

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CESÀRO ve RİESZ TOPLANABİLME
METOTLARININ DENKLİĞİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Feridun MENGİ

DENİZLİ - 1997

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CESÁRO VE RİESZ TOPLANABİLME METOTLARININ DENKLİĞİ

Feridun MENGİ

Tez Savunma Sınavı Tarihi 16.10.1997

Tezin Danışmanı : Prof.Dr.M.Ali SARIGÖL

HAZİRAN 1997

DENİZLİ

Feridun MENGİ'nin YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı "Cesáro ve Riesz Toplanabilme Metotlarının Denkliği" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

...../...../1997

Üye: Prof.Dr.M.Ali SARIGÖL

Ali Sarigöl

Üye: Yrd.Doç.Dr.Şevket CİVELEK

Ş. Civelek

Üye: Yrd.Doç.Dr.Şahin CERAN

Ş. Ceran

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun18.08.1997..... gün
ve ...21/10..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

H. Rende

Prof.Dr.Hikmet RENDE

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programında yapılmıştır.

Toplanabilme metotları içerisinde Cesáro ve Riesz Toplanabilme Metotlarının Denkliği konusu üzerinde durulmuştur.

Bu çalışma konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam Prof.Dr.M.Ali SARIGÖL'e ve Pamukkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümündeki tüm öğretim elemanı kardeşlerime teşekkür ederim.

Feridun MENGİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

1- TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
2- TOPLANABİLME METODU İLE TANIMLANAN BAZI DİZİ UZAYLARININ LİNEER VE TOPOLOJİK ÖZELLİKLERİ	8
3- $ C, l _k$ ve $ \bar{N}, p_n _k$ TOPLANABİLME METODUNUN DENKLİĞİ	16
4- KAYNAKLAR	35

ÖZET

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, ikinci ve üçüncü bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremler ifade edildi.

İkinci bölümde belli toplanabilme metodu ile tanımlanan bazı dizi uzaylarının lineer ve topolojik özellikleri verildi.

Üçüncü bölümde $|C, 1|_k$ ve $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme metotlarının denk olması için gerekli ve yeter şartlar detaylı olarak incelendi.

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, some definitions and theorems that will be used in the other chapters are stated.

In the second chapter, properties of linear and topological of some sequence spaces defined by certain summability methods are given.

In the third chapter, necessary and sufficient conditions for the summability methods $|C,1|_k$ ve $|\overline{N},p_n|_k$ are examined in detail.

BİRİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde bundan sonraki bölümlerde kullanacağımız temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

TANIM 1.1: $X \neq \emptyset$ bir cümle ve C 'de kompleks sayılar cismini gösterebilirsin. Eğer;

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\cdot : C \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa X cümlesine C üzerinde kompleks lineer uzay denir. $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \lambda$ ve $\mu \in C$;

- 1) $x + y = y + x$
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$
- 3) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.
- 4) $x + (-x) = 0$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır.
- 5) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$
- 6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$
- 7) $\lambda(\mu x) = (\lambda \mu)x$
- 8) $1 \cdot x = x$

TANIM 1.2 : Bir kompleks (veya reel) X lineer uzayı ile $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine bir normlu lineer uzay denir.

- 1) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- 2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \cdot \| x \|^2$
- 3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|^2$

TANIM 1.3 : Normlu bir X lineer uzayında her Cauchy dizisi yakınsaksa yani,
 $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in X$ olmak üzere

$$\|x_n - x_m\| \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty)$$

olduğundan $\|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa X uzayına tamdır denir.

Tam normlanmış bir lineer uzaya da " Banach Uzayı" denir.

TANIM 1.4 : X, Y iki lineer uzay olsun. Bütün λ, μ skalerleri ve $\forall x_1, x_2 \in X$ olmak üzere

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda A(x_1) + \mu A(x_2)$$

şeklinde tanımlanan $A : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna bir lineer dönüşüm denir.

TANIM 1.5 : X ve Y iki normlu uzay ve $A : X \rightarrow Y$ lineer dönüşümü verilmiş olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\|A(x)\| \leq M \cdot \|x\|$$

olacak şekilde bir M sayısı varsa, A 'ya sınırlı Lineer dönüşüm adı verilir. /2/

TANIM 1.6 : Bir X lineer uzayı üzerinde bir $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1) p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

$$2) p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

şartlarını sağlıyorsa p -ye bir yarınormu denir. /4/

TANIM 1.7 : X bir lineer uzay, $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $p > 0$ verilmiş olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(x, \|\cdot\|, p)$ üçlüsüne bir p -normlu uzay denir. /2/

$$1) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$2) \|\lambda x\| = |\lambda|^p \cdot \|x\|$$

$$3) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

TANIM 1.8 : Boş olmayan bir X cümlesi ve X 'in alt cümlelerinin bir T sınıfı verilmiş olsun. Eğer,

$$T_1 : \emptyset \in T \text{ ve } X \in T$$

T_2 : T 'deki herhangi sayıdaki cümlelerin birleşimi T 'dedir.

T_3 : T 'deki sonlu sayıdaki cümlelerin arakesitleri yine T 'dedir.

şartları sağlanıyorsa T 'ye bir topoloji ve (X, T) çiftine de bir topolojik uzay denir. /4/

TANIM 1.9 : X bir topolojik uzay, S 'de X 'in bir alt uzayı olsun. S , hiçbir yerde yoğun olmayan cümlelerin bir bileşimi olarak ifade edilebiliyorsa birinci kategoridendir denir. /6/

Birinci kategoriden olmayan kümeye de ikinci kategoridendir denir.

