

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HOMOTETİK HAREKET ALTINDA BAZI ÖZEL
EĞRİ TİPLERİNE EN AZ EYLEM PRENSİBİNİN VE
HOLDİTCH TEOREMİNİN UYGULANMASI
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Elvan KORKMAZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Serdar SOYLU

**Haziran 2021
GİRESUN**

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**HOMOTETİK HAREKET ALTINDA BAZI ÖZEL
EĞRİ TİPLERİNE EN AZ EYLEM PRENSİBİNİN VE
HOLDİTCH TEOREMİNİN UYGULANMASI
ÜZERİNE**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elvan KORKMAZ

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik Anabilim Dalı

Bu tez 15/06/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

Jüri Başkanı

Doç. Dr. Oğuz OĞUR

Üye

Dr. Öğr. Üyesi Serdar

SOYLU

Üye

Doç. Dr. Bahadır KOZ

Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Elvan KORKMAZ

15/06/2021

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana danışmanlık yapan, tez çalışmamın araştırılması ve yürütülmesinde ilgi ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Serdar SOYLU'ya, bu süreçte maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan sevgili annem Hatice KORKMAZ'a, babam Hasan KORKMAZ'a ve değerli kardeşlerime en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. LİTERATÜR ÖZETİ	7
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Materyal	15
3.1.1 Episikloid	15
3.1.2 Hiposikloid	16
3.1.3 Kardioid	16
3.1.4 Nephroid	17
3.2. Yöntem	18
3.2.1. Düzlemsel hareket için kapalı yörüngeler	18
3.2.2 Düzlemsel kinematik ve en az eylem prensibi	19
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	21
4.1. Episikloid için uygulaması	21
4.2. Hiposikloid için uygulaması	27

4.3. Kardioid için uygulaması	34
4.4. Nephroid için uygulaması	40
4.5. Holditch Teoremi	46
4.5.1. Çember üzerine Holditch Teoremi uygulaması	48
4.5.2. Elips üzerine Holditch Teoremi uygulaması	50
 BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	 53
 KAYNAKLAR	 54
 ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

V_x	: Alan vektörü
α	: Alpha
A^t	: A matrisinin transpozu
$\dot{A}$	: A'nın diferansiyeli
$\subset$	: Alt küme
$\oint$	: Belirli integral
β	: Beta
$\emptyset$	: Boş küme
$\equiv$	: Denklik sembolü
$\wedge$	: Dış çarpım
$\perp$	: Diklik sembolü
α	: Dönme açısı
ν	: Dönme sayısı
E/E'	: E düzleminin E' düzlemine göre hareketi
$\in$	: Elemanıdır
ε	: Epsilon
E	: Hareketli düzlem
X	: Hareketli düzlemde bir nokta
$\forall$	: Her
h	: Homotetik ölçek
F_x	: İzdüşüm eğrisinin alanı
K	: Kappa
$\times$	: Kartezyen çarpım
∂	: Kısmi türev
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
λ	: Lambda
V_a	: Mutlak hız
μ	: Mü
E^n	: n –boyutlu Öklid uzayı
$\ , \ $	: Norm

ω : Omega
 $\langle , \rangle$: Öklid iç çarpımı
 σ : Sigma



ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. Düzgün Sikloid Eğrisi	3
Şekil 1.2.	3
Şekil 1.3.	3
Şekil 1.4. Holditch Halkası	5
Şekil 2.1. 1 –Parametrelî Düzlemsel Hareket	11
Şekil 2.2. Holditch Halkası	14
Şekil 3.1. Episikloid Eğrisi	15
Şekil 3.2. Hiposikloid Eğrisi	16
Şekil 3.2. Kardiod Eğrisi	17
Şekil 3.2. Nephroid Eğrisi	18
Şekil 4.1. Holditch Halkası	47
Şekil 4.2. Çember üzerine Holditch Teoremi uygulaması	49
Şekil 4.3. Elips üzerine Holditch Teoremi uygulaması	51

HOMOTETİK HAREKET ALTINDA BAZI ÖZEL EĞRİ TİPLERİNE EN AZ EYLEM PRENSİBİNİN VE HOLDİTCH TEOREMİNİN UYGULANMASI ÜZERİNE

ÖZET

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın giriş bölümünde literatür özeti verilmiş olup ikinci bölümde bazı temel tanımlara yer verilmiştir. Çalışmanın üçüncü bölümünde bazı özel sikloid tipi eğri tanımları verilmiş ve en az eylem ilkesi ifade edilmiştir. Çalışmanın orijinal kısmı olan dördüncü ve beşinci bölümde; öncelikle ifade edilen özel sikloid tipi eğriler düzlemsel homotetik hareketi altında ele alınıp en az eylem prensibi uygulanarak eğrilerin minimal eylem noktalarının hesaplanabilmesi için hareketli düzlemin noktalarının enerjileri hesaplanmıştır. Son olarak çember ve elips kapalı eğrileri için Holditch teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Düzlemsel Homotetik Hareket, Sikloid Tipi Eğriler, En Az Eylem Prensibi, Kinetik Enerji, Holditch Teoremi

ON THE APPLICATION OF THE PRINCIPLE OF LEAST ACTION AND HOLDITCH THEOREM TO THE SOME SPECIAL CURVE TYPES UNDER THE HOMOTETIC MOTION

SUMMARY

This study consist of five chapters. In the introduction chapter, the summary of literature is given. In the second chapter, some basic concepts are given. In the third chapter, some specific cycloid-type curve definitions are given and the principle of least action is expressed. The original part of the study are the fourth and fifth chapters. Firstly special cycloid-type curves are expressed under closed planar homotetic motion and the principle of least action is applied to these curves. The principle of least action is applied to these curves and the energies of the points of the moving plane are calculated in order to calculate the minimum action point of these curves. Finally the Holditch theorem are obtained for circle and ellipse closed curves.

Keywords: Planar Homotetic Motion, Cycloid Type Curves, Principle of Least Action, Kinetic Energy, Holditch Theorem

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Geometri, dönüşümler altında değişmezlerin teorisidir. Bir cismin sabit bir noktaya göre zamana karşı yer değiştirmesine hareket denir. Hareketle ilgili bilim dalları mekanik ve kinematik olarak sınıflandırılabilir. Mekanikte hareketin kuvvet ve kütle üzerinde etkisi incelenirken, kinematikte maddenin konumu, hızı gibi nitelikler incelenir. Hareketi doğuran sebeplerin göz ardı edildiği ve hareketin nasıl gerçekleştiğinin ele alındığı mekanik dalına kinematik denir. Bu nedenle, kinematik hareket geometrisi dönüşümü altında değişmezlerin teorisidir (Müller vd, 1963).

Kinematik mekaniğin bir alt dalı olup, bu dalda kuvvet ve kütle kavramları dikkate alınmadan bir noktanın veya nokta sisteminin zamana bağlı olarak meydana getirdiği yer değiştirmelerini inceler (Müller vd, 1963). Aslında diğer bir deyişle kinematik hareketin geometrisini inceleyen bir bilim dalıdır. Cismin hareket geometrisi yanında cisme etki eden kuvvet ve kütle arasındaki bağıntıyı ise dinamiğin diğer bir alt dalı olan kinetik inceler. Kinetik bilim dalının konusu kuvvetlerin etkisiyle meydana gelen hareketi bulmak ya da verilen hareketi meydana getiren kuvvetleri bulmaktır.

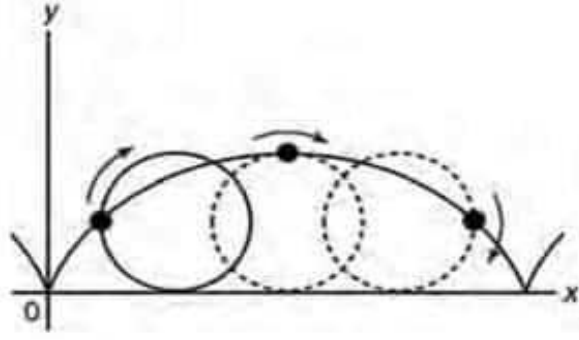
Fizik ise maddeyi, maddenin uzayda zamana karşı hareketini, enerji ve kuvveti de içine alarak bütün ilgili kavramlarla birlikte inceleyen doğa bilimidir. Fizikte maddelerin hareket mekanizmalarını zamana bağlı hız denklemleri ifade eder. Hız, şiddeti ve yönü ile ifade edilen vektörel bir büyüklüktür. Hız alınan yolun zamana göre değişimi olarak da ifade edilir. Hareket halindeki cismin yörüngesi doğrusal, dairesel, elips ya da eğri biçiminde olabilir. Alınan yolun doğrusal olması halinde hız ise çizgisel, dairesel olması halinde ise hız açısal olur (Kasap, 2014).

Kayakçıların inişlerini en kısa sürede bitirebilmesi için kayak pistinin eğimi nasıl olmalıdır? Buna benzer problem 1696'da Johann Bernoulli'nin aklına geldi. Bernoulli “dik bir düzlemde, iki nokta arasındaki yolun şekli nasıl olmalıydı ki bu noktalar arasındaki mesafe en kısa sürede alınabilsin?” sorusunu soruyordu. Burada, hareketin sürtünmesiz bir ortamda ve sadece yerçekimi altında gerçekleştirileceğini anlıyoruz.

Bu problem çok sayıda matematikçinin ilgi odağına girmiş üzerine yoğun çalışmalar yapılmıştır. Bernoulli yaptığı çalışmalar ve hesaplamalar neticesinde iki nokta arasındaki mesafeyi en kısa sürede alabilecek yolun sikloid eğrisi olacağı bilgisine ulaşmıştır. Aslında bu eğriyi yıllar önce en detaylı inceleyen ve ona sikloid adını veren matematikçi Galileo'dur.

Bu problemle alakalı yoğun çalışmalar yapan matematikçiler ilk başta bu eğrinin daha büyük bir çemberin yayı olduğunu düşünmüştür. Fakat eğrinin denklemlerini çıkarmaya çalıştıklarında bunun bir çember yayı olmadığını görmüşlerdir. Bu eğri ile ilgili kapsamlı ilk çalışmayı Galileo ile öğrencisi Torricelli yapmıştır. Bugünkü ismini veren ise Galileo'dur (Whitman, 1943).

Bir doğru (veya bir çember) üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan bir çemberin üzerindeki sabit bir X noktasının geometrik yerini oluşturan eğrilere sikloid tipi eğriler denir. X noktasının çemberin üzerinde, içinde ya da dışında olabilir. Bu X noktasının çemberin üzerinde olması durumunda X noktasının geometrik yeri olan eğriye düzgün sikloid eğrisi denir. X noktası çemberin içinde olabilir. Bu durumda X noktasının geometrik yeri olan eğriye ilmişiz sikloid eğrisi denir. X noktası çemberin dışında olabilir. Bu durumda X noktasının geometrik yeri olan eğriye ilmikli sikloid eğrisi denir (Şekil 1.1) (Blaschke ve Müller 1956).



Şekil 1.1. Düzgün Sikloid Eğrisi (Whitman, 1943)

Bir biri üzerinde hareket eden iki çemberin hareketiyle oluşan sikloid tipi eğriler de vardır. Bir biri üzerinde dıştan teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan r ve R , $r < R$, yarıçaplı iki çember verilsin. r yarıçaplı hareketli çember ile bu çember üzerinde bir X noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrilerine episikloid eğrileri adı verilir. Bu iki çember dıştan teğet olabilir. Bu durumda oluşan sikloid eğrisine episikloid eğrisi denir. İki çember içten teğet olması durumunda oluşan sikloid eğrisine hiposikloid eğrisi denir (Blaschke ve Müller 1956).

Bir çemberin doğru üzerinde bir tam dönüşüyle elde edilen sikloid eğrisinin uzunluğu onu çizen çemberin çapının dört katı, altında kalan alan ise onu çizen çemberin alanının üç katıdır (Whitman, 1943).

