



T.C.
NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**BANACH UZAYLARINDA (p, r) –YAKLAŞIM
ÖZELLİĞİNİN KARAKTERİZASYONLARI**

Fatma ÖZCERAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

**Haziran-2021
KONYA
Her Hakkı Saklıdır**

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BANACH UZAYLARINDA (p, r) –YAKLAŞIM ÖZELLİĞİNİN KARAKTERİZASYONLARI

Fatma ÖZCERAN

Necmettin Erbakan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN

2021, 51 Sayfa

Jüri

Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN

Doç. Dr. Sedat PAK

Doç. Dr. Faik GÜRSOY

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konu ile ilgili literatür özeti ve tezin amacı verilmiştir. İkinci bölümde, çalışma için gerekli olan temel kavramlar, tanımlar ve teoremler ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, Banach uzaylarının literatürde mevcut olan bazı yaklaşım özellikleri verilerek aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Aynı zamanda bu bölümde, p –kompakt kümeler üzerine yapılan ve literatürde mevcut olan bazı sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde, p –kompakt kümeler için üçüncü bölümde verilen sonuçlar, (p, r) –kompakt kümeler için ele alınmıştır. Beşinci bölümde çalışmada ifade edilen sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Çarpanlara ayırma, p –kompakt küme, p –yaklaşım özelliği, (p, r) –kompakt küme, (p, r) –yaklaşım özelliği, Yaklaşım özelliği.

ABSTRACT

MS THESIS

THE CHARACTERIZATIONS OF THE (p, r) –APPROXIMATION PROPERTY IN BANACH SPACES

Fatma ÖZCERAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
NECMETTİN ERBAKAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS**

Advisor: Asst. Prof. Dr. Ayşegül KETEN

2021, 51 Pages

Jury

Asst. Prof. Dr. Ayşegül KETEN

Assoc. Prof. Dr. Sedat PAK

Assoc. Prof. Dr. Faik GÜRSOY

This study consists of five chapters. In the first chapter, a summary of the literature related to the subject and the purpose of the thesis are given. In the second chapter, the basic concepts, definitions and theorems required for the study are expressed. In the third chapter, some approximation properties of Banach spaces that exist in the literature are given and the relationships between them are examined. Also in this chapter, some results existing in the literature that are based on p –compact sets are given. In the fourth chapter, the results given for p –compact sets in the third chapter are considered for (p, r) –compact sets. In the fifth chapter, the results and proposals expressed in the study are included.

Keywords: Factorization, p –compact set, p –approximation property, (p, r) –compact set, (p, r) –approximation property, Approximation property.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın vücut bulabilmesi süresince bana yol gösteren, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle benim için adeta bir kuzey yıldızı görevi gören danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ayşegül KETEN hocama sabrından verdiği emeklerden desteklerinden ve özverisinden dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Eğer bu uzun soluklu yolculuğu sonuna kadar sürdürebildiysem hepsi onun sayesinde. Ayrıca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme de sonsuz teşekkür ederim.

Fatma ÖZCERAN
KONYA-2021



İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
1.1. Literatür Özeti	1
1.2. Tezin Amacı	3
2. ÖN BİLGİLER	4
2.1. Temel Kavramlar ve Ön Hazırlıklar	4
3. YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN BAZI VERSİYONLARI VE BU VERSİYONLARIN BAZI SONUÇLARI	23
3.1. Bazı Yaklaşım Özellikleri ve Aralarındaki İlişkiler	23
3.2. p –Kompakt Kümeler İçin Literatürdeki Bazı Sonuçlar	26
4. (p, r) –YAKLAŞIM ÖZELLİĞİNİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI.....	30
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	46
KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	51

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$\ x\ $	x vektörünün normu
I_X	X vektör uzayı üzerindeki birim operatör
X/M	X vektör uzayının M alt uzayı ile oluşan bölüm uzayı
$\overline{M}^\tau$	M kümesinin τ topolojisine göre kapanışı
c_0	Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı
c	Yakınsak dizilerin uzayı
l_p	p –toplanabilen dizilerin uzayı
l_∞	Sınırlı dizilerin uzayı
l_p^w	Zayıf p –toplanabilen dizilerin uzayı
S'	S operatörünün adjointi (duali)
$\mathcal{L}(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanan bütün lineer operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{B}(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanan bütün sınırlı lineer operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{K}(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanan bütün lineer kompakt operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{F}(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanan bütün lineer sonlu ranklı operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{K}_p(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanan bütün lineer p –kompakt operatörlerin vektör uzayı
$\mathcal{K}_{(p,r)}(X, Y)$	X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlanan bütün lineer (p, r) –kompakt operatörlerin vektör uzayı
$X \otimes Y$	X ve Y uzaylarının tensör çarpımı
$X \otimes_\pi Y$	X ve Y uzaylarının projektif (norma sahip) tensör çarpımı
$X \widehat{\otimes}_\pi Y$	X ve Y uzaylarının projektif tensör çarpımının tamlaması
$X \otimes_\varepsilon Y$	X ve Y uzaylarının injektif (norma sahip) tensör çarpımı
$X \widehat{\otimes}_\varepsilon Y$	X ve Y uzaylarının injektif tensör çarpımının tamlaması
$\mathcal{P}$	Yarı-normlar (seminormlar) ailesi
τ_c	Kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan topoloji

τ_p	p –kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan topoloji
$\tau_{(p,r)}$	(p, r) –kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan topoloji
$\text{con}A$	A kümesinin konveks zarfı
$\overline{\text{con}A}$	A kümesinin kapalı konveks zarfı
$\text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$	$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin konveks zarfı
$\overline{\text{abco}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}}$	$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin kapalı mutlak konveks zarfı
$p - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$	$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p –konveks zarfı
$(p, r) - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$	$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin (p, r) –konveks zarfı

Kısaltmalar

ap	Yaklaşım özelliği
$p - \text{ap}$	p –yaklaşım özelliği
$G - p - \text{ap}$	Grothendieck p –yaklaşım özelliği
$(p, r) - \text{ap}$	(p, r) –yaklaşım özelliği

1. GİRİŞ

1.1. Literatür Özeti

Grothendieck 1955 yılında bir Banach uzayının relatif kompakt alt kümesini, Banach uzayında sıfıra yakınsayan bir dizinin kapalı konveks zarfında içerilen küme olarak karakterize etmiştir. Bu sonuç literatürde Grothendieck'in kompaktlık kriteri olarak bilinmektedir.

Grothendieck'in kompaktlık kriterindeki sıfıra yakınsayan dizi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere p –toplanabilen dizi ile değiştirilirse relatif kompaktlığın daha güçlü bir formu elde edilir. Kompaktlığın bu formu 1980 lerde Reinov (1984) ve Bourgain ve Reinov (1985) tarafından $s \leq 1$ 'inci dereceden yaklaşım özelliklerini çalışırken düşünülmüştür.

Sinha ve Karn 2002 de, relatif kompaktlığın yukarıda bahsedilen formları arasında kalan, relatif kompaktlığın bir diğer formunu tanımlayıp bu kavram üzerinde çalışmışlardır. Sinha ve Karn (2002), Banach uzayında p –toplanabilen bir dizinin, p –konveks zarfı olarak adlandırılan kümede içerilen bir kümeyi relatif p –kompakt küme olarak tanımlamışlardır.

Ain ve ark. 2012 yılında yukarıda bahsedilen kompaktlık formlarını kapsayan kompaktlığın diğer bir formu; relatif (p, r) –kompakt küme kavramını tanımlamışlardır. $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun (burada p^*, p nin konjugesidir). Banach uzayının bir alt kümesi, Banach uzayında p –toplanabilen bir dizinin (p, r) –konveks zarfı olarak adlandırılan küme içinde kalıyorsa kümeye relatif (p, r) –kompakttır denir ($p = \infty$ ise p –toplanabilen dizinin yerine Banach uzayında sıfıra yakınsayan dizi alınır). Burada belirtelim ki, eğer $p = \infty$ ise relatif (p, r) –kompakt küme relatif kompakt küme ile, $r = 1$ ise relatif (p, r) –kompakt küme Bourgain ve Reinov tarafından düşünülen relatif p –kompakt küme ile, $r = p^*$ ise relatif (p, r) –kompakt küme relatif p –kompakt küme ile çakışmaktadır (Ain ve ark., 2012). Dolayısıyla (p, r) –kompakt küme kavramı yukarıda verilen relatif kompakt küme kavramlarını içermektedir.

Sınırlı kümeleri relatif kompakt kümelere dönüştüren lineer bir operatöre kompakt operatör denir. Bu tanımda, relatif kompakt kümeler, relatif p –kompakt kümelerle değiştirilerek p –kompakt operatör kavramı verilmiştir (Sinha ve Karn,

2002). Doğal bir şekilde sınırlı kümeleri, relatif (p, r) –kompakt kümelere dönüştüren lineer operatör (p, r) –kompakt operatör olarak tanımlanmıştır (Ain ve ark., 2012). (p, r) –kompakt kümeler ve (p, r) –kompakt operatörler üzerine yapılan diğer çalışmalar olarak Ain ve Oja (2012), Ain ve Oja (2015) tarafından yapılan çalışmalardan bahsedilebilir.

Banach uzayları teorisinin önemli özelliklerinden biri olan yaklaşım özelliği sistematik olarak Grothendieck (1955) tarafından çalışılmıştır. Belirtelim ki, eğer bir Banach uzayı üzerindeki birim operatöre, sonlu ranklı operatörler ile kompakt kümeler üzerinden yaklaşılabiliyorsa, Banach uzayı yaklaşım özelliğine sahiptir denir (Grothendieck, 1955).

Grothendieck (1955) yaklaşım özelliğinin çeşitli karakterizasyonlarını elde etmiş, yaklaşım özelliğinin bazı versiyonlarını tanımlayarak aralarındaki ilişkileri incelemiştir (bkz. Lindenstrauss ve Tzafriri, 1977). Grothendieck'in bu çalışmalarından sonra yaklaşım özelliği ve bu özelliğin bazı versiyonları üzerine pek çok çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; Davie (1973), Enflo (1973), Godefroy ve Saphar (1989), Lima (1993), Kim ve Lee (2016) vb. tarafından yapılan birçok çalışmadan bahsetmek mümkündür.

Yaklaşım özelliğinin tanımındaki kompakt kümeler Bourgain ve Reinov tarafından düşünülen relatif p –kompakt kümeler (Grothendieck p –kompakt kümeler) ile değiştirilerek $G - p$ –yaklaşım özelliği kavramı tanımlanmış ve bu kavram üzerinde çalışmalar yapılmıştır (bkz. Kim, 2013). Kim (2013) tarafından yapılan çalışma örnek olarak verilebilir.

Sinha ve Karn (2002), yaklaşım özelliğinin tanımındaki kompakt kümeleri p –kompakt kümelerle değiştirerek p –yaklaşım özelliği kavramını tanımlamışlardır. Sinha ve Karn'ın tanımladığı p –kompakt küme, p –kompakt operatör ve p –yaklaşım özelliği kavramları büyük ilgi görmüş ve pek çok bilim insanı tarafından çalışılmıştır. Sinha ve Karn (2008), Delgado ve ark. (2009), Choi ve Kim (2010), Galicier ve ark. (2012), Oja (2012), Lassalle ve Turco (2012), Kim (2013), Muñoz ve Piñeiro (2019), Kim (2020a) vb. tarafından yapılan çalışmalardan bahsedebilir.

Bahsedilen yaklaşım özelliklerinin daha genel hali olarak düşünülebilecek; (Banach) operatör ideallerine göre yaklaşım özellikleri de son zamanlarda pek çok bilim insanı tarafından çalışılmaktadır. Berrios ve Botelho (2012), Delgado ve Piñeiro (2013), Lassalle ve Turco (2013), Chen ve Li (2017), Kim (2019), Kim (2020b) vb. tarafından yapılan çalışmalar bunlara örneklerdir.

1.2. Tezin Amacı

Delgado ve ark. (2009), p –yaklaşım özelliğinin bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir. Choi ve Kim (2010), $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)'$ dual uzayındaki bir fonksiyonelin temsilini elde etmiş, p –kompakt operatörleri çarpanlara ayırmış ve p –yaklaşım özelliğinin bazı karakterizasyonlarını elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasında yukarıda bahsedilen çalışmalar (p, r) –kompakt kümeler için ele alınmıştır. Bahsedilen çalışmalarda yapılan ispatlar takip edilerek; $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p, r)})'$ dual uzayındaki bir fonksiyonelin temsili ifade edilmiş, (p, r) –kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışı incelenmiş ve (p, r) –yaklaşım özelliğinin bazı karakterizasyonları ifade edilmiştir. Burada belirtelim ki (p, r) –yaklaşım özelliği üzerine bu çalışmada ifade edilen karakterizasyonların bazılarının daha genel hali, operatör idealleri vasıtasıyla Delgado ve Piñeiro (2013)'nin ve Chen ve Lie (2017)'nin elde ettiği sonuçlarda da içermektedir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar ve Ön Hazırlıklar

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel tanımları ve kavramları vereceğiz. Çalışma boyunca aksi belirtilmediği sürece $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ (reel sayılar) veya $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar) cisimlerinden herhangi birini gösterecektir. X boştan farklı bir küme ve $M \subset X$ olmak üzere, X üzerindeki herhangi bir τ topolojisi için $\overline{M}^\tau$ notasyonu M nin X de τ kapanışını belirtecektir. Eğer τ norm topolojisi ise, M nin norm topolojiye göre kapanışını $\overline{M}$ notasyonu ile göstereceğiz. B_X° ve B_X notasyonları sırasıyla, bir X normlu uzayının açık ve kapalı birim yuvarlarını, S_X ise X normlu uzayının birim küresini gösterecektir. $p \geq 1$ olmak üzere c_0 , c , l_p ve l_∞ notasyonları sırasıyla $\mathbb{F}$ cisim uzayında sıfıra yakınsayan, yakınsak, p –toplanabilen ve sınırlı dizilerin (normlu) uzayını gösterecektir. Çalışma boyunca kullanacağımız vektör uzayları daima aynı $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanan vektör uzayları olacaktır.

Tanım 2.1 (Metrik Uzay) X boştan farklı bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

- a) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- b) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri özelliği),
- c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği özelliği)

şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik (X, d) ikilisine de metrik uzay denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.2 (Yarı-Norm ve Norm) X bir vektör uzayı olsun. Bir $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

- a) $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$,
- b) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

şartlarını sağlarsa p ye X üzerinde bir yarı-norm (X, p) ikilisine de yarı-normlu uzay denir. Eğer bir p yarı-norm fonksiyonunda, $p(x) = 0$ olması $x = 0$ olmasını gerektiriyorsa p fonksiyonuna norm denir (bkz. Megginson, 1998).

p yarı-normu norm belirttiğinde norm fonksiyonu $\|\cdot\|$ notasyonu ile gösterilecektir.

Üzerinde norm tanımlanan bir X vektör uzayına normlu uzay denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.3 (Metrik Uzayda Cauchy Dizisi ve Yakınsak Dizi) (X, d) bir metrik uzay $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sayısı her $n, m > n_{\varepsilon}$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine X de bir Cauchy dizisidir denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\exists n_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sayısı her $n > n_{\varepsilon}$ iken $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde varsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi X uzayında x noktasına yakınsaktır denir ve $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ile gösterilir (bkz. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.4 (Tam Metrik Uzay) Bir (X, d) metrik uzayından alınan her Cauchy dizisi X de yakınsak oluyorsa X uzayına tam metrik uzaydır denir (bkz. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.5 (Banach Uzayı) Bir X normlu uzayı, normdan indirgenen metrik ile yani $d(x, y) := \|x - y\|$ metriğine göre tam ise Banach uzayı olarak adlandırılır (bkz. Kreyszig, 1978).