TANIM 1.10 : X bir topolojik uzay ve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $t \in \mathbb{R}$ $f^{-1}(-\infty, t)$ kümesi yani $\{x | x \in X, f(x) < t\}$ kümesi X 'de açık ise f 'ye X üzerinde üstten yarı süreklilik denir.

$\forall t \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(t, \infty)$, X 'de açık ise f 'ye alttan yarı süreklidir denir. /4/

TEOREM 1.1 : X ikinci kategoriden p -normlu bir uzay olsun. Altta yarısürekli q -yarı normlarının bir $\{q\}$ ailesi F olsun. Ayrıca bir $x \in X$ ve $\forall q \in F$ için

$$q(x) \leq M(x) < \infty$$

sağlansın. Bu takdirde $\forall x \in X$ ve $\forall q \in F$ için

$$q(x) \leq M \|x\|^{1/p}$$

olacak şekilde bir M sayısı mevcuttur. Burada M sayısı x ve q dan bağımsızdır./4/

TANIM 1.11 : F reel veya kompleks sayıların bir cismi ve $v, n = 0, 1, 2, \dots$ için $a_{n,v} \in F$ olmak üzere bir $T = (a_{n,v})$ sonsuz matrisi ve (s_n) dizisi verilmiş olsun. Bu takdirde $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$t_n = \sum_{v=0}^{\infty} a_{nv} s_v \quad \dots(1.1)$$

şeklinde tanımlanan (t_n) dizisine, (s_n) dizisinin T dönüşüm dizisi denir. T 'ye de diziden-diziye bir dönüşüm adı verilir. Bu dönüşümün var olması için (1,1) deki sonsuz serinin her n için yakınsak olması gerekir. /6/

TANIM 1.12 : Bir $T = (a_{mn})$, $m, n = 0, 1, 2, \dots$ matrisi verilmiş olsun. Eğer T matrisi yakınsak her diziyi yakınsak diziye dönüştürüyor ve aynı zamanda limiti koruyorsa, T matrisi regülerdir denir./5/

TANIM 1.13 : Kısmi toplamlar dizisi (s_n) olan bir $\sum a_n$ serisi verilmiş olsun. $\sum a_n$ serisinin veya (s_n) dizisinin

$$a_{n,v} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & v \leq n \\ 0, & v > n \end{cases}$$

ile verilen $T = (a_{n,v})$ matrisi yardımıyla elde edilen

$$(\alpha_n) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n s_v \right) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

dizisine (s_n) dizisinin Cesàro Ortalaması adı verilir ve kısaca $(C,1)$ ile gösterilir.

Cesàro ortalamasının da regüler olduğu bilinmektedir.

TANIM 1.14 : Hepsi birden sıfır olmayan non-negatif reel sayıların bir (p_n) dizisi verilmiş olsun. $p_0 > 0$ için

$$P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty) \quad P_{-1} = p_{-1} = 0$$

olmak üzere

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v \quad (P_n \neq 0) \quad \dots\dots(1.2)$$

şeklinde tanımlanan (t_n) dizisine Riesz Ortalaması ya da Riesz Dönüşümü denir ve kısaca $(\bar{N}, p_n)$ şeklinde gösterilir. Bu ortalama da $\forall n$ için $p_n = 1$ alınarak $(C,1)$ ortalamaya geçilebilir. /6/

Bu dönüşüme karşılık gelen matris elemanları

$$a_{n,v} = \begin{cases} \frac{p_v}{P_n}, v \leq n \\ 0, v > n \end{cases}$$

şeklinde olduğu açıktır.

TEOREM 1.2 : $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $P_n \rightarrow \infty$ olmasıdır. /1/

TANIM 1.15 : $(\alpha_n), (s_n)$ dizisinin Cesáro ortalaması olmak üzere $k \geq 1$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{k-1} |\alpha_n - \alpha_{n-1}|^k < \infty \quad \text{.....(1.3)}$$

ise, $\sum a_n$ serisine k-indisine göre mutlak $(C,1)$ toplanabilir veya kısaca $|C,1|_k$ toplanabilir denir. /3/

Özel olarak $k=1$ alınırsa $|C,1|_k$ metodu $|C,1|$ metoduna indirgenir.

Diğer taraftan $(t_n), (n\alpha_n)$ dizisinin $(C,1)$ ortalamasını göstermek üzere $t'_n = n(\alpha_n - \alpha_{n-1})$ olduğundan (1,3) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t'_n|^k}{n} < \infty$$

şartına dönüşür. /3/

TANIM 1.16 : P ve Q iki toplanabilme metodu olmak üzere eğer P metodu tarafından toplanabilen her seri aynı zamanda Q metodu tarafından da toplanabiliyorsa Q metodu P metodundan daha kuvvetlidir denir ve $P \Rightarrow Q$ şeklinde ifade edilir. Ayrıca her bir metot diğerinden daha kuvvetli ise bu takdirde P ve Q metotlarına denk metotlar denir ve $P \Leftrightarrow Q$ şeklinde gösterilir. /6/

TANIM 1.17 (Hölder Eşitsizliği) : $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun.

Bu takdirde

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

dır. /4/

TANIM 1.18 (Minkowski Eşitsizliği) : $p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}$$

dir./4/

İKİNCİ BÖLÜM

Bu bölümde toplanabilme metotları yardımı ile tanımlanan bazı uzayların lineer ve topolojik özelliklerini inceleyeceğiz.

Önce Sarıgöl'e ait olan aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edelim.

