazacak olursak

$$\bar{\mathbf{U}}_i = [\mathbf{U}_i; \beta_i] = [u_{i0} \ u_{i1} \ u_{i2} \ \cdots \ u_{iN}; \beta_i] \quad (4.22)$$

şeklinde yazılır. Koşulları kullanarak oluşturduğumuz arttırılmış matris;

$$[\mathbf{U}_i; \beta_i] = \begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0N} & ; & \beta_0 \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1N} & ; & \beta_1 \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2N} & ; & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & u_{m-1,2} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \beta_N \end{bmatrix}_{m \times (N+2)} \quad (4.23)$$

şeklinde olur. Oluşturduğumuz koşul matrisi (4.18) sisteminde kolaylık olsun diye son satırlara yazılırsa

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} w_{00} & u_{01} & \cdots & w_{0N} & ; & f(x_0) \\ w_{10} & u_{11} & \cdots & w_{1N} & ; & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N-m,0} & u_{N-m,1} & \cdots & w_{N-m,N} & ; & f(x_{N-m}) \\ u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0N} & ; & \beta_0 \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1N} & ; & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{m-1,0} & u_{m-1,1} & \cdots & u_{m-1,N} & ; & \beta_{m-1} \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+2)} \quad (4.24)$$

elde edilir.

Fakat, (4.23)'de oluşturduğumuz m satıra sahip koşul matrisini (4.18)'de oluşturduğumuz $N+1$ satırlık sistemde yerine yazarken $C\binom{N+1}{m} = \frac{N+1!}{(N+1-m)!(m)!}$ tane farklı satır değişikliği yaparak sonuçları inceleyeceğiz. Yani, matris denkleminizi oluştururken başlangıç koşullarımızı (4.24)'te sadece son satırlara değil farklı satırlara da yazarak oluşturacağız.

Matris denklemini oluşturacak olursak;

$$\bar{\mathbf{W}}\mathbf{A} = \bar{\mathbf{G}} \quad (4.25)$$

Eğer; $rank[\bar{\mathbf{W}}] = rank[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] = N+1$ ise, o zaman,

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{W}})^{-1}\bar{\mathbf{G}} \quad (4.26)$$

yazabiliriz. Bilinmeyen Lucas katsayılar matrisi $\mathbf{A}$, bu lineer sistem çözülerek belirlenir. Çözüm tektir ve bu çözüm

$$y(x) = \mathbf{X}^\alpha(x)\mathbf{D}\mathbf{A} \quad (4.27)$$

şeklinde dir.

Öte yandan, $det(\bar{\mathbf{W}}) = 0$ olduğunda, eğer, $rank\bar{\mathbf{W}} = rank[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] < N+1$ ise, özel bir çözüm bulabiliriz. Aksi durumda, eğer, $rank\bar{\mathbf{W}} \neq rank[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] < N+1$ ise, bir çözüm bulamayız.

4.4. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Temel Matris Bağlıları

(3.4) ile gösterdiğimiz m . mertebeden k bilinmeyenli lineer değişken katsayılı kesirli mertebeden diferansiyel denklem sisteminin (3.6) daki gibi yaklaşık çözümünü bulmak amacıyla, bilinmeyen Lucas katsayılarını elde etmeliyiz. Bu yüzden ilk olarak (3.6) ile tanımladığımız çözüm fonksiyonunu ve türevlerinin matris formunu yazalım.

$$y_i(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A}_i \quad (4.28)$$

elde ederiz. Çözüm fonksiyonunun matris formunda kullandığımız $\mathbf{X}^\alpha(x)$ ve $\mathbf{D}$ matrisleri ilk problemimizdeki tanımlandığı gibidir. $\mathbf{A}_i$ matrisi ise

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} a_{i,0} \\ a_{i,1} \\ a_{i,2} \\ \vdots \\ a_{i,N} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

şeklindedir.

(4.30)'daki ifadenin α . mertebeden Caputo türevini alırsak,

$$D_*^\alpha y_i(x) = D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A}_i \quad (4.29)$$

olarak yazabiliriz. Caputo kesirli türev tanımını kullanarak $D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x)$ ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x) &= \begin{bmatrix} D_*^\alpha 1 & D_*^\alpha x^\alpha & D_*^\alpha x^{2\alpha} & \dots & D_*^\alpha x^\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} x^{(N-1)\alpha} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

$D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x)$ ile $\mathbf{X}^\alpha(x)$ arasındaki bağıntı ise

$$D_*^\alpha \mathbf{X}^\alpha(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \quad (4.31)$$

şeklindedir. Burada

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-1)\alpha+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

O zaman (4.31)'u (4.29)'de yerine yazarsak

$$D_*^\alpha y_i(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \mathbf{D} \mathbf{A}_i \quad (4.32)$$

olur.

(4.30)'un 2α .mertebeden türevini alırsak

$$D_*^{2\alpha} y_i(x) = D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A}_i \quad (4.33)$$

buluruz. Burada $D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x)$ ifadesini şu şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} D_*^{2\alpha} \mathbf{X}^\alpha(x) &= \begin{bmatrix} D_*^{2\alpha} 1 & D_*^{2\alpha} x^\alpha & D_*^{2\alpha} x^\alpha & \dots & D_*^{2\alpha} x^{N\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(1)} & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-2)\alpha+1)} x^{(N-2)\alpha} \end{bmatrix}_{1 \times (N+1)} \\ &= \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_2 \end{aligned}$$

şeklinde olup $\mathbf{R}_2$ matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(1)} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-2)\alpha+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

Aynı şekilde $y_i(x)$ 'in $k\alpha$. türevi

$$D_*^{k\alpha} y_i(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{A}_i \quad (4.34)$$

olur. Burada $\mathbf{R}_k$ matrisi

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(k\alpha+1)}{\Gamma(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{\Gamma((k+1)\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \frac{\Gamma(N\alpha+1)}{\Gamma((N-i)\alpha+1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

ile tanımlıdır.

Şimdi ise $D_*^{k\alpha} y_i(x)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$ 'in matris formunu elde edeceğiz. Bunun için öncelikle $k = 0$ değeri için başlayıp $k = 1$ ve $k = n$ değerinde matris formlarını yazacağız.

$$\begin{aligned} k=0 \text{ için, } D_*^{0\alpha} \mathbf{y}(x) &= \begin{bmatrix} D_*^{0\alpha} y_1(x) \\ D_*^{0\alpha} y_2(x) \\ \vdots \\ D_*^{0\alpha} y_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_0 \mathbf{D} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_0 \mathbf{D} \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_0 \mathbf{D} \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k \times 1} \\ k=1 \text{ için, } D_*^{1\alpha} \mathbf{y}(x) &= \begin{bmatrix} D_*^{1\alpha} y_1(x) \\ D_*^{1\alpha} y_2(x) \\ \vdots \\ D_*^{1\alpha} y_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \mathbf{D} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \mathbf{D} \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_1 \mathbf{D} \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k \times 1} \end{aligned}$$

ve n için devam edersek,

$$k=n \text{ için, } D_*^{n\alpha} \mathbf{y}(x) = \begin{bmatrix} D_*^{n\alpha} y_1(x) \\ D_*^{n\alpha} y_2(x) \\ \vdots \\ D_*^{n\alpha} y_k(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_n \mathbf{D} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_n \mathbf{D} \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{R}_n \mathbf{D} \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

olur. Ulaşılan sonuçları düzenlediğimizde,

$$D_*^{n\alpha} \mathbf{y}(x) = \bar{\mathbf{X}}(x) (\bar{\mathbf{R}})_n \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \quad (4.35)$$

elde ederiz. Burada matrisleri açık bir şekilde yazarsak,

$$\bar{\mathbf{X}}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\alpha(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^\alpha(x) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}^\alpha(x) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)},$$

$$\bar{\mathbf{R}}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{R}_n \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{D} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{D} \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)},$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_k \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}$$

dir. (3.5)'te verilen koşulların matris formunu oluşturursak,

$$\sum_{n=0}^{m-1} a_n D_*^{n\alpha} \mathbf{Y}(a) + b_n D_*^{n\alpha} \mathbf{Y}(b) = \beta \quad (4.36)$$

elde edilir. Burada a_n, b_n, β matrisleri

$$a_n = \begin{bmatrix} a_n^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix}_{km \times k}, \quad b_n = \begin{bmatrix} b_n^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n^k \end{bmatrix}_{km \times k},$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix}_{km \times 1}$$

$$D_*^{n\alpha} \mathbf{Y}(a) = \begin{bmatrix} D_*^{n\alpha} y_1(a) \\ D_*^{n\alpha} y_2(a) \\ D_*^{n\alpha} y_2(a) \\ \vdots \\ D_*^{n\alpha} y_k(a) \end{bmatrix}_{k \times 1} \quad \text{ve} \quad D_*^{n\alpha} \mathbf{Y}(b) = \begin{bmatrix} D_*^{n\alpha} y_1(b) \\ D_*^{n\alpha} y_2(b) \\ D_*^{n\alpha} y_2(b) \\ \vdots \\ D_*^{n\alpha} y_k(b) \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

4.5. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Çözüm Yöntemi

(3.4)'te verilen denklem sistemimizi,

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i(x) D_*^{i\alpha} y(x) = g(x) \quad (4.37)$$

