



SÜREKSİZ PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

SEVDA NUR ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
2021

Her hakkı saklıdır

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜREKSİZ PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

SEVDA NUR ÖZTÜRK

TOKAT
2021

Her hakkı saklıdır

TEZ BEYANI

Tokat Gaziosmapaşı Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak yazdığım ve hazırladığım bu yüksek lisans tez çalışmasında aşağıdaki kurallara uyulduğunu bildirir, aksi bir durum halinde aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabul ettiğimi beyan ederim. Bu tez çalışmasında;

- Bilimsel ahlak normlarına uyulmuştur.
- Başkalarının bilimsel çalışmalarından ve diğer kaynaklardan yararlanıldığı durumda bilimsel normlar dikkate alınarak yönetmeliklere uygun biçimde atıfta bulunulmuştur.
- Tezin "Bulgular ve Sonuç" kısmında yer alan yenilikler ve sonuçlar başka bir kaynaktan alınmamıştır ve tamamen orijinaldir.
- Tez çalışmasında yararlandığımız verilerde hiç bir değişiklik yapılmadan ifade edilmiştir.
- Tezin hiç bir kısmı ne bizim üniversitemizde, ne de başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmamıştır.

SEVDA NUR ÖZTÜRK

30/06/2021

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜREKSİZ PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

SEVDA NUR ÖZTÜRK

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Bu tez çalışmasında; iki ayrık aralıkta tanımlanan ve geçiş şartları da içeren bir periyodik Sturm-Liouville problemi araştırılmıştır. Tez aşağıdaki biçimde düzenlenmiştir. Bölüm 1’de araştırılan problemin bilimsel önemi ve uygulama alanları hakkında kısa bilgiler verilmiştir. Bölüm 2’de tez konusu alanındaki literatürün özeti verilmiştir. Bölüm 3’te klasik periyodik Sturm-Liouville probleminin temel kavramları ve özellikleri verilmiştir. Tezimizin orijinal kısmı olan Bölüm 4’te iletişim noktasında tanımlı ek geçiş şartları ile verilmiş (bu şartlar geçiş şartları olarak adlandırılmaktadır) periyodik Sturm Liouville probleminin bazı önemli spektral özellikleri bulunmuştur. Sonuncu bölümde tezin sonuçlarından bahsedilmiş ve bazı önerilerde bulunulmuştur.

2021, iv+54 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sturm-Liouville Problemleri, Özdeğerler, Özfonksiyonlar, Periyodik sınır şartları.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

DISCONTINUOUS PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEMS

SEVDA NUR ÖZTÜRK

**TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY
INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

In this thesis, a periodic Sturm-Liouville problem with additional transmission conditions are considered on two disjoint intervals. This study is organized as follows. Chapter 1 provides brief information on the scientific significance and fields of application of the problem under consideration. Chapter 2 provides an overview of the literature on the topic of the thesis. Chapter 3 presents the basic concepts and properties of classical periodic Sturm-Liouville problem. In the main part of the thesis(Chapter 4) some important spectral properties of the periodic Sturm-Liouville problem with additional conditions of transition (so-called transmission conditions) at the interaction point were obtained. The last chapter is devoted to the conclusion of the thesis and some suggestions.

2021, iv+54 pages

KEYWORDS: Sturm-Liouville Problems, Eigenvalues, Eigenfunctions, Periodic boundary conditions.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	4
3. GENEL BİLGİLER	8
3.1. Sınır Değer Problemleri	8
3.2. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri	11
3.3. Periyodik Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri	16
4. BULGULAR ve SONUÇ	23
4.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi, Özdeğerlerin Reelliği ve Özfonksiyonların Ortogonalitesi	23
4.2. Verilmiş Problemle İlgili Bazı Yardımcı Başlangıç-Değer Problemlerinin Temel Çözümleri ve Bu Temel Çözümlerle İlgili Önermeler	29
4.2.1 Bazı Yardımcı Başlangıç Değer Problemleri	29
4.3. Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler	31
4.4. $\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ Temel Çözümlerinin Asimptotik Davranışları	38
4.5. Karakteristik Fonksiyonun Kurulması	47
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR	51

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca ve bu tez çalışmasında bilgisini, desteğini, kıymetli zamanını, değerli fikirlerini ve emeğini hiçbir zaman esirgemeyen, her daim ufkumu açan ve her türlü sıkıntıda daima yanımda olan çok kıymetli hocam sayın Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU' na bana kattığı her bir değer için, yolumu aydınlattığı; yaşama, matematiğe ve hayata olan bakış açımı değiştirebilmeme imkan sağladığı için, beni öğrencisi olarak kabul ederek bu onuru bana yaşattığı için en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca bana yardımcı olan bölümümüzün değerli hocalarına ve öğrenim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime şükran ve minnetlerimi sunarım.

Teşekkürlerimin en büyüğünü hak eden, bugün var olduğum yerde olmamı sağlayan, hem anne hem de baba sevgisiyle daima sarıp sarmalayan, seven, koruyan ve tek başına büyüten canım annem Fadime Zeytin' e varlığı için ve beni hep desteklediği için sonsuz kez teşekkür ederim.

Ayrıca her daim yanımda olan: Ablam Sema Nur Serdaroglu' na, kız kardeşlerim Şeyma Nur Öztürk ve Gülnur Aydoğan' a, her bunaldığım anda yanına koştuğum, sarılınca bütün sıkıntılarımı unuttuğum, bana anne olmadan annelik duygusu yaşatan canım oğlum, yeğenim Mehmet Tuğrul Aydoğan' a, ailemizin miniği kıymetlim, yeğenim Zeynep Sare Serdaroglu' na sonsuz teşekkür ve sevgilerle...

SEVDA NUR ÖZTÜRK

Haziran 2021

1. GİRİŞ

Adi ve kısmi diferansiyel denklemler fiziksel olayları modelleme tarihinde uzun süredir önemli rol oynamıştır ve bu denklemler halen fiziksel problemlerin modellenmesinde vazgeçilmez olarak hizmet etmeye devam etmektedirler. Adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin belirli koşulları sağlayan çözümlerini bulmak ilgi çekici olmuştur. Eğer koşullar bağımsız değişkenin birden fazla noktasında verilmiş ise bunlara sınır koşulları denir. n . mertebeden bir diferansiyel denklemin çözümünün n tane başlangıç koşullarıyla birlikte bulma problemine başlangıç değer problemi denir. Fakat n tane sınır koşulları da dikkate alınırsa problem sınır değer problemi olarak adlandırılır.

İkinci dereceden adi lineer diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri, bilim ve teknolojiye çok sayıda uygulama nedeniyle özellikle önemlidir. Birçok matematiksel fizik probleminin, değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümünün esaslandırılabilmesi için uygun Sturm-Liouville tipinde problemlerin spektral özelliklerinin araştırılması gerekiyor. Ayrıca modern fiziğin ve diğer doğa bilimlerinin talepleri doğrultusunda yeni tipten Sturm-Liouville problemlerinin araştırılmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

Matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin birçok alanında Sturm-Liouville problemlerinin ortaya çıktığı biliniyor. Örneğin bazı klasik mekanik problemlerinde, elektromanyetik teoride, kuantum fiziğinde ve özellikle dalga denklemlerinde bu problemlere sıkça rastlanmaktadır. İlk olarak 19. yüzyılın ortalarında Sturm ve Liouville tarafından ısı iletimi problemlerinin incelenmesiyle ortaya çıkan bu tipten problemler günümüzde de yoğun bir şekilde incelenmektedir. Bu konuda çok sayıda kitap ve makale yayınlanmasına rağmen Sturm-Liouville problemleri hem matematiksel fiziğin hem de diferansiyel operatörler teorisinin daha da gelişmekte olan güncelliğini koruyan konusu olmaktadır. Matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni somut problemlerin araştırılma ihtiyacı sınır değer problemleri teorisinin daha da geliştirilmesi ihtiyacını ortaya koymaktadır.

Sturm Liouville teorisinde elde edilen sonuçlar bir çok yeni bilim dalının oluşumunda önemli rol oynamıştır. Örneğin, İntegral denklem teorisi, kendine eşlenik operatörler

teorisi, Spectral analiz, Fourier Analizi gibi teorilerdeki bir çok kavramın ve sonuçların bulunmasında Sturm Liouville teorisinden elde edilen sonuçlardan yararlanılmıştır. Bilim ve teknolojinin gelişimi ile bir çok yeni fizik probleminin çözümü ihtiyacı doğmaktadır. Böyle matematiksel modeller genel olarak kısmi diferansiyel denklemler biçiminde ifade edilmektedir. Fiziksel sürecin başlangıç durumu ve sürecin oluşturduğu ortamın sınırındaki durumu sınır şartları ile ifade edilmektedir. Böylece sınır değer problemleri olarak adlandırılan problemler karşımıza çıkmaktadır. Bu tür problemlerin çözümü için uygulanan en yaygın yöntemlerden biri değişkenlerine ayırma yöntemi olarak ta adlandırılan Fourier yöntemidir. Bu yöntemin esaslandırılabilmesi için Sturm Liouville probleminin sonsuz sayıda özdeğerinin mevcut olduğu ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonların uygun Hilbert uzayında baz oluşturduğunu kanıtlamak gerekir. Örneğin, σ ve ψ kutupsal koordinatlar olmak üzere $\sigma \leq 1$ yuvarında kararlı sıcaklığı $u(\sigma, \psi)$ ile gösterirsek, bu fonksiyon için aşağıdaki sınır değer problemi elde edilir.

$$\sigma^2 \frac{\partial^2 u(\sigma, \psi)}{\partial \sigma^2} + \sigma \frac{\partial u(\sigma, \psi)}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = 0, \quad 0 \leq \sigma < 1, \quad -\pi < \psi < \pi$$

$$u(1, \psi) = h(\psi)$$

Bu probleme Fourier yöntemini uygularsak ,

$$-y''(\psi) = \lambda(\psi), \quad -\pi < \psi < \pi$$

$$y(-\pi) = y(\pi)$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi)$$

biçimindeki basit Sturm-Liouville problemini elde ederiz. Bu problemin özdeğerleri,

$$\lambda_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde ,uygun özfonksiyonlar ise

$$y_{1n}(\psi) = \sin n\psi, \quad y_{2n}(\psi) = \cos n\psi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde bulunur.

Yukarıdaki kararlı sıcaklık probleminin çözümünü elde etmek için $h(\psi)$ fonksiyonun,

$$h(\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\psi + b_n \sin n\psi)$$

biçiminde trigonometrik Fourier serisine açılabilmesi gerekir. Bu örnekle Fourier serileri ve sınır değer problemleri teorilerinin önemini, bu teoriler arasındaki bağıntının anlaşılması için yeterli gerekçe oluşturmaktadır.

Bu tez çalışmasında süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunan ve sınır şartları ile verilen periyodik Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Üzerinde çalıştığımız problem süreksizlik noktasında tanımladığımız özel geçiş şartlarından dolayı daha önce çalışılmamış orijinal bir problem olması nedeniyle ayrıca elde edeceğimiz sonuçlar hem teorik açıdan hem de somut fizik problemlerine uygulanabilmesi açısından literatüre özgün katkı sağlayacaktır ve tez bu konuda kaynak oluşturacaktır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin birçok alanında Sturm-Liouville problemlerinin ortaya çıktığı biliniyor. İlk olarak 19. yüzyılın ortalarında Jacques Sturm(1803-1855) ve Joseph Liouville (1809-1882) tarafından ısı iletimi problemlerinin incelenmesiyle ortaya çıkmıştır ve bu matematikçilerin çalışmalarından sonra bu tip problemler Sturm-Liouville sınır değer problemi olarak adlandırılmıştır. Bu konuda çok sayıda çalışma yapılmış olmasına rağmen Sturm-Liouville problemleri hem diferansiyel denklemler teorisinin hem de uygulamalı matematiğin en önemli ve en güncel konusu olmaya devam etmektedir. Çünkü çağdaş mekanik ve fiziğin talepleri yeni ve standart olmayan sınır-değer problemlerinin incelenmesi ihtiyacını ortaya koymakta, bu durum ise Sturm-Liouville teorisinin gelişimine her geçen gün biraz daha katkı sunmaktadır.

