

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



HEMEN HEMEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Seher İLBASAN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

HAZİRAN 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tez Yazarı
Seher İLBASAN

Danışman
Prof. Dr. Hıfıfı ALTINOK

HAZİRAN 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Hemen Hemen Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık
Yazarı: Seher İLBASAN
İlk Teslim Tarihi: 18.05.2021
Savunma Tarihi: 22.06.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Prof. Dr. Hıfıslı ALTINOK Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Mahmut IŞIK Harran Üniversitesi, Eğitim Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Yavuz ALTIN Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “ Hemen Hemen Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık ” Başlıklı Yüksek Lisans Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

22.06.2021

Seher İLBASAN



ÖNSÖZ

Fuzzy sayı dizilerinde hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsaklıkla ilgili farklı çalışmalar yapılmış ve hala günümüzde bu konularla ilgili çalışmalar devam etmektedir. Yapılan bu tez çalışmasında fuzzy sayı dizilerinde hemen hemen lacunary istatistiksel ve kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsaklık kavramları verilip bunların aralarındaki ilişkiler ifade edilmiştir. Ayrıca aynı kavramlar fuzzy fark dizileri için de verilerek benzer kapsama bağıntıları elde edilmiştir.

Bu yüksek lisans tez çalışmamın hazırlanmasında yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen hocam Prof. Dr. Hıfı ALTINOK' a teşekkür eder saygılar sunarım.

Seher İLBASAN
ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. Giriş	1
2. ÖN BİLGİLER.....	3
3. HEMEN HEMEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK	11
4. FUZZY FARK DİZİLERİ İÇİN HEMEN HEMEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	19
5. SONUÇLAR.....	31
KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Hemen Hemen Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Seher İLBASAN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Haziran 2021, Sayfa: xii + 32

Reel sayı dizilerinde istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Cesaro toplanabilme kavramları pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bu kavramlara Orlicz fonksiyonu ve lacunary dizilerinin de eklenmesiyle konu daha da zenginleşerek önemli bir çalışma alanı ortaya çıkmıştır. İki ana bölümden oluşan çalışmanın ilk kısmında bir M Orlicz fonksiyonu ve bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi kullanılarak fuzzy sayı dizilerinin bazı genişletilmiş dizi sınıfları tanımlanmıştır. Bir fuzzy sayı dizisinin bir Orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsak olması durumunda elde edilecek sonuçlar yazılmıştır. İkinci kısımda ise Δ^m —genelleştirilmiş fark operatörünün de kullanılmasıyla daha geniş anlamda fuzzy sayı dizilerinin genelleştirilmiş bazı dizi sınıfları elde edilmiştir. Her iki bölümde de M , θ ve m ye özel değerler verilerek daha önceden tanımlanmış olan bazı dizi sınıfları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, Fuzzy sayı dizisi, Orlicz fonksiyonu, Lacunary dizisi, Fark dizisi

ABSTRACT

Almost Lacunary Statistical Convergence

Seher İLBASAN

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

June 2021, Pages: xii + 32

The concepts of statistical convergence and strong Cesaro summability were studied by many mathematicians. This concept has become even richer by adding Orlicz function and lacunary sequence and so an important field of study emerged. In the first part of thesis which consist two main part, some extended sequence classes are defined by using an Orlicz function M and lacunary sequence $\theta = (k_r)$. Some results are obtained in case a sequence of fuzzy numbers is strong almost lacunary convergent with respect to an Orlicz function. In the second part of thesis, some generalized sequence classes are obtained by using generalized difference operator Δ^m . In both parts, some sequence classes which were known previously are obtained in special cases of M , θ and m .

Keywords: Statistical convergence, Fuzzy sequence, Orlicz function, Lacunary sequence, Difference sequence

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

A^α	: A fuzzy kümesinin α -kesim kümesi
$\delta(K)$	: K kümesinin doğal yoğunluğu
Δ^m	: m-yinci dereceden genelleştirilmiş fark operatörü
M	: Orlicz fonksiyonu
θ	: Lacunary dizisi

Kısaltmalar

h.h.k.	: Hemen hemen her k
st	: İstatistiksel yakınsama



1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı esasen klasik yakınsaklığın bir genelleştirilmesi şeklinde olup bu kavrama ilk defa 1951 yılında Fast [1] ve 1959 yılında Schoenberg [2] 'in çalışmasında rastlanmaktadır. İstatistiksel yakınsaklık teorisi ve uygulamaları matematiğin farklı alanlarında çalışan pek çok matematikçinin ilgisini çekmiş ve günümüzde hala yoğun olarak çalışılmaktadır. Teori 1988 yılında Connor [3] tarafından toplanabilme teorisiyle de ilişkilendirilmiş ve bu iki kavram arasında bazı önemli bağıntılar verilmiştir. Daha sonraları Çakallı [4] tarafından topolojik gruplara ve Caserta [5] tarafından fonksiyon uzaylarına uygulanmıştır.

Fuzzy küme kavramının temeli Zadeh [6] 'in 1960 larda yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Klasik kümeler gerçek dünyadaki matematiksel metotlara tam olarak yetmemesi bu kavramın ortaya çıkmasında etkili olmuştur. Klasik kümelere bir elemanın kümeye ait olup olmaması gibi sadece iki seçenek varken fuzzy kümelerde bu durum $[0,1]$ aralığına genişletilerek sadece iki değerden oluşan sistem sonsuz değerli bir sisteme dönüşmüş ve klasik kümelerde bazı durumlarda oluşabilecek belirsizlik yeni sistemle formülleştirilmiştir. Klasik kümelerde herhangi bir eleman kümeye ya üyedir yada değildir, fakat fuzzy kümelerde hassasiyet artırıldığından dolayı elemanın kümeye üyeliğinin derecesinden bahsedilmekte olup klasik kümelere nazaran daha uygun ve gerçekçi bir yaklaşım metodudur. Bu sebeple Zadeh [6] 'in 1965 de yaptığı çalışmadan itibaren gerek mühendislik alanlarında gerekse matematiğin tüm dallarında en çok çalışılan konulardan biri olmuştur. 1986 yılında Matloka [7] fuzzy sayı dizilerini ve bu dizilerin yakınsaklığını tanımlarken 1989 de Nanda [8] bu dizilerin sınırlılığından da bahsetmiş ve yakınsaklıkla aralarında bazı bağıntılar vermiştir. Nuray ve Savaş [9] istatistiksel yakınsaklık tanımını fuzzy sayı dizilerine uygulayarak bu alanda çalışan matematikçiler için çok önemli bir adım atmıştır. Daha sonra fuzzy sayı dizilerinin toplanabilme ile ilişkisi Kwon [10] tarafından çalışıldı. Fuzzy sayı dizilerine Çolak vd. [11], Altınok vd. [12], Altınok [13], Aytar [14] ve Et vd. [15] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

1981 yılında Kızmaz [16] reel sayı dizileri için fark dizisini tanımlamış ve bazı fark dizi uzaylarını tanımlayarak bu uzayların BK uzayı olduklarını göstermiştir. Daha sonra Kızmaz [16] ın tanımladığı fark dizi uzayları Et ve Çolak [17] tarafından m-yinci dereceden genelleştirilerek yeni genelleştirilmiş fark dizi uzayları elde edilmiş ve bunlar için de benzer özellikler verilmiştir.