şeklinde yazarsak ve buradaki matrisleri gösterecek olursak,

$$\mathbf{P}_i(x) = \begin{bmatrix} P_{11}(x) & P_{12}(x) & P_{13}(x) & \cdots & P_{1k}(x) \\ P_{21}(x) & P_{22}(x) & P_{23}(x) & \cdots & P_{2k}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k1}(x) & P_{k2}(x) & P_{k3}(x) & \cdots & P_{kk}(x) \end{bmatrix}_{k \times k}$$

$$D_*^{i\alpha} y_i(x) = \begin{bmatrix} D_*^{i\alpha} y_1(x) \\ D_*^{i\alpha} y_2(x) \\ \vdots \\ D_*^{i\alpha} y_k(x) \end{bmatrix}_{k \times 1} \quad \text{ve} \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{bmatrix}_{k \times 1}$$

dir. Denklem (4.1)'de tanımladığımız kollokasyon noktalarını kullanarak (4.37)'yi tekrar düzenlersek;

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i D_*^{i\alpha} \mathbf{Y} = \mathbf{G} \quad (4.38)$$

Burada,

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_i(x_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_i(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{P}_i(x_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(x_0) \\ \mathbf{y}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{y}(x_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}(x_0) \\ \mathbf{g}(x_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(x_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}, \quad D_*^{i\alpha} \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} D_*^{i\alpha} y_1(x_0) \\ D_*^{i\alpha} y_2(x_1) \\ D_*^{i\alpha} y_2(x_3) \\ \vdots \\ D_*^{i\alpha} y_k(x_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times 1}$$

Şimdi ise (4.35)'de kollokasyon noktalarını yazarsak,

$$D_*^{n\alpha} \mathbf{y}(x_j) = \bar{\mathbf{X}}(x_j)(\bar{\mathbf{R}})_n \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} \quad (4.39)$$

elde ederiz ve bu ifadeyi de

$$D_*^{n\alpha} \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{R}})_n \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} \quad (4.40)$$

bu şekilde yazabiliriz. Burada kullandığımız matris bağıntıları,

$$\bar{\mathbf{X}}(x_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\alpha(x_i) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{X}^\alpha(x_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{X}^\alpha(x_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbf{X}^\alpha(x_i) \end{bmatrix}_{k \times k(N+1)}$$

ve

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{X}}(x_0) \\ \bar{\mathbf{X}}(x_1) \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{X}}(x_N) \end{bmatrix}_{k(N+1) \times k(N+1)},$$

(4.40)'ı (4.38)'de yerine yazalım.

$$\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X} \bar{\mathbf{R}}_i \bar{\mathbf{D}} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.41)$$

elde ederiz ve $\sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X} \bar{\mathbf{R}}_i \bar{\mathbf{D}}$ ifadesine $\mathbf{W}$ dersek,

$$\left(\mathbf{W} = [w_{pq}] = \sum_{i=0}^m \mathbf{P}_i \mathbf{X} \bar{\mathbf{R}}_i \bar{\mathbf{D}} \quad , \quad p, q = 1, 2, \dots, k(N+1) \right)$$

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.42)$$

elde ederiz.

Elde ettiğimiz bu denklem sistemini koşulları kullanarak tekrar yazacağız fakat ilk problemimizde bahsettiğimiz gibi km koşula sahip matrisimiz $k(N+1) \times k(N+1) + 1$ lik (4.42) matrisimizde yerine yazarken oluşacak tüm varyasyonlar $\binom{kN+1}{km}$ tanedir. Bu durum göz önünde bulundurularak hesaplamalar yapılacak ve mutlak hatanın en az olacağı satır değişimi yapılarak aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

$$\bar{\mathbf{W}} \mathbf{A} = \bar{\mathbf{G}} \quad (4.43)$$

Lucas katsayılarından oluşan $\mathbf{A}$ bilinmeyen matrisini bulmak için ise;

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{G}} \quad (4.44)$$

şeklinde yazabiliriz.

Koşulları da yerine koyduğumuzda çözümümüz,

$$y_i(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

olarak bulunur.

4.6. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Nümerik Örnekler

Bu bölümde kesirli mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin uygulamalarını yapacağız. Sonuçları tablo ve şekiller yoluyla sunacağız. Örneklerimizin çözümüne ulaşmak için kullandığımız program MATLAB olacak ve bu programda yazdığımız kod sayesinde

farklı N değerleri için çözümleri kolayca hesaplayacağımızdan dolayı daha hızlı sonuca ulaşacağız. Sonuçlarımızı başka yöntemlerin sonuçları ile karşılaştıracacağız.

Örnek 4.14. (Doha vd. 2011) İlk olarak

$$D_*^2 y(x) + D_*^{3/2} y(x) + y(x) = g(x), \quad g(x) = x^2 + 2 + 4\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.45)$$

kesirli lineer diferansiyel denklemini

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \quad (4.46)$$

sınır koşulları altında ele alalım.

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n^\alpha(x), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.47)$$

Burada $\alpha = 0.5$ ve $N = 4$ için, genelleştirilmiş Lucas fonksiyonları ile tanımlı seri formunda yaklaşık çözümlerini bulalım. İlk olarak kollokasyon noktalarının kümesini oluşturalım. $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere, $N = 4$ olduğu için $i = 0, 1, 2, 3, 4$ 'tür. Dolayısıyla $N = 4$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{3}{4}, x_4 = 1\}$$

dir. Problemimizin temel matris denklemini

$$\sum_{k=0}^m P_k X R_k D A = G \quad (4.48)$$

ifadesinden yazarız. Sorumuzda $P_k(x)$ olarak tanımladığımız katsayılar $k = 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = 0$$

$$P_2(x) = 0$$

$$P_3(x) = 1$$

$$P_4(x) = 1$$

olduğundan problemin temel matris denklemi

$$\{P_0 X + P_3 X R_3 + P_4 X R_4\} D A = G$$

olur. Burada,

$$\mathbf{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5000 & 0.2500 & 0.1250 & 0.0625 \\ 1 & 0.70711 & 0.50000 & 0.35355 & 0.25000 \\ 1 & 0.86603 & 0.75000 & 0.64952 & 0.56250 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.3293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2568 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.1909 \\ 3.8458 \\ 4.5169 \\ 5.2568 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{W}$ matrisi

$$\mathbf{W} = \left\{ \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{D} + \mathbf{P}_3 \mathbf{X} \mathbf{R}_3 \mathbf{D} + \mathbf{P}_4 \mathbf{X} \mathbf{R}_4 \mathbf{D} \right\} \quad (4.49)$$

olarak ifade edilir. Böylece (4.49) denklemini kısaca,

$$\mathbf{W} \mathbf{A} = \mathbf{G} \Rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.50)$$

olarak yazabiliriz.

Hesaplamış olduğumuz matrisleri (4.50) denkleminde yerine yazarsak,

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1.3293 & 4 & ; & 2 \\ 2 & 0.5000 & 2.2500 & 2.9543 & 6.1909 & ; & 3.1909 \\ 2 & 0.70711 & 2.5000 & 3.8042 & 7.8458 & ; & 3.8458 \\ 2 & 0.86603 & 2.7500 & 4.5769 & 9.5169 & ; & 4.5169 \\ 2 & 1 & 3 & 5.3293 & 11.257 & ; & 5.2568 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisi elde ederiz. Koşulların matris formunu bulmak için ise (3.2) den yararlanarak

$$\begin{aligned} y(0) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [0] \\ y(1) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{A} = [1] \end{aligned}$$

buluruz. Koşulları kullanarak oluşturduğumuz arttırılmış matrisi bulmak için $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ de satır değişikliği yapacağız. Çözüm yönteminde bahsedildiği gibi burada $N = 4$ olduğu için $[\mathbf{W}; \mathbf{G}]$ matrisimiz 5×6 lık bir matristir. İki koşulumuz olduğundan dolayı,

$$C\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!(2)!} = 10$$

farklı satır değişikliği yaparak $[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}]$ yi elde edebiliriz. Bu örneğimiz için başlangıç koşullarımızı 1. ve 2. yani ilk iki satıra yazdığımızda elde ettiğimiz sonuçlar ile 3. ve 4. satıra yazdığımız sonuçları karşılaştıralım.