Tanım 2.6 (Lineer Dönüşüm) X ve Y (aynı cisim üzerinde) vektör uzayları olsunlar. Bir $S: X \rightarrow Y$ dönüşümü her $\alpha \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için

$$S(x + y) = S(x) + S(y) \text{ ve } S(\alpha x) = \alpha S(x)$$

şartlarını sağlıyorsa veya buna denk olarak her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için

$$S(\alpha x + \beta y) = \alpha S(x) + \beta S(y)$$

şartını sağlıyorsa S ye $(X$ den Y ye) lineer bir dönüşümdür (veya lineer bir operatördür) denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.7 (Sınırlı Lineer Dönüşüm) X ve Y normlu uzaylar ve $S: X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|S(x)\| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde pozitif bir K skaleri varsa S lineer dönüşümü sınırlıdır denir (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.1 (bkz. Mustafa, 2008) $S: l_\infty \rightarrow l_\infty$ dönüşümü her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l_\infty$ için

$$S(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. S dönüşümünün lineer ve sınırlı dönüşüm olduğunu gösterelim.

Çözüm $l_\infty = \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{F}: \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ şeklinde olduğunu biliyoruz. Her $x, y \in l_\infty$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{aligned} S(\alpha x + \beta y) &= \left(\alpha x_1 + \beta y_1, \frac{\alpha x_2 + \beta y_2}{2}, \dots, \frac{\alpha x_n + \beta y_n}{n}, \dots \right) \\ &= \left(\alpha x_1, \frac{\alpha x_2}{2}, \dots, \frac{\alpha x_n}{n}, \dots \right) + \left(\beta y_1, \frac{\beta y_2}{2}, \dots, \frac{\beta y_n}{n}, \dots \right) \\ &= \alpha S(x) + \beta S(y) \end{aligned}$$

olduğundan S dönüşümü lineer bir dönüşümdür. Aynı zamanda

$$\|S(x)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{x_n}{n} \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = \|(x_n)_{n=1}^\infty\| = \|x\|$$

olup S dönüşümü sınırlıdır.

Aşağıdaki teorem lineer bir dönüşüm için süreklilik ve sınırlılık kavramlarının birbirlerinin yerine kullanılabileceğini gösterir.

Teorem 2.1 X ve Y normlu uzaylar $S: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Bu taktirde S süreklidir ancak ve ancak S sınırlıdır (bkz. Megginson, 1998).

X ve Y normlu uzaylar olsunlar. X uzayından Y uzayına tanımlanan bütün lineer dönüşümlerin kümesini $\mathcal{L}(X, Y)$ ile gösterelim. $\mathcal{L}(X, Y)$ kümesi dönüşümlerin toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında bir vektör uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

$\mathcal{B}(X, Y)$ ile X uzayından Y uzayına tanımlanan bütün lineer sınırlı dönüşümlerin kümesini gösterelim. Kolayca görüleceği üzere $\mathcal{B}(X, Y)$, $\mathcal{L}(X, Y)$ nin bir alt vektör uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Teorem 2.2 (Operatör Normu) X ve Y normlu uzaylar ve $\|\cdot\|: \mathcal{B}(X, Y) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\|S\| := \sup_{x \in B_X} \|S(x)\|$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu taktirde $\|\cdot\|$ fonksiyonu $\mathcal{B}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Bu şekilde tanımlanan norma S dönüşümünün normu (operatör normu) denir (bkz. Megginson, 1998).

Teorem 2.3 Eğer X normlu bir uzay ve Y bir Banach uzayı ise $\mathcal{B}(X, Y)$ uzayı Teorem 2.2 de verilen norm ile bir Banach uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.2 Boştan farklı bir S kümesi üzerinde tanımlı $\mathbb{F}$ –değerli sınırlı fonksiyonların tamamının uzayı $l_\infty(S)$, $\|x_n\|_\infty = \sup_{s \in S} |x_n(s)|$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu örnekte özel olarak $S = \mathbb{N}$ aldığımızda $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$ sınırlı diziler uzayının aynı zamanda bir Banach uzayı olduğunu görürüz (bkz. Soykan, 2012).

Tanım 2.8 (Rank, Çekirdek ve Sonlu Ranklı Lineer Dönüşüm) (bkz. Soykan, 2012) X, Y vektör uzayları ve $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun.

- a) $\text{Im } S = S(X)$ uzayı S dönüşümünün görüntü kümesidir, S dönüşümünün rankı ise $r(S) := \dim S(X)$ sayısıdır (Burada $\dim S(X)$, $S(X)$ vektör uzayının boyutunu belirtmektedir).
- b) S dönüşümünün çekirdeği $\ker S := \{x \in X : S(x) = 0\}$ şeklinde tanımlanır ve $\ker S$, X uzayının bir alt uzayıdır. Bu uzay S dönüşümünün sıfır uzayı olarak da bilinir.
- c) $r(S)$ sonlu ise S sonlu ranka sahiptir denir, yani, sonlu ranka sahip lineer bir dönüşüm, görüntü kümesi sonlu boyutlu olan lineer bir dönüşümdür. $r(S) = \infty$ ise S sonsuz ranka sahiptir denir.

X ve Y normlu uzaylar olsunlar. X den Y ye tanımlanan bütün lineer sonlu ranklı dönüşümlerin kümesini $\mathcal{F}(X, Y)$ ile gösterelim. $\mathcal{F}(X, Y)$, $\mathcal{L}(X, Y)$ nin bir alt vektör uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.9 (Dual Uzay) X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun. $\mathcal{B}(X, \mathbb{F})$ uzayına X nin (topolojik) dual uzayı denir ve X' ile gösterilir, X' nin elemanlarına ise lineer fonksiyoneller adı verilir (bkz. Megginson, 1998).

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.3 ün direkt bir sonucu olup normlu bir uzayın dual uzayının daima bir Banach uzayı olduğunu gösterir.

Sonuç 2.1 Eğer X normlu bir uzay ise X' dual uzayı daima bir Banach uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.3 c_0 uzayının duali l_1 , $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere l_p uzayının duali l_q ve l_1 uzayının duali l_∞ dur (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.10 (İkinci veya Bidual Uzay) Bir X normlu uzayı için X'' uzayına X in ikinci duali (bidual) denir (bkz. Megginson, 1998).

Lemma 2.1 X, Y Banach uzayları ve $T: X \rightarrow Y$, k ranklı lineer bir operatör olsun. $u_1, u_2, \dots, u_k$, T nin görüntüsü kümesinin bir bazı ise, T operatörü $T = \sum_{i=1}^k x'_i \otimes u_i$ şeklinde bir tek temsile sahiptir, burada $x'_1, x'_2, \dots, x'_k$, X' da lineer bağımsız fonksiyonellerdir (bkz. Soykan, 2012).

Teorem 2.4 (Bir Operatörün Adjointi veya Duali) X ve Y normlu uzaylar ve $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. Her $y' \in Y', x \in X$ için

$$\langle S'y', x \rangle = \langle y', Sx \rangle$$

olacak şekilde bir tek $S' \in \mathcal{B}(Y', X')$ dönüşümü vardır. Buradaki S' dönüşümüne S nin adjointi veya duali denir (bkz. Megginson, 1998).

Teorem 2.5 X ve Y normlu uzaylar ve $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. Bu taktirde $\|S\| = \|S'\|$ dir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.11 (İzomorfizm ve İzometri) X ve Y normlu uzaylar ve $S: X \rightarrow Y$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer S dönüşümü birebir sürekli ve S nin tersi S^{-1} (S dönüşümünün görüntü kümesi üzerinde) sürekli ise S ye bir izomorfizm denir. $S: X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü her $x \in X$ için

$$\|S(x)\| = \|x\|$$

eşitliğini sağlarsa S ye izometrik izomorfizm veya lineer izometri denir. Eğer X den Y içine bir izomorfizm varsa X uzayı Y ye gömülmüştür, eğer X den Y içine bir izometrik izomorfizm varsa X uzayı Y ye izometrik olarak gömülmüştür denir. X den Y ye örten bir izomorfizm varsa X ve Y uzayları izomorftur denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir. X den Y ye örten bir izometrik izomorfizm varsa da X ve Y uzayları izometrik olarak izomorftur denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.12 (Kanonik Tasvir) Bir X normlu uzayı üzerinde $Q_X: X \rightarrow X''$

$$\langle Q_X x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle, \text{ her } x \in X \text{ ve } x' \in X'$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme kanonik tasvir (kanonik gömme) denir (bkz. Megginson, 1998).

Teorem 2.6 X normlu bir uzay olsun. Bu taktirde $Q_X: X \rightarrow X''$ dönüşümü izometrik izomorfizm olup böylece X , X'' nin bir alt uzayına izometrik olarak izomorftur (bkz. Megginson, 1998).

Önerme 2.1 X ve Y normlu uzaylar ve $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. Q_X ve Q_Y , sırasıyla X ve Y uzayları üzerindeki kanonik tasvirler olmak üzere $T'' Q_X(X) \subset Q_Y(Y)$ ve $Q_Y^{-1} T'' Q_X = T$ dir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.13 (Refleksif Uzay) X normlu bir uzay olsun. Eğer $Q_X(X) = X''$ ise, yani, Q_X örten ise X refleksifdir (yansımali) denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.14 (Kompakt Operatör) X ve Y Banach uzayları ve $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun. Eğer S , X in bütün sınırlı alt kümelerini Y nin relatif kompakt kümelerine dönüştürüyorsa, yani, X nin her sınırlı B alt kümesi için $\overline{S(B)} \subset Y$ de kompakt ise, S lineer operatörüne kompakttır denir (bkz. Megginson, 1998).

Aşağıdaki teorem kompaktlığın denk tanımı olarak alınabilecek durumları göstermektedir.

Teorem 2.7 (bkz. Megginson, 1998) X ve Y Banach uzayları ve $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

a) S operatörü kompaktır.

b) $S(B_X)$, Y nin relatif kompakt alt kümesidir, yani, $\overline{S(B_X)} \subset Y$ de kompaktır.

c) X içindeki her sınırlı $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, dizisi $(Sx_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ dizisi Y de yakınsak olacak şekilde bir $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ alt dizisine sahiptir.

X ve Y normlu uzaylar olsunlar. X den Y ye tanımlanan bütün lineer kompakt dönüşümlerin kümesini $\mathcal{K}(X, Y)$ ile göstereceğiz.

Aşağıdaki teorem her lineer kompakt dönüşümün sınırlı olduğunu gösterir.

Teorem 2.8 X ve Y Banach uzayları ve $S \in \mathcal{K}(X, Y)$ ise S sınırlıdır (sürekli). Böylece $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y)$ dir (bkz. Megginson, 1998).

Şimdi kompakt dönüşümlerin bazı cebirsel özelliklerini verelim.

Teorem 2.9 (bkz. Megginson, 1998) X, Y ve Z Banach uzayları olsunlar.

a) Eğer $S, T \in \mathcal{K}(X, Y)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ise $\alpha S + \beta T \in \mathcal{K}(X, Y)$ dir. Bu nedenle $\mathcal{K}(X, Y)$, $\mathcal{B}(X, Y)$ nin bir alt vektör uzayıdır.

b) $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ ve $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ olsun. Eğer S veya T dönüşümlerinden en az biri kompakt ise $TS \in \mathcal{K}(X, Z)$ dir.

Önerme 2.2 (bkz. Kreyszig, 1978) X ve Y normlu uzaylar $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ olsun.

a) Eğer S sınırlı ve sonlu ranka sahip ise (yani, $\dim S(X) < \infty$ ise) S kompaktır.

b) Eğer X sonlu boyutlu ise (yani, $\dim X < \infty$ ise) S kompaktır.

X ve Y Banach uzayları için yukarıda verilen bilgiler vasıtasıyla aşağıdaki kapsam yazılabilir (bkz. Kreyszig, 1978 ve bkz. Megginson, 1998),

$$\mathcal{F}(X, Y) \subset \mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{B}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y).$$

Örnek 2.4 X sonsuz boyutlu normlu bir uzay ise X üzerindeki birim dönüşüm I_X kompakt değildir (bkz. Kreyszig, 1978).

Aşağıdaki teorem kompakt dönüşümler uzayı $\mathcal{K}(X, Y)$ nin operatör (dönüşüm) normu ile tam olduğunu göstermektedir.

Teorem 2.10 X ve Y Banach uzayları olsunlar. Bu taktirde $\mathcal{K}(X, Y)$ uzayı $\mathcal{B}(X, Y)$ nin kapalı bir alt uzayıdır. Dolayısıyla $\mathcal{K}(X, Y)$ uzayı operatör normu ile bir Banach uzayıdır (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.5 (bkz. Kreyszig, 1978, s. 409) $S: l_2 \rightarrow l_2$ dönüşümü $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$ için

$$S(x) := \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, \dots \right)$$

şeklinde tanımlansın. S dönüşümünün lineer ve kompakt olduğunu gösterelim.

Çözüm S dönüşümünün lineerliğini görmek kolay olup kompakt olduğunu gösterelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$S_n: l_2 \rightarrow l_2, S_n(x) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, 0, \dots \right)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Açık olarak her $n \in \mathbb{N}$ için S_n ler lineer ve sınırlıdır. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $S_n(l_2)$ sonlu ranklı olduğundan $(S_n)_n$ kompakt dönüşümlerin bir dizisidir.

$$\begin{aligned} \|(S - S_n)(x)\|^2 &= \left\| \left(0, 0, \dots, 0, \frac{x_{n+1}}{n+1}, \frac{x_{n+2}}{n+2}, \dots \right) \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \|x\|^2 \end{aligned}$$

olup son eşitsizliğin $\|x\| \leq 1$ üzerinden supremumu alınırsa

$$\|S - S_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

olacaktır. Böylece $n \rightarrow \infty$ için $S_n \xrightarrow{n} S$ olup $(S_n)_n$ dizisi kompakt olduğundan S de kompaktır.

Teorem 2.11 (Schauder Teoremi) Banach uzayları arasında tanımlanan sınırlı lineer bir operatörün kompakt olması için gerek ve yeter şart operatörün adjointinin kompakt olmasıdır (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.15 (Konveks, Dengeli ve Mutlak Konveks Küme) X bir vektör uzayı ve A, X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ ve $\lambda + \mu = 1$ iken, her $x, y \in A$ için $\lambda x + \mu y \in A$ oluyorsa A ya konveks kümedir denir. Eğer $|\lambda| \leq 1$ iken, her $x \in A$ için $\lambda x \in A$ oluyorsa A ya dengeli kümedir denir. Konveks ve dengeli bir kümeye de mutlak konveks küme denir (bkz. Robertson, 1964).

Tanım 2.16 (Konveks Zarf) A bir X vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$$

kümesi A kümesini içeren en küçük konveks küme olup bu küme A nın konveks zarfı olarak adlandırılır ve $\text{co}(A)$ ile gösterilir (bkz. Robertson, 1964).

Tanım 2.17 (Mutlak Konveks Zarf) A bir X vektör uzayının boştan farklı bir alt kümesi olsun.

$$\{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \leq 1\}$$

kümesi A kümesini içeren en küçük mutlak konveks küme olup bu küme A nın mutlak konveks zarfı olarak adlandırılır ve $\text{abco}(A)$ ile gösterilir (bkz. Robertson, 1964).

X vektör uzayı bir topolojiye sahip olduğunda $\overline{\text{abco}}(A)$ notasyonu ile A nın kapalı mutlak konveks zarfını, yani, A kümesini içeren en küçük kapalı mutlak konveks kümeyi belirteceğiz.

Tanım 2.18 (Ayrılabilir Uzay) X normlu bir uzay olsun. Eğer $\overline{M} = X$ olacak şekilde X uzayının sayılabilir bir M alt kümesi varsa X ayrılabilir uzaydır denir (bkz. Kreyszig, 1978).