Quantum mekaniğinde ortaya çıkan ünlü Schrödinger denkleminin araştırılması Sturm-Liouville teorisinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynamıştır. Kristal örgüde iletken elektronun hareketi için basit bir model olan periyodik potansiyele sahip zamandan bağımsız Schrödinger denklemi

$$i\hbar\psi_t = \frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi \quad (2.0.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada problemin tek boyutlu olduğu düşünülmüştür. Denklemden verilen $V(x)$:elektronun dalga fonksiyonu olan periyodik bir fonksiyon, $\hbar : 1,01.10^{-3}Js$ değerinde Dirac sabiti, m :parçacığın kütlesi, ψ :parçacığa eşlik eden dalga fonksiyonu olarak ifade edilmektedir. $V(x)$ periyodik fonksiyonunun periyodunu a ile gösterir ise $V(x+a) = V(x)$ denkleminin sağlandığı bellidir. O halde;

$$y(x) = \varphi\left(\frac{x}{a}\right), \quad q(x) = \frac{2ma^2}{\hbar} V\left(\frac{x}{a}\right), \quad \lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

değişken değişimleri yapılarak y normal dalga fonksiyonu λ enerji parametresi $q(x+1) = q(x)$ olmak üzere (2.0.1) denklemi;

$$-y'' + q(x)y = \lambda y$$

biçimindeki Sturm-Liouville denkleminde indirgenir.

Birkoff 1908 yılında yapmış olduğu çalışmada

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \lambda \alpha_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \lambda^n \alpha_0(\alpha, \lambda) y = 0 \quad (2.0.2)$$

şeklindeki özdeğer parametresi içeren lineer denklemlerin temel çözümleri için asimptotik eşitlikler elde etmiş, regüler sınır şartlarını tanımlamış ve regüler sınır-değer problemleri için özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremler ispatlamıştır.

Tamarkin (1917), sınır şartlarında güçlü regülerlik kavramını bulmuş ve bu durumda özdeğerler için asimptotik formüller elde etmiş, regülerlik durumunda ise Green fonksiyonunu değerlendirmiş ve özfonksiyonlar ile özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonlar sistemi için seri açılım teoremini ispatlamıştır.

Walter 1973 yılındaki çalışmasında,

$$Tu : = \frac{1}{r} \{ -(pu')' + qu \} = \lambda u, \quad [\alpha_1, \alpha_2] \quad (2.0.3)$$

$$-(\beta_{ij} u(\alpha_i)) = \lambda (\alpha_{i1} u(\alpha_i) - \alpha_{i2} u'(\alpha_i)) \quad (i = 1, 2) \quad (2.0.4)$$

$$\varphi = \beta_1' \beta_2 - \beta_1 \beta_2' > 0 \quad (2.0.5)$$

şeklindeki özdeğer parametresini hem denkleminde hem de sınır şartlarında bulunduran ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin uygun Hilbert uzaylarında kendine eşlenik operatörlerle bağlantısını kurmuş ve bu şekildeki problemler için operatör-teorik yorumunu vermiştir. Bunlarla birlikte bu çalışmada Hilbert uzaylarında kendine eşlenik operatör teorisinden yararlanarak özfonksiyonlar üzerine açılım teoremini ispatlamıştır.

Sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran bazı kendine eşlenik sınır değer problemleri Schneider (1974), Fulton (1977), Hinton (1970) tarihli çalışmalarda incelenmiştir.

Schneider "A Note an Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Matz. Z.1974", adlı çalışmasında

$$-(pu')' + qu = \lambda ru \quad (2.0.6)$$

$$u(a) = 0 \quad (2.0.7)$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda (\alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b)) \quad (2.0.8)$$

problemini,

Fulton "Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Roy. Soc. Edinburg 77a (1977),293-308" künyeli makalesinde;

$$Tu := -u'' + qu = \lambda ru \quad (2.0.9)$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha u'(a) = 0, \alpha \in [0, \pi) \quad (2.0.10)$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda (\beta'_1 u(b) - \beta'_2 u'(b)) \quad (2.0.11)$$

biçimdeki sınır değer problemini,

Hinton "An Eigenvalue Theorem For An Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2) (1979), 33-42" adlı çalışmasında

$$Tu := \frac{1}{r} \{-(pu')' + qu\} = \lambda u \quad (2.0.12)$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha (pu')(a) = 0, \alpha \in [0, \pi) \quad (2.0.13)$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 (pu')(b)) = \lambda (\beta'_1 u(b) - \beta'_2 (pu')(b)) \quad (2.0.14)$$

biçimindeki Sturm-Liouville problemini araştırmışlardır.

Yirminci yüzyılınbaşlarından itibaren pek çok çalışmaya konu olmuş Singüler Petübe olmuş problemlerin incelenmeleri arasına periyodik sınır-değer problemleri de girmiştir (Ling ve Jiang,1987; Cai,2010; Amiraliyev ve Duru,2003; Cen,2011). Zamana bağlı problemlerin incelenmesi ise Amiraliyev (1988) ve Gülle (1995) tarafından yapılmıştır. Amiraliyev ve Çakır (2000) yılında yayımlanan çalışmalarında,

konvektif terim ve sıfıncı merteye indirgenmiş denklemlere sahip düzgün yakınsak fark metodu geliştirilerek singüler pertürbe periyodik sınır-değer problemleri için fark şemaları verilmiş ve nümerik çözümleri incelenmiştir.

Bahsettiğimiz bütün çalışmalarda sınır-değer problemleri , geçiş şartları içermeyen sınır değer problemleri için incelenmiştir. Muhtarov ve arkadaşları (Muhtarov, 1994; Muhtarov ve Kandemir, 2002; Muhtarov ve Aydemir, 2016; Muhtarov ve Aydemir, 2017; Muhtarov, Olğar ve Aydemir, 2015) çalışmalarında ise süreksiz katsayılı adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville problemleri araştırılmıştır. Bu çalışmalarda esasen diferansiyel ve özdeğer parametresine bağlı olan sınır-değer geçiş problemleri için izomorfluk, hem uzay değişkenine hem de özdeğer parametresine göre koersitivlik, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiklerinin bulunması, rezolvent operatörünün değerlendirilmesi, tamlik ve iki kat tamlik, Abel bazlığı v.s. hakkında teoremler ispatlanmış ve uygun parabolik tipten kısmi türevli diferansiyel denklemler için Sturm-Liouville problemleri incelenmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tez çalışmamızda geçen temel kavram ve sonuçlar ile ilgili gerekli olan öz bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Sınır Değer Problemleri

İkinci mertebeden

$$M(y) = a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (3.1.15)$$

denklemini;

$$B_1(y) = \alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = \gamma_1 \quad (3.1.16)$$

$$B_2(y) = \alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{21}y(b) + \beta_{22}y'(b) = \gamma_2 \quad (3.1.17)$$

sınır koşullarına bağlı olarak çözme problemini düşünelim.

Burada $a_2, a_1, a_0 \in C[a, b]$, $a_2(x) \neq 0$, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_i$ sabitlerdir. (3.1.1)-(3.1.3) problemi bir sınır değer problemi olarak adlandırılır. Eğer $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$, $\alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$ ise sınır koşulları ayıraktır. Eğer $\alpha_{12} = \beta_{12} = 0$, $\alpha_{21} = \beta_{21} = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ve $\alpha_{11} = -\beta_{11}$, $\alpha_{22} = -\beta_{22}$ ise sınır koşulları periyodiktir. Eğer $\alpha_{12} = \beta_{11} = \beta_{12} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$ ise $y(a) = \frac{\gamma_1}{\alpha_{11}}$, $y'(a) = \frac{\gamma_2}{\alpha_{22}}$ biçiminde başlangıç değer koşulları elde edilir. B_i sınır operatörlerinin lineer olduğunu dikkate alacağız. $\{f(x), \gamma_1, \gamma_2\}$ üçlüsü sınır değer probleminin verileri olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1. Homojen olmayan

$$M(y) = 0, \quad B_1(y) = \gamma_1, \quad B_2(y) = \gamma_2 \quad (3.1.18)$$

sınır değer probleminin bir tek çözümünün bulunması için gerek ve yeter şart;

$$M(y) = 0, \quad B_1(y) = B_2(y) = 0 \quad (3.1.19)$$

biçiminde homojen sınır değer probleminin bir tek $y = 0$ çözümünün bulunmasıdır.

İspat. İlk olarak (3.1.4) sınır değer probleminin çözümünün tek olduğunu ve y_1, y_2 nin (3.1.4)'ün lineer bağımsız çözümleri olduğunu bildiğimizi varsayalım. Eğer u

fonksiyonu (3.1.4) sınır değeri probleminin herhangi bir çözümü ise o halde bu çözüm y_1 ve y_2 nin bir lineer kombinasyonu olmak zorundadır,

$$u = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

yazılabilir. Burada α_1 , α_2 tektir.

Bu ifade (3.1.4)'ün sınır şartlarında yazılırsa;

$$\alpha_1 B_1(y_1) + \alpha_2 B_1(y_2) = \gamma_1$$

$$\alpha_1 B_2(y_1) + \alpha_2 B_2(y_2) = \gamma_2$$

veya

$$\begin{pmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \quad (3.1.20)$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. α_1 , α_2 tek olduğundan;

$$\det \begin{pmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.1.21)$$

dır. Şimdi $w(x)$ fonksiyonunun $M(y) = 0$, $B_1(y) = 0$, $B_2(y) = 0$ sınır değeri probleminin çözümü olduğunu varsayalım. O halde;

$$w = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 \quad (3.1.22)$$

olacak biçimde ξ_1 ve ξ_2 sabitleri mevcuttur.

Bu durumda

$$\begin{pmatrix} B_1(y_1) & B_1(y_2) \\ B_2(y_1) & B_2(y_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde ederiz ve katsayılar matrisinin determinanı 0 olmadığından (3.1.7)' den $\xi_1 = \xi_2 = 0$ elde edilir. Tersine, eğer

$$M(y) = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

probleminin sadece aşıkâr çözümü varsa (3.1.8) gereği (3.1.7) nin geçerli olduğu ve dolayısıyla (3.1.4)'ün tek bir çözümü olduğu açıktır.

Teorem 3.1.2.

$$M(y) = 0, \quad B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

sınır değer probleminin sadece aşıkâr çözümü varsa;

$$\begin{aligned} M(y) &= f, & x &\in (a, b) \\ B_1(y) &= \gamma_1, & B_2(y) &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

sınır değer probleminin tek bir çözümü vardır.

İspat. u_1 ve u_2 $M(y) = 0$ ' ın lineer bağımsız çözümleri ve y_p , $M(y) = f$ ' ın bir özel çözümü olsun. Şimdi (3.1.9) probleminin

$$y = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + y_p \tag{3.1.24}$$

biçiminde bir çözümünü arayalım. (3.1.10) ifadesini (3.1.9) probleminde yerine yazarsak α_1 ve α_2 bilinmeyenleri için

$$B_1(y) = \alpha_1 B_1(u_1) + \alpha_2 B_1(u_2) + B_1(y_p) = \gamma_1$$

$$B_2(y) = \alpha_1 B_2(u_1) + \alpha_2 B_2(u_2) + B_2(y_p) = \gamma_2$$

veya

$$\begin{pmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 - B_1(y_p) \\ \gamma_2 - B_2(y_p) \end{pmatrix}$$

biçiminde bir homojen olmayan lineer denklem sistemi elde ederiz. Homojen

problemin sadece aşikar çözümü olduğundan matrisin tersi mevcuttur ve böylece

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 - B_1(y_p) \\ \gamma_2 - B_2(y_p) \end{pmatrix}$$

eşitliği bulunur.

3.2. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri

Pratikte genellikle kendine eşlenik olarak adlandırılan formda ikinci dereceden bir diferansiyel denklemle karşılaşılır ve genellikle en yaygın sınır koşullarının ya ayrık ya da periyodik olduğu görülür.

İkinci mertebeden kendine eşlenik L diferansiyel operatörü

$$L(y) = (ky')' + g(x)y$$

biçiminde yazılabilir.