İlk olarak

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1.3293 & 4 & ; & 2 \\ 2 & 0.5000 & 2.2500 & 2.9543 & 6.1909 & ; & 3.1909 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 7 & ; & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5.3293 & 11.257 & ; & 5.2568 \end{bmatrix}$$

3. ve 4. satıra başlangıç koşullarımızı yazdığımızda elde etmiş olduğumuz $[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}]$ matris sistemimizi çözerek Lucas katsayılar matrisimizi

$$\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

elde etmiş oluruz. Çözüm formunda

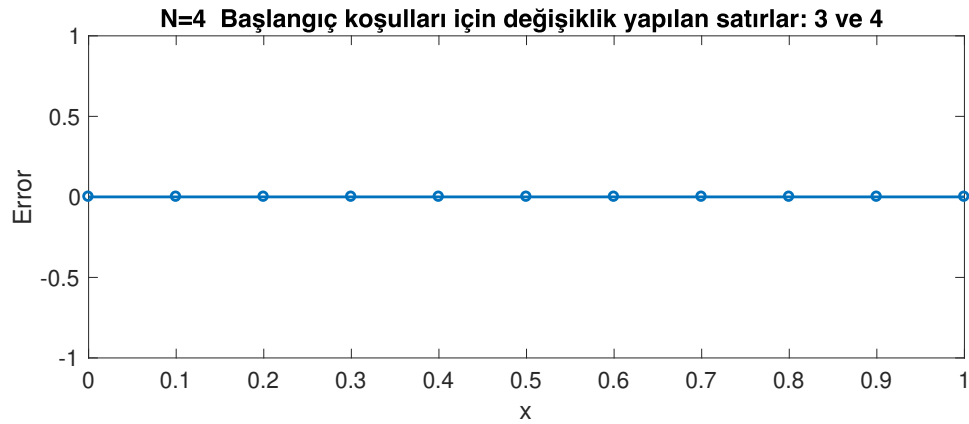
$$y(x) = \mathbf{L}^\alpha(x) \mathbf{A}$$

$\mathbf{A}$ matrisini yerine yazarsak,

$$y(x) = a_0 L_0^\alpha(x) + a_1 L_1^\alpha(x) + a_2 L_2^\alpha(x) + a_3 L_3^\alpha(x) + a_4 L_4^\alpha(x)$$

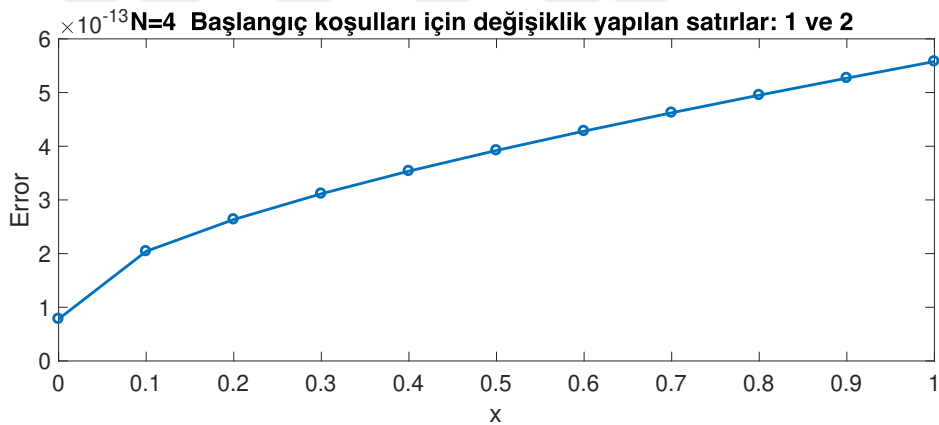
$$y(x) = x^2$$

tam çözümümüzü elde etmiş oluruz.



Şekil 4.3. Örnek 4.14 için $N = 4$ değerinde 3. ve 4. satırda yapılan başlangıç koşulu değişikliğindeki mutlak hata

Şimdi başlangıç koşullarımızı 1. ve 2. yani ilk iki satıra yazdığımızda elde ettiğimiz mutlak hatayı çizelim.



Şekil 4.4. Örnek 4.14 için $N = 4$ değerinde 1. ve 2. satırda yapılan başlangıç koşulu değişikliğindeki mutlak hata

Şekil 4.3. ve Şekil 4.4.'ten anlaşıldığı gibi başlangıç koşullarımızı $[\bar{W}; \bar{G}]$ matrisinde hangi satırların yerine yazdığımızın sonuca etkisi olmuştur.

Bundan sonraki örneklerde buna dikkat edilerek mutlak hatanın en az olduğu satır değişikliği ile sonuçlar oluşturulacaktır.

Örnek 4.15. (Dincel 2019) Kesirli mertebeden değişken katsayılı

$$D_*^{3/2}y(x) + x^{3/2}y(x) = g(x), \quad g(x) = 4\sqrt{\frac{x}{\pi}} + x^{7/2}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.51)$$

diferansiyel denkleminin,

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (4.52)$$

başlangıç koşulları altında ele alalım.

$$y(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n^\alpha(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (4.53)$$

Burada $\alpha = 0.5$ ve $N = 5$ için, genelleştirilmiş Lucas fonksiyonları ile tanımlı seri formunda yaklaşık çözümlerini bulalım. İlk olarak kollokasyon noktalarının kümesini oluşturalım. $a = 0$ ve $b = 1$ olmak üzere, $N = 5$ olduğu için $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 'tir. Dolayısıyla $N = 5$ için kollokasyon noktalarının kümesi

$$\{x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \frac{3}{5}, x_4 = \frac{4}{5}, x_5 = 1\}$$

dir.

$$\sum_{k=0}^m \mathbf{P}_k \mathbf{X} \mathbf{R}_k \mathbf{D} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.54)$$

dir. Burada $P_k(x)$ olarak tanımladığımız katsayılar $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere

$$P_0(x) = x^{3/2}$$

$$P_1(x) = 0$$

$$P_2(x) = 0$$

$$P_3(x) = 1$$

$$P_4(x) = 0$$

$$P_5(x) = 0$$

olduğundan temel matris denklemi

$$\left\{ \mathbf{P}_3 \mathbf{X} \mathbf{R}_3 \mathbf{D} + \mathbf{P}_0 \mathbf{X} \mathbf{D} \right\} \mathbf{A} = \mathbf{G} \quad (4.55)$$

olur. Böylece (4.51) denklemini kısaca,

$$\mathbf{WA} = \mathbf{G} \Rightarrow [\mathbf{W}; \mathbf{G}] \quad (4.56)$$

olarak yazabiliriz. Elde ettiğimiz matrisleri (4.56)'de yerine yazar ve koşulları kolaylık olması açısından son iki satırda yerine yazıp gösterirsek,

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.3293 & 0 & 6.6467 & ; & 0 \\ 0.1789 & 0.0400 & 0.1968 & 1.4573 & 1.2633 & 7.5530 & ; & 1.0128 \\ 0.5060 & 0.1600 & 0.6072 & 1.8733 & 2.3785 & 9.1216 & ; & 1.4678 \\ 0.9295 & 0.3600 & 1.2084 & 2.6253 & 3.9603 & 11.6503 & ; & 1.9154 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & ; & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & ; & 0 \end{bmatrix}$$

arttırılmış matrisini elde ederiz. $\det(\bar{\mathbf{W}}) \neq 0$ olduğundan $\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{W}})^{-1} \bar{\mathbf{G}}$ denkleminde bilinmeyen katsayılar,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1.4211e - 14 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1.7764e - 15 \end{bmatrix}$$

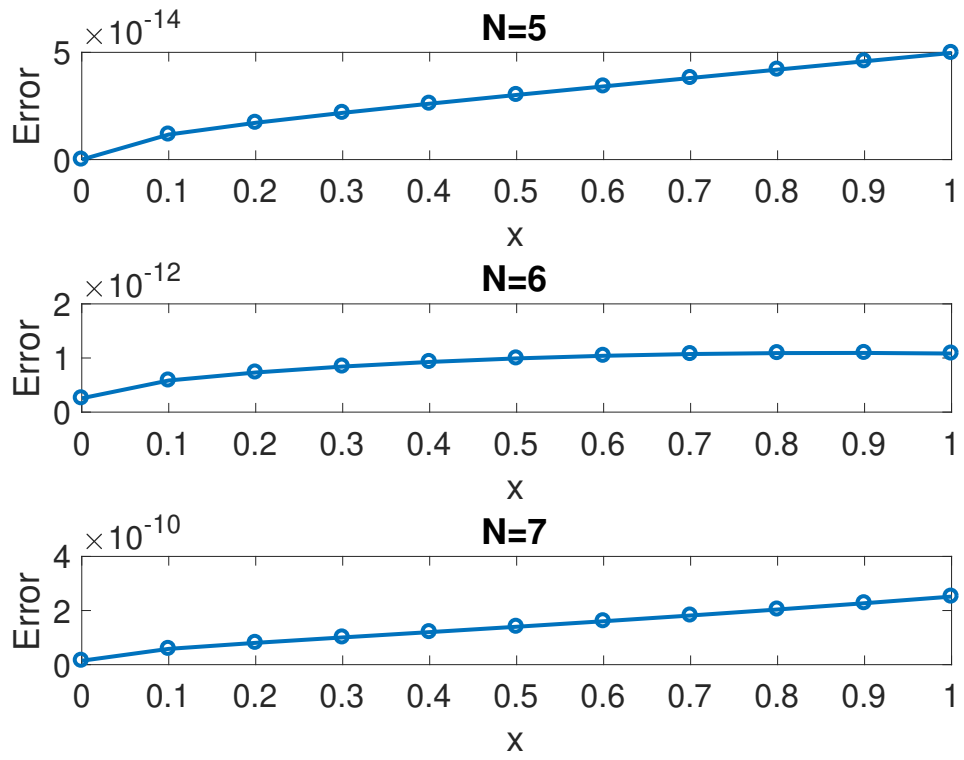
şeklinde bulunur. Bulunan bu katsayıları çözüm çözüm formu yerine yazarak problemi-
mizin $N = 5$ değeri için genelleştirilmiş Lucas fonksiyonları cinsinden çözümünü,

$$y_5(x) = x^2 - 5.3291e - 15x^{1/2} + 8.8818e - 15x^{3/2} + 1.7764e - 15x^{5/2}$$