Örnek 2.6 $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ ayrılabilir, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere l_p ve c_0 uzayı ayrılabilir (bkz. Kreyszig, 1978 ve bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.19 (Schauder Tabanı) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bir X Banach uzayında bir dizi olsun. Eğer X uzayındaki her x vektörü için $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ olacak şekilde skalerlerin bir tek $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi varsa $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisine X uzayının bir Schauder tabanıdır denir (bkz. Megginson, 1998).

Örnek 2.7 $1 \leq p < \infty$ olmak üzere l_p , c_0 ve c uzayları Schauder tabanına sahiptir (bkz. Megginson, 1998 ve bkz. Soykan, 2012).

Önerme 2.3 Schauder bazına sahip her Banach uzayı sonsuz boyutludur ve ayrılabilir (bkz. Megginson, 1998).

l_∞ uzayı ayrılabilir olmadığından (bkz. Megginson, 1998) yukarıda önerme gereğince l_∞ uzayı Schauder tabanına sahip olamaz (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.20 (Yönlü Küme) (bkz. Megginson, 1998 ve bkz. Wilde, 2003) I boştan farklı bir küme olsun. Bu küme üzerinde $\preceq$ bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlarsa $\preceq$ bağıntısına I kümesini yönlendiriyor, I kümesine de $\preceq$ bağıntısı ile yönlü küme denir ve $(I, \preceq)$ şeklinde gösterilir.

- a) Her $\lambda \in I$ için, $\lambda \preceq \lambda$,
- b) Her $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in I$ için, $\lambda_1 \preceq \lambda_2$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$ ise $\lambda_1 \preceq \lambda_3$,
- c) Her $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ için en az bir $\lambda_3 \in I$ vardır öyle ki $\lambda_1 \preceq \lambda_3$ ve $\lambda_2 \preceq \lambda_3$.

Örnek 2.8 $\leq$ bağıntısı (doğal sıralama) ile $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi tam sıralıdır ve aynı zamanda yönlendirilmiş kümelerdir (bkz. Wilde, 2003).

Tanım 2.21 (Ağ) Herhangi bir X kümesi ve bir $(I, \preceq)$ yönlendirilmiş kümesi verilsin. $f: I \rightarrow X$ fonksiyonu her $\lambda \in I$ için $f(\lambda) = x_\lambda$ ile tanımlansın. f fonksiyonuna ya da $\{x_\lambda: \lambda \in I\}$ alt kümesine X kümesi içinde bir ağ denir ve $(x_\lambda)_{\lambda \in I} \subset X$ ya da (x_λ) biçiminde gösterilir (bkz. Wilde, 2003).

Örnek 2.9 X kümesi içinde bir (x_λ) ağ ve bir $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $(f(x_\lambda))$ kümesi de Y kümesi içinde bir ağdır (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.22 (Bölüm Uzayı) M bir X vektör uzayının alt uzayı olsun. $X/M := \{[x] = x + M: x \in X\}$ kümesi ($x \in X$ in denklik sınıflarının kümesi) her $x, y \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$$(x + M) + (y + M) = (x + y) + M \text{ ve } \alpha(x + M) = (\alpha x) + M$$

şeklinde tanımlanan işlemlerle bir vektör uzayı olup X/M uzayına M alt uzayına göre X in bölüm uzayı denir (bkz. Megginson, 1998).

Teorem 2.12 M bir X normlu uzayının kapalı alt uzayı ise X/M bölüm uzayı

$$\|x + M\| := \inf_{m \in M} \|x + m\|$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon ile bir normlu uzaydır (bkz. Megginson, 1998).

Teorem 2.13 X normlu bir uzay ve M , X in kapalı bir alt uzayı olsun. Bu taktirde her $x \in X$ için $\|x + M\| \leq \|x\|$ dir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.23 (Bölüm Dönüşümü) X normlu bir uzay ve M , X in kapalı bir alt uzayı olsun. $\varphi: X \rightarrow X/M$

$$\varphi(x) = [x] = x + M, \text{ her } x \in X$$

şeklinde tanımlanan (örten) dönüşüme bölüm dönüşümü denir (bkz. Megginson, 1998).

Tanım 2.24 (Topolojik Vektör Uzayı) (bkz. Wilde, 2003) X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı ve τ da X üzerinde bir topoloji olsun.

a) $X \times X$ üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olmak üzere $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \rightarrow x + y$ ve,

b) $\mathbb{F}$ üzerindeki topoloji alışılmış topoloji ve $\mathbb{F} \times X$ üzerindeki topoloji çarpım topolojisi olmak üzere $\mathbb{F} \times X \rightarrow X$, $(t, x) \rightarrow tx$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlar sürekli ise τ ya X üzerinde vektör topolojisi, (X, τ) ikilisine de topolojik vektör uzayı denir.

Tanım 2.25 (Lokal Konveks Topolojik Vektör Uzayı) Bir topolojik vektör uzayında 0 'ın konveks kümelerden oluşan bir komşuluk tabanı varsa topolojik vektör uzayına lokal konveks topolojik vektör uzayıdır denir (bkz. Wilde, 2003).

Teorem 2.14 (Yarı-Normlar Ailesi ile Üretilen Topoloji) X bir vektör uzayı, $\mathcal{P} = \{p_\alpha: \alpha \in I\}$, X uzayı üzerinde yarı-normlardan oluşan bir aile olsun. $x_0 \in X$, $r > 0$ ve $p_1, p_2, \dots, p_n, \mathcal{P}$ deki yarı-normların sonlu bir koleksiyonu olmak üzere

$$V(x_0, p_1, p_2, \dots, p_n; r) = \{x \in X: p_i(x - x_0) < r, 1 \leq i \leq n\}$$

şeklinde tanımlansın. Her $x \in X$ için N_x , $V(x, p_1, p_2, \dots, p_n; r)$ ($n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ ve $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathcal{P}$) formundaki X in bütün alt kümelerinin koleksiyonunu belirtsin.

$$\mathcal{T} := \{G \subset X: \forall x \in G \text{ için } x \in U \subset G \text{ olacak şekilde } U \in N_x \text{ vardır}\} \cup \{\emptyset\}$$

olmak üzere $\mathcal{T}$, X uzayı üzerinde vektör topolojisidir, yani $(X, \mathcal{T})$ bir topolojik vektör uzayıdır, ayrıca her $p \in \mathcal{P}$ süreklidir (bkz. Wilde, 2003).

Tanım 2.26 Yukarıdaki formda verilen X vektör uzayı üzerindeki $\mathcal{T}$ topolojisine $\mathcal{P}$ yarı normlar ailesi ile üretilen topoloji denir (bkz. Wilde, 2003).

Yarı normlar ailesi ile üretilen bir topolojik vektör uzayı daima yerel konveks topolojik vektör uzayıdır (bkz. Wilde, 2003).

Tanım 2.27 (Kompakt Kümeler Üzerinde Düzgün Yakınsayan Topoloji) (bkz. Choi ve Kim, 2008, s. 1691-1692) X ve Y Banach uzayları olsunlar. X in kompakt bir K alt kümesi $\varepsilon > 0$ ve $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için

$$\mathcal{N}(T; K, \varepsilon) = \left\{ R \in \mathcal{B}(X, Y): \sup_{x \in K} \|Rx - Tx\| < \varepsilon \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu şekildeki tüm $\mathcal{N}(T; K, \varepsilon)$ kümelerinin koleksiyonu $\mathcal{B}(X, Y)$ uzayı üzerinde bir topolojik alt baz oluşturur. τ_c bu alt bazla üretilen topoloji olsun. Bu topoloji $\mathcal{B}(X, Y)$ uzayı üzerinde X in kompakt kümeleri üzerinde düzgün yakınsayan topoloji olarak adlandırılır. Belirtelim ki τ_c topolojisi lokal konveks topolojidir.

Aslında bu topoloji $P_K(T) = \sup_{x \in K} \|T(x)\|$ şeklindeki yarı-normlar ailesi tarafından üretilen topolojidir. Burada K , X in kompakt kümeleri üzerinden alınır (bkz. Lindenstrauss ve Tzafriri, 1977, Önerme 1.e.3 ve bkz. Ryan, 2002, s.75).

Tanım 2.27 den $\mathcal{B}(X, Y)$ deki bir $(T_\alpha)_\alpha$ ağı ve bir T dönüşümü için

$T_\alpha \xrightarrow{\tau_c} T$ ancak ve ancak X nin her bir K kompakt alt kümesi için $\sup_{x \in K} \|T_\alpha x - Tx\| \rightarrow 0$ dır (bkz. Choi ve Kim, 2008, 1691).

Tanım 2.27 deki kompakt K kümeleri, p –kompakt kümeler ile değiştirilirse p –kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan τ_p topolojisinin tanımı elde edilir (Sinha ve Karn, 2002, bkz. Choi ve Kim, 2010).

$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(X, Y)$ ve $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $T \in \overline{\mathcal{A}}^{\tau_p}$ dir ancak ve ancak X in her p –kompakt K alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için bir $S \in \mathcal{A}$ vardır öyle ki $\sup_{x \in K} \|Sx - Tx\| \leq \varepsilon$ dur (bkz. Choi ve Kim, 2010). Böylece kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan τ_c topolojisi, her $1 \leq p < \infty$ için τ_p topolojisinden daha güçlüdür. Ayrıca $1 \leq p < q < \infty$ için τ_q topolojisi de τ_p topolojisinden daha güçlüdür (Sinha ve Karn, 2002 ve bkz. Choi ve Kim, 2010).

Tanım 2.28 (Cauchy Ağı ve Tamlık) $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$, bir X topolojik vektör uzayında bir ağ olsun. Eğer 0 vektörünün her U açık komşuluğu için $\lambda_U \leq \lambda$ ve $\lambda_U \leq \beta$ iken $x_\lambda - x_\beta \in U$ olacak şekilde bir $\lambda_U \in I$ varsa $(x_\lambda)_{\lambda \in I}$ ağı X de bir Cauchy ağıdır denir. Eğer her Cauchy ağı X de yakınsak ise X uzayına tam uzaydır denir (bkz. Megginson, 1998, s. 170).

X bir Banach uzayı olsun. $c_0(X)$ ile X Banach uzayında sıfıra yakınsayan dizilerin uzayını, $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $l_p(X)$ ile X uzayında p –toplanabilen dizilerin uzayını, $l_\infty(X)$ ile X uzayındaki sınırlı dizilerin uzayını göstereceğiz. Belirtelim ki $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|$ fonksiyonu $c_0(X)$ ve $l_\infty(X)$ uzayları üzerinde bir norm belirtir. $\|(x_n)_n\|_p := (\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^p)^{1/p}$ fonksiyonu ise $l_p(X)$ uzayı üzerinde bir norm belirtir ve bu uzaylar üzerlerindeki bu normlar ile birlikte birer Banach uzaylarıdır (bkz. Sinha ve Karn, 2002).

$1 \leq p \leq \infty$ olsun. p^* notasyonu çalışma boyunca p nin konjugesini yani, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ eşitliğini sağlayan p^* sayısını gösterecektir.

Grothendieck 1955 de Banach uzayının kompakt bir alt kümesini sıfıra yakınsayan diziler vasıtasıyla aşağıdaki şekilde karakterize etmiştir.

Teorem 2.15 (Grothendieck’in Karakterizasyonu) X bir Banach uzayı ve K, X in bir alt kümesi olsun. K nin relatif kompakt olması için gerek ve yeter şart

$$K \subset \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_1}\} = \overline{\text{abco}}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$$

olacak şekilde bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(X)$ dizisinin mevcut olmasıdır (Grothendieck, 1955).

1980 lerde relatif kompaktlığın kuvvetli bir versiyonu verilmiştir. Relatif kompaktlığın tanımında $c_0(X)$ uzayı, sabit bir $p \geq 1$ için, $l_p(X)$ uzayı ile değiştirilirse relatif kompaktlığın kuvvetli bir formu elde edilir (Reinov, 1984 ve Bourgain ve Reinov 1985). Relatif kompaktlığın bu formu Reinov (1984), Bourgain ve Reinov (1985) tarafından $s \leq 1$ mertebeli yaklaşım özelliklerinin çalışılmasında kullanılmıştır. Relatif kompaktlığın bu formu relatif Grothendieck- p -kompakt küme (kısaca, $G - p$ -kompakt) olarak adlandırılacaktır. Şimdi bu tanımı verelim.

Tanım 2.29 (Relatif $G - p$ -Kompakt Küme) $1 \leq p \leq \infty$ ve K bir X Banach uzayının alt kümesi olsun. Eğer

$$K \subset \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_1}\}$$

olacak şekilde bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ (eğer $p = \infty$ ise $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(X)$ olarak alınır) dizisi varsa K ya relatif Grothendieck p -kompakt (kısaca, $G - p$ -kompakt) küme denir (bkz. Kim, 2013).

Özel olarak, eğer K kümesi norm topolojiye göre kapalı ise, relatif $G - p$ -kompakt bir küme, $G - p$ -kompakt küme olarak adlandırılacaktır. Kompakt bir küme kesinlikle $G - \infty$ -kompattır ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ için $G - p$ -kompakt küme $G - q$ -kompakt kümedir (bkz. Kim, 2013).

2002 de Sinha ve Karn kompakt kümenin daha güçlü bir versiyonu ($G - p$ -kompakt kümenin ise daha zayıf bir versiyonu) olarak p -kompakt küme kavramını tanımlamışlardır.

Tanım 2.30 (Relatif p -Kompakt Küme) $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere X bir Banach uzayı ve K, X in bir alt kümesi olsun. Eğer

$$K \subset p - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*}} \right\}$$

olacak şekilde bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ (eğer $p = \infty$ ise $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(X)$ olarak alınır) dizisi varsa K ya X in relatif p –kompakt alt kümesidir denir (Sinha ve Karn, 2002). Burada $p - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin p –konveks zarfı olarak adlandırılmaktadır.

$1 \leq p \leq \infty$ ve X bir Banach uzayı olmak üzere bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ dizisinin $p - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ zarfı; kapalı ve konveks bir kümedir (bkz. Choi ve Kim, 2010).

$G - \infty$ –kompakt bir küme kesinlikle ∞ –kompakt kümedir ve $1 \leq p \leq \infty$ için her $G - p$ –kompakt küme p –kompakt kümedir (bkz. Kim, 2013). ∞ –kompakt kümeler kesinlikle kompakt kümelerdir ve $1 \leq p < q \leq \infty$ için p –kompakt kümeler q –kompakt kümelerdir, q –kompakt bir kümenin ise p –kompakt bir küme olması gerekmez (Sinha ve Karn, 2002).

Her relatif kompakt kümenin relatif p –kompakt küme olmadığı Aron ve ark. (2010) tarafından aşağıdaki örnekle gösterilmiştir.

Örnek 2.10 $1 < p < \infty$ ve $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0 \setminus l_p$ olsun. $T: l_p \rightarrow l_p$ dönüşümü

$$T((x_n)_{n=1}^{\infty}) = (a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu taktirde

$$K := \{T(e_n): n \in \mathbb{N}\} = \{a_n e_n: n \in \mathbb{N}\}$$

kümesi l_p nin relatif p –kompakt olmayan, relatif kompakt bir alt kümesidir (Aron ve ark., 2010).

Pineiro ve Delgado (2011, Önerme 3.5) de $2 \leq p < q$ olmak üzere her relatif q –kompakt kümenin relatif p –kompakt küme olduğu sonsuz boyutlu hiçbir Banach uzayının mevcut olmadığını göstermişlerdir.

2012 de Ain ve ark. yukarıda bahsedilen kompakt kümeler arasında kalan (p, r) –kompakt küme kavramını tanımlamışlardır. Şimdi bu kavramı verelim.