Aşağıdaki sınır değer problemini gözönüne alalım.

$$L(y) + \lambda p(x)y = 0 \quad a < x < b \quad (3.2.25)$$

$$B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0 \quad (3.2.26)$$

Burada k, k', g, p reel değerli ve $[a, b]$ üzerinde süreklidirler. Ayrıca $k, p > 0$ 'dır.

Ayrık sınır koşulları

$$B_1(y) = \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad (3.2.27)$$

$$B_2(y) = \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (3.2.28)$$

biçiminde ifade edilir. Sınır değer problemi bir regular Sturm-Liouville özdeğer problemi olarak adlandırılır. Sınır değer probleminin aşikar olmayan bir çözümü bulunursa, λ sayısına özdeğerler denir.

Genel biçimde verilen

$$Ly = a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y$$

$$L(y) + \lambda p(x)y = 0$$

$$B_1(y) = 0, \quad B_2(y) = 0$$

sınır değer problemi için

$$\int_a^b [vL(u) - uL(v)] dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o halde bu problem kendine eşleniktir denir.

Teorem 3.2.1.

$$L(u) + \lambda pu = 0$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

biçiminde verilmiş Sturm-Liouville problemi kendine eşleniktir.

İspat. Kısmi integrasyon yardımı ile

$$\int_a^b [vL(u) - uL(v)] dx = k(x)(u'v - v'u)|_a^b \equiv P(u, v)|_a^b \quad (3.2.29)$$

Green formülü olarak adlandırılan eşitlik elde edilir. Eğer u ve v $x = a$ ' da sınır koşullarını sağlarsa,

$$\begin{pmatrix} v(a) & v'(a) \\ u(a) & u'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ olduğundan

$$u'(a)v(a) - v'(a)u(a) = 0$$

elde edilir. Benzer yolla görüyoruz ki eğer u ve v $x = b$ 'de sınır koşullarını sağlarsa

$$u'(b)v(b) - v'(b)u(b) = 0$$

olur. Buradan görüyoruz ki $P(u, v)|_a^b = 0$ elde edilir. İspat bitti.

Aşağıdaki teorem farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların $p(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğunu belirtir.

Teorem 3.2.2. (λ, u) ve (μ, v) 'nin

$$L(u) + \lambda p(x)u = 0$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0$$

Regular Sturm-Liouville sınır değer probleminin özdeğer çiftleri olduğunu kabul edelim.

O halde

$$\int_a^b u(x)v(x)p(x)dx = 0$$

eşitliği sağlanır. Yani; u ve v p ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.

İspat. (3.2.5) Green formülünden

$$\begin{aligned} (\lambda - \mu) \int_a^b uvp(x)dx &= \int_a^b [uL(v) - vL(u)] dx \\ &= k(x)(u'v - v'u)|_a^b = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\lambda - \mu \neq 0$ olduğu için

$$\lambda - \mu \neq 0 \Rightarrow \int_a^b uvp(x)dx = 0$$

dır.

Teorem 3.2.3. Regular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi'nin özdeğerleri reeldir.

İspat. Eğer

$$L(u) + \lambda p(x)u = 0 \quad \text{ise}$$

O halde

$$\overline{L(u)} + \overline{\lambda p(x)u} = 0$$

veya

$$L(\bar{u}) + \bar{\lambda}p(x)\bar{u} = 0$$

sağlanır. Ayrıca

$$B_1(\bar{y}) = 0 = B_2(\bar{y})$$

olduğu da açıktır. Böylece $(\bar{\lambda}, \bar{u})$ bir özdeğer çiftidir ve bu nedenle

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b u \bar{u} p \, dx = 0$$

veya

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_a^b |u|^2 p \, dx = 0$$

eşitliği elde edilir. $p > 0$ ve $|u|^2 \neq 0$ olduğundan (u bir özfonksiyon olduğundan) $\lambda = \bar{\lambda}$ olmalıdır. Yani λ reeldir. İspat bitti.

Tanım 3.2.4. Eğer L_λ 'nın sıfır uzayının boyutu bir ise yani $\{\varphi : L_\lambda \varphi = 0\}$ 'ın boyutu bir ise λ özdeğerine basit özdeğer denir. Aksi halde, λ çok katlı bir özdeğerdir denir.

Teorem 3.2.5. Regular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi'nin özdeğerleri basittir (tek katlıdır).

İspat. u , v 'nin aynı λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde;

$$\begin{pmatrix} u(a) & v(a) \\ u'(a) & v'(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Burada u , v fonksiyonları $L(y) + \lambda p y = 0$ denklemini sağlayan fonksiyonlardır. $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ olduğundan, katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşit olur ve bu yüzden u , v lineer bağımlıdır. Yani; $v(x) = cu(x)$. İspat bitti.

Eğer problemde $k(a) = k(b)$ ise ve ayrık sınır koşulları yerine periyodik sınır koşulları olan $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ koşulları verilmişse o halde Teorem (3.3) – (3.5) hala

geçerli olur fakat Teorem (3.7) artık geçerli olmaz.

Biz henüz Regular Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi'nin herhangi bir özdeğerinin olup olmadığına değinmedik. Aşağıdaki örnekler özdeğerlerin sonsuz fakat sayılabilir sayıda özdeğer olduğunu gösterir.

Örnek 3.2.6.

$$\begin{aligned}y'' + \lambda y &= 0, & 0 < x < l \\y(0) &= 0, & y(l) = 0\end{aligned}$$

Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulalım.

Eğer $\lambda = 0$ ise; diferansiyel denklemin genel çözümü $y(x) = ax + b$ şeklindedir. Sınır koşullarında yerine koyarsak $a = b = 0$ elde edilir. Yani $y(x) = 0$ elde edilir. Yani $\lambda = 0$ özdeğer değildir.

Eğer $\lambda < 0$ ise $\lambda = -\mu^2$ biçiminde yazarsak denklemin genel çözümünü

$$y(x) = a \sinh(\mu x) + b \cosh(\mu x)$$

biçiminde yazabiliriz.

Buradan $y(0) = 0$ ise $b = 0$ ve $y(l) = 0$ ise $a = 0$ 'dır. Buradan $y(x) = 0$ olduğu açıktır. Yani problemin negatif özdeğeri bulunmuyor.

Eğer $\lambda > 0$ ise $\lambda = \mu^2$ kabul edelim. O halde genel çözüm;

$$y(x) = a \sin(\mu x) + b \cos(\mu x)$$

biçiminde yazılabilir ve $y(0) = 0$ ise $b = 0$ 'dır. $x = l$ 'deki sınır koşullarından

$$a \cdot \sin(\mu l) = 0$$

elde ederiz. Buradan $\mu l = n\pi$, $n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \mp 4, \dots$ için aşikar olamayan bir çözüm elde ederiz.

Dolayısıyla özdeğerler ve özfonksiyonlar

$$\lambda_n = (n\pi/l)^2, \quad y_n(x) = \sin(n\pi x/l) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

biçimindedir.

3.3. Periyodik Sturm-Liouville Sınır Değer Problemleri

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad x \in R \quad (3.3.1)$$

Sturm-Liouville denklemi verilsin kabul edelim ki, $q(x)$ fonksiyonu sürekli ve T periyotlu periyodik fonksiyon olsun, yani $\forall x \in R$ için $q(x+T) = q(x)$ eşitliği sağlansın. (3.3.1) denkleminde ve

$$y(a) = y(a+T), \quad y'(a) = y'(a+T) \quad (3.3.2)$$

sınır şartlarından oluşmuş sınır-değer problemi periyodik Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır.

Green özdeşliğinden yararlanarak (3.3.1), (3.3.2) periyodik Sturm-Liouville probleminin (kısaca PSLP'nin) kendine eşlenik değer problemi (SDP) olduğunu kolayca gösterebiliriz.

Genelliği bozmadan $a = 0$ ve $T = \pi$ alalım, (3.3.1) denklemi ve

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) \quad (3.3.3)$$

periyodik sınır şartlarından oluşan PSLP'ni göz önüne alalım. (3.3.1) denkleminin

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad (3.3.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $u(x, \lambda)$ ile,

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (3.3.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü ise $v(x, \lambda)$ ile gösterelim. Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilinen varlık ve teklik teoremleri gereği $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ çözümleri mevcuttur ve tektirler (Kandemir, 2015). $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ çözümlerinin Wronskian'ı x ' den bağımsız olduğu için (Kandemir,2015)

$$\begin{aligned} W(u, v)|_x = W(u, v)|_{x=0} &= u(0, \lambda)v'(0, \lambda) - u'(0, \lambda)v(0, \lambda) \\ &= 0.0 - 1.1 = -1 \neq 0 \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

olacak. Bu nedenle $u(x, \lambda)$ ve $v(x, \lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdırlar. O halde (3.3.1) diferansiyel denkleminin genel çözümünü

$$y(x, \lambda) = c_1 u(x, \lambda) + c_2 v(x, \lambda) \quad (3.3.7)$$

biçiminde yazabiliriz. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. (3.3.7) ifadesini (3.3.3) sınır şartlarında yazarsak, c_1 ve c_2 değişkenlerine göre aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\left. \begin{aligned} c_1 u(\pi, \lambda) + c_2 (v(\pi, \lambda) - 1) &= 0 \\ c_1 (u'(\pi, \lambda) - 1) + c_2 v'(\pi, \lambda) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3.8)$$

Lineer cebir teorisinden iyi bilinmektedir ki, (3.3.8) denklem sisteminin $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ aşikar olmayan çözümünün bulunması için;

$$\det \begin{bmatrix} u(\pi, \lambda) & v(\pi, \lambda) - 1 \\ u'(\pi, \lambda) - 1 & v'(\pi, \lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3.9)$$

eşitliğinin sağlanması hem gerek, hem de yeter şarttır. O halde (3.3.6) gereği λ nın özdeğer olması için

$$u'(\pi, \lambda) + v(\pi, \lambda) = 2 \quad (3.3.10)$$

eşitliğinin sağlanması gerek ve yeter şarttır.

Teorem 3.3.1. (3.3.1), (3.3.3) Periyodik Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. Bu teoremin ispatı ve ayırık sınır şartları ile verilmiş regular Sturm-Liouville problemi için uygun teoremin ispatına tıpatıp benzerdir. (bakınız, [Titchmarsh, 1962])

Teorem 3.3.2. $\lambda = \lambda_0$ değerinin (3.3.1), (3.3.3) Periyodik Sturm-Liouville probleminin katlı özdeğeri olması için

$$\begin{aligned} u(\pi, \lambda_0) &= 0, & u'(\pi, \lambda_0) &= 1 \\ v(\pi, \lambda_0) &= 1, & v'(\pi, \lambda_0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

eşitliklerinin sağlanması gerek ve yeter şarttır.

İspat. İlk önce gerekliliği ispat edelim. $\lambda = \lambda_0$ değerin (3.3.1), (3.3.3) PSLP'nin katlı özdeğeri olduğunu kabul edelim. O halde bu özdeğere uygun iki tane lineer bağımsız $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ özfonksiyonları mevcuttur. Bu durumda (3.3.1) Sturm-Liouville denkleminin (kısaca, SLD'nin) genel çözümü;

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \quad (3.3.12)$$

biçiminde yazabiliriz. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonları (3.3.3) periyodik sınır şartlarını sağladığı için onların lineer birleşimi olan $y(x)$ fonksiyonu da (3.3.3) şartlarını sağlar. Yani (3.3.12) ile tanımlı $y(x)$ fonksiyonu her A, B için (3.3.1), (3.3.3) SLP'nin genel çözümü olduğunu ve de $u(x, \lambda_0)$ ve $v(x, \lambda_0)$ fonksiyonları (3.3.1) denkleminin ($\lambda = \lambda_0$ için) çözümleri olduğu için

$$u(x, \lambda_0) = A_1 y_1(x) + B_1 y_2(x) \quad (3.3.13)$$

$$v(x, \lambda_0) = A_2 y_1(x) + B_2 y_2(x) \quad (3.3.14)$$

olacak biçimde A_1, A_2, B_1, B_2 sayıları mevcuttur. (3.3.13) ve (3.3.14)'ün sağ tarafları (3.3.3) sınır şartlarını sağladıkları için, sol tarafları da (3.3.3) sınır şartlarını sağlar. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} u(\pi, \lambda_0) &= u(0, \lambda_0) = 0, & u'(\pi, \lambda_0) &= u'(0, \lambda_0) = 1 \\ v(\pi, \lambda_0) &= u(0, \lambda_0) = 1, & v'(\pi, \lambda_0) &= v'(0, \lambda_0) = 0 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Böylece gerekliliğin ispatı bitti.