Lacunary dizilerine literatürde ilk defa Freedman v.d. [18] nin makalesinde rastlanmaktadır. Daha sonradan Fridy ve Orhan [19] tarafından lacunary istatistiksel yakınsaklık tanımı verilmiştir. Bu konu o zamandan beri pek çok konuyla ilişkilendirilmiştir. 2009 yılına gelindiğinde Gökhan v.d. [20] fuzzy sayı dizilerinde yapılmış olan hemen hemen lacunary istatistiksel ve kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsaklık tanımlarını vermiş ve bunların arasındaki kapsama bağıntılarını

incelemiştir. Ayrıca, Altınok ve Çolak [21] tarafından aynı kavramlar genelleştirilmiş fark operatörü kullanılarak daha genel sonuçlar ve farklı bağıntılar elde edilmiştir. Bu çalışmanın amacı Gökhan v.d. [20] ile Altınok ve Çolak [21] tarafından fuzzy sayı dizilerinde yapılmış olan hemen hemen lacunary istatistiksel ve kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsaklık kavramlarını bir araya getirerek bu kavramların aralarındaki önemli ilişkilere yer vermektir.



2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin ana bölümlerinde kullanılacak konulardan olan istatistiksel yakınsaklık ve fuzzy sayı dizileriyle ilgili temel tanımlar yer almaktadır.

Tanım 2.1. $S \subset N$ olmak üzere bir S kümesinin doğal (asimptotik) yoğunluğu

$$\delta(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in S\}|$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıda verilen limitteki $|\{k \leq n : k \in S\}|$ ifadesi S kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir. [22].

Örnek 2.2. $A = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ şeklinde tanımlı bir A kümesinin doğal yoğunluğu $\delta(A) = 1/2$ dir. Çünkü doğal sayılar kümesi olan N nin eleman sayısının n olduğu kabul edilirse bu durumda çift sayıların (ve tek sayıların) toplam sayısı $n/2$ olacağından doğal yoğunluk

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/2}{n} = \frac{1}{2}$$

biçiminde basit bir limit işlemiyle $1/2$ olarak bulunabilir.

Tanım 2.3. A kümesi sıfır yoğunluklu herhangi bir küme olsun. Eğer kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri herhangi bir S özeliğini A kümesinin haricinde tüm k indisleri için sağlıyorsa, verilen (x_k) kompleks terimli dizisi hemen hemen her k için S özeliğini sağlıyor denir ve bu durum kısaca *h.h.k* biçiminde yazılır [19].

İstatistiksel yakınsaklık kavramının temeli doğal yoğunluk kavramına dayalı olduğundan tanım şu şekildedir.

Tanım 2.4. Terimleri kompleks sayılardan oluşan bir $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve *h.h.k* için $|x_k - \gamma| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir γ sayısı varsa veya aynı şey demek olan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - \gamma| \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti mevcutsa veya bu durumda $x = (x_k)$ dizisi γ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama çeşidi kısaca *st-lim* $x = \gamma$ şeklinde gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı genellikle S ile gösterilir.

Teorem 2.5. Eğer $x = (x_k)$ dizisi yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = \gamma$ ise $st - \lim x_k = \gamma$ dir [23].

Yukarıdaki teoremin tersi, yani “istatistiksel yakınsak bir dizinin klasik anlamda yakınsak olacağı” ifadesine her zaman doğru diyemeyiz. Gerçekten $x = (x_k)$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \text{ ise } (m = 1, 2, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| \{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\} \right| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan gerekli limit işlemi yapıldığında eşitsizliğin solunda verilen kümenin doğal yoğunluğunun sıfır olduğu görülecektir. Buradan verilen dizinin sıfıra istatistiksel yakınsak yani $st - \lim x = 0$ olduğu anlaşılır. Diğer yandan $x = (x_k)$ dizisinin yakınsak olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü dizinin yakınsayabileceği herhangi bir sayı yoktur. Eğer öyle bir s sayısı olsaydı s nin ε komşuluğunun dışında mutlaka diziye ait sonlu tane terim bulunması gerekirdi. Bununla birlikte yukarda tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak bir dizi olduğu halde sınırlı da değildir.

Diğer taraftan, $x = (-1, 1, -1, 1, -1, 1 \dots)$ dizisi sınırlı bir dizi olmasına rağmen istatistiksel yakınsak bir dizi değildir. Çünkü istatistiksel yakınsaklığın tanımı gereği bir sayının istatistiksel limit olabilmesi için tanımdaki limit hesaplamaları yapıldığında doğal yoğunluğun sıfır olması gerekir. Halbuki burada dizinin terimleri göz önüne alındığında ne 1 ne de -1 sayısının istatistiksel limit olamayacağı açıktır. Bu sayıların dışında bir sayının da istatistiksel limit olamayacağı kolayca görülebilir. Bu örnekten yola çıkarak sınırlı diziler uzayı ℓ_∞ ile istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı olan S birbirlerini kapsamazlar, fakat bu iki dizi uzayının arakesiti boş değildir.

Teorem 2.6. Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel yakınsak ise limiti sadece bir tanedir [23].

Teorem 2.7. $st - \lim x = \gamma_1, st - \lim y = \gamma_2$ ve c bir reel sayı olsun. Bu taktirde

- i) $st - \lim cx_k = c\gamma_1$
- ii) $st - \lim (x_k + y_k) = \gamma_1 + \gamma_2$ dir [23].

Yukarıda verilen teoremin bir sonucu olarak istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı olan S nin bir

vektör uzay olduğu anlaşılır.

Tanım 2.8. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisini verilsin ve $\varepsilon > 0$ sayısını alalım. Eğer h.h.k. için $|x_k - x_{k_0}| < \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $k_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |x_k - x_{k_0}| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

limiti mevcutsa $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [23].

Tanım 2.9. $p \in \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0$$

sağlanacak biçimde bir γ sayısı varsa, o zaman $x = (x_k)$ dizisi kuvvetli p-Cesaro toplanabilir denir.

Bu şekildeki dizilerden oluşan uzay kısaca W_p ile gösterilecektir. Yani,

$$W_p = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \gamma|^p = 0, \text{ en az bir } \gamma \text{ için} \right\}$$

dir [3].

Teorem 2.10. Kompleks terimli bir $x = (x_k)$ dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir ancak ve ancak $x = (x_k)$ istatistiksel yakınsaktır [23].

Tanım 2.11. Pozitif tamsayılar kümesi olan $\mathbb{Z}^+$ kümesinde bir $\theta = (k_r)$ artan dizisini göz önüne alalım. $k_0 = 0$ şartı sağlanacak şekilde eğer $r \rightarrow \infty$ için limit alındığında $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ oluyorsa $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir. $\theta = (k_r)$ dizisinin seçimine göre oluşan aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ biçiminde gösterilecektir [18].

Tanım 2.12. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

limiti sağlanacak biçimde bir L sayısı mevcutsa (x_k) dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir. N_θ ile tüm kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin kümesi gösterilecektir [18].

Tanım 2.13. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

limiti sağlanırsa (x_k) dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir [19].

Tanım 2.14. Kompleks terimli bir (x_k) dizisi verilsin ve Δ fark operatörü $\Delta x = x_k - x_{k+1}$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$l_\infty(\Delta) = \{(x_k) : \Delta x \in l_\infty\}$$

$$c(\Delta) = \{(x_k) : \Delta x \in c\}$$

dizi uzayları $\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$ normu ile birer BK uzayıdır. [16] $m \in N$ ve $\Delta^m x = \Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1}$ olmak üzere $l_\infty(\Delta^m)$ ve $c(\Delta^m)$ uzayları birer BK uzayıdır. [17]

Tanım 2.15. i) $M(0)=0$, ii) Her $x>0$ için $M(x)>0$, iii) $x \rightarrow \infty$ için $M(x) \rightarrow \infty$, iv) M sürekli, azalmayan ve konveks, şartlarını sağlayan $M:[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonuna bir Orlicz fonksiyonu denir [24]

Aşağıda Zadeh [1] tarafından tanımlanan bazı tanımları verelim.

Tanım 2.16. Herhangi bir X kümesi ve bu kümenin bir A alt kümesi verilsin. Bu taktirde

$$f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \text{ ise} \\ 0, & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $f_A : X \rightarrow R$ fonksiyonuna A kümesinin karakteristik fonksiyonu denir.