Tanım 2.31 (Relatif (p, r) –Kompakt Küme) $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olmak üzere X bir Banach uzayı ve K, X in bir alt kümesi olsun. Eğer

$$K \subset (p, r) - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}\}$$

($r = \infty$ ise $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{c_0}$) olacak şekilde bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ (eğer $p = \infty$ ise $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(X)$ olarak alınır) dizisi varsa K ya X in relatif (p, r) –kompakt alt kümesidir denir (Ain ve ark., 2012). Burada $(p, r) - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisinin (p, r) –konveks zarfı olarak adlandırılmaktadır.

$1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ ve X bir Banach uzayı olmak üzere bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ dizisinin $(p, r) - \text{con}\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ zarfı; relatif (p, r) –kompakt, kapalı ve mutlak konveks bir kümedir (bkz. Ain ve Oja, 2012, Teorem 3’ün ispatı).

$(p, 1)$ –kompaktlık kavramı $G - p$ –kompaktlık kavramı ile, (p, p^*) –kompaktlık kavramı p –kompaktlık kavramı ile, relatif $(\infty, 1)$ –kompaktlık kavramı Grothendieck’in kriterine göre kompaktlık kavramı ile çakışır (Ain ve ark., 2012).

Yukarıda verilen bilgilere göre; normlu bir uzayın kapalı bir K alt kümesi

$G - p$ –kompakt $\Rightarrow (p, r)$ –kompakt $\Rightarrow p$ –kompakt $\Rightarrow$ kompakt olacaktır.

Tanım 2.32 (p –Kompakt Operatör) $1 \leq p \leq \infty$, X ve Y Banach uzayları $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. Eğer $T(B_X)$, Y nin relatif p –kompakt bir alt kümesi ise T ye p –kompakt operatördür denir (Sinha ve Karn, 2002).

Tanım 2.33 ((p, r) –Kompakt Operatör) $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$, X ve Y Banach uzayları ve $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. Eğer $T(B_X)$, Y nin relatif (p, r) –kompakt bir alt kümesi ise T ye (p, r) –kompakt operatördür denir (Ain ve ark., 2012).

Relatif p –kompakt (veya (p, r) –kompakt) ve kapalı bir küme p –kompakt (veya (p, r) –kompakt) küme olarak adlandırılacaktır.

X ve Y Banach uzayları olsunlar. X uzayından Y uzayına tanımlanan bütün p –kompakt ve (p, r) –kompakt dönüşümlerin kümesini sırasıyla, $\mathcal{K}_p(X, Y)$ ve $\mathcal{K}_{(p, r)}(X, Y)$ ile gösterelim. Bu kümelerin her ikisi de $\mathcal{K}(X, Y)$ uzayının alt vektör uzaylarıdır (Sinha ve Karn, 2002, Ain ve ark., 2012).

Önerme 2.4 $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 \leq r \leq p^*$ ve $1 \leq s \leq q^*$ olmak üzere $s \leq r$ ve

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{s} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

iken her (p, r) –kompakt operatör aynı zamanda (q, s) –kompakt operatördür (Ain ve ark., 2012, Sonuç 3.3).

Tanım 2.34 $1 < p < \infty$ olsun. Bir X Banach uzayında zayıf p –toplanabilen dizilerin uzayı $l_p^w(X)$

$$l_p^w(X) = \{(x_n)_n \subset X: \text{her } x' \in X' \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p < \infty\}$$

şeklinde tanımlanır. $l_p^w(X)$ uzayı

$$\|(x_n)_n\|_p^w = \sup_{x' \in B_{X'}} (\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|^p)^{1/p} = \sup_{\alpha \in B_{l_{p^*}}} \|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır (bkz. Ryan, 2002, s. 134 ve bkz. Diestel ve ark., 2008, s. 16).

Tanım 2.35 $\check{l}_p^w(X) = \{(x_n)_n \subset l_p^w(X): \|(0, 0, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots)\|_p^w \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0\}$ uzayı $l_p^w(X)$ in bir (kapalı) alt uzayı olup bu uzay $\|, \|_p^w$ normu ile bir Banach uzayıdır (Fourie ve Swart, 1979, bkz. Choi ve Kim, 2010, bkz. Ain ve Oja, 2015).

Tanım 2.36 (Tensör Çarpımı) (bkz. Ryan, 2002) X ve Y vektör uzaylarının tensör çarpımı $X \otimes Y$, bilineer dönüşümlerin uzayı $B(X \times Y)$ uzayı üzerindeki lineer fonksiyonellerin bir alt uzayı olarak aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$x \in X$, $y \in Y$ için $x \otimes y$ notasyonu ile $B(X \times Y)$ üzerinde tanımlanan bir fonksiyoneli belirteceğiz. Diğer bir deyişle, her $A \in B(X \times Y)$ için

$$(x \otimes y)(A) = \langle A, x \otimes y \rangle = A(x, y)$$

dir. $X \otimes Y$ tensör çarpımı bu şekildeki elemanlarla üretilen $B(X \times Y)^\#$ cebirsel dualinin bir alt uzayıdır.

$X \otimes Y$ vektör uzayı üzerinde π fonksiyonu

$$\pi(u) = \inf\{\sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\|: u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i\}$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki önerme gerçekleşir.

Önerme 2.5 X ve Y Banach uzayları olsun. Bu taktirde π , $X \otimes Y$ üzerinde bir normdur ve her $x \in X, y \in Y$ için $\pi(x \otimes y) = \|x\| \|y\|$ dir (bkz. Ryan, 2002, Önerme 2.1).

$X \otimes Y$ uzayı üzerinde yukarıdaki şekilde tanımlanan π fonksiyonu projektif norm olarak adlandırılmaktadır (bkz. Ryan, 2002).

Projektif norma sahip $X \otimes Y$ uzayı $X \otimes_{\pi} Y$ ile gösterilecektir. X ve Y Banach uzayları sonlu boyutlu olmadıkça $X \otimes_{\pi} Y$ uzayı tam değildir. $X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$ ile bu uzayın tamlamasını göstereceğiz (bkz. Ryan, 2002, s. 17).

$X \widehat{\otimes}_{\pi} Y$ uzayı üzerindeki projektif norm

$$\pi(u) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| : \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \|y_i\| < \infty, u = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \otimes y_i\}$$

şeklindedir (bkz. Ryan, 2002, s. 21).

Tanım 2.37 (İnjektif Norm) X ve Y Banach uzayları ve $u \in X \otimes Y$ olsun. u nun injektif normu $\varepsilon(u)$ notasyonu ile gösterilmek üzere

$$\varepsilon(u) = \sup\{|\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \psi(y_i)| : \varphi \in B_{X'}, \psi \in B_{Y'}\}$$

şeklindedir. Burada $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, u nun herhangi bir temsilidir (bkz. Ryan, 2002, s.45).

İnjektif norma sahip $X \otimes Y$ uzayı $X \otimes_{\varepsilon} Y$ notasyonu ile bu uzayın tamlaması ise $X \widehat{\otimes}_{\varepsilon} Y$ notasyonu ile gösterilecektir.

Önerme 2.6 $1 < p < \infty$ ve X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde $\check{l}_p^w(X)$ ve $l_p \widehat{\otimes}_{\varepsilon} X$ uzayları izometrik olarak izomorftur, yani $\check{l}_p^w(X) = l_p \widehat{\otimes}_{\varepsilon} X$ dir (bkz. Diestel ve ark., 2008, Sonuç 1.1.12).

Teorem 2.16 $1 < p < \infty$ ve X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde $l_p \widehat{\otimes}_{\pi} X \subset l_p(X) \subset l_p \widehat{\otimes}_{\varepsilon} X$ dir (bkz. Diestel ve ark., 2008, Teorem 1.1.20).

Teorem 2.17 $1 < p < \infty$ ve X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde $(l_p \widehat{\otimes}_\varepsilon X)'$ ve $l_{p^*} \widehat{\otimes}_\pi X$ uzayları izometrik olarak izomorftur, yani $(l_p \widehat{\otimes}_\varepsilon X)' = l_{p^*} \widehat{\otimes}_\pi X$ dir (bkz. Ryan, 2002, Teorem 5.33).

Tanım 2.38 (Operatör İdeal) (bkz. Pietsch, 2007, 2.6.6.1) Banach uzayları arasında tanımlanan bütün sınırlı lineer operatörlerin sınıfı $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{U}$, $\mathcal{L}$ nin bir alt sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{U}$ sınıfı aşağıdaki şartları sağlıyorsa bir operatör idealdir denir.

- a) Her X ve Y Banach uzayı için $\mathcal{U}(X, Y) = \mathcal{U} \cap \mathcal{L}(X, Y)$ sınıfı $\mathcal{L}(X, Y)$ nin bir alt uzayıdır.
- b) $\mathcal{U}$ sınıfı bütün bir ranklı operatörleri içerir.
- c) X, Y, Z ve W Banach uzayları olmak üzere $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $T \in \mathcal{U}(Y, Z)$, $B \in \mathcal{L}(Z, W)$ iken $BTA \in \mathcal{U}(X, W)$ dir.

Örnek 2.11 Keyfi Banach uzayları arasında tanımlanan; bütün sonlu ranklı operatörlerin sınıfı $\mathcal{F}$, yaklaşılabılır operatörlerin sınıfı $\bar{\mathcal{F}}$, kompakt operatörlerin sınıfı $\mathcal{K}$ (bkz. Pietsch, 2007, 2.6.6.2), p –kompakt operatörlerin sınıfı $\mathcal{K}_p$ (Sinha ve Karn, 2002, Teorem 4.2), (p, r) –kompakt operatörlerin sınıfı $\mathcal{K}_{(p,r)}$ (Ain ve ark. 2012, Önerme 2.1) operatör ideallerine birer örnektirler.

Tanım 2.39 ($\mathcal{A}$ –Kompakt Küme ve $\mathcal{A}$ –Kompakt Operatör) (bkz. Delgado ve Pineiro, 2013) $\mathcal{A}$ bir operatör ideal, X bir Banach uzayı ve A, X in bir alt kümesi olsun. Eğer bir Z Banach uzayı, bir $T \in \mathcal{A}(Z, X)$ operatörü ve Z nin kompakt bir K alt kümesi $A \subset T(K)$ olacak şekilde varsa A ya $\mathcal{A}$ -kompakt kümedir denir. X ve Y Banach uzayları olmak üzere bir $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ operatörü için $T(B_X)$, Y de $\mathcal{A}$ –kompakt ise T ye $\mathcal{A}$ –kompakt operatördür denir.

Örnek 2.12 Kompakt kümeler $\bar{\mathcal{F}}$ veya $\mathcal{K}$ –kompakt kümelerdir ve p –kompakt kümeler $\mathcal{K}_p$ –kompakt kümelerdir (bkz. Lassalle ve Turco, 2013, s. 2455).

Örnek 2.13 $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun. Relatif (p, r) –kompakt kümeler ile $\mathcal{K}_{(p,r)}$ –kompakt kümeler aynıdır (Ain ve Oja, 2015, Önerme 2.4).

3. YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN BAZI VERSİYONLARI VE BU VERSİYONLARIN BAZI SONUÇLARI

Bu bölümde ilk olarak yaklaşım özelliklerinin literatürde mevcut olan bazı versiyonları verilerek aralarındaki ilişkiler belirtilecektir. Daha sonra p –kompakt kümeler üzerine dayanan ve literatürde mevcut olan bazı sonuçlar verilecektir.

3.1. Bazı Yaklaşım Özellikleri ve Aralarındaki İlişkiler

Yaklaşım özelliği kavramı Banach uzayları teorisinin önemli kavramlarından biri olup, sistematik olarak ilk defa Grothendieck (1955) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.1 (Yaklaşım Özelliği) X bir Banach uzayı olsun. Eğer X in her K kompakt alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|Tx - x\| < \varepsilon, \text{ her } x \in K$$

olacak şekilde X uzayından X uzayına lineer sonlu ranklı bir T operatörü varsa X uzayı yaklaşım özelliğine (kısaca, ap) sahiptir denir. Diğer bir deyişle, X uzayı üzerindeki birim operatöre sonlu ranklı operatörler ile kompakt kümeler üzerinden yaklaşılabiliyorsa X yaklaşım özelliğine sahiptir denir (Grothendieck, 1955, bkz. Lindenstrauss ve Tzafriri, 1977).

Kısaca X , ap–ye sahiptir $\Leftrightarrow I_X \in \overline{\mathcal{F}(X, X)}^{\tau_c}$ dir (Grothendieck, 1955).

Örnek 3.1.1 c_0 ve l_p ($1 \leq p < \infty$) uzayları ap–ye sahiptir. Hilbert uzayları ap–ye sahiptir (bkz. Ryan, 2002, s. 73).

Örnek 3.1.2 $\mathcal{B}(l_2, l_2)$ uzayı yaklaşım özelliğine sahip değildir (Szankowski, 1981, bkz. Ryan, 2002, s.74).

Örnek 3.1.3 Schauder tabanına sahip her Banach uzayı ap–ye sahiptir (bkz. Lindenstrauss ve Tzafriri, 1977 ve bkz. Megginson, 1998). Böylece ap–ye sahip olmayan bir Banach uzayı Schauder tabanına sahip olamaz.

Aşağıdaki teoremler yaklaşım özelliğinin önemli karakterizasyonlarını vermektedir.

Teorem 3.1.1 X bir Banach uzayı olsun. X ap–ye sahiptir ancak ve ancak her Y Banach uzayı için $\overline{\mathcal{F}(Y, X)} = \mathcal{K}(Y, X)$ dir (bkz. Lindenstrauss ve Tzafriri, 1977, Teorem 1.e.4 ve bkz. Casazza, 2001, Teorem 2.5).

Teorem 3.1.2 (Kim, 2008 ve Choi ve ark., 2009) X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

a) X , ap–ye sahiptir.

b) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_c}$ dir.

c) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau_c}$ dir.

Tanım 3.1.2 ($G - p$ –Yaklaşım Özelliği) X bir Banach uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer X in her $G - p$ –kompakt K alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|Tx - x\| < \varepsilon, \text{ her } x \in K$$

olacak şekilde X uzayından X uzayına lineer sonlu ranklı bir T operatörü varsa X uzayı $G - p$ –yaklaşım özelliğine (kısaca, $G - p$ –ap) sahiptir denir (Kim, 2013).

Kısaca X , $G - p$ –ap ye sahiptir $\Leftrightarrow I_X \in \overline{\mathcal{F}(X, X)}^{\tau_{Gp}}$ dir (Burada τ_{Gp} , X in $G - p$ –kompakt kümeleri üzerinde düzgün yakınsayan topolojidir.) (Kim, 2013).

p –kompakt küme kavramı p –yaklaşım özelliği kavramını ortaya çıkarmıştır. Sinha ve Karn (2002) bir Banach uzayının p –yaklaşım özelliğini aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 3.1.3 (p –Yaklaşım Özelliği) X bir Banach uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Eğer X in her p –kompakt K alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|Tx - x\| < \varepsilon, \text{ her } x \in K$$

olacak şekilde X uzayından X uzayına lineer sonlu ranklı bir T operatörü varsa X , p –yaklaşım özelliğine (kısaca, p –ap) sahiptir denir. Diğer bir deyişle X üzerindeki

birim operatöre sonlu ranklı operatörler ile p –kompakt kümeler üzerinden yaklaşılabiliyorsa X , p –yaklaşım özelliğine sahiptir denir (Sinha ve Karn, 2002).

Kısaca X , p –ap ye sahiptir $\Leftrightarrow I_X \in \overline{\mathcal{F}(X, X)}^{\tau_p}$ dir (Burada τ_p , X in p –kompakt kümeleri üzerinde düzgün yakınsayan topolojidir.) (Sinha ve Karn, 2002).

$1 \leq p < q \leq \infty$ olmak üzere q –ap ye sahip bir Banach uzayı p –ap ye sahiptir (bkz. Choi ve Kim, 2010).

