

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İMPALSİF AYRIK STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİN
SAÇILIM TEORİSİ

Ayşenur AYDOĞDU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2021

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İMPALSİF AYRIK STURM-LIOUVILLE DENKLEMLERİN SAÇILIM TEORİSİ

Ayşenur AYDOĞDU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler yer almıştır.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda $\mathbb{N}$ kümesinde tanımlı ayrik Sturm-Liouville denklemi verilip bu denklemin farklı formlarda yazılışı elde edilmiştir. İkinci kısımda impulsif ayrik Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. Öncelikle denklemin temel çözümleri ve Jost çözümü bulunmuş olup bu çözümlerin özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ele alınan problemin saçılım çözümleri ve özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca bu problemin saçılım fonksiyonu ve özellikleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, impulsif ayrik Sturm-Liouville problemi için özel bir örnek ele alınmıştır. Bu örneğin Jost çözümü, saçılım fonksiyonu ve özdeğerler kümesi elde edilmiştir.

Son bölümde önceki bölümlerde bulunan sonuçların değerlendirilmesi yapılmıştır.

Nisan 2021, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Jost çözümü, Jost fonksiyonu, saçılım fonksiyonu, ayrik denklemler

ABSTRACT

Master Thesis

SCATTERING THEORY OF IMPULSIVE DISCRETE STURM-LIOUVILLE EQUATIONS

Ayşenur AYDOĞDU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Elgiz BAYRAM

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter includes the fundamental definitions and the theorems which are related to the topic.

The third chapter consists of two sections. In the first section, the Sturm-Liouville equation which is discrete and defined in $\mathbb{N}$ is given, and notations in different forms are obtained for the equation. In the second section, the impulsive discrete Sturm-Liouville problem is handled. To do this, firstly, the fundamental solutions and the Jost solution of the equation are obtained, and the properties of these solutions are examined to handle the problem. Then, scattering solutions and properties of the problem are researched. In addition to this, the scattering function of the problem and its properties are obtained.

In the fourth chapter, a specific example is considered for impulsive discrete Sturm-Liouville problem, and the Jost solution, scattering function and set of eigenvalues of the example are obtained.

In the final chapter, the results obtained in the previous chapters are evaluated.

April 2021, 39 pages

Key Words: Jost solution, Jost function, scattering function, discrete equations

TEŞEKKÜR

Gerçekleştirmiş olduğum bu tez çalışmasında yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren ve desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Elgiz BAYRAM'a, çalışmalarımda yardımcı olan değerli Arş. Gör. Şeyda SOLMAZ'a, lisans eğitimimden bu yana üzerimde emeği olan tüm kıymetli hocalarıma, manevi desteğini hiçbir zaman eksik etmeyen daima bana yardımcı olan canım babam Prof. Dr. Halil AYDOĞDU'ya ve her zaman yanımda olan aileme teşekkürlerimi en içten dileklerle sunarım.

Ayşenur AYDOĞDU
Ankara, Nisan 2021

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
3. İMPALSİF AYRIK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SAÇILIM TEORİSİ	10
3.1 Ayrık Sturm-Liouville denklemi.....	10
3.2 İmpalsif ayrık Sturm-Liouville problemi	11
3.2.1 Temel çözümler	11
3.2.2 Jost çözümü ve özellikleri	15
3.2.3 Saçılım çözümleri ve saçılım fonksiyonu.....	22
4. İMPALSİF AYRIK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN ÖRNEK	32
5. SONUÇ	35
KAYNAKLAR.....	36
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$
S-L	Sturm-Liouville denklemi
İSDP	İmpulsif sınır değer problemi
$\text{Re}(\lambda)$	λ sayısının gerçek kısmı
$\text{Im}(\lambda)$	λ sayısının sanal kısmı
$W[y, u]$	y ve u çözümlerinin Wronskiyeni
$o(1)$	Sonsuz küçük değerler
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
σ_d	Özdeğerler kümesi
$l^1(\mathbb{N})$	$\mathbb{N}$ kümesinde mutlak değerce toplanabilir dizilerin uzayı
$l^2(\mathbb{N})$	$\mathbb{N}$ kümesinde karesi toplanabilir dizilerin uzayı
$L_2(0, \infty)$	$(0, \infty)$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyonların uzayı

1. GİRİŞ

Saçılım problemleri ve bu problemlerin analizleri matematiksel fizikte etkili araştırma konuları arasındadır. Saçılım problemlerinin spektral analizleri fiziğin çoğu dalında kullanılmaktadır. Çünkü klasik saçılım teorisi Newton mekaniğinin bir dalıdır. Bunun sonucunda, böyle problemler matematiksel fizikte önemli rol oynar ve doğal bilimlerde birçok kullanım alanları vardır. Bu problemleri içeren çalışmalar ilk olarak sürekli Schrödinger denklemi için yapılmıştır (Agronovich 1963), (Chadon ve Sabatier 1997). $L_2(0, \infty)$ uzayında

