# BAZI YENİ BİNOMİAL
# ÇİFT DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE

**SEZER ERDEM**

**DOKTORA TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ**
**2021**

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

# BAZI YENİ BİNOMİAL ÇİFT DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE

**SEZER ERDEM**

TOKAT
2021

## TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

**SEZER ERDEM**
**07/05/2021**

# ÖZET

**DOKTORA TEZİ**

BAZI YENİ BİNOMİAL
ÇİFT DİZİ UZAYLARI ÜZERİNE

**SEZER ERDEM**

**TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ**
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman : Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ**

Bu doktora tezi beş ana bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, toplanabilme ve dizi uzayları teorileri kısaca tanıtılmıştır. İkinci bölümde, literatür özetlenmiştir, temel tanım, kavram ve yardımcı teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölüm materyal ve yöntem için ayrılmıştır. Tezin orijinal olan dördüncü bölümünde ise, ilk olarak 4-boyutlu binomial matris tanımlanmış ve bu matrisin $r.s > 0$ için RH-regüler olduğu gösterilmiştir. Daha sonra yeni tanımlanan matrisin klasik çift dizi uzaylarındaki etki alanları olarak bazı yeni binomial çift dizi uzayları inşa edilmiş, bu uzayların çeşitli cebirsel ve topolojik özellikleri ele alınmış, bu uzaylardan bazılarının $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-dualleri hesaplanmış ve son olarak yeni tanımlanan uzaylardan klasik dizi uzaylarına ve tersine birtakım matris dönüşümleri karakterize edilmiştir. Beşinci bölümde; tezde elde edilen sonuçlar ve okuyucular için bazı ilgili açık problemler ifade edilmiştir.

**2021, vi+57 sayfa**



**ANAHTAR KELİMELER**: Toplanabilme Teorisi, Çift Dizi Uzayları, 4-Boyutlu Binomial Matris, RH-Regülerlik, Matris Etki Alanı, Dual Uzaylar, Matris Dönüşümleri.

# ABSTRACT

**Ph.D. Thesis**

**ON SOME NEW BINOMIAL DOUBLE SEQUENCE SPACES**

**SEZER ERDEM**

**TOKAT GAZIOSMANPASA UNIVERSITY**
**INSTITUTE OF GRADUATE STUDIES**
**DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

**Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Serkan DEMİRİZ**

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, summability and sequence spaces theories are briefly acquainted. In the second chapter, the literature is summarized and basic definitions, concepts and lemmas are given. The third chapter is devoted to material and method. The fourth section of the thesis is the original. In this part, firstly the 4-dimensional binomial matrix is defined and it is shown that this matrix is RH-regular for $r.s > 0$. Then, some new binomial double sequence spaces are constructed as the domains of the newly defined matrix on the classical double sequence spaces, some algebraic and topological properties of these spaces are investigated. In addition, $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- and $\gamma$-duals of some of these spaces were determined and finally, some matrix transformations from newly defined spaces to classical sequence spaces and vice versa were characterized. In the fifth chapter, results of this thesis and some related open problems are stated for readers.

**2021, vi+57 pages**

**KEYWORDS**: Summability Theory, Double Sequence Spaces, 4-Dimensional Binomial Matrix, RH-Regularity, Matrix Domain, Dual Spaces, Matrix Transformations.

# İÇİNDEKİLER

## ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında benden değerli şefkat, merhamet ve yardımlarını esirgemeyen sevgili anneme, babama, kardeşime ve her zaman yanımda olan eşime, sabırlarından ve çalışmama müsaade etmelerinden dolayı çocuklarım Fatma Begüm, Ahmet ve Zeynep Beril'e teşekkür ederim.

**SEZER ERDEM**
**Mayıs 2021**

# SİMGE ve KISALTMALAR

**Simge**

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayıların cümlesi |
| $\mathbb{N}$ | : Doğal sayıların cümlesi |
| $\mathbb{C}$ | : Kompleks sayıların cümlesi |
| $\Omega$ | : Reel veya kompleks terimli bütün çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{M}_u$ | : Sınırlı çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{C}_p$ | : Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{C}_r$ | : Regüler yakınsak çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{C}_{bp}$ | : Sınırlı ve Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{C}_f$ | : Hemen hemen yakınsak çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{C}_{f_0}$ | : Sıfıra hemen hemen yakınsak çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{L}_u$ | : Mutlak yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{L}_q$ | : Mutlak $q$-toplanabilir çift dizilerin uzayı $(0 < q < \infty)$ |
| $\mathcal{BS}$ | : Sınırlı seri oluşturan çift dizilerin uzayı |
| $\mathcal{CS}_\vartheta$ | : $\vartheta$-yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı |
| $\vartheta$-lim | : Çift dizinin $\vartheta$-yakınsaklığa göre limiti |
| $D = (d_{klij})$ | : Reel veya kompleks terimli 4-boyutlu sonsuz matris |
| $B^{(r,s)}$ | : 4-boyutlu binomial matris |
| $(\Psi : \Lambda)$ | : $\Psi$ uzayından $\Lambda$ uzayına tanımlı 4-boyutlu matrislerin sınıfı |
| $\Psi^\alpha$ | : $\Psi$ uzayının $\alpha$-duali |
| $\Psi^{\beta(\vartheta)}$ | : $\Psi$ uzayının $\beta(\vartheta)$-duali |
| $\Psi^\gamma$ | : $\Psi$ uzayının $\gamma$-duali |
| $\sum_{k,l} u_{kl}$ | : $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} u_{kl}$ |
| $\Psi_D^{(\vartheta)}$ | : 4-boyutlu $D$ matrisinin $\Psi$ uzayındaki $\vartheta$-etki alanı |
| $\sup_{k,l}$ | : $\sup_{k,l\in\mathbb{N}}$ |

## ÇİZELGE LİSTESİ

# 1. GİRİŞ

Augustin Louis Cauchy, 1821 yılında yayımlanan Analyse Algébrique isimli çalışmasında yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da yakınsak ve dizi ile aynı limite sahip olduğunu göstererek toplanabilme teorisinin temelini atan ilk matematikçilerden biri olmuştur (Cauchy, 1821). Klasik toplanabilme teorisi, seriler ya da diziler için yakınsaklık kavramının genelleştirilmesi ile ilgilenir. Burada amaç, özel sonsuz matrisler yardımıyla tanımlanan bir dönüşüm marifetiyle yakınsak olmayan seriler ya da diziler için bir limit tayin etmektir.

Dizi uzayları kuramı, özellikle fonksiyonel analizde olmak üzere birçok uygulaması bulunan toplanabilme teorisinin temel uygulama alanlarından biridir. Dizi uzayları üzerine yapılan çalışmalar her zaman büyük ilgi görmüştür ve bu çalışmalar matematik analiz ve fonksiyonel analizde önemli bir yere sahiptir. Cesàro, Hölder, Nörlund, Riezs ve Euler gibi ünlü matematikçiler toplanabilme ve dizi uzayları teorilerinin gelişimine önemli katkılarda bulunmuşlardır. Son yıllarda, araştırmacılar tarafından yapılan güncel çalışmalar, dizi uzayları ile ilgili konuların oldukça ilgi çekici olduğunu göstermiştir. Dizi uzayları teorisinin ve hatta daha da özel olarak sonsuz matrislerin dizi uzayları üzerindeki etki alanlarının, topolojik vektör uzayları, toplanabilme teorisi ve fonksiyonlar teorisi gibi matematiğin pek çok alanına uygulamaları bulunur. Bunun yanında, yakınsama problemleri konuyu cebirden çok analizin bir parçası yapmıştır.

Dizi uzayı inşa etmenin birkaç yolu olmasına rağmen, sonsuz bir matrisin etki alanından yararlanmak düşüncesi birçok önemli araştırmanın temel konusu olmuştur. Özel olarak seçilmiş sonsuz bir matrisin etki alanı olarak yeni bir dizi uzayı inşa etmek, bu yeni dizi uzayının diğer dizi uzayları arasındaki yerini belirlemek, uzayın cebirsel ve topolojik özelliklerini incelemek, $\alpha$-, $\beta$- ve $\gamma$-duallerini hesaplamak ve böyle uzayların birinden bir diğerine matris dönüşümleri karakterize etmek önemli ve kullanışlı bir araştırma alanı olarak görülmektedir.

Tek dizilerle ilgili yapılmış hemen her çalışma, çift diziler üzerinde de tecrübe edilmeye çalışılmış ve bunlarla ilgili pek çok nitelikli yayın yapılmıştır. Örneğin; 2-boyutlu

Euler matrisinin etki alanları olarak tanımlanan bazı dizi uzayları ve bu uzayların birtakım özelliklerinin incelendiği birçok çalışma mevcuttur (bkz., örneğin, (Altay ve Başar, 2006; Altay ve Polat, 2006; Demiriz ve Çakan, 2010; Kara ve Başarır, 2011)). Daha sonra, 4-boyutlu Euler matrisi ve bu matrisin bazı klasik çift dizi uzaylarındaki etki alanları Talebi (2017) ve Yeşilkayagil ve Başar (2018) tarafından çalışılmıştır. Bişgin, 2-boyutlu Euler matrisinden daha genel olan binomial matrisi kullanarak yeni dizi uzayları elde etmiş ve bu uzaylarla ilgili çeşitli çalışmalar yapmıştır (bkz., örneğin, (Bişgin, 2016a,b, 2018)).

Yukarıda bahsedilen çalışmalarda izlenen yoldan hareketle, bu doktora tez çalışmasında ilk olarak 4-boyutlu Euler matrisinden daha genel olan 4-boyutlu binomial matris tanımlanmış ve bu matrisin $r.s > 0$ için RH-regüler olduğu gösterilmiştir. Daha sonra yeni tanımlanan matrisin $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$ $(0 < q < \infty)$, $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_{f_0}$ klasik çift dizi uzayları üzerindeki etki alanları olarak sırasıyla $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_q^{r,s}(0 < q < \infty)$, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ yeni binomial çift dizi uzayları inşa edilmiş, bunlarla ilgili birtakım sonuçlar ve kapsama bağıntıları verilmiştir. Üstelik, bu uzaylardan bir kısmının $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-dualleri hesaplanmış ve son olarak yeni tanımlanan uzaylardan klasik dizi uzaylarına ve tersine bazı matris sınıfları karakterize edilmiştir.

# 2. LİTERATÜR ÖZETLERİ ve GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, bu tezin araştırma alanını ilgilendiren çalışmalar incelenmiş, çalışmamızda yararlanacağımız genel bilgilere, temel tanım, kavram ve yardımcı teoremlere yer verilmiştir.

## 2.1. Literatür Özetleri

Çift diziler için yakınsaklık kavramı, Alman matematikçi Alfred Pringsheim tarafından verilmiştir (Pringsheim, 1897). Ancak, Pringsheim anlamında yakınsak bir dizinin sınırlı olmasının gerekmemesi, bu tanımın eksikliği olarak görülmüştür. Hardy (1904) tarafından verilen regüler yakınsaklık tanımı, Pringsheim anlamında yakınsaklığın yanında aynı zamanda çift dizinin satır ve sütunlarının yakınsaklığını da gerektirdiğinden bu eksikliği gidermiştir. Jardas ve Sarapa (1991), iki tek dizinin koordinatsal çarpımı biçiminde yazılan çift dizilerin toplanabilmesi konusunu inceledi. Móricz (1991), tek dizilerin $c$ ve $c_0$ uzaylarının karşılığı olan, Pringsheim anlamında yakınsak, Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak ve regüler yakınsak çift dizilerin sırasıyla $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarının bazı özelliklerini inceledi. Boos ve ark. (1997), çift diziler için $e$-, $be$- ve $c$- yakınsaklık kavramlarını tanımlayıp bu yakınsaklık tiplerinin bazı topolojik özelliklerini belirlediler.

Tek diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramı Lorentz (1948) tarafından ortaya konuldu. Mursaleen (2010), hemen hemen yakınsak dizilerin $f$ ile gösterilen uzayının belirli özelliklerini inceledi. Daha sonra birçok matematikçi de bazı özel sonsuz matrislerin $f$ uzayı üzerindeki etki alanlarını inceledi (bkz., örneğin, (Başar ve Kirişçi, 2011; Bişgin, 2018; Demiriz ve ark., 2020)). Çift diziler için hemen hemen yakınsaklık kavramı ise Móricz ve Rhoades (1988) tarafından verildi ve daha sonra bu konu birçok araştırmacı tarafından çalışıldı (bkz., örneğin, (Čunjalo, 2007; Erdem ve Demiriz, 2021; Mursaleen, 2004; Tuğ, 2018a,b)). Ayrıca, hemen hemen yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_f$ uzayının bazı topolojik özellikleri Yeşilkayagil ve Başar (2016b) tarafından incelendi.

Hemen hemen regüler 4-boyutlu matris sınıfının karakterizasyonu Mursaleen ve Savaş (2003) tarafından verildi. Ayrıca, Mursaleen (2004) ve Mursaleen ve Edely

(2004), yine 4-boyutlu matrisler için hemen hemen kuvvetli regülerlik koşullarını ve hemen hemen kuvvetli regüler matrisler yardımıyla çift diziler için $M$-çekirdek kavramını verdiler. Tripaty ve Sarma (2009), Orlicz fonksiyonu yardımıyla vektör değerli bazı çift dizi uzaylarını tanımladılar ve bunların birtakım topolojik özelliklerini incelediler. Savaş ve Patterson (2011), Modulus fonksiyonu yardımıyla üretilen yeni çift dizi uzayları tanımladılar ve bu uzaylar arasındaki ilişkileri incelediler.

Zeltser (2001), doktora tezinde çift dizilerin hem topolojik yapısını hem de toplanabilme teorisini çalıştı. Daha sonra Altay ve Başar (2005), $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere kısmi toplamları sırasıyla $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{M}_u(t)$, $\mathcal{C}_\vartheta$ ve $\mathcal{L}_u$ uzaylarında olan $\mathcal{BS}$, $\mathcal{BS}(t)$, $\mathcal{CS}_\vartheta$ ve $\mathcal{BV}$ çift seri uzaylarını tanımladılar, bu uzayların bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini incelediler ve $\mathcal{BS}$, $\mathcal{CS}_{bp}$ ve $\mathcal{BV}$ seri uzaylarının $\alpha$-duallerini, $\mathcal{CS}_p$, $\mathcal{CS}_{bp}$ ve $\mathcal{CS}_r$ uzaylarının da $\beta(\vartheta)$-duallerini hesapladılar. Ayrıca, $\mathcal{CS}_p$, $\mathcal{CS}_{bp}$ ve $\mathcal{CS}_r$ seri uzaylarından bazı dizi uzaylarına matris sınıflarının karakterizasyonlarını verdiler. Başar ve Sever (2009), $1 \leq q < \infty$ olmak üzere mutlak $q$-toplanabilir çift dizilerin uzayı olan $\mathcal{L}_q$ Banach uzayını inşa edip ayrıntılı bir biçimde incelediler ve bu uzayın bazı topolojik özelliklerini çalıştılar. Ayrıca, $\mathcal{L}_q$ uzayının $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-duallerini hesapladılar. Daha sonra Başar (2012) ve Mursaleen ve Mohiuddine (2014) tarafından toplanabilme teorisi, çift diziler ve bağlantılı başlıklarla ilgili temel sonuçlar ayrıntılı olarak incelendi.

Çift diziler için etki alanı çalışmaları toplanabilme teorisinde yeni sayılabilecek boyuttadır. Mursaleen ve Başar (2014), birinci mertebeden Cesàro ortalamaları $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{p0}$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{L}_q$ uzaylarında olan çift dizilerin uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların bazı özelliklerini çalıştılar. Bu çalışma 4-boyutlu sonsuz bir matrisin etki alanının çift dizi uzaylarında ilk kez kullanılması bakımından oldukça önemlidir.

Son zamanlarda 4-boyutlu üçgen matrislerin bilinen çift dizi uzayları üzerindeki etki alanları olarak yeni çift dizi uzaylarının elde edildiği birtakım kapsamlı ve önemli çalışmalar yapılmıştır. Yazarlar bu çalışmalarda genel hatlarıyla, elde edilen yeni çift dizi uzaylarının bazı cebirsel ve topolojik özelliklerini incelemenin yanı sıra, bu uzayların diğer klasik çift dizi uzayları arasındaki yerini belirlemek amacıyla bazı kapsama bağıntıları elde etme, dualleri hesaplama ve bu uzaylar ile diğer bilinen uzaylar arasındaki 4-boyutlu matris dönüşümlerini karakterize etme problemlerini ele almışlardır. Bu kapsamda son yıllarda yayımlanan çalışmalardan bazıları, bu çalışmalarda kullanılan özel 4-boyutlu sonsuz matrisler ve elde edilen uzayları da gösterecek şekilde Çizelge 2.1'de listelenmiştir.