Matematik tarihinde zamanı ölçmede kullanıldığı gibi sanatta, mimaride ve günlük hayatta da sikloid eğrisinin birçok örneğini görebiliriz. (Şekil 1.2., Şekil 1.3.)



Şekil 1.2.



Şekil 1.3.

Enerji kısaca iş yapabilme yeteneği olarak tanımlanır ve skalar bir büyüklüktür. Toplamda sekiz temel enerji çeşidi vardır. Bunlar potansiyel, kinetik, ısı, ışık, elektrik, kimyasal, nükleer ve ses enerjisidir. Unutmamamız gereken ise enerjinin kaybolmadığıdır.

Cisimlerin hareket halinde olmadığı durumlarda sahip oldukları enerjiye potansiyel enerji denir. Yapılan bu iş cisimde enerji olarak depolanır ve cismin iş yapabilecek duruma gelmesine neden olur. Potansiyel enerjinin birimi jouledir. m kütlesine sahip ve yeryüzünden h yüksekliğinde olan bir cismin potansiyel enerjisi $E_p = mgh$ ile ifade edilir.

Hareketli cisimler ise iş yapabilme yeteneğine sahiptirler yani bu cisimlerin enerjileri vardır. Cisimlerin hareketinden dolayı sahip oldukları enerjiye kinetik enerji denir. Akan su, hareket halindeki araba, fırlatılan bir taşın kinetik enerjileri vardır. Duran cisimlerin sahip oldukları potansiyel enerji, cisimlerin hareket haline geçmeleri halinde kinetik enerjiye dönüşür. Kinetik enerjinin birimi jouledir. m kütleli ve V hızı ile hareket halindeki bir cismin kinetik enerjisi $E_k = \frac{1}{2}mV^2$ ile ifade edilir.

Kinetik kelimesi hareket olaylarını inceleyen bilim dalı olarak kullanılmaktadır. Enerji dönüştürülebilen ancak yaratılamayan veya yok edilemeyen skalar bir niceliktir. Enerji biliminde yer alan kinetik enerji kavramına baktığımızda ise isimden de anlaşılacağı üzere incelediğimiz enerji türü hareket içermektedir. Yani bir madde hareket halindeyse kinetik enerjiye sahiptir.

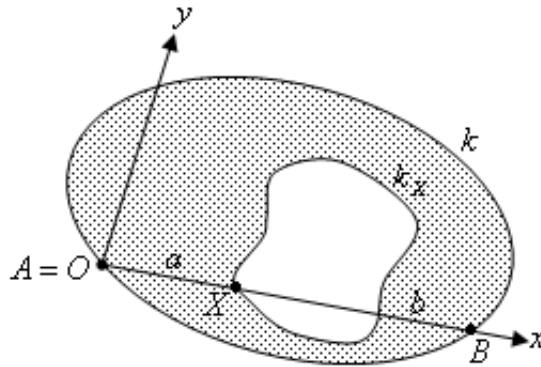
Günümüze kadar kinematik üzerine pek çok çalışma yapılmıştır. 19. Yüzyılda 1 –parametrelili kapalı düzlemsel hareket altında Holditch tarafından ifade edilen “Holditch Teoremi” (Holditch, 1858) ve Steiner tarafından ifade edilen “Steiner Alan Formülü” (Steiner, 1881) kinematikle ilgili yapılmış çalışmaların bilinen en temel örneklerindendir.

Holditch, genelleştirilmişleri literatürde “Holditch-Tipi Teoremler” olarak adlandırılan “Klasik Holditch Teoremi”ni aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:

Düzlemde sabit $a + b$ uzunluklu bir AB doğru parçasının A ve B uç noktaları bir k ovali boyunca bir defa dolandırıldığında, AB doğru parçası üzerinde tespit edilen bir X noktası ($\overline{AX} = a, \overline{XB} = b$) da genellikle konveks olması gerekmeyen kapalı bir k_x eğrisi çizer. Bu k ovali ile k_x eğrisi arasında kalan “Holditch Halkası”nın F yüzey alanı,

$$F = \pi ab$$

dir. Burada F yüzey alanı, sadece X noktasının AB doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklığına bağlı olup, k ile k_x eğrilerinden ve hareketten bağımsızdır (Şekil 2.1.).



Şekil 1.4 Holditch Halkası (Müller, 1978)

Hans Robert Mülller, 1978 yılında 1 –parametrelili kapalı düzlemsel hareketlerde yörünge eğrisinin kutupsal atalet momentini hesaplamış ve eşit kutupsal atalet momentine sahip hareketli düzlemin bütün sabit noktalarının merkezi Steiner noktası olan bir çember üzerinde bulunduğunu belirtmiştir (Müller, 1978).

Daha sonra 1980 yılında, 3 –boyutlu Öklid uzayında hareketli uzaydaki sabit bir noktanın 1 –parametrelili kapalı hareketler altında sabit uzayda çizdiği kapalı yörünge eğrisinin herhangi bir düzlem üzerine diz izdüşüm eğrisinin sınırladığı düzlemsel bölgenin alanını bularak, Holditch Teoreminin kapalı uzay eğrilerine bir genişletilmesini ifade etmiştir (Müller, 1980).

Müller 1979 ve 1982 yıllarında ise 3 –boyutlu Öklid uzayının 3 –parametrelili uzay hareketinde, yörünge yüzeylerinin hacimlerini kullanarak Holditch Teoremine uzaysal eşdeğer başka bir sonuç elde etmiştir (Müller, 1979; Müller, 1982).

1987 yılında da yörünge yüzeylerinin bir düzlem üzerinde dik izdüşüm bölgesinin alanını hesaplamış ve yine benzer bir sonuç vermiştir (Müller, 1987).



BÖLÜM 2. LİTERATÜR ÖZETİ

Tanım 2.1

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V ; K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$\begin{aligned} f: A \times A &\rightarrow V \\ (P, Q) &\rightarrow f(P, Q) \end{aligned}$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A kümesine V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir.

$$(A1) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(A2) $\forall P \in A$ ve $\forall a \in V$ için $f(P, Q) = a$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 1998)

Tanım 2.2

V , n –boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç çarpım uzayı ise A ya Öklid Uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.3

A_1 ve A_2 sırası ile V_1 ve V_2 vektör uzayları ile birleşen afin uzaylar olmak üzere $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir dönüşüm olsun. $P, Q \in A_1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_P: V_1 &\rightarrow V_2 \\ \overrightarrow{PQ} &\rightarrow \psi_P(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Burada ψ_P dönüşümüne f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_P dönüşümü lineer ise f ye bir afin dönüşüm denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.4

V ve U bir F cismi üzerinde birer vektör uzayı ve $f: V \rightarrow U$ bir fonksiyon olsun.

$\forall v_1, v_2 \in V$ ve $\forall a \in F$ için

$$i) f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

$$ii) f(av_1) = af(v_1)$$

şartları sağlanırsa f ye V den U ya lineer dönüşüm denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.5

E_1^n ve E_2^n sırasıyla, V_1 ve V_2 n –boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f: E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi: V_1 \rightarrow V_2$$

Lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir izometri denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.6

$I \subset \mathbb{R}$ açık bir aralık olmak üzere

$$\alpha: I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinde diferansiyellenebilir α fonksiyonuna E^n de (I, α) koordinat komşuluklu eğri denir.

Tanım 2.7

3 –boyutlu standart reel afin uzay 3 –boyutlu standart vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile eşleşsin. $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\langle , \rangle (x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$ te standart iç çarpım veya Öklid iç çarpımı adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.8

(X) kapalı bir eğri ve X , R ‘de sabit bir nokta olsun.

$$V_X = \oint x \times dx$$

vektörü (X) ‘in alan vektörü olarak adlandırılır. Burada x , R de X ‘ in konum vektörüdür ve integral kapalı yörünge eğrisi boyunca alınmıştır.

Uzaydaki kapalı eğrinin izdüşümü olan bir P kapalı eğrisi düzlemin e birim vektörü doğrultusundadır ve F_X bu izdüşüm eğrisinin alanı olmak üzere

$$2F_X = \langle e, V_X \rangle$$

dır. Burada $\langle , \rangle$ iç çarpımı ifade ediyor.

Tanım 2.9

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ olmak üzere

$$d : E^3 \times E^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^3 (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan d fonksiyonuna Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in E^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.10(Ortalama değer teoremi)

f fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli ve $a < b$ olduğu (a, b) açık aralığında diferansiyellenebilir bir fonksiyonsa, (a, b) açık aralığında

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } c \in (a, b)$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

koşulunu sağlayan bir c değeri bulunur (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.11

Düzlemde M sabit bir nokta ve $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $P' = M + k(P - M)$ eşitliğini sağlayan P' noktasına P nin M merkezli k oranlı homotetiği denir.

Tanım 2.12

n –boyutlu bir öklid uzayında bir cismin homotetik hareketi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h.A & U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

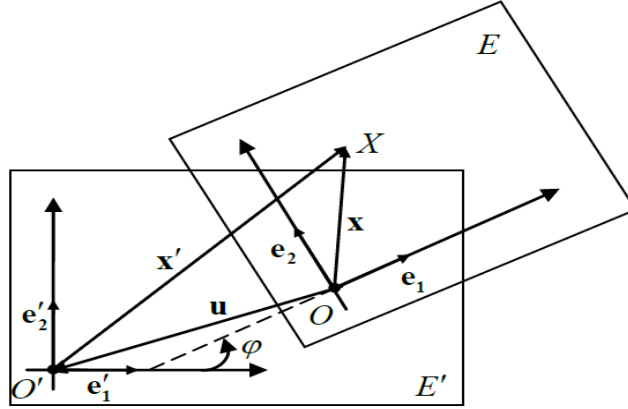
dönüşümü ile ifade edilir. Burada A , $(n \times n)$ –tipinde ortogonal bir matris, $h = hI_n$ bir skaler matris ve X', X, U birer $(n \times 1)$ tipinde matrislerdir (Hacısalıhoğlu, 1971).

Tanım 2.13

$E = E' = E^2$ Öklid düzlemlerinde sırasıyla $\{O; e_1, e_2\}$ ve $\{O'; e'_1, e'_2\}$ koordinat sistemlerini tespit edelim. Eğer $t \in I \subset \mathbb{R}$ için;

$$e_1 = e_1(t), \quad e_2 = e_2(t)$$

ise bu takdirde $\{O; e_1, e_2\}$ koordinat sisteminin $\{O'; e'_1, e'_2\}$ koordinat sistemine göre hareket ettiği kabul edilir. Bundan dolayı $\{O; e_1, e_2\}$ koordinat sistemine hareketli koordinat sistemi, $\{O'; e'_1, e'_2\}$ koordinat sistemine ise sabit koordinat sistemi denir. Dolayısıyla E düzlemi E' düzlemi üzerinde hareket ediyor kabul edilir. e_1 ile e'_1 arasındaki açı φ olmak üzere φ ye dönme açısı denir. $OO' = u$ hareketin öteleme vektörü olmak üzere;



Şekil 2.1. 1 –Parametrelili Düzlemsel Hareket

$OO' = u = u_1 e_1 + u_2 e_2$ yazılabilir. Eğer $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \varphi = \varphi(t)$ şeklinde reel bir t parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonları iseler, E düzleminin E' düzlemine göre hareketine 1 –parametrelili homotetik hareket denir (Şekil 3.1.) (Akar, 2012).

Tanım 2.14

u_1, u_2, θ ve h bir t reel parametresinin کافی derecede türetilebilen fonksiyonları olmak üzere

$$u_1 = u_1(t), \quad u_2 = u_2(t), \quad \theta = \theta(t), \quad h = h(t)$$

fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tarif edilmiş olsun. Ayrıca

$$u_j(t + T) = u_j(t), \quad (j = 1, 2)$$

$$\theta(t + T) = \theta(t) + 2\pi\nu, \quad \nu = \text{dönme sayısı}$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T > 0$ en küçük sayı ise,

$$\vec{X}' = (hx_1 - u_1)\vec{e}_1 + (hx_2 - u_2)\vec{e}_2$$

denklemleri ile tanımlanan harekete, T periyotlu ve ν dönme açılı 1 –parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket denir (Hacısalıhoğlu, 1971).