Buna göre X in bir A alt kümesini karakteristik fonksiyon yardımıyla

$$A = \{x \in X : f_A(x) = 1\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Bu tanıma göre herhangi bir $x \in X$ elemanı verildiğinde $x \in A$ olup olmadığı karakteristik fonksiyonu yardımıyla kolaylıkla anlaşılabilmektedir.

Tanım 2.17. χ herhangi bir küme olarak verilsin. χ kümesindeki bir A kümesinin bir fuzzy küme olabilmesi için, $X_A : \chi \rightarrow [0,1]$ şeklinde bir karakteristik fonksiyonun mevcut olması gerekir. Bu fonksiyon, x ler A kümesinin elemanı olduğunda $X_A(x) \in (0,1]$, ve A kümesinin elemanı olmadığında $X_A(x) = 0$ biçiminde tanımlanır. Eğer bir karakteristik

fonksiyon burada olduğu gibi tanımlanmışsa bu fonksiyona üyelik fonksiyonu denilir.

Bir A fuzzy kümesi yukarıda verilen X_A üyelik fonksiyonunun tanımından faydalanılarak

$$A = \{x \in \mathcal{X} : X_A(x) \in (0,1]\}$$

şeklinde de tanımlanabilir.

Şimdi de fuzzy sayının tanımında kullanılacak olan bazı tanımları vermeye başlayalım.

Tanım 2.18. Eğer $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathcal{X}$ sayısı varsa A fuzzy kümesine normal fuzzy küme denir.

Tanım 2.19. A bir fuzzy küme olsun ve $\alpha \in (0,1]$ verilsin. A fuzzy kümesinin α - kesimi A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \mathcal{X} : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 0-kesim kümesi $cl\{x \in R : X_A(x) > 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.20. Bir A fuzzy kümesi verilsin.

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{X} : X_A(x) > 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A fuzzy kümesinin support'u yada desteği denir. Bu küme üyelik derecesi sıfır olmayan bütün noktalardan oluşan bir kümedir.

Tanım 2.21. Bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer her $\alpha \in (0,1]$ için A^α kümesi konveks ise A fuzzy kümesi konvektir.

Şimdi de bu tanıma denk olan farklı bir konvekslik tanımını verelim.

Tanım 2.22. Bir A fuzzy kümesi verilsin. Eğer her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ için

$$X_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{X_A(x_1), X_A(x_2)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A ya konveks fuzzy kümedir denir.

Tanım 2.23. ([7]) Eğer bir $X : R \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu aşağıda verilen dört şartı sağlarsa bir X fonksiyonuna bir fuzzy sayı denir.

- i) X normaldir,
- ii) X fuzzy konvektir,

- iii) $X^0 = \{x \in R : X(x) > 0\}$ kümesinin kapanışı olan $cl\{x \in R : X_A(x) > 0\}$ kümesi kompakttır,
- iv) X üst-yarı-süreklidir.

Bütün reel fuzzy sayılar kümesi kısaca $L(R)$ sembolüyle gösterilecektir.

Tanım 2.24. ([8]) $L(R)$ kümesi üzerinde bir A fuzzy kümesini göz önüne alalım. Eğer A fuzzy kümesindeki her X fuzzy sayısı için $X \leq s$ sıralama bağıntısı sağlanacak biçimde bir s fuzzy sayısı mevcut ise A fuzzy kümesine üstten sınırlı bir küme denir. Buradaki s fuzzy sayısına A fuzzy kümesinin bir üst sınırı denir. Eğer A kümesinin her t üst sınırı için $s \leq t$ ise s fuzzy sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir. A fuzzy kümesinin alttan sınırlılığı ve infimum tanımları da yukarıda verilen üstten sınırlılık tanımına benzer biçimde yapılabilir.

Tanım 2.25. $L(R^n)$ fuzzy sayılar kümesinde verilen bir $X = (X_k)$ fuzzy sayısı dizisini alalım. Eğer $X = (X_k)$ fuzzy sayısı dizisinin tüm terimleri alttan ve üstten en az birer tane fuzzy sayı tarafından sınırlandırılmış ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlı bir dizi denir. Bu şekilde verilen tüm $X = (X_k)$ dizilerinin kümesi kısaca $\ell_\infty(F)$ ile sembolize edilecektir.

X ve Y gibi iki fuzzy sayısı arasındaki uzaklığı hesaplamak için

$$\begin{aligned} \bar{d} : L(R) \times L(R) &\rightarrow R \\ \bar{d}(X, Y) &= \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d_H(X^\alpha, Y^\alpha) \end{aligned}$$

metriği kullanılacaktır. Burada d_H Hausdorff metriğidir ve

$$d_H(X^\alpha, Y^\alpha) = \max\left(\left|\underline{X}^\alpha - \underline{Y}^\alpha\right|, \left|\overline{X}^\alpha - \overline{Y}^\alpha\right|\right)$$

şeklinde tanımlanır. $L(R)$ uzayı yukarıda verilen $\bar{d}$ metriğine göre tamdır [25]. Bu metrik, R üzerindeki mutlak değer metriğine indirgenir.

Tanım 2.26. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi, doğal sayılar kümesini fuzzy sayılar kümesine dönüştüren bir fonksiyondur. Buna göre bir $X = (X_k)$ fuzzy dizisinin her bir terimi aslında birer fuzzy sayıdan başka bir şey değildir [7].

Tanım 2.27. $L(R^n)$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir X_0 fuzzy sayısını göz önüne alalım. ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. X_0 ın ε – komşuluğu $d(X, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimdeki X sayılarından oluşan bir kümedir. Buna göre $K(X_0, \varepsilon)$ kümesi ile herhangi bir X_0 fuzzy sayısının ε – komşuluğundan bahsedilecektir [7].

Tanım 2.28. $L(R^n)$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için ve $k > k_0$ doğal sayıları için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir k_0 sayısı bulunabiliyorsa bu taktirde (X_k) fuzzy dizisine yakınsak bir dizi denir ve bu dizinin yakınsadığı sayı yani limiti de X_0 fuzzy sayısıdır denir [7]. Bütün yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $c(F)$ ile göstereceğiz.

Örnek 2.29. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi

$$X_k(x) = \begin{cases} \frac{k}{k+2}x + \frac{2-2k}{k+2}, & x \in \left[\frac{2k-2}{k}, 3\right] \text{ ise} \\ -\frac{k}{k+2}x + \frac{4k+2}{k+2}, & x \in \left[3, \frac{4k+2}{k}\right] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış bir dizi olarak verilsin. $X = (X_k)$ dizisinin limitinin gerekli aritmetik işlemlerden sonra aşağıdaki gibi üçgensel bir fuzzy sayı olduğu kolayca görülebilir.

$$X_0(x) = \begin{cases} x-2, & x \in [2, 3] \text{ ise} \\ -x+4, & x \in [3, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

Tanım 2.30. Her $\varepsilon > 0$ için $N < k, k_0$ sağlandığında $d(X_k, X_m) < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $k_0 \in N$ sayısı bulunabiliyorsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi tıpkı reel sayı dizilerinde olduğu gibi bir fuzzy Cauchy dizisidir [7].

Tanım 2.31. ([9]) $L(R^n)$ fuzzy sayılar kümesinde herhangi bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

limiti sağlanacak biçimde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy dizisi X_0 sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve bu yakınsama kısaca $S(F) - \lim X_k = X_0$ veya $X_k \rightarrow X_0(S(F))$ yazılır.