Şimdi yeterliliği ispat edeceğiz.

$u(x, \lambda_0)$ ve $v(x, \lambda_0)$ çözümlerinin (3.3.11) başlangıç şartlarını da sağladığını kabul

edelim. O halde

$$\begin{aligned} u(0, \lambda_0) = 0 = u(\pi, \lambda_0), & \quad u'(0, \lambda_0) = 1 = u'(\pi, \lambda_0) \\ v(0, \lambda_0) = 1 = v(\pi, \lambda_0), & \quad v'(0, \lambda_0) = 0 = v'(\pi, \lambda_0) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmış olur. Dolayısı ile (3.3.1) diferansiyel denkleminin hem $u(x, \lambda_0)$ hem de $v(x, \lambda_0)$ çözümlerinin her ikisi (3.3.3) periyodik sınır şartlarını da sağlar. Yani bu çözümlerin her ikisi de (3.3.1), (3.3.3) PSLP'nin çözümü oluyor, yani her ikisi de aynı λ_0 özdeğerine uygun özfonksiyon oluyor. Ayrıca (3.3.6) bağıntısı gereği bu özfonksiyonlar lineer bağımsızdırlar.

Böylece λ_0 özgerinin katlı özdeğer olduğu ve de geometrik katının ≥ 2 olduğu ispat edildi. Yeterliliğin de ispatı bitti, yani teoremin ispatı bitti.

Sonuç 3.3.3. $\lambda = \lambda_0$ değerinin (3.3.1), (3.3.3) PSLP'nin iki katlı özdeğeri olması için (3.3.11), eşitlikleri gerek ve yeter şarttır.

İspat. (3.3.1) diferansiyel denklemi ikinci mertebeden lineer diferansiyel denklem olduğu için her λ için bu denklemin iki tane lineer bağımsız çözümü bulunur. Bu nedenle her $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine uygun en fazla iki tane özfonksiyon karşılık gelir. Yani her $\lambda = \lambda_0$ özdeğerinin katı ≤ 2 'dir.

Şimdi aşağıda verilen bir periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulacağız.

Örnek 3.3.4.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (3.3.15)$$

Sturm-Liouville denkleminde ve

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1) \quad (3.3.16)$$

periyodik sınır şartlarından oluşan periyodik Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım. İlk önce $\lambda = 0$ sayısının bu problemin özdeğeri olup olmadığını araştıralım. Bu durumda (3.3.15) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 x + c_2 \quad (3.3.17)$$

biçimindedir. Bunu (3.3.16) sınır şartlarında yerine yazarsak c_1 ve c_2 katsayıları için

$$\begin{cases} c_2 = c_1 + c_2 \\ c_1 = c_1 \end{cases} \quad (3.3.18)$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $c_1 = 0$ bulunur. Böylece $\forall c_2 \in R$ için $y(x) = c_2$ sabit fonksiyonu $\lambda = 0$ için (3.3.15) , (3.3.16) periyodik Sturm-Liouville probleminin çözümü olur. Demek ki, $\lambda = 0$ bu problemin özdeğeri ve sıfır olmayan her sabit fonksiyon bu özdeğere uygun özfonksiyondur. $\lambda = 0$ özdeğerine lineer bağımsız özfonksiyonların gerdiği lineer uzayın boyutu 1' e eşit olduğu için $\lambda = 0$ özdeğeri (3.3.15) , (3.3.16) periyodik Sturm-Liouville probleminin basit özdeğeridir.

Şimdi $\lambda < 0$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda (3.3.15) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda} x} \quad (3.3.19)$$

şeklindedir. Bu ifadeyi (3.3.16) sınır şartlarında yerine yazarsak, c_1 ve c_2 için

$$\begin{cases} c_1(1 - e^{\sqrt{-\lambda}}) + c_2(1 - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0 \\ c_1(1 - e^{\sqrt{-\lambda}}) + c_2(-1 + e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0 \end{cases} \quad (3.3.20)$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin determinanı

$$\Delta(\lambda) = 2(e^{\sqrt{-\lambda}} + e^{-\sqrt{-\lambda}} - 2) \quad (3.3.21)$$

olduğu için ve de $\forall \lambda < 0$ için $\Delta(\lambda) \neq 0$ olduğu için (3.3.18) lineer denklem sisteminin bir tek aşıkâr $c_1 = c_2 = 0$ çözümü bulunur. Demek ki, (3.3.15),(3.3.16) periyodik Sturm-Liouville probleminin negatif özdeğeri bulunmamaktadır.

Şimdi $\lambda > 0$ durumunu araştıralım. (3.3.15) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (3.3.22)$$

biçiminde ifade edilebilir. Bu ifadeyi (3.3.16) sınır şartlarında yazarsak c_1 ve c_2 için

$$\begin{cases} c_1(1 - \cos \sqrt{\lambda}) - c_2(\sin \sqrt{\lambda}) = 0 \\ c_1(\sin \sqrt{\lambda}) + c_2(1 - \cos \sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (3.3.23)$$

lineer denklem sistemi bulunur. Bu denklem sisteminin determinanı

$$\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \sqrt{\lambda}) \quad (3.3.24)$$

olduğu için $\Delta(\lambda) = 0$ olduğu durumda, yani;

$$\sqrt{\lambda} = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.25)$$

olduğu durumda (3.3.15), (3.3.16) periyodik Sturm-Liouville probleminin aşık ar olmayan çözümleri bulunur. Böylece (3.3.15), (3.3.16) periyodik Sturm-Liouville probleminin sayılabilir sayıda

$$\lambda_n = (2n\pi)^2, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.26)$$

özdeğerinin bulunduğunu ispat etmiş olduk.

Şimdi bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları bulmaya çalışacağız.

$\lambda_n = (2\pi n)^2, n = 1, 2, 3, \dots$ için (3.3.23) lineer denklem sistemi

$$\begin{cases} c_1 0 - c_2 0 = 0 \\ c_1 0 + c_2 0 = 0 \end{cases} \quad (3.3.27)$$

biçimine dönüştüğü için; $\forall c_1, c_2 \in R$ için (c_1, c_2) ikilisi (3.3.27) denklem sistemini sağlar. Dolayısı ile $\forall c_1, c_2 \in R$ için

$$y = c_1 \cos(2\pi nx) + c_2 \sin(2\pi nx) \quad (3.3.28)$$

fonksiyonu (3.3.15) , (3.3.16) Periyodik Sturm-Liouville Problemi'nin çözümü oluyor. Yani $\forall \lambda_n = (2\pi n)^2, n = 1, 2, 3, \dots$ özdeğerine uygun gelen özfonksiyonların gerdiği uzayın boyutu 2-dir. Böylece göstermiş olduk ki; $\forall \lambda_n = (2\pi n)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$

özdeğeri 2-katlı özdeğerdir ve $\lambda_n = (2\pi n)^2$ özdeğerine iki tane lineer bağımsız özfonksiyon (örneğin $y_{n,1}(x) = \cos(2\pi nx)$ ve $y_{n,2}(x) = \sin(2\pi nx)$ lineer bağımsız özfonksiyonları) karşılık gelir.

Sonuç olarak, (3.3.15) , (3.3.16) Periyodik Sturm-Liouville Problemi'nin bir tane $\lambda_0 = 0$ basit özdeğeri, sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_n = (2\pi n)^2, n = 1, 2, 3, \dots$ pozitif özdeğeri mevcuttur. Uygun özfonksiyonlar ise

$$y_0(x) = 1, y_{n,1}(x) = \cos(2\pi nx) y_{n,2}(x) = \sin(2\pi nx) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.29)$$

biçiminde seçilebilir.

4. BULGULAR ve SONUÇ

4.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi, Özdeğerlerin Reelliği ve Özfonksiyonların Ortogonalliği

Tez çalışmamızın esas konusu;

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (4.1.1)$$

diferansiyel denkleminde,

$$u(-1) = u(1) \quad (4.1.2)$$

$$u'(-1) = u'(1) \quad (4.1.3)$$

periyodik sınır şartlarından ve de $x = 0$ süreksizlik noktasındaki

$$u(+0) = u'(-0) \quad (4.1.4)$$

$$u'(+0) = \alpha u'(-0) - u(-0) \quad (4.1.5)$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özelliklerinin incelenmesidir. Burada $q(x)$; $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında sürekli, $x = 0$ noktasında ise sonlu $q(\pm 0)$ limit değerlerine sahip olan bir fonksiyon, λ kompleks özdeğer parametresi ve $\alpha > 0$ reel katsayıdır.

Teorem 4.1.1. (4.1.1)-(4.1.5) sınır - değer - geçiş probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat. (4.1.1)-(4.1.5) sınır değer geçiş probleminin λ özdeğerine uygun özfonksiyonu u olsun. $\bar{u}$, u -nin ve $\bar{\lambda}$, λ -nin eşleniği olmak üzere, (4.1.1)-(4.1.5) ve

$$-\bar{u}'' + q(x)\bar{u} = \bar{\lambda}\bar{u} \quad (4.1.6)$$

$$\bar{u}(-1) = \bar{u}(1) \quad (4.1.7)$$

$$\bar{u}'(-1) = \bar{u}'(1) \quad (4.1.8)$$

$$\bar{u}(+0) = \bar{u}'(-0) \quad (4.1.9)$$

$$\bar{u}'(+0) = \alpha \bar{u}'(-0) - \bar{u}(-0) \quad (4.1.10)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.1.1) denklemi $\bar{u}$ ile (4.1.6) denklemi de u ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa,

$$u\bar{u}'' - \bar{u}u'' = (\lambda - \bar{\lambda})u\bar{u} \quad (4.1.11)$$

eşitliği elde edilir. $u\bar{u}'' - \bar{u}u'' = (u\bar{u}' - \bar{u}u')'$ olduğundan

$$(u\bar{u}' - \bar{u}u')' = (\lambda - \bar{\lambda})u\bar{u} \quad (4.1.12)$$

yazılabilir. (4.1.12) eşitliği -1 ' den 0 ' a integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (u\bar{u}' - \bar{u}u')' dx &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u} dx \\ (u\bar{u}' - \bar{u}u')|_{-1}^0 &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u} dx \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden ise

$$\begin{aligned} u(-0)\bar{u}'(-0) - \bar{u}(-0)u'(-0) &= u(-1)\bar{u}'(-1) + \bar{u}(-1)u'(-1) \\ &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u} dx \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan (4.1.2)-(4.1.3) ve (4.1.7)-(4.1.8) sınır şartları sağlandığı için

$$\begin{aligned} u(-0)\bar{u}'(-0) - \bar{u}(-0)u'(-0) &= u(1)\bar{u}'(1) + \bar{u}(1)u'(1) \\ &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u} dx \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde (4.1.12) ifadesi 0 ' dan 1 ' e integrallenirse;

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u\bar{u}' - \bar{u}u')' dx &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u} dx \\ (u\bar{u}' - \bar{u}u')|_0^1 &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u} dx \end{aligned}$$

elde edilen bu eşitlikte sınır değerleri yerine yazılarak;

$$\begin{aligned} u(1)\bar{u}'(1) - \bar{u}(1)u'(1) &= u(+0)\bar{u}'(+0) + \bar{u}(+0)u'(+0) \\ &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.4)-(4.1.5) ve (4.1.9)-(4.1.10) deki sınır şartları (4.1.15) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(1)\bar{u}'(1) - \bar{u}(1)u'(1) - u'(-0)[\alpha\bar{u}'(-0) - \bar{u}(-0)] + \bar{u}'(-0)[\alpha u'(-0) - u(-0)] \\ = (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

ifadesi elde edilir ve bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} u(1)\bar{u}'(1) - \bar{u}(1)u'(1) + u'(-0)\bar{u}(-0) &= \bar{u}'(-0)u(-0) \\ &= (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra (4.1.14)-(4.1.17) denklemleri taraf tarafa toplanırsa,

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \int_{-1}^0 u\bar{u}dx + (\lambda - \bar{\lambda}) \int_0^1 u\bar{u}dx = 0$$

eşitliği,yani;

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \left[\int_{-1}^0 |u|^2 dx + \int_0^1 |u|^2 dx \right] = 0$$

eşitliği bulunur. u özfonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan dolayı parantez içindeki ifade sıfırdan farklıdır. O halde sonuncu eşitlikten

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

elde edilir. İspat bitti.