Tanım 2.15

$d\theta$ kitle elementli kitle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine Steiner noktası denir. Ve kısaca S ile gösterilir.

$$S = \frac{\oint P da}{\oint da}$$

bağıntısı ile hesaplanır (Hacısalıhoğlu ve Özdemir, 1998).

Tanım 2.16

M, E^n de bir hiperyüzey ve birim normal vektör alanı N olsun. E^n de Riemann konneksiyonu D olmak üzere her $X \in \chi(M)$ için

$$S: \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$X \rightarrow S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü denir. Şekil operatörü lineer bir dönüşümdür.

Tanım 2.17

M, E^n de bir hiperyüzey ve S de M nin şekil operatörü olsun.

$$I^q: X(M) \times X(M) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y) \rightarrow I^q(X, Y) = \langle S^{q-1}(X), Y \rangle$$

ile tanımlanan I^q fonksiyonuna M nin q . temel formu denir.

$q = 1$ için 1. temel form $I(X, Y) = \langle X, Y \rangle$

$q = 2$ için 2. temel form $II(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$

$q = 3$ için 3. temel form $III(X, Y) = \langle S^2(X), Y \rangle = \langle S(X), S(Y) \rangle$ dir.

Tanım 2.18

$M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olsun. $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ortonormal sistemine M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ deki Frenet 3 –ayaklısı veya Frenet çatısı denir. Bu sistemdeki her bir vektöre Frenet vektörü adı verilir.

$$\begin{cases} T(s) = \alpha'(s) \\ N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|} \\ B(s) = T(s) \wedge N(s) \end{cases}$$

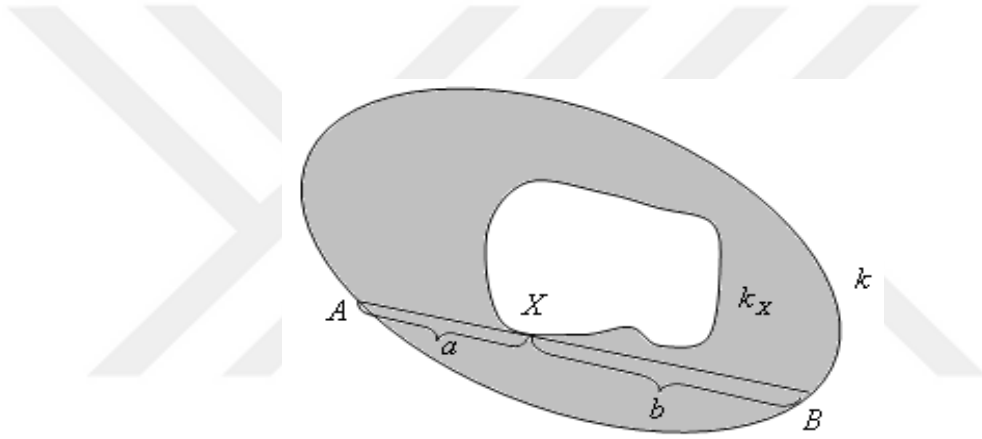
formülleri ile bulunur. T ye α eğrisinin teğet vektör alanı, N ye asli normal vektör alanı ve B ye de binormal vektör alanı denir.

Tanım 2.19

$M, N \subset E^3$ eğrileri (I, α) ve (I, β) komşulukları ile verilsin. M ve N nin $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarındaki Frenet-3 ayaklıları sırası ile $\{T(s), N(s), B(s)\}$ ve $\{T^*(s), B^*(s), N^*(s)\}$ olsun. Eğer $\forall s \in I$ için $\langle T(s), T^*(s) \rangle = 0$ ise N ye M nin involütü, M ye N nin evolütü, (M, N) ikilisine de involüt-evolüt eğri çifti denir.

Tanım 2.20

$B = E/E' - 1$ –parametrelili kapalı düzlemsel hareketi esnasında, sabit $a + b$ uzunluklu AB kirişinin A ve B uç noktaları E' sabit düzlemindeki bir k ovalini tam bir defa ($v = 1$) kat ettiğinde, AB kirişi üzerinde seçilen herhangi bir X noktası da ($a = |AX|$, $b = |XB|$) genellikle konveks olmayan kapalı bir k_x eğrisi çizer. X noktasının çizdiği k_x kapalı eğrisi ile k ovali arasındaki bölgenin (Holditch halkası) alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine bağlı olup eğrilerden ve hareketten bağımsızdır (Şekil 2.2.) (Holditch, 1858).



Şekil 2.2. Holditch Halkası (Holditch, 1858)

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Materyal

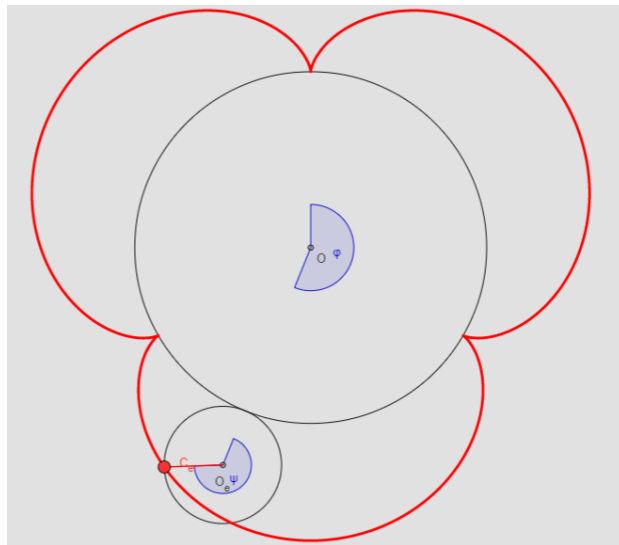
3.1.1. Episikloid

Bir biri üzerinde dıştan teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan r ve R , ($r < R$) yarıçaplı iki çember verilsin. r yarıçaplı hareketli çember ile bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine episikloid eğri denir. $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemleri

$$x = (R + r) \cos t - r \cos\left(\frac{R + r}{r} t\right)$$

$$y = (R + r) \sin t - r \sin\left(\frac{R + r}{r} t\right)$$

biçimindedir (Şekil 3.1.).



Şekil 3.1. Episikloid Eğrisi

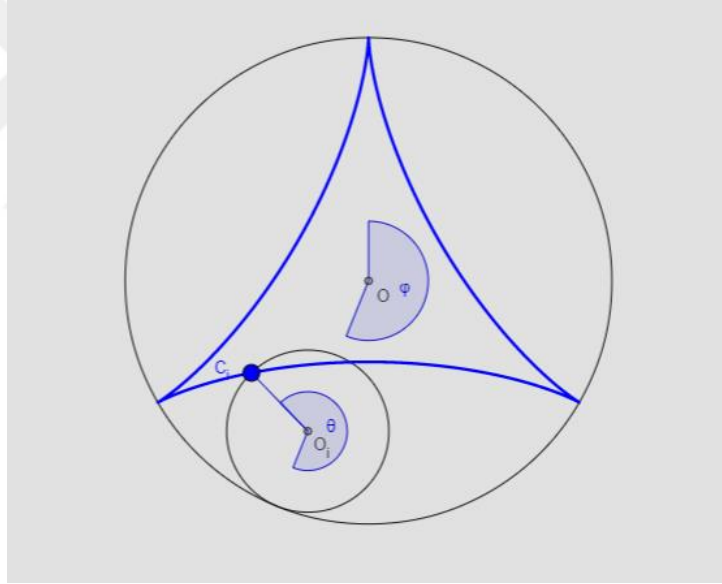
3.1.2. Hiposikloid

Bir biri üzerinde içten teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan r ve R , ($r < R$) yarıçaplı iki çember verilsin. r yarıçaplı hareketli çember ile bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine hiposikloid eğri denir. $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemi

$$x = (R - r) \cos t - r \cos\left(\frac{R - r}{r} t\right)$$

$$y = (R - r) \sin t - r \sin\left(\frac{R - r}{r} t\right)$$

biçimindedir (Şekil 3.2.).



Şekil 3.2. Hiposikloid Eğrisi

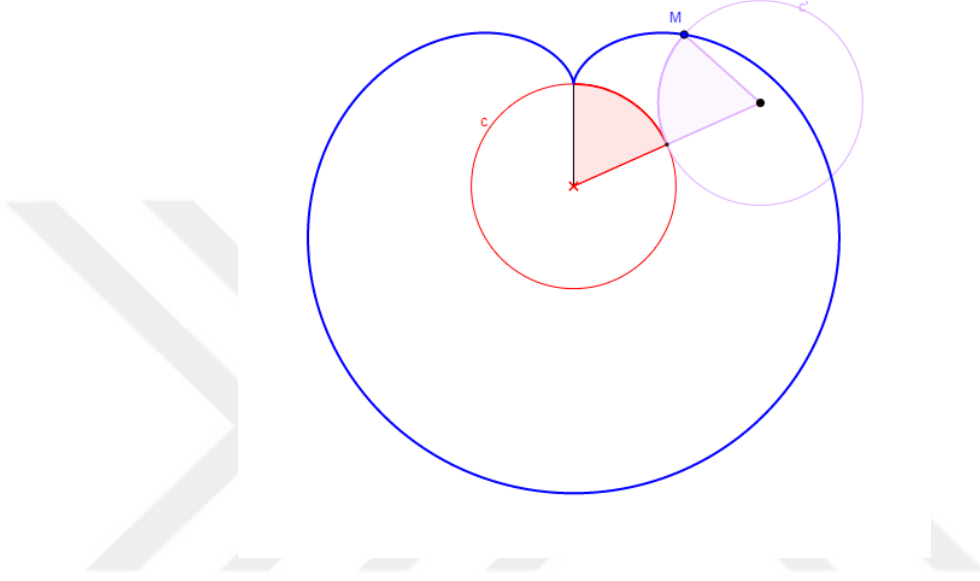
3.1.3. Kardioid

r yarıçaplı sabit bir çember üzerinde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan aynı yarıçaplı ikinci bir çember üzerindeki herhangi bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine kardioid eğri denir. $P = (x, y)$ noktasının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemi

$$x = 2r \cos t - r \cos 2t$$

$$y = 2r \sin t - r \sin 2t$$

biçimindedir ($0 \leq t < 2\pi$)(Şekil3.3.).



Şekil 3.3. Kardioid Eğrisi

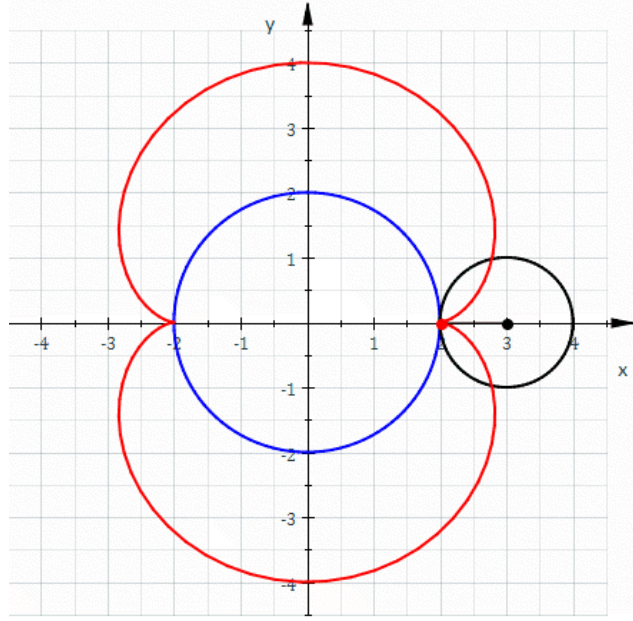
3.1.4. Nephroid

Bir biri üzerinde dıştan teğet kalacak şekilde kaymaksızın yuvarlanma hareketi yapan r ve $r/2$ yarıçaplı iki çember verilsin. $r/2$ yarıçaplı hareketli çember ile bir P noktasının hareket esnasında çizdiği yörünge eğrisine nephroid eğri denir. $P = (x, y)$ noktalarının geometrik yeri olan eğrinin parametrik denklemleri

$$x = 3r \cos t - r \cos(3t)$$

$$y = 3r \sin t - r \sin(3t)$$

biçimindedir (Şekil 3.4.).