LEMMA 2.1 : Kabul edelim ki $k > 0$, $p_n > 0$ ve $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ olsun. Bu takdirde her $v \geq 1$ için sadece k 'ya bağlı fakat (p_n) dizisinden bağımsız olan ve

$$\frac{M}{P_{v-1}^k} \leq \sum_{n=v}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \leq \frac{N}{P_{n-1}^k} \quad (2.1)$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde pozitif M ve N sabitleri vardır.

İSPAT : $f(x) = \frac{(1-x^{1/k})}{1-x}$ şeklinde tanımlanan $f : [0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun sürekli ve pozitif olduğu açıktır. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{k}$$

dır. Dolayısıyla bu aralıkta sınırlıdır. Yani $\forall x \in [0,1)$ için

$$M \leq f(x) \leq N \quad (2.2)$$

olacak şekilde M ve N sabitleri vardır. Şimdi (2.2) de

$$x = \left(\frac{P_{n-1}}{P_n} \right)^k = \left(1 - \frac{p_n}{P_n} \right)^k \text{ koyalım. Bu takdirde}$$

$$x^{1/k} = \left(1 - \frac{p_n}{P_n} \right) \text{ olacağından}$$

$$f(x) = \left(\frac{1 - (1 - \frac{p_n}{P_n})}{1 - (1 - \frac{p_n}{P_n})^k} \right) \quad (P_n - p_n = P_{n-1})$$

$$= \left(\frac{(\frac{p_n}{P_n})}{\frac{P_n^k - (P_n - p_n)^k}{P_n^k}} \right)$$

$$= \frac{p_n P_n^k}{P_n (P_n^k - P_{n-1}^k)}$$

olur. Böylece (2.2) den dolayı

$$M \leq \frac{p_n P_n^k}{P_n (P_n^k - P_{n-1}^k)} \leq N$$

ve

$$\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \geq 0$$

eşitsizliği nedeniyle

$$M \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right) \leq \frac{p_n P_n^k}{P_n (P_n^k - P_{n-1}^k)} \cdot \frac{P_n^k - P_{n-1}^k}{P_n^k \cdot P_{n-1}^k} \leq N \cdot \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right)$$

yani

$$M \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right) \leq \frac{P_n}{P_n \cdot P_{n-1}^k} \cdot \leq N \cdot \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right)$$

elde edilir. Buradan da

$$M \sum_{n=v}^m \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right) \leq \sum_{n=v}^m \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \leq N \cdot \sum_{n=v}^m \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right)$$

çıkar. Böylece

$$\sum_{n=v}^{\infty} \left(\frac{1}{P_{n-1}^k} - \frac{1}{P_n^k} \right) = \frac{1}{P_{v-1}^k}$$

eşitliği gözönüne alınarak, son eşitsizlikte $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse, $v=1,2,\dots$ için

$$\frac{M}{P_{v-1}^k} \leq \sum_{n=v}^{\infty} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \leq \frac{N}{P_{v-1}^k}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

TANIM 2.1: $k \geq 1$ olmak üzere sırasıyla $|C, 1|_k$ ve $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilen serilerin kümesini $|C_1|_k$ ve $|\bar{N}_p|_k$ ile gösterelim.

Buna göre,

$$|C_1|_k = \left\{ x = (x_i) : \sum_i x_i \text{ serisi } |C_1|_k \text{ toplanabilirdir.} \right\}$$

ve

$$|\bar{N}_p|_k = \left\{ x = (x_i) : \sum_i x_i \text{ serisi } |\bar{N}, p_n|_k \text{ toplanabilirdir.} \right\}$$

olduğu açıktır.

LEMMA 2.2: $k \geq 1$ olsun. Bu takdirde $|C_1|_k$ ve $\left|\overline{N}_p\right|_k$ sırasıyla

$$\|x\|_1 = \left\{ |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i \right|^k \right\}^{1/k} \quad (2.3)$$

$$\|x\|_2 = \left\{ |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{P_n}{P_n \cdot P_{n-1}} \sum_{i=1}^n P_{i-1} \cdot x_i \right|^k \right\}^{1/k} \quad (2.4)$$

normlarına göre normlu lineer uzaylardır.

İSPAT : Bu uzayların dizilerin bilinen toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre lineer uzay oldukları açıktır. Şimdi.

$$\| \cdot \|_1 : |C_1|_k \rightarrow \mathbb{R} \quad (k \geq 1)$$

fonksiyonunun bir norm fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$x \in |C_1|_k$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(i) \quad x = \theta \Leftrightarrow \|x\|_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i^k \right\}^{1/k} = 0$$

$$\Leftrightarrow |x_0|^k = 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i^k = 0$$

$$\Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ve } \forall_n \text{ için } \sum_{i=1}^n i \cdot x_i = 0 \text{ dır. Dolayısıyla}$$

$$n=1 \Rightarrow 1 \cdot x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$n=2 \Rightarrow 1 \cdot x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

.....

bulunur. Böylece $x = \theta \Leftrightarrow \|x\|_1 = 0$ olduğu görülür.