Not 4.1.2. Özdeğerler reel olduğu için, genelliği bozmadan aşağıda tüm özfonksiyonların reel değerli olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 4.1.3. (4.1.1)-(4.1.5) sınır-değer-geçiş probleminin iki farklı λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun özfonksiyonları u_m ve u_n olsun. Bu durumda

$$\int_{-1}^0 u_m u_n dx + \int_0^1 u_m u_n dx = 0 \quad (4.1.18)$$

eşitliği sağlanır. Yani (4.1.1)-(4.1.5) probleminin farklı özdeğerlerine uygun özfonksiyonları ortogonaldır (diktir).

İspat. u_m ve u_n sırasıyla λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun özfonksiyonlar olduğundan

$$-u_m'' + q(x)u_m = \lambda_m u_m \quad (4.1.19)$$

$$-u_n'' + q(x)u_n = \lambda_n u_n \quad (4.1.20)$$

eşitlikleri sağlanır. (4.1.19) eşitliği u_n ve (4.1.20) eşitliği u_m ile çarpılıp taraf tarafa çıkarılırsa

$$u_m u_n'' - u_m'' u_n = (\lambda_m - \lambda_n) u_m u_n \quad (4.1.21)$$

elde edilir. Bu son eşitlik ilk olarak -1 ' den 0 ' a integrallenirse,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (u_m u_n' - u_m' u_n)' dx &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx \\ (u_m u_n' - u_m' u_n)|_{-1}^0 &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte sınır değerleri yerine yazılarak;

$$\begin{aligned} u_m(-0)u_n'(-0) - u_m'(-0)u_n(-0) &= u_m(-1)u_n'(-1) + u_m'(-1)u_n(-1) \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

eşitlikleri elde edilir. Problemimizde verilmiş olan (4.1.2) ve (4.1.3) sınır şartları u_m ve u_n özfonksiyonları için de geçerli olduğundan,

$$\begin{aligned} u_m(-1) &= u_m(1) & u_m'(-1) &= u_m'(1) \\ u_n(-1) &= u_n(1) & u_n'(-1) &= u_n'(1) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu değerler (4.1.22)' de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} u_m(-0)u_n'(-0) - u_m'(-0)u_n(-0) &= u_m(1)u_n'(1) + u_m'(1)u_n(1) \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m u_n dx \end{aligned} \quad (4.1.23)$$

elde edilir. Aynı şekilde (4.1.21) eşitliği 0' dan 1' e integralenirse;

$$\begin{aligned} \int_0^1 (u_m u_n' - u_m' u_n)' dx &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m u_n dx \\ (u_m u_n' - u_m' u_n)|_0^1 &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m u_n dx \end{aligned}$$

bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılarak;

$$\begin{aligned} u_m(1)u_n'(1) - u_m'(1)u_n(1) &= u_m(+0)u_n'(+0) + u_m'(+0)u_n(+0) \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m u_n dx \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.4)-(4.1.5) geçiş şartları kullanılarak;

$$\begin{aligned} u_m(+0) &= u_m'(-0) \\ u_n(+0) &= u_n'(-0) \\ u_m'(+0) &= [\alpha u_m'(-0) - u_m(-0)] \\ u_n'(+0) &= [\alpha u_n'(-0) - u_n(-0)] \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu ifadeler (4.1.24) de yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_m(1)u_n'(1) - u_m'(1)u_n(1) &= u_m'(-0)[\alpha u_n'(-0) - u_n(-0)] \\ + u_n'(-0)[\alpha u_m'(-0) - u_m(-0)] &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m u_n dx \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılarak;

$$\begin{aligned} u_m(1)u_n'(1) - u_m'(1)u_n(1) &= u_m(-0)u_n'(-0) + u_m'(-0)u_n(-0) \\ &= (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m u_n dx \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

elde edilir. (4.1.23) ve (4.1.25) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa;

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^0 u_m(x)u_n(x)dx + (\lambda_m - \lambda_n) \int_0^1 u_m(x)u_n(x)dx = 0 \quad (4.1.26)$$

ifadesi elde edilir. Elde ettiğimiz bu son eşitlikte gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \left[\int_{-1}^0 u_m u_n dx + \int_0^1 u_m u_n dx \right] &= 0 \\ (\lambda_m - \lambda_n) \left[\int_{-1}^1 u_m u_n dx \right] &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğundan dolayı,

$$\int_{-1}^1 u_m u_n dx = 0$$

bulunur. İspat bitti.

4.2. Verilmiş Problemle İlgili Bazı Yardımcı Başlangıç-Değer Problemlerinin Temel Çözümleri ve Bu Temel Çözümlerle İlgili Önergeler

4.2.1 Bazı Yardımcı Başlangıç Değer Problemleri

Bu bölümde araştırdığımız (4.1.1)-(4.1.5) sınır-değer-geçiş problemi ile yakından ilgili olan ve sadece $[-1, 0)$ veya $(0, 1]$ alt aralıklarında (esas $[-1, 1]$ aralığının alt aralıklarında) verilmiş bazı yardımcı başlangıç-değer problemlerinin çözümlerinin mevcut olduğu ve bu çözümlerin λ kompleks özdeğer parametresine göre tüm kompleks düzlemde tanımlı ve diferansiyellenebilir olduğu ispat edilecektir. Daha sonra bu çözümlerden yararlanarak (4.1.1) denkleminin (4.1.1)-(4.1.5) sınır-değer-geçiş problemi için temel olacak çözümleri tanımlanacaktır.

Teorem 4.2.1. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \quad (4.2.1)$$

$$u(-1) = 0 \quad (4.2.2)$$

$$u'(-1) = 1 \quad (4.2.3)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\Phi_1(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [-1, 0)$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir. Yani her $x \in [-1, 0)$ için λ parametresinin tam fanksiyonudur (Titchmarsh,1962).

Teorem 4.2.2. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, 1] \quad (4.2.4)$$

$$u(0) = \Phi_1'(-0, \lambda) \quad (4.2.5)$$

$$u'(0) = \alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \quad (4.2.6)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\Phi_2(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in (0, 1]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir (yani λ değişkeninin tam fonksiyonudur).

İspat. Bu teoremin ispatı (Titchmarsh,1962) kaynağından bir sonuç olarak elde edilir.

Teorem 4.2.3. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in (0, 1] \quad (4.2.7)$$

$$u(1) = 0 \quad (4.2.8)$$

$$u'(1) = 1 \quad (4.2.9)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\chi_2(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in (0, 1]$ değeri için λ değişkenin tam fonksiyonudur. Yani $\forall x \in (0, 1]$ için λ kompleks parametresine göre tüm kompleks düzlemde tanımlı ve diferansiyellenebilirdir. (Titchmarsh,1962).

Teorem 4.2.4. Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad x \in [-1, 0) \quad (4.2.10)$$

$$u(0) = \alpha\chi_2(+0, \lambda) - \chi_2'(+0, \lambda) \quad (4.2.11)$$

$$u'(0) = \chi_2(+0, \lambda) \quad (4.2.12)$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\chi_1(x, \lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [-1, 0)$ değeri için λ değişkeninin tam fonksiyonudur.

İspat. Bu teoremin ispatı (Titchmarsh,1962) kaynağından bir sonuç olarak elde edilir.

4.3. Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler

Önceki bölümde $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) fonksiyonlarının λ kompleks parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitik fonksiyon oldukları ispatlanmıştı. Bu bölümde yardımcı başlangıç problemlerinin eşdeğer oldukları integral ve integral - diferansiyel denklemler bulunacak ve ilerde her yerde $\lambda = s^2$ gösteriminden yararlanılacaktır.

Teorem 4.3.1. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere (4.2.1)-(4.2.3) başlangıç değer probleminin çözümü

$$u(x) = \frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y)u(y)q(y)dy \quad (4.3.1)$$

$$u'(x) = \cos s(x+1) + \int_{-1}^x \cos s(x-y)u(y)q(y)dy \quad (4.3.2)$$

integral denklemlerini sağlar.

İspat. (4.2.1) denklemi

$$u'' + \lambda u = q(x)u \quad (4.3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemi çözmek için denklem homojen lineer diferansiyel denklem gibi kabul edilerek,

$$u'' + \lambda u = 0$$

denkleminin çözümlerinden hareket edilir. Son yazdığımız denklemin genel çözümü,

$$u(x, \lambda) = c_1(\lambda) \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

biçiminde yazılabilir. Bu nedenle (4.3.3) denkleminde sabitlerin değişimi yöntemi uygulayarak bu denklemin çözümünü

$$u(x, \lambda) = c_1(\lambda) \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2(\lambda) \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (4.3.4)$$

biçiminde arayacağız. $c_1(x, \lambda)$, $c_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarını öyle seçmeye çalışacağız ki, (4.3.4) fonksiyonu (4.1.2) – (4.1.5) sınır geçiş şartlarını da sağlasın. Bu yeni bilinmeyen fonksiyonları bulmak için iki tane denklem kurulacaktır. Bu

denklemlerden bir tanesinde $c_1(x) = c_1(x, \lambda)$, $c_2(x) = c_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarını öyle seçeceğiz ki

$$c_1'(x) \cos sx + c_2'(x) \sin sx = 0 \quad (4.3.5)$$

eşitliği sağlansın. (4.3.4) eşitliğinin her iki yanında x' e göre türevi alınır,

$$u'(x) = -sc_1(x) \sin sx - sc_1'(x) \cos sx + c_2'(x) \sin sx + sc_2(x) \cos sx$$

elde edilir. (burada sadelik için $u(x, \lambda)$ yerine $u(x)$ yazılmıştır.) (4.3.5) eşitliği bu son bulduğumuz ifadede yerine yazılırsa,

$$u'(x) = -sc_1(x) \sin sx + sc_2(x) \cos sx \quad (4.3.6)$$

elde edilir. Tekrar x' e göre türev alınır,

$$u''(x) = -sc_1'(x) \sin sx - s^2 c_1(x) \cos sx + sc_2'(x) \cos sx - s^2 c_2(x) \sin sx \quad (4.3.7)$$

eşitliği bulunur. (4.3.6) ve (4.3.4) eşitlikleri (4.3.3) de yerine yazılırsa,

$$-sc_1'(x) \sin sx + sc_2'(x) \cos sx = q(x)u \quad (4.3.8)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi (4.3.5)-(4.3.8) eşitliklerini bir arada düşünerek, $c_1'(x)$ ve $c_2'(x)$ değişkenlerine göre lineer denklem sistemi gibi çözersek $s \neq 0$ için,

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin sx \\ q(x)u & s \cos sx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sx & \sin sx \\ -s \sin sx & s \cos sx \end{vmatrix}} = \frac{-\sin sx \ q(x)u}{s} \quad (4.3.9)$$

bulunur. Bu eşitlik integrallenirse,

$$c_1(x) = -\frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin sy \ q(y) \ u(y) dy + c_1(\lambda) \quad (4.3.10)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos sx & 0 \\ -s \sin sx & q(x)u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sx & \sin sx \\ -s \sin sx & s \cos sx \end{vmatrix}} = \frac{\cos sx \ q(x)u}{s} \quad (4.3.11)$$

bulunur. Son eşitlik integrallenirse,

$$c_2(x) = \frac{1}{s} \int_{-1}^x \cos sy \ q(y) \ u(y)dy + c_2(\lambda) \quad (4.3.12)$$

bulunur. Burada her λ için $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ keyfi sabitlerdir. Bulduğumuz (4.3.10) ve (4.3.12) ifadeleri (4.3.4) de yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u(x) = & - \frac{1}{s} \cos sx \int_{-1}^x \sin sy \ q(y) \ u(y)dy + c_1(\lambda) \cos sx \\ & + \frac{1}{s} \sin sx \int_{-1}^x \cos sy \ q(y) \ u(y)dy + c_1(\lambda) \sin sx \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) = & \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \ q(y) \ u(y)dy + c_1(\lambda) \cos sx \\ & + c_2(\lambda) \sin sx \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

bulunur. Benzer yöntemle (4.3.10) ve (4.3.12) eşitlikleri (4.3.6)' de yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} u'(x) = & \int_{-1}^x \cos s(x-y) \ q(y) \ u(y)dy - sc_1(\lambda) \sin sx \\ & + sc_2(\lambda) \cos sx \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

bulunur. Bu durumda (4.3.4) denklemi (4.3.13) integral denklemine indirgenmiş olur. O halde (4.3.13) ve (4.3.14) ifadeleri (4.2.2)-(4.2.3) başlangıç şartlarında

yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} c_1(\lambda) \cos s - c_2(\lambda) \sin s &= 0 \\ sc_1(\lambda) \sin s + sc_2(\lambda) \cos s &= 1 \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

lineer denklem sistemi bulunur. $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ sabitlerini bulmak için bu lineer denklem sistemini çözelim. O halde

$$c_1(\lambda) = \frac{1}{s} \sin s \quad (4.3.16)$$

$$c_2(\lambda) = \frac{1}{s} \cos s \quad (4.3.17)$$

elde edilir. Bu c_1 ve c_2 değerleri (4.3.13) integral denkleminde yerine yazılırsa ve düzenlenirse,

$$u(x) = \frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) u(y) q(y) dy \quad (4.3.18)$$

integral denklemi elde edilir.