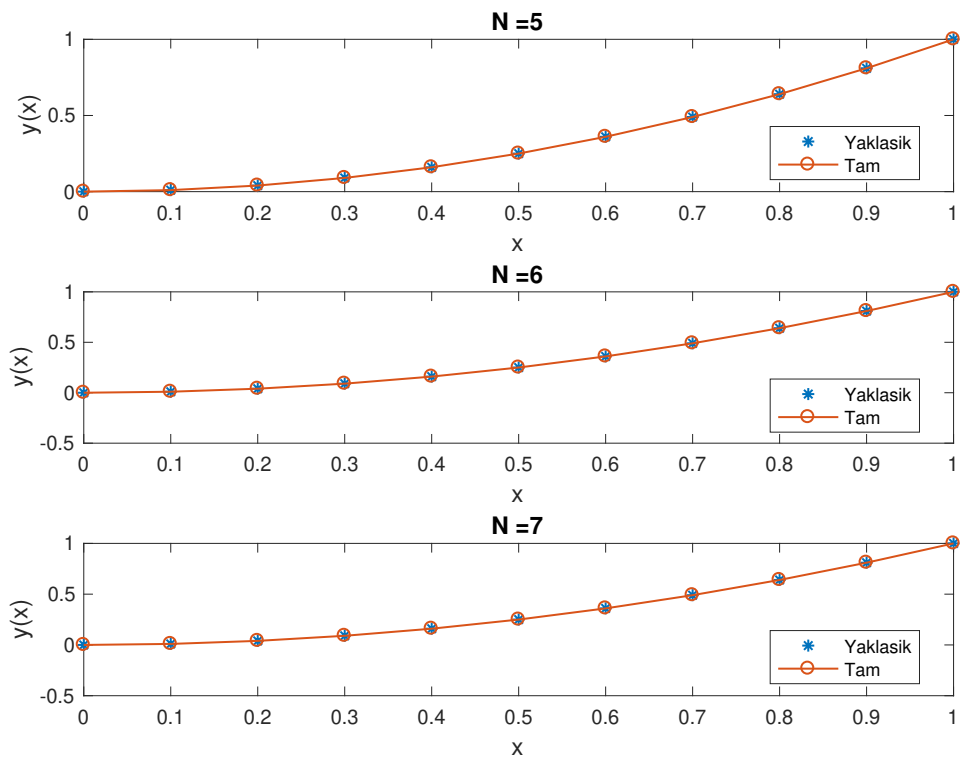
şeklinde elde etmiş oluruz.

$N = 4$, $N = 5$, $N = 6$ ve $N = 7$ için hataların karşılaştırılması Şekil 4.5.'te, tam çözümlerin karşılaştırılması Şekil 4.6.'da verilmiştir.

$N = 4$, $N = 5$, $N = 6$ ve $N = 7$ için bulunan yaklaşık çözümlerin ve tam çözümün karşılaştırılması Tablo 4.3.'te verilmiştir.



Şekil 4.5. Örnek 4.15'nin hata fonksiyonlarının karşılaştırılması



Şekil 4.6. Örnek 4.15'nin tam ve yaklaşık çözümlerinin karşılaştırılması

Çizelge 4.3. $N = 4$, $N = 5$, $N = 6$ ve $N = 7$ için örnek 4.15'nin nümerik sonuçları

x_i	BWM $k = 4$	LCM $N = 4$	BWM $k = 5$	LCM $N = 5$	BWM $k = 6$	LCM $N = 6$	BWM $k = 7$	LCM $N = 7$
0.1	1.98E-05	0	4.94E-06	1.1684e-14	1.24E-06	5.8459e-13	3.09E-07	5.8339e-11
0.2	5.01E-05	0	1.61E-05	1.7159e-14	5.29E-06	7.3239e-13	1.76E-06	8.0586e-11
0.3	6.47E-05	0	2.12E-05	2.1794e-14	7.06E-06	8.4210e-13	2.38E-06	1.0064e-10
0.4	7.59E-05	0	2.51E-05	2.6064e-14	8.43E-06	9.2712e-13	2.87E-06	1.2023e-10
0.5	8.56E-05	0	2.85E-05	3.0146e-14	9.63E-06	9.9250e-13	3.29E-06	1.4005e-10
0.6	9.48E-05	0	3.17E-05	3.4124e-14	1.08E-05	1.0407e-12	3.69E-06	1.6045e-10
0.7	1.04E-04	0	3.49E-05	3.8047e-14	1.19E-05	1.0732e-12	4.08E-06	1.8165e-10
0.8	1.13E-04	0	3.82E-05	4.1945e-14	1.30E-05	1.0907e-12	4.48E-06	2.0381e-10
0.9	1.23E-04	0	4.17E-05	4.5837e-14	1.42E-05	1.0938e-12	4.91E-06	2.2706e-10

Çizelge 4.3.'te çalışmamızda uyguladığımız Lucas kollokasyon metodunda $N = 4$ değerine karşılık gelen mutlak hatanın sıfır (0) olduğu görülmekte olup tam çözümümüz, bu seçilen N değeriyle elde edilmiştir. Ayrıca Lucas kollokasyon metodunun $N = 5$, $N = 6$ ve $N = 7$ değerlerindeki mutlak hataları ile Bernoulli wavelet metodunun (Turan Dincel 2019) $k = 4$, $k = 5$, $k = 6$ ve $k = 7$ değerlerindeki mutlak hataları karşılaştırılmıştır. Çizelgeki değerlerden Lucas kollokasyon ve Bernoulli wavelet yöntemlerinin her ikisinde de N değeri artarken hataların arttığı gözlemlenirken Lucas kollokasyon metodunun bu problemimiz için Bernoulli wavelet metodundan daha küçük hatalar verdiği gözlenmektedir.

4.7. Kesirli Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklem Sistemleri İçin Nümerik Örnekler

Örnek 4.16. (Şenel 2019)

$$\begin{cases} D_*^2 y_1(x) + D_*^{3/2} y_1(x) + y_1(x) + y_2(x) = 2x + 1 \\ y_1(x) + D_*^{3/2} y_2(x) = x + 1 \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (4.57)$$

mertebesi kesirli olan diferansiyel denklem sistemini

$$y_1(1) = 2, \quad y_2(1) = 1, \quad y_1'(1) = 1, \quad y_2'(1) = 1 \quad (4.58)$$

başlangıç koşulları ve

$$y_1(x) = x + 1 \quad \text{ve} \quad y_2(x) = x$$

tam çözümleri ile birlikte ele alalım.

Burada $\alpha = 0.5$ değerinde olup ilk olarak $N = 2$ için matrislerimizi aşağıdaki gibi gösterelim.

Elde edeceğimiz çözümlerimizin katsayılar matrisi olan $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 'yi

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix}^T$$

şeklinde yazarız.

$$\mathbf{X}^\alpha(x) = \begin{bmatrix} 1 & x^{1\alpha} & x^{2\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$N = 2$ değeri için genelleştirilmiş Lucas fonksiyonları

$$\mathbf{L}^\alpha(x) = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

Bu durumda, çözüm formlarını

$$y_1(x) = \mathbf{L}^\alpha(x) \mathbf{A}_1 = \mathbf{X}^\alpha(x) \mathbf{D} \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{bmatrix}$$

$$y_2(x) = \mathbf{L}^\alpha(x)\mathbf{A}_2 = \mathbf{X}^\alpha(x)\mathbf{D}\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix}$$

yazarız.

$$\begin{aligned} D_*^{2\alpha} y_1(x) &= \mathbf{X}^\alpha(x)\mathbf{R}_4\mathbf{D}\mathbf{A}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Problemimizde gerekli olan türevler (4.5)'te tanımlanan şekliyle alındığında

$$\begin{aligned} D_*^{\frac{3}{2}\alpha} y_1(x) &= \mathbf{X}^\alpha(x)\mathbf{R}_3\mathbf{D}\mathbf{A}_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ a_{1,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_*^{\frac{3}{2}\alpha} y_2(x) &= \mathbf{X}^\alpha(x)\mathbf{R}_3\mathbf{D}\mathbf{A}_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & x^{0.5} & x^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{2,0} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, bulunan $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve türevli sonuçlarını (4.28)'de tanımladığımız kollokasyon noktalarında denklemde yerine yazdığımızda oluşan matrisimizi şu şekilde yazarız.

$$[\mathbf{W}; \mathbf{G}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ 2 & 7.0711e-01 & 2.5000 & 2 & 7.0711e-01 & 2.5000 & ; & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 & ; & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 2 & 7.0711e-01 & 2.5000 & 0 & 0 & 0 & ; & 1.5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

Başlangıç koşullarımızı arttırılmış matris formunu

$$\begin{aligned}
y_1(1) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = [2] \\
y_2(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = [1] \\
y_1'(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A}_1 = [1] \\
y_2'(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}_2 = [1]
\end{aligned}$$

şeklinde gösteririz.