Çizelge 2.1: D ile gösterilen bazı 4-boyutlu üçgen matrislerin $\Psi$ uzayları üzerindeki $\Psi_D$ etki alanları

| B | $\Psi$ | $\Psi_D$ | bkz. |
|---|---|---|---|
| $\Delta(1,-1,1,-1)$ | $\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_{0p}, \mathcal{C}_p$<br>$\mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q$ | $\mathcal{M}_u(\Delta), \mathcal{C}_{0p}(\Delta), \mathcal{C}_p(\Delta)$<br>$\mathcal{C}_r(\Delta), \mathcal{L}_q(\Delta)$ | Demiriz ve Duyar (2015) |
| $R^{qt}$ | $\mathcal{L}_s$ | $R^{qt}(\mathcal{L}_s)$ | Yeşilkayagil ve Başar (2017) |
| $C$ | $\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_{0p}, \mathcal{C}_p$<br>$\mathcal{C}_r, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{L}_q$ | $\tilde{\mathcal{M}}_u, \tilde{\mathcal{C}_{0p}}, \tilde{\mathcal{C}_p}$<br>$\tilde{\mathcal{C}_r}, \tilde{\mathcal{C}_{bp}}, \tilde{\mathcal{L}_q}$ | Mursaleen ve Başar (2014) |
| $E(r,s)$ | $\mathcal{L}_p$,$\mathcal{M}_u$ | $\varepsilon_p^{r,s}$,$\varepsilon_\infty^{r,s}$ | Talebi (2017) |
| $B(r,s,t,u)$ | $\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_p$<br>$\mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q$ | $B(\mathcal{M}_u), B(\mathcal{C}_{bp}), B(\mathcal{C}_p)$<br>$B(\mathcal{C}_r), B(\mathcal{L}_q)$ | Tuğ (2017) |
| $B(r,s,t,u)$ | $\mathcal{C}_f$,$\mathcal{C}_{f_0}$ | $B(\mathcal{C}_f)$,$B(\mathcal{C}_{f_0})$ | Tuğ (2018a) |
| $\tilde{B}$ | $\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_p$<br>$\mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q$ | $\tilde{B}(\mathcal{M}_u), \tilde{B}(\mathcal{C}_{bp}), \tilde{B}(\mathcal{C}_p)$<br>$\tilde{B}(\mathcal{C}_r), \tilde{B}(\mathcal{L}_q)$ | Tuğ ve ark. (2020) |
| $\Phi^\star$ | $\mathcal{L}_p$ | $\Phi^\star(\mathcal{L}_p)$ | Demiriz ve Erdem (2020) |
| $\Phi^\star$ | $\mathcal{M}_u$,$\mathcal{C}_{bp}$<br>$\mathcal{C}_p$,$\mathcal{C}_r$ | $\Phi^\star(\mathcal{M}_u), \Phi^\star(\mathcal{C}_{bp})$<br>$\Phi^\star(\mathcal{C}_p)$,$\Phi^\star(\mathcal{C}_r)$ | Erdem ve Demiriz (2020) |
| $\Phi^\star$ | $\mathcal{C}_f$,$\mathcal{C}_{f_0}$ | $\Phi^\star(\mathcal{C}_f)$,$\Phi^\star(\mathcal{C}_{f_0})$ | Erdem ve Demiriz (2021) |

Burada $\Delta(1,-1,1,-1)$, $R^{qt}$, $C$, $E(r,s)$, $B(r,s,t,u)$, $\tilde{B}$ ve $\Phi^\star$ ile sırasıyla 4-boyutlu fark, Riesz, Cesàro, Euler, genelleştirilmiş fark, dizisel band ve Euler-totient matrisleri kastedilmektedir.

## 2.2. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda daha sonraki bölümlere hazırlık olması için gerekli görülen temel tanım, kavram ve yardımcı teoremlere yer verilmiştir.

**Tanım 2.2.1.** $\Psi$ boştan farklı bir küme ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. Eğer her $u, \nu, y \in \Psi$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için

$$+ : \Psi \times \Psi \to \Psi$$

$$(u, \nu) \mapsto u + \nu$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times \Psi \to \Psi$$

$$(\lambda, \nu) \mapsto \lambda\nu$$

olarak tanımlanan fonksiyonlar,

| | |
|---|---|
| $(L1)$ | $u + \nu = \nu + u,$ |
| $(L2)$ | $(u + \nu) + y = u + (\nu + y),$ |
| $(L3)$ | Her $u \in \Psi$ için $u + \theta = \theta + u = u$ olacak şekilde bir $\theta \in \Psi$ vardır, |
| $(L4)$ | Her $u \in \Psi$ için $u + (-u) = (-u) + u = \theta$ olacak şekilde bir $(-u) \in \Psi$ vardır, |
| $(L5)$ | $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u,$ |
| $(L6)$ | $\lambda(u + \nu) = \lambda u + \lambda\nu,$ |
| $(L7)$ | $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u),$ |
| $(L8)$ | $1u = u,$ |

eşitliklerini sağlarsa $\Psi$ kümesine, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay denir (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.2.** $\Psi$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\varnothing \neq \Lambda \subset \Psi$ olsun. Bu durumda; her $u, \nu \in \Lambda$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için $\lambda u + \mu\nu \in \Lambda$ olması halinde $\Lambda$ 'ya, $\Psi$ uzayının bir lineer alt uzayı denir (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.3.** $\Psi$ ve $\Lambda$ aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay olsun. Her $u$, $\nu \in \Psi$ ve her $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ için,

$$T(\lambda u + \mu\nu) = \lambda T(u) + \mu T(\nu)$$

eşitliği sağlanır ise, $T : \Psi \to \Lambda$'e bir lineer dönüşüm adı verilir (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.4.** $\Psi$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : \Psi \to \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer $\forall u, \nu \in \Psi$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ için,

| | |
|---|---|
| $(i)$ | $\|\theta\| = 0,$ |
| $(ii)$ | $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|,$ |
| $(iii)$ | $\|u + \nu\| \leq \|u\| + \|\nu\|,$ |

şartları sağlanırsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna $\Psi$ üzerinde bir yarı-norm ve $(\Psi, \|\cdot\|)$ ikilisine de yarı-normlu lineer uzay denir. Eğer, aynı zamanda $\|u\| = 0 \Rightarrow u = \theta$ şartı da sağlanıyorsa o zaman $\|\cdot\|$ fonksiyonuna $\Psi$ üzerinde bir norm ve $(\Psi, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay denir (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.5.** $\Psi$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay, $\|\cdot\| : \Psi \to \mathbb{R}^+$ ve $q > 0$ olsun. Eğer; $\forall u, \nu \in \Psi$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ için,

$$\begin{aligned} &(i) \qquad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = \theta, \\ &(ii) \qquad \|\lambda u\| = |\lambda|^q \|u\|, \\ &(iii) \qquad \|u + \nu\| \leq \|u\| + \|\nu\|, \end{aligned}$$

şartları sağlanırsa $(\Psi, \|\cdot\|, q)$ üçlüsüne bir q-normlu lineer uzay denir (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.6.** Normlu bir $\Psi$ uzayında bir $(u_i)$ dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $i, j > \eta$ oldukça, $\|u_i - u_j\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\eta$ sayısı mevcutsa, $(u_i)$ dizisine bir Cauchy dizisi denir (Kreyszig, 1980).

**Tanım 2.2.7.** $\Psi$ bir normlu uzay ve $(u_i)$ de bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, $\Psi$ uzayı $\lim_{i\to\infty} \|u_i - u\| = 0$ olacak şekilde bir $u$ elemanı içeriyorsa, $(u_i)$ dizisi yakınsaktır denir ve bu durumda $u$, $(u_i)$ dizisinin limiti olarak adlandırılır (Kreyszig, 1980).

**Tanım 2.2.8.** Eğer $(\Psi, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, yani $\Psi$ normlu uzayı tam ise bu uzaya Banach uzayı denir (Maddox, 1970).

**Tanım 2.2.9.** $\Psi$ ve $\Lambda$ aynı cisim üzerinde tanımlı lineer uzaylar olsun. $\Psi$ uzayından $\Lambda$ uzayına tanımlı bir $T$ izomorfizmi, lineer uzayın iki cebirsel işlemini koruyan birebir ve örten bir dönüşümdür. Bu yüzden, her $u, \nu \in \Psi$ ve her $\lambda$ skaleri için

$$T(u + \nu) = T(u) + T(\nu) \quad \text{ve} \quad T(\lambda u) = \lambda T(u)$$

sağlanır, yani $T : \Psi \to \Lambda$ birebir, örten bir lineer dönüşümdür. Normlu uzaylar için izomorfizm ise normu koruyan, yani her $u \in \Psi$ için $\|Tu\| = \|u\|$ şartını sağlayan bir lineer uzay izomorfizmidir. Eğer $T : \Psi \to \Lambda$ bir izomorfizm ise $\Psi$ ve $\Lambda$ normlu uzaylarına izomorfik uzaylar denir (Maddox, 1970).

## 2.3. Çift Dizilerde Yakınsaklık Çeşitleri ve Bazı Çift Dizi Uzayları

**Tanım 2.3.1.** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ doğal sayılar kümesi ve $\Psi$ boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f \ &: \ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Psi \\ &(i, j) \mapsto f(i, j) = u_{ij} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $f$ fonksiyonuna çift indisli dizi ya da kısaca çift dizi denir. $\Psi = \mathbb{R}$ olduğunda $f$'ye reel değerli çift dizi, $\Psi = \mathbb{C}$ olduğunda $f$'ye kompleks değerli çift dizi denir. Bir $u = (u_{ij})$ çift dizisinin terimleri, bir sonsuz matrisin terimleri gibi düşünülebilir. Örneğin; bir $u = (u_{ij})$ dizisi

$$\begin{bmatrix} u_{00} & u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0j} & \cdots \\ u_{10} & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1j} & \cdots \\ u_{20} & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ u_{i0} & u_{i1} & u_{i2} & \cdots & u_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olarak ifade edilebilir. Kompleks terimli bütün çift dizilerin kümesi

$$\Omega := \{u = (u_{ij}) : u_{ij} \in \mathbb{C}, \ \forall \ i, j \in \mathbb{N}\}$$

ile temsil edilir. Bu küme, çift dizilerde tanımlanan koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir lineer uzaydır. $\Omega$ uzayının herhangi bir lineer alt uzayına çift dizi uzayı denir.

**Tanım 2.3.2.** $\sup_{i,j\in\mathbb{N}} |u_{ij}| < \infty$ şartını sağlayan bir $u = (u_{ij})$ çift dizisine sınırlı çift dizi denir ve bütün sınırlı çift dizilerin kümesi

$$\mathcal{M}_u := \left\{ u = (u_{ij}) \in \Omega \ : \ \|u\|_\infty = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |u_{ij}| < \infty \right\}$$

biçiminde verilir (Móricz ve Rhoades, 1988). $\mathcal{M}_u$ kümesinin $\|u\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı olduğu Móricz (1991) tarafından gösterilmiştir.

Tek dizilerden farklı olarak çift dizilerde birden fazla yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Bunlardan en çok kullanılanlar Pringsheim anlamında yakınsaklık ve regüler yakınsaklık kavramlarıdır. Şimdi çift diziler için tanımlanan bu yakınsaklık kavramlarından bahsedelim:

**Tanım 2.3.3.** Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $i, j > n_\varepsilon$ olduğunda $|u_{ij} - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon$ doğal sayısı bulunabiliyorsa bu durumda $u = (u_{ij}) \in \Omega$ dizisine, $L \in \mathbb{C}$ sayısına Pringsheim anlamında yakınsaktır denir. Burada; $L$ sayısına $u$ çift dizisinin Pringsheim limiti, böyle yakınsak dizilere de kısaca $p$-yakınsak dizi denir ve $p - \lim_{i,j\to\infty} u_{ij} = L$ biçiminde gösterilir (Pringsheim, 1897).

Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin kümesi

$$\mathcal{C}_p := \{u = (u_{ij}) \in \Omega \ : \ \exists L \in \mathbb{C}, \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall i, j \geq n_\epsilon \ni |u_{ij} - L| < \epsilon\}$$

biçiminde verilir ve bu küme, çift dizilerde tanımlanan koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir lineer uzay teşkil eder. Ayrıca $\mathcal{C}_p$ lineer uzayının

$$\|u\|_p = \lim_{K\to\infty} \left( \sup_{i,j\geq K} |u_{ij}| \right)$$

yarı-normu ile bir tam yarı-normlu uzay olduğu Móricz (1991) tarafından gösterilmiştir.

Tek diziler için bilinenin aksine, $p$-yakınsak bir çift dizinin sınırlı olması gerekmez. Örneğin; $u = (u_{ij})$ dizisi

$$u_{ij} = \begin{cases} i & , \ i \in \mathbb{N}, \ j = 0, \\ j & , \ j \in \mathbb{N}, \ i = 0, \\ 0 & , \ i, j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \end{cases}$$

olarak tanımlandığında, $p - \lim_{i,j\to\infty} u_{ij} = 0$ olmasına rağmen $\sup_{i,j\in\mathbb{N}} |u_{ij}| = \infty$ olduğu görülür, o halde $u \in \mathcal{C}_p \backslash \mathcal{M}_u$ olur.

**Tanım 2.3.4.** Pringsheim anlamında yakınsak ve aynı zamanda sınırlı olan bütün çift dizilerin kümesi

$$\mathcal{C}_{bp} := \left\{ u = (u_{ij}) \in \mathcal{C}_p \ : \ \|u\|_\infty = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |u_{ij}| < \infty \right\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.3.5.** Pringsheim anlamında bir $L$ noktasına yakınsak olmasının yanında $\forall j \in \mathbb{N}$ için $\lim_{i\to\infty} u_{ij}$ limiti ile $\forall i \in \mathbb{N}$ için $\lim_{j\to\infty} u_{ij}$ limiti de bulunan bir $(u_{ij}) \in \Omega$ dizisine $L$ noktasına regüler yakınsaktır denir. Eğer $u = (u_{ij}) \in \Omega$ regüler yakınsak ise $\lim_i \lim_j u_{ij}$ ve $\lim_j \lim_i u_{ij}$ limitleri mevcuttur ve

$$\lim_i \lim_j u_{ij} = \lim_j \lim_i u_{ij} = p - \lim_{i,j\to\infty} u_{ij}$$

eşitliği mevcuttur. Regüler yakınsak bütün çift dizilerin kümesi

$$\mathcal{C}_r := \{u = (u_{ij}) \in \mathcal{C}_p \ : \ \forall i,j \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad (u_{ij})_i, (u_{ij})_j \in c\}$$

olarak verilir (Hardy, 1904). Burada $c$ ile yakınsak tek dizilerin uzayı, $(u_{ij})_i \in c$ ile de dizinin $i$ indisine göre yakınsak olması kastedilmektedir. Regüler yakınsak bir çift dizi sınırlıdır. $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_r$ kümelerinin $\|.\|_\infty$ normu ile birer Banach uzayı olduğu Móricz (1991) tarafından gösterilmiştir.

$\vartheta$ herhangi bir yakınsaklık türü olmak üzere; $\vartheta$-yakınsak bir $u$ çift dizisinin limiti $\vartheta - \lim_{i,j\to\infty} u_{ij}$ ile, $\vartheta$-yakınsak çift dizilerin uzayı da $\mathcal{C}_\vartheta$ ile gösterilir.

**Tanım 2.3.6.** Mutlak $q$-toplanabilir bütün çift dizilerin kümesi

$$\mathcal{L}_q := \left\{ u = (u_{ij}) \in \Omega \ : \ \sum_{i,j} |u_{ij}|^q < \infty \right\}, \quad (1 \le q < \infty)$$

olarak ifade edilir. Bu küme

$$\|u\|_q = \left( \sum_{i,j} |u_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Başar ve Sever, 2009).

## 2.4. Çift Seriler

Bu kısımda çift seri tanımı verilerek Altay ve Başar (2005) tarafından tanımlanmış ve sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı çift seri uzayları ve bunların birtakım özelliklerinden bahsedilecektir.

**Tanım 2.4.1.** Bir $u = (u_{ij})$ çift dizisi için $S = (s_{kl})$ çift dizisi, her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$s_{kl} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} u_{ij}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda; $((u_{kl}), (s_{kl}))$ ikilisine bir çift seri, $S = (s_{kl})$ dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi ve $u_{ij}$ dizisine de serinin genel terimi denir.

$$\vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} u_{ij} = L$$

olması durumunda $((u_{kl}), (s_{kl}))$ serisine $\vartheta-$yakınsaktır denir ve bu durumda serinin $\vartheta-$toplamı $L$ sayısıdır.

$u_{ij}$ genel terimli ve $L$ toplamlı seri

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij} = L$$

biçiminde yazılır. Ayrıca; genel terimi $u_{ij}$ olan seri, yakınsak da olsa ıraksak da olsa

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} u_{ij}$$

ile ifade edilir.

$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}$ ve $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_{ij}$ serilerine sıralı seriler denir ve sıralı serilerin toplamları aynı olmayabilir. Örneğin; $u=(u_{ij})$ çift dizisi

$$u_{ij}=\begin{cases} 1 & , \quad i=j+1,\ j\in\mathbb{N}, \\ -1 & , \quad i=j-1,\ j\in\mathbb{N}, \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

biçiminde tanımlandığında açık olarak

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}=-1 \quad \text{ve} \quad \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}u_{ij}=1$$

olduğu görülür.

**Tanım 2.4.2.** $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|u_{ij}|$ serisinin yakınsak olması durumunda $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}$ serisine mutlak yakınsak seri denir.

Açık olarak, Zeltser (2002) tarafından tanımlanan, mutlak yakınsak seri teşkil eden çift dizilerin

$$\mathcal{L}_u:=\left\{u=(u_{ij})\in\Omega\ :\ \sum_{i,j}|u_{ij}|<\infty\right\}$$

uzayı, $\mathcal{L}_q$ uzayının $q=1$ için özel halidir.

**Tanım 2.4.3.** $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}$ serisinin $(k,l)$'inci kısmi toplamlar dizisi $s_{kl}=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}u_{ij}$ olmak üzere, sınırlı seri oluşturan çift dizilerin kümesi

$$\mathcal{BS}=\left\{u=(u_{ij})\in\Omega\ \ \sup_{k,l\in\mathbb{N}}|s_{kl}|<\infty\right\}$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca; bu küme

$$\|u\|_{\mathcal{BS}}=\sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l}u_{ij}\right| \tag{2.4.1}$$

normu ile bir Banach uzayıdır ve $\mathcal{BS}$ uzayı $\mathcal{M}_u$ uzayına lineer olarak izomorftur (Altay ve Başar, 2005).