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \|\lambda \mathbf{x}_1\| &= \left\{ |\lambda x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \lambda x_i \right|^k \right\}^{1/k} \\
&= \left\{ |\lambda|^k \cdot |x_0|^k + |\lambda|^k \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i \right|^k \right\}^{1/k} \\
&= |\lambda| \left\{ |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i \right|^k \right\}^{1/k} \\
&= |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|_1
\end{aligned}$$

(iii) Minkowski eşitsizliğini gözönüne alarak

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_1 &= \left\{ |x_0 + y_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot (x_i + y_i) \right|^k \right\}^{1/k} \\
&= \left\{ |x_0 + y_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i + \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot y_i \right|^k \right\}^{1/k} \\
&\leq \left\{ \underbrace{(|x_0| + |y_0|)}_{a_0 + b_0}^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\left| \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i \right|}_{a_n} + \underbrace{\left| \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot y_i \right|}_{b_n} \right)^k \right\}^{1/k} \\
&= \left\{ (a_0 + b_0)^k + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^k \right\}^{1/k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)^k \right)^{1/k} \\
&\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k \right)^{1/k} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n^k \right)^{1/k} \\
&= \left(a_0^k + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k \right)^{1/k} + \left(b_0^k + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^k \right)^{1/k} \\
&= \left\{ |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot x_i \right|^k \right\}^{1/k} + \left\{ |y_0|^k + \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{n^{\frac{k-1}{k}}}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i \cdot y_i \right|^k \right\}^{1/k} \\
&= \|x\|_1 + \|y\|_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde $\|\cdot\|$ fonksiyonu $|C_1|_k$ lineer uzayı üzerinde bir normdur. Yukarıdaki yöntem izlenerek $\|x\|_2$ 'nin $|\overline{N}_p|_k$ lineer uzayı üzerinde bir norm olduğu kolayca gösterilebilir.

LEMMA 2.3 : $|C_1|_k$, $|\overline{N}_p|_k$ uzayları $k \geq 1$ olmak üzere sırasıyla $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına göre tamdır. Yani bu uzaylar Banach uzaylarıdır.

İSPAT : $|C_1|_k$ 'nin $\|\cdot\|_1$ normuna göre tam olduğunu gösterelim. Bunun için $|C_1|_k$ uzayındaki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$(x^s) \in |C_1|_k$ bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde

$$\|x^s - x^t\|_1 \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty)$$

diğer bir ifade $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\|x^s - x^t\|_1 < \varepsilon \quad (s, t > t_0)$$

kalır.

Demek ki $s, t > t_0$ için

$$= \|x^s - x^t\|_1 = [\|x_0^s - x_0^t\|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n (x_i^s - x_i^t)^k \right|^{1/k}]^{1/k} < \varepsilon$$

dır. Buradan da $i = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\|x_i^s - x_i^t\| \rightarrow 0 \quad (s, t \rightarrow \infty)$$

bulunur. Bu ise her bir i için $(x_i^s)_{s=0}^{\infty}$ dizisinin $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ de bir Cauchy olması demektir. $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ nin tam olması nedeni ile

$$x_i^s \rightarrow x_i \in \mathbb{R} \quad (s \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde x_i mevcuttur. Yani

$$|x_i^s - x_i| \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow \infty)$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, $s, t > t_0$ için

$$[\|x_0^s - x_0^t\|^k + \sum_{n=1}^N n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n (x_i^s - x_i^t)^k \right|^{1/k}$$

$$\leq [\|x_0^s - x_0^t\|^k + \sum_{n=1}^N n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n (x_i^s - x_i^t)^k \right|^{1/k}$$

$$= \|x^s - x^t\| < \varepsilon$$

kalır.

t üzerinden limit alınırsa

$$[|x_0^s - x_0|^k + \sum_{n=1}^N n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i (x_i^s - x_i)^k \right|^{1/k}]^{1/k} \leq \varepsilon$$

elde edilir. Şimdi de $N \rightarrow \infty$ yapılırsa;

$$[|x_0^s - x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i (x_i^s - x_i)^k \right|^{1/k}]^{1/k} \leq \varepsilon \quad \dots(2.5)$$

yani

$$\|x^s - x\| \leq \varepsilon \quad (s > t_0)$$

bulunur. Demekki $x^s \rightarrow x$ ($s \rightarrow \infty$) dir. Şimdi de $x \in |C_1|_k$ olduğunu görelim;

$s > t_0$ için (2,5) den

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n \cdot (n+1)} \sum_{i=1}^n i (x_i^s - x_i)^k \right|^{1/k} < \infty$$

olup, dolayısıyla $(x^s - x) \in |C_1|_k$ dir. Böylece $|C_1|_k$ 'nin lineer uzay olma özelliği ve

$$x = (x - x^s) + x^s$$

eşitliği dikkate alınarak $x \in |C_1|_k$ olduğu açıkça görülür. Bu da ispatı tamamlar.

III.BÖLÜM

Bu bölümde $|C,1|_k$ ve $|\bar{N}_p|_k$ toplanabilme metotlarından birinin diğerinden daha kuvvetli olması için Bor / 1,2 / tarafından verilen yeter şartları ve daha sonrada aynı sonuçların sağlanması için gerek ve yeter olan Sarıgöl /7/ tarafından elde edilen şartları içeren teoremleri inceleyeceğiz.

Aşağıda sırasıyla iki teorem Bor / 1,2 / 'a aittir.

TEOREM 3.1: (p_n)

(i) $np_n=O(P_n)$

(ii) $P_n=O(np_n)$

şartları sağlanacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

Bu takdirde $|C,1|_k \Rightarrow |\bar{N},p_n|_k$ ($k \geq 1$) dir.

İSPAT: $\sum a_n$ serisinin Riesz ortalamasını T_n yani

$$T_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v S_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) a_v$$

dersek

$$T_n - T_{n-1} = \frac{p_n}{P_n - P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} a_v = \frac{p_n}{P_n - P_{n-1}} \sum_{v=1}^n v \cdot a_v P_{v-1} (v)^{-1}$$

elde edilir.

