

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DARBOUX ÇATI ALANI VE UYGULAMALARI

Betül ALKAN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Geometri Bilim Dalı

OCAK 2021

T.C.
Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

DARBOUX ÇATI ALANI VE UYGULAMALARI

Tez Yazarı
Betül ALKAN

Danışman
Prof. Dr. Mihriban ALYAMAÇ KÜLAHÇI

OCAK 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Darboux Çatı Alanı ve Uygulamaları
Yazarı: Betül ALKAN
İlk Teslim Tarihi: 28.12.2020
Savunma Tarihi: 28.1.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Mihriban ALYAMAÇ KÜLAHÇI Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Münevver YILDIRIM YILMAZ Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Dr. Öğr. Üyesi Fatma BULUT Bitlis Eren Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Darboux Çatı Alanı ve Uygulamaları” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

28/1/2021

Betül ALKAN



ÖNSÖZ

Bu seminerin hazırlanmasında ve düzenlenmesinde yardımlarını esirgemeyen, değerli zamanını ayırarak, çalışmamın her aşamasında yanımda olan çok kıymetli danışman hocam sayın Prof. Dr. Mihriban ALYAMAÇ KÜLAHCI'ya teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilir, saygılarımı sunarım.

Betül ALKAN
ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
3. DARBOUX ÇATI ALANI.....	7
3.1. E^3 de Darboux Çatı.....	7
3.2. E^4 de bir hiperyüzey eğrisi	7
4. GENİŞLETİLMİŞ DARBOUX ÇATI ALANI.....	9
4.1 Genişletilmiş Darboux Çatı Alanının İnşası	9
4.2 Türev Denklemleri.....	10
4.3 Geometrik Yorumlar.....	11
4.3.1 κ_n, K_g^1 ve onların geometrik yorumları	11
4.3.2 $\tau_g^1, \tau_g^2, K_g^2$ ve onların geometrik yorumları	12
5. YENİ DEĞİŞMEZLERİN KAPALI HİPERYÜZEYDEKİ HESAPLAMALARI	15
5.1. Birinci Tür Genişletilmiş Darboux Çatı Alanı (Durum 1)	16
5.1.1. K_g^1 ve κ_n için ifadeler	16
5.1.2. τ_g^1 için ifade.....	17
5.1.3. K_g^2 için ifade	17
5.1.4. τ_g^2 için ifade.....	18
5.2. İkinci Tür Genişletilmiş Darboux Çatı Alanı (Durum 2)	18
5.2.1. K_g^2 ve κ_n için ifadeler	18
6. E^4'DE GENİŞLETİLMİŞ DARBOUX ÇATI ALANINA GÖRE OSKÜLATÖR EĞRİLER	20
7. MATERYAL VE METOT.....	29
8. SONUÇ.....	29
KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Darboux Çatı Alanı ve Uygulamaları

Betül ALKAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2021, Sayfa: ix +31

Bu çalışmada, yönlü bir hiperyüzey üzerinde yatan bir Frenet eğrisi düşünülerek, E^4 4- boyutlu Öklid uzayında Darboux çatı alanını kullandık. Eğrilik vektörünün hiperyüzeyin normali ile lineer bağımsızlığına bağlı olarak, bu genişleme için iki durum elde ettik. Her durum için, hiperyüzeydeki eğri boyunca yeni değişmezlerin (invariantların) bazı geometrik anlamlarını elde ettik. Ayrıca E^4 de Darboux çatı eğrilikleri ve Frenet çatı eğrilikleri arasındaki ilişkileri de verdik. Sonuç olarak, hiperyüzey üzerinde yatan bir Frenet eğrisinin yeni değişmezlerinin ifadelerini hesapladık.

Ayrıca E^4 ’de genişletilmiş Darboux çatı alanına göre oskülatör eğrileri inceledik.

Anahtar Kelimeler: Hiperyüzey üzerindeki eğriler, Darboux çatı alanı, Eğrilikler, Oskülatör Eğri

ABSTRACT

Darboux Frame Field and Applications

Betül ALKAN

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

January 2021, Pages: ix + 31

In this study, by considering a Frenet curve lying on an oriented hypersurface, we extended the Darboux frame field into Euclidean space 4-space E^4 . Depending on the linear independency of the curvature vector with the hypersurface's normal, we obtained two cases for this extension. For each case, we obtained some geometrical meanings of new invariants along the curve on the hypersurface. We also gave the relationships between the Frenet frame curvatures and Darboux frame curvatures in E^4 . Finally, we computed the expressions of the new invariants of a Frenet curve lying on an implicit hypersurface.

In addition we examine osculating curves according to extended Darboux frame field.

Keywords: Curves on hypersurface, Darboux frame field, Curvatures, Osculating curve ...

SİMGELER

Simgeler

M	: Yönlendirilmiş Hiperyüzey
E^3	: 3 Boyutlu Uzay
E^4	: 4 Boyutlu Uzay
K_g	: Geodezik Eğrilik
K_g^1	: 1. Geodezik Eğrilik
K_g^2	: 2. Geodezik Eğrilik
K_n	: Normal Eğrilik
τ_g	: Geodezik Torsiyon
τ_g^1	: 1. Geodezik Torsiyon
τ_g^2	: 2. Geodezik Torsiyon
T	: Birim Teğet Vektör
N	: Birim Normal Vektör

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride, eğriler ve yüzeyler çalışılırken çatı alanları önemli bir araç oluşturur. Daha tanınık çatı alanları, bir uzay eğrisi boyunca Frenet-Serret çatısı ve bir yüzey eğrisi boyunca Darboux çatısıdır. 3-boyutlu Öklid uzayında, Darboux çatısı eğrinin hızı ve yüzeyin normal vektörü tarafından oluşturulur buna karşılık Frenet-Serret çatısı, eğrinin ivmesi ve hızından oluşturulur. Bu çatının vektör alanlarının türevleri, bazı reel değerli fonksiyonları içeren vektör alanları ile ifade edilir. Bu fonksiyonlara Frenet-Serret çatısı için eğrilik ve torsiyon, Darboux çatısı için geodezik torsiyon, geodezik eğrilik ve normal eğrilik denir. Daha yüksek boyutlu uzaylarda Frenet-Serret çatısının genellemeleri iyi bilinmektedir. Ancak 4-boyutta Darboux çatısının genellemeleri mevcut değildir.

Bu çalışmada, yönlü bir hiperyüzey üzerinde yatan bir Frenet eğrisi boyunca, bir çatı alanı kuruluyor (İlk üç vektörün, eğri boyunca hiperyüzeyin teğet uzayını kapsadığı) ve bu yeni çatı alanı, genişletilmiş Darboux çatı alanı olarak adlandırılır. (Bu genişlemenin E^4 de hiperyüzey üzerinde çalışılan eğriler için kullanışlı bir araç olabileceği düşünülüyor.) Sonra, hiperyüzeye göre eğrinin yeni eğriliklerinin geometrik anlamları veriliyor ve bu yeni çatı alanının türev denklemleri elde ediliyor. Sonuç olarak, verilen denklemler tarafından tanımlanan hiperyüzey üzerinde yatan bir eğri için yeni eğriliklerin ifadeleri elde edilir. Yeni eğrilikler için elde edilen ifadeler kullanılarak bir örnekle sunulur. Ayrıca E^4 ' de Darboux çatı [12] nolu makaledeki metot kullanılarak birinci ve ikinci tipden oskülatör eğriler incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1. A boş olmayan bir cümle ve bir K cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayı V olsun. Bu takdirde,

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa, A 'ya V ile birleştirilmiş bir afin uzay denir [5].

$$A1) \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R),$$

$$A2) \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ için } f(\overrightarrow{PQ}) = \alpha \text{ olacak şekilde bir tek } Q \in A \text{ vardır.}$$

Tanım 2.2. Reel bir afin uzay A ve A ile birleşen vektör uzay V olsun. V de bir iç çarpım işlemi olarak,

$$\langle, \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{array} \right\}$$

Öklid iç çarpımı tanımlanırsa, bu işlem yardımı ile A da uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece Afin uzayı Öklid uzayı adını alır ve E^n ile gösterilir [5].

Tanım 2.3. $d: E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xy} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna E^n de uzaklık fonksiyonu veya Öklid metriği denir [5].

Tanım 2.4. A bir afin uzay ve A ile birleşen bir vektör uzayı V olsun. A da verilen $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine V de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisine bir baz oluşturuyorsa, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine afin çatı denir [5].

Tanım 2.5. E^n de sıralı bir $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $(n+1)$ -lisine $\mathbb{R}^n$ de karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör n -lisi $\mathbb{R}^n$ de ortonormal bir baz ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ sistemine E^n de Öklid çatı denir [5].

Tanım 2.6. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve X in alt cümlelerinin bir koleksiyonu τ olsun. Eğer τ için aşağıdakiler doğru ise τ ya X üzerinde bir topoloji denir [5].

T1) $X, \emptyset \in \tau$

T2) $\forall A, B \in \tau$ için $A \cap B \in \tau$

T3) $i \in I, A_i \in \tau$ için $\cup_{i \in I} A_i \in \tau$

Tanım 2.7. Bir X cümlesi ve üzerindeki bir τ topolojisinden oluşan (X, τ) ikilisine bir topolojik uzay denir [5].

Tanım 2.8. X ve Y birer topolojik uzay olsunlar.

$$f: X \rightarrow Y$$

fonksiyonu sürekli ise ve f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise f 'ye X 'den Y 'ye bir homeomorfizm denir. Bu taktirde X ile Y uzaylarına homeomorfik uzaylar denir [5].

Tanım 2.9. X bir topolojik uzay olsun. X 'in P ve Q gibi farklı noktaları için, X 'de sırası ile P ve Q noktalarını içine alan A_P ve A_Q açık alt cümleleri $A_P \cap A_Q = \emptyset$ olacak biçimde bulunabilirse, X uzayına Hausdorf uzayı denir [5].

Tanım 2.10. M bir topolojik uzay ve M için aşağıdaki önermeler sağlanıyorsa, M 'ye n -boyutlu topolojik manifold denir [5].

M1) M bir hausdorf uzayıdır.

M2) M 'nin her bir açık alt cümlesi E^n 'e ya da E^n 'nin bir açık alt cümlesine homeomorfdur.