**Tanım 2.4.4.** $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere, $\vartheta$-yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı

$$\mathcal{CS}_\vartheta = \left\{ u = (u_{ij}) \in \Omega \ : \ (s_{kl}) = \left( \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} u_{ij} \right) \in \mathcal{C}_\vartheta \right\}$$

olarak tanımlanır.

Bu durumda; $\mathcal{CS}_p$ kümesi,

$$\|u\|_{\mathcal{CS}_p} = \lim_{M \to \infty} \left( \sup_{k,l \geq M} |s_{kl}| \right)$$

yarı-normu ile bir tam yarı-normlu lineer uzaydır.

Ayrıca; $\mathcal{CS}_{bp}$ ve $\mathcal{CS}_r$ kümeleri de (2.4.1) normu ile birer Banach uzayıdır ve

$$\mathcal{CS}_r \subset \mathcal{CS}_{bp} \subset \mathcal{CS}_p$$

kapsama bağıntısı geçerlidir (Altay ve Başar, 2005).

**Tanım 2.4.5.** $\Psi$ ve $\Lambda$ iki çift dizi uzayı, $D = (d_{klij})$ 4-boyutlu sonsuz bir matris ve $\vartheta$, herhangi bir yakınsaklık türü olsun. Her $k, l \in \mathbb{N}$ için $u$'nun $D$-dönüşümü

$$Du = \{(Du)_{kl}\}_{k,l \in \mathbb{N}} := \vartheta - \sum_{ij} d_{klij} u_{ij} \tag{2.4.2}$$

olmak üzere; eğer her $u \in \Psi$ için, $Du$ mevcut ve $\Lambda$ uzayında ise bu durumda $D$ dönüşümüne $\Psi$ uzayından $\Lambda$ uzayına tanımlı $\vartheta$-tipi bir matris dönüşümü denir ve bu durum $D : \Psi \mapsto \Lambda$ biçiminde gösterilir. $\Psi$ uzayından $\Lambda$ uzayına tanımlı bütün 4-boyutlu matrislerin sınıfı $(\Psi : \Lambda)$ ile temsil edilir. Burada; $D \in (\Psi : \Lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.4.2) eşitliğinin sağ tarafındaki serinin her $k, l \in \mathbb{N}$ için $\vartheta$-yakınsak olması yani $D_{kl} = (d_{klij})_{i,j \in \mathbb{N}} \in \Psi^{\beta(\vartheta)}$ ve her $u \in \Psi$ için $Du \in \Lambda$ olmasıdır.

**Tanım 2.4.6.** $D = (d_{klij})$, 4-boyutlu sonsuz bir matris olsun. Bu taktirde; $D$-dönüşümü $\Lambda$ çift dizi uzayında yatan bütün çift dizilerin

$$\Lambda_D^{(\vartheta)} = \left\{ u \in \Omega : \forall k, l \in \mathbb{N} \text{ için } (Du)_{kl} = \left( \vartheta - \sum_{ij} d_{klij} u_{ij} \right)_{k,l \in \mathbb{N}} \in \Lambda \right\} \tag{2.4.3}$$

kümesine $D$ matrisinin $\Lambda$ uzayındaki $\vartheta$-etki alanı denir.

**Tanım 2.4.7.** $\mathcal{C}_\vartheta \subset (\mathcal{C}_\vartheta)_D$ olması durumunda 4-boyutlu $D$ matrisine $\mathcal{C}_\vartheta$-konservatif matris denir. Ayrıca her bir $u \in \mathcal{C}_\vartheta$ için

$$\vartheta - \lim Du = \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} (Du)_{kl} = \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} u_{kl}$$

olması halinde $\mathcal{C}_\vartheta$-konservatif $D$ matrisi $\mathcal{C}_\vartheta$-regüler adını alır.

**Tanım 2.4.8.** $D = (d_{klij})$ 4-boyutlu bir matris ve $k, l, i, j \in \mathbb{N}$ olmak üzere; $i > k$ veya $j > l$ veya her ikisi de gerçekleştiğinde $d_{klij} = 0$ oluyorsa bu durumda $D$ matrisine üçgensel matris denir (Adams, 1933).

**Tanım 2.4.9.** Her $k, l \in \mathbb{N}$ için $d_{klkl} \neq 0$ olan $D = (d_{klij})$ üçgensel matrisine üçgen matris denir. 4-boyutlu üçgen bir matrisin bir tek tersi vardır ve tersi de üçgen bir matristir (Cooke, 1950).

## 2.5. Çift Dizi Uzaylarının $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-Dualleri

$\Psi$ herhangi bir çift dizi uzayı olmak üzere; bu uzayın $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$ dualleri sırasıyla

$$\begin{aligned}
\Psi^\alpha &:= \left\{ t = (t_{ij}) \in \Omega : \text{ her } \quad (u_{ij}) \in \Psi \quad \text{için} \quad \sum_{i,j} |t_{ij}u_{ij}| < \infty \right\}, \\
\Psi^{\beta(\vartheta)} &:= \left\{ t = (t_{ij}) \in \Omega : \text{ her } \quad (u_{ij}) \in \Psi \quad \text{için} \quad \vartheta - \sum_{i,j} t_{ij}u_{ij} \quad \text{mevcut} \right\}, \\
\Psi^\gamma &:= \left\{ t = (t_{ij}) \in \Omega : \text{ her } \quad (u_{ij}) \in \Psi \quad \text{için} \quad \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i,j=0}^{k,l} t_{ij}u_{ij} \right| < \infty \right\}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. $\Psi$ ve $\Lambda$ herhangi iki çift dizi uzayı olmak üzere, $\Psi^\alpha \subset \Psi^{\beta(\vartheta)}$ ve $\Psi^\alpha \subset \Psi^\gamma$ kapsamaları geçerlidir. Ayrıca, eğer $\Psi \subset \Lambda$ ise $\Lambda^\alpha \subset \Psi^\alpha$ kapsaması geçerlidir.

## 2.6. Çift Diziler İçin Hemen Hemen Yakınsaklık Kavramı

Tek diziler için, bilinen yakınsaklıktan daha genel olan hemen hemen yakınsaklık kavramı Lorentz (1948) tarafından verildi ve daha sonra bu kavram Móricz ve Rhoades (1988) tarafından çift dizilere genişletildi.

**Tanım 2.6.1.**

$$p-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sup_{k,l>0}\left|\frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)}\sum_{i=k}^{k+\varrho}\sum_{j=l}^{l+\varrho'}u_{ij}-L\right|=0 \quad (k \text{ ve } l \text{ ye göre düzgün})$$

eşitliğini sağlayan bir $L$ sayısının bulunması halinde, kompleks terimli bir $u=(u_{ij})$ dizisine $L$ değerine hemen hemen yakınsaktır denir (Móricz ve Rhoades, 1988). Bu taktirde; $L$ değerine $u$ dizisinin $f_2$-limiti denir. Hemen hemen yakınsak bütün çift dizilerin kümesi

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_f &= \Bigg\{u=(u_{ij})\in\Omega \ \ \exists L\in\mathbb{C}\ni \\ &\qquad p-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sup_{k,l>0}\left|\frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)}\sum_{i=k}^{k+\varrho}\sum_{j=l}^{l+\varrho'}u_{ij}-L\right|=0, k \text{ ve } l \text{ ye göre düzgün}\Bigg\}\end{aligned}$$

biçiminde verilir. $L=0$ olması durumunda $u$ dizisine, sıfıra hemen hemen yakınsaktır denir ve böyle çift dizilerin kümesi de $\mathcal{C}_{f_0}$ ile temsil edilir. $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_{f_0}$ kümeleri

$$\|u\|_{\mathcal{C}_f}=\sup_{\varrho,\varrho',k,l\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)}\sum_{i=k}^{k+\varrho}\sum_{j=l}^{l+\varrho'}u_{ij}\right|$$

normu ile birer Banach uzayıdır.

$p$-yakınsak bir çift dizi hemen hemen yakınsak olmayabilir ancak sınırlı ve yakınsak çift dizi aynı zamanda hemen hemen yakınsaktır. Üstelik, hemen hemen yakınsak her çift dizi sınırlıdır. Yani; $\mathcal{C}_{bp}\subset\mathcal{C}_f\subset\mathcal{M}_u$ kapsamaları kesin olarak sağlanır (Mursaleen, 2004).

Móricz ve Rhoades (1988), hemen hemen yakınsak çift dizileri $bp$-yakınsak çift dizilere dönüştüren 4-boyutlu matrislerin özelliklerini incelediler. Tek diziler için hemen hemen konservatif ve hemen hemen regüler matris sınıfları King (1966) tarafından, hemen hemen $\mathcal{C}_\vartheta$-konservatif ve hemen hemen $\mathcal{C}_\vartheta$-regüler 4-boyutlu matris sınıfları da Zeltser ve ark. (2009) tarafından karakterize edildi. Mursaleen (2004), 4-boyutlu matrisler için hemen hemen kuvvetli regülerlik kavramını, "Hemen hemen yakınsak her çift diziyi hemen hemen yakınsak bir çift diziye, üstelik limiti koruyarak dönüştüren 4-boyutlu matrise hemen hemen kuvvetli regüler matris denir" biçiminde ortaya koydu.

**Tanım 2.6.2.** $\vartheta$-yakınsak her çift diziyi hemen hemen yakınsak bir çift diziye dönüştüren 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisine hemen hemen $\mathcal{C}_\vartheta$-konservatif matris denir ve bu durum $D \in (\mathcal{C}_\vartheta : \mathcal{C}_f)$ ile gösterilir (Zeltser ve ark., 2009).

**Tanım 2.6.3.** Hemen hemen $\mathcal{C}_\vartheta$-konservatif 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisine; limiti koruması halinde, yani her $u = (u_{ij}) \in \mathcal{C}_\vartheta$ çift dizisi için $\vartheta-\lim u = f_2-\lim Du$ eşitliğinin sağlanması halinde hemen hemen $\mathcal{C}_\vartheta$-regüler matris denir (Zeltser ve ark., 2009).

## 2.7. Yardımcı Teoremler

Bu kısımda, ilerleyen bölümlerde gerekli olacak bazı temel yardımcı teoremler verilecektir.

**Lemma 2.7.1.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} |d_{klij}| < \infty, \tag{2.7.1}$$

$$\exists d_{ij} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} d_{klij} = d_{ij}, \quad (\forall i,j \in \mathbb{N}) \tag{2.7.2}$$

$$\exists L \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i,j} d_{klij} = L \quad \text{mevcut}, \tag{2.7.3}$$

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{j} |d_{kli_0j} - d_{i_0j}| = 0, \tag{2.7.4}$$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} |d_{klij_0} - d_{ij_0}| = 0 \tag{2.7.5}$$

şartlarının sağlanmasıdır (Zeltser ve ark., 2009).

**Lemma 2.7.2.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{C}_p : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.3) şartlarıyla birlikte

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } j > j_0 \text{ ve } \forall k, l \in \mathbb{N} \text{ için } d_{klij} = 0, \quad (2.7.6)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \exists i_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } i > i_0 \text{ ve } \forall k, l \in \mathbb{N} \text{ için } d_{klij} = 0 \quad (2.7.7)$$

şartlarının sağlanmasıdır (Zeltser ve ark., 2009).

**Lemma 2.7.3.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{C}_r : \mathcal{C}_\vartheta)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.3) şartlarıyla birlikte

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_i d_{klij_0} = x_{j_0}, \quad (2.7.8)$$

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_j d_{kli_0j} = y_{i_0} \quad (2.7.9)$$

şartlarının sağlanmasıdır (Zeltser ve ark., 2009).

**Lemma 2.7.4.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) şartının sağlanmasıdır (Tuğ, 2017).

**Lemma 2.7.5.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.2) şartlarıyla birlikte

$$\exists d_{ij} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{ij} |d_{klij} - d_{ij}| = 0, \quad (2.7.10)$$

$$\text{Her bir } i \in \mathbb{N} \text{ için } bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{j=0}^{l} d_{klij} \quad \text{mevcut}, \quad (2.7.11)$$

$$\text{Her bir } j \in \mathbb{N} \text{ için } bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=0}^{k} d_{klij} \quad \text{mevcut}, \quad (2.7.12)$$

$$\sum_{i,j} |d_{klij}| \quad \text{yakınsaktır} \quad (2.7.13)$$

şartlarının sağlanmasıdır (Çakan ve ark., 2006).

**Lemma 2.7.6.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{M}_u : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) şartının sağlanmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2016c).

**Lemma 2.7.7.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_p)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.2), (2.7.6) ve (2.7.7) şartlarının sağlanmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2016a).

**Lemma 2.7.8.** **(a)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{k,l,i,j\in\mathbb{N}} |d_{klij}| < \infty \tag{2.7.14}$$

şartının sağlanmasıdır.

**(b)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} |d_{klij}|^{q'} < \infty \tag{2.7.15}$$

şartının sağlanmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2017). Burada, $q'$ ile $q$ nun konjugesi kastedilmektedir, yani $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ dir.

**Lemma 2.7.9.** $0 < q \leq 1$ ve $1 \leq q_1 < \infty$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{L}_{q_1})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} |d_{klij}|^{q_1} < \infty \tag{2.7.16}$$

şartının sağlanmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2017).

**Lemma 2.7.10.** **(a)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.14) şartıyla birlikte bir $(a_{ij}) \in \Omega$ için

$$bp - \lim_{k,l\to\infty} d_{klij} = a_{ij} \tag{2.7.17}$$

şartının sağlanmasıdır.

**(b)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.15) ve (2.7.17) şartlarının sağlanmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2017).

**Lemma 2.7.11.** **(a)** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.17) şartlarıyla birlikte

$$\exists L \in \mathbb{C} \ni \quad bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i,j} d_{klij} = L, \tag{2.7.18}$$

$$\exists i_0 \in \mathbb{N} \ni \quad bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{j} |d_{kl,i_0,j} - d_{i_0 j}| = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.7.19}$$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \ni \quad bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} |d_{kli,j_0} - d_{i,j_0}| = 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}, \tag{2.7.20}$$

$$bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} \sum_{j} |\triangle_{01} d_{klij}| = 0, \tag{2.7.21}$$

$$bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} \sum_{j} |\triangle_{10} d_{klij}| = 0 \tag{2.7.22}$$

şartlarının sağlanmasıdır. Burada; $\triangle_{10} d_{klij} = d_{klij} - d_{kl,i+1,j}$ ve $\triangle_{01} d_{klij} = d_{klij} - d_{kli,j+1}$ olarak tanımlanır.

**(b)** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin kuvvetli regüler olması için, yani $(\mathcal{C}_f : \mathcal{C}_{bp})_{reg}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.17)-(2.7.22) şartlarının her $i, j \in \mathbb{N}$ için $d_{ij} = 0$ ve $L = 1$ için sağlanmasıdır (Móricz ve Rhoades, 1988).

**Lemma 2.7.12.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) şartı ile birlikte

$$D_{kl} \in (\mathcal{C}_f)^{\beta(\vartheta)} \tag{2.7.23}$$

şartının sağlanmasıdır (Tuğ, 2018a).

**Lemma 2.7.13.** **(a)** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin hemen hemen $\mathcal{C}_{bp}$-konservatif olması için, yani $(\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) sartıyla birlikte

$$\forall i,j\in\mathbb{N},\exists d_{ij}\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)=d_{ij}$$
yakınsaması $k,l\in\mathbb{N}$ ye göre düzgündür, (2.7.24)

$$\exists L\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_{i,j}\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)=L$$
yakınsaması $k,l\in\mathbb{N}$ ye göre düzgündür, (2.7.25)

$$\forall j\in\mathbb{N},\exists d_{ij}\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_{i}|\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)-d_{ij}|=0$$
yakınsaması $k,l\in\mathbb{N}$ ye göre düzgündür, (2.7.26)

$$\forall i\in\mathbb{N},\exists d_{ij}\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_{j}|\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)-d_{ij}|=0$$
yakınsaması $k,l\in\mathbb{N}$ ye göre düzgündür (2.7.27)

şartlarının sağlanmasıdır. Burada; $\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)=\sum_{m=k}^{k+\varrho}\sum_{n=l}^{l+\varrho'}\frac{d_{mnij}}{(\varrho+1)(\varrho'+1)}$ olarak tanımlanmıştır.

**(b)** 4-boyutlu bir $D=(d_{klij})$ matrisinin hemen hemen ($\mathcal{C}_{bp}$-) regüler olması için, yani $(\mathcal{C}_{bp}:\mathcal{C}_f)_{reg}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.24)-(2.7.27) şartlarının her $i,j\in\mathbb{N}$ için $d_{ij}=0$ ve $L=1$ için sağlanmasıdır (Zeltser ve ark., 2009).

**Lemma 2.7.14.** 4-boyutlu bir $D=(d_{klij})$ matrisinin hemen hemen kuvvetli regüler olması için, yani $(\mathcal{C}_f:\mathcal{C}_f)_{reg}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul $D$ matrisinin hemen hemen ($\mathcal{C}_{bp}$-) regüler olması ve

$$\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_{i}\sum_{j}|\triangle_{10}\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)|=0$$
yakınsaması $k,l\in\mathbb{N}$ ye göre düzgündür, (2.7.28)

$$\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_{j}\sum_{i}|\triangle_{01}\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)|=0$$
yakınsaması $k,l\in\mathbb{N}$ ye göre düzgündür (2.7.29)

şartlarının sağlanmasıdır. Burada;

$$\triangle_{10}\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)=\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)-\sigma(i+1,j,\varrho,\varrho',k,l)$$

ve

$$\triangle_{01}\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)=\sigma(i,j,\varrho,\varrho',k,l)-\sigma(i,j+1,\varrho,\varrho',k,l)$$

olarak tanımlanmıştır (Mursaleen, 2004).