3. HEMEN HEMEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Gökhan vd. [20] tarafından tanımlanmış olan $\hat{S}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$, $\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$, $\hat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ ve $\hat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ dizi sınıfları ve bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Tanım 3.1. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, bir M Orlicz fonksiyonu ve bir $p = (p_k) > 0$ dizisi verilsin. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0, m'ye göre düzgün$$

limiti mevcutsa bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi M orlicz fonksiyonuna göre X_0 fuzzy sayısına hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Burada

$$t_{km}(x) = \frac{Xm + Xm + 1 + \dots + Xm + k}{k + 1} = \frac{1}{k + 1} \sum_{i=0}^k x_{m+i} \text{ 'dir.}$$

Tüm hemen hemen lacunary istatistiksel yakınsak fuzzy dizilerinin kümesi $\hat{S}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0(\hat{S}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta))$ yazılacaktır. $\theta = (2^r)$, $M(x) = x$ ve her $k \in N$ için $p_k=1$ durumunda $\hat{S}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ yerine sırasıyla $\hat{S}^{\mathcal{F}}(M, p)$ ve $\hat{S}^{\mathcal{F}}(\theta)$ yazılacaktır.

Tanım 3.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu ve bir $p = (p_k) > 0$ dizisi verilsin. Buna göre aşağıdaki dizi sınıflarını tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ &\quad \left. m'ye göre düzgün bazı \rho > 0 \right\}, \\ \hat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0, \right\}, \\ \hat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) &= \left\{ X = (X_k) : \sup_{r, m} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \right\}, \end{aligned}$$

Burada

$$\bar{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (0, 0, 0, \dots, 0) \\ 0, & d, d \end{cases}$$

dır.

Eğer $X \in \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ ise M orlicz fonksiyonuna göre X dizisi kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0(\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta))$ yazılır.

M, θ ve p' 'nin özel durumlarına göre yukarıdaki dizi sınıflarından aşağıdaki dizi sınıflarını elde ederiz.

- (i) $\theta = (2^r)$ durumunda $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p)$, $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p)$ ve $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p)$
- (ii) $M(x) = x$ durumunda $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}^{\mathcal{F}}(p, \theta)$, $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(p, \theta)$ ve $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(p, \theta)$
- (iii) her $k \in N$ için $p_k = 1$ durumunda $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, \theta)$, $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, \theta)$ ve $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(p, \theta)$
- (iv) her $k \in N$ için $p_k = 1$ durumunda $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}^{\mathcal{F}}(\theta)$, $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(\theta)$ ve $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(\theta)$

Teorem 3.3. (p_k) dizisi sınırlı olsun. Bu takdirde $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \subset \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \subset \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ 'dir.

İspat. Öncelikle kabul edelim ki $X \in \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ olsun bu takdirde;

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{2\rho} \right) \right]^{p_k} \\
& \leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
& \quad + \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(X_0, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
& \leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + D \max \left\{ 1, \sup \left[M \left(\frac{d(X_0, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^H \right\},
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sup_k p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dır.

Buna göre $X \in \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ olduğu görülür.

$\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \subset \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ kapsaması aşıkardır.

Teorem 3.4. (p_k) dizisi sınırlı olsun. Bu durumda $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$, $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$, $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ ve $\widehat{S}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ dizi kuvvetleri toplama ve skaler çarpım işlemleri altında kapalıdır.

Teorem 3.5. M_1 ve M_2 Orlicz fonksiyonu olsun Bu durumda

- (i) $\widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M_1, p, \theta) \cap \widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M_2, p, \theta) \subset \widehat{w}_0^{\mathcal{F}}(M_1 + M_2, p, \theta)$,
- (ii) $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M_1, p, \theta) \cap \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M_2, p, \theta) \subset \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M_1 + M_2, p, \theta)$,

$$(iii) \hat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M_1, p, \theta) \cap \hat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M_2, p, \theta) \subset \hat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M_1 + M_2, p, \theta).$$

Teorem 3.6. Her her $k \in N$ için $0 < p_k \leq q_k$ olsun ve $\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$ sınırlı olsun. Bu durumda $\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, q, \theta) \subseteq \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ dir.

Teorem 3.7. $\theta = (k_r)$ dizisi $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda M herhangi bir Orlicz fonksiyonu olmak üzere $\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p) = \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ dir.

İspat. Farz edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Buna göre her bir $r \geq 1$ doğal sayısı için $q_r = \frac{kr}{kr-1} \geq 1 + \delta$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif bir δ sayısı mevcuttur.

Bu takdirde $x \in \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p)$ için

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} - \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right), \end{aligned}$$

yazılabilir.

$h_r = k_r - k_{r-1}$, olduğundan $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ ve $\frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$ olur.

$$k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \text{ ve } k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

terimlerinin ikisi de m 'ye göre düzgün olarak sıfıra yakınsar ve böylece $r \rightarrow \infty$ iken m 'ye göre düzgün olarak $A_r \rightarrow 0$ olur. Buna göre $\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p) \subset \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ olur.

Şimdide kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu taktirde her bir $r \geq 1$ doğal sayısı için $q_r < \beta$ sağlanacak biçimde pozitif bir β sayısının varlığından bahsedilebilir. $X \in \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Her $j \geq R$ için

$$A_j = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_j} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde pozitif bir R sayısı mevcuttur.

Buna ilaveten her j pozitif tamsayısı için yukarıda verilen eşitsizlikten $K \leq A_j$ sağlanacak biçimde pozitif bir k doğal sayısı vardır. Ayrıca $R < r$ ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ şartları sağlanacak biçimde bir n bir tamsayı mevcut olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ & = \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \sum_{k \in I_1} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \sum_{k \in I_2} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \dots \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\} < K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon \beta \text{ dir.} \end{aligned}$$

$r \rightarrow \infty$ iken $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$ olur ve dolayısıyla $\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \subset \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p)$ dir.

Teorem 3.8. Eğer $\lim p_k > 0$ ve M Orlicz fonksiyonuna göre X fuzzy sayı dizisi X_0 'a kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsak ise, Yani $X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \right)$ ise X_0 tektir.

İspat. $\lim p_k = s > 0$ olsun ve kabul edelim ki

$X_k \rightarrow X_1 \left(\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \right)$, $X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta) \right)$ olsun. Bu takdirde m 'ye göre düzgün olarak

$$\lim_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} = 0$$

ve

$$\lim_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_1)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} = 0,$$

limitleri mevcut olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 sayıları mevcuttur.

$\rho = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ olsun Bu takdirde $\sup_k p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere $(r \rightarrow \infty)$ iken

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ \leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_1)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

elde edilir. Buna göre

$$\lim_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0$$

olur. Ayrıca açık bir şekilde

$$\lim_k \left[M \left(\frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \left[M \left(\frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right) \right]^s,$$

olduğundan son iki eşitlikten $\left[M \left(\frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right) \right]^s = 0$ elde edilir. Böylece $X_0 = X_1$ olur.

Teorem 3.9. $\theta = (k_r)$ bir lacuary dizisi ve M bir orlicz fonksiyonu olsun Bu durumda $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, \theta) = \widehat{m}_\infty^{\mathcal{F}}(M)$ ve $\widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(\theta) = \ell_\infty^{\mathcal{F}}$ dur. Burada

$$\widehat{m}_\infty^{\mathcal{F}}(M) = \left\{ X = (X_k) : \sup_{k,m} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho} \right) \right] < \infty, \text{ bazı } \rho > 0 \right\}$$

dır.

İspat. $X \in \widehat{w}_\infty^{\mathcal{F}}(M, \theta)$ olsun Bu taktirde her bir m, r için

$$\frac{1}{h_1} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho} \right) \right] \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho} \right) \right] \leq K_1$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde pozitif bir K_1 sabiti vardır ve böylece $X \in \widehat{m}_\infty^{\mathcal{F}}(M)$ bulunur.