M3) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.

Tanım 2.11. M bir topolojik manifold ve M 'nin bir atlası $S = \{\Psi_\alpha, W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için, $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere $\forall \alpha, \beta \in A$ 'ya karşılık $\varphi_{\alpha\beta}$ ve $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^k sınıfından diferansiyellenebilir iseler, S 'ye C^k sınıfından diferansiyellenebilirdir denir. S atlasına M üzerinde C^k sınıfından diferansiyellenebilir yapı denir [5].

Tanım 2.12. E^n n -boyutlu Öklid uzayında $(n - 1)$ -boyutlu bir yüzey veya $(n - 1)$ -yüzey diye E^n 'deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi

$$M = \{x \in U \subset E^n \mid f: U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow f(x) = c\}$$

$\forall f \mid p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanır [6].

Tanım 2.13. $I \subset \mathbb{R}$ açık(kapalı) bir aralık olmak üzere $\alpha: I \rightarrow E^n$ diferansiyellenebilir fonksiyonuna E^n 'de bir eğri denir [5].

Tanım 2.14. $M, (I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olsun. $\forall s \in I$ için $\|\alpha'(s)\| = 1$ ise M eğrisine birim hızlı eğri denir. $s \in I$ ya da yay-parametresi adı verilir [5].

Tanım 2.15. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ için $\alpha'(t) \neq 0$ dır [5].

Tanım 2.16. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda $\Psi = \{\alpha^1, \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(r)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in S_p\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ 'den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin Serret-Frenet r - ayaklı alanı denir. $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ 'ye ise $m \in M$ noktasındaki Serret-Frenet r - ayaklısı denir. $\forall V_i, 1 \leq i \leq r$ ye Serret-Frenet vektörü denir [5].

Tanım 2.17. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı,

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \\ N(t) &= B(t) \times T(t) \\ B(t) &= \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} \end{aligned}$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.18. $\alpha: I \rightarrow E^3$ eğrisi birim hızlı bir eğri olmak üzere $\forall s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı,

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) \\ N(s) &= \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot T'(s) \end{aligned}$$

şeklindedir [5].

Tanım 2.19. $M \subset E^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r - ayaklısı, $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} k_i: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto k_i(s) &= \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle, \quad 1 \leq i < r \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i . eğrilik fonksiyonu denir. $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına, $\alpha(s)$ noktasındaki M nin i . eğriliği denir [5].

Tanım 2.20. $M \subset E^n$ eğrisi, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ için $\alpha(s)$ noktasında eğrilik $k_i(s)$ ve Frenet r - ayaklısı, $\{V_1(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Bu takdirde Frenet formülleri,

$$1) V'_1(s) = k_1(s)V_1(s)$$

$$2) V'_i(s) = -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 < i < r$$

$$3) V'_r(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$$

şeklindedir [5]

Tanım 2.21. E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. M de bir eğri α ve α nın teğet vektör alanı T olmak üzere α üzerindeki Y vektör alanı için, $D_T^Y = 0$ ise Y vektör alanına M üzerindeki α boyunca bir Levi-Civita anlamında paralel vektör alanı denir. Eğer $D_T^T = 0$ ise α eğrisine M üzerinde bir geodezik eğri denir [6].

Tanım 2.22. E^3 de birim hızlı bir α eğrisinin birim teğet vektör alanı T olmak üzere,

$$k_g = \|D_T T\| = \left\| \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right\|$$

ifadesine α eğrisinin, $\alpha(s)$ noktasına karşılık gelen E^3 deki geodezik eğriliği denir [7].

Tanım 2.23. $v_p \in T_p(M)$ olmak üzere

$$k_p(v_p) = \left\langle S \left(\frac{v_p}{\|v_p\|} \right), \frac{v_p}{\|v_p\|} \right\rangle$$

eşitliği ile tanımlanan $k_p(v_p)$ sayısına, M yüzeyinin p noktasında, v_p doğrultusundaki normal eğriliği denir [10].

Tanım 2.24. Birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları T, N, B olmak üzere,

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = \langle B'(s), N(s) \rangle$$

fonksiyonuna α eğrisinin burulma(torsiyon) fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına ise eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması(torsiyonu) denir [10].

Tanım 2.25. $M, \mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ düzenli(regüler) bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimptotik vektörü ise α eğrisine, M yüzeyi içinde bir asimptotik eğri denir[10].

Tanım 2.26. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayının $\{e_1, e_2, e_3\}$ standart bazını göz önüne alalım.

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \wedge \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

lineer dönüşümü

$$e_1 \wedge e_2 \rightarrow \varphi(e_1 \wedge e_2) = e_3$$

$$e_2 \wedge e_3 \rightarrow \varphi(e_2 \wedge e_3) = e_1$$

$$e_3 \wedge e_1 \rightarrow \varphi(e_3 \wedge e_1) = e_2$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüm bazı baza dönüştüren lineer dönüşüm olduğundan lineer izomorfizmdir

$$x: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \alpha \times \beta = \varphi(\alpha \wedge \beta)$$

şeklinde tanımlı $\times$ iç işlemine vektörel çarpım işlemi ve $\alpha \times \beta$ vektörüne de α ile β nın vektörel çarpımı denir [5].

Tanım 2.27. E^3 de bir M yüzeyi üzerindeki diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir yönlendirme denir [6].

Tanım 2.28. E^3 de irtibatlı bir yüzey M olsun. O zaman M üzerinde N_1 ve N_2 gibi sadece iki birim diferansiyellenebilir normal vektör alanı vardır. Öyle ki,

$$N_1(P) = -N_2(P), \quad \forall P \in M$$

dir. Bu durumda E^3 deki her bir M yüzeyi üzerinde tam iki yönlendirme vardır. Bir yüzey üzerinde bir yönlendirme seçilmiş ise bu yüzeye yönlendirilmiş yüzey denir [6].

Tanım 2.29. M , $\mathbb{R}^3$ uzayında bir yüzey ve $\alpha: I \rightarrow M$ düzenli(regüler) bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü, $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir eğrilik vektörü ise α eğrisine M yüzeyi içinde bir eğrilik çizgisi(asli çizgi) veya baş eğri denir [10].

3. DARBOUX ÇATI ALANI

3.1. E^3 de Darboux Çatı

$S \subset E^3$ yönlendirilmiş bir yüzey olsun ve $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ birim hızlı bir eğri olsun. T, γ 'nın birim teğet vektör alanını ve U, γ eğrisine kısıtlanan S nin birim normal vektör alanını belirtsin. Darboux çatı alanı boyunca $\gamma, \{T, V, U\}$ tarafından verilmiş, ki burada $V = U \times T$ dir. Bu yüzden, γ eğrisi boyunca her vektör alanının yay uzunluğuna göre türevleri ifade edilebilir [9].

$$\begin{cases} T' = K_g V + K_n U \\ V' = -K_g T + \tau_g U \\ U' = -K_n T - \tau_g V \end{cases}$$

K_g, K_n ve τ_g ; γ eğrisinde sırasıyla geodezik eğrilik, normal eğrilik ve geodezik torsiyonu belirtsin.

3.2. E^4 de bir hiperyüzey eğrisi

Tanım 3.1. $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, R^4 de standart baz olsun. Vektörlerin üçlü çarpımı (veya vektör çarpımı)

$$X = \sum_{i=1}^4 e_i x_i, Y = \sum_{i=1}^4 e_i y_i \text{ ve } Z = \sum_{i=1}^4 e_i z_i$$

şeklinde tanımlıdır [8],[11].

$$X \otimes Y \otimes Z = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix}$$

Üçlü çarpım aşağıdaki özelliklere sahiptir [11].

1. $X \otimes Y \otimes Z = -Y \otimes X \otimes Z = Y \otimes Z \otimes X$
2. $\langle X, Y \otimes Z \otimes W \rangle = \det\{X, Y, Z, W\}$
3. $(X + Y) \otimes Z \otimes W = X \otimes Z \otimes W + Y \otimes Z \otimes W$

$M \subset E^4$ bir regüler hiperyüzey belirtsin ve $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir birim hızlı eğri olsun. Eğer $\{t, n, b_1, b_2\}$, β boyunca hareketli Frenet çatısı ise Frenet formülleri aşağıdaki gibidir [4].

$$\begin{cases} t' = k_1 n, \\ n' = -k_1 t + k_2 b_1, \\ b_1' = -k_2 n + k_3 b_2, \\ b_2' = -k_3 b_1, \end{cases} \quad (3.1)$$

ki burada, t, n, b_1 ve b_2 birim teğet, asli normal, birinci binormal ve ikinci binormal vektör alanlarını; k_1, k_2, k_3 β eğrisinin eğrilik fonksiyonlarını belirtiyor.

Teorem 3.1. $\alpha: I \rightarrow E^4$ keyfi hızlı regüler bir eğri olsun. Eğrinin Frenet vektörleri verilmiş idi [1],[2].

$$t = \frac{\dot{\alpha}}{\|\dot{\alpha}\|}, n = \frac{b_1 \otimes b_2 \otimes \dot{\alpha}}{\|b_1 \otimes b_2 \otimes \dot{\alpha}\|}, b_1 = \frac{b_2 \otimes \dot{\alpha} \otimes \ddot{\alpha}}{\|b_2 \otimes \dot{\alpha} \otimes \ddot{\alpha}\|}, b_2 = \frac{\dot{\alpha} \otimes \ddot{\alpha} \otimes \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \otimes \ddot{\alpha} \otimes \ddot{\alpha}\|} \quad (3.2)$$

ve eğrinin eğrilikleri

$$k_1 = \frac{\langle n, \ddot{\alpha} \rangle}{\|\ddot{\alpha}\|^2}, k_2 = \frac{\langle b_1, \ddot{\alpha} \rangle}{\|\ddot{\alpha}\|^3 k_1}, k_3 = \frac{\langle b_2, \alpha^{4'} \rangle}{\|\ddot{\alpha}\|^4 k_1 k_2} \quad (3.3)$$

" $\langle \cdot \rangle$ " skaler çarpımı belirtiyor.