**Lemma 2.7.15. (a)** 4-boyutlu bir $D=(d_{klij})$ matrisinin hemen hemen $\mathcal{C}_r$-konservatif olması için, yani $(\mathcal{C}_r:\mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.24) ve (2.7.25) şartlarıyla birlikte

$$\begin{aligned}&\exists j_0\in\mathbb{N}\ni bp-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_i\sigma(i,j_0,\varrho,\varrho',k,l)=x_{j_0}\\&\text{yakınsaması } k,l\in\mathbb{N} \text{ ye göre düzgündür,}\end{aligned}\tag{2.7.30}$$

$$\begin{aligned}&\exists i_0\in\mathbb{N}\ni bp-\lim_{\varrho,\varrho'\to\infty}\sum_j\sigma(i_0,j,\varrho,\varrho',k,l)=y_{i_0}\\&\text{yakınsaması } k,l\in\mathbb{N} \text{ ye göre düzgündür}\end{aligned}\tag{2.7.31}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

**(b)** 4-boyutlu bir $D=(d_{klij})$ matrisinin hemen hemen $\mathcal{C}_r$-regüler olması için, yani $(\mathcal{C}_r:\mathcal{C}_f)_{reg}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.24), (2.7.25), (2.7.30) and (2.7.31) şartlarının her $i,j\in\mathbb{N}$ için $d_{ij}=x_{j_0}=y_{i_0}=0$ ve $L=1$ için sağlanmasıdır (Zeltser ve ark., 2009).

**Lemma 2.7.16. (a)** 4-boyutlu bir $D=(d_{klij})$ matrisinin hemen hemen $\mathcal{C}_p$-konservatif olması için, yani $(\mathcal{C}_p:\mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.6), (2.7.7), (2.7.24) ve (2.7.25) şartlarının sağlanmasıdır.

**(b)** 4-boyutlu bir $D=(d_{klij})$ matrisinin hemen hemen $\mathcal{C}_p$-regüler olması için, yani $(\mathcal{C}_p:\mathcal{C}_f)_{reg}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.6), (2.7.7), (2.7.24) ve (2.7.25) şartlarının her $i,j\in\mathbb{N}$ için $d_{ij}=0$ ve $L=1$ için sağlanmasıdır (Zeltser ve ark., 2009).

**Lemma 2.7.17.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{M}_u : \mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) şartı ile birlikte

$$\forall i, j \in \mathbb{N},\ \exists d_{ij} \in \mathbb{C} \ni \quad f_2 - \lim_{k,l\to\infty} d_{klij} = d_{ij}, \tag{2.7.32}$$

$$\forall k, l, j \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{N} \ni \quad \sigma(i, j, \varrho, \varrho', k, l) = 0, \quad \forall \varrho, \varrho', i > M, \tag{2.7.33}$$

$$\forall k, l, i \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} \ni \quad \sigma(i, j, \varrho, \varrho', k, l) = 0, \quad \forall \varrho, \varrho', j > N \tag{2.7.34}$$

şartlarının sağlanmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2016a).

**Lemma 2.7.18.** **(a)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.14) ve (2.7.32) şartlarının sağlanmasıdır.

**(b)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda; 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{L}_q : \mathcal{C}_f)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (2.7.32) şartıyla birlikte

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} |d_{klij}|^q < \infty \tag{2.7.35}$$

şartının sağlanmasıdır (Tuğ, 2018b).

Çalışmanın bundan sonraki kısmında $\vartheta \in \{p, bp, r\}$ olduğu kabul edilecektir.

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, çalışmamızda kullanılan materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir.

## 3.1. Materyal

Bu doktora tez çalışmasında; KAYNAKLAR bölümünde bilgileri açık olarak yazılı olan, ulusal ve uluslararası matematik dergilerinde yayımlanmış bilimsel makalelerden, kitaplardan ve doktora tezlerinden yararlanılmıştır.

## 3.2. Yöntem

Çalışmamızda, 4-boyutlu sonsuz bir matrisin bilinen klasik çift dizi uzayları üzerindeki etki alanları olarak yeni çift dizi uzayları elde etme yöntemi kullanılmıştır.

# 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Çalışmanın dört alt başlıktan oluşan bu bölümünde, ilk olarak 4-boyutlu binomial matris tanımlanmış ve bu matrisin $r.s > 0$ için RH-regüler olduğu gösterilmiştir. Daha sonra yeni tanımlanan matrisin klasik çift dizi uzayları üzerindeki etki alanları kullanılarak yeni binomial çift dizi uzayları inşa edilmiş ve bu uzayların bazı cebirsel ve topolojik özellikleri çalışılmış, ayrıca bu uzaylarla bilinen bazı çift dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntıları incelenmiştir. Daha sonra, bu uzaylardan bazılarının $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-dualleri hesaplanmış ve son olarak yeni tanımlanan uzaylardan klasik dizi uzaylarına ve tersine birtakım matris dönüşümleri karakterize edilmiştir.

## 4.1. 4-Boyutlu Binomial Matris $B^{(r,s)}$

$r$ ve $s$ sıfırdan farklı reel sayılar ve $r+s \neq 0$ olmak üzere, $B^{(r,s)} = (b^{r,s}_{klij})$ 4-boyutlu binomial matrisini, $k, l, i, j$ birer doğal sayı olmak üzere

$$b^{r,s}_{klij} := \begin{cases} \dfrac{1}{(r+s)^{k+l}} \dbinom{k}{i} \dbinom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} & , \quad 0 \leq i \leq k \ , \ 0 \leq j \leq l, \\ \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda; 4-boyutlu binomial matrisin bir üçgen matris olduğu, tanımından açıkça görülür. Ayrıca, verilen bir $u = (u_{ij})$ çift dizisinin $B^{(r,s)}$-dönüşüm dizisi her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\nu_{kl} := \left(B^{(r,s)} u\right)_{kl} = \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij} \tag{4.1.2}$$

olarak verilir. Çalışmanın bundan sonraki kısmında aksi belirtilmedikçe $u = (u_{ij})$ ve $\nu = (\nu_{ij})$ çift dizilerinin (4.1.2) eşitliği ile bağlı oldukları, $r$, $s$ ve $r+s$ nin de sıfırdan farklı reel sayılar oldukları kabul edilecektir. Önemli bir noktaya değinmek gerekirse, Talebi (2017) ve Yeşilkayagil ve Başar (2018) çalışmalarında incelenen $E(r,s) = (e^{r,s}_{klij})$ 4-boyutlu Euler matrisi, (4.1.1) bağıntısı ile tanımladığımız $B^{(r,s)}$ 4-boyutlu binomial matrisin $r+s=1$ için özel halidir. Dolayısıyla, bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Talebi (2017) ve Yeşilkayagil ve Başar (2018) çalışmalarındaki sonuçlardan daha geneldir.

$I = (\delta_{klij})$ 4-boyutlu birim matris, yani

$$\delta_{klij} = \begin{cases} 1 \quad , & (k,l) = (i,j), \\ \\ 0 \quad , & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\delta_{klij} = \sum_{m,n} b^{r,s}_{klmn} . c^{r,s}_{mnij}$$

eşitliği kullanılarak 4-boyutlu binomial matrisin $\{B^{(r,s)}\}^{-1} = (c^{r,s}_{klij})$ tersi her $k, l, i, j$ doğal sayısı için

$$c^{r,s}_{klij} := \begin{cases} (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} & , \quad 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l, \\ \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

biçiminde verilir.

**Tanım 4.1.1.** Sınırlı $p$-yakınsak her çift diziyi $p$-yakınsak bir çift diziye üstelik aynı limitle dönüştüren 4-boyutlu bir $D$ matrisine RH-regüler matris denir (Hamilton, 1936; Robison, 1926).

**Lemma 4.1.2.** 4-boyutlu üçgen bir $D = (d_{klij})$ matrisinin RH-regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}
RH_1 &: \text{ Her bir } \quad i,j \in \mathbb{N} \quad \text{için} \quad p - \lim_{k,l\to\infty} d_{klij} = 0, \\
RH_2 &: \; p - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i,j} d_{klij} = 1, \\
RH_3 &: \; \forall j \in \mathbb{N} \quad \ni \quad p - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} |d_{klij}| = 0, \\
RH_4 &: \; \forall i \in \mathbb{N} \quad \ni \quad p - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{j} |d_{klij}| = 0, \\
RH_5 &: \; \sum_{i,j>N} |d_{klij}| < M \text{ olacak şekilde } M \text{ ve } N \text{ pozitif tam sayıları mevcuttur,}
\end{aligned}$$

şartlarının sağlanmasıdır (Hamilton, 1936; Robison, 1926).

**Teorem 4.1.3.** (4.1.1) bağıntısı ile tanımlanan $B^{(r,s)} = (b^{r,s}_{klij})$ 4-boyutlu binomial matrisi $r.s > 0$ için RH-regülerdir.

***İspat.*** $r.s > 0$ olsun. Bu durumda; $k \to \infty$ için $\frac{1}{(r+s)^k}\binom{k}{i} s^{k-i} r^i \to 0$ ve $l \to \infty$ için $\frac{1}{(r+s)^l}\binom{l}{j} r^{l-j} s^j \to 0$ olduğundan, her bir $i,j \in \mathbb{N}$ ve $k,l \to \infty$ için $b^{r,s}_{klij} \to 0$ olduğu görülür ve böylece $RH_1$ sağlanır. Ayrıca;

$$\sum_{i,j} b^{r,s}_{klij} = \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} = 1 \tag{4.1.3}$$

eşitliği göz önünde tutulduğunda $RH_2$ nin sağlandığı görülür.

$$\begin{aligned}
\sum_i |b_{klij}| &= \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{l}{j} r^{l-j} s^j \sum_i \binom{k}{i} s^{k-i} r^i \\
&= \frac{1}{(r+s)^{l}} \binom{l}{j} r^{l-j} s^j
\end{aligned}$$

olduğundan $RH_3$ sağlanır ve benzer yolla $RH_4$ şartının da sağlandığı görülür. (4.1.3) eşitliğinden ve her $k,l,i,j \in \mathbb{N}$ için $B^{(r,s)}$ matrisinin terimlerinin pozitifliğinden $RH_5$ sağlanır ve böylece $r.s > 0$ için $B^{(r,s)}$ 4-boyutlu binomial matrisin RH-regülerliği görülmüş olur.

Tezin bundan sonraki kısmında $r.s > 0$ olduğu kabul edilecektir.

## 4.2. Bazı Yeni Binomial Çift Dizi Uzayları

Bu kısımda, $B^{(r,s)}$ 4-boyutlu binomial matrisin $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_{f_0}$ çift dizi uzayları üzerindeki etki alanları olarak sırasıyla $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_q^{r,s}$, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ kümeleri tanımlandı. Daha sonra, $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_q^{r,s}$ $(1 \leq q < \infty)$, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ kümelerinin birer Banach uzayı, $\mathcal{B}_q^{r,s}$ $(0 < q < 1)$ kümesinin bir tam $q$-normlu uzay ve $\mathcal{B}^{r,s}$ kümesinin de bir tam yarı-normlu uzay olduğu gösterildi ve son olarak yeni tanımlanan uzayları ilgilendiren bazı kapsama bağıntıları ile bölüm sonlandırıldı.

Şimdi; $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_q^{r,s}$, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ kümelerini sırasıyla

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_\infty^{r,s} &= \left\{u=(u_{ij})\in\Omega : \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|(B^{(r,s)}u)_{kl}\right|<\infty\right\},\\
\mathcal{B}^{r,s} &= \left\{u=(u_{ij})\in\Omega : \exists L\in\mathbb{C}, p-\lim_{k,l\to\infty}\left|(B^{(r,s)}u)_{kl}-L\right|=0\right\},\\
\mathcal{B}_{bp}^{r,s} &= \left\{u=(u_{ij})\in\Omega : B^{(r,s)}u\in\mathcal{C}_{bp}\right\},\\
\mathcal{B}_{reg}^{r,s} &= \left\{u=(u_{ij})\in\Omega : B^{(r,s)}u\in\mathcal{C}_{r}\right\},\\
\mathcal{B}_q^{r,s} &= \left\{u=(u_{ij})\in\Omega : \sum_{k,l}\left|(B^{(r,s)}u)_{kl}\right|^q<\infty\right\} \quad (0<q<\infty),\\
\mathcal{B}_f^{r,s} &= \Bigg\{u=(u_{ij})\in\Omega : \exists L\in\mathbb{C}\ni\\
&\quad p-\lim_{\varrho,\varrho'}\sup_{k,l>0}\left|\frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)}\sum_{i=k}^{k+\varrho}\sum_{j=l}^{l+\varrho'}\left(B^{(r,s)}u\right)_{ij}-L\right|=0, k \text{ ve } l \text{ ye göre düzgün}\Bigg\},\\
\mathcal{B}_{f_0}^{r,s} &= \Bigg\{u=(u_{ij})\in\Omega :\\
&\quad p-\lim_{\varrho,\varrho'}\sup_{k,l>0}\left|\frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)}\sum_{i=k}^{k+\varrho}\sum_{j=l}^{l+\varrho'}\left(B^{(r,s)}u\right)_{ij}\right|=0, k \text{ ve } l \text{ ye göre düzgün}\Bigg\}
\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_q^{r,s}$, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ kümeleri (2.4.3) gösterimi ile sırasıyla $\mathcal{B}_\infty^{r,s}=(\mathcal{M}_u)_{B^{(r,s)}}$, $\mathcal{B}^{r,s}=(\mathcal{C}_p)_{B^{(r,s)}}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}=(\mathcal{C}_{bp})_{B^{(r,s)}}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}=(\mathcal{C}_r)_{B^{(r,s)}}$, $\mathcal{B}_q^{r,s}=(\mathcal{L}_q)_{B^{(r,s)}}$, $\mathcal{B}_f^{r,s}=(\mathcal{C}_f)_{B^{(r,s)}}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}=(\mathcal{C}_{f_0})_{B^{(r,s)}}$ biçiminde yeniden yazılabilir. Ayrıca, $\Psi$ herhangi bir çift dizi uzayı olmak üzere, $\Psi_{B^{(r,s)}}$ etki alanı binomial çift dizi uzayı olarak adlandırılır.

**Teorem 4.2.1.** $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$ kümeleri, çift dizilerde tanımlı koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birer lineer uzay ve

$$\|u\|_{\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}} = \|B^{(r,s)}u\|_{\infty} = \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|(B^{(r,s)}u)_{kl}\right| \tag{4.2.1}$$

normu ile birer Banach uzayıdır. Üstelik; $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$ uzayları sırasıyla $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarına lineer olarak norm izomorfturlar.

***İspat.*** Benzer ifadelerin tekrarından kaçınmak için teoremi yalnızca $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ kümesi için ispatlayacağız.

Öncelikle $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ kümesinin lineer uzay olduğunu gösterelim. Bunun için, $u, y \in \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ dizilerini ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ skalerlerini alalım. Bu durumda;

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|(B^{(r,s)}u)_{kl}\right| < M \qquad \text{ve} \qquad \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|(B^{(r,s)}y)_{kl}\right| < N$$

eşitsizliklerini sağlayan $M$ ve $N$ pozitif reel sayıları mevcuttur. Böylece;

$$\begin{aligned}
\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\left\{B^{(r,s)}(\lambda u + \mu y)\right\}_{kl}\right| &= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} (\lambda u_{ij} + \mu y_{ij})\right| \\
&= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\frac{\lambda}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij}\right. \\
&+ \left.\frac{\mu}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} y_{ij}\right| \\
&\leq \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left\{\left|\frac{\lambda}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij}\right|\right. \\
&+ \left.\left|\frac{\mu}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} y_{ij}\right|\right\} \\
&\leq |\lambda| \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij}\right| \\
&+ |\mu| \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} y_{ij}\right| \\
&< |\lambda| M + |\mu| N
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lambda u+\mu y\in\mathcal{B}_\infty^{r,s}$ olduğu görülür ve bu durumda $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$ bir lineer uzaydır.

Şimdi de, $\mathcal{B}_\infty^{r,s}$ uzayının (4.2.1) normu ile bir normlu uzay olduğunu ispatlayalım.
(i) Mutlak değer özelliğinden ve $r.s>0$ için 4-boyutlu binomial matris pozitif terimli olduğundan;

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}}=0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right|=0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall k,l\in\mathbb{N}\text{ için }\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right|=0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall k,l\in\mathbb{N}\text{ için }\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}=0\\
&\Leftrightarrow \quad \forall i,j\in\mathbb{N}\text{ için }u_{ij}=0
\end{aligned}$$

elde edilir ve buradan da, $\|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}}=0\Leftrightarrow u=0$ olduğu görülür.
(ii) Her $u\in\mathcal{B}_\infty^{r,s}$ ve $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\|\lambda u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}}=|\lambda|\|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}}$ eşitliğinin doğruluğu açıktır.
(iii) $u,y\in\mathcal{B}_\infty^{r,s}$ alalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\|u+y\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}} &= \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}(u_{ij}+y_{ij})\right|\\
&= \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right.\\
&+ \left.\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}y_{ij}\right|\\
&\le \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left\{\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right|\right.\\
&+ \left.\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}y_{ij}\right|\right\}\\
&\le \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right|\\
&+ \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\sum_{i,j=0}^{k,l}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}y_{ij}\right|\\
&= \|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}}+\|y\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

O halde, $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ lineer uzayı üzerinde tanımlı $\|.\|_{\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}}$ fonksiyonu norm aksiyomlarını sağladığından $(\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}, \|.\|_{\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}})$ ikilisi bir normlu lineer uzaydır.