Böylece (4.2.1)-(4.2.3) ile verilen başlangıç değer problemi (4.3.18) integral denkleminde indirgenmiş olur.

Aynı şekilde c_1 ve c_2 değerleri (4.3.6) integral denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.3.2) eşitliğinin de sağlandığı kolayca gösterilebilir.

Sonuç 4.3.2. $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\Phi_1(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \quad (4.3.19)$$

$$\Phi_1'(x, \lambda) = \cos s(x+1) + \int_{-1}^x \cos s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \quad (4.3.20)$$

İspat. Önce (4.3.19) eşitliğini ispat edelim. $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu $[-1, 0)$ aralığında (4.2.1) denklemini sağladığı için,

$$q(y) \Phi_1(y, \lambda) = \Phi_1''(y, \lambda) + \lambda \Phi_1(y, \lambda)$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy &= \int_{-1}^x \sin s(x-y) (\Phi_1''(y, \lambda) + \lambda \Phi_1(y, \lambda)) dy \\
&= \lambda \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\
&+ \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1''(y, \lambda) dy \quad (4.3.21)
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Sonuncu integral ifadeye iki kere ard arda kısmi integrasyon uygulanırsa ve (4.2.1)-(4.2.3) probleminin

$$\Phi_1(-1, \lambda) = 0 \quad \text{ve} \quad \Phi_1'(-1, \lambda) = 1$$

başlangıç değerlerinden yararlanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1''(y, \lambda) q(y) dy &= \sin s(x-y) \Phi_1'(y, \lambda) \Big|_{-1}^x + s \int_{-1}^x \cos s(x-y) \Phi_1'(y, \lambda) dy \\
&= -\sin s(x+1) \Phi_1'(-1, \lambda) + s \cos s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) \Big|_{-1}^x \\
&- s^2 \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\
&= -\sin s(x+1) + s \Phi_1(x, \lambda) \\
&- s^2 \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu son eşitlik (4.3.21)' de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy &= \lambda \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy \\
&- \sin s(x+1) + s \Phi_1(x, \lambda) - s^2 \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) dy
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan;

$$\int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy = -\sin s(x+1) + s \Phi_1(x, \lambda)$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\Phi_1(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \quad (4.3.22)$$

eşitliği bulunur. Böylece (4.3.19) eşitliği ispatlanmış olur. Bu eşitliğin her iki tarafında x' e göre türev alınırsa (4.3.20) eşitliğinin de sağlandığı kolayca ispatlanabilir.

Teorem 4.3.3. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere (4.2.4)-(4.2.6) başlangıç değer probleminin çözümleri

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= \Phi_1'(-0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \left[\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \right] \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) u(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

$$\begin{aligned} u'(x, \lambda) &= -s \Phi_1'(-0, \lambda) \sin sx + [\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda)] \cos sx \\ &+ \int_0^x \cos s(x-y) q(y) u(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

integral denklemlerini sağlar.

İspat. İspat Teorem 4.3.1' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.3.4. $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, \lambda) &= \Phi_1'(-0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \left[\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \right] \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2'(x, \lambda) &= -s \Phi_1'(-0, \lambda) \sin sx + [\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda)] \cos sx \\ &+ \int_0^x \cos s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

İspat. Sonuç 4.3.2' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.3.5. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere (4.2.7)-(4.2.9) başlangıç değer probleminin çözümleri

$$u(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s(x-1) + \frac{1}{s} \int_x^1 \sin s(x-y) q(y) u(y, \lambda) dy \quad (4.3.27)$$

$$u'(x, \lambda) = \cos s(x-1) + \int_x^1 \cos s(x-y) q(y) u(y, \lambda) dy \quad (4.3.28)$$

integral denklemlerini sağlar.

İspat. Teorem 4.3.1' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.3.6. $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\chi_2(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s(x-1) + \frac{1}{s} \int_x^1 \sin s(x-y)q(y)\chi_2(y, \lambda)dy \quad (4.3.29)$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = \cos s(x-1) + \int_x^1 \cos s(x-y)q(y)\chi_2(y, \lambda)dy \quad (4.3.30)$$

İspat: Sonuç 4.3.2' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.3.7. $\forall x \in \mathbb{C}$ için, $\lambda = s^2$ olmak üzere (4.2.10)-(4.2.12) başlangıç değer probleminin çözümleri,

$$\begin{aligned} u(x, \lambda) &= [\alpha\chi_2(+0, \lambda) - \chi_2'(+0, \lambda)] \cos sx + \frac{1}{s} \chi_2(+0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y)q(y)u(y, \lambda)dy \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

$$\begin{aligned} u'(x, \lambda) &= \chi_2(+0, \lambda) \cos sx - s[\alpha\chi_2(+0, \lambda) - \chi_2'(+0, \lambda)] \sin sx \\ &+ \int_x^0 \cos s(x-y)q(y)u(y, \lambda)dy \end{aligned} \quad (4.3.32)$$

integral denkelemlerini sağlar.

İspat. Teorem 4.3.1' in ispatına benzer şekilde yapılır.

Sonuç 4.3.8. $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\begin{aligned} \chi_1(x, \lambda) &= [\alpha\chi_2(+0, \lambda) - \chi_2'(+0, \lambda)] \cos sx + \frac{1}{s} \chi_2(+0, \lambda) \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_x^0 \sin s(x-y)q(y)\chi_1(y, \lambda)dy \end{aligned} \quad (4.3.33)$$

$$\begin{aligned} \chi_1'(x, \lambda) &= \chi_2(+0, \lambda) \cos sx - s[\alpha\chi_2(+0, \lambda) - \chi_2'(+0, \lambda)] \sin sx \\ &+ \int_x^0 \cos s(x-y)q(y)\chi_1(y, \lambda)dy \end{aligned} \quad (4.3.34)$$

İspat. Sonuç 4.3.2' nin ispatına benzer şekilde yapılır.

4.4. $\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ Temel Çözümlerinin Asimptotik Davranışları

Bu kesimde $\Phi_i(x, \lambda)$ ve $\chi_i(x, \lambda)$ ($i = 1, 2$) temel çözümlerinin önceki bölümde ispatladığımız eşdeğer olduğu integral denklemleri kullanarak, bunların λ parametre sine göre $|\lambda| \rightarrow \infty$ için asimptotik formülleri elde edilecektir.

Teorem 4.4.1. $\lambda = s^2$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x < 0$ aralığında

$$\Phi_1(x, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.1)$$

$$\Phi_1'(x, \lambda) = O(e^{|t|(x+1)}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.2)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat.

$$F(x, \lambda) := e^{-|t|(x+1)} \Phi_1(x, \lambda) \quad (4.4.3)$$

ile gösterelim. $\Phi_1(x, \lambda)$ için daha önce göstermiş olduğumuz sonuç (4.3.19) integral denklemini üstteki eşitlikte yerine yazarsak

$$F(x, \lambda) = e^{-|t|(x+1)} \left[\frac{1}{s} \sin s(x+1) + \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) \Phi_1(y, \lambda) q(y) dy \right]$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} F(x, \lambda) &= \frac{1}{s} \sin s(x+1) e^{-|t|(x+1)} \\ &+ \frac{1}{s} \int_{-1}^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_1(y, \lambda) e^{-|t|(x+1)} dy \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

bulunur. Şimdi kompleks analizden iyi bilinen

$$|\sin z| \leq e^{|Im z|} \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq e^{|Im z|}$$

eşitsizliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
|F(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} e^{-|t|(x+1)} \\
&+ \frac{1}{|s|} \int_{-1}^x |\sin[s(x-y)]| |q(y)| |F(y, \lambda)| e^{|t|(y+1)} e^{-|t|(x+1)} dy \\
&= \frac{1}{|s|} \left[1 + \int_{-1}^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| |F(y, \lambda)| e^{-|t|(x-y)} dy \right] \\
&= \frac{1}{|s|} \left[1 + \int_{-1}^x |q(y)| |F(y, \lambda)| dy \right]
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

elde ederiz.

$$F_1 := \max_{x \in [-1, 0)} |F(x, \lambda)| \quad , \quad q_1 := \max_{x \in [-1, 0)} \int_{-1}^0 |q(y)| dy$$

ile tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
|F(y, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} \left[1 + \int_{-1}^x |q(y)| |F(y, \lambda)| dy \right] \\
F_1(\lambda) &\leq \frac{1}{|s|} [1 + F_1(\lambda) q_1] \\
F_1(\lambda) \left(1 - \frac{q_1}{|s|} \right) &\leq \frac{1}{|s|}
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $|s| > 2q_1$ olduğu durumda

$$F_1(\lambda) \leq \frac{2}{|s|}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
|F(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} M \implies |e^{-|t|(x+1)} \Phi_1(x, \lambda)| \leq \frac{1}{|s|} M \\
\implies |\Phi_1(x, \lambda)| &\leq \frac{1}{|s|} M e^{|t|(x+1)}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Elde ettiğimiz bu son eşitsizlikten,

$$\Phi_1(x, \lambda) = O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Böylece istenilen asimptotik eşitliğin sağlandığı gösterildi. Şimdi (4.4.2) asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Daha önce,

$$\Phi_1'(x, \lambda) = \cos s(x+1) + \int_{-1}^x \cos s(x-y)\Phi_1(y, \lambda)q(y)dy$$

olduğu gösterilmişti. Şimdi bu integral denklemi gözönüne alarak istenilen asimptotik eşitliğin sağlandığını gösterelim. Kompleks analizden bilinen

$$|\sin s(x+1)| \leq e^{|t|(x+1)}$$

eşitsizliği gereği

$$\sin s(x+1) = O(e^{|t|(x+1)}) \quad (4.4.7)$$

asimptotik eşitliği sağlanır.

Yukarıda ispat edilmiş (4.4.1) asimptotik eşitliği gözönüne alınırsa ve

$$q_1 := \max_{x \in [-1, 0)} \int_{-1}^0 |q(y)|dy$$

ile tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^x \cos s(x-y)q(y)\Phi_1(y, \lambda)dy \right| &\leq \frac{1}{|s|} \int_{-1}^x e^{|t|(x-y)} |q(y)|e^{|t|(y+1)} dy \\ &\leq q_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \\ &\leq M_3 e^{|t|(x+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\int_{-1}^x \cos s(x-y)q(y)\Phi_1(y, \lambda)dy = O(e^{|t|(x+1)}) \quad (4.4.8)$$

elde edilir. (4.4.7)-(4.4.8) ifadeleri $\Phi_1'(x, \lambda)$ 'in sağladığı integral denklemde yerine yazılırsa,

$$\Phi_1'(x, \lambda) = O(e^{|t|(x+1)})$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Teorem 4.4.2. $\lambda = s^2$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\Phi_1(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.9)$$

$$\Phi_1'(x, \lambda) = \cos s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.10)$$

İspat. (Titchmarsh (1962))

Teorem 4.4.3. $\lambda = s^2$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\Phi_2(x, \lambda) = O\left(e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.11)$$

$$\Phi_2'(x, \lambda) = O\left(|s| e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.12)$$

İspat.