Tanım 3.2. Eğer $\beta'(s), \beta''(s), \dots, \beta^{(n-1)}(s)$ vektörleri eğrinin her noktası boyunca lineer bağımsız ise C^n sınıfından $\beta: I \rightarrow E^n$ birim hızlı eğrisi bir Frenet eğrisi olarak adlandırılır[2].

4. GENİŞLETİLMİŞ DARBOUX ÇATI ALANI

4.1 Geniştirilmiş Darboux Çatı Alanının İnşası

M, E^4 de N birim normal vektör alanı tarafından yönlendirilmiş bir hiperyüzey olsun ve β, M üzerinde yatan s yay uzunluğu parametrelili C^n -sınıfından bir Frenet eğrisi olsun. T , eğrinin birim teğet vektör alanını ve N , sınırlı olan hiperyüzeyin birim normal vektör alanını belirtiyor. Yani;

$$T(s) = \beta'(s) \text{ ve } N(s) = N(\beta(s))$$

β Frenet eğrisi boyunca, genişletilmiş Darboux çatı alanı aşağıdaki gibi inşa edilebilir[2].

Durum 1. Eğer $\{T, N, \beta''\}$ lineer bağımsız ise Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu kullanılarak $\{N, T, E\}$ ortonormal takımı verilir[2].

$$E = \frac{\beta'' - \langle \beta'', N \rangle N}{\|\beta'' - \langle \beta'', N \rangle N\|} \quad (4.1)$$

Durum 2. Eğer $\{T, N, \beta''\}$ lineer bağımlı ise yani eğer β'', N normal vektörünün yönünde ise, $\{N, T, \beta'''\}$ için Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu uygulanarak $\{N, T, E\}$ ortonormal takımı verilir.

$$E = \frac{\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T}{\|\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T\|} \quad (4.2)$$

Her bir durumda eğer $D = N \otimes T \otimes E$ tanımlarsak, β 'nin her noktasında karşılıklı ortogonal olan T, E, D ve N dört birim vektör alanına sahiptir. Bu yüzden, onun Frenet çatı alanı yerine, β eğrisi boyunca $\{T, E, D, N\}$ bir yeni ortonormal çatı alanı vardır. $E(s)$ ve $D(s)$ 'nin aynı zamanda M hiperyüzeyine teğet olduğu açıktır. Böylece, $\beta(s)$ noktasında hiperyüzeyle teğet hiperdüzlemini geren $\{T(s), E(s), D(s)\}$ olduğu görülür. Buna sırasıyla yeni çatı alanları denir[2].

Durum 1' e, "Birinci türde genişletilmiş Darboux çatı alanı" ya da kısaca "Birinci türde ED -çatı alanı"

ve

Durum 2' ye, "İkinci türde genişletilmiş Darboux çatı alanı" ya da kısaca "İkinci türde ED -çatı alanı" adı verilir.

Uyarı 4.1. 3 boyutlu uzayda γ Frenet eğrisi boyunca $\{T, V, U\}$ Darboux çatı alanı, $\{U, T, \gamma''\}$ nin lineer bağımsız vektörlerine bağlı olarak Durum 1 ve Durum 2 de açıklanan metotla da oluşturulabilir[2].

Uyarı 4.2. Eğer, s yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir β Frenet eğrisi N birim normal vektörü ile bir hiperdüzlemde yatıyorsa, $\langle \beta(s) - \beta(0), N \rangle = 0$ yazılabilir. Bu yüzden,

$\langle \beta'(s), N \rangle = 0, \langle \beta''(s), N \rangle = 0, \langle \beta'''(s), N \rangle = 0$ dır. Yani Durum 1 geçerlidir. Eğer (4.1) de yerine yazarsak $\langle \beta''(s), N \rangle = 0$ ise $E(s) = n(s)$ elde edilir. Dahası, $\beta', \beta'', \beta'''$ N 'ye diktir, (3.2) kullanılarak N ve b_2 nin paralel olduğu elde edilir. Bundan dolayı eğer $N = b_2$ alınırsa, $D(s) = b_1(s)$ elde edilir. Yani Frenet çatısı ile birinci türde ED - çatı alanı çıkarılır[2].

Uyarı 4.3. Eğer β Frenet eğrisi s yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir hiperyüzey üzerinde geodezik ise, $N(s) = n(s)$ ile hiperyüzeyin düzgün yönlendirilmesi ile Durum 2 geçerlidir. Bu durumda, $\beta'' = k_1 n, \beta''' = -k_1^2 t + k_1' n + k_1 k_2 b_1$, (4.2) de yerine yazarsak $E \parallel b_1$ sağlanır. Eğer $E(s) = b_1(s)$ alınırsa, $D(s) = b_2(s)$ elde edilir, yani $\{T, b_1, b_2, n\}$ çatısı ile $\{T, E, D, N\}$ çatısı çıkarılır[2].

4.2 Türev Denklemleri

Şimdi bu vektör alanlarının türevleri her durumda kendileri cinsinden elde edilsin. $\{T, E, D, N\}$ ortonormal olduğu için,

$$\begin{aligned} T' &= \langle T', E \rangle E + \langle T', D \rangle D + \langle T', N \rangle N, \\ E' &= \langle E', T \rangle T + \langle E', D \rangle D + \langle E', N \rangle N, \\ D' &= \langle D', T \rangle T + \langle D', E \rangle E + \langle D', N \rangle N, \\ N' &= \langle N', T \rangle T + \langle N', E \rangle E + \langle N', D \rangle D, \end{aligned} \quad (4.3)$$

Durum 1. Bu durumda, ED - çatı alanı birinci türdendir. Burada

$$E = \frac{\beta'' - \langle \beta'', N \rangle N}{\|\beta'' - \langle \beta'', N \rangle N\|} = \frac{T' - \langle T', N \rangle N}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|}$$

alınır.

$$T' = \|T' - \langle T', N \rangle N\| E + \langle T', N \rangle N$$

yani $\langle T', D \rangle = 0$ [2].

Durum 2. Bu durumda, ED -çatı alanı ikinci türdendir. Bu yüzden $\{N, T, \beta''\}$ lineer bağımlıdır ve

$$E = \frac{\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T}{\|\beta''' - \langle \beta''', N \rangle N - \langle \beta''', T \rangle T\|} \quad (4.4)$$

$\{N, T, \beta''\}$ 'nin lineer bağımlılığı $\beta'' = \lambda N$ 'yi verir, yani $\langle T', E \rangle = \langle T', D \rangle = 0$ dır. Dahası, eğer (4.4) de $\beta''' = \lambda' N + \lambda N'$ yerine yazılırsa $\langle N', D \rangle = 0$ elde edilir.

$$\langle E', N \rangle = \tau_g^1, \langle D', N \rangle = \tau_g^2 \quad (4.5)$$

ve i .mertebeden τ_g^i geodezik torsiyon olarak adlandırılır. Benzer şekilde

$$\langle T', E \rangle = \kappa_g^1, \langle E', D \rangle = \kappa_g^2 \quad (4.6)$$

i . mertebeden κ_g^i geodezik eğrilik olarak adlandırılır.

Son olarak, eğer $\langle T', N \rangle = \kappa_n$ kullanılırsa, matris formunda ED -çatı alanının diferansiyel denklemleri elde edilir[2].

$$\text{Durum 1: } \begin{bmatrix} T' \\ E' \\ D' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g^1 & 0 & \kappa_n \\ -\kappa_g^1 & 0 & \kappa_g^2 & \tau_g^1 \\ 0 & -\kappa_g^2 & 0 & \tau_g^2 \\ -\kappa_n & -\tau_g^1 & -\tau_g^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \\ D \\ N \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\text{Durum 2: } \begin{bmatrix} T' \\ E' \\ D' \\ N' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \kappa_n \\ 0 & 0 & \kappa_g^2 & \tau_g^1 \\ 0 & -\kappa_g^2 & 0 & 0 \\ -\kappa_n & -\tau_g^1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \\ D \\ N \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

4.3 Geometrik Yorumlar

Şimdi $\kappa_n, \kappa_g^1, \kappa_g^2, \tau_g^1, \tau_g^2$ reel değerli fonksiyonlarının geometrik yorumlarını inceleyelim[2].

4.3.1 κ_n, κ_g^1 ve onların geometrik yorumları

$\kappa_n = \langle T', N \rangle$ 'nin her durumda T teğet vektörünün yönünde hiperyüzeyin normal eğriliği olduğu tanımdan açıkça anlaşılıyor. Bu yüzden β boyunca $\kappa_n = 0$ olması için gerek ve yeter şart β 'nin bir asimptotik eğri olmasıdır.

Aşağıda verilen 3.1 sonucuna göre kolayca görülebilir.[3]

Teorem 4.4. $\beta(s)$, 4 -boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyinde birim hızlı bir eğri olsun ve M_1, M_2 sırasıyla $\{T(s_0), E(s_0), N(s_0)\}$ ve $\{T(s_0), D(s_0), N(s_0)\}$ tarafından belirlenen $\beta(s_0) \in M$ 'de hiperdüzlem olsun. Sonra birinci eğrilik, $\beta(s_0)$ noktasında M, M_1 ve M_2 hiperyüzeyinin arakesit eğrisi $|\kappa_n(s_0)|$ 'dir, ki burada κ_n , T teğet vektörünün yönünde M hiperyüzeyinin normal eğriliğidir [2].

Teorem 4.5. $\beta(s)$, 4-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyinde birim hızlı bir eğri olsun. Eğer α , $\beta(s_0)$ noktasında teğet hiperdüzlem üstüne β eğrisinin ortogonal projeksiyonunu belirtiyorsa, α eğrisinin birinci eğriliği

$$k_1^\alpha(s_0) = |\kappa_g^1(s_0)|$$

şeklinde verilir [2].