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad x \in [0, \infty) \quad (1.1)$$

diferensiyel denklemi

$$y(0) = 0 \quad (1.2)$$

sınır koşuluyla tanımlanan Sturm-Liouville sınır değer problemi ve bu problemin spektral özellikleri 1986 yılında Marchenko tarafından detaylı bir şekilde incelenmiştir. Burada λ spektral parametre ve q reel değerli fonksiyon olup

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty \quad (1.3)$$

koşulunu sağlar. Bu problemi araştırdıktan sonra, Marchenko (1.1) denkleminin Jost fonksiyonunu

$$e(\lambda) := e(0, \lambda) = 1 + \int_0^\infty K(0, t)e^{i\lambda t}dt, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}}_+ := \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im}\lambda \geq 0\}$$

şeklinde ele almıştır. Diğer yandan $e(\lambda)$ Jost fonksiyonunun, (1.3) koşulu altında açık üst yarı düzlemde sonlu sayıda sıfırı olduğunu göstermiştir. Jost fonksiyonun $i\lambda_k$, $k=1,2,3,\dots,n$ sıfırları için, $i\lambda_k$ 'ların modüllerinin $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ koşulu ile sıralandığı verilmiştir. Ayrıca $L_2(0, \infty)$ uzayındaki Jost çözümünün $\lambda = i\lambda_k$ için normları da m_k^{-1} ile gösterilmiştir.

(1.1)-(1.2) probleminin saçılım fonksiyonu

$$S(\lambda) := \frac{\overline{e(\lambda)}}{e(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (1.4)$$

tanımlanmıştır. $\lambda \in \mathbb{R}$ için Jost fonksiyonun açık üst düzlemdeki sıfırları, m_k^{-1} normlarından ve saçılım fonksiyonundan oluşan kümeye bu problemin saçılım verisi denir.

q potansiyel fonksiyonu verildiğinde saçılım verisinin bulunması ve özelliklerinin öğrenilmesi saçılım teorisinin düz problemidir ve tersine saçılım verisi verildiğinde q potansiyel fonksiyonun bulunması ise saçılım teorisinin ters problemidir. Literatürde sürekli ve ayrık durumlarda Sturm-Liouville, Schrödinger ve Dirac denklemleri için düz ve ters saçılım problemlerine sahip olan birçok inceleme mevcuttur (Agranovich ve Marchenko 1963), (Gasyimov ve Levitan 1966).

$l^2(\mathbb{N})$ uzayında

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

ayrık Sturm-Liouville denklemi

$$y_0 = 0$$

sınır koşulu ile verilsin. λ spektral parametre, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ve $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli diziler ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere (1.5) denklemi

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n (|1 - a_n| + |b_n|) < \infty \quad (1.6)$$

koşulunu sağlar. Guseinov 1976 yılında, (1.6) sınır koşulu tarafından ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $a_n > 0$ olmak şartıyla (1.5) denklemini yarı eksen ve tüm ekseninde inceleyip spektral özelliklerinin varlığını ispatlamıştır. Ayrıca bu denklem için saçılım teorisinin ters problemini elde etmiştir. 2001 yılında Bairamov ve Krall aynı denklemi yarı ekseninde $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ kompleks terimli diziler olmak şartıyla detaylı bir şekilde araştırmışlar ve önemli spektral özellikler elde etmişlerdir. Ayrıca Adivar ve Bairamov 2001-2003 yıllarında (1.6) koşulunu gerçekleyen her $n \in \mathbb{Z}$ için $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ kompleks terimli diziler olmak üzere (1.5) denklemi ile ilişkili fark operatörünü incelemişlerdir.

Diğer taraftan, son zamanlarda impulsif denklemler fizikte, mühendislikte, ekolojide, biyolojik sistemde, biyoteknoloji ve daha birçok alandaki impulsif problemlerin modellemesinde gelişim kaydetmiştir. İmpulsif diferensiyel denklem problemi (Lakshmikantham 1989), (Samoilenko ve Perestyuk 1995) çalışmalarında detaylı bir şekilde ele alınmıştır. Ayrıca literatürde impulsif koşul; arayüz (interface) koşulu, sıçrama (jump) koşulu, geçiş (transmission) koşulu ve nokta etkileşimi (point interaction) koşulu olarak da adlandırılmaktadır. İmpulsif koşullarla çeşitli sınır değer problemlerin spektral teorisi (Albeverio 2002), (Mukhtarov ve Tunç 2004) ve (Uğurlu ve Bairamov 2014) çalışmalarında incelenmiştir.