Abel kısmi toplamısından

$$\begin{aligned}
 T_n - T_{n-1} &= -p_n (P_n \cdot P_{n-1})^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) v^{-1} p_v t_v \\
 &\quad + p_n (P_n \cdot P_{n-1})^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} p_v t_v v^{-1} + (n+1) p_n t_n (n P_n)^{-1} \\
 &= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Minkowski eşitsizliğinden dolayı teoremin ispatı için $r=1,2,3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |T_{n,r}|^k < \infty$$

göstermek yeterlidir. Hölder eşitsizliğini uygularsak, (i) nedeniyle

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v |t_v| \right\}^k \\
 &= 0(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v |t_v|^k x \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v \right\}^{k-1} \\
 &= 0(1) \sum_{v=1}^m p_v |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \\
 &= 0(1) \sum_{v=1}^m \frac{p_v}{P_v} |t_v|^k \\
 &= 0(1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |t_v|^k \\
 &= 0(1) \quad (m \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer işlemler yapılarak

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k = 0(1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |t_v|^k = 0(1) \quad (m \rightarrow \infty)$$

ve

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k = 0(1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{n} |t_n|^k = 0(1) \quad (m \rightarrow \infty)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Benzer ispat metodu kullanılarak aşağıdaki teoremin ispatı kolayca verilebilir.

TEOREM 3.2: (P_n)

$$(i) \quad np_n = 0 \quad (P_n)$$

$$(ii) \quad P_n = 0 \quad (np_n)$$

şartlarını sağlayacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Bu takdirde

$$|\bar{N}, p_n|_k \Rightarrow |C, 1|_k \quad (k \geq 1) \text{ dir.}$$

Şimdi de yukarıdaki teoremlerin tersini veren teoremleri inceleyelim.

TEOREM 3.3: Eğer $|C, 1|_k \Rightarrow |\bar{N}, p_n|_k$ ise bu takdirde $np_n = 0 \quad (P_n) \quad (k \geq 1)$ 'dir.

Bu teoremin ispatını geçmeden önce aşağıdaki uyarıları yapalım;

Bu teoremde sorulması gereken soru teorem 2.1'in (ii) şartının sağlanıp

sağlanmadığıdır. Bunu görmek için (p_n) dizisini

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & n = 2k \\ 1, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde

$$\frac{p_{2n+1}}{2n+1} = \frac{\sum_{k=0}^n p_{2k} + \sum_{k=0}^n p_{2k+1}}{2n+1} = \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + (n+1)}{2n+1}$$

$$\frac{p_{2n+1}}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

ve benzer şekilde

$$\frac{p_{2n}}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1} + n}{2n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olur. Dolayısıyla $P_n \neq 0$ ($n p_n$) dir. Öte yandan bu seçtiğimiz özel (p_n) dizisi için $\sum x_k$ serisinin $|\bar{N}, p_n|$ ortalamasını T_n ve $(n x_n)$ dizisinin $(C, 1)$ ortalamasını da t_n ile gösterirsek

$$\begin{aligned} T_n - T_{n-1} &= -p_n (P_n P_{n-1})^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) v^{-1} p_v t_v + p_n (P_n P_{n-1})^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} P_v v^{-1} t_v \\ &\quad + n(n+1) p_n t_n (n P_n)^{-1} \\ &= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3} \end{aligned}$$

olur. Minkowski eşitsizliği nedeniyle, $|C, 1|_k \Rightarrow |\bar{N}, p_n|_k$ önermesinin doğruluğu için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k < \infty \quad (r=1,2,3)$$

nın ispatlanması yeterlidir. Ancak $r=1,3$ için $np_n=0(P_n)$ şartı altında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k < \infty$$

olduğu bilindiğine göre (Bor [1])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k < \infty$$

nın sağlandığını göstermek yeterlidir. Şimdi

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| p_n (P_n P_{n-1})^{-1} \sum_{v=1}^{n-1} P_v v^{-1} t_v \right|^k \\ &= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n^k P_n^{-1}}{P_n^k P_n^{-1}} \frac{P_n^k}{P_n^k P_{n-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{n-1} P_v v^{-1} t_v \right|^k \\ &= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}^k} \left| \sum_{v=1}^{n-1} P_v v^{-1} t_v \right|^k \end{aligned} \quad \dots(3.1)$$

dır. Öte yandan Hölder eşitsizliği nedeniyle

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{v} |t_v| \right\}^p &= \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{v} \right)^{1-\frac{1}{p}} \cdot \left(\frac{P_v}{v} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |t_v| \right\}^p \\ &\leq \left(\sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{v} \right)^{q-\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \cdot \left(\sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{v} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot |t_v| \right)^p \end{aligned}$$

$$\text{dir. } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow q - \frac{q}{p} = 1 \text{ ve } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \Rightarrow p-1 = \frac{p}{q}$$

olduğundan

$$\left(\sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{v} |t_v| \right)^p \leq \left(\sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{v} \right)^{p-1} \left(\sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{v} |t_v|^p \right)$$

elde edilir. Şu halde

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum \frac{P_v}{v} |t_v|^k \left\{ \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_v}{v} \right\}^{k-1}$$

yazılabilir. Bununla birlikte $\frac{P_v}{v} \rightarrow 1$ ($v \rightarrow \infty$) olduğundan

$$\frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^n \frac{P_v}{v} = \left(\frac{n}{P_n} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \frac{P_v}{v} \right) \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

olup dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_{n,2}|^k &= 0 \quad (1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{v} |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \\ &= 0 \quad (1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{v} |t_v|^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{1}{P_{n-1}} - \frac{1}{P_n} \right) \\ &= 0 \quad (1) \sum_{v=1}^m \frac{P_v}{v} |t_v|^k \frac{1}{P_v} \\ &= 0 \quad (1) \sum_{v=1}^m \frac{1}{v} |t_v|^k \\ &= 0 \quad (1) \quad (m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem (3.1) in (ii) şartı gerekli değildir.