İspat. $\alpha, \beta(s_0)$ noktasında teğet hiperdüzlem üstüne β eğrisinin ortogonal projeksiyonunu belirtiyorsa,

$$\alpha(s) = \beta(s) - \langle \beta(s) - \beta(s_0), N(s_0) \rangle N(s_0)$$

yazılabilir. Son denklemin her iki tarafının s 'ye göre türevinin alınmasıyla, $\alpha(s_0) = \beta(s_0)$ noktasında

$$\alpha'(s_0) = T(s_0),$$

$$\alpha''(s_0) = \kappa_g^1(s_0)E(s_0),$$

$$\begin{aligned} \alpha'''(s_0) = & \{-(\kappa_g^1)^2(s_0) - (\kappa_n)^2(s_0)\}T(s_0) + \{(\kappa_g^1)'(s_0) - \kappa_n(s_0)\tau_g^1(s_0)\}E(s_0) \\ & + \{\kappa_g^2(s_0)\kappa_g^1(s_0) - \kappa_n(s_0)\tau_g^2(s_0)\}D(s_0) \end{aligned}$$

dır. Bu yüzden Teorem 4.1 kullanılarak istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.6. $\beta(s)$, 4-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyinde birim hızlı bir asimptotik eğri olsun. Eğer $\gamma, \beta(s_0)$ noktasında $\{T(s_0), E(s_0), N(s_0)\}$ tarafından belirlenen hiperdüzlemde β eğrisinin ortogonal projeksiyonu ile tanımlanmış ise γ 'nın birinci eğriliği $k_1^\gamma(s_0) = |\kappa_g^1(s_0)|$ ile verilir [2]

İspat. İspat, Teorem 4.2'nin ispatına benzer şekilde verilebilir. β boyunca $\{T, n, b_1, b_2\}$ hareketli Frenet çatısını düşünelim. n, b_1, b_2, E, D, N 'ye dik olduğundan aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} n \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \emptyset_1 & \cos \emptyset_2 & \cos \emptyset_3 \\ \cos \varphi_1 & \cos \varphi_2 & \cos \varphi_3 \\ \cos \theta_1 & \cos \theta_2 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ D \\ N \end{bmatrix}$$

yukarıdaki 3×3 katsayı matrisinin ortogonalliğini kullanarak

$$\begin{bmatrix} E \\ D \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \emptyset_1 & \cos \varphi_1 & \cos \theta_1 \\ \cos \emptyset_2 & \cos \varphi_2 & \cos \theta_2 \\ \cos \emptyset_3 & \cos \varphi_3 & \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

verilebilir. Bu yüzden $T' = k_1 n$ Frenet formülü kullanılarak

$$\kappa_n = \langle T', E \rangle = k_1 \cos \emptyset_1 \text{ ve } \kappa_n = \langle T', N \rangle = k_1 \cos \emptyset_3 \quad (4.10)$$

elde edilir.

4.3.2 $\tau_g^1, \tau_g^2, \kappa_g^2$ ve onların geometrik yorumları

M üzerinde yatan β eğrisinin bir eğrilik doğrusu olması için gerek ve yeter şart Durum 1'de $\tau_g^1(s) = \tau_g^2(s) = 0$, olmasıdır. Diğer yandan, (4.9) daki denklem $\tau_g^1 = \langle E', N \rangle$ 'yi verir.

$$E = \cos \emptyset_1 n + \cos \varphi_1 b_1 + \cos \theta_1 b_2 \text{ ve } N = \cos \emptyset_3 n + \cos \varphi_3 b_1 + \cos \theta_3 b_2$$

olup,

$$E' = \frac{d}{ds}(\cos \emptyset_1 n + \cos \varphi_1 b_1 + \cos \theta_1 b_2)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned}
\tau_g^1 &= \langle \frac{d}{ds} \{ (\cos \emptyset_1)n + (\cos \varphi_1)b_1 + (\cos \theta_1)b_2 \}, (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle \\
\tau_g^1 &= \langle -\emptyset_1' \sin \emptyset_1 n + \cos \emptyset_1 n' - \varphi_1' \sin \varphi_1 b_1 + \cos \varphi_1 b_1' - \theta_1' \sin \theta_1 b_2 \\
&\quad + \cos \theta_1 b_2', (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle \\
\tau_g^1 &= \langle -\emptyset_1' \sin \emptyset_1 n + \cos \emptyset_1 (-k_1 t + k_2 b_1) - \varphi_1' \sin \varphi_1 b_1 + \cos \varphi_1 (-k_2 n + k_3 b_2) \\
&\quad - \theta_1' \sin \theta_1 b_2 + \cos \theta_1 (-k_3 b_1), (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle \\
\tau_g^1 &= \langle (-k_1 \cos \emptyset_1) t + (-\emptyset_1' \sin \emptyset_1 \\
&\quad - k_2 \cos \varphi_1) n \\
&\quad + (k_2 \cos \emptyset_1 - \varphi_1' \sin \varphi_1 - k_3 \cos \theta_1) b_1 \\
&\quad + (k_3 \cos \varphi_1 - \theta_1' \sin \theta_1) b_2, (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle
\end{aligned}$$

Böylece, β için Frenet formülleri kullanılarak 1. mertebeden geodezik torsiyon elde edilir.

$$\begin{aligned}
\tau_g^1 &= -\emptyset_1' \sin \emptyset_1 \cos \emptyset_3 - \varphi_1' \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \theta_1' \sin \theta_1 \cos \theta_3 \\
&\quad + k_2 (\cos \emptyset_1 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \cos \emptyset_3) \\
&\quad + k_3 (\cos \varphi_1 \cos \theta_3 - \cos \theta_1 \cos \varphi_3).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, sırasıyla 2. sırada geodezik torsiyon ve geodezik eğrilik için yani $\tau_g^2 = \langle D', N \rangle$ ve $k_g^2 = \langle E', D \rangle$ için de elde edelim. O halde ;

$$\begin{aligned}
D &= \cos \emptyset_2 n + \cos \varphi_2 b_1 + \cos \theta_2 b_2 \text{ ve } N = \cos \emptyset_3 n + \cos \varphi_3 b_1 + \cos \theta_3 b_2 \\
&\text{olup}
\end{aligned}$$

$$D' = \frac{d}{ds} (\cos \emptyset_2 n + \cos \varphi_2 b_1 + \cos \theta_2 b_2)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
\tau_g^2 &= \langle \frac{d}{ds} \{ (\cos \emptyset_2)n + (\cos \varphi_2)b_1 + (\cos \theta_2)b_2 \}, (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle \\
\tau_g^2 &= \langle -\emptyset_2' \sin \emptyset_2 n + \cos \emptyset_2 n' - \varphi_2' \sin \varphi_2 b_1 + \cos \varphi_2 b_1' - \theta_2' \sin \theta_2 b_2 \\
&\quad + \cos \theta_2 b_2', (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle \\
\tau_g^2 &= \langle -\emptyset_2' \sin \emptyset_2 n + \cos \emptyset_2 (-k_1 t + k_2 b_1) - \varphi_2' \sin \varphi_2 b_1 + \cos \varphi_2 (-k_2 n + k_3 b_2) \\
&\quad - \theta_2' \sin \theta_2 b_2 + \cos \theta_2 (-k_3 b_1), (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle \\
\tau_g^2 &= \langle (-k_1 \cos \emptyset_2) t + (-\emptyset_2' \sin \emptyset_2 \\
&\quad - k_2 \cos \varphi_2) n \\
&\quad + (k_2 \cos \emptyset_2 - \varphi_2' \sin \varphi_2 - k_3 \cos \theta_2) b_1 \\
&\quad + (k_3 \cos \varphi_2 - \theta_2' \sin \theta_2) b_2, (\cos \emptyset_3)n + (\cos \varphi_3)b_1 + (\cos \theta_3)b_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_g^2 = & -\phi_2' \sin \phi_2 \cos \phi_3 - \varphi_2' \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 - \theta_2' \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\
& + k_2(\cos \phi_2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_2 \cos \phi_3) \\
& + k_3(\cos \varphi_2 \cos \theta_3 - \cos \theta_2 \cos \varphi_3).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

olacak şekilde elde edilir ve $k_g^2 = \langle E', D \rangle$ için

$$E = \cos \phi_1 n + \cos \varphi_1 b_1 + \cos \theta_1 b_2 \text{ ve } D = \cos \phi_2 n + \cos \varphi_2 b_1 + \cos \theta_2 b_2$$

olup,

$$E' = \frac{d}{ds}(\cos \phi_1 n + \cos \varphi_1 b_1 + \cos \theta_1 b_2)$$

olur. O halde

$$k_g^2 = \langle \frac{d}{ds}\{(\cos \phi_1)n + (\cos \varphi_1)b_1 + (\cos \theta_1)b_2\}, (\cos \phi_2)n + (\cos \varphi_2)b_1 + (\cos \theta_2)b_2 \rangle$$

$$\begin{aligned}
k_g^2 = & \langle -\phi_1' \sin \phi_1 n + \cos \phi_1 n' - \varphi_1' \sin \varphi_1 b_1 + \cos \varphi_1 b_1' - \theta_1' \sin \theta_1 b_2 \\
& + \cos \theta_1 b_2', (\cos \phi_2)n + (\cos \varphi_2)b_1 + (\cos \theta_2)b_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_g^2 = & \langle -\phi_1' \sin \phi_1 n + \cos \phi_1 (-k_1 t + k_2 b_1) - \varphi_1' \sin \varphi_1 b_1 + \cos \varphi_1 (-k_2 n + k_3 b_2) \\
& - \theta_1' \sin \theta_1 b_2 + \cos \theta_1 (-k_3 b_1), (\cos \phi_2)n + (\cos \varphi_2)b_1 + (\cos \theta_2)b_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_g^2 = & \langle (-k_1 \cos \phi_1) t + (-\phi_1' \sin \phi_1 \\
& - k_2 \cos \varphi_1) n \\
& + (k_2 \cos \phi_1 - \phi_1' \sin \varphi_1 - k_3 \cos \theta_1) b_1 \\
& + (k_3 \cos \varphi_1 - \theta_1' \sin \theta_1) b_2, (\cos \phi_2)n + (\cos \varphi_2)b_1 + (\cos \theta_2)b_2 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_g^2 = & -\phi_1' \sin \phi_1 \cos \phi_2 - \varphi_1' \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \theta_1' \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
& + k_2(\cos \phi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \phi_2) \\
& + k_3(\cos \varphi_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \varphi_2).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir.

Teorem 4.7. β , 4-boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyinde, s yay uzunluğu tarafından parametrelenen birim hızlı bir geodezik eğri olsun. $\{T, n, b_1, b_2\}$ ve $\{T, E, D, N\}$ sırasıyla β 'nın Frenet çatı alanını ve ED -çatı alanını belirtsin. O zaman

$$\kappa_g^2 = k_3, \quad \tau_g^1 = -k_2, \quad \kappa_n = k_1,$$

dir ki burada $k_i (i = 1, 2, 3)$ β 'nın i . dereceden eğrilik fonksiyonunu belirtir [2].