Klasik Gelfand-Levitan-Marchenko saçılım teorisi ile birlikte Lax-Phillips (1967), Sz.-Nagy-Foias (1970) ve Pavlov (1975a,b - 1977) tarafından geliştirilmiş farklı bir saçılım teorisi de literatürde kullanılmaktadır (Allahverdiev 2005a,b - 2006), (Phillips 1959). Bu teori özellikle de dissipatif ve akreditif operatörlerin spektral analizinin incelenmesinde uygulanmaktadır. Bazı operatörler (örneğin self-adjoint operatörler) için bu saçılım teorileri birbirine çok yakındır. Biz bu tezde impulsif ayrık Sturm-Liouville denklemi için klasik saçılım teorisini öğreneceğiz.

Literatürde ayrık Sturm-Liouville denklemlerinin saçılım teorisine ilişkin çok sayıda çalışmalar bulunmaktadır. Ancak impulsif ayrık Sturm-Liouville denkleminin saçılım teorisine ilişkin araştırma bulunmamaktadır. Ayrık Sturm-Liouville denklemini

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\} \quad (1.7)$$

$$y_0 = 0 \quad (1.8)$$

sınır koşulu ve

$$\begin{aligned} y_{m_0+1} &= \gamma_1 y_{m_0-1} \\ y_{m_0+2} - y_{m_0+1} &= \gamma_2 (y_{m_0-1} - y_{m_0-2}) \quad ; \quad \gamma_1 \gamma_2 \neq 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (1.9)$$

impulsif koşullar ile ele alalım. Burada λ spektral parametre, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ve $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli diziler olup

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n (|1 - a_n| + |b_n|) < \infty \quad (1.10)$$

koşulunu sağlar.

Bu tezde $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli diziler ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \neq 0$ olmak üzere, $l^2(\mathbb{N})$ uzayında (1.10) koşulu altında (1.7)-(1.9) İSDP 'nin; saçılım çözümlerini, bu saçılım çözümlerini kullanarak Jost çözümünü, saçılım fonksiyonu ve özelliklerini inceleyeceğiz. Ayrıca (1.7)-(1.9) 'un özel durumunu içeren İSDP için farklı bir örnek sunup, bu örneğin Jost çözümünü ve saçılım fonksiyonunu araştırıp özdeğerler kümesini belirleyeceğiz.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 X boştan farklı bir küme olmak üzere bu küme için ifade edilen

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{k} \times X \rightarrow X$$

işlemlerine göre aşağıdaki özellikler gerçekleşiyorsa X kümesi, $\mathbb{k}$ cismi üzerinde bir vektör uzay olarak adlandırılır.

- (a) $\forall r, s \in X$ için $r + s \in X$ 'tir.
 - 1. $\forall r, s \in X$ için $r + s = s + r$.
 - 2. $\forall r, s, t \in X$ için $r + (s + t) = (r + s) + t$.
 - 3. $\forall r \in X$ için $r + 0 = r$ olacak biçimde bir $0 \in X$ vardır.
 - 4. $\forall r \in X$ için $r + (-r) = 0$ olacak biçimde bir $(-r) \in X$ vardır.
- (b) $\forall r \in X$ vektörü ve $\forall \alpha \in \mathbb{k}$ sabiti için $\alpha r \in X$ 'tir.
 - 5. $\forall \alpha \in \mathbb{k}$ ve $\forall r, s \in X$ için $\alpha(r + s) = \alpha r + \alpha s$.
 - 6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$ ve $\forall r \in X$ için $(\alpha + \beta)r = \alpha r + \beta r$.
 - 7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$ ve $\forall r \in X$ için $\alpha(\beta r) = (\alpha\beta)r$.
 - 8. $\forall r \in X$ için $1r = r$ olacak biçimde bir $1 \in \mathbb{k}$ vardır.

Ayrıca $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ iken X 'e bir reel vektör uzayı, $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ iken X 'e kompleks vektör uzayı denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.2 X vektör uzayının bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ alt kümesi verilsin. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ skalerler olmak üzere,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0$$

eşitliği, ancak ve ancak, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ olması halinde gerçekleşiyorsa $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesi lineer bağımsızdır, aksi halde lineer bağımlıdır, denir (Sabuncuoğlu 2011).