Şimdi de, $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için; $m$ sabit bir doğal sayı olmak üzere, $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ uzayından keyfi bir $u^{(m)} = \left\{u_{kl}^{(m)}\right\}$ Cauchy dizisi alalım. Bu durumda; her $\epsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda

$$\left\|u^{(m)} - u^{(n)}\right\|_{\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}} = \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl} - \left(B^{(r,s)}u^{(n)}\right)_{kl}\right| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ doğal sayısı mevcuttur. O halde, sabit her $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ikilisi için

$$\left|\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl} - \left(B^{(r,s)}u^{(n)}\right)_{kl}\right| < \epsilon \tag{4.2.2}$$

yazılabilir ki bu da $\left\{\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl}\right\}_{m\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{M}_u$ uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Üstelik $\mathcal{M}_u$ bir Banach uzayı olduğundan bu Cauchy dizisi yakınsaktır. Bu durumda; $\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl} \longrightarrow \left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}$ $(m \to \infty)$ olsun ve söz konusu limit noktaları kullanılarak $\left\{\left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}\right\}$ dizisi tanımlansın. (4.2.2) ifadesinde $n \to \infty$ için limit alındığında her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl} - \left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}\right| < \epsilon \tag{4.2.3}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca, sabit her $m \in \mathbb{N}$ için $\left\{\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl}\right\} \in \mathcal{M}_u$ olduğu bilindiğinden $\sup_{k,l\in\mathbb{N}}\left|\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl}\right| \leq M$ olacak biçimde bir $M$ pozitif reel sayısı mevcuttur. Buradan da;

$$\left|\left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}\right| \leq \left|\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl} - \left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}\right| + \left|\left(B^{(r,s)}u^{(m)}\right)_{kl}\right| < \epsilon + M$$

bağıntısı elde edilir ve bu bağıntı üzerinde $k, l \in \mathbb{N}$ için supremum alındığında $\left\{\left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}\right\} \in \mathcal{M}_u$ ve dolayısıyla $u \in \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak; $\left\{u_{kl}^{(m)}\right\}$ dizisi, $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ bir Banach uzayıdır.

İspatın son bölümünde, $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ uzayının $\mathcal{M}_u$ uzayına lineer olarak norm izomorf olduğunu göstereceğiz. Bunun için; bu uzayların birinden diğerine birebir, örten, lineer ve normu koruyan bir dönüşümünün mevcut olduğunu göstereceğiz. Şimdi, bir $T$ dönüşümü

$$\begin{aligned} T : \mathcal{B}_{\infty}^{r,s} &\rightarrow \mathcal{M}_u \\ u &\mapsto Tu = \left\{ \left( B^{(r,s)} u \right)_{kl} \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Her $u, y \in \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ için

$$T(\lambda u + \mu y) = \left\{ \left( B^{(r,s)} (\lambda u + \mu y) \right)_{kl} \right\} = \lambda \left\{ \left( B^{(r,s)} u \right)_{kl} \right\} + \mu \left\{ \left( B^{(r,s)} y \right)_{kl} \right\}$$

eşitliğinden $T$ dönüşümünün lineerliği görülür.

Üstelik,

$$Tu = \begin{bmatrix} u_{00} & \vdots & \sum_{j=0}^{l} \frac{1}{(r+s)^l} \binom{l}{j} s^j r^{l-j} u_{0j} & \vdots \\ \frac{su_{00}+ru_{10}}{r+s} & \vdots & \sum_{i=0,j=0}^{1,l} \frac{1}{(r+s)^{1+l}} \binom{1}{i} \binom{l}{j} s^{1+j-i} r^{l+i-j} u_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{(r+s)^k} \binom{k}{i} s^{k-i} r^i u_{ij} & \vdots & \sum_{i=0,j=0}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \theta$$

eşitliği, ancak her $i, j \in \mathbb{N}$ için $u_{ij} = 0$ olması ile mümkün olacağından, $T$ dönüşümünün çekirdeğinin sıfır vektöründen ibaret olduğu anlaşılır ki bu da $T$ dönüşümün birebir olması demektir.

Herhangi bir $\nu = (\nu_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ dizisi yardımıyla her $k, l \in \mathbb{N}$ için $u = (u_{kl})$ dizisini

$$\begin{aligned} u_{kl} &= \{ (B^{(r,s)})^{-1} \nu \}_{kl} \\ &= \sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} \nu_{ij} \end{aligned} \qquad (4.2.4)$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}} &= \|B^{(r,s)}u\|_\infty \\
&= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i,j=0}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij} \right| \\
&= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i,j=0}^{k,l} \delta_{klij}\nu_{ij} \right| \\
&= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} |\nu_{kl}| = \|\nu\|_\infty < \infty
\end{aligned}$$

ifadesinden $u \in \mathcal{B}_\infty^{r,s}$ olduğu ve dolayısıyla $T$ dönüşümünün örtenliği ve ayrıca normu koruduğu kolayca görülmüş olur.

**Teorem 4.2.2.** $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{B}_\infty^{r,s}$ kesin kapsaması mevcuttur.

***İspat.*** Herhangi bir $u = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_u$ çift dizisini alalım. Bu durumda; $\|u\|_\infty = \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |u_{ij}| \leq M$ olacak şekilde bir $M$ pozitif reel sayısı mevcuttur. Böylece;

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}} &= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij} \right| \\
&\leq \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left\{ \left| \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} \right| |u_{ij}| \right\} \\
&\leq \sup_{i,j\in\mathbb{N}} |u_{ij}| \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} \right| \\
&= \|u\|_\infty
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $u \in \mathcal{B}_\infty^{r,s}$ olduğu ve dolayısıyla $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{B}_\infty^{r,s}$ olduğu görülür.

Şimdi kapsamanın kesinliğini gösterelim. Her $i, j \in \mathbb{N}$ için $u_{ij} = \frac{(-s-r)^{i+j}}{r^i s^j}$ genel terimi ile tanımlanan $u = (u_{ij})$ çift dizisini göz önüne alalım. Bu durumda, $r.s > 0$ olduğu akılda tutularak

$$\begin{aligned}
\|u\|_\infty &= \sup_{i,j\in\mathbb{N}} \left| \frac{(-s-r)^{i+j}}{r^i s^j} \right| \\
&= \sup_{i,j\in\mathbb{N}} \left| \left(1+\frac{s}{r}\right)^i \left(1+\frac{r}{s}\right)^j \right| \qquad (4.2.5)
\end{aligned}$$

eşitliğinden $u = (u_{ij}) \notin \mathcal{M}_u$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $u$ dizisinin $B^{(r,s)}$-dönüşüm dizisi

$$\begin{aligned}\left(B^{(r,s)}u\right)_{kl} &= \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i}\binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} \frac{(-s-r)^{i+j}}{r^i s^j} \\ &= \frac{1}{(r+s)^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} s^{k-i}(-s-r)^i \frac{1}{(r+s)^l} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} r^{l-j}(-s-r)^j \\ &= (-1)^{k+l} \left(\frac{r}{r+s}\right)^k \left(\frac{s}{r+s}\right)^l \qquad (4.2.6)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece, $r.s > 0$ olduğundan ve (4.2.6) bağıntısından

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathcal{B}_\infty^{r,s}} &= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\left(B^{(r,s)}u\right)_{kl}\right| \\ &= \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \left|\left(\frac{r}{r+s}\right)^k \left(\frac{s}{r+s}\right)^l\right| < \infty \qquad (4.2.7)\end{aligned}$$

ifadesi ve buradan da $u \in \mathcal{B}_\infty^{r,s}$ olduğu görülmüş olur. O halde; $u \in \mathcal{B}_\infty^{r,s} - \mathcal{M}_u$ olduğundan $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{B}_\infty^{r,s}$ kesin kapsaması geçerlidir.

**Teorem 4.2.3.** $\mathcal{B}^{r,s}$ kümesi,

$$\|u\|_{\mathcal{B}^{r,s}} = \lim_{i\to\infty}\left[\sup_{k,l\geq i}\left|(B^{(r,s)}u)_{kl}\right|\right]$$

yarı-normu ile bir tam yarı-normlu uzaydır. Ayrıca; $\mathcal{B}^{r,s}$ çift dizi uzayı $\mathcal{C}_p$ uzayına lineer olarak izomorftur.

***İspat.*** Teorem 4.2.1'nin ispatına benzer olarak yapılabileceğinden teoremin ispatı verilmeyecektir.

**Teorem 4.2.4.** $\mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{B}^{r,s}$ kapsaması mevcuttur.

***İspat.*** $p - \lim_{i,j\to\infty} u_{ij} = L$ olacak biçimde bir $u = (u_{ij}) \in \mathcal{C}_{bp}$ dizisini alalım. 4-boyutlu binomial matris RH-regüler olduğundan, $\nu = (\nu_{kl}) = (B^{(r,s)}u)_{kl}$ olmak üzere $p - \lim_{k,l\to\infty} \nu_{kl} = L$ bulunur. Yani; $\nu$ dizisi $\mathcal{C}_p$ uzayına ve dolayısıyla $u$ dizisi $\mathcal{B}^{r,s}$ uzayına aittir. Böylece; $\mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{B}^{r,s}$ olduğu görülür.

**Teorem 4.2.5.** $\mathcal{B}_q^{r,s}$ kümesi çift dizilerde tanımlı koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir lineer uzaydır ve aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

**(i)** $0 < q < 1$ olması durumunda, $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayı

$$\|u\|^{\wr}_{\mathcal{B}_q^{r,s}} = \|B^{(r,s)}u\|^{\wr}_{\mathcal{L}_q} = \sum_{k,l}\left|\sum_{i,j}^{k,l}\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right|^q \quad (4.2.8)$$

$q$-normu ile bir tam $q-$normlu uzaydır. Üstelik; $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayı $\mathcal{L}_q$ uzayına lineer olarak $q$-norm izomorftur.

**(ii)** $1 \le q < \infty$ olması durumunda, $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayı

$$\|u\|_{\mathcal{B}_q^{r,s}} = \|B^{(r,s)}u\|_q = \left(\sum_{k,l}\left|\sum_{i,j}^{k,l}\frac{1}{(r+s)^{k+l}}\binom{k}{i}\binom{l}{j}s^{k+j-i}r^{l+i-j}u_{ij}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.2.9)$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Üstelik; $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayı $\mathcal{L}_q$ uzayına lineer olarak norm izomorftur.

***İspat.*** (i) ifadesinin ispatı benzer şekilde yapılabileceğinden ve gereksiz tekrardan kaçınmak için teorem yalnız (ii) için ispatlanacaktır.

$1 \le q < \infty$ için; $\mathcal{B}_q^{r,s}$ kümesinin (4.2.9) normu ile bir normlu lineer uzay olduğu ve $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayının $\mathcal{L}_q$ uzayına lineer olarak norm izomorf olduğu Teorem 4.2.1'in ispatındakine benzer yoldan gösterilebilir.

$\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayının Banach uzayı olduğunu göstermek için Boss (2000) çalışmasında Sonuç 6.3.41'in (b) bölümünde geçen "$(X,\sigma)$ ve $(Y,\varsigma)$ yarı-normlu uzaylar ve $T:(X,\sigma)\to(Y,\varsigma)$ dönüşümü de bir izometrik izomorfizm olsun. O hâlde, $(X,\sigma)$ uzayının tam olması için gerek ve yeter koşul; $(Y,\varsigma)$ uzayının tam olmasıdır. Özel olarak, $(X,\sigma)$ uzayının bir Banach uzay olması için gerek ve yeter koşul; $(Y,\varsigma)$ uzayının bir Banach uzay olmasıdır" ifadesinden yararlanacağız. $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayından $\mathcal{L}_q$ uzayına $Tu = B^{(r,s)}u$ olarak tanımlanan $T$ dönüşümü bir izometrik izomorfizmdir. Üstelik; Başar ve Sever (2009) çalışmasındaki Teorem 2.1 den $\mathcal{L}_q$ uzayının bir Banach uzayı olduğu bilinmektedir. O halde; $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayı da bir Banach uzayıdır.

**Teorem 4.2.6.** $1 \leq q < \infty$ için $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{B}_q^{r,s}$ kesin kapsaması mevcuttur.

***İspat.*** Herhangi bir $u = (u_{ij}) \in \mathcal{L}_q$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda; (4.1.2) bağıntısı ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
|\nu_{kl}|^q &= \left| \sum_{i,j}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} u_{ij} \right|^q \\
&\leq \left( \sum_{i,j}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} |u_{ij}|^q \right) \\
&\times \left( \sum_{i,j}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} \right)^{q-1} \\
&= \left( \sum_{i,j}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} |u_{ij}|^q \right) \\
&\times \left( \frac{1}{(r+s)^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} s^{k-i} r^i \frac{1}{(r+s)^l} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} s^j r^{l-j} \right)^{q-1} \\
&= \sum_{i,j}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} |u_{ij}|^q \qquad (4.2.10)
\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. (4.2.10) bağıntısının her iki yanında $k, l$ üzerinden toplam alındığında

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l} |\nu_{kl}|^q &\leq \sum_{k,l} \left( \sum_{i,j}^{k,l} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} |u_{ij}|^q \right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} |u_{ij}|^q \left( \sum_{k=i}^{\infty} \sum_{l=j}^{\infty} \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} \right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} |u_{ij}|^q \left( \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{(r+s)^k} \binom{k}{i} s^{k-i} r^i \sum_{l=j}^{\infty} \frac{1}{(r+s)^l} \binom{l}{j} r^{l-j} s^j \right) \\
&= \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} |u_{ij}|^q \left( \sum_{k=i}^{\infty} \binom{k}{i} \left( \frac{s}{r+s} \right)^k \left( \frac{r}{s} \right)^i \sum_{l=j}^{\infty} \binom{l}{j} \left( \frac{r}{r+s} \right)^l \left( \frac{s}{r} \right)^j \right) \\
&= \frac{(r+s)^2}{rs} \sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} |u_{ij}|^q
\end{aligned}$$

bağıntısı ve bu bağıntı yardımıyla da

$$\|u\|_{\mathcal{B}_q^{r,s}} \leq \left( \frac{(r+s)^2}{rs} \right)^{1/q} \|u\|_q$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece; $\nu \in \mathcal{L}_q$ ve dolayısıyla $u \in \mathcal{B}_q^{r,s}$ olduğu görülür.

Kapsamanın kesinliğini göstermek için $u = (u_{ij}) = ((-1)^{i+j})$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\sum_{i,j=0}^{\infty,\infty} \left|(-1)^{i+j}\right|^q = \infty$$

olduğundan $u$ dizisi $\mathcal{L}_q$ uzayında değildir. Diğer taraftan, bu dizinin $B^{(r,s)}$-dönüşüm dizisi

$$\begin{aligned}
\left(B^{(r,s)}u\right)_{kl} &= \frac{1}{(r+s)^{k+l}} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k+j-i} r^{l+i-j} (-1)^{i+j} \\
&= \frac{1}{(r+s)^k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} s^{k-i}(-r)^i \frac{1}{(r+s)^l} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} r^{l-j}(-s)^j \\
&= \left(\frac{s-r}{r+s}\right)^k \left(\frac{r-s}{r+s}\right)^l
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. $r.s > 0$ için $\left|\frac{s-r}{s+r}\right| < 1$ olduğundan

$$\sum_{k,l=0}^{\infty,\infty} \left|\left(\frac{s-r}{r+s}\right)^k \left(\frac{r-s}{r+s}\right)^l\right|^q < \infty$$

bulunur ki bu da $\left(B^{(r,s)}u\right)$ dizisinin $\mathcal{L}_q$ uzayında, dolayısıyla $u$ dizisinin $\mathcal{B}_q^{r,s}$ uzayında olduğu anlamına gelir ve böylece ispat tamamlanmış olur.

**Teorem 4.2.7.** $1 \leq q < q_1 < \infty$ olsun. Bu durumda; $\mathcal{B}_q^{r,s} \subset \mathcal{B}_{q_1}^{r,s}$ kapsaması mevcuttur.

***İspat.*** Herhangi bir $u = (u_{ij}) \in \mathcal{B}_q^{r,s}$ dizisi için $B^{(r,s)}u \in \mathcal{L}_q$ olduğu açıktır. Başar ve Sever (2009) çalışmasından, $1 \leq q < q_1 < \infty$ için $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{L}_{q_1}$ olduğu bilindiğinden $B^{(r,s)}u \in \mathcal{L}_{q_1}$ ve dolayısıyla $u \in \mathcal{B}_{q_1}^{r,s}$ elde edilir. O halde, $\mathcal{B}_q^{r,s} \subset \mathcal{B}_{q_1}^{r,s}$ kapsaması görülür.

**Teorem 4.2.8.** $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ kümeleri,

$$\|u\|_{\mathcal{B}_f^{r,s}} = \sup_{\varrho,\varrho',k,l \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)} \sum_{i=k}^{k+\varrho} \sum_{j=l}^{l+\varrho'} \left(B^{(r,s)}u\right)_{i,j} \right| \tag{4.2.11}$$

normu ile birer Banach uzayıdır. Üstelik; $\mathcal{B}_f^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ uzayları, sırasıyla $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_{f_0}$ uzaylarına lineer olarak norm izomorftur.

***İspat.*** $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ kümesi için benzer ifadeleri tekrarlamamak adına ispat yalnız $\mathcal{B}_f^{r,s}$ kümesi için verilecektir.

$\mathcal{B}_f^{r,s}$ kümesinin normlu lineer uzay olduğu Teorem 4.2.1' in ispatındakine benzer yolla gösterilebilir. $T : \mathcal{B}_f^{r,s} \to \mathcal{C}_f$, $u \mapsto \nu = Tu = B^{(r,s)}u$ olarak tanımlanan $T$ dönüşümünün lineerliği açıktır. $Tu = \theta$ eşitliği, ancak her $i, j \in \mathbb{N}$ için $u_{ij} = 0$ olmasıyla, yani $u = \theta$ olmasıyla mümkündür. O halde; $T$ dönüşümü birebirdir.