Şekil 3.4. Nephroid Eğrisi

3.2. Yöntem

3.2.1. Düzlemsel hareket için kapalı yörüngeler

E hareketli ve E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t –parametrelili $B: E/E'$ direkt hareketi ele alınsın. Sistemlerin sırasıyla orijinleri (O, O') , öteleme vektörleri $(OO' = U)$, $(O'O = U')$ ve toplam dönme açısı $\alpha(t)$ olmak üzere, E hareketli sistemine ait bir X noktasının E' sabit sistemine göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t).R(t)X + U'(t) \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada hareket, sabit ve hareketli sistem arasında zamana bağlı bir dönüşüm olarak düşünülebilir. X vektörü zamandan yani t parametresinden bağımsızdır.

(3.2.1) denkleminde $\alpha(t)$ toplam dönme açısı, $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, $U'(t)$ öteleme vektörüne karşılık gelen 2×1 tipinde öteleme matrisi olmak üzere, (3.2.1) denklemi matris formunda

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}$$

ve bileşen olarak ise

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= \cos(\alpha(t)) x_1 - \sin(\alpha(t)) x_2 + u'_1(t) \\ x'_2(t) &= \sin(\alpha(t)) x_1 + \cos(\alpha(t)) x_2 + u'_2(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır (Dathe vd, 2015).

3.2.2. Düzlemsel kinematik ve en az eylem prensibi

E/E' düzlemsel hareketinde, E hareketli düzlemine ait bir X noktasının E' sabit düzlemindeki $X'(t)$ yörünge eğrisinin denklemi için

$$X'(t) = R(t)X + U'(t)$$

yazılabilir. Bu denklem dönme ve ötelemeden ibarettir. Burada t zaman parametresidir. Bu sisteme en az eylem prensibi uygulanırsa; bu sistemde m kütleli bir noktanın $X'(t)$ yörünge eğrisi için kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}'(t) \right)^2 \quad (3.2.2)$$

şeklindedir. (3.2.2) denklemi hareketli sistemde başlangıç noktasının seçiminden bağımsız olup, hareketli sistemin seçilen noktasına bağımlıdır. Bu enerji,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \left(\dot{X}'(t) \right)^2 dt$$

denkleminle verilir ve karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyoneli olarak adlandırılır. $m = 1$ için bu fonksiyonel

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{X}'(t)^T \cdot \dot{X}'(t)) dt$$

şeklinde ifade edilir.

En az eylem prensibi, S nin minimum olmasını gerektirir. Bunun için δ varyasyonu göstermek üzere, $\delta S = 0$ şartı sağlanmalıdır. Bu durumu sağlayan noktaya sabit nokta veya karakteristik nokta adı verilir. Hız kuadratik form olduğundan, S enerji fonksiyoneli de X noktasında bir kuadratik formdur. Bundan dolayı X_0 noktasının minimumu tek ve hareketli sistemin karakteristiği olacaktır (Dathe vd, 2015).

En az eylem prensibi (veya minimum eylem prensibi), mekanik sistemlerdeki eylem kavramından hareket denklemlerinin bulunması esasına dayanır. “En az” kavramı çözümlerde iki nokta arasındaki yollardan; çevre yollara göre değişimin en az olduğu yolu bulma problemi irdelendiği için kullanılır. En az eylem ilkesi ve varyasyon prensipleri, kuantum mekaniğini de geliştirmiş olan doğanın en kapsamlı temel davranış yasalarını içerir. Bu prensip modern fiziğin ve matematiğin merkezinde yer almış ve görelilik teorisi, kuantum mekaniği ve kuantum alan teorisi gibi genel alanlarda etkin olarak kullanılmıştır.

En az eylem ilkesi tam olarak Pierre Louis Maupertuis tarafından tanımlanmıştır. Maupertuis doğanın herhangi bir olay sırasında tutumlu davrandığını düşünmüş ve bu düşüncesini genelleştirmiştir:

Hareket yasaları ve ondan türetilenler veya başka şekilde gözlenenler arasında doğanın aynı esaslarına dayanır. Hayvanların hareketlerini, bitkilerin büyümelerini gözlemlediğimizde hepsi en az eylem ihtiyacının bir sonucudur.

Maupertuis prensibi:

$$\delta \int 2 T(t) dt = 0$$

Bu, kinetik enerji ve zamanın çarpımının iki kere integrale alınmasından ibarettir (Beşergil, 2019).

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Episikloid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t –parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B: E/E'$ direkt hareketi olsun. Sistemlerin sırasıyla orijinleri (O, O') , öteleme vektörleri $(OO' = U)$, $(O'O = U')$ ve toplam dönme açısı $\alpha(t)$ olmak üzere, E hareketli sistemine ait bir X noktasının E' sabit sistemine göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t).R(t)X + U'(t) \quad (4.1.1)$$

olarak ifade edilir. h, t reel parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket sabit ve hareketli sistemde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(4.1.1) denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, $\alpha(t)$ toplam dönme açısı, $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisler, X' ve X sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait bir nokta olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} (R+r) \cos(\alpha(t)) & r \sin(\alpha(t)) \\ (R+r) \sin(\alpha(t)) & -r \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

ifadeleriyle matris formunu

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} (R+r) \cos(\alpha(t)) & r \sin(\alpha(t)) \\ (R+r) \sin(\alpha(t)) & -r \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Sırf öteleme ve sırf dönme durumlarından kaçınmak için $a \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edilecektir. Öteleme vektörleri arasında

$$U'(t) = -R(t).U(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (4.1.1) eşitliğinde yerine yazılırsa yörünge denklemi

$$X'(t) = R(t).(h(t)X - U(t)) \quad (4.1.2)$$

olarak elde edilir. (4.1.2) 'de vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1, x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x_1'(t) = (R + r) \cos(\alpha(t)).(h(t)x_1 - u_1(t)) + r \sin(\alpha(t)).(h(t)x_2 - u_2(t))$$

$$x_2'(t) = (R + r) \sin(\alpha(t)).(h(t)x_1 - u_1(t)) - r \cos(\alpha(t)).(h(t)x_2 - u_2(t))$$

olarak elde edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem prensibini uygulayalım. Bu sistemde m kütleli bir noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{X}'(t))^2 \quad (4.1.3)$$

şeklindedir.

Bu ifadede belirtilen enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m (\dot{X}'(t))^2 dt$$

ifadesine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda bu ifade

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{X}'(t)^T . \dot{X}'(t)) dt \quad (4.1.4)$$

halini alır.

E/E' düzlemsel hareketinde minimal eylem noktasının elde edilebilmesi için E hareketli düzleminin noktalarının enerjisi hesaplanmalıdır. Öyleyse

$$X'(t) = h(t).R(t)X - U'(t)$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınır

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Bu denklemi bileşen formunda ifade edersek

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) &= -(h(t)x_1 - u'_1(t))(R + r) \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ &\quad + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))(R + r) \cos(\alpha(t)) \\ &\quad + (h(t)x_2 - u'_2(t))(R + r) \cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) + (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \sin(\alpha(t)) \\ \dot{x}'_2(t) &= (h(t)x_1 - u'_1(t))(R + r) \cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ &\quad + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))(R + r) \sin(\alpha(t)) \\ &\quad + (h(t)x_2 - u'_2(t))(R + r) \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) - (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \cos(\alpha(t)) \end{aligned}$$

olur. (4.1.5) ifadesi (4.1.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \right]^T \right\}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} 2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} [(h^2 X^T X - hX^T U' - U'^T hX + U'^T U')I\dot{\alpha}^2 \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - \dot{h}\dot{U}X^T + \dot{U}'^T \dot{U}')I \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - hX^T \dot{U} - U'^T \dot{h}X + U'^T \dot{U}')\dot{R}^T R \\ &\quad + (\dot{h}hX^T X - \dot{h}X^T U' - \dot{U}'^T U')\dot{R}^T \dot{R}]dt \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} R(t) &= \begin{pmatrix} (R + r)\cos(\alpha(t)) & r \sin(\alpha(t)) \\ (R + r)\sin(\alpha(t)) & -r \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \\ \dot{R}(t) &= \begin{pmatrix} -(R + r)\sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) & r \cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ (R + r)\cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) & r \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} \\ [\dot{R}(t)]^T &= \begin{pmatrix} -(R + r)\sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) & (R + r)\cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ r \cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) & r \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
& [\dot{R}(t)]^T R(t) \\
&= \begin{pmatrix} -(R+r)^2 \cos(\alpha(t)) \cdot \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) + (R+r)^2 \cos(\alpha(t)) \cdot \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ r^2 \sin(\alpha(t)) \cdot \cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) - r^2 \cos(\alpha(t)) \sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t) \end{pmatrix} \\
&= \dot{\alpha}(t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\dot{R}(t)]^T \dot{R}(t) &= \begin{pmatrix} (R+r)^2 (\sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t))^2 + (R+r)^2 (\cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t))^2 \\ r^2 (\cos(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t))^2 + r^2 (\sin(\alpha(t)) \cdot \dot{\alpha}(t))^2 \end{pmatrix} \\
&= \dot{\alpha}(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad [U(t)]^T = (u_1(t) \quad u_2(t))$$

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}, \quad [\dot{U}(t)]^T = (\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t))$$

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, \quad [U'(t)]^T = (u'_1(t) \quad u'_2(t))$$

$$\dot{U}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}'_1(t) \\ \dot{u}'_2(t) \end{pmatrix}, \quad [\dot{U}'(t)]^T = (\dot{u}'_1(t) \quad \dot{u}'_2(t))$$

ifadelerini (4.1.6) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(h^2 X^T X - h X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) h X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) I \dot{\alpha}^2 \right. \\
&\quad + \left(h \dot{h} X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}'_1 \quad \dot{u}'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} \right) I \\
&\quad + \left(h \dot{h} X^T X - h X^T \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) \dot{h} X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T R \\
&\quad \left. + \left(h \dot{h} X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (\dot{u}'_1 \quad \dot{u}'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
2S(X) = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(h^2(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \ u'_2) h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (u'_1)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + (u'_2)^2 \right) I \dot{a}^2 \right. \\
& + \left(h \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}'_1)^2 + (\dot{u}'_2)^2 \right) I \\
& + \left(h \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \ u'_2) \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u'_1 \dot{u}'_1 + u'_2 \dot{u}'_2 \right) \dot{R}^T R \\
& \left. + \left(\dot{h} h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - \dot{u}'_1 u'_1 - \dot{u}'_2 u'_2 \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu eşitliği bileşen formunda

$$\begin{aligned}
2S(x_1, x_2) = & (x_1^2 + x_2^2) \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{a}^2 + \dot{h}^2) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} [(u'_1)^2 + (u'_2)^2] \dot{a}^2 + \dot{u}'_1{}^2 + \dot{u}'_2{}^2] dt \\
& + x_1 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{a}^2 - \dot{h} \dot{u}_1 - h \dot{u}_1 \dot{a} - 2\dot{h} u'_1 \dot{a}] dt \\
& + x_2 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{a}^2 - \dot{h} \dot{u}_2 - h \dot{u}_2 \dot{a} - 2\dot{h} u'_2 \dot{a}] dt
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

(4.1.7) denkleminde

$$\begin{aligned}
H_R &= \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{a}^2 + \dot{h}^2) dt \\
H_T &= \int_{t_1}^{t_2} [(u'_1)^2 + (u'_2)^2] \dot{a}^2 + \dot{u}'_1{}^2 + \dot{u}'_2{}^2] dt \\
H_{x_1} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{a}^2 - \dot{h} \dot{u}_1 - h \dot{u}_1 \dot{a} - 2\dot{h} u'_1 \dot{a}] dt \\
H_{x_2} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{a}^2 - \dot{h} \dot{u}_2 - h \dot{u}_2 \dot{a} - 2\dot{h} u'_2 \dot{a}] dt
\end{aligned}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + x_1 H_{x_1} + x_2 H_{x_2} \tag{4.1.8}$$

şeklinde elde edilir.