TEOREM 3.2 nin ispatı :

$(u_n(x))$ ve $(t_n(x))$ dizileri, $x = \sum x_i$ serisinin sırasıyla $(C,1)$ ve $(\bar{N}, p_n)$ ortalamaları olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
 u_n(x) &= \sum_{v=0}^n \frac{s_v}{n+1} = \sum_{v=0}^n \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^v x_i \\
 &= \frac{1}{n+1} [x_0 + (x_0 + x_1) + \dots + (x_0 + x_1 + \dots + x_n)] \\
 &= \frac{1}{n+1} [(n+1)x_0 + nx_1 + \dots + x_n] \\
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n (n+1-v) x_v
 \end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$u_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x) \quad (u_0(x) = u_0(x) = x_0)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^n (n+1-v) x_v - \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} (n-v) x_v \\
 &= \frac{x_n}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n-1} (n+1-v) x_v - \frac{1}{n} \sum_{v=0}^{n-1} (n-v) x_v
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \left[n \cdot \sum_{v=0}^{n-1} (n+1-v) x_v - (n+1) \sum_{v=0}^{n-1} (n-v) x_v \right]$$

$$= \frac{x_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} \sum_{v=0}^{n-1} v x_v$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{v=0}^n v x_v$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$t_n(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n p_v \sum_{i=0}^v x_i$$

$$= \frac{1}{P_n} \left[- \sum_{v=0}^{n-1} P_{v-1} x_v + P_n s_n \right]$$

$$= \frac{1}{P_n} \left[- \sum_{v=0}^{n-1} P_{v-1} x_v + P_n \sum_{v=0}^n x_v \right]$$

$$= \frac{1}{P_n} \left[- \sum_{v=0}^n P_{v-1} x_v + P_n \sum_{v=0}^n x_v \right]$$

$$= \frac{1}{P_n} \left[- \sum_{v=0}^n P_{v-1} x_v + P_n \sum_{v=1}^n x_v + P_n x_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{P_n} \left[\sum_{v=1}^n (P_n - P_{v-1}) x_v + P_n x_0 \right] \\
&= \frac{1}{P_n} \left[\sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) x_v \right] \quad (P_{-1} = 0)
\end{aligned}$$

ve $n \geq 1$ için

$$T_n(x) = t_n(x) - t_{n-1}(x) \quad (T_0(x) = t_0(x) = x_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^n (P_n - P_{v-1}) x_v - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} (P_{n-1} - P_{v-1}) x_v \\
&= \frac{P_n x_n}{P_n} + \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n-1} (P_n - P_{v-1}) x_v - \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} (P_{n-1} - P_{v-1}) x_v \\
&= \frac{P_n x_n}{P_n} + \frac{1}{P_n P_{n-1}} \left[P_{n-1} \sum_{v=0}^{n-1} (P_n - P_{v-1}) x_v - P_n \sum_{v=0}^{n-1} (P_{n-1} - P_{v-1}) x_v \right] \\
&= \frac{P_n x_n}{P_n} + \frac{1}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} P_n P_{v-1} x_v \\
&= \frac{P_{n-1} P_n x_n}{P_n P_{n-1}} + \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n-1} P_{v-1} x_v
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p_n}{p_n p_{n-1}} + \left[p_{n-1} x_n + \sum_{v=0}^{n-1} p_{v-1} x_v \right] \\
&= \frac{p_n}{p_n p_{n-1}} \sum_{v=0}^n p_{v-1} x_v \quad (T_0(x) = x_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\sum x_i$ serisinin $|C, 1|_k$ ve $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirliği sırasıyla

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n(x)|^k$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_n(x)|^k$$

serilerinin yakınsaklıklarına indirgenmiş olur.

Şimdi kabul edelim ki $|C, 1|_k \Rightarrow |\bar{N}, p_n|_k$ olsun. Yani

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n(x)|^k < \infty \text{ olduğunda } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_n(x)|^k < \infty \text{ olsun. Her } n \text{ için}$$

$$T_n(x) = \frac{p_n}{p_n p_{n-1}} \sum_{v=1}^n p_{v-1} x_v$$

şeklinde tanımlanan $T_n : |C_1|_k \rightarrow C$ dönüşümünü göz önüne alalım. Bu bir sınırlı lineer fonksiyoneldir. Gerçekten lineerliği açıktır. Sınırlılığı için ise her bir n için

$$|x_v| \leq 2^{v^{1/k}} \|x\|$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} x_v \right| &\leq \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^n P_{v-1} |x_v| \\
&\leq \left\{ \frac{P_n}{P_n P_{n-1}} \underbrace{\sum_{v=1}^n 2^{v^{1/k}} P_{v-1}}_{M_n} \right\} \cdot \|x\| \\
&= M_n \cdot \|x\|
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi,

$$W_n(x) = \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x)|^k \right\}^{1/k}$$

şeklinde tanımlanan $W_n : |C_1|_k \rightarrow C$ dönüşümünü gözönüne alalım.

$$\alpha \in \mathbb{C} \text{ ve } \forall x \text{ için } W_n(\alpha x) = |\alpha| \cdot W_n(x)$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. Ayrıca, T_i nin lineerliğinden

$$\begin{aligned}
W_n(x+y) &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x+y)|^k \right]^{1/k} \\
&= \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x) + T_i(y)|^k \right]^{1/k}
\end{aligned}$$

$$\left[\underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{1-\frac{1}{k}} \left| T_i(x) \right|^k}_{a_i} + \underbrace{\left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{\frac{k-1}{k}} \left| T_i(y) \right|^k}_{b_i} \right]^{1/k}$$

yazılabilir.