Tersine, $X \in \widehat{m}_\infty^{\mathcal{F}}(M)$ olsun bu taktirde herbir k, m için $M \left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho} \right) \leq K_2$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif bir K_2 sabiti mevcuttur ve dolayısıyla her bir k ve m sayıları için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} M\left(\frac{d(t_{km}(X), \bar{0})}{\rho}\right) \leq \frac{K_2}{h_r} \sum_{k \in I_r} 1 \leq K_2$$

olur. Buna göre $X \in \hat{w}_\infty^\mathcal{F}(M, \theta)$ olur. Diğerleride benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 3.10. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde

- (i) Eğer $X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{w}^\mathcal{F}(\theta) \right) \Rightarrow X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{S}^\mathcal{F}(\theta) \right)$ ve
- (ii) $X \in \ell_\infty^\mathcal{F}$ ve $X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{S}^\mathcal{F}(\theta) \right)$ ise $X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{w}^\mathcal{F}(\theta) \right)$ dır.

İspatı aşıkardır.

Teorem 3.11. $\theta = (k_r)$ dizisi $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun Bu taktirde

$$\hat{S}^\mathcal{F} = \hat{S}^\mathcal{F}(\theta) \text{ dır.}$$

İspat. Eğer $\liminf_r q_r > 1$ ise çok büyük pozitif r sayıları için $q_r \geq 1 + \delta$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif δ sayısı mevcuttur. h_r teriminin tanımından

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1 + \delta}{\delta} \text{ olur.}$$

eşitsizliği yazılabilir. Şimdi de $X \in \hat{S}^\mathcal{F}$ olduğunu kabul edelim. Bu kabulümüze göre her $\varepsilon > 0$ sayısı, her m ve çok büyük pozitif r sayıları için

$$\begin{aligned} k_r^{-1} |\{k \leq k_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq k_r^{-1} |\{k \in I_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1 + \delta} \cdot \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X \in \hat{S}^\mathcal{F}(\theta)$ olur.

Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. limsup tanımına göre her r için $\beta > q_r$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif bir β sayısının varlığından bahsedilebilir. $X \in \hat{S}^\mathcal{F}(\theta)$ olsun ve m nin $m \geq 1$ şeklindeki her bir değeri için

$$N_{rm} = |\{k \in I_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}|$$

kümesini alalım. Buna göre her $r > r_0$ ve herbir $m \geq 1$ için

$$\frac{N_{rm}}{h_r} < \varepsilon \text{ olacak şekilde bir } r_0 \in N \text{ vardır.}$$

$K = \max\{N_{rm} : 1 \leq r \leq r_0\}$ olsun ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif bir n tamsayısını seçmiş olalım. Bu taktirde gerekli cebirsel işlemlerden sonra

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_{1m} + N_{2m} + N_{3m} + \cdots + N_{r_0m} + N_{(r_0+1)m} + \cdots + N_{rm}\} \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon\beta \end{aligned}$$

ifadeleri yazılabilir ki böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.12. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, M bir orlicz fonksiyonu ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H$ olsun. Bu taktirde $\widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, P, \theta) \subset \widehat{S}^{\mathcal{F}}(\theta)$ dir.

İspat. İspat aşağıdaki eşitsizlikten çıkar

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon}} \min([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H) \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\rho} \\ &= \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \varepsilon\}| \cdot \min([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H) \end{aligned}$$

Teorem 3.13. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, M bir orlicz fonksiyonu,

$X = (X_k)$ sınırlı bir fuzzy sayı dizisi ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olsun. Bu taktirde $\widehat{S}^{\mathcal{F}}(\theta) \subset \widehat{w}^{\mathcal{F}}(M, P, \theta)$ dir.

İspat. $X \in \ell_{\infty}^{\mathcal{F}}$ olduğunu farz edelim ve $X_k \rightarrow X_0 \left(\widehat{S}^{\mathcal{F}}(\theta) \right)$ olsun. Kabulümüze göre X dizisinin $\ell_{\infty}^{\mathcal{F}}$ nin elemanı olması sebebiyle her k, m için $d(t_{km}(X), X_0) \leq T$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $T > 0$ sayısı mevcuttur. Buna göre $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned}
& h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&= h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(t_{km}(X), X_0) \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(t_{km}(X), X_0) < \epsilon}} \left[M \left(\frac{d(t_{km}(X), X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(t_{km}(X), X_0) \geq \epsilon}} \max \left\{ \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^H \right\} + h_r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(t_{km}(X), X_0) < \epsilon}} \left[M \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k}, \\
&\leq \max \{ [M(K)]^h, [M(K)]^H \} h_r^{-1}
\end{aligned}$$

$$|\{k \in I_r : d(t_{km}(X), X_0) \geq \epsilon\}| + \max([M(\epsilon_1)]^h, [M(\epsilon_1)]^H), \frac{T}{\rho} = K, \frac{\epsilon}{\rho} = \epsilon_1$$

elde edilir Böylece $X \in \hat{w}^{\mathcal{F}}(M, p, \theta)$ bulunur.

4. FUZZY FARK DİZİLERİ İÇİN HEMEN HEMEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Bu bölümde Altınok ve Çolak [21] tarafından tanımlanmış olan $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$, $\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$, $\hat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ ve $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dizi sınıfları ve bazı kapsama bağlantıları verilecektir.

Tanım 4.1. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Bu taktirde $\{\Delta^m X_k : k \in N\}$ genelleştirilmiş fark dizisi sınırlı bir diziyse $X = (X_k)$ dizisine Δ^m - sınırlı bir dizidir denir.

Eğer $\varepsilon > 0$ ve her $k > k_0$ doğal sayıları için $d(\Delta^m X_k, X_0) > \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak biçimde ε ye bağlı pozitif bir k_0 tamsayısı varsa (X_k) fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına Δ^m - yakınsaktır denir. $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ ve $c(\Delta^m, F)$ sırasıyla tüm Δ^m - sınırlı ve Δ^m - yakınsak fuzzy sayı dizilerinin sınıfını gösterecektir.

Tanım 4.2. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu ve $(p_k) > 0$ bir reel dizi olarak verilsin. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olmak üzere $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{p} \right) \right]^{p_k} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0, i'ye göre düzgün$$

limiti mevcutsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi'ne X_0 fuzzy sayısına hemen hemen lacunary $\Delta_{M(p)}^m$ -istatistiksel yakınsaktır denir.

Bütün hemen hemen lacunary $\Delta_{M(p)}^m$ -istatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerin kümesi $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0 \left(\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p) \right)$ yazılır. $\theta = (2^r)$ ve $M(x) = x$ her $k \in N$ için $p = p_k$ durumunda $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ yerine $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ yazılacaktır.

Tanım 4.3. M bir orlicz fonksiyonu ve $(p_k) > 0$ herhangi bir reel dizi olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki dizi sınıflarını tanımlıyoruz:

$$\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \left\{ X = (X_k) \in w(F) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{p} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ \left. \text{bazı } \rho > 0 \text{ için } i'ye göre düzgün \right\}$$

$$\hat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \left\{ X = (X_k) \in w(F) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{p} \right) \right]^{p_k} = 0, \right. \\ \left. \text{bazı } \rho > 0 \text{ için } i'ye göre düzgün \right\}$$

$$\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \left\{ X = (X_k) \in w(F) : \sup_{r,i} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \infty, \right. \\ \left. \text{bazı } \rho > 0 \text{ için} \right\}$$

Burada

$$\bar{0}(t) = \left\{ 1, t = (0, 0, 0, \dots, 0) \right. \\ \left. 0, d.d \right\}$$

dır. Eğer $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ ise X fuzzy sayı dizisi, M orlicz fonksiyonuna göre kuvvetli hemen hemen lacunary $\Delta_{(p)}^m$ -Cesaro yakınsaktır. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0(\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta))$ yazılır.

Yukarıdaki dizi kümelerinden M, θ, p ve m 'nin özel durumlarına göre aşağıdaki dizi kümeleri elde edilir.