Her $\nu \in \mathcal{C}_f$ için $u = (u_{kl})$ dizisi,

$$u_{kl} = \sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} \nu_{ij}$$

olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathcal{B}_f^{r,s}} &= \sup_{\varrho,\varrho',k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)} \sum_{i=k}^{k+\varrho} \sum_{j=l}^{l+\varrho'} \left(B^{(r,s)}u\right)_{ij} \right| \\ &= \sup_{\varrho,\varrho',k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)} \sum_{i=k}^{k+\varrho} \sum_{j=l}^{l+\varrho'} \nu_{ij} \right| = \|\nu\|_{\mathcal{C}_f} \end{aligned}$$

eşitliğinden $T$ dönüşümünün örtenliği ve normu koruduğu görülür. Sonuç olarak, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ uzayı $\mathcal{C}_f$ uzayına lineer olarak norm izomorftur. O halde, Boss (2000) çalışmasındaki Sonuç 6.3.41'in (b) kısmından, $\mathcal{B}_f^{r,s}$ uzayı bir Banach uzayıdır.

**Teorem 4.2.9.** $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{B}_f^{r,s}$ kesin kapsaması mevcuttur.

***İspat.*** Herhangi bir $u \in \mathcal{M}_u$ çift dizisini alalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{B}_f^{r,s}} &= \sup_{\varrho,\varrho',k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)} \sum_{i=k}^{k+\varrho} \sum_{j=l}^{l+\varrho'} \left(B^{(r,s)}u\right)_{ij} \right| \\
&\leq \sup_{\varrho,\varrho',k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)} \sum_{i=k}^{k+\varrho} \sum_{j=l}^{l+\varrho'} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{j} b_{ijmn}^{r,s} \right| |u_{mn}| \\
&\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |u_{mn}| \sup_{\varrho,\varrho',k,l\in\mathbb{N}} \left| \frac{1}{(\varrho+1)(\varrho'+1)} \sum_{i=k}^{k+\varrho} \sum_{j=l}^{l+\varrho'} \sum_{m=0}^{i} \sum_{n=0}^{j} b_{ijmn}^{r,s} \right| \\
&= \|u\|_\infty
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $u$ dizisinin $\mathcal{B}_f^{r,s}$ dizi uzayında olduğu görülür.

Kapsamanın kesinliğini göstermek için $u = (u_{kl}) = \frac{(-s-r)^{k+l}}{r^k s^l}$ çift dizisini göz önüne alalım. Bu durumda; Teorem 4.2.2'nin ispatından $u$ dizisinin $\mathcal{M}_u$ uzayının elemanı olmadığı fakat bu dizinin $B^{(r,s)}$-dönüşüm dizisi olan $(B^{(r,s)}u)_{kl} = (-1)^{k+l}\left(\frac{r}{r+s}\right)^k\left(\frac{s}{r+s}\right)^l$ dizisinin $\mathcal{M}_u$ uzayının elemanı olduğu bilinmektedir. Bununla birlikte; $r.s > 0$ için

$$-1 < -\frac{r}{r+s} < 0 \qquad \text{ve} \qquad -1 < -\frac{s}{r+s} < 0$$

eşitsizliklerinden

$$p-\lim_{k,l\to\infty}(B^{(r,s)}u)_{kl} = p-\lim_{k,l\to\infty}\left(-\frac{r}{r+s}\right)^k\left(-\frac{s}{r+s}\right)^l = 0$$

olduğu görülür. O halde, $B^{(r,s)}u \in \mathcal{C}_p$ olur. Buradan; $B^{(r,s)}u \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_p = \mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{C}_f$ olur ki bu da $u \in \mathcal{B}_f^{r,s}$ olması demektir. Bütün bu söylenenlerin ışığında; $u$ dizisinin $\mathcal{B}_f^{r,s} - \mathcal{M}_u$ fark kümesinin elemanı olduğu ve buradan da kapsamanın kesinliği görülür.

## 4.3. Dual Uzaylar

Bir çift dizi uzayının $\alpha$- ve $\gamma$-dualleri bir tek olmasına rağmen $\vartheta$-yakınsaklığa bağlı olarak, $\beta(\vartheta)$-duali birden fazla olabilir. Yeni tanımlanan binomial çift dizi uzayları ve bu uzayların bu kısımda hesaplanan dualleri Çizelge 4.2 de listelenmiştir.

Çizelge 4.2: Binomial çift dizi uzayları ve bu kısımda hesaplanan dualleri

| $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ | $\mathcal{B}^{r,s}$ | $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$ | $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$ | $\mathcal{B}_{q}^{r,s}(0<q\leq 1)$ | $\mathcal{B}_{q}^{r,s}(1<q<\infty)$ | $\mathcal{B}_{f}^{r,s}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha,\beta(p),\beta(bp),\gamma$ | $\beta(\vartheta)$ | $\beta(\vartheta),\gamma$ | $\beta(\vartheta)$ | $\alpha,\beta(bp),\gamma$ | $\beta(bp)$,$\gamma$ | $\alpha$,$\beta(bp)$,$\gamma$ |

**Teorem 4.3.1.** $\Psi \in \left\{\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}, \mathcal{B}_{f}^{r,s}\right\}$ olmak üzere $\Psi^{\alpha} = \mathcal{L}_u$.

***İspat.*** Benzer ifadelerin tekrarından kaçınmak amacıyla ispat yalnız $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ dizi uzayı için verilecektir.

Bunun için, $t = (t_{kl}) \in (\mathcal{B}_{\infty}^{r,s})^{\alpha} - \mathcal{L}_u$ çift dizisini alalım. Bu durumda $\alpha$-dual tanımından, her $u = (u_{kl}) \in \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ için $\sum_{k,l} |t_{kl}u_{kl}| < \infty$ eşitsizliği geçerlidir. Şimdi; Zeltser (2002) çalışmasındaki gibi, her $k, l, i, j \in \mathbb{N}$ için, $e^{kl} = (e_{ij}^{kl})$ çift dizisini

$$e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & , \quad (k,l) = (i,j), \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım ve buradan da $e = \sum_{k,l} e^{kl}$ (koordinatsal toplam) biçiminde ifade edilen $e$ dizisini ele alalım. Bu durumda; $e \in \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan, $te = t$ ve $t \notin \mathcal{L}_u$ olduğundan,

$$\sum_{k,l} |t_{kl}e| = \sum_{k,l} |t_{kl}| = \infty$$

ve buradan da $t \notin (\mathcal{B}_{\infty}^{r,s})^{\alpha}$ ifadesine ulaşılır fakat bu ifade, başlangıçtaki $t = (t_{kl}) \in (\mathcal{B}_{\infty}^{r,s})^{\alpha} - \mathcal{L}_u$ kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla, $(\mathcal{B}_{\infty}^{r,s})^{\alpha} \subset \mathcal{L}_u$ kapsaması mevcuttur.

Tersine; $t = (t_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ ve $u = (u_{kl}) \in \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ çift dizilerini alalım. Bu durumda, (4.1.2) eşitliğinden $\nu = (\nu_{kl}) \in \mathcal{M}_u$ çift dizisi ve buradan da $\sup_{k,l\in\mathbb{N}} |\nu_{kl}| < \eta$ olacak şekilde

$\eta \in \mathbb{R}^+$ sayısı mevcuttur. O halde; (4.2.4) ifadesi dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
\sum_{k,l} |t_{kl} u_{kl}| &= \sum_{k,l} |t_{kl}| \left| \sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} \nu_{ij} \right| \\
&\leq \sum_{k,l} |t_{kl}| \left| \frac{1}{r^k s^l} \sum_{i,j=0}^{k,l} \binom{k}{i} \binom{l}{j} (-s)^{k-i} (r+s)^i (-r)^{l-j} (r+s)^j \right| |\nu_{ij}| \\
&\leq \eta \sum_{k,l} |t_{kl}| \left| \frac{1}{r^k s^l} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-s)^{k-i} (r+s)^i \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (-r)^{l-j} (r+s)^j \right| \\
&= \eta \sum_{k,l} |t_{kl}|
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden $t = (t_{kl}) \in (\mathcal{B}_\infty^{r,s})^\alpha$ olduğu kolayca görülür. Böylece, $\mathcal{L}_u \subset (\mathcal{B}_\infty^{r,s})^\alpha$ kapsaması geçerlidir ve bu da ispatı tamamlar.

**Teorem 4.3.2.** $\Upsilon$ kümesi

$$\Upsilon = \left\{ t = (t_{ij}) \in \Omega : \sup_{i,j \in \mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} t_{kl} \right| < \infty \right\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda; $0 < q \leq 1$ için $\left(\mathcal{B}_q^{r,s}\right)$ uzayının $\alpha$-duali $\Upsilon$ kümesidir.

***İspat.*** Her $k, l, i, j \in \mathbb{N}$ için 4-boyutlu $G^{r,s} = (g_{klij}^{r,s})$ matrisi

$$g_{klij}^{r,s} := \begin{cases} (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} t_{kl} & , \quad 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l, \\ \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

olarak tanımlandığında, (4.2.4) bağıntısı kullanılarak her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
t_{kl} u_{kl} &= t_{kl} \sum_{i,j=0}^{k,l} (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} \nu_{ij} \\
&= \sum_{i,j=0}^{k,l} \left\{ (-1)^{k+l-(i+j)} \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} t_{kl} \right\} \nu_{ij} \\
&= (G^{r,s} \nu)_{kl} \qquad (4.3.1)
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Bu durumda, (4.3.1) bağıntısından "$u \in \mathcal{B}_q^{r,s}$ olduğunda $tu = (t_{kl}u_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ olması için gerek ve yeter koşul $\nu \in \mathcal{L}_q$ olduğunda $G^{r,s}\nu \in \mathcal{L}_u$ olmasıdır" çift gerektirmesine ulaşılır. Böylece, $t = (t_{kl}) \in \left(\mathcal{B}_q^{r,s}\right)^\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $G^{r,s} \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{L}_u)$ olmasıdır. O halde, Lemma 2.7.9, $q_1 = 1$ için dikkate alındığında

$$\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \binom{k}{i} \binom{l}{j} s^{k-l-i} r^{l-k-j} (r+s)^{i+j} t_{kl} \right| < \infty$$

olduğu görülür. Bu ise, $0 < q \leq 1$ için $\left(\mathcal{B}_q^{r,s}\right)$ uzayının $\alpha$-dualinin $\Upsilon$ kümesi olması anlamına gelir.

Şimdi de, yeni tanımladığımız binomial çift dizi uzaylarının $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-duallerini hesaplamada kullanılacak $\varpi_k$ $(k \in \{1, 2, ..., 22\})$ kümelerini

$$\begin{aligned}
\varpi_1 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} |\chi(k,l,i,j,m,n)| < \infty\right\}, \\
\varpi_2 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists d_{ij} \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \chi(k,l,i,j,m,n) = d_{ij},\ \forall i,j \in \mathbb{N}\right\}, \\
\varpi_3 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists L \in \mathbb{C} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i,j} \chi(k,l,i,j,m,n) = L\right\}, \\
\varpi_4 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists j_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} |\chi(k,l,i,j_0,m,n) - d_{ij_0}| = 0\right\}, \\
\varpi_5 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists i_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{j} |\chi(k,l,i_0,j,m,n) - d_{i_0 j}| = 0\right\}, \\
\varpi_6 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \forall i \in \mathbb{N}, \exists j_0 \in \mathbb{N} \ni \chi(k,l,i,j,m,n) = 0, \forall j > j_0, \forall k,l \in \mathbb{N}\right\}, \\
\varpi_7 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \forall j \in \mathbb{N}, \exists i_0 \in \mathbb{N} \ni \chi(k,l,i,j,m,n) = 0, \forall i > i_0, \forall k,l \in \mathbb{N}\right\}, \\
\varpi_8 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists j_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i} \chi(k,l,i,j_0,m,n) = x_{j_0}\right\}, \\
\varpi_9 &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists i_0 \in \mathbb{N} \ni \vartheta - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{j} \chi(k,l,i_0,j,m,n) = y_{i_0}\right\}, \\
\varpi_{10} &= \left\{t = (t_{ij}) \in \Omega : \exists d_{ij} \in \mathbb{C} \ni bp - \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i,j} |\chi(k,l,i,j,m,n) - d_{ij}| = 0\right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\varpi_{11} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \forall i\in\mathbb{N}\ni bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{j=0}^{l}\chi(k,l,i,j,m,n) \quad \text{mevcuttur}\right\},\\
\varpi_{12} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \forall j\in\mathbb{N}\ni bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\chi(k,l,i,j,m,n) \quad \text{mevcuttur}\right\},\\
\varpi_{13} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \sum_{i,j}|\chi(k,l,i,j,m,n)| \quad \text{yakınsaktır}\right\},\\
\varpi_{14} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \sup_{k,l,i,j\in\mathbb{N}}|\chi(k,l,i,j,m,n)|<\infty\right\},\\
\varpi_{15} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \exists a_{ij}\in\Omega\ni bp-\lim_{k,l\to\infty}\chi(k,l,i,j,m,n)=a_{ij}\right\},\\
\varpi_{16} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \sup_{k,l\in\mathbb{N}}\sum_{i,j}|\chi(k,l,i,j,m,n)|^{q'}<\infty\right\},\\
\varpi_{17} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \exists d_{ij}\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{k,l\to\infty}\chi(k,l,i,j,m,n)=d_{ij}\right\},\\
\varpi_{18} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \exists L\in\mathbb{C}\ni bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{i,j}\chi(k,l,i,j,m,n)=L\right\},\\
\varpi_{19} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \exists j_0\in\mathbb{N}\ni \right.\\
&\qquad\qquad \left. bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{i}|\chi(k,l,i,j_0,m,n)-d_{ij_0}|=0, \quad \forall i\in\mathbb{N}\right\},\\
\varpi_{20} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : \exists i_0\in\mathbb{N}\ni \right.\\
&\qquad\qquad \left. bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{j}|\chi(k,l,i_0,j,m,n)-d_{i_0j}|=0, \quad \forall j\in\mathbb{N}\right\},\\
\varpi_{21} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{i}\sum_{j}|\triangle_{01}\chi(k,l,i,j,m,n)|=0\right\},\\
\varpi_{22} &= \left\{t=(t_{ij})\in\Omega : bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{i}\sum_{j}|\triangle_{10}\chi(k,l,i,j,m,n)|=0\right\}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlayalım. Burada;

$$
\chi(k,l,i,j,m,n)=\sum_{m=i}^{k}\sum_{n=j}^{l}(-1)^{m+n-(i+j)}\binom{m}{i}\binom{n}{j}s^{m-n-i}r^{n-m-j}(r+s)^{i+j}t_{mn}
$$

biçimindedir.

**Teorem 4.3.3.** Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

**(i)** $\left(\mathcal{B}_{bp}^{r,s}\right)^{\beta(\vartheta)} = \bigcap_{k=1}^{5} \varpi_k$.

**(ii)** $\left(\mathcal{B}^{r,s}\right)^{\beta(\vartheta)} = \bigcap_{k=1}^{3} \varpi_k \cap \varpi_6 \cap \varpi_7$.

**(iii)** $\left(\mathcal{B}_{reg}^{r,s}\right)^{\beta(\vartheta)} = \bigcap_{k=1}^{3} \varpi_k \cap \varpi_8 \cap \varpi_9$.

**(iv)** $\left(\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}\right)^{\beta(bp)} = \varpi_1 \cap \varpi_2 \bigcap_{k=10}^{13} \varpi_k$.

**(v)** $\left(\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}\right)^{\beta(p)} = \varpi_2 \cap \varpi_6 \cap \varpi_7$.

**(vi)** $\left(\mathcal{B}_{f}^{r,s}\right)^{\beta(bp)} = \varpi_1 \bigcap_{k=17}^{22} \varpi_k$.

**(vii)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda, $\left(\mathcal{B}_{q}^{r,s}\right)^{\beta(bp)} = \varpi_{14} \cap \varpi_{15}$.

**(viii)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda, $\left(\mathcal{B}_{q}^{r,s}\right)^{\beta(bp)} = \varpi_{15} \cap \varpi_{16}$.

***İspat.*** (i) $t = (t_{kl}) \in \Omega$ ve $u = (u_{kl}) \in \mathcal{B}_{bp}^{r,s}$ çift dizilerini alalım. Bu durumda; (4.1.2) bağıntısından $\nu = (\nu_{kl}) \in \mathcal{C}_{bp}$ olduğu görülür. Buradan, 4-boyutlu $O^{r,s} = \left(o_{klij}^{r,s}\right)$ matrisi her $k, l, i, j \in \mathbb{N}$

$$o_{klij}^{r,s} = \begin{cases} \chi(k,l,i,j,m,n) & , \quad 0 \leq i \leq k, \ 0 \leq j \leq l, \\ \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

biçiminde tanımlandığında, (4.2.4) eşitliğinden her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} z_{kl} &= \sum_{i,j=0}^{k,l} t_{ij} u_{ij} \\ &= \sum_{i,j=0}^{k,l} t_{ij} \left\{ \sum_{m,n=0}^{i,j} (-1)^{i+j-(m+n)} \binom{i}{m} \binom{j}{n} s^{i-j-m} r^{j-i-n} (r+s)^{m+n} \nu_{mn} \right\} \\ &= \sum_{i,j=0}^{k,l} \left\{ \sum_{m=i}^{k} \sum_{n=j}^{l} (-1)^{m+n-(i+j)} \binom{m}{i} \binom{n}{j} s^{m-n-i} r^{n-m-j} (r+s)^{i+j} t_{mn} \right\} \nu_{ij} \\ &= (O^{r,s}\nu)_{kl} \end{aligned} \qquad (4.3.2)$$

ifadesi elde edelir. Böylece, (4.3.2) ifadesinden "$u = (u_{kl}) \in \mathcal{B}_{bp}^{r,s}$ olduğunda $tu = (t_{kl}u_{kl}) \in \mathcal{CS}_{\vartheta}$ olması için gerek ve yeter koşul $\nu = (\nu_{kl}) \in \mathcal{C}_{bp}$ olduğunda $z = (z_{kl}) \in$

$\mathcal{C}_\vartheta$ olmasıdır" çift gerektirmesi elde edilir. O halde, $t = (t_{kl}) \in \left(\mathcal{B}_{bp}^{r,s}\right)^{\beta(\vartheta)}$ olması için gerek ve yeter koşul $O^{r,s} \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{C}_\vartheta)$ olmasıdır ve ispat, Lemma 2.7.1 yardımıyla tamamlanmış olur.