Teorem 3.1.3 Her Banach uzayı 2 –ap ye sahiptir. Böylece $1 \leq p \leq 2$ olan p ler için her Banach uzayı p –ap ye sahiptir (Sinha ve Karn, 2002).

Teorem 3.1.4 $p > 2$ için p –ap ye sahip olmayan Banach uzayı vardır (Sinha ve Karn, 2002).

Bir X Banach uzayının ap –özellği $G - \infty$ –ap ve ∞ –ap ile aynıdır (bkz. Kim, 2013). $1 \leq p \leq \infty$ için her $G - p$ –kompakt küme daima p –kompakt küme (Kim, 2013) ve her p –kompakt küme de daima kompakt küme olduğundan (Sinha ve Karn, 2002), yaklaşım özelliği p –yaklaşım özelliğini (Sinha ve Karn, 2002), p –yaklaşım özelliği de $G - p$ –yaklaşım özelliğini gerektirir (Kim, 2013). Yani,

$$ap \Rightarrow p - ap \Rightarrow G - p - ap$$

dir (Sinha ve Karn, 2002, Kim, 2013).

Şimdi p –ap ve $G - p$ –ap arasında kalan (p, r) –yaklaşım özelliği kavramını verelim.

Tanım 3.1.4 ((p, r) –Yaklaşım Özelliği) X bir Banach uzayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun. Eğer X in her (p, r) –kompakt K alt kümesi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|Tx - x\| < \varepsilon, \text{ her } x \in K$$

olacak şekilde X uzayından X uzayına lineer sonlu ranklı bir T operatörü varsa X , (p, r) –yaklaşım özelliğine (kısaca, (p, r) –ap) sahiptir denir. Diğer bir deyişle birim operatöre sonlu ranklı operatörler ile (p, r) –kompakt kümeler üzerinden

yaklaşılabiliriyorsa X , (p, r) –yaklaşım özelliğine sahiptir denir (bkz. Delgado ve Pineiro, 2013, Önerme 2.14, bkz. Sinha ve Karn, 2002, bkz. Ain ve ark., 2012).

Kısaca X , (p, r) –ap ye sahiptir $\Leftrightarrow I_X \in \overline{\mathcal{F}(X, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ dir (Burada $\tau_{(p,r)}$, X in (p, r) –kompakt kümeleri üzerinde düzgün yakınsayan topolojidir.) (bkz. Delgado ve Pineiro, 2013, Önerme 2.14, bkz. Sinha ve Karn, 2002, bkz. Ain ve ark., 2012).

$1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ için her (p, r) –kompakt küme daima p –kompakt küme olduğundan p –yaklaşım özelliği, (p, r) –yaklaşım özelliğini gerektirir. O halde

$$ap \Rightarrow p - ap \Rightarrow (p, r) - ap \Rightarrow G - p - ap \quad (1)$$

elde edilir (Sinha ve Karn, 2002, bkz. Ain ve ark., 2012 ve Kim, 2013)

Önerme 3.1.1 $2 < p \leq \infty$ ve $2p/(p-2) < q < \infty$ olsun. l_q nun $G - p - ap$ özelliğine sahip olmayan bir Banach alt uzayı vardır (Kim, 2013, Sonuç 2.4).

Yukarıdaki önerme ve (1) gereğince (p, r) –ap ye sahip olmayan bir Banach uzayının var olduğunu söyleyebiliriz.

3.2. p –Kompakt Kümeler İçin Literatürdeki Bazı Sonuçlar

Bu kısımda p –kompakt kümeler üzerine dayanan ve literatürde mevcut olan bazı sonuçları vereceğiz.

Delgado ve ark. (2009, Teorem 2.1), bir Banach uzayının p –yaklaşım özelliğinin, p –kompakt ve sonlu ranklı dönüşümler arasındaki ilişkiyi veren karakterizasyonlarını aşağıdaki sonuçta elde etmişlerdir. Belirtelim ki bu sonuç Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2 nin p –ap için bir versiyonudur.

Teorem 3.2.1 (Delgado ve ark., 2009, Teorem 2.1) X bir Banach uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

- a) X , p –ap ye sahiptir.
- b) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}_p(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ dir.
- c) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}_p(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_c}$ dir.

Aşağıdaki lemma literatürde iyi bilinen bir lemma olup bu lemmayı ispatını yapmaksızın vereceğiz.

Lemma 3.2.1 $1 \leq p < \infty$ ve $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ olsun. Bu taktirde $\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ olacak şekilde c_0 uzayında azalan pozitif bir $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ dizisi vardır (bkz. Choi ve Kim, 2010, s. 2446).

Choi ve Kim (2008, Teorem 3.10 (a)) $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_c)$ uzayının tam olduğunu göstermişlerdir. Aşağıdaki sonuçta da $1 \leq p \leq \infty$ için $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)$ uzayının tam olduğunu göstermişlerdir.

Önerme 3.2.1 $1 \leq p \leq \infty$ olsun. Bu taktirde $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)$ uzayı tamdır (Choi ve Kim, 2010, Önerme 2.2).

Choi ve Kim (2010) aşağıdaki lemmayı kullanarak $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)'$ deki bir fonksiyonelin temsilini elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.2 $1 < p < \infty$ olsun. $\check{l}_p^w(X)'$ uzayı

$$\varphi((x_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^j x_j' (x_n)$$

temsiline sahip tüm lineer sınırlı φ fonksiyonellerinden oluşur. Burada $(x_j')_{j=1}^\infty \in X'$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $z_j = (\lambda_n^j)_{n=1}^\infty \in l_{p^*}$, $\sum_{j=1}^\infty \|z_j\|_{p^*} \|x_j'\| < \infty$ şartını sağlayan dizilerdir. (Choi ve Kim, 2010, Lemma 2.4).

Şimdi $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)'$ dual uzayındaki bir fonksiyonelin temsilini gösteren Choi ve Kim (2010) tarafından verilen aşağıdaki önemli teoremi verelim.

Teorem 3.2.2 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 2.5) $1 < p < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_p)'$ uzayı

$$f(T) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^j y_j' (Tx_n)$$

temsiline sahip tüm lineer sınırlı f fonksiyonellerinden oluşur. Burada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, her $j \in \mathbb{N}$ için $z_j = (\lambda_n^j)_{n=1}^{\infty} \in l_{p^*}$ ve $(y_j')_{j=1}^{\infty} \subset Y'$ olan ve $\sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|_{p^*} \|y_j'\| < \infty$ şartını sağlayan dizilerdir.

Lemma 3.2.3 Her X Banach uzayı için $\mathcal{F}(X', X') \subset \overline{\mathcal{F}'(X, X)}^{\tau_c}$, burada $\mathcal{F}'(X, X) = \{T': T \in \mathcal{F}(X, X)\}$ dir (bkz. Lindenstrauss ve Tzafriri, 1977, Lemma 1.e.17 ve bkz. Choi ve Kim, 2010, Lemma 2.6).

Yukarıdaki lemmanın bir sonucu olarak, X' nin p –ap ye sahip olması için gerek ve yeter şart $I_{X'} \in \overline{\mathcal{F}'(X, X)}^{\tau_p}$ olmasıdır (Choi ve Kim, 2010, s. 2443).

Choi ve Kim (2010, Teorem 2.7) Teorem 3.2.2 ve Lemma 3.2.3 vasıtasıyla $2 < p < \infty$ olmak üzere X' dual uzayı p –ap ye sahip iken X in de p –ap ye sahip olduğunu göstermişlerdir. Yani, p –ap için dualite probleminin pozitif çözümünü elde etmişlerdir. Şimdi bu teoremi verelim.

Teorem 3.2.3 $2 < p < \infty$ olsun. Eğer X' uzayı p –ap ye sahipse o zaman X de p –ap ye sahiptir (Choi ve Kim, 2010, Teorem 2.7).

Aşağıdaki sonuç p –ap nin önemli karakterizasyonlarını vermektedir.

Teorem 3.2.4 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 4.1) $2 < p \leq \infty$ ve X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

- a) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau_p}$ dir.
- b) Her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau_p}$ dir.
- c) Her Y Banach uzayı ve $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ için $T \in \overline{\{TS: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau_p}$ dir.
- d) Her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı ve $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ için $T \in \overline{\{TS: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau_p}$ dir.
- e) X , p –ap ye sahiptir.

Tanım 3.2.1 X ve Y normlu uzaylar ve $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. Eğer $T = S \circ R$ olacak şekilde bir Z normlu uzayı ve $R \in \mathcal{B}(X, Z)$, $S \in \mathcal{B}(Z, Y)$ dönüşümleri varsa T dönüşümü çarpanlara ayrılabilir denir (bkz. Aron ve ark., 1999).

Choi ve Kim (2010, Teorem 3.1), Sinha ve Karn (2002, Teorem 3.2)'nin p –kompakt bir operatörü, l_p^* uzayının bölüm uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayırışından faydalanarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.5 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 3.1) $1 \leq p < \infty$, X ve Y Banach uzayları ve $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ olsun. T operatörünün p –kompakt olması için gerek ve yeter şart $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(Y)$ ve l_1 in kapalı bir M alt uzayı, $\hat{U} : l_p^*/\ker T_y \rightarrow l_1/M$ p –kompakt operatörü, $\hat{V} : l_1/M \rightarrow Y$ kompakt operatörü vardır öyle ki $T = \hat{V} \circ \hat{U} \circ Q_y$ olarak yazılabilir.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 Q_y \downarrow & & \uparrow \hat{V} \\
 l_p^*/\ker T_y & \xrightarrow{\hat{U}} & l_1/M
 \end{array}$$

Choi ve Kim (2010, Teorem 4.2), yukarıdaki çarpanlara ayırma teoremini kullanarak aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir. Bu teoreme, Teorem 3.2.4 ün tanım ve değer uzaylarının rollerinin değiştirilmesi durumu olarak bakılabilir.

Teorem 3.2.6 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 4.2) $2 < p \leq \infty$ ve X bir Banach uzayı olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktir.

- a) Her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_p}$ dir.
- b) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_p}$ dir.
- c) X , p –ap ye sahiptir.

4. (p, r) –YAKLAŞIM ÖZELLİĞİNİN BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Bu bölümde p –kompakt kümeler üzerine dayanan ve üçüncü bölümün ikinci kısmında verilen sonuçlar (p, r) –kompakt kümeler için ele alınacaktır.

Aşağıdaki lemma literatürde iyi bilinen bir lemma olup Teorem 4.1 in ispatında kullanılacaktır.

Lemma 4.1 $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ olsun. Bu taktirde $L = \{(\alpha_n \beta_n)_{n=1}^{\infty} : (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r\}$ şeklinde tanımlanan küme l_r nin kompakt bir alt kümesidir.

Aşağıdaki teorem Teorem 3.2.1'in (Delgado ve ark., 2009, Teorem 2.1) (p, r) –kompakt kümeler için bir modifikasyonudur. Belirtelim ki bu teorem, Delgado ve Pineiro (2013, Teorem 2.3)'nun çalışmasında $\mathcal{A}$ operatör idealinin özel olarak $\mathcal{K}_{(p,r)}$ operatör ideali olarak alınmasıyla da elde edilebilecek bir sonuçtur. Biz teoremin ispatını Delgado ve ark. (2009, Teorem 2.1)'nin ispatını (p, r) –kompakt kümeler için modifiye ederek yapacağız.

Teorem 4.1 (Delgado ve Pineiro, 2013, Teorem 2.3 ve bkz. Delgado ve ark., 2009, Teorem 2.1) X bir Banach uzayı ve $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun. Bu taktirde aşağıdakiler denktirler.

- a) $X, (p, r)$ –ap ye sahiptir.
- b) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ dir.
- c) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_c}$ dir.

İspat a) $\Rightarrow$ b) Kabul edelim ki $X, (p, r)$ –ap ye sahip olsun. Bu takdirde bir Y Banach uzayı için $\mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ olduğunu gösterelim. Bunun için $T \in \mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X)$ olsun. $T \in \mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X)$ olduğundan $T(B_Y)$, X uzayının relatif (p, r) –kompakt bir alt kümesidir. Hipotezden $X, (p, r)$ –yaklaşım özelliğine sahip olduğundan verilmiş bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|S(Tx) - Tx\| < \varepsilon, \text{ her } x \in B_Y \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $S: X \rightarrow X$ sonlu ranklı lineer dönüşümü vardır. (3.1) den $\|ST - T\| \leq \varepsilon$ olup, $ST \in \mathcal{F}(Y, X)$ olduğundan $T \in \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ elde edilir. Bu ise $\mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ olduğunu gösterir.

b) $\Rightarrow$ c) Norm topoloji, kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan topolojiden daha güçlü, yani, $\tau_c \leq \tau_{\|\cdot\|}$ olduğundan bu geçişin ispatı açıktır.

c) $\Rightarrow$ a) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_c}$ olsun. Bu taktirde X uzayının (p, r) –yaklaşım özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki K , X uzayının (p, r) –kompakt bir alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ bir sayı olsun. Bu taktirde

$$K \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r} \right\}$$

olacak şekilde $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ vardır. $K = (p, r)$ –con $\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\}$ olarak alalım. $x \in K$ ise $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ olacak şekilde bir $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}$ vardır. Diğer taraftan $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ olduğundan Lemma 3.2.1 gereğince $\left(\frac{x_n}{\gamma_n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ olacak şekilde c_0 uzayında pozitif azalan bir $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. Şimdi Delgado ve ark. (2009, Teorem 2.1)’nin ispatında olduğu gibi

$$D: l_r \rightarrow l_r, (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \rightarrow D((\beta_n)_{n=1}^{\infty}) = (\gamma_n \beta_n)_{n=1}^{\infty} \text{ ve}$$

$$\phi: l_r \rightarrow X, \phi((\beta_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{x_n}{\gamma_n}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r$$

şeklinde D ve ϕ operatörlerini tanımlayalım. Öncelikle D nin iyi tanımlı olduğunu görelim. Bunun için $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r$ ise $(\gamma_n \beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r$ yani $\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n \beta_n|^r < \infty$ olduğunu görmeliyiz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n \beta_n|^r = \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n|^r |\beta_n|^r \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_1|^r |\beta_n|^r = |\gamma_1|^r \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^r < \infty$$

olup D iyi tanımlıdır. D operatörünün lineerliği açık olup kompaktlığını gösterelim.

$(\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$ olduğundan Lemma 4.1 den $L = \{(\gamma_n \beta_n)_{n=1}^{\infty} : (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r\}$ kümesi l_r nin kompakt bir altkümesidir ve

$$D(B_{l_r}) = \{(\gamma_n \beta_n)_{n=1}^{\infty} : (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}\} \subset L$$

olduğundan D kompakt bir operatördür.