- (i) $\theta = (2^r)$ durumunda, $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p)$,
 $\widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, p)$ ve $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p)$
- (ii) $M(x) = x$ durumunda, $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}(\Delta^m F, p, \theta)$,
 $\widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_0(\Delta^m, F, p, \theta)$ ve $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$,
- (iii) Her $k \in N$ için $p_k = p$ durumunda, $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}(\Delta^m, F, M, \theta)$,
 $\widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, \theta)$ ve $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, \theta)$,
- (iv) $M(x) = x$ ve $p_k = p$ durumunda, $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}(\Delta^m, F, \theta)$,
 $\widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_0(\Delta^m, F, \theta)$ ve $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, \theta)$

Teorem 4.4. $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$, $\widehat{w}_0(\Delta^m, F, M, p, \theta)$, $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ ve $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F, M, p)$ dizi kümeleri toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında kapalıdır.

İspat. İspatı sadece $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ için yapacağız. Diğerleri benzer şekilde yapılır.

$\alpha \in [0, 1]$, $c \in R$, $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ olsun ve $p = |c|.p_1$ seçelim. Bu kabul ve seçimlerimize göre

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(c\Delta^m X_{k+i}, cX_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{|c|d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty,$$

yakınsaması elde edilir. Buradaki yakınsama i 'ye göre düzgündür. Böylece $cX \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dır.

Şimdi $X, Y \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ olsun ve $p = 2\rho_1$ alalım M azalmayan, konveks ve Δ^m lineer olduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m(X_{k+i} + Y_{k+i}, X_0 + Y_0))}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \frac{1}{2^{p_k}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} + \frac{d(\Delta^m Y_{k+i}, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ & \leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} + \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m Y_{k+i}, Y_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada $0 < p_k \leq \sup_k p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ dır. Böylece $X + Y \in \widehat{w}(\Delta^m, F, p, \theta)$ dır.

Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4.5. $\widehat{w}(\Delta^m, F, p, \theta)$, $\widehat{w}_0(\Delta^m, F, p, \theta)$ ve $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ uzayları

$$\delta_\Delta(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k) + \sup_{r,i} \left(hr^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \Delta^m Y_{k+i})]^{p_k} \right)^{\frac{1}{K}}$$

metriğiyle tam metrik uzaydır. Burada $K = \max(1, \sup_k p_k)$ dır.

İspat. Sadece $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ için ispat yapacaz. Diğerleri benzerdir.

(X^s) dizisi $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ 'da bir Cauchy dizisi olsun. Burada herbir $s \in N$ için

$X^s = (X_i^s)_i = (X_1^s, X_2^s, \dots) \in \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ olur. Bu taktirde

$$\delta_\Delta(X^s, X^t) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) + \sup_{r,i} \left(hr^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i}^t)]^{p_k} \right)^{\frac{1}{K}} \rightarrow 0$$

olur. Bu nedenle herbir $i \in N$ için $s, t \rightarrow \infty$ iken

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0 \text{ ve } hr^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i}^t)]^{p_k} \rightarrow 0$$

olur. Böylece herbir sabit $j \in N$ için $\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$ ve $d(\Delta^m X_j^s, \Delta^m X_j^t) \rightarrow 0$ olur.

$$d(X_{j+m}^s, X_{j+m}^t) \leq d(\Delta^m X_j^s, \Delta^m X_j^t) + \binom{m}{0} d(X_j^s, X_j^t) + \dots + \binom{m}{m-1} d(X_{j+m-1}^s, X_{j+m-1}^t)$$

eşitsizliğinden her bir $j \in N$ için $s, t \rightarrow \infty$ iken $d(X_j^s, X_j^t) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu nedenle

$(X_j^s)_s = (X_j^1, X_j^2, \dots), L(R^n)$ de bir Cauchy dizisidir. $L(R^n)$ tam olduğundan yakınsaktır her bir $j \in N$ için ;

$$\lim_s X_j^s = X_j$$

Diyelim. (X^s) dizisi Cauchy dizisi olduğundan her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_\Delta(X^s, X^t) < \varepsilon \quad (\text{her } s, t \geq n_0) \text{ için}$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ vardır. Böylece her bir $r, i \in N$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) < \varepsilon \quad \text{ve} \quad hr^{-1} \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i}^t)]^{p_k} < \varepsilon^K,$$

$s, t \geq n_0$ elde edilir. Buradan da her $r \in N$ ve $s \geq n_0$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m d(X_k^s, X_k^t) = \sum_{i=1}^m d(X_k^s, X_k) < \varepsilon$$

ve

$$\lim_t hr^{-1} \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i}^t)]^{p_k} = hr^{-1} \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}^s, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k} < \varepsilon^K$$

bulunur. Bu da her $s \geq n_0$ için $\delta_\Delta(X^s, X) < 2\varepsilon$ olmasını yani $s \rightarrow \infty$ iken $X^s \rightarrow X$ olmasını gerektirir. $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} hr^{-1} \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})]^{p_k} &\leq hr^{-1} \left\{ \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \bar{0}) + d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k} \right\} \\ &\leq \frac{D}{hr} \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \bar{0})]^{p_k} + \frac{D}{hr} \sum_{k \in Ir} [d(\Delta^m X_{k+i}^{n_0}, \Delta^m X_{k+i})]^{p_k}, \end{aligned}$$

olduğundan $X \in \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ elde edilir. Bu nedenle $\widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, p, \theta)$ bir tam metrik uzayıdır.

Teorem 4.6. $0 < p_k \leq q_k$ olmak üzere $\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$ dizisinin sınırlı olduğunu kabul edelim. Buna göre $\widehat{w}(\Delta^m, M, q, F, \theta) \subseteq \widehat{w}(\Delta^m, M, p, F, \theta)$ dır.

İspat. $X = (X_k) \in \widehat{w}(\Delta^m, M, q, F, \theta)$ olsun. Bazı λ 'lar ve herbir k için $0 < \lambda < \lambda_k \leq 1$ şartları sağlanacak şekilde

$$t_k = \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

ve

$$\lambda_k = \left(\frac{p_k}{q_k} \right)$$

alalım. (u_k) ve (v_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$u_k = \begin{cases} t_k, & t_k \geq 1 \\ 0, & t_k < 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad v_k = \begin{cases} 0, & t_k \geq 1 \\ t_k, & t_k < 1 \end{cases}$$

Açıktır ki her $k \in N$ için $t_k = u_k + v_k$ ve $t_k^{\lambda_k} = u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}$ olur. Buradan $u_k^{\lambda_k} \leq u_k \leq t_k$ ve $v_k^{\lambda_k} \leq v_k^{\lambda}$ olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned} hr^{-1} \sum_{k \in Ir} t_k^{\lambda_k} &= hr^{-1} \sum_{k \in Ir} (u_k + v_k)^{\lambda_k} \\ &\leq hr^{-1} \sum_{k \in Ir} t_k + hr^{-1} \sum_{k \in Ir} v_k^{\lambda} \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lambda < 1$ olduğundan herbir r için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} hr^{-1} \sum_{k \in Ir} v_k^{\lambda_k} &\leq \sum_{k \in Ir} (hr^{-1} v_k)^{\lambda} (hr^{-1})^{1-\lambda} \\ &\leq \sum_{k \in Ir} \left(((hr^{-1} v_k)^{\lambda})^{\frac{1}{\lambda}} \right)^{\lambda} \left(\sum_{k \in Ir} ((hr^{-1})^{1-\lambda})^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{1-\lambda} \\ &= \left(hr^{-1} \sum_{k \in Ir} v_k \right)^{\lambda} \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$hr^{-1} \sum_{k \in Ir} t_k^{\lambda_k} \leq hr^{-1} \sum_{k \in Ir} t_k + \left(hr^{-1} \sum_{k \in Ir} t_k \right)^{\lambda}$$

olup böylece $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, q, \theta)$ elde edilir.