İspat. β , M de bir geodezik eğrilik olduğundan, eğrilik vektörü teğet hiperdüzlemine diktir. Yani, n ve N lineer bağımlıdır. (Durum 2 geçerlidir.) Bu yüzden eğer Uyarı 3 kullanılırsa β boyunca

$$\phi_1(s) = \phi_2(s) = \varphi_2(s) = \varphi_3(s) = \theta_1(s) = \theta_3(s) = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_3(s) = \varphi_1(s) = \theta_2(s) = 0$$

dir. Bu denklemlerin (4.10), (4.11) ve (4.13) da yazılması istenilen sonuçları verir.

Teorem 4.8. β , 4 boyutlu Öklid uzayında yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyinde, s yay uzunluğu tarafından parametrelenmiş birim hızlı bir asimptotik eğri olsun. $\{T, n, b_1, b_2\}$ ve $\{T, E, D, N\}$ sırasıyla β 'nın Frenet çatı alanını ve ED -çatı alanını belirtsin. O zaman

$$\kappa_g^1 = k_1, \quad \kappa_g^2 = k_2 \cos \varphi, \quad \tau_g^1 = -k_2 \sin \varphi, \quad \tau_g^2 = k_3 + \frac{d\varphi}{ds}$$

dır ki burada φ , D ve b_1 arasındaki açıyı ve $k_i (i = 1, 2, 3)$ β 'nın i . dereceden eğrilik fonksiyonunu belirtir [2].

İspat. β , M de bir asimptotik eğrilik olduğundan, $\kappa_n = 0$ dir. Yani, $t' = k_1 n = \kappa_g' E$ dir. Bu durumda n ve E lineer bağımlıdır. (Durum 1 geçerlidir.) Bu yüzden β boyunca

$$\phi_1(s) = 0, \quad \phi_2(s) = \phi_3(s) = \varphi_1(s) = \theta_1(s) = \frac{\pi}{2}$$

elde edilir. Ayrıca bu özel durumda D, N, b_1, b_2 bir düzlem içinde yatar,

$$\varphi_2(s) = \theta_3(s) = \varphi(s), \quad \theta_2(s) = \frac{\pi}{2} - \varphi(s), \quad \varphi_3(s) = \frac{\pi}{2} + \varphi(s)$$

dir. Bu denklemlerin (4.10)-(4.13) da yazılması istenilen sonucu verir.

Yukarıdaki Teorem sonucunda aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 4.9. β , M de bir asimptotik eğri olsun. Eğer $\varphi(s) = sbt$ ise, β 'nın 2. Mertebeden geodezik torsiyonu 3. eğriliğe eşittir. Yani; $\tau_g^2 = k_3$ dir[2].

Sonuç 4.10. β , M de bir asimptotik eğri olsun. Eğer $\varphi(s) = 0$ ise, $\kappa_g^1 = k_1, \kappa_g^2 = k_2, \tau_g^1 = 0, \tau_g^2 = k_3$ elde edilir. Yani; β boyunca birinci türde ED - çatı alanı ile Frenet çatısı çakışır[2].

Sonuç 4.11. β , M de bir asimptotik eğri olsun. Eğer $\varphi(s) = -\frac{\pi}{2}$ ise, β 'nın 1. ve 2. sırada geodezik torsiyonu, onun sırasıyla ikinci ve üçüncü eğriliklerine eşittir. Yani; $\tau_g^1 = k_2, \tau_g^2 = k_3$ dir[2].

Sonuç 4.12. β , M de bir asimptotik eğri olsun. Bu durumda,

$$(\tau_g^1)^2 + (\kappa_g^2)^2 = (k_2)^2$$

dir[2].

5. YENİ DEĞİŞMEZLERİN KAPALI HİPERYÜZEYDEKİ HESAPLAMALARI

$f(x, y, z, w) = 0$ kapalı denklemi ile verilen bir M hiperyüzeyi ele alınsın ve M' 'de, C^n ($n \geq 4$) sınıfında bir Frenet eğrisi $\beta(s) = (x(s), y(s), z(s), w(s))$ olsun. β boyunca yatan birim normal vektör $N(s) = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}(s)$ tarafından verilir. Dahası [1]

$$\langle \nabla f, \beta' \rangle = 0, \quad (5.1)$$

$$\langle \nabla f, \beta'' \rangle = -\beta' H_f (\beta')^t, \quad (5.2)$$

$$\langle \nabla f, \beta''' \rangle = -3\beta' H_f (\beta'')^t - \beta' \frac{d(H_f)}{ds} \quad (5.3)$$

ki burada

$$\beta' = [x' \quad y' \quad z' \quad w'],$$

$$\beta'' = [x'' \quad y'' \quad z'' \quad w''],$$

$$\beta''' = [x''' \quad y''' \quad z''' \quad w'''],$$

$$\nabla f = [f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_w] \quad \text{ve}$$

$$H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_{xw} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_{yw} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_{zw} \\ f_{wx} & f_{wy} & f_{wz} & f_{ww} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d(H_f)}{ds} = \left[\frac{\partial H_f}{\partial x} (\beta')^t \quad \dots \quad \frac{\partial H_f}{\partial w} (\beta')^t \right],$$

$$\frac{\partial H_f}{\partial x} = \begin{bmatrix} f_{xxx} & f_{xyx} & f_{xzx} & f_{xwx} \\ f_{yxx} & f_{yyx} & f_{yzx} & f_{ywx} \\ f_{zxx} & f_{zyx} & f_{zzx} & f_{zwx} \\ f_{wx} & f_{wyx} & f_{wzx} & f_{wwx} \end{bmatrix}, \dots, \frac{\partial H_f}{\partial w} = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} & f_{xw} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} & f_{yw} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} & f_{zw} \\ f_{wx} & f_{wy} & f_{wz} & f_{ww} \end{bmatrix}.$$

Ayrıca aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(\nabla f)' = \beta' H_f, \quad (5.4)$$

$$(\nabla f)'' = \beta'' H_f + \beta' \frac{d(H_f)}{ds}. \quad (5.5)$$

Şimdi her bir durumda hiperyüzeye göre β 'nin yeni değişmezlerinin ifadelerini hesaplayalım.

5.1. Birinci Tür Genişletilmiş Darboux Çatı Alanı (Durum 1)

5.1.1. κ_g^1 ve κ_n için ifadeler

$$\kappa_g^1 = \langle T', E \rangle, \quad \kappa_n = \langle T', N \rangle \quad \text{ve} \quad E = \frac{T' - \langle T', N \rangle N}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|} \quad \text{olduğundan,}$$

$$\kappa_g^1 = \langle T', \frac{T' - \langle T', N \rangle N}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|} \rangle = \sqrt{\langle T', T' \rangle - \langle T', N \rangle^2}$$

elde edilir ya da

$$\kappa_g^1 = \left\{ \beta''(\beta'')^t - \frac{1}{\|\nabla f\|^2} (\beta' H_f(\beta')^t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.6)$$

ve

$$\kappa_n = \langle T', N \rangle = \frac{1}{\|\nabla f\|} \langle \beta'', \nabla f \rangle = -\frac{1}{\|\nabla f\|} \beta' H_f(\beta')^t. \quad (5.7)$$

elde edilir[2].

5.1.2. τ_g^1 için ifade

Eğer s 'ye göre $E = \frac{T' - \langle T', N \rangle N}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|}$, nın türevi alınır[2],

$$E' = \frac{1}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|} (T'' - \langle T'', N \rangle N - \langle T', N' \rangle N - \langle T', N \rangle N') + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|} \right) (T' - \langle T', N \rangle N). \quad (5.8)$$

Bu yüzden,

$$\tau_g^1 = \langle E', N \rangle = \frac{-\langle T', N \rangle}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|}$$

ya da

$$\tau_g^1 = \frac{-1}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|} \langle T', \frac{(\nabla f)'}{\|\nabla f\|} - \frac{1}{\|\nabla f\|^3} \langle \nabla f, (\nabla f)' \rangle \nabla f \rangle.$$

sonucu çıkarılır. Bundan dolayı matris notasyonunda

$$\tau_g^1 = -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \frac{1}{\|\nabla f\|} \beta' H_f(\beta'')^t + \frac{1}{\|\nabla f\|^3} (\beta' H_f(\nabla f)^t) (\beta' H_f(\beta')^t) \right\}, \quad (5.9)$$

ki burada

$$\varepsilon = \left\{ \beta''(\beta'')^t - \frac{1}{\|\nabla f\|^2} (\beta' H_f(\beta')^t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

5.1.3. κ_g^2 için ifade

Eğer (5.8) ve $\langle T', D \rangle = 0$ kullanılırsa

$$\kappa_g^2 = \frac{1}{\varepsilon} (\langle T'', D \rangle - \langle T', N \rangle \langle N', D \rangle). \quad (5.10)$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$E = \frac{T' - \langle T', N \rangle N}{\|T' - \langle T', N \rangle N\|}, \quad D = N \otimes T \otimes E \text{ yerine yazılırsa, } D = \varepsilon^{-1} N \otimes T \otimes T' \text{ olur. Daha}$$

sonra (5.10)'dan 2. sıradaki geodezik eğrilik için

$$\kappa_g^2 = \frac{1}{\varepsilon^2 \|\nabla f\|} \left\{ \begin{bmatrix} x' & y' & z' & w' \\ x'' & y'' & z'' & w'' \\ x''' & y''' & z''' & w''' \\ f_x & f_y & f_z & f_w \end{bmatrix} + \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \beta' H_f(\beta')^t \begin{bmatrix} x' & y' & z' & w' \\ x'' & y'' & z'' & w'' \\ a & b & c & d \\ f_x & f_y & f_z & f_w \end{bmatrix} \right\}, \quad (5.11)$$

elde edilir ki burada $(\nabla f)' = \alpha'^{Hf} = [a \quad b \quad c \quad d], [2]$.