(4.1.8) denklemi, t zaman parametresine bağlı ifade edilirse, aranan X_0 noktasının koordinatları minimal eylem prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(4.1.8) denkleminin X e göre türevi alınır ve sınıfa eşitlenirse,

$$\left. \frac{\partial 2S}{\partial X} \right|_{X_0} = 0 \quad (4.1.9)$$

elde edilir. (4.1.9) eşitliğini sağlayan noktalar karakteristik noktalardır. Karakteristik noktayı bileşenleri şeklinde elde etmek için (4.1.7) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\alpha} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\alpha}] dt \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\alpha} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\alpha}] dt \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

elde edilir.

Hareketli düzlemin X noktasının aksine, X_0 noktası integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. (4.1.10) ve (4.1.11) denklemleri sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = - \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\alpha} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\alpha}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt} = - \frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = - \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\alpha} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\alpha}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt} = - \frac{H_{x_2}}{2H_R}$$

olarak bulunur. Ayrıca X_0 noktasının minimal nokta olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2} I \int \dot{\alpha}^2 dt = \frac{1}{2} I H_R$$

ifadesi her zaman 0 'dan büyük olduğundan X_0 bir karakteristik noktadır.

Karakteristik noktanın bileşenleri (4.1.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R} \right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R} \right)^2 \right] H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R} H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R} H_{x_2}$$

bulunur.

Buradan da minimal eylem

$$2S_0(t_1, t_2) = H_T(t_1, t_2)$$

olarak ifade edilir.

4.2. Hiposikloid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t –parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B: E/E'$ direkt hareketi olsun. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O, O') , öteleme vektörleri $(OO' = U)$ ve $(O'O = U')$, toplam dönme açısı $\beta(t)$ olmak üzere, hareketli sisteme ait bir X noktasının sabit sisteme göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t).R(t)X + U'(t) \quad (4.2.1)$$

olarak ifade edilir. h, t reel parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket sabit ve hareketli sistemde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(4.2.1) denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, toplam dönme açısı $\beta(t)$, $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisler, X' ve X sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait bir nokta olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} (R-r) \cos(\beta(t)) & r \sin(\beta(t)) \\ (R-r) \sin(\beta(t)) & -r \cos(\beta(t)) \end{pmatrix}$$

ifadeleriyle matris formunu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} (R-r) \cos(\beta(t)) & r \sin(\beta(t)) \\ (R-r) \sin(\beta(t)) & -r \cos(\beta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Sırf öteleme ve sırf dönme durumlarından kaçınmak için $\beta \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edilecektir. Öteleme vektörleri arasında

$$U'(t) = -R(t).U(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (4.2.1) eşitliğinde yerine yazılırsa yörünge denklemi

$$X'(t) = R(t). (h(t)X - U(t)) \quad (4.2.2)$$

olarak elde edilir. (4.2.2) 'de vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1, x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x_1'(t) = (R-r) \cos(\beta(t)). (h(t)x_1 - u_1(t)) + r \sin(\beta(t)). (h(t)x_2 - u_2(t))$$

$$x_2'(t) = (R-r) \sin(\beta(t)). (h(t)x_1 - u_1(t)) - r \cos(\beta(t)). (h(t)x_2 - u_2(t))$$

olarak elde edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem prensibini uygulayalım. Bu sistemde m kütleli bir noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \left(\dot{X}'(t) \right)^2 \quad (4.2.3)$$

şeklindedir.

Bu ifadede belirtilen enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \left(\dot{X}'(t) \right)^2 dt$$

ifadesine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda bu ifade

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\dot{X}'(t)^T \cdot \dot{X}'(t) \right) dt \quad (4.2.4)$$

halini alır.

E/E' düzlemsel hareketinde minimal eylem noktasının elde edilebilmesi için E hareketli düzleminin noktalarının enerjisi hesaplanmalıdır. Öyleyse

$$X'(t) = h(t) \cdot R(t)X - U'(t)$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınmalıdır.

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \quad (4.2.5)$$

Bu denklemi $\dot{X}'(t) = (\dot{x}'_1(t), \dot{x}'_2(t))$ bileşen formunda ifade edersek

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) = & -(h(t)x_1 - u'_1(t))(R - r) \sin(\beta(t)) \dot{\beta}(t) \\ & + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))(R - r) \cos(\beta(t)) \\ & + (h(t)x_2 - u'_2(t))r \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) - (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \sin(\beta(t)) \\ \dot{x}'_2(t) = & (h(t)x_1 - u'_1(t))(R - r) \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \\ & + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))(R - r) \sin(\beta(t)) \\ & + (h(t)x_2 - u'_2(t))r \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) - (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \cos(\beta(t)) \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.2.5) ifadesi (4.2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \right]^T \right\}$$

ve böylece

$$\begin{aligned}
2S(X) = & \int_{t_1}^{t_2} [(h^2 X^T X - h X^T U' - U'^T h X + U'^T U') I \dot{a}^2 \\
& + (h \dot{h} X^T X - \dot{h} \dot{U} X^T + \dot{U}'^T \dot{U}') I \\
& + (h \dot{h} X^T X - h X^T \dot{U} - U'^T \dot{h} X + U'^T \dot{U}') \dot{R}^T R \\
& + (\dot{h} h X^T X - \dot{h} X^T U' - \dot{U}'^T U') \dot{R}^T \dot{R}] dt
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
R(t) &= \begin{pmatrix} (R-r) \cos(\beta(t)) & r \sin(\beta(t)) \\ (R-r) \sin(\beta(t)) & -r \cos(\beta(t)) \end{pmatrix} \\
\dot{R}(t) &= \begin{pmatrix} -(R-r) \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) & r \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \\ (R-r) \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) & r \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} \\
[\dot{R}(t)]^T &= \begin{pmatrix} -(R-r) \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) & (R-r) \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \\ r \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) & r \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
& [\dot{R}(t)]^T R(t) \\
&= \begin{pmatrix} -(R-r)^2 \cos(\beta(t)) \cdot \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) + (R-r)^2 \sin(\beta(t)) \cdot \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \\ r^2 \sin(\beta(t)) \cdot \cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) - r^2 \cos(\beta(t)) \sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} \\
&= \dot{\beta}(t)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\dot{R}(t)]^T \dot{R}(t) &= \left((R-r)^2 (\sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t))^2 + (R-r)^2 (\cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t))^2 \right. \\
&\quad \left. + r^2 (\cos(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t))^2 + r^2 (\sin(\beta(t)) \cdot \dot{\beta}(t))^2 \right) \\
&= \dot{\beta}(t)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad [U(t)]^T = (u_1(t) \quad u_2(t))$$

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}, \quad [\dot{U}(t)]^T = (\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t))$$

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad [U'(t)]^T = (u'_1(t) \quad u'_2(t))$$

$$\dot{U}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}'_1(t) \\ \dot{u}'_2(t) \end{pmatrix} \quad , \quad [\dot{U}'(t)]^T = (\dot{u}'_1(t) \quad \dot{u}'_2(t))$$

ifadelerini (4.2.6) ifadesinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} & \left[\left(h^2 X^T X - h X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) h X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) I \dot{\beta}^2 \right. \\ & + \left(h \dot{h} X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}'_1 \quad \dot{u}'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} \right) I \\ & + \left(h \dot{h} X^T X - h X^T \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) \dot{h} X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T R \\ & \left. + \left(\dot{h} h X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (\dot{u}'_1 \quad \dot{u}'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} 2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} & \left[\left(h^2 \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (u'_1)^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + (u'_2)^2 \right) I \dot{\beta}^2 \right. \\ & + \left(h \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}'_1)^2 + (\dot{u}'_2)^2 \right) I \\ & + \left(h \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u'_1 \dot{u}'_1 + u'_2 \dot{u}'_2 \right) \dot{R}^T R \\ & \left. + \left(\dot{h} h \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - \dot{u}'_1 u'_1 - \dot{u}'_2 u'_2 \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt \end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu eşitliği bileşen formunda ifade edersek

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\beta}^2 + \dot{h}^2) dt$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_1}^{t_2} [(u_1'^2 + u_2'^2)\dot{\beta}^2 + \dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2] dt \\
& + x_1 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_1'\dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1\dot{\beta} - 2\dot{h}u_1'\dot{\beta}] dt \\
& + x_2 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_2'\dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2\dot{\beta} - 2\dot{h}u_2'\dot{\beta}] dt
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

elde edilir.

(4.2.7) denkleminde

$$\begin{aligned}
H_R &= \int_{t_1}^{t_2} (h^2\dot{\beta}^2 + \dot{h}^2) dt \\
H_T &= \int_{t_1}^{t_2} [(u_1'^2 + u_2'^2)\dot{\beta}^2 + \dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2] dt \\
H_{x_1} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_1'\dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1\dot{\beta} - 2\dot{h}u_1'\dot{\beta}] dt \\
H_{x_2} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_2'\dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2\dot{\beta} - 2\dot{h}u_2'\dot{\beta}] dt
\end{aligned}$$

eşitlikleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + x_1H_{x_1} + x_2H_{x_2} \tag{4.2.8}$$

şeklinde elde edilir.

(4.2.8) eylemi, t zaman parametresine bağlı ifade edilirse, aranan X_0 noktasının koordinatları minimal eylem prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(4.2.8) denkleminin X e göre türevi alınır ve sınıfa eşitlenirse,

$$\left. \frac{\partial 2S}{\partial X} \right|_{x_0} = 0 \tag{4.2.9}$$

elde edilir. (4.2.9) eşitliğini sağlayan noktalar karakteristik noktalardır. Karakteristik noktayı bileşenleri şeklinde elde etmek için (4.2.7) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}\frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\beta}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\beta} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\beta}] dt\end{aligned}\quad (4.2.10)$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\beta}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\beta} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\beta}] dt\end{aligned}\quad (4.2.11)$$

elde edilir.

Hareketli düzlemin X noktasının aksine, X_0 noktası integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. Bu denklemler sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\beta} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\beta}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\beta}^2 + \dot{h}^2) dt} = -\frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\beta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\beta} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\beta}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\beta}^2 + \dot{h}^2) dt} = -\frac{H_{x_2}}{2H_R}$$

olarak bulunur. Ayrıca X_0 noktasının minimal nokta olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2} I \int \dot{\beta}^2 dt = \frac{1}{2} I H_R$$

ifadesi her zaman 0 'dan büyük olduğundan X_0 bir karakteristik noktadır.

Karakteristik noktanın bileşenleri (4.2.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R} \right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R} \right)^2 \right] H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R} H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R} H_{x_2}$$

bulunur.

Buradan da minimal eylem

$$2S_0(t_1, t_2) = H_T(t_1, t_2)$$

olarak ifade edilir.