Teorem 4.7. $\theta = (k_r)$ dizisi $\liminf_r q_r > 1$ olacak şekilde bir lacunary dizisi olsun. Herhangi bir M orlicz fonksiyonu için $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p) \subset \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ 'dır.

İspat. Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu taktirde her $r \geq 1$ için $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}} \geq 1 + \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ mevcuttur. Buna göre $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ olduğundan

$$\begin{aligned} A_r &= \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} - \frac{1}{h_r} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{k_r}{h_r} \left(k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \\ &\quad - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right) \end{aligned}$$

yazılabilir. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan

$$\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta} \text{ ve } \frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$$

elde edilir.

$$k_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

ve

$$k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k}$$

terimlerinin her ikisinde i ye göre düzgün olarak sıfıra yakınsar. Böylece i 'ye göre düzgün olarak $A_r \rightarrow 0$ olur.

Teorem 4.8. $\theta = (k_r)$ dizisi $\limsup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun herhangi bir M orlicz fonksiyonu için $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) \subset \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ elde edilir.

İspat. Farz edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ şartı sağlansın ve her $r \geq 1$ tamsayısı için $q_r < B$ olacak şekilde $X \in \widehat{w}(\Delta^m, M, p, F, \theta)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde her $j \geq R$ için

$$A_j = \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_j} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} < \varepsilon$$

olacak şekilde $R > 0$ mevcuttur.

Ayrıca j nin her pozitif tamsayısı değeri için $k \geq A_j$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif k sayısı bulunabilir. $k_{r-1} < n < k_r$ ve $r > R$ olacak şekilde n tamsayısını alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\leq \frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ \sum_{k \in I_1} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \sum_{k \in I_2} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \right\} \\ &= \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} A_R + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_r \\ &\leq \left(\sup_{j \geq 1} A_j \right) \frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{j \geq R} A_j \right) \frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \\ &< K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B \end{aligned}$$

yazılabilir. $n \rightarrow \infty$ için $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0$$

ve dolayısıyla $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ olur.

Teorem 4.7 ve Teorem 4.8 'den aşağıdaki sonuç çıkar .

Teorem 4.9. $\theta = (k_r)$ dizisi $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Herhangi bir M orlicz fonksiyonu için $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) = \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p)$ dir.

Teorem 4.10. $\liminf_k p_k > 0$ olsun. Eğer $X = (X_k)$ dizisi bir M Orlicz fonksiyonuna göre X_0 fuzzy sayısına kuvvetli hemen hemen lacunary $\Delta_{(p)}^m$ –Cesaro yakınsak ise X_0 tektir.

İspat. $\liminf_k p_k = s > 0$ olsun ve $X_k \rightarrow X_0(\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta))$ ve $X_k \rightarrow X_1(\hat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta))$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\lim_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k=0}$$

ve

$$\lim_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_1)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} = 0, (i \text{ ye göre düzgün})$$

olacak şekilde ρ_1 ve ρ_2 sayıları vardır.

$\rho = \max(2\rho_1, 2\rho_2)$ sayıları olsun. Bu taktirde $\sup_k p_k = H$ ve $D = \max(1, 2^{H-1})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right]^{p_k} &\leq \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho_1} \right) \right]^{p_k} \\ &\quad + \frac{D}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_1)}{\rho_2} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \frac{d(X_0, X_1)}{\rho} \right]^{p_k} = 0$$

olur ki bu da $X_0 = X_1$ demektir. Buna göre limit tektir.

Teorem 4.11. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve M bir orlicz fonksiyonu olsun. Bu taktirde $\hat{w}_\infty(\Delta^m, F, \theta) = \ell_\infty(\Delta^m, F)$ olur.

İspat. $X \in \hat{w}_\infty(\Delta^m, F, \theta)$ olsun. Bu taktirde

$$\frac{1}{h_1} (d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})) \leq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})] \leq K_1 \quad (\forall_{i,r} \text{ için})$$

olacak şekilde $K_1 > 0$ sabiti vardır. Böylece $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ dır. Tersine $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ olsun. Bu taktirde her j için $d(\Delta^r X_j, \bar{0}) \leq K_2$ olacak şekilde bir $K_2 > 0$ sabiti vardır ve böylece

$$\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, \bar{0})] \leq \frac{K_2}{h_r} \sum_{k \in I_r} 1 \leq K_2 \quad (\forall k, i)$$

olur. Buna göre $X \in \widehat{w}_\infty(\Delta^m, F, \theta)$ dır.

Teorem 4.12. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde

- (i) $X = (X_k)$ dizisi X_0 'a kuvvetli hemen hemen Δ^m -lacunary yakınsak ise X_0 'a hemen hemen lacunary Δ^m -istatistiksel yakınsaktır.
- (ii) Bir $X = (X_k)$ dizisi Δ^m -sınırlı ve X_0 'a hemen hemen lacunary Δ^m -istatistiksel yakınsak ise X_0 'a kuvvetli hemen hemen Δ^m -lacunary yakınsaktır.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ ve $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, \theta)$ olsun. Bu durumda herhangi $p > 0$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p &\geq \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p \\ &\geq \varepsilon^p |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}|, \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ elde edilir.

(ii) $X = (X_k)$ dizisinin Δ^m -sınırlı ve X_0 'a hemen hemen lacunary Δ^m -istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \leq K$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir K pozitif sayısı mevcuttur. $\varepsilon > 0$ verilsin ve her i ve N_ε den büyük r doğal sayıları için N_ε sayısını

$$h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2K^p}$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçelim ve

$$E_{ri} = \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

kümesini oluşturalım Her i ve $r > N_\varepsilon$ için

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p = h r^{-1} \sum_{\substack{k \in I_r \\ k \notin E_{ri}}} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p + h r^{-1} \sum_{k \in E_{ri}} [d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)]^p$$

$$\leq hr^{-1} \left(\frac{h_r^\varepsilon}{2K^p} \right) K^p + \frac{\varepsilon}{2h_r} h_r = \varepsilon$$

yazılabilir. Bu taktirde X, X_0 'a kuvvetli hemen hemen Δ^m - lacunary yakınsaktır.

Teorem 4.13. $\theta = (k_r)$ dizisi $\liminf_r q_r > 1$ şartı sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $\hat{S}(\Delta^m, F) \subset \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. Eğer $\lim_r \inf q_r > 1$ ise yeterince büyük r sayıları için $1 + \delta \leq q_r$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif bir δ sayısı mevcuttur. h_r teriminin tanımından dolayı $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ elde edilir. $X \in \hat{S}(\Delta^m, F)$ olsun. Bu taktirde her i , her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r 'ler için

$$\begin{aligned} k_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq k_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \cdot \frac{1}{h_r} k_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ elde edilir.

Teorem 4.14. $\theta = (k_r)$ dizisi $\limsup_r q_r < \infty$ şartı sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F) \subset \hat{S}(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. Kabul edelim ki $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu taktirde her r için $q_r < \beta$ sağlanacak biçimde pozitif bir β sayısının varlığını söylenebilir. $X \in \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ olsun ve her bir $i \geq 1$ için $\frac{N_{ri}}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0 \in N$ mevcuttur. $K = \max\{N_{ri} : 1 \leq r \leq r_0\}$ olsun ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde n seçelim. Bu taktirde her bir $i \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_{1i} + N_{2i} + N_{3i} + \dots + N_{r_0 i} + N_{(r_0+1)i} + \dots + N_{ri}\} \\ &\leq \frac{K}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon \beta \end{aligned}$$

elde edilir ki buda ispatı tamamlar.

Teorem 4.15. $\theta = (k_r)$ dizisi $1 < \liminf_r q_r \leq \sup_r q_r < \infty$ şartını sağlayan bir lacunary dizisi olsun. Bu taktirde $\hat{S}(\Delta^m, F) = \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. Teorem 4.13 ve Teorem 4.14'den çıkar.