(4.59)'de oluşturduğumuz matriste $2N + 2$ tane yani 6 satır bulunmakta. Başlangıç koşullarımızın sayısı ise dört tane olduğundan $\binom{6}{4} = 15$ tane yazabileceğimiz varyasyon bulunmaktadır. Başlangıç koşullarımızı aşağıdaki gibi 2.3.5.ve 6. satırlara yazarak devam ettiğimizde

$$[\bar{\mathbf{W}}; \bar{\mathbf{G}}] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & ; & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & ; & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & ; & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ; & 1 \end{bmatrix}$$

katsayı matrislerimizi aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Bunları çözüm fonksiyonlarında yerlerine yazdığımızda

$$y_1(x) = \mathbf{L}^\alpha(x) \mathbf{A}_1,$$

$$y_2(x) = \mathbf{L}^\alpha(x) \mathbf{A}_2,$$

$$y_1(x) = a_{1,0}L_0^\alpha(x) + a_{1,1}L_1^\alpha(x) + a_{1,2}L_2^\alpha(x),$$

$$y_2(x) = a_{2,0}L_0^\alpha(x) + a_{2,1}L_1^\alpha(x) + a_{2,2}L_2^\alpha(x),$$

$$y_1(x) = x + 1,$$

$$y_2(x) = x$$

tam çözümlerimizi elde etmiş oluruz.

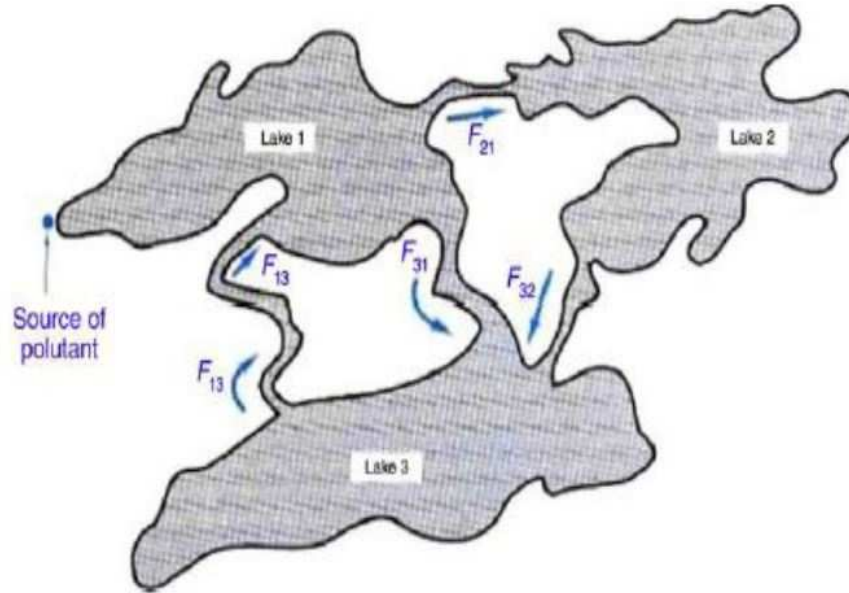
Örnek 4.17. (Hoggard J. 2008) Matematiksel bir model olarak belirlenen, üç gölün kirlilik sorunu aşağıdaki gibi modellenmiştir.

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha_1} y_1(x) &= \frac{F_{13}}{V_3} y_3(x) - \frac{F_{31}}{V_1} y_1(x) - \frac{F_{21}}{V_1} y_1(x) + G(x) \\ D_*^{\alpha_2} y_2(x) &= \frac{F_{21}}{V_1} y_1(x) - \frac{F_{32}}{V_2} y_2(x) \\ D_*^{\alpha_3} y_3(x) &= \frac{F_{31}}{V_1} y_1(x) + \frac{F_{32}}{V_2} y_2(x) - \frac{F_{13}}{V_3} y_3(x) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Burada kesirli mertebeden diferansiyel denklem sistemimizin yaklaşık çözümlerini,

$$y_1(0) = \lambda_1, \quad y_2(0) = \lambda_2, \quad y_3(0) = \lambda_3 \quad (4.61)$$

başlangıç koşullarımızı kullanarak bulacağız.



Şekil 4.7. Kanallar ile bağlanmış göller modeli

Şekil 4.7.'de bu çalışmada modellenen üç göl sistemi gösterilmektedir. Her göl büyük bir bölmeden oluşup bölmeler arası bağlantılar kanallar ile sağlanır. Kanallardaki akış yönü şekildeki oklar ile belirtilmiştir. Göllerin başlangıçta herhangi bir kirlenici içermediğini varsayıp $i, j = 1, 2, 3$ olmak üzere F_{ji} lerin i . gölden j . göle akışı gösterdiğini şekilde belirtiyoruz (Biazar 2006).

(Khader M. vd 2013) ve (Şarlak, 2020), (4.60)'daki modelimizi $i = 1, 2, 3$ için $\alpha_i = 1, 0.95$ değerlerinde, açık bir şekilde;

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.95$ için

$$\begin{aligned} D_*^{\alpha_1} y_1(x) &= \frac{38}{1180} y_3(x) - \frac{20}{2900} y_1(x) - \frac{18}{2900} y_1(x) + (1 + \sin(x)) \\ D_*^{\alpha_2} y_2(x) &= \frac{18}{2900} y_1(x) - \frac{18}{850} y_2(x) \\ D_*^{\alpha_3} y_3(x) &= \frac{20}{2900} y_1(x) + \frac{18}{850} y_2(x) - \frac{38}{1180} y_3(x) \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 0 \quad y_3(0) = 0 \quad (4.63)$$

koşulları altında incelemiştir. Aynı model çalışmamızda Lucas kollokasyon metodu ile çözümlenerek

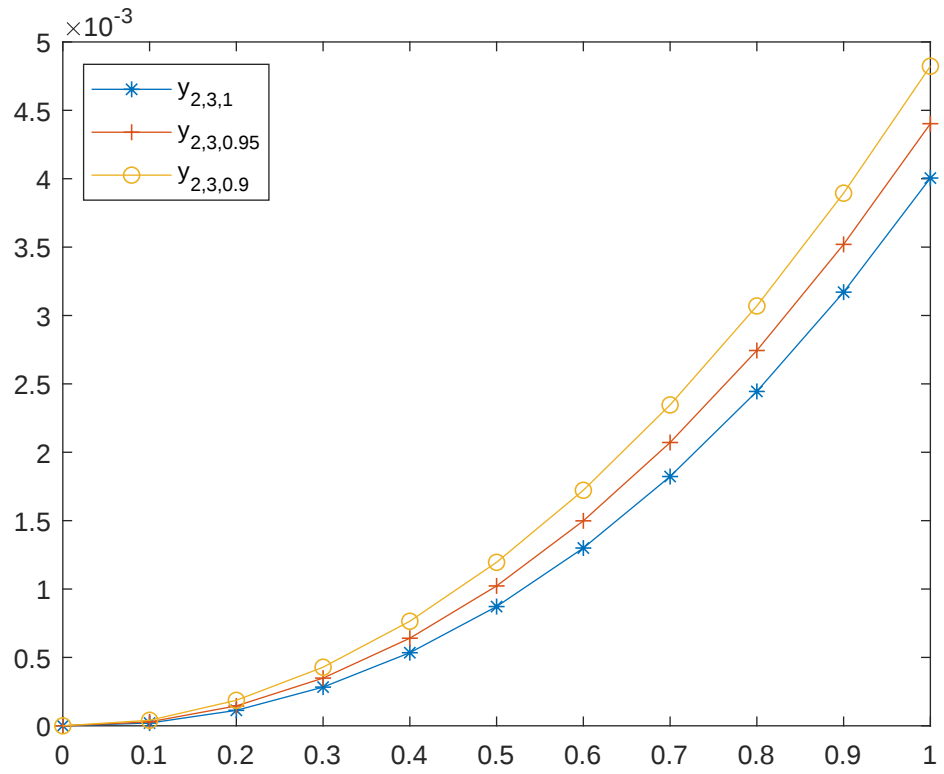
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$ ve $N = 3$ için

$$\begin{aligned} y_1(x) &\approx -0.103691591991027x^3 + 0.582735657781074x^2 + 0.968253669651116x \\ y_2(x) &\approx 0.000742048976575407x^3 + 0.00340939261297798x^2 - 0.0001465150179256x \\ y_3(x) &\approx 0.000844892584972422x^3 + 0.00378162833410088x^2 - 0.000160732670324441x \end{aligned}$$