Minkowski eşitsizliğinden de

$$\begin{aligned} W_n(x+y) &\leq \left[\sum_{i=1}^n |a_i|^k \right]^{1/k} + \left[\sum_{i=1}^n |b_i|^k \right]^{1/k} \\ &= \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x)|^k \right]^{1/k} + \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(y)|^k \right]^{1/k} \\ &= W_n(x) + W_n(y) \quad \text{bulunur.} \end{aligned}$$

Şu halde $W_n : |C_1|_k \rightarrow \mathbb{C}$ üzerinde bir yarı-normdur. Öte yandan T_n 'in sınırlı ve lineer olması nedeniyle sürekli olup dolayısıyla sonlu sayıdaki sürekli fonksiyonların toplamı olarak her bir n için W_n de süreklidir.

Böylece $W_n : |C_1|_k \rightarrow \mathbb{C}$ 'nin sürekli bir yarınorm olduğunu gösterdik. Öte yandan $|C_1|_k$ Banach uzayı olduğundan ikinci kategoridendir. Bununla birlikte,

$$\sup_n W_n(x) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x)|^k \right]^{1/k} < \infty$$

olması nedeniyle $\forall_n$ ve $\forall x \in |C_1|_k$ için

$$\sup_n W_n(x) \leq M(x) < \infty$$

eşitliğini sağlayacak şekilde x 'e bağlı bir $M(x)$ sabiti vardır. Böylece, teorem 1.1 gözönüne alınarak, her $x \in C_1$ için

$$\sup_n W_n(x) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x)|^k \right]^{1/k} \leq H \cdot \|x\|_1$$

olacak şekilde x 'den bağımsız bir H sabiti mevcuttur.

Şu halde her x için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{p_i}{p_i} \right)^{k-1} |T_i(x)|^k \leq H^k \cdot \|x\|^k$$

eşitsizliği bir H sabiti için sağlanır. Şimdi özel olarak $x=(x_v)$ dizisini $x_v = -1$, $x_{v+1} = -1$, $x_i = 0$ ($i \neq v$, $i \neq v+1$) şeklinde tanımlarsak

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad v > n \\ \frac{1}{v+1} & , \quad v = n \\ -\frac{1}{n(n+1)} & , \quad v < n \end{cases} \quad \dots(3.2)$$

ve

$$T_n(x) = \begin{cases} 0 & , \quad v > n \\ \frac{p_v}{P_v} & , \quad v = n \\ -\frac{p_v p_n}{P_n P_{n-1}} & , \quad v < n \end{cases} \quad \dots(3.3)$$

elde edilir.

Böylece seçilen bu özel dizi için (3.2) den dolayı

$$\begin{aligned} \|x\|_1^k &= |x_0|^k + \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left| \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n i x_i \right|^k \\ &= \left(\frac{v}{v+1} \right)^{k-1} \frac{1}{v+1} + \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^k} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_n(x)|^k \leq H^k \|x\|_1^k$$

olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_n(x)|^k \leq H^k \left[\left(\frac{v}{v+1} \right)^{k-1} \frac{1}{v+1} + \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^k} \right]$$

bulunur (3.3) den dolayı da

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1} |T_n(x)|^k &= \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^{k-1} \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^k + \sum_{n=v+1}^{\infty} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k-1} \left(\frac{p_n p_v}{P_n P_{n-1}} \right)^k \\ &= \frac{p_v}{P_v} + p_v^k \sum_{n=v+1}^{\infty} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \end{aligned}$$

dır.

Lemma 2.1 den dolayı her v için

$$\frac{p_v}{P_v} + M \left(\frac{p_v}{P_v} \right)^k \leq H^k \left\{ \left(\frac{v}{v+1} \right)^{k-1} \frac{1}{v+1} + \frac{N}{(v+1)^k} \right\}$$

olup dolayısıyla

$$\frac{p_v}{P_v} \leq H^k \left\{ \frac{1}{v+1} + \frac{N}{(v+1)^k} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{p_v}{P_v} \leq H^k \left\{ \frac{N+1}{v+1} \right\}$$

elde edilir. Bu ise

$$vp_v = 0 (P_v)$$

demektir. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

TEOREM 3.4: $|\bar{N}, p_n|_k \Rightarrow |C, 1|_k$ ise bu takdirde $P_n = 0 (n p_n)$ dir. ($k \geq 1$)

Uyarı: Teorem 3.2 deki (i) şartı yani $np_n = 0 (P_n)$ şartı sağlamak zorunda değildir. Bunu göstermek için (p_n) dizilerini

$$p_n = \begin{cases} 2^k & , n = 4^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \\ 1 & , n \neq 4^k \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi $4^n \leq v \leq 4^{n+1} - 1$ için

$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \frac{ip_i}{P_i} = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=0}^n \frac{4^i p_{4^i}}{P_{4^i}} + \sum_{i=4^0, 4^1, \dots, 4^n} \frac{ip_i}{P_i} \right\}$$

ve

$$P_{4i} = p_0 + p_1 + \dots + p_{4i}$$

$$= 1 + 2^0 + 1 + 1 + 2^1 + \dots + 2^i$$

$$= (2^0 + 2^1 + \dots + 2^i) + (1 + 1 + 1 + \dots + 1)$$

$$= \frac{1-2^{i+1}}{1-2} + (4^i + 1 - i - 1)$$

$$= 4^i + 2^{i+1} - i - 1$$

olduğundan

$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \frac{ip_i}{P_i} = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=0}^n \frac{4^i 2^i}{4^i + 2^{i+1} - i - 1} + v - (n+1) \right\}$$

$$= 0(1) \cdot \frac{1}{v} \left[\sum_{i=0}^n \frac{4^i 2^i}{4^i} + v - n - 1 \right]$$

$$= 0(1) \frac{1}{v} (2^{n+1} - 1 + v - n - 1)$$

$$= 0(1) \frac{1}{v} (2^{n+1} + v - n - 2)$$

$$= 0(1) \left(\frac{2^{n+1}}{v} + 1 - \frac{n}{v} - \frac{2}{v} \right)$$

olur. Öte yandan

$4n \leq v \leq 4n+1 -1$ eşitsizliğinden

$$\frac{1}{v} \sum_{i=1}^v \frac{ip_i}{P_i} = o(1) \quad (v \rightarrow \infty)$$

elde edilir.