Şimdi ϕ dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Bunun için $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{x_n}{\gamma_n}$ serisinin X de yakınsak olduğunu göstermeliyiz. $l_r \subset l_{p^*}$ olduğundan $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_{p^*}$ olup Hölder eşitsizliğinden seri mutlak yakınsaktır. X bir Banach uzayı olduğundan mutlak yakınsak her seri yakınsak olup ϕ dönüşümü iyi tanımlıdır. ϕ dönüşümünün lineerliği açık olup (p, r) –kompakt olduğunu gösterelim.

$$\phi(B_{l_r}) = \{\phi((\beta_n)_{n=1}^{\infty}) : (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}\} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \frac{x_n}{\gamma_n} : (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r} \right\}$$

ve $\left(\frac{x_n}{\gamma_n}\right)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ olduğundan

$$\phi(B_{l_r}) = (p, r) - \text{con} \left\{ \left(\frac{x_n}{\gamma_n}\right)_{n=1}^{\infty} \right\}$$

olup dolayısıyla ϕ dönüşümü (p, r) –kompakttır. $Y, l_r/\ker\phi$ bölüm uzayı olmak üzere

$$Q: l_r \rightarrow Y, (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \rightarrow (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} + \ker\phi$$

bölüm dönüşümü olsun. $\widehat{\phi}: Y \rightarrow X$ dönüşümü her $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r$ için

$$\widehat{\phi}(Q((\beta_n)_{n=1}^{\infty})) = \phi((\beta_n)_{n=1}^{\infty})$$

şeklinde tanımlansın. $\widehat{\phi}$ nın iyi tanımlılığı, lineerliği açık olup sürekli olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \|\widehat{\phi}(Q((\beta_n)_{n=1}^{\infty}))\| &= \|\phi((\beta_n)_{n=1}^{\infty}) + \phi((\alpha_n)_{n=1}^{\infty})\|, (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ker\phi \\ &= \|\phi((\beta_n + \alpha_n)_{n=1}^{\infty})\| \quad (\phi \text{ lineer ve sürekli olduğundan}) \\ &\leq \|\phi\| \|(\beta_n + \alpha_n)_{n=1}^{\infty}\| \end{aligned}$$

olup $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in \ker\phi$ üzerinden infimum alınırsa

$$\|\widehat{\phi}(\theta((\beta_n)_{n=1}^{\infty}))\| \leq \|\phi\| \|(\beta_n)_{n=1}^{\infty} + \ker\phi\| \leq \|\phi\| \|\theta((\beta_n)_{n=1}^{\infty})\|$$

elde edilir. Böylece $\widehat{\phi}$ süreklidir. Diğer taraftan

$$\hat{\phi}(B_Y) = \hat{\phi}(\overline{B_Y^\circ}) \subset \overline{\hat{\phi}(B_Y^\circ)} = \overline{\hat{\phi} \circ Q(B_{l_r}^\circ)} = \overline{\phi(B_{l_r}^\circ)} \subset (p, r) - \text{con} \left\{ \left(\frac{x_n}{\gamma_n} \right)_{n=1}^\infty \right\}$$

olup $\hat{\phi}$ dönüşümü (p, r) -kompakttır. $H := Q \circ D(B_{l_r})$ şeklinde tanımlanmış olsun. D kompakt dönüşüm olduğundan $H \subset Y$ de relatif kompakt bir kümedir. $\hat{\phi}: Y \rightarrow X$ dönüşümü (p, r) -kompakt olduğundan hipotezden $\hat{\phi} \in \mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_c}$ olup $H \subset Y$ de kompakt bir küme olduğundan bir $S \in \mathcal{F}(Y, X)$ vardır öyle ki her $h \in H$ için

$$\|Sh - \hat{\phi}h\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.2)$$

dir. Diğer yandan S sonlu ranklı lineer bir dönüşüm olduğundan

$$S = \sum_{k=1}^N \psi_k \otimes u_k, \quad \psi_k \in Y', \quad u_k \in X, \quad \sum_{k=1}^N \|u_k\| = 1 \quad (3.3)$$

şeklinde bir temsile sahiptir. $\hat{\phi}$ nın injektifliğinden (birebirliğinden) $\hat{\phi}'$ dönüşümü Y' uzayında, Y' deki $\langle Y', Y \rangle$ dualitesi ile uyumlu olan her lokal konveks topoloji için, yoğun görüntüye sahiptir. Özel olarak, $\hat{\phi}', Y$ nin kompakt kümeler üzerinde düzgün yakınsayan topolojiye göre yoğun görüntüye sahiptir. Böylece her $k = 1, 2, \dots, N$ için

$$\|\hat{\phi}'u'_k(h) - \psi_k(h)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{her } h \in H \quad (3.4)$$

olacak şekilde $u'_k \in X'$ vardır. $R := \sum_{k=1}^N u'_k \otimes u_k$ olsun. Bu taktirde $R \in \mathcal{F}(X, X)$ dir. Her $x \in K$ için (K kümesinin tanımından)

$$x = \sum_{n=1}^\infty \beta_n x_n = \hat{\phi} \circ Q \circ D((\beta_n)_{n=1}^\infty)$$

olacak şekilde $(\beta_n)_n \in B_{l_r}$ vardır. Böylece

$$x = \hat{\phi} \circ \underbrace{Q \circ D((\beta_n)_{n=1}^\infty)}_{h \in H}, \quad x = \hat{\phi}h, \quad h \in H$$

olup (3.2), (3.3) ve (3.4) den

$$\begin{aligned} \|Rx - x\| &= \|R(\hat{\phi}h) - \hat{\phi}h\| \\ &= \|R(\hat{\phi}h) + Sh - Sh - \hat{\phi}h\| \\ &\leq \|R(\hat{\phi}h) - Sh\| + \|Sh - \hat{\phi}h\| \\ &\leq \|\sum_{k=1}^N u'_k(\hat{\phi}h) - \sum_{k=1}^N \psi_k(h)\| \|u_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{k=1}^N \hat{\phi}' u'_k(h) - \sum_{k=1}^N \psi_k(h) \right\| \|u_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \max_{1 \leq k \leq N} |(\hat{\phi}' u'_k - \psi_k)(h)| \sum_{k=1}^N \|u_k\| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır. $\square$

Gözlem 4.1 Chen ve Lie (2017, Lemma 2.2) de $\mathcal{A}$ operatör idealini özel olarak $\mathcal{K}_{(p,r)}$ operatör ideali alırsak, yukarıdaki teoremin (c) şikkında Y nin ayrılabilir refleksif Banach uzayı alınması durumunda da teoremin geçerli olacağını görürüz.

Aşağıdaki önerme, Önerme 3.2.1 (bkz. Choi ve Kim, 2010, Önerme 2.2)'in (p, r) –kompakt kümeler için bir modifikasyonu olup ispat metodu buradan alınmıştır.

Önerme 4.1 $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun. Bu taktirde $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})$ tamdır (bkz. Choi ve Kim, 2010, Önerme 2.2 ve bkz. Kim ve Choi, 2008, Teorem 3.10).

İspat $\mathcal{B}(X, Y)$ nin $\tau_{(p,r)}$ topolojisine göre tam olduğunu göstermek için $\mathcal{B}(X, Y)$ uzayında alınan bir $\tau_{(p,r)}$ –Cauchy ağının bu uzayda yakınsak olduğunu göstereceğiz. $(T_\alpha)_\alpha$, $\mathcal{B}(X, Y)$ de bir $\tau_{(p,r)}$ –Cauchy ağı olsun. Bu taktirde her $x \in X$ için $(T_\alpha x)_\alpha$, Y de bir Cauchy ağıdır. Y tam olduğundan her $x \in X$ için $(T_\alpha x)_\alpha$ Cauchy ağı Y de yakınsaktır.

$T(x) := \lim_\alpha T_\alpha x$ şeklinde bir $T: X \rightarrow Y$ dönüşümü tanımlayıp bu dönüşümün lineer ve sınırlı olduğunu gösterelim. T dönüşümünün lineerliği açık olup sınırlı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki T sınırsız olsun. Bu taktirde, her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| < \frac{1}{n^2}$ iken $\|Tx_n\| > n$ olacak şekilde X de bir $(x_n)_{n=1}^\infty$ dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| < \frac{1}{n^2}$ olduğundan $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$ dir. Böylece $\{x_n: n \in \mathbb{N}\}$ kümesi relatif (p, r) –kompakttır. $(T_\alpha)_\alpha$, $\tau_{(p,r)}$ –Cauchy ağı olduğundan

$$\lim_{\alpha, \beta} \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_\alpha x_n - T_\beta x_n\| = 0$$

dir. O halde her $\alpha, \beta \geq \alpha_0$ için $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(T_\alpha - T_\beta)x_n\| \leq 1$ olacak şekilde bir α_0 vardır. Her

$x \in X$ için $\lim_\alpha T_\alpha x = T(x)$ olduğundan $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|(T_{\alpha_0} - T)x_n\| \leq 1$ dir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $((x_n)_{n=1}^\infty \in B_X^\circ$ olduğundan)

$$\|T_{\alpha_0}\| \geq \|T_{\alpha_0}x_n\| \geq \|Tx_n\| - \|Tx_n - T_{\alpha_0}x_n\| > n - 1$$

olur. Bu ise T_{α_0} dönüşümünün sınırsız olmasıyla çelişir. O halde T sınırlıdır. Şimdi $T_\alpha \xrightarrow{\tau_{(p,r)}} T$ olduğunu gösterelim. K, X uzayında (p, r) –kompakt bir küme ve $\varepsilon > 0$ olsun. $(T_\alpha)_\alpha, \mathcal{B}(X, Y)$ de bir $\tau_{(p,r)}$ –Cauchy ağı olduğundan

$$\alpha, \beta \geq \alpha_0 \text{ iken } \sup_{x \in K} \|(T_\alpha - T_\beta)x\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ vardır. Diğer taraftan her $x \in X$ için $T(x) = \lim_{\alpha} T_\alpha x$ olduğundan $\alpha \geq \alpha_0$ iken

$$\sup_{x \in K} \|(T_\alpha - T)x\| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $T_\alpha \xrightarrow{\tau_{(p,r)}} T$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Not 4.1 Bir V topolojik vektör uzayı üzerinde lineer bir f fonksiyonelinin sürekli olması için gerek ve yeter şart $f(U)$ sınırlı olacak şekilde 0 ın V de bir U komşuluğunun olmasıdır (bkz. Megginson, 1998, Teorem 2.2.16). Böylece $f \in (\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})'$ olması için gerek ve yeter şart her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $|f(T)| \leq M \sup_{x \in K} \|Tx\|$ olacak şekilde X uzayının (p, r) –kompakt bir K alt kümesi ve bir $M > 0$ sayısının mevcut olmasıdır (bkz. Choi ve Kim, 2010, s. 2441 ve bkz. Wilde 2003, Sonuç 7.9).

Teorem 3.2.2 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 2.5)'nin dikkatli bir modifikasyonu ile aşağıdaki teoremi elde ederiz. Bu teorem $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})'$ uzayındaki bir fonksiyonelin temsilini vermektedir.

Teorem 4.2 (bkz. Choi ve Kim, 2010, Teorem 2.5) $1 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ ve X, Y Banach uzayları olmak üzere $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})'$ uzayı

$$f(T) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^j y_j' (Tx_n)$$

temsiline sahip bütün sınırlı lineer fonksiyonellerden oluşur. Burada $(x_n)_{n=1}^\infty \in l_p(X)$, her $j \in \mathbb{N}$ için $z_j = (\lambda_n^j)_{n=1}^\infty \in l_r$ ve $(y_j')_{j=1}^\infty \subset Y'$ olan ve $\sum_{j=1}^\infty \|z_j\|_r \|y_j'\| < \infty$ şartını sağlayan dizilerdir.

İspat f dönüşümünün teoremden verilen temsile sahip olduğunu varsayalım. Bu taktirde $f \in (\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})'$ olduğunu gösterelim. Hipotezden $1 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ olduğundan $1 < r < \infty$ ve $1 < r^* < \infty$ olacaktır. Lemma 3.2.2, p yerine r^* alınarak düşünülürse, $\varphi := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j y_j'(\cdot)$ şeklinde tanımlanan φ dönüşümü için $\varphi \in \check{L}_{r^*}^w(Y)'$ olur. Hipotezden $r \leq p^*$ olduğundan $p \leq r^*$ dir. $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$ ve her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) \in l_p(Y)$ dir. $p \leq r^*$ olduğundan $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) \in l_{r^*}(Y)$ ve Teorem 3.2.2 den $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) \in \check{L}_{r^*}^w(Y)$ dir. Böylece her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $f(T) = \varphi((Tx_n)_{n=1}^{\infty})$ dir. X de (p, r) –kompakt $K = \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}\}$ kümesini göz önüne alalım. Her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $\|(Tx_n)_n\|_{r^*}^w = \sup_{x \in K} \|Tx\|$ olduğu kolayca görülebilir.

Gerçekten, her $x \in K$ için (K kümesinin tanımından) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^x x_n$ olacak şekilde $(\alpha_n^x)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}$ vardır. Böylece $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^x T(x_n) \text{ ve } \|T(x)\| = \|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^x T(x_n)\|$$

dir. Diğer taraftan Tanım 2.34 ten $\|(Tx_n)_n\|_{r^*}^w = \sup_{\alpha \in B_{l_r}} \|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(x_n)\|$ olduğundan

$$\|(Tx_n)_n\|_{r^*}^w = \sup_{x \in K} \|Tx\| \quad (3.5)$$

elde edilir. Böylece her $T \in \mathcal{N}_{(p,r)}(0, K, 1)$ için

$$|f(T)| = |\varphi((Tx_n)_{n=1}^{\infty})| \leq \|\varphi\| \|(Tx_n)_{n=1}^{\infty}\|_{r^*}^w = \|\varphi\| \sup_{x \in K} \|Tx\| \leq \|\varphi\|$$

olur. Buradan $f \in (\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})'$ bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $f \in (\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p,r)})'$ olsun. Bu taktirde Not 4.1 gereğince X de (p, r) –kompakt bir K alt kümesi ve $M > 0$ sayısı vardır öyle ki her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $|f(T)| \leq M \sup_{x \in K} \|Tx\|$ dir. Bir $(x_n)_n \in l_p(X)$ alalım öyle ki

$$K \subset \{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}\}$$

olsun. Bu taktirde $(x_n)_n \in l_p(X)$ ve her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için $T((x_n)_{n=1}^{\infty}) \in \check{L}_{r^*}^w(Y)$ olacağından (3.5) kullanılarak

$$|f(T)| \leq M \sup_{x \in K} \|Tx\| = M \|(Tx_n)_{n=1}^{\infty}\|_{r^*}^w, \text{ her } T \in \mathcal{B}(X, Y) \quad (3.6)$$

elde edilir.

Şimdi $\check{l}_r^w(Y)$ uzayının $\{(Tx_n)_{n=1}^\infty : T \in \mathcal{B}(X, Y)\}$ alt uzayını ve $\{(Tx_n)_{n=1}^\infty : T \in \mathcal{B}(X, Y)\}$ uzayı üzerinde $\varphi((Tx_n)_{n=1}^\infty) = f(T)$ şeklinde tanımlanan φ fonksiyoneli düşünelim. Eğer $(Tx_n)_{n=1}^\infty = (Rx_n)_{n=1}^\infty$ ise (3.6) dan $|f(T - R)| \leq M \|(T - R)(x_n)_{n=1}^\infty\|_{r^*}^w$ olduğundan $f(T) = f(R)$ dir. Böylece φ iyi tanımlıdır. φ dönüşümünün lineerliğini görmek ise kolaydır.

$$|\varphi((Tx_n)_{n=1}^\infty)| = |f(T)| \leq M \|(Tx_n)_{n=1}^\infty\|_{r^*}^w$$

olduğundan φ fonksiyoneli $\check{l}_r^w(Y)$ nin $\{(Tx_n)_{n=1}^\infty : T \in \mathcal{B}(X, Y)\}$ alt uzayı üzerinde sınırlı bir fonksiyoneldir. Hahn-Banach genişleme teoremi gereğince φ nin $\hat{\varphi} \in \check{l}_r^w(Y)'$ genişlemesi vardır öyle ki her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için

$$f(T) = \varphi((Tx_n)_{n=1}^\infty) = \hat{\varphi}((Tx_n))$$

dir. $\hat{\varphi} \in \check{l}_r^w(Y)'$ olduğundan Lemma 3.2.2 den $\sum_{j=1}^\infty \|z_j\|_r \|y_j'\| < \infty$ olacak şekilde $(y_j')_{j=1}^\infty \in Y'$ ve her $j \in \mathbb{N}$ için $z_j = (\lambda_n^j)_{n=1}^\infty \in l_r$ vardır öyle ki her $(y_n)_{n=1}^\infty \in \check{l}_r^w(Y)$ için

$$\hat{\varphi}((y_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^j y_j' (y_n)$$

dir. Böylece her $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ için

$$f(T) = \hat{\varphi}((Tx_n)) = \sum_{j=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \lambda_n^j y_j' (Tx_n)$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. $\square$

Choi ve Kim (2010, s. 2447)'in p -ap için verdiği denkliğin benzer bir versiyonunu aşağıdaki gözlemde (p, r) -ap için vereceğiz.