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, \lambda) &= \Phi_1'(-0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \left[\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \right] \sin sx \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \end{aligned}$$

integral denkleminin her iki tarafını $e^{-|t|(x+1)}$ ile çarpalım ve

$$F_2(x, \lambda) := e^{-|t|(x+1)} \Phi_2(x, \lambda) \quad (4.4.13)$$

ile gösterelim. Böylece

$$\begin{aligned} F_2(x, \lambda) &= e^{-|t|(x+1)} \Phi_1'(-0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \left[\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \right] \sin sx e^{-|t|(x+1)} \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) e^{-|t|(x+1)} dy \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

elde edilir. (4.4.1) ve (4.4.2) asimptotik eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} |\Phi_1(-0, \lambda)| &\leq M_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|} \\ |\Phi_1'(-0, \lambda)| &\leq M_2 e^{|t|} \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Bu son iki eşitsizlikte bulunan değerler (4.4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa ve

$$|\sin z| \leq e^{|Imz|} \quad \text{ve} \quad |\cos z| \leq e^{|Imz|}$$

ifadelerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} |F_2(x, \lambda)| &\leq M_2 e^{|t|} e^{|t|x} e^{-|t|(x+1)} + \frac{1}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right) e^{|t|} e^{|t|x} e^{-|t|(x+1)} \\ &+ \frac{1}{|s|} \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| |F_2(y, \lambda)| e^{|t|(y+1)} e^{-|t|(x+1)} dy \\ &= M_2 + \frac{1}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right) + \frac{1}{|s|} \int_0^x |q(y)| |F_2(y, \lambda)| dy \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

elde edilir. Şimdi

$$F_2 := \max_{x \in [0,1]} |F_2(x, \lambda)| \quad , \quad q_2 := \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |q(y)| dy$$

gösterimlerinden yararlanırsak

$$\begin{aligned} F_2(\lambda) &\leq M_2 + \frac{1}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right) + \frac{1}{|s|} F_2(\lambda) q_2 \\ F_2(\lambda) \left(1 - \frac{q_2}{|s|} \right) &\leq M_2 + \frac{1}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right) \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Bu eşitsizlikte $|s| \geq 2q_2$ olarak alırsak;

$$F_2(\lambda) \leq 2M_2 + \frac{2}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty$$

yazılabilir. Yani; $F_2(\lambda)$ sınırlıdır. O halde;

$$M = 2M_2 + \frac{2}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right)$$

olarak seçersek ;

$$\begin{aligned} |F_2(x, \lambda)| &\leq M \implies |e^{-|t|(x+1)} \Phi_2(x, \lambda)| \leq M \\ |\Phi_2(x, \lambda)| &\leq M e^{|t|(x+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Elde ettiğimiz bu son eşitsizlikten,

$$\Phi_2(x, \lambda) = O(e^{|t|(x+1)}), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği elde edilir. Böylece istenilen ilk asimptotik eşitliğin sağlandığı gösterildi. Şimdi (4.4.10) asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Daha önce,

$$\begin{aligned} \Phi_2'(x, \lambda) &= -s\Phi_1'(-0, \lambda) \sin sx + [\alpha\Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda)] \cos sx \\ &+ \int_0^x \cos s(x-y)q(y)\Phi_2(y, \lambda)dy \end{aligned}$$

olduğunu göstermiştik. Şimdi bu integral denklemini gözönüne alarak bir önceki yaptığımız ispatla benzer adımları uygulayarak istenilen asimptotik eşitliğin sağlandığını gösterelim. Daha önceden bilindiği gibi

$$\Phi_1(-0, \lambda) = O\left(\frac{1}{|s|}e^{|t|}\right), \quad \text{yani} \quad |\Phi_1(-0, \lambda)| \leq M_1 \frac{1}{|s|} e^{|t|}$$

ve

$$\Phi_1'(-0, \lambda) = O(e^{|t|}), \quad \text{yani} \quad |\Phi_1'(-0, \lambda)| \leq M_2 e^{|t|}$$

eşitlikleri sağlanır (yeteri kadar büyük $M_1 > 0$ ve $M_2 > 0$ için). Bu ifadelerden ve $\Phi_2(x, \lambda)$ 'nın asimptotik eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} |\Phi_2'(x, \lambda)e^{-|t|(x+1)}| &\leq |s|M_2e^{|t|}e^{|t|x}e^{-|t|(x+1)} + \left[\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|}\right] e^{|t|}e^{|t|x}e^{|t|(x+1)} \\ &+ \int_0^x e^{|t|(x-y)}|q(y)|M_3e^{|t|(y+1)}e^{-|t|(x+1)}dy \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |F_2(x, \lambda)| &\leq |s|M_2 + \left[\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right] + M_3 q_2 \\ &\leq |s| \left[M_2 + \frac{1}{|s|} \left(\alpha M_2 + \frac{M_1}{|s|} \right) + \frac{M_3 q_2}{|s|} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde sırası ile

$$\frac{|F(x, \lambda)|}{|s|} \leq M,$$

$$\frac{|\Phi'_2(x, \lambda)e^{-|t|(x+1)}|}{|s|} \leq M,$$

$$|\Phi'_2(x, \lambda)| \leq M|s|e^{|t|(x+1)}$$

eşitsizliklerini elde ederiz. Buradan

$$\Phi'_2(x, \lambda) = O(|s|e^{|t|(x+1)})$$

asimptotik eşitliği elde edilir. İspat bitti.

Teorem 4.4.4. $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Im s = t$ olmak üzere, $\Phi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında

$$\Phi_2(x, \lambda) = \cos s \cos(sx) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (4.4.17)$$

$$\Phi'_2(x, \lambda) = -s \cos s \sin(sx) + O\left(e^{|t|(x+1)}\right), \quad |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (4.4.18)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat. İlk olarak (4.4.17) asimptotik eşitliğini ispatlayalım. Bunun için $\Phi_2(x, \lambda)$ 'nın daha önce bulduğumuz

$$\begin{aligned}\Phi_2(x, \lambda) &= \Phi_1'(-0, \lambda) \cos sx + \frac{1}{s} \left[\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \right] \sin sx \\ &+ \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy\end{aligned}$$

integral denkleminin sağ tarafındaki terimlerin asimptotik eşitleri ayrı ayrı değerlendirilmesi gerekir. Teorem 4.4.2'deki (4.4.9) ve (4.4.10) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\Phi_1(-0, \lambda) &= \frac{1}{s} \sin s + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|}\right) \\ \Phi_1'(-0, \lambda) &= \cos s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right)\end{aligned}$$

asimptotik ifadeleri elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\Phi_1'(-0, \lambda) \cos sx &= \cos sx \left[\cos s + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) \right] \\ &= \cos s \cos sx + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) O(e^{|t|(x)}) \\ &= \cos s \cos sx + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right)\end{aligned}\tag{4.4.19}$$

ve

$$\begin{aligned}& \frac{1}{s} \sin sx \left[\alpha \Phi_1'(-0, \lambda) - \Phi_1(-0, \lambda) \right] \\ &= \frac{1}{s} \sin sx \left[\alpha \cos s + \alpha O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) - \frac{1}{s} \sin s - O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|}\right) \right] \\ &= \frac{\alpha}{s} \cos s \sin sx + \frac{\alpha}{s} O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|}\right) O(e^{|t|}) - \frac{1}{s^2} \sin s \sin sx - \frac{1}{s} O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x)}\right) \\ &= \frac{\alpha}{s} \cos s \sin sx + \frac{\alpha}{s} O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}\right) - \frac{1}{s^2} \sin s \sin sx - \frac{1}{s} O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)}\right)\end{aligned}\tag{4.4.20}$$

eşitlikleri bulunur. Şimdi üstte $\Phi_2(x, \lambda)$ için yazdığımız integral denklemdeki integral ifade değerlendirilecektir. $\Phi_2(x, \lambda)$ için daha önce bulduğumuz (4.4.11)

asimptotik eşitlik gereği,

$$|\Phi_2(x, \lambda)| \leq M e^{|t|(x+1)}$$

olacak şekilde x ve λ ' dan bağımsız $M > 0$ sabiti mevcuttur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| &\leq \frac{1}{|s|} \int_0^x |\sin s(x-y)| |q(y)| |\Phi_2(y, \lambda)| dy \\ &\leq \frac{1}{|s|} \int_0^x e^{|t|(x-y)} |q(y)| M e^{|t|(y+1)} dy \\ &\leq M \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \int_0^1 |q(y)| dy \end{aligned}$$

yazılır. $q_2 := \max_{x \in [0,1]} \int_0^1 |q(y)| dy$ ile tanımlanırsa,

$$\left| \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy \right| \leq M q_2 \frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan asimptotik eşitlik tanımı gereği,

$$\frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-y) q(y) \Phi_2(y, \lambda) dy = O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right) \quad (4.4.21)$$

bulunur. (4.4.19)- (4.4.21) asimptotik ifadeleri $\Phi_2(x, \lambda)$ integral denkleminde yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, \lambda) &= \cos s \cos sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right) + \frac{\alpha}{s} \cos s \sin sx + \frac{\alpha}{s} O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right) \\ &- \frac{1}{s^2} \sin s \sin sx - \frac{1}{s} O \left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(x+1)} \right) + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right) \\ &= \cos s \cos sx + \frac{1}{s} \left[\alpha \cos s - \frac{1}{s} \sin s \right] \sin sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right) \end{aligned}$$

asimptotik eşitliği bulunur. Buradan $\Phi_2(x, \lambda) = \cos s \cos sx + O \left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(x+1)} \right)$ asimptotik eşitliğinin sağlandığı ispatlandı.

(4.4.18) asimptotik eşitliği de benzer şekilde ispatlanır.

Teorem 4.4.5. $\lambda = s^2$, $Im s = t$ olmak üzere, $\chi_2(x, \lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında

$$\chi_2(x, \lambda) = \frac{1}{s} \sin s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|^2} e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.22)$$

$$\chi_2'(x, \lambda) = \cos s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.23)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat. İspatı Teorem 4.4.3'un ispatına tamamen benzer biçimde yapılır.

Teorem 4.4.6. $\lambda = s^2$, $Im s = t$ olmak üzere, $\chi_1(x, \lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında

$$\chi_1(x, \lambda) = \cos s \cos(sx) + O\left(\frac{1}{|s|} e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.24)$$

$$\chi_1'(x, \lambda) = s \cos s \sin(sx) + O\left(e^{|t|(1-x)}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty \quad (4.4.25)$$

asimptotik eşitlikleri sağlanır.

İspat. İspatı Teorem 4.4.3'un ispatına tamamen benzer biçimde yapılır.

4.5. Karakteristik Fonksiyonun Kurulması

İlk önce (4.1.1) diferansiyel denkleminin iki tane çözümünü

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{cases} \Phi_1(x, \lambda), x \in [-1, 0) \\ \Phi_2(x, \lambda), x \in (0, 1] \end{cases}, \quad \chi(x, \lambda) = \begin{cases} \chi_1(x, \lambda), x \in [-1, 0) \\ \chi_2(x, \lambda), x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.5.1)$$

biçiminde tanımlayalım. Şimdi (4.1.1)-(4.1.5) problemimize özgü olan aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 4.5.1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlı $\Delta(x)$ fonksiyonuna (4.1.1)-(4.1.5) problemimizin karakteristik fonksiyonu diyeceğiz.

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} -\Phi_2(1, \lambda) & \chi_1(-1, \lambda) \\ 1 - \Phi_2'(1, \lambda) & 1 + \chi_1'(-1, \lambda) \end{vmatrix} \quad (4.5.2)$$

Teorem 4.5.2. $\Delta(x)$ karakteristik fonksiyonunun her bir sıfır yeri (4.1.1)-(4.1.5) probleminin özdeğeridir.