5.1.4. τ_g^2 için ifade

$\tau_g^2 = \langle D', N \rangle = -\langle N', D \rangle = -\left\langle \frac{(\nabla f)'}{\|\nabla f\|} - \frac{1}{\|\nabla f\|^3} \langle \nabla f, (\nabla f)' \rangle \nabla f, D \right\rangle$ olduğundan

$$\tau_g^2 = \frac{-1}{\|\nabla f\|} \langle (\nabla f)', D \rangle = \frac{-1}{\varepsilon \|\nabla f\|^2} \begin{bmatrix} x' & y' & z' & w' \\ x'' & y'' & z'' & w'' \\ a & b & c & d \\ f_x & f_y & f_z & f_w \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

elde edilir[2].

5.2. İkinci Tür Genişletilmiş Darboux Çatı Alanı (Durum 2)

5.2.1. κ_g^2 ve κ_n için ifadeler

$\kappa_n = \langle T', N \rangle$ normal eğriliği (5.7)'deki denklem ile elde edilir.

Diğer yandan, Durum 2'de $\beta'' = \lambda N$ olduğundan (4.2)'den

$$E = \frac{N' - \langle N', T \rangle T}{\|N' - \langle N', T \rangle T\|}$$

elde edilir ve

$$E' = \frac{1}{\|N' - \langle N', T \rangle T\|} (N'' - \langle N'', T \rangle T - \langle N', T' \rangle T - \langle N', T \rangle T') \\ + \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\|N' - \langle N', T \rangle T\|} \right) (N' - \langle N', T \rangle T).$$

Böylece Durum 2'de $\langle T', D \rangle = 0$, $\langle N', D \rangle = 0$ olduğundan

$$\kappa_g^2 = \langle E', D \rangle = \frac{\langle N'', D \rangle}{\|N' - \langle N', T \rangle T\|} = \frac{-\langle N', D' \rangle}{\|N' - \langle N', T \rangle T\|} = \frac{-1}{\mu} \langle N', N \otimes T \otimes N'' \rangle,$$

ki burada

$$\mu = \|N' - \langle N', T \rangle T\|^2 = \langle N', N' \rangle - \langle N', T \rangle^2.$$

dir. Eğer önceki denklemde $N' = \frac{(\nabla f)'}{\|\nabla f\|} - \frac{1}{\|\nabla f\|^3} \langle \nabla f, (\nabla f)' \rangle \nabla f$ yerine yazılırsa,

$$\kappa_g^2 = \frac{-1}{\mu \|\nabla f\|^3} \langle (\nabla f)', \nabla f \otimes T \otimes (\nabla f)'' \rangle$$

ya da

$$\kappa_g^2 = \frac{-1}{\mu \|\nabla f\|^3} \begin{bmatrix} x' & y' & z' & w' \\ f_x & f_y & f_z & f_w \\ a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

ve

$$\mu = \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \left\{ \langle (\nabla f)', (\nabla f)' \rangle - \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \langle \nabla f, (\nabla f)' \rangle^2 - \langle (\nabla f)' T \rangle^2 \right\} = \frac{1}{\|\nabla f\|^2} \left\{ \beta' H_f (\beta' H_f)^t - \frac{1}{\|\nabla f\|^2} (\beta' H_f (\nabla f)^t)^2 - (\beta' H_f (\beta')^t)^2 \right\}, \quad (5.14)$$

ki burada $(\nabla f)' = [a \quad b \quad c \quad d]$, $(\nabla f)'' = \beta'' H_f + \beta' \frac{d(H_f)}{ds} = [p \quad q \quad r \quad s]$ dir[2].

5.2.2. τ_g^1 için ifade

Benzer şekilde 1.sırada geodezik torsiyon için[2]

$$\tau_g^1 = \langle E', N \rangle = \frac{1}{\|N' - \langle N', T \rangle T\|} (\langle N'', N \rangle + \langle T', N \rangle^2) = \{-\langle N', N' \rangle - \langle N', T \rangle^2\}^{\frac{1}{2}}$$

ya da

$$\tau_g^1 = -\frac{1}{\|\nabla f\|} \left\{ \beta' H_f (\beta' H_f)^t - \frac{1}{\|\nabla f\|^2} (\beta' H_f (\nabla f)^t)^2 - (\beta' H_f (\beta')^t)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.15)$$

Örnek 5.1. $M \dots x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2$ hiperküresinde yatan birim hızlı bir eğri düşünelim.

$$\beta(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right) \right)$$

β boyunca M 'nin birim normal vektör alanı $N(s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \beta(s)$ 'dir ve β 'nin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{2}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), \frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right) \right).$$

dir. Eğrilik vektör alanından

$$T'(s) = \beta''(s) = \left(-\frac{1}{5} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{1}{5} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{4}{5} \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{4}{5} \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right) \right)$$

$N(s)$ ile lineer bağımlıdır, Durum 1 geçerlidir. Böylece eğer Durum 1'de verilen metodu uygularsak

$$E(s) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right) \right),$$

$$D(s) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{2}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right), \frac{1}{\sqrt{5}} \cos\left(\frac{2s}{\sqrt{5}}\right) \right).$$

elde edilir. Diğer yandan eğer (5.6),(5.7),(5.9),(5.11) ve(5.12) formülleri kullanılırsa, 1. ve 2. sırada geodezik eğrilikler $\kappa_g^1 = \frac{3}{5\sqrt{2}}$, $\kappa_g^2 = \frac{-4}{5\sqrt{2}}$ olarak elde edilir. 1. ve 2. sırada geodezik torsiyonlar $\tau_g^1(s) = \tau_g^2(s) = 0$ ve β 'nin normal eğriliği $\kappa_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dir. Beklenildiği gibi β, M üzerinde bir eğrilik doğrusudur.



6. $E^{4'}$ DE GENİŞLETİLMİŞ DARBOUX ÇATI ALANINA GÖRE OSKÜLATÖR EĞRİLER

Bu bölüm çalışmamızın orijinal kısmıdır.

$\mathbb{R}^4$ dört boyutlu Öklid uzayı olsun. Yani;

$$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}, s \rightarrow \beta(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma_i(s) e_i(e_4) = +1$$

I aralığında $\mathbb{R}^4$ ’de β düzgün bir eğri olarak tanımlıdır. s parametresi seçili olduğundan tanjant $T = \beta'(s) = \sum_{i=1}^4 \gamma'_i(s) e_i$ birim büyüklüktedir. $\{T, E, D, N\} \mathbb{R}^4$ öklid uzayında diferansiyellenebilir Frenet çatısıdır. Frenet denklemleri[2];

$$\begin{cases} T'(s) = K_g^1 E(s) + K_n N(s) \\ E'(s) = -K_g^1 T(s) + K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s) \\ D'(s) = -K_g^2 E(s) + \tau_g^1 N(s) \\ N'(s) = -K_n T(s) - \tau_g^1 E(s) - \tau_g^2 D(s) \end{cases} \quad (6.1)$$

vektör konumu ile karşılaşırsa $\mathbb{Q}$ ’da keyfi bir β eğrisinin birinci ve ikinci tipden oskülatör eğri olarak tanımlanması aşağıdaki diferansiyel denklemlerle verilmiştir.

$$\beta(s) = a(s)T(s) + b(s)E(s) + c(s)D(s) \quad (6.2)$$

$$\beta(s) = a(s)E(s) + b(s)D(s) + c(s)N(s) \quad (6.3)$$

Burada $a(s), b(s)$ ve $c(s)$ s yay uzunluğu fonksiyonunda diferansiyellenebilir bazı fonksiyonlardır.

Teorem 6.1. β , genişletilmiş Darboux çatı alanına göre Öklid (E^4)’de bir eğri olsun. β ’nın birinci tipden oskülatör eğri ile uyumlu olması için gerek ve yeter şart K_n normal eğrilığının her s için sıfıra eşit olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki β , genişletilmiş Darboux çatı alanına göre Öklid (E^4)’de bir eğri olsun. O zaman (6.2) sağlanır.

$$\beta(s) = a(s)T(s) + b(s)E(s) + c(s)D(s)$$

$$\beta'(s) = a'(s)T(s) + a(s)T'(s) + b'(s)E(s) + b(s)E'(s) + c'(s)D(s) + c(s)D'(s)$$

(6.1) denklemindeki ifadeler $\beta'(s)$ ’de yerine yazılırsa ;

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= a'(s)T(s) + a(s)(K_g^1 E(s) + K_n N(s)) + b'(s)E(s) \\ &\quad + b(s)(-K_g^1 T(s) + K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s)) + c'(s)D(s) \\ &\quad + c(s)(-K_g^2 E(s) + \tau_g^1 N(s)) \end{aligned}$$

olacak şekilde elde edilir. İfade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (a'(s) - b(s)K_g^1)T(s) + (a(s)K_g^1 + b'(s) - c(s)K_g^2)E(s) \\ &\quad + (c'(s) + b(s)K_g^2)D(s) + (a(s)K_n + b(s)\tau_g^1 + c(s)\tau_g^2)N(s) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde buradan $N(s)$ ’nin katsayısı sıfır olup,

$$a(s)K_n + b(s)\tau_g^1 + c(s)\tau_g^2 = 0$$

yazılır. Buradan;

$$K_n + \tau_g^1 + \tau_g^2 = 0$$

elde edilir. Bölüm 4.3.2’den $\tau_g^1 = 0$ ve $\tau_g^2 = 0$ yazılır. O halde;

$$K_n = 0$$

elde edilir. Tersine kabul edelim ki;

$$\tau_g^1 = 0, \tau_g^2 = 0, K_n = 0$$

olsun. (6.1) eşitliğini kullanarak ve N 'nin sabit bir vektör olduğunu göz önüne alarak, $\langle \beta, N \rangle$ 'nin sabit bir fonksiyon olduğu sonucu çıkar. β 'nın yer vektörü

$$\beta = \langle \beta, T \rangle T + \langle \beta, E \rangle E + \langle \beta, D \rangle D + \langle \beta, N \rangle N$$

ve $\langle \beta, N \rangle$ sabit bir vektör olduğu için, β birinci tipden oskulator eğriye denktir.