Gözlem 4.2 $1 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ olmak üzere bir X Banach uzayı (p, r) -ap ye sahiptir ancak ve ancak $f \in (\mathcal{B}(X, X), \tau_{(p, r)})'$ de her $T \in \mathcal{F}(X, X)$ için $f(T) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyonel ise $f(I_X) = 0$ dır (bkz. Choi ve Kim, 2010, s. 2447).

Gerçekten, $1 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ olmak üzere X Banach uzayı (p, r) –ap ye sahip ve $f \in (\mathcal{B}(X, X), \tau_{(p,r)})'$ de her $T \in \mathcal{F}(X, X)$ için $f(T) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyonel olsun. Bu taktirde $f(I_X) = 0$ olduğunu gösterelim.

X , (p, r) –ap ye sahip olduğundan $I_X \in \overline{\mathcal{F}(X, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ dir. Bu taktirde $T_\alpha \xrightarrow{\tau_{(p,r)}} I_X$ olacak şekilde $\mathcal{F}(X, X)$ de bir $(T_\alpha)_\alpha$ ağı vardır. $f \in (\mathcal{B}(X, X), \tau_{(p,r)})'$ olduğundan $f(T_\alpha) \rightarrow f(I_X)$ dir. $f(I_X) = \lim_\alpha f(T_\alpha)$ ve her α için hipotezden $f(T_\alpha) = 0$ olduğundan $f(I_X) = 0$ dir.

Tersine $f \in (\mathcal{B}(X, X), \tau_{(p,r)})'$ de her $T \in \mathcal{F}(X, X)$ için $f(T) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyonel iken $f(I_X) \neq 0$ olsun. Kabul edelim ki X Banach uzayı (p, r) –ap ye sahip olmasın, yani, $I_X \notin \overline{\mathcal{F}(X, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ olsun. Bu taktirde Hahn-Banach teoreminin bir sonucu ile (bkz. Megginson, 1998, Sonuç 2.2.20) bir $\lambda \in (\mathcal{B}(X, X), \tau_{(p,r)})'$ vardır öyle ki $\lambda(I_X) = 1$ ve her $T \in \mathcal{F}(X, X)$ için $\lambda(T) = 0$ dir. Bu ise bir çelişki olup X , (p, r) –ap ye sahiptir. $\square$

Lemma 4.2 X ve Y Banach uzayları ve $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ olsun. Bu taktirde ayrılabilir refleksif bir Z Banach uzayı ve bir $R: Y' \rightarrow Z$ operatörü vardır öyle ki $T' = J \circ R$ dir, burada $J: Z \rightarrow X'$ (birim dönüşüm) kompakt bir operatördür (Kim, 2008, Lemma 1).

Lemma 4.3 K, X' uzayının zayıf kompakt bir alt kümesi ise her Y Banach uzayı için $\mathcal{F}(Y, Z') \subset \overline{\{J'Q_X S: S \in \mathcal{F}(Y, X)\}}$ dir, burada $Q_X: X \rightarrow X''$ ye kanonik tasvirdir (Kim, 2008, Lemma 2 ve bkz. Oja, 2008, Sonuç 4.4).

Her Banach uzayı 2 –ap ye sahip olduğundan (Sinha ve Karn, 2002) ve p –ap özelliği (p, r) –ap yi gerektirdiğinden her Banach uzayı $(2, r)$ –ap ye $(1 < r \leq 2)$ sahiptir. Dolayısıyla (p, r) –ap özelliği $p > 2$ durumunda göz önüne alınacaktır.

Aşağıdaki teorem Teorem 3.2.4 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 4.1)'ün (p, r) –ap için bir modifikasyonu olup ispat tekniği aynıdır.

Teorem 4.3 (bkz. Choi ve Kim, 2010, Teorem 4.1) $2 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ olsun. Aşağıdakiler denktir.

a) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau_{(p,r)}}$ dir.

- b)** Her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau(p,r)}$ dir.
- c)** Her Y Banach uzayı ve $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ için $T \in \overline{\{TS: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau(p,r)}$ dir.
- d)** Her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı ve $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ için $T \in \overline{\{TS: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau(p,r)}$ dir.
- e)** $X, (p, r)$ –ap ye sahiptir.

İspat a) $\Rightarrow$ b) ve c) $\Rightarrow$ d) açıkça görülmektedir.

b) $\Rightarrow$ c) Bu şıkkın ispatını Kim (2008, Teorem b) $\Rightarrow$ c))’i takip ederek yapacağız. Kabul edelim ki, her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau(p,r)}$ olsun. Bu taktirde bir Y Banach uzayı ve $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ operatörü için $T \in \overline{\{TS: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau(p,r)}$ olduğunu göstereceğiz. $T \in \mathcal{K}(X, Y)$ olduğundan Lemma 4.2 gereğince ayrılabilir refleksif bir Z Banach uzayı, $R: Y' \rightarrow Z$ operatörü ve $J: Z \rightarrow X'$ kompakt operatörü vardır öyle ki $T' = J \circ R$ dir. $J': X'' \rightarrow Z'$ kompakt olacağından $J'Q_X \in \mathcal{K}(X, Z')$ olur. Z ayrılabilir refleksif Banach uzayı olduğundan Z' de ayrılabilir refleksif Banach uzayıdır (bkz. Megginson, 1998). Böylece hipotezden için $\mathcal{K}(X, Z') \subset \overline{\mathcal{F}(X, Z')}^{\tau(p,r)}$ dir ve Lemma 4.3 den

$$J'Q_X \in \overline{\mathcal{F}(X, Z')}^{\tau(p,r)} \subset \overline{\{J'Q_X S: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau(p,r)}$$

dir. Böylece $J'Q_X S_\alpha \xrightarrow{\tau(p,r)} J'Q_X$ olacak şekilde bir $(S_\alpha)_\alpha \in \mathcal{F}(X, X)$ vardır. Böylece X uzayının her (p, r) –kompakt K alt kümesi için (sırasıyla, her $y \in Y$ için $\|Q_Y(y)\| = \|y\|$, Önerme 2.1, adjoint operatörün tanımı ve $T' = J \circ R$ olduğu kullanılarak)

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} \|TS_\alpha x - Tx\| &= \sup_{x \in K} \|Q_Y TS_\alpha x - Q_Y Tx\| = \sup_{x \in K} \|(TS_\alpha)'' Q_X x - T'' Q_X x\| \\ &= \sup_{x \in K} \|(JR)' S_\alpha'' Q_X x - (JR)' J_X x\| = \sup_{x \in K} \|(JR)' Q_X S_\alpha x - (JR)' Q_X x\| \\ &\leq \|R'\| \sup_{x \in K} \|J' Q_X S_\alpha x - J' Q_X x\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $T \in \overline{\{TS: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau(p,r)}$ bulunur.

d) $\Rightarrow$ e) X uzayının (p, r) –ap ye sahip olduğunu göstereceğiz. Bunun için $f \in (\mathcal{B}(X, X), \tau_{(p,r)})'$ ve her $T \in \mathcal{F}(X, X)$ için $f(T) = 0$ olsun. Bu taktirde Teorem 4.2

gereğince $\sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|_r \|y_j'\| < \infty$ şartını sağlayan bir $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(X)$, her $j \in \mathbb{N}$ için $z_j = (\lambda_n^j)_{n=1}^{\infty} \in l_r$ ve $(x_j')_{j=1}^{\infty} \subset X'$ vardır öyle ki

$$f(T) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j x_j' (Tx_n), \text{ her } T \in \mathcal{B}(X, X)$$

dir. İspatı tamamlamak için

$$f(I_X) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j x_j' (x_n) = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Genelliği bozmaksızın her j için $\|x_j'\| \leq 1$, $j \rightarrow \infty$ iken $x_j' \rightarrow 0$ ve $\sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|_r < \infty$ olarak kabul edebiliriz.

Böylece $K := \overline{\text{abco}}\{(x_j')\}$ kümesi $B_{X'}$ nün kapalı mutlak konveks bir alt kümesi olup Lima ve ark. (2000)'nin bir sonucu vasıtasıyla ayrılabilir refleksif bir Z Banach uzayı vardır ($K \subset B_Z \subset B_{X'}$) öyle ki $J: Z \rightarrow X'$ kompakt içine fonksiyondur. $J'Q_X \in \mathcal{K}(X, Z')$ olacağından hipotezden $J'Q_X \in \overline{\{J'Q_X S: S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau_{(p,r)}} \subset \mathcal{B}(X, Z')$ dir. Her j için $x_j' \in K \subset Z$ olup

$$g(R) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j Q_Z(x_j')(Rx_n)$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Teorem 3.2.2 den $g \in (\mathcal{B}(X, Z'), \tau_{(p,r)})'$ dir. Her $S \in \mathcal{F}(X, X)$ için $J'Q_X S \in \mathcal{F}(X, Z')$ olup

$$\begin{aligned} g(J'Q_X S) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j Q_Z(x_j')(J'Q_X Sx_n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle J'Q_X Sx_n, x_j' \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle Q_X Sx_n, Jx_j' \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle Q_X Sx_n, x_j' \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle x_j', Sx_n \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j x_j'(Sx_n) = f(S) = 0 \end{aligned}$$

dır. Diğer taraftan $J'Q_X \in \overline{\{J'Q_X S : S \in \mathcal{F}(X, X)\}}^{\tau_{(p,r)}}$ olduğundan $J'Q_X S_\alpha \xrightarrow{\tau_{(p,r)}} J'Q_X$ olacak şekilde bir $(S_\alpha)_\alpha \subset F(X, X)$ vardır. $g \in (\mathcal{B}(X, Z'), \tau_{(p,r)})'$ olduğundan $g(J'Q_X) = \lim_\alpha g(J'Q_X S_\alpha)$ dır ve her $S \in \mathcal{F}(X, X)$ için $g(J'Q_X S) = 0$ olduğundan $g(J'Q_X) = 0$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} 0 &= g(J'Q_X) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j Q_Z(x'_j)(J'Q_X x_n) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle J'Q_X x_n, x'_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle Q_X x_n, Jx'_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j \langle Q_X x_n, x'_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^j (x'_j)(x_n) = f(I_X) \end{aligned}$$

olup istenen elde edilir.

e)⇒a) $X, (p, r)$ –ap ye sahip olsun. Bu durumda bir Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(X, Y) \subset \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau_{(p,r)}}$ olduğunu gösterelim. $S \in \mathcal{K}(X, Y)$ ve K, X uzayının (p, r) –kompakt bir alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. $X, (p, r)$ –ap ye sahip olduğundan bir $P \in \mathcal{F}(X, X)$ vardır öyle ki her $x \in K$ için

$$\|Px - x\| < \frac{\varepsilon}{\|S\|}$$

dır. Böylece her $x \in K$ için

$$\|SPx - Sx\| \leq \|S\| \|Px - x\| < \varepsilon$$

ve $SP \in \mathcal{F}(X, Y)$ olduğundan $S \in \overline{\mathcal{F}(X, Y)}^{\tau_{(p,r)}}$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Ain ve ark. (2012, s. 150) de, Sinha ve Karn (2002)'nin p –kompakt operatörlerin çarpanlarına ayrılışına benzer olarak (p, r) –kompakt operatörlerin doğal bir çarpanlarına ayrılışını aşağıdaki şekilde elde etmişlerdir.

Teorem 4.4 $1 \leq p \leq \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun. $T: X \rightarrow Y$, (p, r) –kompakt bir operatör ise $T = \hat{T}_y \circ \theta_y$ olacak şekilde $l_p(Y)$ de bir $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi ($p = \infty$ ise $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(Y)$), $\theta_y: X \rightarrow l_r / \ker T_y$ sınırlı lineer operatörü, $\hat{T}_y: l_r / \ker T_y \rightarrow Y$ (p, r) –kompakt operatörü vardır (Ain ve Oja, 2012, s.150 ve bkz. Sinha ve Karn, 2002).

Aşağıdaki teorem (Choi ve Kim, 2010, Teorem 3.1) Teorem 3.2.5'in (p, r) -kompakt kümeler için bir modifikasyonu olup ispat tekniği aynıdır.

Teorem 4.5 $1 \leq p < \infty$ ve $1 \leq r \leq p^*$ olsun. Bir $T: X \rightarrow Y$ operatörünün (p, r) -kompakt olması için gerek ve yeter şart $T = \hat{V} \circ \hat{U} \circ \theta_y$ olacak şekilde, l_1 in kapalı bir M alt uzayı, $l_p(Y)$ de bir $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $\hat{U}: l_r/\ker(T_y) \rightarrow l_1/M$, (p, r) -kompakt operatörü ve $\hat{V}: l_1/M \rightarrow Y$ kompakt operatörünün mevcut olmasıdır (bkz. Choi ve Kim, 2010, Teorem 3.1 ve bkz. Ain ve Oja, 2012, s. 150).

İspat Eğer $T: X \rightarrow Y$ operatörü hipotezde verilen çarpanlara ayırmaya sahipse, (p, r) -kompakt operatörlerin ideal özelliğinden T operatörünün (p, r) -kompakt olacağı açıktır.

$T: X \rightarrow Y$ operatörü (p, r) -kompakt bir operatör olsun. Bu taktirde Teorem 4.4 den $T = \hat{T}_y \circ \theta_y$ olacak şekilde $l_p(Y)$ de bir $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $\theta_y: X \rightarrow l_r/\ker T_y$ sınırlı lineer operatörü, $\hat{T}_y: l_r/\ker T_y \rightarrow Y$ (p, r) -kompakt operatörü vardır (Ain ve Oja, 2012).

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ & \searrow \theta_y & \nearrow \hat{T}_y \\ & l_r/\ker T_y & \end{array}$$

Burada $T_y: l_r \rightarrow Y$, $T_y(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ ve

$\hat{T}_y: l_r/\ker T_y \rightarrow Y$, $\hat{T}_y([\alpha]) := T_y(\alpha)$ ve

$\theta_y: X \rightarrow l_r/\ker T_y$, $\theta_y(x) = [\beta]$ (burada $\beta = (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r$ de her $x \in X$ için $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$ olacak şekilde bir dizidir) şeklinde tanımlıdır.

Şimdi Choi ve Kim (2010, Teorem 3.1) deki ispatı takip ederek $\hat{T}_y$ operatörünü l_1 uzayının bir bölüm uzayı vasıtasıyla çarpanlara ayıralım.

Her n için $y_n \neq 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Bu taktirde Lemma 3.2.1 gereğince pozitif sayıların bir $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyle ki $(\beta_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{c_0}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|y_n\|^p}{\beta_n^p} < \infty$ dur.

Her n için $\lambda := \lambda_n = \|y_n\|/\beta_n$ ve $z_n = y_n/\lambda_n$ olsun. Bu taktirde $\lambda \in l_p$ ve $n \rightarrow \infty$ iken $z_n \rightarrow 0$ dır. Aynı zamanda

$$T(B_X) \subset \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n z_n : (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r} \right\}$$

dir. Şimdi $U: l_r \rightarrow l_1$ ve $V: l_1 \rightarrow Y$

$$U(\alpha) = (\lambda_n \alpha_n)_{n=1}^{\infty}, \alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in l_r \text{ ve } V(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z_n, \gamma = (\gamma_n)_{n=1}^{\infty} \in l_1$$

şeklinde tanımlanmış operatörler olsunlar. U ve V operatörlerinin sınırlı lineer olduğunu görmek kolaydır. Şimdi U operatörünün (p, r) –kompakt olduğunu gösterelim.