Teoremin diğer kısımlarının ispatları, sırasıyla Lemma 2.7.2, Lemma 2.7.3, Lemma 2.7.5, Lemma 2.7.7, Lemma 2.7.11 ve Lemma 2.7.10 göz önünde bulundurularak (i) kısmının ispatına benzer şekilde yapılabilir.

**Teorem 4.3.4.** Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

**(i)** $\left(\mathcal{B}_f^{r,s}\right)^\gamma = \varpi_1 \cap \mathcal{CS}_\vartheta$.

**(ii)** $(\mathcal{B}_\infty^{r,s})^\gamma = \varpi_1$.

**(iii)** $\left(\mathcal{B}_{bp}^{r,s}\right)^\gamma = \varpi_1$.

**(vi)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda, $\left(\mathcal{B}_q^{r,s}\right)^\gamma = \varpi_{14}$.

**(v)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda, $\left(\mathcal{B}_q^{r,s}\right)^\gamma = \varpi_{16}$.

***İspat.*** (i) $t = (t_{kl}) \in \Omega$ ve $u = (u_{kl}) \in \mathcal{B}_f^{r,s}$ çift dizileri verilmiş olsun. Bu durumda, (4.1.2) bağıntısından $\nu = (\nu_{kl}) = B^{(r,s)}u \in \mathcal{C}_f$ olur. $O^{r,s} = \left(o_{klij}^{r,s}\right)$ 4-boyutlu matrisi Teorem 4.3.3 te olduğu gibi tanımlandığında (4.2.4) ifadesinden, her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
z_{kl} &= \sum_{i,j=0}^{k,l} t_{ij}u_{ij} \\
&= \sum_{i,j=0}^{k,l} t_{ij} \left\{ \sum_{m,n=0}^{i,j} (-1)^{i+j-(m+n)} \binom{i}{m} \binom{j}{n} s^{i-j-m} r^{j-i-n} (r+s)^{m+n} \nu_{mn} \right\} \\
&= \sum_{i,j=0}^{k,l} \left\{ \sum_{m=i}^{k} \sum_{n=j}^{l} (-1)^{m+n-(i+j)} \binom{m}{i} \binom{n}{j} s^{m-n-i} r^{n-m-j} (r+s)^{i+j} t_{mn} \right\} \nu_{ij} \\
&= (O^{r,s}\nu)_{kl}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edelir. Bu durumda; yukarıdaki eşitlikten "$u = (u_{kl}) \in \mathcal{B}_f^{r,s}$ olduğunda $tu \in \mathcal{BS}$ olması için gerek ve yeter koşul $\nu \in \mathcal{C}_f$ olduğunda $z \in \mathcal{M}_u$ olmasıdır" çift gerektirmesine ulaşılır. O halde; $t \in \left(\mathcal{B}_f^{r,s}\right)^\gamma$ olması için gerek ve yeter koşul $O^{r,s} \in (\mathcal{C}_f : \mathcal{M}_u)$ olmasıdır. Bütün bu söylenenlerden hareketle, Lemma 2.7.12 göz önünde bulundurulduğunda $\left(\mathcal{B}_f^{r,s}\right)^\gamma = \varpi_1 \cap \mathcal{CS}_\vartheta$ olduğu görülür.

Teoremin diğer kısımlarının ispatları, sırasıyla Lemma 2.7.6, Lemma 2.7.4 ve Lemma 2.7.8 yardımıyla (i) kısmının ispatına benzer şekilde yapılabilir.

## 4.4. Matris Dönüşümleri

Tez çalışmamızın bu kısmında, yeni tanımlanan binomial çift dizi uzaylarından klasik çift dizi uzaylarına ve tersine birtakım 4-boyutlu matris sınıfları karakterize edilmiştir.

**Teorem 4.4.1.** 4-boyutlu $D = (d_{klij})$ ve $H = (h_{klij})$ matrislerinin terimleri arasında

$$h_{klij} = \sum_{a=i}^{\infty}\sum_{b=j}^{\infty}(-1)^{a+b-(i+j)}\binom{a}{i}\binom{b}{j}s^{a-b-i}r^{b-a-j}(r+s)^{i+j}d_{klab} \quad (4.4.1)$$

bağıntısı mevcut olsun. Bu durumda; $\Psi,\Lambda \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r\}$ olmak üzere, $D \in (\Psi_{B^{(r,s)}} : \Lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul her $k,l \in \mathbb{N}$ için $D_{kl} \in (\Psi_{B^{(r,s)}})^{\beta(\vartheta)}$ ve $H \in (\Psi : \Lambda)$ olmasıdır.

***İspat.*** $D \in (\Psi_{B^{(r,s)}} : \Lambda)$ olsun. Bu durumda, $\nu = B^{(r,s)}u \in \Psi$ olacak biçimde, her $u \in \Psi_{B^{(r,s)}}$ çift dizisi için $Du$ mevcut ve $\Lambda$ dizi uzayındadır. Bu da, her $k,l \in \mathbb{N}$ için $D_{kl} \in (\Psi_{B^{(r,s)}})^{\beta(\vartheta)}$ olduğu anlamına gelir. Ayrıca, (4.2.4) ifadesinden her $k,l \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}^{k,l} d_{klij}u_{ij} &= \sum_{i,j}^{k,l} d_{klij}\sum_{a,b=0}^{i,j}(-1)^{i+j-(a+b)}\binom{i}{a}\binom{j}{b}s^{i-j-a}r^{j-i-b}(r+s)^{a+b}\nu_{ab} \\ &= \sum_{i,j}^{k,l}\left[\sum_{a,b=i,j}^{k,l}(-1)^{a+b-(i+j)}\binom{a}{i}\binom{b}{j}s^{a-b-i}r^{b-a-j}(r+s)^{i+j}d_{klab}\right]\nu_{ij}\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin her iki yanında $k,l \to \infty$ için $\vartheta$-limit alınarak $Du = H\nu$ bulunur. Dolayısıyla, $\nu \in \Psi$ olduğunda $H\nu \in \Lambda$ ve böylece $H \in (\Psi : \Lambda)$ olduğu görülür.

Tersine; her $k,l \in \mathbb{N}$ için $D_{kl} \in (\Psi_{B^{(r,s)}})^{\beta(\vartheta)}$ ve $H \in (\Psi : \Lambda)$ olsun ve $u = (u_{ij}) \in \Psi_{B^{(r,s)}}$ çift dizisini alalım. Bu durumda, $Du$ mevcuttur ve (4.2.4) bağıntısı yardımıyla $\sum_{i,j} d_{klij}u_{ij}$ serisinin, $(Du)_{kl}^{[m,n]}$ dikdörtgen kısmi toplamlarından, her $k,l,m,n \in \mathbb{N}$

için

$$
\begin{aligned}
(Du)_{kl}^{[m,n]} &= \sum_{i,j}^{m,n} d_{klij}u_{ij} \\
&= \sum_{i,j}^{m,n}\left[\sum_{a,b=i,j}^{m,n}(-1)^{a+b-(i+j)}\binom{a}{i}\binom{b}{j}s^{a-b-i}r^{b-a-j}(r+s)^{i+j}d_{klab}\right]\nu_{ij}
\end{aligned} \tag{4.4.2}
$$

eşitliği elde edilir. Şimdi, her $k,l\in\mathbb{N}$ için (4.4.2) eşitliğinin her iki yanında $m,n\to\infty$ için $\vartheta$-limit alındığında

$$\sum_{i,j} d_{klij}u_{ij} = \sum_{i,j} h_{klij}\nu_{ij}$$

ifadesi elde edilir ki, bu da $Du = H\nu$ olması demektir. O halde, 4-boyutlu $D$ matrisi $(\Psi_{B(r,s)} : \Lambda)$ sınıfındadır.

**Sonuç 4.4.2.** $D=(d_{klij})$, 4-boyutlu bir matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

**(i)** $D\in(\mathcal{B}^{r,s}:\mathcal{C}_\vartheta)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.3), (2.7.6) ve (2.7.7) şartlarının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(ii)** $D\in\left(\mathcal{B}_{bp}^{r,s}:\mathcal{C}_\vartheta\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.5) şartlarının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(iii)** $D\in\left(\mathcal{B}_{bp}^{r,s}:\mathcal{M}_u\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) şartının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(iv)** $D\in\left(\mathcal{B}_{reg}^{r,s}:\mathcal{C}_\vartheta\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.3), (2.7.8) ve (2.7.9) şartlarının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(v)** $D\in(\mathcal{B}_\infty^{r,s}:\mathcal{C}_{bp})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.2) ve (2.7.10)-(2.7.13) şartlarının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(vi)** $D\in(\mathcal{B}_\infty^{r,s}:\mathcal{C}_p)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.2), (2.7.6) ve (2.7.7) şartlarının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**Teorem 4.4.3.** **(i)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda, 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$D_{kl} \in (\mathcal{B}_q^{r,s})^{\beta(\vartheta)} \tag{4.4.3}$$

ve

$$\sup_{k,l,i,j\in\mathbb{N}} \left| \sum_{a=i}^{\infty}\sum_{b=j}^{\infty} (-1)^{a+b-(i+j)} \binom{a}{i}\binom{b}{j} s^{a-b-i} r^{b-a-j} (r+s)^{i+j} d_{klab} \right| < \infty \tag{4.4.4}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

**(ii)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda, 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (4.4.3) şartıyla birlikte

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} \left| \sum_{a=i}^{\infty}\sum_{b=j}^{\infty} (-1)^{a+b-(i+j)} \binom{a}{i}\binom{b}{j} s^{a-b-i} r^{b-a-j} (r+s)^{i+j} d_{klab} \right|^{q'} < \infty \tag{4.4.5}$$

şartının sağlanmasıdır.

***İspat.*** $0 < q \leq 1$ olması durumu için, teoremin ispatı ikinci kısmın ispatına benzer şekilde yapılabileceğinden, teorem yalnız $1 < q < \infty$ için ispatlanacaktır.

(ii) $1 < q < \infty$ ve $D \in (\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{M}_u)$ olsun. Bu durumda, her $u \in \mathcal{B}_q^{r,s}$ çift dizisi için $Du$ mevcut ve $\mathcal{M}_u$ uzayında olur ki bu da $D_{kl} \in (\mathcal{B}_q^{r,s})^{\beta(\vartheta)}$ olduğunu gösterir. (4.2.4) bağıntısı akılda tutularak, $\sum_{i,j} d_{klij} u_{ij}$ serisinin $(m,n)$'inci dikdörtgen kısmi toplamından, her $k,l,m,n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(Du)_{kl}^{[m,n]} &= \sum_{i,j=0}^{m,n} d_{klij} u_{ij} \\
&= \sum_{i,j=0}^{m,n} d_{klij} \left[ \sum_{a=0}^{i}\sum_{b=0}^{j} (-1)^{i+j-(a+b)} \binom{i}{a}\binom{j}{b} s^{i-j-a} r^{j-i-b} (r+s)^{a+b} \nu_{ab} \right] \\
&= \sum_{i,j=0}^{m,n} \left[ \sum_{a=i}^{m}\sum_{b=j}^{n} (-1)^{a+b-(i+j)} \binom{a}{i}\binom{b}{j} s^{a-b-i} r^{b-a-j} (r+s)^{i+j} d_{klab} \right] \nu_{ij}
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

eşitliği elde edilir. 4-boyutlu $H = (h_{klij})$ matrisi $h_{klij} :=$

$$\begin{cases} \sum_{a=i}^{\infty}\sum_{b=j}^{\infty}(-1)^{a+b-(i+j)} \binom{a}{i}\binom{b}{j} s^{a-b-i}r^{b-a-j}(r+s)^{i+j}d_{klab} &, \quad 0 \leq i \leq k, 0 \leq j \leq l, \\ \\ 0 &, \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa, (4.4.6) eşitliğinin her iki yanında $m, n \to \infty$ için $\vartheta-$limit alındığında, $Du = H\nu$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, "$D \in (\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{M}_u)$ olması için gerek ve yeter koşul $H \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{M}_u)$ olmasıdır" çift gerektirmesine ulaşılır ve Lemma 2.7.8 yardımıyla, (4.4.5) şartının sağlandığı kolayca görülür.

Diğer taraftan, (4.4.3) ve (4.4.5) şartları sağlansın ve (4.1.2) bağıntısı yardımıyla $\nu \in \mathcal{L}_q$ olacak şekilde bir $u \in \mathcal{B}_q^{r,s}$ çift dizisi seçelim. (4.4.3) şartı sağlandığından $Du$ mevcuttur. Ayrıca, (4.2.4) bağıntısı kullanılarak her $k, l, \varpi, \varsigma$ için

$$\sum_{i,j=0}^{\varpi,\varsigma} d_{klij}u_{ij} = \sum_{i,j=0}^{\varpi,\varsigma}\left[\sum_{a=i}^{\varpi}\sum_{b=j}^{\varsigma}(-1)^{a+b-(i+j)}\binom{a}{i}\binom{b}{j} s^{a-b-i}r^{b-a-j}(r+s)^{i+j}d_{klab}\right]\nu_{ij}$$

eşitliği ve bu eşitliğin her iki yanında $\varpi, \varsigma \to \infty$ için $\vartheta-$limit alınmasıyla

$$\sum_{i,j} d_{klij}u_{ij} = \sum_{i,j} h_{klij}\nu_{ij}$$

ifadesi elde edilir ki bu da $Du = H\nu$ eşitliğinin mevcut olduğu anlamına gelir. Dahası, (4.4.5) şartı sağlandığından $H$ matrisi $(\mathcal{L}_q : \mathcal{M}_u)$ sınıfındadır ve böylece $D \in (\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{M}_u)$ olduğu görülür.

İspatları, Teorem 4.4.3 in ispatına benzer şekilde yapılabileceğinden Teorem 4.4.4, 4.4.5 ve 4.4.6 ispatsız olarak verilecektir.

**Teorem 4.4.4. (i)** $0 < q \leq 1$ olsun. Bu durumda, 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (4.4.3) ve (4.4.4) şartlarıyla birlikte en az bir $(\alpha_{ij}) \in \Omega$ çift dizisi için

$$bp-\lim_{k,l\to\infty}\sum_{a=i}^{\infty}\sum_{b=j}^{\infty}(-1)^{a+b-i+j}\binom{a}{i}\binom{b}{j} s^{a-b-i}r^{b-a-j}(r+s)^{i+j}d_{klab} = \alpha_{ij} \quad (4.4.7)$$

şartının sağlanmasıdır.

**(ii)** $1 < q < \infty$ olsun. Bu durumda, 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (4.4.3), (4.4.5) ve (4.4.7) şartlarının sağlanmasıdır.

**Teorem 4.4.5.** $0 < q \leq 1$ ve $1 \leq q_1 < \infty$ olsun. Bu durumda, 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{B}_q^{r,s} : \mathcal{L}_{q_1})$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul (4.4.3) şartıyla birlikte

$$\sup_{i,j\in\mathbb{N}} \sum_{k,l} \left| \sum_{a=i}^{\infty} \sum_{b=j}^{\infty} (-1)^{a+b-(i+j)} \binom{a}{i} \binom{b}{j} s^{a-b-i} r^{b-a-j} (r+s)^{i+j} d_{klab} \right|^{q_1} < \infty$$

şartının sağlanmasıdır.

**Teorem 4.4.6.** 4-boyutlu bir $D = (d_{klij})$ matrisinin $(\mathcal{B}_f^{r,s} : \mathcal{M}_u)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$D_{kl} \in (\mathcal{B}_f^{r,s})^{\beta(\vartheta)} \tag{4.4.8}$$

ve

$$\sup_{k,l\in\mathbb{N}} \sum_{i,j} \left| \sum_{a=i}^{\infty} \sum_{b=j}^{\infty} (-1)^{a+b-(i+j)} \binom{a}{i} \binom{b}{j} s^{a-b-i} r^{b-a-j} (r+s)^{i+j} d_{klab} \right| < \infty$$

şartlarının sağlanmasıdır.

**Sonuç 4.4.7.** $D = (d_{klij})$, 4-boyutlu bir matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

**(i)** $D \in \left(\mathcal{B}_f^{r,s} : \mathcal{C}_{bp}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.17)-(2.7.22) şartlarının $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(ii)** $D \in \left(\mathcal{B}_f^{r,s} : \mathcal{C}_f\right)_{reg}$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.24)-(2.7.29) şartlarının $d_{ij} = 0$ ve $L = 1$ için $d_{klij}$ yerine $h_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**Lemma 4.4.8.** $D = (d_{klij})$ herhangi bir 4-boyutlu matris ve $B = (b_{klij})$ de 4-boyutlu bir üçgen matris olsun. Bu durumda, $D = (d_{klij}) \in (\Psi : \Lambda_B)$ olması için gerek ve yeter koşul $BD \in (\Psi : \Lambda)$ olmasıdır (Yeşilkayagil ve Başar, 2017).