4.3. Kardioid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t –parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B: E/E'$ direkt hareketi olsun. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O, O') , öteleme vektörleri $(OO' = U)$ ve $(O'O = U')$, toplam dönme açısı $\theta(t)$ olmak üzere, hareketli sisteme ait bir X noktasının sabit sisteme göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t).R(t)X + U'(t) \quad (4.3.1)$$

olarak ifade edilir. h, t reel parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket sabit ve hareketli sistemde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(4.3.1) denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, toplam dönme açısı $\theta(t)$; $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisler; X' ve X sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait bir nokta olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} 2r \cos(\theta(t)) & r \sin(\theta(t)) \\ 2r \sin(\theta(t)) & -r \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

ifadeleriyle matris formunu

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} 2r \cos(\theta(t)) & r \sin(\theta(t)) \\ 2r \sin(\theta(t)) & -r \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Sıfı öteleme ve sıfır dönme durumlarından kaçınmak için $\theta \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edilecektir. Öteleme vektörleri arasında

$$U'(t) = -R(t).U(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (4.3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa yörünge denklemi

$$X'(t) = R(t).(h(t)X - U(t)) \quad (4.3.2)$$

olarak elde edilir. (4.3.2) denkleminde vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1, x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x'_1(t) = 2r \cos(\theta(t)).(h(t)x_1 - u_1(t)) + r \sin(\theta(t)).(h(t)x_2 - u_2(t))$$

$$x'_2(t) = 2r \sin(\theta(t)).(h(t)x_1 - u_1(t)) - r \cos(\theta(t)).(h(t)x_2 - u_2(t))$$

olarak elde edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem prensibini uygulayalım. Bu sistemde m kütleli bir noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{X}'(t))^2 \quad (4.3.3)$$

şeklindedir.

Bu ifadede belirtilen enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m (\dot{X}'(t))^2 dt$$

ifadesine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda bu ifade

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{X}'(t)^T . \dot{X}'(t)) dt \quad (4.3.4)$$

halini alır.

E/E' düzlemsel hareketinde minimal eylem noktasının elde edilebilmesi için E hareketli düzleminin noktalarının enerjisi hesaplanmalıdır. Öyleyse

$$X'(t) = h(t).R(t)X - U'(t)$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınmalıdır.

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \quad (4.3.5)$$

Bu denklemi $\dot{X}'(t) = (\dot{x}'_1(t), \dot{x}'_2(t))$ bileşen formunda ifade edersek

$$\dot{x}'_1(t) = -(h(t)x_1 - u'_1(t))2r \sin(\theta(t)).\dot{\theta}(t) + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))2r \cos(\theta(t))$$

$$(h(t)x_2 - u'_2(t))r \cos(\theta(t)).\dot{\theta}(t) + (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \sin(\theta(t))$$

$$\dot{x}'_2(t) = (h(t)x_1 - u'_1(t))2r \cos(\theta(t))\dot{\theta}(t) + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))2r \sin(\theta(t))$$

$$+(h(t)x_2 - u'_2(t))r \sin(\theta(t)).\dot{\theta}(t) - (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \cos(\theta(t))$$

elde ederiz. (4.3.5) ifadesi (4.3.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \right]^T \right\}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} 2S(X) = & \int_{t_1}^{t_2} [(h^2 X^T X - hX^T U' - U'^T hX + U'^T U')I\dot{\alpha}^2 \\ & + (h\dot{h}X^T X - \dot{h}\dot{U}X^T + \dot{U}'^T \dot{U}')I \\ & + (h\dot{h}X^T X - hX^T \dot{U} - U'^T \dot{h}X + U'^T \dot{U}')\dot{R}^T R \\ & + (h\dot{h}X^T X - \dot{h}X^T U' - \dot{U}'^T U')\dot{R}^T \dot{R}]dt \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

olur. Diğer yandan

$$R(t) = \begin{pmatrix} 2r \cos(\theta(t)) & r \sin(\theta(t)) \\ 2r \sin(\theta(t)) & -r \cos(\theta(t)) \end{pmatrix}$$

$$\dot{R}(t) = \begin{pmatrix} -2r \sin(\theta(t)).\dot{\theta}(t) & r \cos(\theta(t)).\dot{\theta}(t) \\ 2r \cos(\theta(t)).\dot{\theta}(t) & r \sin(\theta(t)).\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

$$[\dot{R}(t)]^T = \begin{pmatrix} -2r \sin(\theta(t)).\dot{\theta}(t) & 2r \cos(\theta(t)).\dot{\theta}(t) \\ r \cos(\theta(t)).\dot{\theta}(t) & r \sin(\theta(t)).\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
& [\dot{R}(t)]^T R(t) \\
&= \begin{pmatrix} -(2r)^2 \cos(\theta(t)) \cdot \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) + (2r)^2 \sin(\theta(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \\ r^2 \sin(\theta(t)) \cdot \cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) - r^2 \cos(\theta(t)) \cdot \sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} \\
&= \dot{\theta}(t)
\end{aligned}$$

ve

$$[\dot{R}(t)]^T \dot{R}(t) = \begin{pmatrix} (2r)^2 (\sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t))^2 + (2r)^2 (\cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t))^2 \\ r^2 (\cos(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t))^2 + r^2 (\sin(\theta(t)) \cdot \dot{\theta}(t))^2 \end{pmatrix} = \dot{\theta}(t)$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
U(t) &= \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, & [U(t)]^T &= (u_1(t) \quad u_2(t)) \\
\dot{U}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}, & [\dot{U}(t)]^T &= (\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t)) \\
U'(t) &= \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, & [U'(t)]^T &= (u'_1(t) \quad u'_2(t)) \\
\dot{U}'(t) &= \begin{pmatrix} \dot{u}'_1(t) \\ \dot{u}'_2(t) \end{pmatrix}, & [\dot{U}'(t)]^T &= (\dot{u}'_1(t) \quad \dot{u}'_2(t))
\end{aligned}$$

ifadelerini (4.3.6) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(h^2 X^T X - h X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) h X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) I \dot{\theta}^2 \right. \\
&\quad + \left(h \dot{h} X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}_1 \quad \dot{u}_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} \right) I \\
&\quad + \left(h \dot{h} X^T X - h X^T \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) \dot{h} X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T R \\
&\quad \left. + \left(\dot{h} h X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (\dot{u}_1 \quad \dot{u}_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(h^2 (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (u'_1)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (u'_2)^2 \right) I \dot{\theta}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(h\dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}_1')^2 + (\dot{u}_2')^2 \right) I \\
& + \left(h\dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} - (u_1' \ u_2')\dot{h} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u_1'\dot{u}_1' + u_2'\dot{u}_2' \right) \dot{R}^T R \\
& + \left(\dot{h}h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} - \dot{u}_1' u_1' - \dot{u}_2' u_2' \right) \dot{R}^T \dot{R} \Big] dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu eşitliği bileşen formunda ifade edersek

$$\begin{aligned}
2S(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2) \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} [(u_1')^2 + (u_2')^2] \dot{\theta}^2 + \dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2] dt \\
&+ x_1 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_1' \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\theta} - 2\dot{h}u_1' \dot{\theta}] dt \\
&+ x_2 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_2' \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\theta} - 2\dot{h}u_2' \dot{\theta}] dt
\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

elde edilir.

(4.3.7) denkleminde

$$\begin{aligned}
H_R &= \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\
H_T &= \int_{t_1}^{t_2} [(u_1')^2 + (u_2')^2] \dot{\theta}^2 + \dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2] dt \\
H_{x_1} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_1' \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\theta} - 2\dot{h}u_1' \dot{\theta}] dt \\
H_{x_2} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu_2' \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\theta} - 2\dot{h}u_2' \dot{\theta}] dt
\end{aligned}$$

ifadeleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + x_1 H_{x_1} + x_2 H_{x_2} \tag{4.3.8}$$

şeklinde elde edilir.

(4.3.8) eylemi, t zaman parametresine bağlı ifade edilirse, aranan X_0 noktasının koordinatları minimal eylem prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(4.3.8) denkleminin X e göre türevi alınır ve sınıfa eşitlenirse,

$$\left. \frac{\partial 2S}{\partial X} \right|_{X_0} = 0 \quad (4.3.9)$$

elde edilir. (4.3.9) eşitliğini sağlayan noktalar karakteristik noktalardır. Karakteristik noktayı bileşenleri şeklinde elde etmek için (4.3.7) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\theta}] dt \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\theta}] dt \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

elde edilir.

Hareketli düzlemin X noktasının aksine, X_0 noktası integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. Bu denklemler sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = - \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_1 - h\dot{u}_1 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\theta}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt} = - \frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = - \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\theta}^2 - \dot{h}\dot{u}_2 - h\dot{u}_2 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\theta}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt} = - \frac{H_{x_2}}{2H_R}$$

olarak bulunur. Ayrıca X_0 noktasının minimal nokta olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2} I \int \dot{\theta}^2 dt = \frac{1}{2} I H_R$$

ifadesi her zaman 0 dan büyük olduğundan X_0 bir karakteristik noktadır.

Karakteristik noktanın bileşenleri $2S(x_1, x_2)$ de yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R} \right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R} \right)^2 \right] H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R} H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R} H_{x_2}$$

bulunur. Buradan da minimal eylem

$$2S_0(t_1, t_2) = H_T(t_1, t_2)$$

olarak ifade edilir.

4.4. Nephroid için uygulaması

E hareketli ve E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t –parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B: E/E'$ direkt hareketi olsun. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O, O') , öteleme vektörleri $(OO' = U)$ ve $(O'O = U')$, toplam dönme açısı $\delta(t)$ olmak üzere, hareketli sisteme ait bir X noktasının sabit sisteme göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t).R(t)X + U'(t) \quad (4.4.1)$$

olarak ifade edilir. h, t reel parametresinin sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket sabit ve hareketli sistemde zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(4.4.1) denkleminde $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, toplam dönme açısı $\delta(t)$; $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisler; X' ve X sırasıyla sabit ve hareketli düzleme ait bir nokta olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix}, \quad U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, \quad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} 3r \cos(\delta(t)) & r \sin(\delta(t)) \\ 3r \sin(\delta(t)) & -r \cos(\delta(t)) \end{pmatrix}$$

ifadeleriyle matris formunu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} 3r \cos(\delta(t)) & r \sin(\delta(t)) \\ 3r \sin(\delta(t)) & -r \cos(\delta(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Sıfı öteleme ve sıfır dönme durumlarından kaçınmak için $\delta \neq 0$ ve $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edilecektir. Öteleme vektörleri arasında

$$U'(t) = -R(t).U(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (4.4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa yörünge denklemi

$$X'(t) = R(t).(h(t)X - U(t)) \quad (4.4.2)$$

olarak elde edilir. (4.4.2) denkleminde vektörlerin ifadeleri yerine yazılıp $X(x_1, x_2)$ bileşenleri ile ifade edilirse

$$x_1'(t) = 3r \cos(\delta(t)).(h(t)x_1 - u_1(t)) + r \sin(\delta(t)).(h(t)x_2 - u_2(t))$$

$$x_2'(t) = 3r \sin(\delta(t)).(h(t)x_1 - u_1(t)) - r \cos(\delta(t)).(h(t)x_2 - u_2(t))$$

olarak elde edilir.

Düzlem kinematiğine en az eylem prensibini uygulayalım. Bu sistemde m kütleli bir noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{X}'(t))^2 \quad (4.4.3)$$

şeklindedir.

Bu ifadede belirtilen enerji fonksiyonu karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m (\dot{X}'(t))^2 dt$$

ifadesine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda bu ifade

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{X}'(t)^T . \dot{X}'(t)) dt \quad (4.4.4)$$

halini alır.

E/E' düzlemsel hareketinde minimal eylem noktasının elde edilebilmesi için E hareketli düzleminin noktalarının enerjisi hesaplanmalıdır. Öyleyse

$$X'(t) = h(t).R(t)X - U'(t)$$

denkleminin t parametresine göre türevi alınmalıdır.