Her n için $\lambda_n e_n = (0, 0, \dots, 0, \lambda_n, 0, 0, \dots)$ olduğundan $\lambda_n e_n \in l_1$ dir ve $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n e_n\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^p < \infty$ dur. O halde $(\lambda_n e_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(l_1)$ dir. Diğer taraftan $\alpha = (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \in B_{l_r}$ için $U(\alpha) = (\lambda_n \alpha_n)_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n e_n$ olup $(\lambda_n e_n)_{n=1}^{\infty} \in l_p(l_1)$ olduğundan U , (p, r) –kompakt bir operatördür. $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0(Y)$ olduğundan V operatörünün de kompakt operatör olduğu açıktır. Ayrıca $T_y = V \circ U$ dur.

Son olarak $\hat{U}: l_r/\ker(T_y) \rightarrow l_1/\ker(V)$ ve $\hat{V}: l_1/\ker(V) \rightarrow Y$ operatörleri

$$\hat{U}[(\alpha)] := [(\lambda_n \alpha_n)_{n=1}^{\infty}] \text{ ve } \hat{V}([\gamma]) := V(\gamma)$$

şeklinde tanımlansın. Açık olarak $\hat{U}$, (p, r) –kompakt ve $\hat{V}$ kompakt operatörler olup $\hat{T}_y = \hat{V}\hat{U}$ dır. Böylece $T = \hat{T}_y \theta_y = \hat{V}\hat{U}\theta_y$ elde edilir.

Aşağıdaki diyagram T operatörünün çarpanlara ayrılışını göstermektedir.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \theta_y \downarrow & & \uparrow \hat{V} \\ l_r/\ker(T_y) & \xrightarrow{\hat{U}} & l_1/\ker(V) \end{array}$$

Galicier ve ark. (2012, Önerme 2.9)'nın sonucunu (p, r) –kompakt operatörler için modifiye ederek aşağıdaki önermeyi elde ederiz.

Önerme 4.2 X ve Y Banach uzayları olsunlar. Bir $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ operatörü (p, r) –kompakt operatördür ancak ve ancak $T = S \circ T_0 \circ R$ olacak şekilde S, R kompakt ve $T_0, (p, r)$ –kompakt operatörleri vardır (bkz. Galicier ve ark., 2012, Önerme 2.9).

Aşağıdaki teorem Teorem 3.2.6 (Choi ve Kim, 2010, Teorem 4.2)’nin (p, r) –ap için bir modifikasyonu olup ispat tekniği buradan alınmıştır.

Teorem 4.6 (bkz. Choi ve Kim, 2010, Teorem 4.2) $2 < p < \infty, 1 < r \leq p^*$ ve X bir Banach uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir.

- a) Her ayrılabilir refleksif Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ dir.
- b) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ dir.
- c) $X, (p, r)$ –ap ye sahiptir.

İspat a) $\Rightarrow$ b) Y ayrılabilir refleksif bir Banach uzayı olmak üzere $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ olsun. Bu taktirde bir Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ olduğunu gösterelim.

$T \in \mathcal{K}(Y, X)$ ve K, Y uzayının (p, r) –kompakt alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu taktirde Lima ve ark. (2000)’dan ayrılabilir refleksif bir Z Banach uzayı vardır öyle ki T operatörü Z uzayı vasıtasıyla kompakt iki operatörün bileşkesi olarak yazılabilir. Yani, $R: Y \rightarrow Z$ ve $S: Z \rightarrow X$ kompakt operatörler olmak üzere $T = S \circ R$ dir. Z ayrılabilir refleksif bir Banach uzayı ve $S \in \mathcal{K}(Z, X)$ olduğundan hipotezden $S \in \overline{\mathcal{F}(Z, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ olacaktır. K, Y uzayının (p, r) –kompakt alt kümesi ve $R: Y \rightarrow Z$ sınırlı lineer bir operatör olduğundan $R(K), Z$ uzayının (p, r) –kompakt alt kümesidir. $S \in \overline{\mathcal{F}(Z, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ olduğundan her $y \in K$ için

$$\|SR(y) - UR(y)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{F}(Z, X)$ operatörü vardır. Diğer taraftan $T = S \circ R$ olduğundan her $y \in K$ için

$$\|T(y) - UR(y)\| < \varepsilon$$

olur. $U \circ R \in \mathcal{F}(Y, X)$ olduğundan $T \in \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau_{(p,r)}}$ elde edilir.

b)⇒c) Her Y Banach uzayı için $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau(p,r)}$ olsun. Bu taktirde X uzayının (p, r) –yaklaşım özelliğine sahip olduğunu gösterelim. Teorem 4.1 den X uzayının (p, r) –yaklaşım özelliğine sahip olduğunu göstermek için $\mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $T \in \mathcal{K}_{(p,r)}(Y, X)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Teorem 4.5 ten bir $R: Y \rightarrow Z$, (p, r) –kompakt operatörü ve bir $S: Z \rightarrow X$ kompakt operatörü vardır öyle ki $T = SR$ dir. $R: Y \rightarrow Z$, (p, r) –kompakt operatör olduğundan $R(B_Y)$, Z uzayının (p, r) –kompakt alt kümesidir. $S \in \mathcal{K}(Z, X)$ ve hipotezden $\mathcal{K}(Z, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Z, X)}^{\tau(p,r)}$ olduğundan, her $y \in B_Y$ için

$$\|SR(y) - UR(y)\| = \|T(y) - UR(y)\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{F}(Z, X)$ vardır. Son eşitsizlikte her $y \in B_Y$ için supremum alınarak

$$\|T - UR\| < \varepsilon$$

elde edilir. $UR \in \mathcal{F}(Y, X)$ olduğundan $T \in \overline{\mathcal{F}(Y, X)}$ elde edilir. Böylece X , (p, r) –yaklaşım özelliğine sahiptir.

c)⇒a) X , (p, r) –ye sahip ve Y ayrılabilir refleksif bir Banach uzayı olsun. $\mathcal{K}(Y, X) \subset \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau(p,r)}$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $T \in \mathcal{K}(Y, X)$ ve K, Y nin (p, r) –kompakt bir alt kümesi ve $\varepsilon > 0$ olsun. (p, r) –kompakt bir kümenin sınırlı lineer bir operatör altındaki görüntüsü de (p, r) –kompakt olduğundan (bu özellik literatürde iyi bilinen bir özelliktir) $T(K)$, X in (p, r) –kompakt alt kümesidir. X , (p, r) –yaklaşım özelliğine sahip olduğundan

$$\|RT(x) - T(x)\| < \varepsilon, \text{ her } x \in K$$

olacak şekilde bir $R \in \mathcal{F}(X, X)$ vardır. $S = RT \in \mathcal{F}(Y, X)$ olduğundan $T \in \overline{\mathcal{F}(Y, X)}^{\tau(p,r)}$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Gözlem 4.3 Teorem 4.6’nın b) ve c) şıklarının denkliği aynı zamanda Delgado ve ark. (2013, Önerme 2.17)’dan da görülebilir. Gerçekten Teorem 4.5 ten $\mathcal{K}_{(p,r)} = \mathcal{K} \circ \mathcal{K}_{(p,r)}$ olduğundan onların sonucu Önerme 2.17 de, $\mathcal{A}$ operatör idealini $\mathcal{K}_{(p,r)}$ operatör ideali olarak alırsak Teorem 4.6’nın b) ve c) şıklarının denkliği elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında p –kompakt kümeler üzerine literatürde mevcut olan bazı sonuçlar (p, r) –kompakt kümeler için ele alınmıştır.

$1 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ olmak üzere $(\mathcal{B}(X, Y), \tau_{(p, r)})'$ dual uzayındaki bir fonksiyonelin temsili ifade edilmiştir. (p, r) –kompakt operatörlerin çarpanlara ayrılışı incelenmiş ve (p, r) –yaklaşım özelliğinin bazı karakterizasyonları verilmiştir. Burada belirtelim ki (p, r) –yaklaşım özelliğini üzerine elde edilen karakterizasyonların bazılarının daha genel hali (operatör idealleri vasıtasıyla) Delgado ve Piñeiro (2013)'nın ve Chen ve Lie (2017)'nin operatör ideallerine göre elde ettiği sonuçlarda da içermektedir.

Bu çalışmayla ilgilenen araştırmacılar, $2 < p < \infty$ ve $1 < r \leq p^*$ olmak üzere X' uzayı (p, r) –ap ye sahip iken X uzayının da (p, r) –ap ye sahip olup olmadığını araştırabilirler. Eğer bu gerçekleşirse (p, r) –ap için dualite problemi pozitif çözüme sahip olacaktır.

KAYNAKLAR

- Ain, K., Lillemets, R. and Oja, E., 2012, Compact operators which are defined by ℓ_p –spaces, *Quaestiones Mathematicae*, 35 (2), 145–159.
- Ain, K. and Oja, E., 2012, A description of relatively (p, r) –compact sets, *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica*, 16 (2), 227–232.
- Ain, K. and Oja, E., 2015, On (p, r) –null sequences and their relatives, *Mathematische Nachrichten*, 288 (14–15), 1569–1580.
- Aron, R., Lindström M., Ruess W.M. and Ryan R., 1999. Uniform factorization for compact sets of operators, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 127 (4), 1119–1125.
- Aron, R.M., Maestre, M. and Rueda, P., 2010, p –compact holomorphic mappings, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Seria A. Matematicas. RACSAM*, 104 (2), 353–364.
- Berrios, S. and Botelho, G., 2012, Approximation properties determined by operator ideals and approximability of homogeneous polynomials and holomorphic functions, *Studia Mathematica*, 208 (2), 97–116.
- Bourgain, J. and Reinov, O., 1985, On the approximation properties for the space H^∞ , *Mathematische Nachrichten*, 122, 19–27.
- Casazza, P.G., 2001, Approximation properties, in: W.B. Johnson, J. Lindenstrauss (Eds.), *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 1, *Elsevier*, Amsterdam, 271–316.
- Chen, D.Y. and Li, L., 2017, The approximation properties determined by operator ideals, *Acta Mathematica Sinica (Engl. Ser.)*, 33 (3), 311–326.
- Choi, C. and Kim, J.M., 2008, Locally convex vector topologies on $B(X, Y)$, *Journal of the Korean Mathematical Society*, 45 (6), 1677–1703.
- Choi, C., Kim, J.M. and Lee, K.Y., 2009, Right and left weak approximation properties in Banach spaces, *Canadian Mathematical Bulletin*, 52 (1), 28–38.
- Choi, Y.S. and Kim, J.M., 2010, The dual space of $(\mathcal{L}(X, Y), \tau_p)$ and the p –approximation property, *Journal of Functional Analysis*, 259 (9), 2437–2454 .
- Davie, A. M., 1973, The approximation problem for Banach spaces, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 5, 261–266.
- Delgado, J.M., Oja, E., Piñeiro, C. and Serrano, E., 2009, The p –approximation property in terms of density of finite rank operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 354 (1), 159–164.

- Delgado, J.M. and Piñeiro, C., 2013, An approximation property with respect to an operator ideal, *Studia Mathematica*, 214 (1), 67–75.
- Diestel, J., Fourie, J.H and Swart, J., 2008, The metric theory of tensor products (Grothendieck's resume revisited), *American Mathematical Society*, Providence.
- Enflo, P., 1973, A counterexample to the approximation problem in Banach spaces, *Acta Mathematica*, 130, 309–317.
- Fourie, J. and Swart, J., 1979, Banach ideals of p –compact operators, *Manuscripta Mathematica*, 26 (4), 349–362.
- Galicier, D., Lassalle, S. and Turco, P., 2012, The ideal of p –compact operators: a tensor product approach, *Studia Mathematica*, 211, 269–286.
- Godefroy, G. and Saphar, P. D., 1989, Three-space problems for the approximation properties, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 105 (1), 70–75.
- Grothendieck, A., 1955, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Memoirs of the American Mathematical Society*, 16.
- Kim, J.M., 2008, New criterion of the approximation property, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 345 (2), 889–891.
- Kim, J.M., 2013, The approximation properties via the Grothendieck p –compact sets, *Mathematische Nachrichten*, 286 (4), 360–373.
- Kim, J. M. and Lee, K. Y., 2016, A new characterization of the bounded approximation property, *Annals of Functional Analysis*, 7 (4), 672–677.
- Kim, J.M., 2019, Some results of the K_A –approximation property for Banach spaces, *Glasgow Mathematical Journal*, 61 (3), 545–555.
- Kim, J.M., 2020a, The ideal of weakly p –compact operators and its approximation property for Banach spaces, *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica*, 45 (2), 863–876.
- Kim, J.M., 2020b, Approximation properties of tensor norms and operators ideals for Banach spaces, *Open Mathematics*, 18 (1), 1698–1708.
- Kreyszig, E., 1978, Introductory functional analysis with applications, *John Wiley & Sons*, New York.
- Lassalle, S. and Turco, P., 2012, On p –compact mappings and the p –approximation property, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 389 (2), 1204–1221.
- Lassalle, S., and Turco, P., 2013, The Banach ideal of $\mathcal{A}$ -compact operators and related approximation properties, *Journal of Functional Analysis*, 265 (10), 2452–2464.

- Lima, A., 1993, The metric approximation property, norm-one projections and intersection properties of balls, *Israel Journal of Mathematics*, 84 (3), 451-475.
- Lima, A., Nygaard, O. and Oja, E., 2000, Isometric factorization of weakly compact operators and the approximation property, *Israel Journal of Mathematics*, 119, 325-348.
- Lindenstrauss, J. and Tzafriri, L., 1977, Classical Banach spaces I, sequences spaces, *Springer-Verlag*, Berlin.
- Meggison, R.E., 1998, An introduction to Banach space theory, *Springer-Verlag*, New York.
- Muñoz, F. and Piñeiro, C., 2019, Compactness in the space of p –continuous vector-valued functions, *Studia Mathematica*, 249 (3), 303-318.
- Mustafa, N., 2008, Çözümlü problemlerle fonksiyonel analiz, *Gazi Üniversitesi Vakfı İlke Yayınevi*, Ankara.
- Oja, E., 2008, The strong approximation property, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338 (1), 407-415.
- Oja, E., 2012, A remark on the approximation of p –compact operators by finite-rank operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 387 (2), 949-952.
- Pietsch, A., 2007, History of Banach spaces and linear operators, *Birkhäuser Boston, Inc.*, Boston.
- Piñeiro, C. and Delgado, J. M., 2011, p –convergent sequences and Banach spaces in which p –compact sets are q –compact, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 139 (3), 957-967.
- Reinov, O., 1984, A survey of some results in connection with Grothendieck approximation property, *Mathematische Nachrichten*, 119 (1), 257-264.
- Robertson, A.P. and Robertson W., 1964, Topological vector spaces, 53, *Cambridge University Press*.
- Ryan, R.A., 2002, Introduction to tensor products of Banach spaces, *Springer-Verlag*, London.
- Sinha, D.P. and Karn, A.K., 2002, Compact operators whose adjoints factor through subspaces of l_p , *Studia Mathematica*, 150 (1), 17-33.
- Sinha, D.P. and Karn, A.K., 2008, Compact operators which factor through subspaces of l_p , *Mathematische Nachrichten*, 281 (3), 412-423.
- Soykan, Y., 2012, Fonksiyonel analiz genişletilmiş ve yeniden düzenlenmiş 2. Basım, *Nobel Akademik Yayıncılık Eğitim Danışmanlık*, Zonguldak.

Szankowski, A., 1981, $\mathcal{B}(H)$ does not have the approximation property, *Acta Mathematica*, 147, 89–108.

Wilde, I. F., 2003, Functional analysis (lecture notes): topological vector spaces version, *King's College*, London.