Teorem 4.16. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun, M bir Orlicz fonksiyonu ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H$ olsun. Bu taktirde $\widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta) \subset \hat{S}_\theta(\Delta^m, F)$ dır.

İspat. İspat aşağıdaki eşitsizlikten çıkar.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&+ \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) < \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon}} \min([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H), \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\rho} \\
&= \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}| \cdot \min([M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H)
\end{aligned}$$

Teorem 4.17. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, M bir Orlicz fonksiyonu $X = (X_k)$ dizisi Δ^m -sınırlı fuzzy sayı dizisi ve $0 < h = \inf_k p_k \leq p_k \leq \sup_k p_k = H < \infty$ olsun. Bu taktirde $\hat{S}_\theta(\Delta^m, F) \subset \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ dır.

İspat. $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ dizi sınıfı içinde bir (X_k) fuzzy sayı dizisini göz önüne alalım ve $X_k \rightarrow X_0 (\hat{S}_\theta(\Delta^m, F))$ yakınsaması gerçekleşsin. Bu taktirde $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq T$ eşitsizliği sağlanacak biçimde pozitif bir T sayısının mevcut olduğu söylenebilir. Şimdi de $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde

$$\begin{aligned}
h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) + \right]^{p_k} &= h_r^{-1} \sum_1 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&+ h_r^{-1} \sum_2 \left[M \left(\frac{d(\Delta^m X_{k+i}, X_0)}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
&\leq \sum_1 \max \left\{ \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^h, M \left[M \left(\frac{T}{\rho} \right) \right]^H \right\} \\
&+ h_r^{-1} \sum_2 \left[M \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k}
\end{aligned}$$

$$\leq \max\{[M(K)]^h, [M(K)]^H\} h_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_{k+i}, X_0) \geq \varepsilon\}|$$

$$+\max\{[M(\varepsilon_1)]^h, [M(\varepsilon_1)]^H\}, \quad \frac{T}{\rho} = K, \frac{\varepsilon}{\rho} = \varepsilon_1$$

yazılabilir. Böylece $X \in \widehat{w}(\Delta^m, F, M, p, \theta)$ elde edilir.



5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında Gökhan v.d. [20] tarafından çalışılmış olan hemen hemen lacunary istatistiksel ve kuvvetli hemen hemen lacunary yakınsaklık kavramlarıyla Altınok ve Çolak [21] tarafından yapılmış olan genelleştirilmiş fuzzy fark fuzzy sayı dizilerinde hemen hemen lacunary yakınsaklık kavramıyla ilgili kapsama bağıntıları verilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, *Colloq Math* 2, 241–244.
- [2] Schoenberg, I.J (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Am. Math. Mon.*, 66, 361–375.
- [3] Connor, J.S.(1988).The statistical and strong p -Cesaro convergence of sequences, *Analysis* 8,47-63.
- [4] Çakalli, H. (1996). On statistical convergence in topological groups, *Pure Appl Math Sci*, 43, 27–31.
- [5] Caserta, A., Maio, G.D., Kocinac L.D.R. (2011). Statistical convergence in function spaces. *Abstr Appl Anal*, 11 Article ID:420419.
- [6] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Inform Control*, 8, 338–353.
- [7] Zadeh, L.A. (1965). Fuzzy sets, *Inform Control*, 8, 338–353.
- [8] Nanda, S. (1989). On sequence of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets Syst* 33, 123–126.
- [9] Nuray, F. and Savaş, E. (1995). Statistical convergence of sequences of fuzzy real numbers, *Math Slovaca*, 45(3), 269–273.
- [10] Kwon, J.S. (2000). On statistical and p -Cesàro convergence of fuzzy numbers, *Korean J. Comput. Appl. Math.*, 7(1), 195-203.
- [11] Çolak, R., Altınok, H., Et, M. (2009). Generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Chaos, Solitons&Fractals*, 40, 1106-1117.
- [12] Altınok, H., Çolak, R., Et, M. (2009). λ -Difference sequence spaces of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21), 3128-3139.
- [13] Altınok, H. (2014). Statistical convergence of order β for generalized difference sequences of fuzzy numbers, *J Intell Fuzzy Syst*, 26, 847–856.
- [14] Aytar, S. (2004). Statistical limit points of sequences of fuzzy numbers, *Inform. Sci.* 165, 129-138.
- [15] Et, M., Altınok, H., Çolak, R. (2006). On λ -statistical convergence of difference sequences of fuzzy numbers, *Information Sciences*, 176(15), 2268-2278.
- [16] Kizmaz, H. (1981). On certain sequence spaces, *Canad Math Bull*, 24(2), 169–176.
- [17] Et, M. and Çolak, R. (1995). On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.* 21(4), 377-386.
- [18] Freedman, A.R., Sember, J.J., Raphael, M. (1978). Some Cesàro- type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 37(3), 508-520.
- [19] Fridy, J.A. and Orhan, C., (1993). Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math.* 160(1), 43-51.
- [20] Gökhan, A., Et, M., Mursaleen, M. (2009). Almost lacunary statistical and strongly almost lacunary convergence of sequences of fuzzy numbers, *Math Comput Modelling* 49(3-4), 548–555.
- [21] Altınok, H. and Çolak, R. (2009). Almost lacunary statistical and strongly almost lacunary convergence of generalized difference sequences of fuzzy numbers, *Journal of Fuzzy Mathematics*, [17](#)(4), 951-968.
- [22] Niven, I. and Zuckerman, H.S. (1960). *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley & Sons, New York.
- [23] Tabib, K. K. (2012). The Topology Of Statistical Convergence, Master Of Sciences, Department of Mathematical Sciences, The University of Texas at El Paso, USA.
- [24] Kamthan, P.K. and Gupta, M. (1981). Sequence Spaces and Series, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel.
- [25] Puri, M. L. and Ralescu, D.A. (1986). Fuzzy random variables, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 114, 409-422.

ÖZGEÇMİŞ

SEHER İLBASAN

Country	Year	Value
United States	2010	100
United States	2011	100
United States	2012	100
United States	2013	100
United States	2014	100
United States	2015	100
United States	2016	100
United States	2017	100
United States	2018	100
United States	2019	100
United States	2020	100
United States	2021	100
United States	2022	100
United States	2023	100
United States	2024	100
United States	2025	100
United States	2026	100
United States	2027	100
United States	2028	100
United States	2029	100
United States	2030	100
United States	2031	100
United States	2032	100
United States	2033	100
United States	2034	100
United States	2035	100
United States	2036	100
United States	2037	100
United States	2038	100
United States	2039	100
United States	2040	100
United States	2041	100
United States	2042	100
United States	2043	100
United States	2044	100
United States	2045	100
United States	2046	100
United States	2047	100
United States	2048	100
United States	2049	100
United States	2050	100
United States	2051	100
United States	2052	100
United States	2053	100
United States	2054	100
United States	2055	100
United States	2056	100
United States	2057	100
United States	2058	100
United States	2059	100
United States	2060	100
United States	2061	100
United States	2062	100
United States	2063	100
United States	2064	100
United States	2065	100
United States	2066	100
United States	2067	100
United States	2068	100
United States	2069	100
United States	2070	100
United States	2071	100
United States	2072	100
United States	2073	100
United States	2074	100
United States	2075	100
United States	2076	100
United States	2077	100
United States	2078	100
United States	2079	100
United States	2080	100
United States	2081	100
United States	2082	100
United States	2083	100
United States	2084	100
United States	2085	100
United States	2086	100
United States	2087	100
United States	2088	100
United States	2089	100
United States	2090	100
United States	2091	100
United States	2092	100
United States	2093	100
United States	2094	100
United States	2095	100
United States	2096	100
United States	2097	100
United States	2098	100
United States	2099	100
United States	2100	100