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \quad (4.4.5)$$

Bu denklemi $\dot{X}'(t) = (\dot{x}'_1(t), \dot{x}'_2(t))$ bileşen formunda ifade edersek

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) &= -(h(t)x_1 - u'_1(t))3r \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))3r \cos(\delta(t)) \\ &\quad (h(t)x_2 - u'_2(t))r \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) + (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \sin(\delta(t)) \\ \dot{x}'_2(t) &= (h(t)x_1 - u'_1(t))3r \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}'_1(t))3r \sin(\delta(t)) \\ &\quad + (h(t)x_2 - u'_2(t))r \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) - (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}'_2(t))r \cos(\delta(t)) \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.4.5) ifadesi (4.4.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[\dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \right]^T \right\}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} 2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} [(h^2 X^T X - hX^T U' - U'^T hX + U'^T U')I \dot{\alpha}^2 \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - \dot{h}\dot{U}X^T + \dot{U}'^T \dot{U}')I \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - hX^T \dot{U} - U'^T \dot{h}X + U'^T \dot{U}')\dot{R}^T R \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - \dot{h}X^T U' - \dot{U}'^T U')\dot{R}^T \dot{R}] dt \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} R(t) &= \begin{pmatrix} 3r \cos(\delta(t)) & r \sin(\delta(t)) \\ 3r \sin(\delta(t)) & -r \cos(\delta(t)) \end{pmatrix} \\ \dot{R}(t) &= \begin{pmatrix} -3r \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) & r \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \\ 3r \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) & r \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[\dot{R}(t)]^T = \begin{pmatrix} -3r \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) & 3r \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \\ r \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) & r \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \end{pmatrix}$$

olacağından

$$\begin{aligned} & [\dot{R}(t)]^T R(t) \\ &= \begin{pmatrix} -(3r)^2 \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \cos(\delta(t)) + (3r)^2 \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \sin(\delta(t)) \\ r^2 \cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t) r \sin(\delta(t)) - r^2 \sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t) \cos(\delta(t)) \end{pmatrix} \\ &= \dot{\delta}(t) \end{aligned}$$

ve

$$[\dot{R}(t)]^T \dot{R}(t) = \begin{pmatrix} (3r)^2 (\sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t))^2 + (3r)^2 (\cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t))^2 \\ r^2 (\cos(\delta(t)) \dot{\delta}(t))^2 + r^2 (\sin(\delta(t)) \dot{\delta}(t))^2 \end{pmatrix} = \dot{\delta}(t)$$

bulunur. Böylece

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad [U(t)]^T = (u_1(t) \quad u_2(t))$$

$$\dot{U}(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{pmatrix}, \quad [\dot{U}(t)]^T = (\dot{u}_1(t) \quad \dot{u}_2(t))$$

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, \quad [U'(t)]^T = (u'_1(t) \quad u'_2(t))$$

$$\dot{U}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{u}'_1(t) \\ \dot{u}'_2(t) \end{pmatrix}, \quad [\dot{U}'(t)]^T = (\dot{u}'_1(t) \quad \dot{u}'_2(t))$$

ifadelerini (4.4.6) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} 2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(h^2 X^T X - h X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) h X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) I \dot{\delta}^2 \right. \\ &\quad + \left(h \dot{h} X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}'_1 \quad \dot{u}'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} \right) I \\ &\quad + \left(h \dot{h} X^T X - h X^T \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \quad u'_2) \dot{h} X + (u'_1 \quad u'_2) \begin{pmatrix} \dot{u}'_1 \\ \dot{u}'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T R \\ &\quad \left. + \left(\dot{h} h X^T X - \dot{h} X^T \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (\dot{u}'_1 \quad \dot{u}'_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
2S(X) = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(h^2(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \ u'_2) h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (u'_1)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + (u'_2)^2 \right) I \dot{\theta}^2 \right. \\
& + \left(h \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + (\dot{u}'_1)^2 + (\dot{u}'_2)^2 \right) I \\
& + \left(h \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} - (u'_1 \ u'_2) \dot{h} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + u'_1 \dot{u}'_1 + u'_2 \dot{u}'_2 \right) \dot{R}^T R \\
& \left. + \left(\dot{h} h(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \dot{h}(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{pmatrix} - \dot{u}'_1 u'_1 - \dot{u}'_2 u'_2 \right) \dot{R}^T \dot{R} \right] dt
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Bu eşitliği bileşen formunda ifade edersek

$$\begin{aligned}
2S(x_1, x_2) = & (x_1^2 + x_2^2) \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} [(u'_1)^2 + (u'_2)^2] \dot{\theta}^2 + \dot{u}'_1{}^2 + \dot{u}'_2{}^2 dt \\
& + x_1 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\theta}^2 - \dot{h} \dot{u}_1 - h \dot{u}_1 \dot{\theta} - 2\dot{h} u'_1 \dot{\theta}] dt \\
& + x_2 \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\theta}^2 - \dot{h} \dot{u}_2 - h \dot{u}_2 \dot{\theta} - 2\dot{h} u'_2 \dot{\theta}] dt
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

elde edilir.

(4.4.7) denkleminde

$$\begin{aligned}
H_R &= \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\
H_T &= \int_{t_1}^{t_2} [(u'_1)^2 + (u'_2)^2] \dot{\theta}^2 + \dot{u}'_1{}^2 + \dot{u}'_2{}^2 dt \\
H_{x_1} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\theta}^2 - \dot{h} \dot{u}_1 - h \dot{u}_1 \dot{\theta} - 2\dot{h} u'_1 \dot{\theta}] dt \\
H_{x_2} &= \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\theta}^2 - \dot{h} \dot{u}_2 - h \dot{u}_2 \dot{\theta} - 2\dot{h} u'_2 \dot{\theta}] dt
\end{aligned}$$

ifadeleri yerine yazılırsa

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + x_1H_{x_1} + x_2H_{x_2} \quad (4.4.8)$$

şeklinde elde edilir.

(4.4.8) eylemi, t zaman parametresine bağlı ifade edilirse, aranan X_0 noktasının koordinatları minimal eylem prensibi yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanır.

(4.4.8) denkleminin X e göre türevi alınır ve sınıfa eşitlenirse,

$$\left. \frac{\partial 2S}{\partial X} \right|_{X_0} = 0 \quad (4.4.9)$$

elde edilir. (4.4.9) eşitliğini sağlayan noktalar karakteristik noktalardır. Karakteristik noktayı bileşenleri şeklinde elde etmek için (4.4.7) denkleminin x_1 ve x_2 ye göre türevleri alınır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\theta}^2 - \dot{h}u_1 - hu_1 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\theta}] dt \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial 2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2 \dot{\theta}^2 - \dot{h}u_2 - hu_2 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_2 \dot{\theta}] dt \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

elde edilir.

Hareketli düzlemin X noktasının aksine, X_0 noktası integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. Bu denklemler sıfıra eşitlenir ve karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = - \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_1 \dot{\theta}^2 - \dot{h}u_1 - hu_1 \dot{\theta} - 2\dot{h}u'_1 \dot{\theta}] dt}{2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\theta}^2 + \dot{h}^2) dt} = - \frac{H_{x_1}}{2H_R}$$

ve

$$x_2 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} [-2hu'_2\dot{\theta}^2 - h\ddot{u}_2 - h\dot{u}_2\dot{\theta} - 2h\dot{u}'_2\dot{\theta}]dt}{2\int_{t_1}^{t_2} (h^2\dot{\theta}^2 + \dot{h}^2)dt} = -\frac{H_{x_2}}{2H_R}$$

olarak bulunur. Ayrıca X_0 noktasının minimal nokta olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2} \int \dot{\theta}^2 dt = \frac{1}{2} I H_R$$

ifadesi her zaman 0 dan büyük olduğundan X_0 bir karakteristik noktadır.

Karakteristik noktanın bileşenleri $2S(x_1, x_2)$ de yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R} \right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R} \right)^2 \right] H_R + H_T - \frac{H_{x_1}}{H_R} H_{x_1} - \frac{H_{x_2}}{H_R} H_{x_2}$$

bulunur. Buradan da minimal eylem

$$2S_0(t_1, t_2) = H_T(t_1, t_2)$$

olarak ifade edilir.

4.5. Holditch Teoremi

Teorem: k, E' sabit düzleminde bir oval (kapalı dışbükey bir eğri) ve OQ , q sabit uzunluğunda kiriş olsun. Varsayalım ki bu kiriş X noktası tarafından x ve y uzunluğunda parçalara bölünsün. E/E' kapalı düzlemsel homotetik hareketi boyunca, eğer OQ kirişi k ovali etrafında bir turunu tamamlarsa burada x, y ve h parametrelerine bağlı X noktası k ovali ile kapalı eğri arasını çizer. Burada $h, E/E'$ homotetik hareketinin homotetik ölçeğidir.

İspat: OQ , e_1 eksen yönünde ve $O, \{O; e_1, e_2\}$ dik koordinat sisteminin başlangıç noktası olsun. O halde $X = (x, 0)$ ve $Q = (q, 0)$ noktalarını elde ederiz. X noktasının yörünge alanı için dönme sayısı $\nu = 1$ olduğundan Steiner alan formülünden

$$f_x = \pi h^2(t_0)[x^2 - 2s_1x] + f_o = x\mu_1 \quad (4.5.1)$$

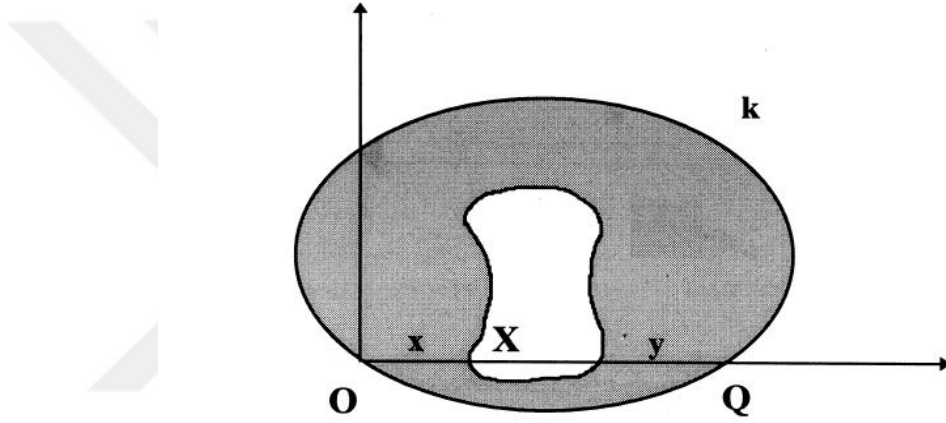
elde ederiz.

Burada f_o , k ovalinin alanı ile O noktasının çizdiği alanı ifade ediyor.

O ve Q noktalarının çizdiği alan ile k ovalinin alanı aynı olduğundan ve özel olarak $X = Q = (q, 0)$ alınırsa (4.5.1) eşitliğinden

$$f_Q = f_o = \pi h^2(t_0)[q^2 - 2s_1q] + f_o + q\mu_1 \quad (4.5.2)$$

elde ederiz.



Şekil 4.1. Holditch Halkası

(4.5.2) eşitliğinden

$$\{\pi h^2(t_0)(q - 2s_1) + \mu_1\}q = 0 \quad (4.5.3)$$

elde edilir. Eğer bu ifadede s_1 çekilip (4.5.1) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$f_x = \pi h^2(t_0)[x^2 - qx] + f_o$$

elde edilir.

Eğer bu ifadede X noktasının yörünge alanı için $q = x + y$ yazarsak

$$f_x = f_o - h^2(t_0)\pi xy$$

elde ederiz.

F , X noktasının çizdiği kapalı yörünge eğrisi ve k ovali arasındaki alan olsun. O halde

$$F = f_x - f_o = h^2(t_0)\pi xy$$

elde ederiz. Bu durumda teoremin ispatı tamamlanır.

Özel Durum: $h(t) \equiv 1$ olması özel durumuda Müller tarafından ifade edilen

$$F = \pi xy$$

eşitliğini elde ederiz (Holditch, 1858).