Şimdi, her $k,l,i,j \in \mathbb{N}$ için 4-boyutlu $G=(g_{klij})$ matrisini

$$g_{klij}=\sum_{m,n=0}^{k,l} b_{klmn}^{r,s} d_{mnij}$$

olarak tanımlayalım ve aşağıdaki sonucu verelim:

**Sonuç 4.4.9.** $D=(d_{klij})$, 4-boyutlu bir matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

**(i)** $D \in (\mathcal{C}_p : (\mathcal{C}_\vartheta)_{B(r,s)})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.3), (2.7.6) ve (2.7.7) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(ii)** $D \in (\mathcal{C}_{bp} : (\mathcal{C}_\vartheta)_{B(r,s)})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.5) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(iii)** $D \in (\mathcal{C}_r : (\mathcal{C}_\vartheta)_{B(r,s)})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1)-(2.7.3), (2.7.8) ve (2.7.9) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(iv)** $0<q\leq 1$ olmak üzere, $D \in \left(\mathcal{L}_q : \mathcal{B}_{bp}^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.14) ve (2.7.17) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(v)** $1<q<\infty$ olmak üzere, $D \in \left(\mathcal{L}_q : \mathcal{B}_{bp}^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.15) ve (2.7.17) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(vi)** $0<q\leq 1$ olmak üzere, $D \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{B}_\infty^{r,s})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.14) şartının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(vii)** $1<q<\infty$ olmak üzere, $D \in (\mathcal{L}_q : \mathcal{B}_\infty^{r,s})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.15) şartının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(viii)** $D \in \left(\mathcal{M}_u : \mathcal{B}_{bp}^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.2), (2.7.10)-(2.7.13) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(ix)** $D \in (\mathcal{M}_u : \mathcal{B}^{r,s})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.2), (2.7.6) ve (2.7.7) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(x)** $D \in (\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{B}_\infty^{r,s})$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) şartının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xi)** $D \in \left(\mathcal{C}_{bp} : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.24)-(2.7.27) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xii)** $D \in \left(\mathcal{C}_r : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.24), (2.7.25), (2.7.30) ve (2.7.31) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xiii)** $D \in \left(\mathcal{C}_p : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1), (2.7.6), (2.7.7), (2.7.24) ve (2.7.25) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xiv)** $D \in \left(\mathcal{M}_u : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.32)-(2.7.34) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xv)** $0 < q \leq 1$ olmak üzere, $D \in \left(\mathcal{L}_q : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.14) ve (2.7.32) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xvi)** $1 < q < \infty$ olmak üzere, $D \in \left(\mathcal{L}_q : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.32) ve (2.7.35) şartlarının $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

**(xvii)** $D \in \left(\mathcal{C}_f : \mathcal{B}_f^{r,s}\right)_{reg}$ olması için gerek ve yeter koşul (2.7.1) ve (2.7.24)-(2.7.29) şartlarının $d_{ij} = 0$ ve $L = 1$ için $d_{klij}$ yerine $g_{klij}$ matrisi ile sağlanmasıdır.

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

$0 < r, s < 1$ olmak üzere, $E(r,s) = (e^{r,s}_{klij})$ 4-boyutlu Euler matrisi

$$e^{r,s}_{klij} := \begin{cases} \binom{k}{i}\binom{l}{j} r^i s^j (1-r)^{k-i}(1-s)^{l-j} & , \quad 0 \le i \le k \ , \ 0 \le j \le l, \\ \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Talebi (2017), yukarıda açık olarak ifade edilen 4-boyutlu Euler matrisinin $1 \le p < \infty$ için $\mathcal{L}_p$ ve $\mathcal{M}_u$ dizi uzayları üzerindeki etki alanları olarak sırasıyla $\mathcal{E}^{r,s}_p$ ve $\mathcal{E}^{r,s}_\infty$ çift dizi uzaylarını elde edip bu uzayların bazı özelliklerini inceledikten sonra yine bu uzaylarla ilgili bazı kapsama bağıntılarını verdi.

Daha sonra Yeşilkayagil ve Başar (2018), 4-boyutlu Euler matrisinin yine $0 < r, s < 1$ için RH-regüler olduğunu gösterip bu matrisin ve $0 < p < 1$ için $\mathcal{E}^{r,s}_p$ çift dizi uzayının bazı özelliklerini incelediler. Ayrıca, bu uzayın $\alpha$-, $\beta(bp)$- ve $\gamma$-duallerini hesaplayıp $(\mathcal{E}^{r,s}_p : \mathcal{M}_u)$, $(\mathcal{E}^{r,s}_p : \mathcal{C}_{bp})$ ve $1 \le q < \infty$ olmak üzere $(\mathcal{E}^{r,s}_p : \mathcal{L}_q)$ matris sınıflarını karakterize ettiler.

Kısa bir özet olarak, bu tez çalışmasında $\mathcal{B}^{(r,s)}$ 4-boyutlu binomial matris tanımlandı ve bu matrisin $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_{f_0}$ çift dizi uzayları üzerindeki etki alanları olarak $\mathcal{B}^{r,s}_\infty$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}_{bp}$, $\mathcal{B}^{r,s}_{reg}$, $\mathcal{B}^{r,s}_q$, $\mathcal{B}^{r,s}_f$ ve $\mathcal{B}^{r,s}_{f_0}$ binomial çift dizi uzayları inşa edildi, bu uzayların birtakım cebirsel ve topolojik özellikleri incelendi ve yeni tanımlanan bu uzaylarla ilgili bazı kapsama bağıntıları verildi. Ayrıca, bu uzayların bazılarının $\alpha$-, $\beta(\vartheta)$- ve $\gamma$-dualleri hesaplandı ve son olarak yeni tanımlanan binomial çift dizi uzayları ile ilgili bazı matris sınıfları karakterize edildi.

$r + s = 1$ özel durumu için, $B^{(r,s)}$ 4-boyutlu binomial matrisi, $E(r,s)$ 4-boyutlu Euler matrisine indirgenir. Bundan dolayı, bu çalışmada elde edilen sonuçlar Talebi (2017) ve Yeşilkayagil ve Başar (2018) çalışmalarındaki sonuçlardan daha geneldir.

### 5.1. Sonuçlar

**Sonuç 5.1.1.** 4-boyutlu binomial matris tanımlandı ve bu matrisin $r.s > 0$ için RH-regüler olduğu gösterildi.

**Sonuç 5.1.2.** $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{q}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{f}^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ yeni binomial çift dizi uzayları tanımlandı.

**Sonuç 5.1.3.** $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{q}^{r,s}$ $(1 \leq q < \infty)$ uzaylarının birer Banach uzayı, $\mathcal{B}^{r,s}$ uzayının bir tam yarı-normlu uzay ve $\mathcal{B}_{q}^{r,s}$ $(0 < q < 1)$ uzayının da bir tam $q$-normlu uzay olduğu gösterildi.

**Sonuç 5.1.4.** $\mathcal{M}_u$, $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$, $\mathcal{C}_r$, $\mathcal{L}_q$, $\mathcal{C}_f$ ve $\mathcal{C}_{f_0}$ uzaylarının sırasıyla $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$, $\mathcal{B}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{q}^{r,s}$, $\mathcal{B}_{f}^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{f_0}^{r,s}$ uzaylarına lineer olarak izomorf oldukları gösterildi.

**Sonuç 5.1.5.** $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$, $\mathcal{C}_{bp} \subset \mathcal{B}^{r,s}$, $1 \leq q < \infty$ için $\mathcal{L}_q \subset \mathcal{B}_{q}^{r,s}$, $1 \leq q < q_1 < \infty$ için $\mathcal{B}_{q}^{r,s} \subset \mathcal{B}_{q_1}^{r,s}$ ve $\mathcal{M}_u \subset \mathcal{B}_{f}^{r,s}$ kapsamaları gösterildi.

**Sonuç 5.1.6.** $\mathcal{B}_{\infty}^{r,s}$ uzayının $\alpha$-, $\beta(p)$-, $\beta(bp)$- ve $\gamma$-dualleri, $\mathcal{B}^{r,s}$ ve $\mathcal{B}_{reg}^{r,s}$ uzaylarının $\beta(\vartheta)$-duali, $\mathcal{B}_{bp}^{r,s}$ uzayının $\beta(\vartheta)$ ve $\gamma$-dualleri, $\mathcal{B}_{q}^{r,s}(0 < q \leq 1)$ ve $\mathcal{B}_{f}^{r,s}$ uzaylarının $\alpha$-, $\beta(bp)$- ve $\gamma$-dualleri ve $\mathcal{B}_{q}^{r,s}(1 < q < \infty)$ uzayının $\beta(bp)$- ve $\gamma$-dualleri hesaplandı.

**Sonuç 5.1.7.** $\Psi, \Lambda \in \{\mathcal{M}_u, \mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_r, \mathcal{L}_q, \mathcal{C}_f\}$ olmak üzere $(\Psi_{B(r,s)} : \Lambda)$ ve $(\Psi : \Lambda_{B(r,s)})$ 4-boyutlu matris sınıflarından bazıları karakterize edildi.

## 5.2. Öneriler

Okuyuculara fikir vermesi bakımından, bu doktora tez çalışmasına paralel olarak ya da bu çalışmanın devamı niteliğinde ilk akla gelen, çalışılabilecek açık problemlerden bazıları; başka bir 4-boyutlu üçgen matrisin klasik çift dizi uzaylarındaki etki alanları, bu çalışmada incelenen uzayların paranormlu karşılıkları ya da bilinen çift dizi uzayları arasında karakterize edilmemiş matris dönüşümleri olarak düşünülebilir.

## KAYNAKLAR


Adams, C.R., 1933. On non-factorable transformations of double sequences, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 19(5), 564-567.

Altay, B., 2002. Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları. (Doktora tezi), İnönü Üniversitesi. Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

Altay, B. ve Başar, F., 2005. Some new spaces of double sequences, J. Math. Anal. Appl., **309**(1), 70-90.

Altay, B. ve Başar, F., 2006. Some Euler sequence spaces of non-absolute type, Ukr. Math. J., **57**(1), 1-17.

Altay, B. ve Polat, H., 2006. On some new Euler difference sequence spaces, Southeast Asian Bull. Math., **30**(2), 209-220.

Başar, F. ve Sever, Y., 2009. The space $\mathcal{L}_q$ of double sequences, Math. J. Okayama Univ., **51**), 149-157.

Başar, F. ve Kirişçi, M., 2011. Almost convergence and generalized difference matrix. Computers and Mathematics with Applications, Vol.61, No.3, 602-611.

Başar, F., 2012. Summability Theory and Its Applications, Bentham Science Publishers, e-book, Monographs, Istanbul.

Bişgin, M.C., 2016a. The binomial sequence spaces which include the spaces $\ell_p$ and $\ell_\infty$ and geometric properties, Journal of Inequalities and Applications 2016:304.

Bişgin, M.C., 2016b. The binomial sequence spaces of nonabsolute type, Journal of Inequalities and Applications 2016:309.

Bişgin, M.C., 2018. The Binomial Almost Convergent and Null Sequence Spaces, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1, vol:67, no:1, 211-224.

Boos, J., Leiger, T. ve Zeller, K., 1997. Consistency theory for SM-methods, Acta Mathematica Hungarica, Vol.76, No.1-2,109-142.

Boss, J., 2000. Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, Newyork.

Cauchy, A.L., 1821. Analyse Algébrique-Cours d'Analyse de l'Ecole royale polytechnique. 1. L'Imprimerie Royale, Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi.

Cooke, R.C., 1950. Infinite Matrices and Sequence Spaces, Macmillan and Co. Limited, London.

Čunjalo, F., 2007. Almost convergence of double sequences-some analogies between measure and category, Math. Maced.**5**, 21-24.

Çakan, C., Altay, B. ve Mursaleen, M., 2006. The $\sigma$-convergence and $\sigma$-core of double sequences, Appl. Math. Lett., **19**, 387-399.

Demiriz, S. ve Çakan, C., 2010. On some new paranormed Euler sequence spaces and Euler core,Acta Math. Sin. Engl. Ser., **26**(7), 1207-1222.

Demiriz, S. ve Duyar, O., 2015. Domain of Difference Matrix of Order One In Some Spaces of Double Sequences, Gulf J. Math., 3(3), 85-100.

Demiriz, S., İlkhan, M. ve Kara, E.E., 2020. Almost Convergence And Euler Totient Matrix, Annals Of Functional Analysis, 2020(11), 604-616.

Demiriz, S. ve Erdem,S., 2020. Domain of Euler-Totient Matrix Operator in the Space $\mathcal{L}_p$, Korean J. Math., **28**, No:2, 361-378.

Erdem, S. ve Demiriz, S., 2020. 4-Dimensional Euler-Totient Matrix Operator and Some Double Sequence Spaces, Math. Sci. Appl. E-Notes, **8**(2), 110-122.

Erdem, S. ve Demiriz, S., 2021. The Spaces Of Almost Euler-Totient Convergent And Almost Euler-Totient Null Double Sequences, Annals Of Oredea University-Mathematics Fascicola, Basılacak. (Yayın No: 6916968)

Hamilton, H. J., 1936. Transformations of multiple sequences, Duke Math. J., **2**, 29-60.

Hardy,G., 1904. On the convergence of certain multiple series, Proceedings of the London Mathematical Society, Vol.2,No.1,pp.124-128.

Jardas, C. ve Sarapa, N., 1991. On the summability of pairs of sequences, Glasnik Mat, Vol.26, No.46 ,pp.67-78.

Kara, E.E. ve Başarır, M., 2011. On compact operators and some Euler $B^{(m)}$-difference sequence spaces, J. Math. Anal. Appl., **379**(2), 499-511.

Kreyszig, E., 1980. Introduction to Functional Analysis with Applications, John Willey and Sons, New York.

King, J., 1966. Almost summable sequences, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.17,No.6, 1219-1225.

Lorentz, G.G., 1948. A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Math., **80**(1), 167-190.

Maddox, I. J., 1970. Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge.

Mòricz, F. ve Rhoades B.E., 1988. Almost convergence of double sequences and strong regularity of summability matrices, Math. Proc. Camb. Philos. Soc., **104**, 283-294.

Mòricz F., 1991 Extensions of the spaces $c$ and $c_0$ from single to double sequences, Acta Math. Hungar., **57**, 129-136.

Mursaleen, M., Savaş, E., 2003. Almost regular matrices for double sequences", Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, Vol.40, No.1-2, 205-212.

Mursaleen, M., 2004. Almost strongly regular matrices and a core theorem for double sequences, J. Math. Anal. Appl., **293**(2), 523-531.

Mursaleen, M., Edely, O.H., 2004. Almost convergence and a core theorem for double sequences, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.293, No.2, 532-540.

Mursaleen, M., 2010. Almost convergence and some related methods, Modern Methods of Analysis and Its Applications, New Delhi:Anamaya Publ, 1-10.

Mursaleen, M., Başar, F., 2014. Domain of Cesàro mean of order one in some spaces of double sequences, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, Vol.51, No. 3, 335-356.

Mursaleen, M., Mohiuddine, S. A., 2014. Convergence Methods for Double Sequences and Applications, Springer, New Delhi, Heidelberg, New York, Dordrecht, London.

Pringsheim, A., 1897. Elementare Theorie der unendliche Doppel-reihen, Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaft, Munich, No. 27, 101-153.

Robison, G. M., 1926. Divergent double sequences and series, Amer. Math. Soc. Trans., **28**, 50-73.

Savaş, E., Patterson, R.F., 2011. Double sequence spaces defined by a modulus, Mathematica Slovaca, Vol.61, No.2, 245-256.

Talebi, G., 2017. Operator norms of four-dimensional Hausdorff matrices on the double Euler sequence spaces, Linear and Multilinear Algebra, 65(11), 2257-2267.

Tripathy, B., Sarma, B., 2009. Vector valued double sequence spaces defined by Orlicz function, MathematicaSlovaca, Vol.59, No.6,767-776.

Tuğ, O., 2017. Four-dimensional generalized difference matrix and some double sequence spaces, J. Inequal. Appl. 2017(1), 149.

Tuğ, O., 2018a. On almost $B$-summable double sequence spaces, J. Inequal. Appl. 2018(1):9, 19 pages.

Tuğ, O., 2018b. On the Characterization of Some Classes of Four-Dimensional Matrices and Almost $B$-Summable Double Sequences, Journal of Mathematics, vol.2018, Article ID 1826485, 7 pages, (2018).

Tuğ, O., Rakočević, V. ve Malkowsky, E., 2020. On the Domain of the Four-Dimensional Sequential Band Matrix in Some Double Sequence Spaces, Mathematics, 8, 789;doi:10.3390/math8050789.

Yeşilkayagil, M. ve Başar, F., 2016a. On the characterization of a class of four dimensional matrices and Steinhaus type theorems, Kragujev. J. Math. **40**(1), 35-45.

Yeşilkayagil, M. ve Başar, F., 2016b. Some topological properties of the spaces of almost null and almost convergent double sequences, Turkish Journal of Mathematics, Vol.40, No.3, 624-630.

Yeşilkayagil, M. ve Başar, F., 2016c. Mercerian theorem for four dimensional matrices, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser., A1**65**(1),(2016), 147-155.

Yeşilkayagil, M. ve Başar, F., 2017. Domain of Riesz mean in the space $\mathcal{L}_s$, Filomat, 31(4), 925-940.

Yeşilkayagil, M. ve Başar, F., 2018. Domain of Euler Mean in the Space of Absolutely $p$-Summable Double Sequences with $0 < p < 1$, Anal. Theory Appl., Vol. 34, No. 3, 241-252.

Zeltser, M., 2001. Investigation of double sequence spaces by soft and hard analitic methods, Dissertationes Mathematicae Universtaties Tartuensis **25**, Tartu University Press, Univ. of Tartu, Faculty of Mathematics and Computer Science, Tartu.

Zeltser, M., 2002. On conservative matrix methods for double sequence spaces, Acta Math. Hung., **95**(3), 225-242.

Zeltser, M., Mursaleen, M. ve Mohiuddine, S. A., 2009. On almost conservative matrix mathods for double sequence spaces, Publ. Math. Debrecen, **75**, 387-399.