Teorem 6.2. β , genişletilmiş Darboux çatı alanına göre (E^4) 'de bir birim hızlı eğri olsun. β eğrisinin $K_g^1 = c \cdot R^s$ olmak üzere birinci tipden oskulator eğri olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitliklerin sağlanmasıdır.

$$\beta(s) = \left(s + \int b K_g^1 ds \right) T + b E + \left(- \int b K_g^2 ds \right) = 0$$

ve

$$b \tau_g^1 + \left(- \int b K_g^2 ds \right) \tau_g^2 + \left(s + \int b K_g^1 ds \right) K_n = 0$$

İspat. İspat için (6.1) ve (6.2)'deki ifadeler kullanılarak ve β eğrisi için türev alınarak,

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= a'(s)T(s) + a(s)(K_g^1 E(s) + K_n N(s)) + b'(s)E(s) \\ &\quad + b(s)(-K_g^1 T(s) + K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s)) + c'(s)D(s) \\ &\quad + c(s)(-K_g^2 E(s) + \tau_g^1 N(s)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (a'(s) - b(s)K_g^1)T(s) + (a(s)K_g^1 + b'(s) - c(s)K_g^2)E(s) \\ &\quad + (c'(s) + b(s)K_g^2)D(s) + (a(s)K_n + b(s)\tau_g^1 + c(s)\tau_g^2)N(s) \end{aligned}$$

olacaktır. O halde;

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \ a' - b K_g^1 = 1 \\ ii) \ a K_g^1 + b' - c K_g^2 = 0 \\ iii) \ b K_g^2 + c' = 0 \\ iv) \ b \tau_g^1 + c \tau_g^2 + a K_n = 0 \end{array} \right. \quad (6.4)$$

denklemleri elde edilir. Buradan;

$$a' - b K_g^1 = 1 \Rightarrow a' = 1 + b K_g^1 \Rightarrow a = s + \int b K_g^1 ds$$

$$b K_g^2 + c' = 0 \Rightarrow c' = -b K_g^2 \Rightarrow c = - \int b K_g^2 ds$$

ifadeleri elde edilir. (6.4) denklemindeki ii) kullanılarak

$$aK_g^1 + b' - cK_g^2 = 0 \Rightarrow \left(s + \int bK_g^1 ds\right)K_g^1 + b' - \left(-\int bK_g^2 ds\right)K_g^2 = 0$$

O halde;

$$b' + K_g^1 \left(s + \int bK_g^1 ds\right) + K_g^2 \int bK_g^2 ds = 0$$

elde edilir. Tekrar türev alınırsa;

$$b'' + \frac{dK_g^1}{ds} \left(s + \int bK_g^1 ds\right) + \frac{dK_g^1}{ds} \left(\int bK_g^2 ds\right) + K_g^1(1 + bK_g^1) + K_g^2(bK_g^2) = 0$$

$$b'' + \left\{ \frac{dK_g^1}{ds} \left(s + \int bK_g^1 ds\right) + \frac{dK_g^1}{ds} \left(\int bK_g^2 ds\right) \right\} + b \left((K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right) + K_g^1 = 0$$

$$b'' + \{dK_g^1(1 + bK_g^1) + dK_g^2 bK_g^2\} + b \left((K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right) + K_g^1 = 0$$

$$b'' + b \left\{ (K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2) + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right\} + dK_g^1 + K_g^1 = 0$$

O halde burada

$$b = e^{kt}, b'' = k \cdot e^{2kt} = 0, b_{homojen} = ?$$

$$e^{kt} \left\{ k^2 + \{K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2\} + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right\} = 0$$

Burada;

$$\{K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2\} + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 = \omega$$

olacak şekilde ifade edilirse;

$$k^2 = - \left(\{K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2\} + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right) = \omega i^2 \Rightarrow k_{1,2} = \mp \sqrt{\omega} i$$

$$b_{homojen} = c_1 \cos \sqrt{\omega} s + c_2 \sin \sqrt{\omega} s$$

şeklinde olacaktır.

1.Durum:

$$K_g^1 + dK_g^1 = 0 \Rightarrow \int \frac{dK_g^1}{dK_g^1} = \int 1 \Rightarrow \ln K_g^1 = s + \ln c \Rightarrow K_g^1 = c \cdot e^s$$

$$b'' + b \left\{ (K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2) + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right\} = 0$$

$$b = c_1 \cos \left[(K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2) + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right] s \\ + c_2 \sin \left[(K_g^1 dK_g^1 + K_g^2 dK_g^2) + (K_g^1)^2 + (K_g^2)^2 \right] s$$

$$a = s + \int b K_g^1 \text{vec} = - \int b K_g^2$$

şeklinde elde edilir. O halde;

$$\beta(s) = \left(s + \int bK_g^1 ds\right)T + bE + \left(-\int bK_g^2 ds\right) = 0$$

elde edilir. Ayrıca (6.4) denklemindeki iv) kullanılarak a, b, c değerleri yerine yazılırsa;

$$b\tau_g^1 + \left(-\int bK_g^2 ds\right)\tau_g^2 + \left(s + \int bK_g^1 ds\right)K_n = 0$$

ifadesi elde edilir.

$\beta, \mathbb{R}^4$ 'de ikinci tipden oskülatör birim hızlı bir eğri olsun, Her s için $K_n \neq 0$ dır. Eğriliğin sıfır ya da sıfırdan farklı olmasıyla ilgili iki durum elde edilir.

Durum 1. $K_g^i = 0$ ve (6.3) denklemi diferansiyellenerek ve (6.1) denklemleri hesaba katılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta(s) = a(s)E(s) + b(s)D(s) + c(s)N(s)$$

$$\beta'(s) = a'(s)E(s) + a(s)E'(s) + b'(s)D(s) + b(s)D'(s) + c'(s)N(s) + c(s)N'(s)$$

denkleminde (6.1) ifadeleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= a'(s)E(s) + a(s)\left(-K_g^1T(s) + K_g^2D(s) + \tau_g^1N(s)\right) + b'(s)D(s) \\ &\quad + b(s)\left(-K_g^2E(s) + \tau_g^1N(s)\right) + c'(s)N(s) \\ &\quad + c(s)\left(-K_nT(s) - \tau_g^1E(s) - \tau_g^2D(s)\right)\end{aligned}$$

o halde ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= (-a(s)K_g^1 - c(s)K_n)T(s) + (a'(s) - b(s)K_g^2 - c(s)\tau_g^1)E(s) \\ &\quad + (a(s)K_g^2 + b'(s) - c(s)\tau_g^2)D(s) + (a(s)\tau_g^1 + b(s)\tau_g^2 + c'(s))N(s)\end{aligned}$$

yazılır.

$K_g^i = 0$ kabul edildiğinden ifade tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= (-c(s)K_n)T(s) + (a'(s) - c(s)\tau_g^1)E(s) + (b'(s) - c(s)\tau_g^2)D(s) \\ &\quad + (a(s)\tau_g^1 + b(s)\tau_g^2 + c'(s))N(s)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani;

$$\begin{cases} -c(s)K_n = 1, \\ a'(s) = c(s)\tau_g^1, \\ b'(s) = c(s)\tau_g^2, \\ c'(s) = -a(s)\tau_g^1 - b(s)\tau_g^2, \end{cases} \quad (6.5)$$

olur. Burada

$$a = \langle \beta, E \rangle, b = \langle \beta, D \rangle, c = \langle \beta, N \rangle$$

eğrinin konum vektörünün bileşenleridir, yani sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü asli normal olarak adlandırılır.

(6.5)'in 4. denkleminde

$$c'(s) = -a(s)\tau_g^1 - b(s)\tau_g^2$$

dır, yani $\tau_g^1 = 0$ ve $\tau_g^2 = 0$ kabul edildiğinden

$$c'(s) = 0$$

olur. Yani bunun anlamı

$$c(s) = 0 \text{ veya } c(s) = sbt \in \mathbb{R}$$

dır. Eğer $c(s) = 0$ ise (6.5)'in birinci denklemi ile çelişir. Bu yüzden $c(s) = sbt \neq 0$ dır. Yani bunun anlamı K_n 'de sabittir.

Durum 2. $K_g^i \neq 0$ ve (6.3) diferansiyellenerek ve (6.1) denklemleri hesaba katılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta(s) = a(s)E(s) + b(s)D(s) + c(s)N(s)$$

$$\beta'(s) = a'(s)E(s) + a(s)E'(s) + b'(s)D(s) + b(s)D'(s) + c'(s)N(s) + c(s)N'(s)$$

denkleminde (6.1) ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\begin{aligned} \beta'(s) = & (-a(s)K_g^1 - c(s)K_n)T(s) + (a'(s) - b(s)K_g^2 - c(s)\tau_g^1)E(s) \\ & + (a(s)K_g^2 + b'(s) - c(s)\tau_g^2)D(s) + (a(s)\tau_g^1 + b(s)\tau_g^2 + c'(s))N(s) \end{aligned}$$

olur. $K_g^i \neq 0$ kabul edildiğinden;

$$\begin{cases} -a(s)K_g^1 - c(s)K_n = 1 \\ a'(s) = b(s)K_g^2 + c(s)\tau_g^1 \\ a(s)K_g^2 + b'(s) - c(s)\tau_g^2 = 0 \\ a(s)\tau_g^1 + b(s)\tau_g^2 + c'(s) = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

elde edilir. Burada dördüncü denklem kullanılarak ve $\tau_g^1 = 0$ ve $\tau_g^2 = 0$ kabul edildiğinden,

$$c'(s) = 0$$

elde edilir. Yani $c(s) = 0$ veya $c(s) = sbt \in \mathbb{R}$ olacaktır. O halde (6.6)'nın birinci denklemi ile

$$c(s) = -\left(\frac{1 + a(s)K_g^1}{K_n}\right)$$

yazılır.