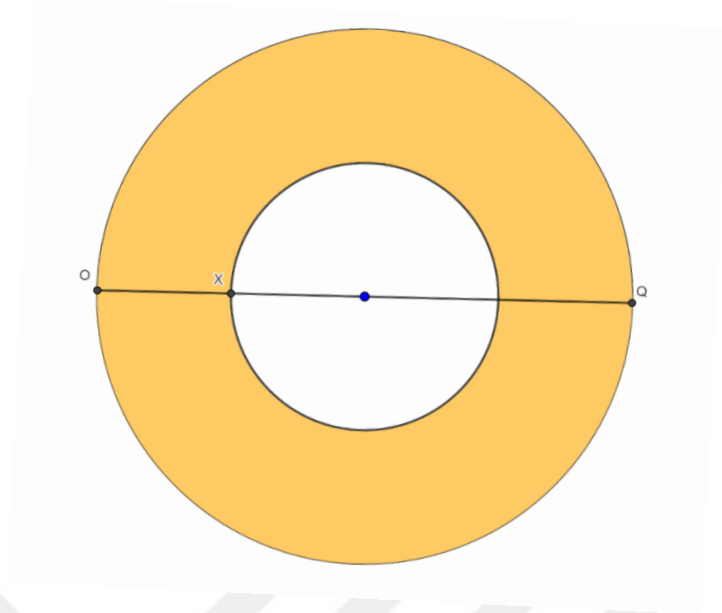
4.5.1. Çember üzerine Holditch Teoremi uygulaması

k , sabit öklid koordinat düzleminde r yarıçaplı bir çember ve $OQ = q = r$ sabit uzunluğunda çember üzerinde giriş olsun. Varsayalımki bu giriş X noktası tarafından x ve y uzunluğunda parçalara bölünsün. Koordinat düzleminde sabit $x + y$ uzunluklu girişin O ve Q uç noktaları bir k çemberi boyunca bir defa dolandırıldığında, OQ doğru parçası üzerinde tespit edilen X noktası $(\overline{OX} = x, \overline{XQ} = y)$ da x, y ve h parametrelerine bağlı kapalı bir k_x eğrisi çizer. Burada h , homotetik hareketinin homotetik ölçeğidir Bu k çemberi ile k_x eğrisi arasında kalan “Holditch Halkası”nın F yüzey alanı,

$$F = \pi xy$$

dir. Burada F yüzey alanı, sadece X noktasının OQ doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklığına bağlı olup, k ile k_x eğrilerinden ve hareketten bağımsızdır.

OQ , x eksen yönünde ve O , $\{O; x, y\}$ dik koordinat sisteminin başlangıç noktası olsun. O halde $X = (x, 0)$ ve $Q = (q, 0)$ noktalarını elde ederiz.



Şekil 4.2. Çember üzerine Holditch Teoremi uygulaması

(Şekil 4.2.) de $OX = x$, $XQ = y$ ve $q = x + y$ ile ifade edilen $r_1 = \frac{x+y}{2}$ yarıçaplı k çemberi ile X noktasının çizdiği kapalı yörünge eğrisi $r_2 = \frac{y-x}{2}$ yarıçaplı k_x çemberinin arasındaki alanı hesaplırsak;

$f_O = f_Q$ çemberin alanı

$$f_Q = f_O = \pi h^2(t_0) \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$$

ve f_X , X noktasının çizdiği çemberin alanı

$$f_X = \pi h^2(t_0) \left(\frac{y-x}{2} \right)^2$$

olur.

F , X noktasının çizdiği kapalı yörünge eğrisi k_x ve k çemberi arasındaki alan olmak üzere,

$$F = f_X - f_O$$

$$F = \pi h^2(t_0) \left(\frac{y-x}{2} \right)^2 - \pi h^2(t_0) \left(\frac{x+y}{2} \right)^2$$

$$F = \pi h^2(t_0)xy$$

elde ederiz. Bu durumda Öklid düzleminde verilen k çemberi için Holditch Teoreminin ispatı tamamlanır.

$h(t) \equiv 1$ olması özel durumuda Müller tarafından ifade edilen

$$F = \pi xy$$

eşitliğini elde ederiz.

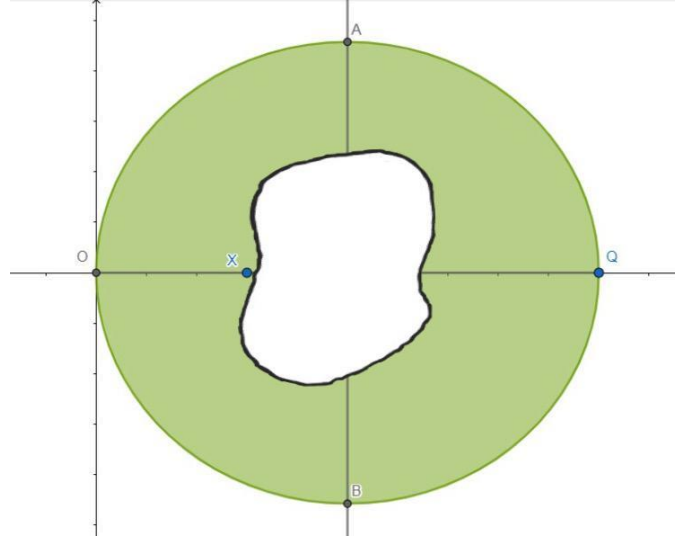
4.5.2. Elips üzerine Holditch Teoremi uygulaması

k , sabit öklid koordinat düzleminde $r_1 = 2a$ ve $r_2 = 2b$ yarıçaplı bir elips ve $OQ = q = 2a$ sabit uzunluğunda elips üzerinde kiriş olsun. Varsayalım ki bu kiriş X noktası tarafından x ve y uzunluğunda parçalara bölünsün. Koordinat düzleminde sabit $x + y$ uzunluklu kirişin O ve Q uç noktaları k elipsi boyunca bir defa dolandırıldığında, OQ doğru parçası üzerinde tespit edilen X noktası ($\overline{OX} = x$, $\overline{XQ} = y$) da x, y ve h parametrelerine bağlı kapalı bir k_x eğrisi çizer. Burada h , homotetik hareketinin homotetik ölçeğidir. Bu k elipsi ile k_x eğrisi arasında kalan “Holditch Halkası”nın F yüzey alanı,

$$F = \pi xy$$

dir. Burada F yüzey alanı, sadece X noktasının OQ doğru parçasının uç noktalarına olan uzaklığına bağlı olup k ile k_x eğrilerinden ve hareketten bağımsızdır.

OQ, x eksen yönünde ve $O, \{O; x, y\}$ dik koordinat sisteminin başlangıç noktası olsun. O halde $X = (x, 0)$ ve $Q = (q, 0)$ noktalarını elde ederiz.



Şekil 4.3. Elips üzerine Holditch Teoremi uygulaması

(Şekil 4.3.) de $OX = x$, $XQ = y$ ve $q = x + y = 2a$ ile ifade edilen $r_1 = a$, $r_2 = 2$ yarıçaplı k elipsi ile X noktasının çizdiği k_x kapalı yörünge eğrisi arasındaki alanı hesaplarsak;

$f_O = f_Q$ elipsin alanı

$$f_Q = f_O = \pi h^2(t_0)ab$$

ve f_X , X noktasının çizdiği k_x eğrisinin alanı Steiner alan formülünden

$$f_x = \pi h^2(t_0)[x^2 - qx] + f_O$$

$$f_x = \pi h^2(t_0)[x^2 - 2ax] + \pi h^2(t_0)ab$$

$$f_x = \pi h^2(t_0)[x^2 - 2ax + ab]$$

olur.

F , X noktasının çizdiği k_x kapalı yörünge eğrisi ve k elipsi arasındaki alan olmak üzere,

$$F = f_x - f_O$$

$$F = \pi h^2(t_0)[x^2 - 2ax + ab] - \pi h^2(t_0)ab$$

$$F = \pi h^2(t_0)[x^2 - 2ax]$$

$$F = \pi h^2(t_0)[x(x - 2a)]$$

$$F = \pi h^2(t_0)xy$$

elde ederiz. Bu durumda Öklid düzleminde verilen k elipsi için Holditch Teoreminin ispatı tamamlanır.

$h(t) \equiv 1$ olması özel durumuda Müller tarafından ifade edilen

$$F = \pi xy$$

eşitliğini elde ederiz.



BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Sonuç olarak bu çalışmada Dathe ve Gezzi tarafından düzlemsel hareketler için ifade edilen en az eylem prensibi, 1 –parametrelili düzlemsel homotetik hareket altında bazı özel sikloid tipi eğrileri için ifade edilmiştir. Ek olarak Holditch tarafından ifade edilen Holditch Teoremi çember ve elips kapalı eğrileri için ifade ve ispat edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar ters homotetik hareket ve diğer hareket türleri altında incelenebilir. Holditch Teoremi de farklı eğriler üzerine uygulanıp ifade edilebilir.

KAYNAKLAR

- Akar, M. 2012. Düzlemsel homotetik hareketler altında kapalı yörünge eğrisinin kutupsal atalet momenti için Holditch-tipi teoremler. İstanbul Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Doktora Tezi.
- Beşergil, B. 2019, 9 Ağustos. <https://bilsenbesergil.blogspot.com/p/en-az-eylem-prensibi-en-az-eylem.html> Erişim Tarihi: 21.03.2021.
- Blaschke, W., & Müller, H. R. 1956. *Ebene Kinematik*. München.
- Dathe, H., Gezzi R., Kubein-Meesenburd D. and Nagerl, H. 2015. Characteristic Point and Cycles in Planar Kinematics with Applications to Human Gait. *Acta Bioengineering and Biomechanics*. 17, No.1.
- Hacisalihoglu, H. H. 1971. On the rolling of one curve or surface upon another. *Royal Irish Academy. Dublin*.
- Hacisalihoglu, H. H. 1998. Dönüşümler ve Geometrilere, *Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*.
- Hacisalihoglu, H. H., Özdemir, M. 1998. Düzlemsel kinematikte homotetik hareketler için Steiner formülü. *Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dergisi*. 1, Sayı 1.
- Holditch, H. 1858. "Geometrical Theorem", *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2, 38-39.
- Kasap, Z. 2014. Weyl manifoldları üzerinde euler-lagrange ve Hamilton hareket denklemlerinin analizi. Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Doktora Tezi.
- Müller, H. R., Egesoy, E. ve Oruç, M. 1963. *Kinematik dersleri*. Ankara Üniversitesi.
- Müller, H. R. 1978. Über Integrale in der Kinematik. *Archiv der Mathematik*. 1, 18-22.
- Müller, H. R. 1979. Räumliche Gegenstücke zum Satz von Holditch, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. 30, 54-61.
- Müller, H. R. 1980. Erweiterung des Satzes von Holditch für geschlossene Raumkurven, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. 31, 129-135.
- Müller, H. R. 1982. Über den Rauminhalt Kinematisch Erzeugter, Geschlossener Flächen. *Archiv der Mathematik*. 38, 43-49.
- Müller, H. R. 1987. Ein Holditch Satz für Flächentücke im R_3 , *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft*. 39, 37-42.

- Özdemir, M. 2017. Analitik Geometri. Altın Nokta Yayınevi. 4, 245-254.
- Steiner, J. 1881. Gesammelte Werke I, II, Reimer.
- Palamutoğlu, M. 1994 Tasarı Geometri Eşlenik Dik İzdüşüm Prensipleri. Erciyes Üniversitesi Yayınları, Kayseri.
- Whitman, E. A. 1943. Some Historical Notes on the Cycloid. The American Mathematical Monthly. 50(5), 309-31.



ÖZGEÇMİŞ

Elvan Korkmaz ilk, orta ve lise eğitimini Rize’de tamamladı. 2014 yılında Rize Pazar Anadolu Öğretmen Lisesi’nden mezun oldu. 2014 yılında başladığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü’nü 2018 yılında bitirdi. 2019 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