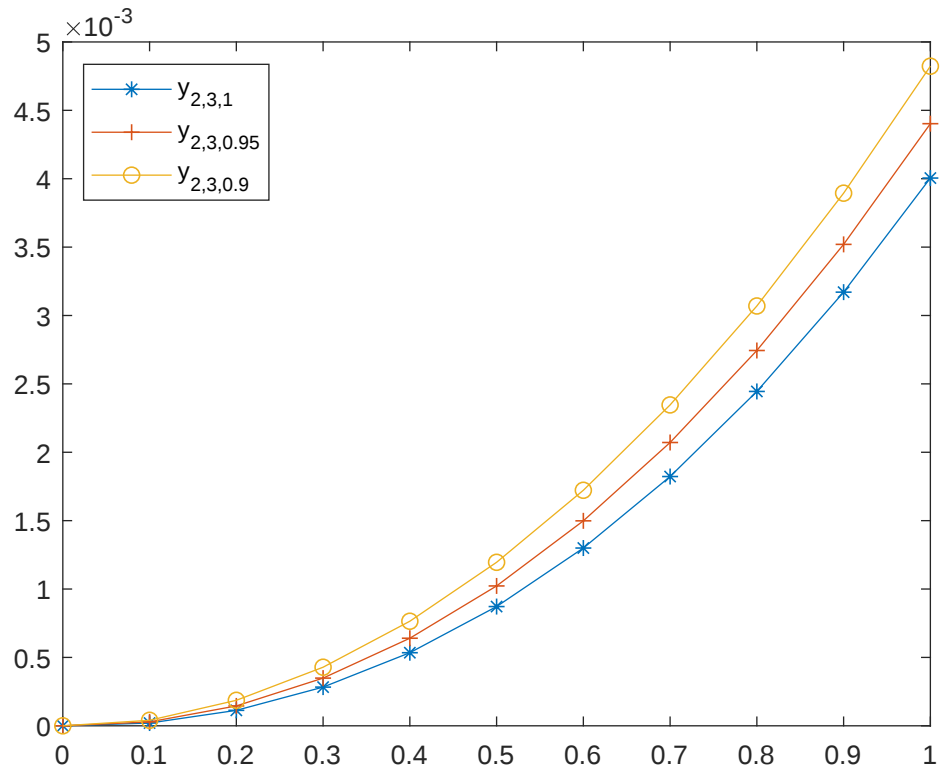
$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.95$ ve $N = 3$ için

$$\begin{aligned} y_1(x) &\approx 0.62986678069878x^{19/10} + 0.964446470521609x^{19/20} - 0.109038140587416x^{57/20} \\ y_2(x) &\approx 0.003686361590847x^{19/10} - 0.000170061606112003x^{19/20} + 0.000886148115241078x^{57/20} \\ y_3(x) &\approx 0.00408725965305434x^{19/10} - 0.000186248433707611x^{19/20} + 0.00100975475437026x^{57/20} \end{aligned}$$

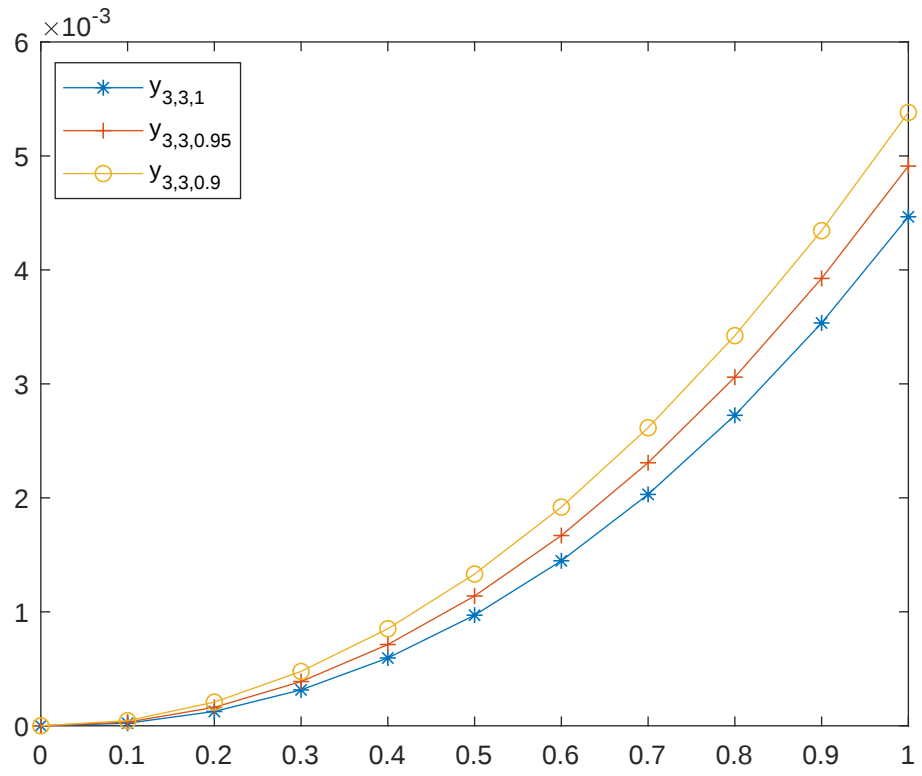
sonuçlarına ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar grafikler yardımıyla Şekil 4.8., 4.9. ve 4.10. da gösterilmiştir. Ayrıca farklı α_i değerlerindeki yaklaşık çözümler Çizelge 4.4. ve 4.5. de yer almaktadır.



Şekil 4.8. Örnek 4.17'ün $y_1(x)$ çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.9. Örnek 4.17'ün $y_2(x)$ çözümünün karşılaştırılması



Şekil 4.10. Örnek 4.17'ün $y_3(x)$ çözümünün karşılaştırılması

Çizelge 4.4. Örnek 4.17 için $\alpha_i = 1$ değerinde nümerik sonuçların karşılaştırılması

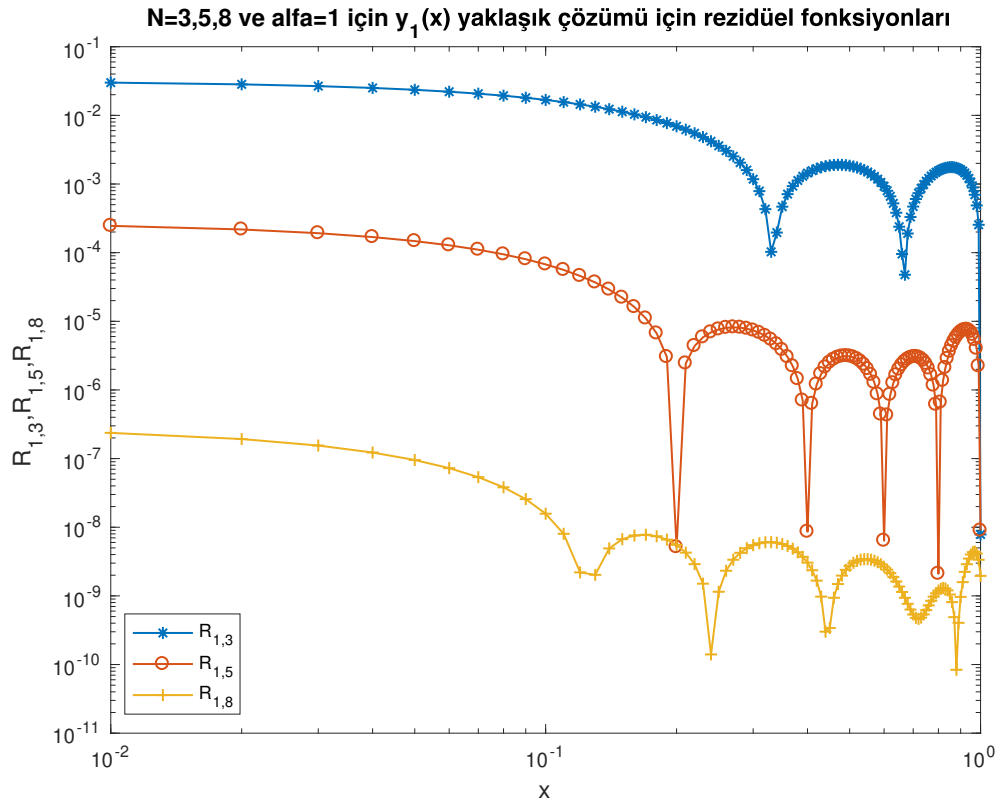
	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi	Hesaplamalı Matris Yöntemi	Lucas Kollokasyon Yöntemi	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi	Hesaplamalı Matris Yöntemi	Lucas Kollokasyon Yöntemi	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi	Hesaplamalı Matris Yöntemi	Lucas Kollokasyon Yöntemi
x_i	$y_1(x)$	$y_1(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_2(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$y_3(x)$	$y_3(x)$
0	-0.25e-4	0	0	-0.8e-8	0	0	-0.2e-8	0	0
0.1	0.1049	0.1049	0.1025	0.32e-4	0.32e-4	2.0184e-05	0.35e-4	0.35e-4	2.2588e-05
0.2	0.2196	0.2198	0.2161	0.13e-3	0.13e-3	1.1301e-04	0.14e-3	0.14e-3	1.2588e-04
0.3	0.3435	0.3443	0.3401	0.30e-3	0.30e-3	2.8293e-04	0.34e-3	0.34e-3	3.1494e-04
0.4	0.4765	0.4779	0.4739	0.56e-3	0.56e-3	5.3439e-04	0.62e-3	0.62e-3	5.9484e-04
0.5	0.6180	0.6205	0.6168	0.89e-3	0.90e-3	8.7185e-04	0.99e-3	0.10e-2	9.7065e-04
0.6	0.7678	0.7716	0.7683	0.13e-2	0.13e-2	1.3000e-03	0.14e-2	0.14e-2	1.4474e-03
0.7	0.9256	0.9308	0.9278	0.18e-2	0.18e-2	1.8000e-03	0.20e-2	0.20e-2	2.0303e-03
0.8	1.0909	1.0979	1.0945	0.24e-2	0.24e-2	2.4000e-03	0.27e-2	0.27e-2	2.7242e-03
0.9	1.2634	1.2725	1.2679	0.31e-2	0.32e-2	3.2000e-03	0.35e-2	0.35e-2	3.5344e-03
1	1.4427	1.4542	1.4473	0.40e-2	0.40e-2	4.0000e-03	0.44e-2	0.45e-2	4.4658e-03