Benzer şekilde Teorem 6.1' deki ifadeler aşağıdaki çatıya göre tekrar ifade edilebilir.

$$\begin{cases} T'(s) = K_n N(s) \\ E'(s) = K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s) \\ D'(s) = -K_g^2 E(s) \\ N'(s) = -K_n T(s) - \tau_g^1 E(s) \end{cases} \quad (6.7)$$

Teorem 6.3. β , genişletilmiş Darboux çatı alanına göre Öklid (E^4) de bir eğri olsun. β 'nın birinci tipden oskülatör eğri ile uyumlu olması için gerek ve yeter şart K_n normal eğriliğinin her s için sıfıra eşit olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki β , genişletilmiş Darboux çatı alanına göre Öklid (E^4) de bir eğri olsun. O zaman (6.2) sağlanır.

$$\beta(s) = a(s)T(s) + b(s)E(s) + c(s)D(s)$$

$$\beta'(s) = a'(s)T(s) + a(s)T'(s) + b'(s)E(s) + b(s)E'(s) + c'(s)D(s) + c(s)D'(s)$$

(6.7) denklemindeki ifadeler $\beta'(s)$ 'de yerine yazılırsa ;

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= a'(s)T(s) + a(s)(K_n N(s)) + b'(s)E(s) + b(s) \left(K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s) \right) + c'(s)D(s) \\ &\quad + c(s) \left(-K_g^2 E(s) \right)\end{aligned}$$

olacak şekilde elde edilir. İfade düzenlenirse

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= (a'(s))T(s) + (b'(s) - c(s)K_g^2)E(s) + (c'(s) + b(s)K_g^2)D(s) \\ &\quad + (a(s)K_n + b(s)\tau_g^1)N(s)\end{aligned}$$

elde edilir. O halde buradan $N(s)$ 'nin katsayısı sıfır olup,

$$a(s)K_n + b(s)\tau_g^1 = 0$$

yazılır. Buradan;

$$K_n + \tau_g^1 = 0$$

elde edilir. Bölüm 4.3.2' den $\tau_g^1 = 0$ yazılır. O halde;

$$K_n = 0$$

elde edilir. Tersine kabul edelim ki;

$$\tau_g^1 = 0, K_n = 0$$

olsun. (6.7) eşitliğini kullanarak ve N 'nin sabit bir vektör olduğunu göz önüne alarak, $\langle \beta, N \rangle$ 'nin sabit bir fonksiyon olduğu sonucu çıkar. β 'nin yer vektörü

$$\beta = \langle \beta, T \rangle T + \langle \beta, E \rangle E + \langle \beta, D \rangle D + \langle \beta, N \rangle N$$

ve $\langle \beta, N \rangle$ sabit bir vektör olduğu için, β birinci tipden oskülatör eğriye denktir.

$\beta, \mathbb{R}^4$ 'de ikinci tipden oskülatör birim hızlı bir eğri olsun, her s için $K_n \neq 0$ dır. Eğriliğin sıfır ya da sıfırdan farklı olmasıyla ilgili iki durum elde edilir.

Durum 1. $K_g^i = 0$ ve (6.3) denklemini diferansiyellenerek ve (6.6) denklemleri hesaba katılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta(s) = a(s)E(s) + b(s)D(s) + c(s)N(s)$$

$$\beta'(s) = a'(s)E(s) + a(s)E'(s) + b'(s)D(s) + b(s)D'(s) + c'(s)N(s) + c(s)N'(s)$$

denkleminde (6.7) ifadeleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}\beta'(s) &= a'(s)E(s) + a(s) \left(K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s) \right) + b'(s)D(s) + b(s) \left(-K_g^2 E(s) \right) + c'(s)N(s) \\ &\quad + c(s) \left(-K_n T(s) - \tau_g^1 E(s) \right)\end{aligned}$$

o halde ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}\beta'(s) = & (-c(s)K_n)T(s) + (a'(s) - b(s)K_g^2 - c(s)\tau_g^1)E(s) + (a(s)K_g^2 + b'(s))D(s) \\ & + (a(s)\tau_g^1 - c'(s))N(s)\end{aligned}$$

yazılır.

$K_g^i = 0$ kabul edildiğinden ifade tekrar düzenlenirse

$$\beta'(s) = (-c(s)K_n)T(s) + (a'(s) - c(s)\tau_g^1)E(s) + (b'(s))D(s) + (a(s)\tau_g^1 - c'(s))N(s)$$

elde edilir. Yani;

$$\begin{cases} -c(s)K_n = 1, \\ a'(s) = c(s)\tau_g^1, \\ b'(s) = 0, \\ c'(s) = a(s)\tau_g^1, \end{cases} \quad (6.8)$$

olur. Burada

$$a = \langle \beta, E \rangle, b = \langle \beta, D \rangle, c = \langle \beta, N \rangle$$

eğrinin konum vektörünün bileşenleridir, yani sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü asıl normal olarak adlandırılır.

(6.8)'in 4. denkleminde

$$c'(s) = a(s)\tau_g^1$$

olarak yani $\tau_g^1 = 0$ kabul edildiğinden

$$c'(s) = 0$$

olur. Yani bunun anlamı

$$c(s) = 0 \text{ veya } c(s) = sbt \in \mathbb{R}$$

dır. Eğer $c(s) = 0$ ise (6.8)'in birinci denklemi ile çelişir. Bu yüzden $c(s) = sbt \neq 0$ dır. Yani bunun anlamı K_n 'de sabittir.

Durum 2. $K_g^i \neq 0$ ve (6.3) diferansiyellenerek ve (6.7) denklemleri hesaba katılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\beta(s) = a(s)E(s) + b(s)D(s) + c(s)N(s)$$

$$\beta'(s) = a'(s)E(s) + a(s)E'(s) + b'(s)D(s) + b(s)D'(s) + c'(s)N(s) + c(s)N'(s)$$

denkleminde (6.7) ifadeleri yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\begin{aligned}\beta'(s) = & a'(s)E(s) + a(s)(K_g^2 D(s) + \tau_g^1 N(s)) + b'(s)D(s) + b(s)(-K_g^2 E(s)) + c'(s)N(s) \\ & + c(s)(-K_n T(s) - \tau_g^1 E(s))\end{aligned}$$

olur. $K_g^i \neq 0$ kabul edildiğinden;

$$\begin{cases} -c(s)K_n = 1, \\ a'(s) = b(s)K_g^2 + c(s)\tau_g^1, \\ a(s)K_g^2 + b'(s) = 0, \\ c'(s) + a(s)\tau_g^1 = 0, \end{cases} \quad (6.9)$$

elde edilir. Burada dördüncü denklem kullanılarak ve $\tau_g^1 = 0$ kabul edildiğinden,

$$c'(s) = 0$$

elde edilir. Yani $c(s) = 0$ veya $c(s) = sbt \in \mathbb{R}$ olacaktır. $c = 0$ olması (6.9)'un birinci denklemi ile çeliştiği için

$$c(s) = sbt$$

yazılır. (6.9)'un birinci denklemi ile K_n de sabit olarak ifade edilir.



7. MATERYAL VE METOT

Bu çalışmada temel olarak, Düldül M., Düldül B.U., Kuruoğlu N., Özdamar E., Extension of the Darboux Frame Into Euclidean 4- Space and its Invariants [2] numaralı makale incelenmiştir ve Yılmaz M.Y., Kulahci M., The Classifications of Quaternionic Osculating Curves in $\mathbb{Q}^4$ [12]

numaralı makaledeki metot kullanılarak E^4 'de genişletilmiş Darboux çatı alanına göre oskulator eğriler ifade ve ispat edilmiştir.



8. SONUÇ

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında Darboux çatı alanı E^4 'e genişletilmiştir. Gram-Schmidt ortonormalleştirme metodu kullanılarak, yönlendirilmiş bir hiperyüzey üzerinde yatan bir Frenet eğrisi boyunca genişletilmiş Darboux çatı alanı ifade edilmiştir. Yeni çatı alanının yeni

değimezlerinin bazı geometrik yorumları elde edilmiştir. Hiperyüzeye göre yeni değişmezler ile E^4 'e göre eğrilikler arasındaki ilişkiler verilmiştir. Son olarak, E^4 'de genişletilmiş Darboux çatı alanına göre birinci ve ikinci tipden oskülatör eğriler incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Alessio, O., (2009). Differential Geometry Of Intersection Curves In $\mathbb{R}^4$ Of Three Implicit Surfaces, *Comput Aided Geom Desing*, 26: 455-471
- [2] Dldl, M., Dldl, B.U., Kuruoğlu, N., zdamar, E., (2017). Extension Of The Darboux Frame Into Euclidean Four- Space And Its Invariants, *Turkish Journal Of Mathematics*, cilt 41, ss 1628-1639.
- [3] Düldül, M., (2010). On The İntersection Curve Of Three Parametric Hypersurfaces, *Comput Aided Geom Desing*, 27: 118-127.
- [4] Gluck H., (1966). Higher Curvatures Of Curves İn Euclidean Space, *Amer Math Monthly*, 73: 699-704.
- [5] Hacısalihođlu, H. Hilmi, (1998). Diferansiyel Geometri 1. Cilt, Ankara niersitesi, Fen Fakültesi,Ankara.
- [6] Hacısalihođlu, H. Hilmi, (1994). Diferansiyel Geometri 2. Cilt, Ankara niersitesi, Fen Fakültesi,Ankara.
- [7] Hacısalihođlu, H. Hilmi, (2003). Diferansiyel Geometri 3. Cilt, Ankara niersitesi, Fen Fakültesi,Ankara.
- [8] Hollasch SR., (1991). Four- Space Visualization Of 4D Objects, Masters Thesis, Arizona State University, Phoenix, AZ, USA.
- [9] O’Neill B., (1966). Elementary Differential Geometry, USA:Academic Press,Burlington, MA.
- [10] Sabuncuođlu, A., (2010). Nobel YayınDağıtım, Ankara.
- [11] Williams MZ., Stein FM., (1964). A Triple Product Of Vectors İn Four- Space, *Math Mag*, 37: 230-235.
- [12] Yılmaz, M.Y., Kulahci, M., (2017). The Classifications of Quaternionic Osculating Curves in $\mathbb{Q}^4$, *Georgian Math. J*, 25(1), 149–154

ÖZGEÇMİŞ

[Redacted]

KİŞİSEL BİLGİLER

ARAŞTIRMACI BİLGİLERİ

[Redacted]
[Redacted]

EĞİTİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans : ''Darboux Çatı Alanı ve Uygulamaları''
Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2021
Danışman: Prof. Dr. Mıhrıban ALYAMAÇ KÜLAHCI

Lisans : Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2014

Lise : Elazığ Gazi Lisesi, Elazığ, 2009

ARAŞTIRMA DENEYİMİ

Bildiğim bilgisayar programlama dilleri C-C++, MAPPLE, Scientific Workplace.

İŞ DENEYİMİ

2017 – 2018 : Akçakiraz Ortaokulu