Şimdi $\sum x_n$ serisinin yukarıda tanımladığımız özel diziye karşılık gelen $(\bar{N}, p_n)$ ortalamasını ve $(n x_n)$ dizisinin $(C,1)$ ortalamasını t_n ile gösterirsek

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{n-1} - \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \Delta T_{v-1} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n} \Delta T_{n-1} \\ &= t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3} \end{aligned}$$

yazılabilir. İspatlamak istiyoruz ki $r = 1,2,3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |t_{n,r}|^k < \infty$$

dur.

Ancak bu serinin $r=1,3$ için yakınsak olduğu Bor [2] un çalışmalarında açıktır. O halde serinin sadece $r=2$ için yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Şimdi Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} |t_{n,2}|^k &= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} (v+1) \Delta T_{n-1} \right|^k \\ &\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} v |\Delta T_{n-1}| \right\}^k \\ &= o(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k+1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v |\Delta T_{n-1}| \right\}^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k+1}} \left\{ \underbrace{\sum_{v=1}^{n-1} \left(v \cdot \frac{p_v}{P_v} \right)}_{b_k} \underbrace{\left(\frac{P_v}{p_v} \right) |\Delta T_{n-1}|}_{a_k} \right\}^k \\
&= 0(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^{n-1} \left(v \cdot \frac{p_v}{P_v} \right) \cdot \left(\frac{P_v}{p_v} |\Delta T_{n-1}| \right)^k \left(\frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v p_v}{P_v} \right)^{k-1} \\
&= 0(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^2} \sum_{v=1}^{n-1} v \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \\
&= 0(1) \sum_{v=1}^{m+1} v \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^2} \\
&= 0(1) \sum_{v=1}^{m+1} v \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\
&= 0(1) \sum_{v=1}^m \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{k-1} |\Delta T_{v-1}|^k \\
&= 0(1) \quad (m \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

Zira $\sum x_k$ seri $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilir olduğunu biliyoruz. Böylece $|\bar{N}, p_n|_k \Rightarrow |C, 1|_k$ ($k \geq 1$) elde edilir. Fakat $np_n = 0(P_n)$ şartı sağlanmaz. Zira

$$\frac{4^n p 4^n}{P 4^n} = \frac{4^n 2^n}{4^n + 2^{n+1} - n - 1} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

dır.

Bu ise uyarımızın ispatını tamamlar.

Teorem 3.4 'ün ispatı: Burada uzun uzun ispat yapmaya gerek yoktur.Çünkü teorem 3.3 de (p_n) dizisi ile $(1)=(1,1,1...)$ dizisinin rolleri değiştirilerek iddianın doğruluğu hemen görülür.

Böylece teorem 3.1 , teorem 3.2 , teorem 3.3 ve 3.4 dikkate alınarak aşağıdaki temel sonuç verilebilir.

SONUÇ 3.5: $k \geq 1$ için $|C, 1|_k$ ve $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme metotlarının denk olması için gerek ve yeter şart

$$P_n = 0 (n p_n) \text{ ve } n p_n = 0 (P_n)$$

olmasıdır.

KAYNAKLAR

- | 1 | H.BOR "ON TWO SUMMABILITY METHODS" Math
Proc. Cambridge Phil.Soc. 97(1985), 147-149
- | 2 | H.BOR "A NOTE ON TWO SUMMABILITY
METHODS" Proc. Amer. Math.Soc. 98(1986),
81-84
- | 3 | T.M. FLETT "ON AN EXTENSION OF ABSOLUTE
SUMMABILITY AND SOME THEOREMS OF
LITTLEWOOD ANY PLAYE", Proc. Math. Soc.
7 (1957), 113-141
- | 4 | I.J. MADDOX "ELEMENTS OF FUNCTIONAL ANALYSIS
Camb. University Press, 1970
- | 5 | L.MC FADDEN "ABSOLUTE NORLUND SUMMABILITY",
Duke Math.J.9(1942), 168-207
- | 6 | G.M.PETERSEN "REGULAR MATRIX TRANSFORMATIONS"
McGraw-Hill Publishing Company Limited,
London . 1966
- | 7 | M.A. SARIGÖL "NECESSARY AND SUFFICIENT
CONDITIONS FOR THE EQUIVALENCE OF
THE SUMMABILITY METHODS $\left| \bar{N}, P_n \right|_k$ AND
 $|C_1|_k$ Indian J. Pure Appl. Math., 22(6),
(1991) 483-489

ÖZGEÇMİŞ

1947 de Aydın İli Atça Kasabasında doğdu. İlk ve orta öğretimi Atça'da, liseyi Nazilli Lisesinde tamamladı. 1971'de Balıkesir Necati Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümünden mezun oldu. Tunceli, Tokat ilköğretim okullarında görev yaptı. 1986 yılında Buca Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde lisans tamamladı. 1981'den bu yana Denizli Eğitim Fakültesi Sınıf Öğretmenliği Bölümünde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.