Çizelge 4.5. Örnek 4.17 için $\alpha_i = 0.95$ değerinde nümerik sonuçlarının karşılaştırılması

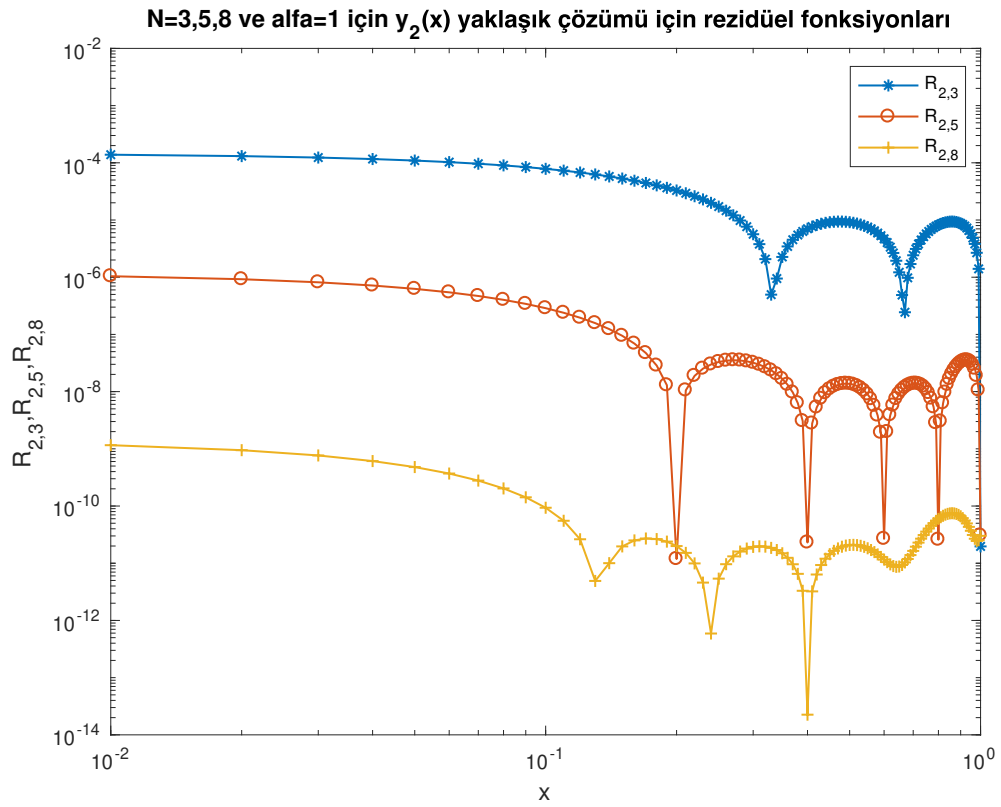
	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi	Hesaplamalı Matris Yöntemi	Lucas Kollokasyon Yöntemi	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi	Hesaplamalı Matris Yöntemi	Lucas Kollokasyon Yöntemi	Bernoulli Kollokasyon Yöntemi	Hesaplamalı Matris Yöntemi	Lucas Kollokasyon Yöntemi
x_i	$y_1(x)$	$y_1(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_2(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$y_3(x)$	$y_3(x)$
0	-0.30e-5	0	0	0	0	0	0.40e-8	0	0
0.1	0.1207	0.1240	0.1160	0.44e-4	0.44e-4	2.8579e-05	0.49e-4	0.49e-4	3.1984e-05
0.2	0.2440	0.2503	0.2375	0.17e-3	0.17e-3	1.4537e-04	0.19e-3	0.19e-3	1.6195e-04
0.3	0.3742	0.3803	0.3677	0.38e-3	0.38e-3	3.4870e-04	0.42e-3	0.42e-3	3.8824e-04
0.4	0.5116	0.5156	0.5063	0.67e-3	0.68e-3	6.4027e-04	0.75e-3	0.75e-3	7.1287e-04
0.5	0.6562	0.6578	0.6529	0.10e-2	0.10e-2	1.0226e-03	0.11e-2	0.11e-2	1.1388e-03
0.6	0.8081	0.8082	0.8068	0.15e-2	0.15e-2	1.4986e-03	0.17e-2	0.17e-2	1.6694e-03
0.7	0.9670	0.9684	0.9676	0.21e-2	0.21e-2	2.0714e-03	0.23e-2	0.23e-2	2.3081e-03
0.8	1.1328	1.1400	1.1347	0.27e-2	0.27e-2	2.7441e-03	0.30e-2	0.31e-2	3.0588e-03
0.9	1.3054	1.3246	1.3074	0.35e-2	0.35e-2	3.5200e-03	0.39e-2	0.39e-2	3.9251e-03
1	1.4847	1.5232	1.4853	0.44e-2	0.44e-2	4.4024e-03	0.49e-2	0.49e-2	4.9108e-03

Lucas kollokasyon metodunun $N = 3$ için farklı α değerlerinde elde edilen yaklaşık çözümleri Çizelge 4.4. ve Çizelge 4.5. de bir arada gösterilmiştir. Bizim elde ettiğimiz bu yaklaşık çözümlerimiz Bernoulli sıralama yöntemi (Biçer Şarlak 2020) ile karşılaştırılmıştır. Çizelgede elde edilen değerlerden, Lucas kollokasyon metodunun bu problem için Bernoulli sıralama yöntemi ile yaklaşık olarak denk sonuçlar verdiğini anlamaktayız.

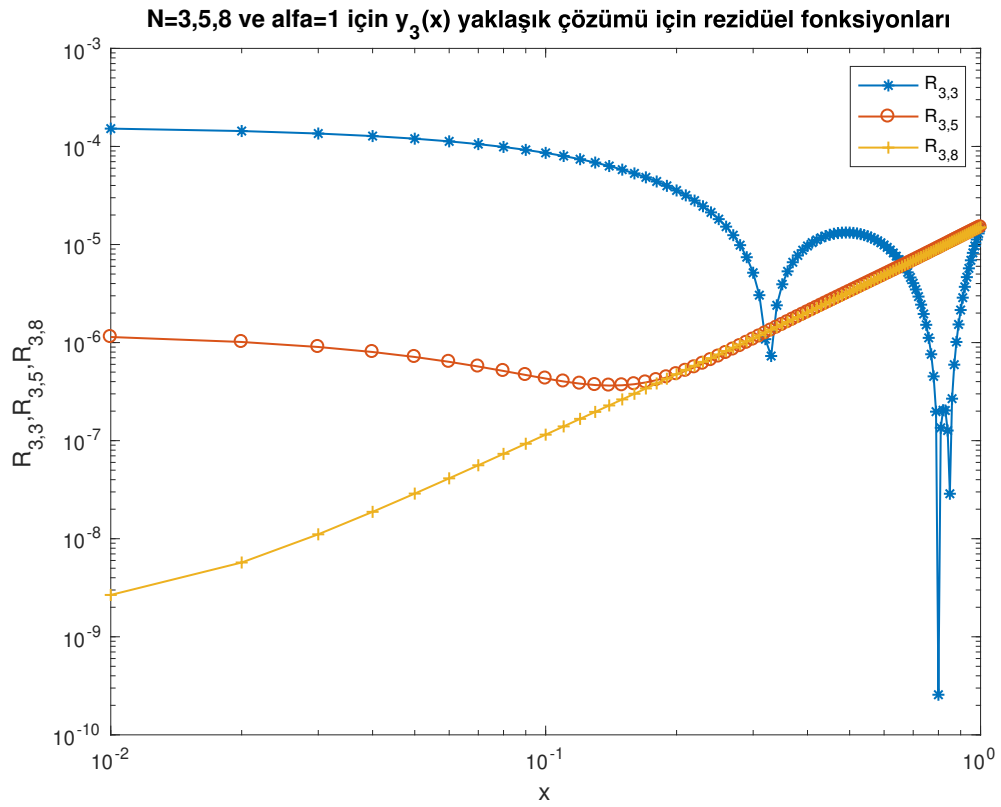
Örnek 4.17'ün tam çözümü bilinmemektedir. Bu yüzden gerçek hataları hesaplayamayacağımızdan dolayı bu örneğimiz için rezidüel hata fonksiyonlarını kullanarak rezidüel hata tahmini yapacağız. Şekil 4.11., 4.12., 4.13.'te sırasıyla $y_1(x)$, $y_2(x)$ ve $y_3(x)$ yaklaşık çözümlerinin $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 8$ değerlerinde rezidüel hatalarını göstereceğiz.



Şekil 4.11. $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 8$ için $y_1(x)$ yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonları



Şekil 4.12. $N = 3$, $N = 5$ ve $N = 8$ için $y_2(x)$ yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonları



Şekil 4.13. $N = 3, N = 5$ ve $N = 8$ için $y_3(x)$ yaklaşık çözümü için rezidüel fonksiyonları

4.11., 4.12., 4.13.'te verilen şekillerden yöntemin etkili olduğu, artan N değerleri ile yaklaşık çözümlerde meydana gelen rezidüel hataların azalışı gözlenmektedir.



5. SONUÇLAR

Günümüzde karşılaştığımız matematiksel olarak modellenen problemlerde tam sayı mertebeli diferansiyel denklemlerin yetersiz kaldığı fark edildiğinden, kesir mertebeli diferansiyel denklemlere ağırlık verilmiştir.