İspat. $\lambda = \lambda_0$ noktasının $\Delta(x)$ karakteristik fonksiyonunun bir sıfır yeri olduğunu kabul edelim, yani

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} -\Phi_2(1, \lambda_0) & \chi_1(-1, \lambda_0) \\ 1 - \Phi'_2(1, \lambda_0) & 1 + \chi'_1(-1, \lambda_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5.3)$$

olduğunu kabul edelim.

$$u_0(x) = A \Phi(x, \lambda_0) + B \chi(x, \lambda_0) \quad (4.5.4)$$

biçiminde bir $u_0(x)$ fonksiyonu tanımlayalım. A ve B katsayılarını öyle seçeceğiz ki, $u_0(x)$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.5) probleminin özfonksiyonu olsun. $\Phi(x, \lambda_0)$ ve $\chi(x, \lambda_0)$ fonksiyonlarının tanımından yararlanarak kolayca gösterebiliriz ki, $\forall A, B$ için $u_0(x)$ fonksiyonu (4.1.4)-(4.1.5) geçiş şartlarını sağlar. Şimdi (4.5.4) ifadesini (4.1.2)-(4.1.3) periyodik sınır şartlarında yerine yazarsak A ve B değişkenlerine göre aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} A(\Phi(-1, \lambda_0) - \Phi(1, \lambda_0)) + B(\chi(-1, \lambda_0) - \chi(1, \lambda_0)) = 0 \\ A(\Phi'(-1, \lambda_0) - \Phi'(1, \lambda_0)) + B(\chi'(-1, \lambda_0) - \chi'(1, \lambda_0)) = 0 \end{cases} \quad (4.5.5)$$

$\Phi(x, \lambda)$ ve $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonlarının (4.5.1) deki ifadesinden ve de $\Phi_i(x, \lambda)$, $\chi_i(x, \lambda)$ fonksiyonlarının tanımından yararlanırsak (4.5.5) lineer denklem sistemi aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\begin{cases} -\Phi_2(1, \lambda_0)A + \chi_1(-1, \lambda_0)B = 0 \\ (1 - \Phi'_2(1, \lambda_0))A + (-1 + \chi'_1(1, \lambda_0))B = 0 \end{cases} \quad (4.5.6)$$

Bu lineer denklem sisteminin determinantı $\Delta(\lambda_0) = 0$ olduğu için, en az bir $(A_0, B_0) \neq (0, 0)$ çözümü bulunur. O halde

$$u_0(x) = A_0 \Phi(x, \lambda_0) + B_0 \chi(x, \lambda_0) \quad (4.5.7)$$

fonksiyonu (4.1.2)-(4.1.3) periyodik sınır şartlarını da sağlar. Bu fonksiyonun (4.1.1) denklemini $\lambda = \lambda_0$ için sağladığı apaçıktır. Dolayısıyla (4.5.7) ile tanımlı $u_0(x)$ fonksiyonu $\lambda = \lambda_0$ için yazılmış (4.1.1)-(4.1.5) probleminin bir çözümü oluyor, yani $\lambda = \lambda_0$ özdeğerine uygun özfonksiyondur. İspat bitti.



5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu Yüksek Lisans Tez çalışmamızda bugüne kadar literatürde incelenmemiş yeni tipten bir Sturm-Liouville probleminin bazı spektral problemleri incelenmiştir. Araştırdığımız problemin klasik Periyodik Sturm-Liouville probleminden bir kaç ayırıcı özelliği bulunmaktadır.

- Araştırdığımız problem ortak sınır noktası bulunan iki tane ayrık sonlu aralıkta tanımlanmıştır.
- Ayrık aralıkların ortak sınır noktasında iki tane ek şart verilmiştir (böyle şartlar literatürde geçiş şartları, impulsive şartlar, iletişim şartları vs olarak adlandırılmaktadır).

Bu tipten sınır değer problemleri somut fizik problemlerinin değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümlerinde ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle tezde bulunmuş sonuçlar ister teorik matematik isterse de uygulamalı matematik açısından önem arz etmektedir.

Ayrıca tez çalışmamızda uygulanan yöntemler daha genel problemlere de uygulanabilir. Bu nedenle tez çalışmamızdaki sonuçlar daha da genelleştirilebilir niteliktedir.

KAYNAKLAR

- [1] Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtrov, O. Sh., 2005. Sturm-Liouville Problem with eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission conditions, *Acta Appliancandae Mathematicae* 86, 329 - 344.
- [2] Allahverdiev, B. P., Bairamov, E. ve Ugurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boudary conditions with transmission conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 401, 388-396.
- [3] Amiraliyev, G. ve Cakir, M., 2000. A uniformly convergent finite difference scheme for a singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation. *Int. J. Appl. Math.*, 2(12): 1407-1419.
- [4] Amiraliyev, G., 1988. Towards the numerical solition of the periodical on time problem for pseudo-parabolic equation. *Numerical Methods of Analysis BAKU State University*, 3-8.
- [5] Amiraliyev, G., Duru, H., 2003. A uniformly convergent difference method for the periodical boundary value problem. *Comput. Math. Appl.*, 46:695- 703.
- [6] Ao, J., Sun, J. ve Zhang, M., 2012. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with transmission conditions, *Comput. Appl. Math*, 63, 1335-1348.
- [7] Atkinson, F. V., 1964. Discrete and continous boundary problems, Academic pres New York London.
- [8] Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh. , 2016. Variational principles for spectral analysis of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions, *Advances in Difference Equations* 2016:76 DOI 10.1186/s13662-016-0800-z.
- [9] Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2017. On the zeros of eigen functions of discontinuous Sturm-Liouville problems, *Journal of Computational Analysis and Applications*, Vol. 23, Issue 1, pp. 417-423.
- [10] Bairamov, E. ve Uğurlu, E., 2011. The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions, *Math. Comput. Modelling*, Vol. 53, Nr. 5-6, 805-813.
- [11] Boyce, W. E. ve DiPrima, R. C., 1969. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Willey and Sons, New York.
- [12] Belinsky, B. P. ve Dauer, J. P, 1997. On a Regular Sturm-Liouville Problem on a Finite Interval with the Eigenvalue Parameter Appearing Linearly in the Boundary Conditions, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems.*,183-196.
- [13] Binding, P. A., Browne, P. J. ve Seddighi, K., 1993. Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 2(37), 57-72.
- [14] Binding, P. A. ve Volkmer, H., 2001. Oscillation theory for Sturm-Liouville problems with indefinite coefficients, *Proc. Royal Soc. Edinburgh*, 131A, 989-1002.

- [15] Birkhoff, G. D., 1908a. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 9, pp. 219-231.
- [16] Birkhoff, G.D., 1908b. Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, p.373-399.
- [17] Cai, X., 2010. An Effective computational method for periodical model with small parametre. 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control Conference, 27- 29 March 2010, Shenyang- China, 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control (ICACC 2010) (Editor: Xu,H.). Vol.3: 414-417pp.
- [18] Cen,Z., 2011. Uniformly convergent second- order difference scheme for a singularly periodical boundary value problem. *International Journal of Computer Mathematics*. 88(1):196-206.
- [19] Chanane, B., 2007. Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems With Discontinuity Conditions Inside A Finite Interval, *Applied Mathematics and computation* 188, 1725-1732.
- [20] Dixon, A., 1912. On the series of Sturm and Liouville as derived from a pair of fundamental integral equations instead of a differential equation, *Phil. Trans. Royal Soc. London Ser. A* 211, 411-432
- [21] Eastham, M.S.P., 1973. *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Edinburgh-London: Scottish Academic Press.
- [22] Fulton, C.T., 1977. Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, *Roy. Soc. Edinburg* 77a .
- [23] Fulton, C.T., 1980. Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, *Proc. Roy. Soc. Edinburg* 87A .
- [24] Hermann, L., 1985. Periodic solutions to a one-dimentional strongly none linear wave equation with strong dissipation. *Czechosl. Math. J.* V. 35, 110; 278-293.
- [25] Hinton, D.B., 1977. On The Eigen function Expansion of Singular Ordinary Differential Equations, *Jour. Dif. Eqs.* 24, 282-308.
- [26] Hinton, D.B., 1979. An Expansion Theorem For An Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, *Quart J. Math. Oxford* (2), 282-308.
- [27] Hinton, D. B. and Shaw,J. K., 1987. Spectrum of a Hamiltonian system wit spectral parameter in a boundary condition, *Canad. Math. Soc. Proc.*
- [28] Hinton, D. B. and Shaw, J. K., 1990. Differential operators with spectral parameter in completely in the boundary conditions, *Funkcial. Ekvac.*
- [Kandemir,2015] Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh., 2016. Nonlocal Sturm-Liouville Problems with Integral Terms in the Boundary Conditions, *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2017 (2017), No. 11, pp. 1-12.
- [Kandemir,2015] Diferansiyel Denklemler. Ankara:Pegem Akademi.
- [30] Kerimov N.B., Mirzoyev V.S., 2003. On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition, (Russian) *Sibirsk. Mat. Zh.* 44, no.5, pp. 1041-1045.
- [31] Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis Whit Application*, New-York.

- [32] Lancia, M. R., 2004. On Some Second Order Transmission Problems, The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 29, Number 2C, p. 85-100.
- [33] Langer, R. E., 1932. A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid, Japan. Tohoku Math. J. 35, 360-375.
- [34] Levitan and Sargsyan, 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.
- [35] Lin, P., Jiang, B., 1987. A Singular perturbation problem for periodic boundary differential equations. Appl. Math. And Mech., 8(10):929-937.
- [36] Magnus, W. ve Winkler, S., 1996. Hill's Equation, New York : Dover Publications.
- [37] Mukhtarov, O.Sh., 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition, Tr.J. of Mathematics, 18, 183-192..
- [38] Mukhtarov, O. Sh. ve Kandemir, M., 2002. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary- value problem with Functional-Transmissin conditions, Acta Mathematica Scientia vol 22 B(3), pp. 335-345.
- [39] Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. ve Aydemir, K., 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems, Filomat, 29:7, 1671-1680.
- [40] Mukhtarov, O. Sh. ve Yakubov, S., 2002. Problems for ordinary Differential Equations with Transmission Conditions, Applicable Analysis, 81, 1033-1064.
- [41] Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., 2017. Weak Eigenfunctions Of Two-Interval Sturm-Liouville Problems Together With Interaction Conditions, Journal of Mathematical Physics, 58, 042201 DOI: 10.1063/1.4979615.
- [42] Olğar, H, Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. ve Aydemir, K., 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem, Filomat, 32:3, 911-920.
- [43] Naimark, M.A., 1967. Linear Differantial Operators , Ungar, New York.
- [44] Rasulov, M. L., 1967. Methods of Contour integration, Amsterdam, North Holland Publishing Company.
- [45] Rodman, L., 1989. An Introduction to Operator Polynomials, Birkhauser Verlag, Boston, Massachusetts.
- [46] Schneider, A., 1974. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z.
- [47] Shkalikov, A. A., 1982. Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, Functional Analysis and Its Applications, Volume 16, Issue 4, pp. 324 - 326.
- [48] Stone, M. H., 1932. Linear transformations in Hilbert space, American Mathematical Society Colloquium Publications 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- [49] Sturm, C. ve Liouville, J., 1837. Extract from a brief on the development of functions in the different terms are subject to the same differing equation. Linear, containing a variable parameter, Appl. flight. 2, p. 220-233.
- [50] Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems With Eigenvalue Parameter In The Boundary Conditions, Math. Z., 133, 301-312.
- [51] Wang, A., Sun, J., Hao, X. ve Yao, S., 2009. Completeness of eigenfunctions of Sturm - Liouville problems with transmission conditions, Methods and Application of Analysis, 16(3) , 299-312.

- [52] Weyl, H., 1910. On ordinary differential equations with singularities and the associated expansions of arbitrary functions, Math. Ann. 68, 220-269.
- [53] Titchmarsh, E. C., 1962. Eigenfunction expansions associated with second order differential equations I, (2nd edn) London: Oxford Univ. Press.
- [54] Yakubov, S. Y., 1994. Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators, Longman, Scientific and Technical.
- [55] Zhang, M., Sun, J. and Zettl, A., 2013. The spectrum of singular Sturm - Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions and its approximation, Results Math., 63, 1311-1330.