Bu tez çalışmasında kesirli mertebeden diferansiyel denklemler ve denklem sistemlerinin çözümleri için Lucas kollokasyon metodu tanımlanmıştır. Örnekler üzerinde çalışma yapılarak sayısal sonuçları üzerinde karşılaştırmalar yapılmıştır. Bu karşılaştırmalar sonucunda yöntemimizin iyi sonuçlar verdiği gösterilmiştir. Yapılan örneklerde kesin çözümler polinom olduğundan N 'nin yeteri kadar büyük olması durumunda tam çözümler elde edilmiş olup daha büyük N değerlerinde tam çözümden uzaklaştığı durumunda olduğu gözlemlenmiştir.

Yöntemimizi uygularken gözlemlediğimiz bir başka durum ise, başlangıç koşullarının diferansiyel denklemlerimizin artırılmış matris formunda hangi satırların yerine yazıldığı ile ilgili olmuştur. Tüm varyasyonlar denenerak mutlak hatanın azaldığı durumlar bu satırların değişikliğine bağlı olarak elde edilmiştir. Örnek 4.14'te bu satır değişikliği ile mutlak hata sıfır (0) bulunarak tam çözüme ulaşılmıştır. Matrislerimizi yöntem kısmında anlatıldığı gibi koşul sayıları bakılarak maksimum mutlak hata ile koşul sayısının büyüklüğü arasında pozitif korelasyon olduğu gözlemlenmiştir. Özellikle sistemleri çözerken koşullarımızın hangi satırlara yazılması gerektiğini bulmak için varyasyonlar denenirken çok fazla iş yükü olacağından böyle bir koşul sayısının varlığı hızlı karar verilmesi açısından önemli olmuştur.

Yöntemin avantajı olarak; denklemlerimizi Matlab bilgisayar programı kullanarak farklı N değerlerinde, tam ve değişken katsayılı olarak hazırlayıp hızlı ve kolay bir şekilde çözüme kavuşturmak olmuştur.

Son olarak bu yöntemimiz başka kesirli mertebeden diferansiyel denklem problemleri için geliştirilerek uygulanabilir durumdadır.

6. KAYNAKLAR

- Adomian, G. 1988. A review of the decomposition method in applied mathematics. *J Math Anal Appl.* 135, 501-544.
- Adomian, G. 1994. Solving Frontier problems of physics: the decomposition method, Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Akyüz Daşcıoğlu, A., İşler Acar, N. and Güler, C. 2014. Bernstein collocation method for solving nonlinear Fredholm-Volterra integro differential equations in the most general form. *Journal of Applied Mathematics.* 260, 294-300.
- Atkinson, K. 1989. Sayısal Analize Giriş, Wiley, John Wiley Sons, New York, ISBN 978-0-471-50023-0.
- Belbachir, H. Bencherif, F. 2008. On Some Properties of Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, *Journal of Integer Sequences* 11, Article 08.2.6.
- Belsley, David A. Kuh, Edwin Welsch, Roy E. 1980. The Condition Number. Regression Diagnostics, Identifying Influential Data and Sources of Collinearity. New York, John Wiley Sons. pp. 100-104
- Bicknell, M. (1970). A primer for the Fibonacci numbers. *The Fibonacci Quarterly.* v. 8, no 4, April, 407-421.
- Biçer Şarlak, G.G. 2020. Kesirli mertebeden integro diferansiyel denklem sistemleri için nümerik yaklaşımlar. Doktora Tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla, 96.
- Boelkins, R.M. and Goldberg, J.L. and Potter, M.C. 2009. Differential Equations with Linear Algebra. Oxford University.
- Catalani, M. 2004. Identities for Fibonacci and Lucas Polynomials Derived From a Book of Gould, Arxiv: Math/0407015v1, 7 Jul.
- Catalani, M. 2004. Some Formulae for Bivariate Fibonacci and Lucas Polynomials, Arxiv: math/0406323v1, 16 June.

- Chen, J.B. 2009. Lax-Wendroff and Nyström methods for seismic modelling. *Geophysical Prospecting*, 57(6), pp.931-941.
- Chen, C. K. and Ju, S.P. 2004. Application of differential transformation to transient advective-dispersive transport equation. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, 155, pp.25-38.
- Chen, C. L. and Liu, Y. C. 1998. Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, 95, pp.155-164.
- Çetin, M. Coşkun G. 2015. Lucas Polynomial Approach for System of High-Order Linear Differential Equations and Residual Error Estimation. *Mathematical Problems in Engineering*, 1-14. 10.1155/2015/625984.
- Çetin, M. Sezer, M. and Kocayigit, H. 2015. An Efficient Method Based on Lucas Polynomials for Solving High-Order Linear Boundary Value Problems. *Gazi University Journal of Science*, 28(3): 483-496.
- Dattoli, G. Gorska, K. Horzela, A. Licciardi, S. Pidatella, R.M. 2017. Comments on the properties of Mittag-Leffler Functions. Elsevier, 226(16-18).
- Davis, P. J. 1959. Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function. *Am. Math. Monthly* 66: 849-869
- Diethelm, K. 2004. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer, Germany.
- Doha, E.H. Bhrawy, A.H. Ezz-Eldien, S.S. 2011. A Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order, *Computers Mathematics with Applications*, 62(5): 2364-2373.
- Goode, S.W. 2000. *Differential Equations and Linear Algebra*. California State University, Fullerton.
- He, JH. 1997. Variational iteration method for delay differential equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2(4), 235-236.

- He, JH. Wan, YQ. Guo, Q. 2004. An iteration formulation for normalized diode characteristics. *Int J Circ Theory Appl*, 32(6), 629-632.
- Kannapan PI. 2009. Functional Equations and Inequalities with Applications. Springer Science and Business Media, Canada, 810 s.
- Karci, A. 2015. Kesir Dereceli Turevin Yeni Yaklasimin Özellikleri. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 30 (3): 487-501.
- Khader, M.M. Talaat, S. El Danaf, Hendy, A.S. 2013. A computational matrix method for solving systems of high order fractional differential equations, *Applied Mathematical Modelling*, 37(6): 4035-4050.
- Kilbas, A.A and Srivastava H.M and Trujillo, J.J 2006.Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Science, New York, 540.
- Mathai, A. M. ve Saxena, R. K. ve Haubold, H. J. 2010. The H-function: Theory and Applications. Springer, pp.45-74, New York.
- Miller, K.S. 1975. The Weyl fractional calculus, in B. Ross (Editor), Fractional Calculus and its Applications. Springer, pp. 80-89. Verlag, Berlin.
- Oldham, K. and Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus. Academic Press, New York.
- Oruç, Ö. 2017. A New Algorithm Based on Lucas Polynomials for Approximate Solution of 1D and 2D Nonlinear Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation, *Comput. Math. Appl.*, 74(12): 3042-3057.
- Podlubny, I. 1999. Fractional Differential Equations. Vol.198. Elsevier.
- Poole, E.G.C. 1936. Introduction to the theory of the linear differential equations. *Fellow of New College*, Oxford.
- Ramadan, M.A. Raslan, K.R. and Nassar, M.A. 2014. An approximate analytical solution of higher-order linear differential equations with variable coefficients using improved rational Chebyshev collocation method. *Applied and Computational Mathematics*, 3 (6):315-322.

- Şenel A.A. 2019. Kesirli İntegro Diferansiyel Denklemlerinin Nümerik Çözümleri ve Uygulamaları. Doktora Tezi, MSKÜ, Muğla, 118s.
- Tuglu, N. Kocer, E.G. Stakhov, A. 2011. Bivariate Fibonacci Like p - Polynomials. *Applied Mathematics and Computations*, Elsevier, 217(24):10239-10246.
- Turan Dincel, A. 2019. Efficient Method for the Solution of Fractional-order Differential Equations with Variable Coefficients. *European Journal of Science and Technology*, 205-210.
- Watkins, David S. 2002. Fundamentals of Matrix Computations. *A John Wiley Sons*, Inc., Publication. New York. 640 s.
- Yüzbaşı Ş. 2016. A collocation method for numerical solutions of fractional-order logistic population model. *Int. J. Biomath.*, 9(1650031):1650031.
- Yüzbaşı Ş. 2015. Numerical Solutions Of System Of Linear Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations By The Bessel Collocation Method And Error Estimation. *Appl. Math. Comput.*, 250(C):320-338.
- Yüzbaşı Ş. 2012. A Collocation Approach To Solve The Riccati-Type Differential Equation Systems. *Int. J. Comput. Methods*, 89: 2180-2197.
- Yüzbaşı Ş. 2016. A collocation method for numerical solutions of fractional-order logistic population model. *Int. J. Biomath.* 9(1650031):1650031.
- Yüzbaşı Ş. 2013. Numerical Solutions Of Fractional Riccati Type Differential Equations By Means Of The Bernstein Polynomials. *Appl. Math. Comput.*, 219(C):6328-6343.
- Yüzbaşı Ş. Şahin N., Sezer M. 2011. A Numerical Approach For Solving Linear Differential Equation Systems. *Journal Advanced Research in Differential Equations*, 3:8-32.

ÖZGEÇMİŞ

GÜLÇİN GÖK

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans	Akdeniz Üniversitesi
2017- 2021	Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi
2009-2015	Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, İzmir