Tanım 2.3 X vektör uzayı olmak üzere

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonu tanımlansın. Her $r, s \in X$ ve α sabiti için

1. $\|r\| \geq 0$
2. $\|r\| = 0 \Leftrightarrow r = 0$
3. $\|\alpha r\| = |\alpha| \|r\|$
4. $\|r + s\| \leq \|r\| + \|s\|$

koşullarını gerçekleyen $\|\cdot\|$ reel değerli fonksiyonuna X üzerinde bir normdur, denir. $(X, \|\cdot\|)$ çifti de normlu uzay olarak adlandırılır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.4 Her Cauchy dizisi yakınsak olan normlu uzaylara Banach uzayı denir. Yani, bir Banach uzay tam olan bir normlu uzaydır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.5 Vektör uzay ve normlu uzay üzerindeki dönüşümler operatör olarak adlandırılır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.6 Bir T operatörünün, $D(T)$ tanım kümesi ve değer kümesi aynı cisim üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y \in D(T)$ ve α sabiti için

1. $T(x + y) = Tx + Ty$
2. $T(\alpha x) = \alpha Tx$

özellikleri gerçekleşiyorsa T operatörüne lineerdir, denir. Açıkça görüldüğü gibi yukarıda verilen ifadeler β sabit sayısı için,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

ile eşdeğerdir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.7 X kompleks vektör uzay ve T de X 'den Y 'ye bir lineer operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ için $Tx = \lambda x$ olacak biçimde X uzayında sıfırdan farklı en az bir x çözümü varsa λ değerine T operatörünün bir özdeğeri denir (Lusternik ve Sobolev 1974).

Tanım 2.8 X bir $\mathbb{k}$ cismi üzerinde vektör uzay olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{k}$$

fonksiyonu her $r, s, t \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{k}$ için

1. $\langle r + s, t \rangle = \langle r, t \rangle + \langle s, t \rangle$
2. $\langle \alpha r, s \rangle = \alpha \langle r, s \rangle$
3. $\langle r, s \rangle = \overline{\langle s, r \rangle}$
4. $\langle r, r \rangle \geq 0$
5. $\langle r, r \rangle = 0 \Leftrightarrow r = 0$

özelliklerini sağlıyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna X için bir iç çarpım ve $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ çiftine bir iç çarpım uzayı denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.9 $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayı

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

normuna göre tam ise bu uzaya Hilbert uzayı denir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.10 $l^1(\mathbb{N}) := \left\{ a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$ biçiminde tanımlanır. $l^1(\mathbb{N})$ uzayı Banach uzayı olup bu uzayda norm, $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ olmak üzere

$$\|a\| := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

ile tanımlanır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.11 $l^2(\mathbb{N}) := \left\{ a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\}$ biçiminde tanımlanır. $l^2(\mathbb{N})$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla $a = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $b = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ olmak üzere

$$\langle a, b \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

$$\|a\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.12 $L_2(0, \infty) := \left\{ f : \int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$ biçiminde tanımlanır. $L_2(0, \infty)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla $f, g \in L_2(0, \infty)$ olmak üzere

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\|f\| := \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır (Kreyszig 1978).

Tanım 2.13 A , $\mathbb{R}$ 'nin yoğun bir alt kümesi ve f A üzerinde reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

olduğunda f fonksiyonunun a noktasında sürekli olduğu söylenir. Eğer f her $a \in A$ için sürekli ise f 'ye A 'da süreklidir denir (Balci 2012).

Teorem 2.1 (Weierstrass Testi) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun. Her $x \in A$ için $|f_n(x)| \leq m_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} m_n < \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ serisi A üzerinde düzgün yakınsaktır (Balci 2012).

Tanım 2.14 A herhangi bir küme olmak üzere

$$I(A) := \begin{cases} 1 & , \quad A \text{ gerçekenir} \\ 0 & , \quad \text{aksi halde} \end{cases}$$

ile tanımlanan $I(A)$ fonksiyonuna A kümesinin gösterge fonksiyonu denir.

Teorem 2.2 Aşağıda verilen özellikler sağlanır:

1) $a_{nm} \geq 0$ ise $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$, $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$ serilerinden biri mutlak yakınsak ise

$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}$ dir (Apostol 1960).

Tanım 2.15 Kompleks değişkeni z olan bir f fonksiyonunun türevi, hem herhangi bir z_0 noktasında ve hem de z_0 'ın bir komşuluğunda bulunan her z noktasında varsa, bu durumda f 'ye z_0 noktasında analitiktir denir (Özkın 1989).

3. İMPALSİF AYRIK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SAÇILIM TEORİSİ

Bu bölümde ilk olarak ayrık Sturm-Liouville denklemini ele alacağız. Sonra impalsif ayrık Sturm-Liouville denkleminin saçılım teorisini inceleyeceğiz.

3.1 Ayrık Sturm-Liouville denklemi

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

fark denklemi $y_0 = 0$ sınır koşuluyla verilsin. Burada λ spektral parametre, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli diziler ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \neq 0$ dır.

$q_n = a_{n-1} + a_n + b_n$ ve $\Delta y_n := y_{n+1} - y_n$ ileri fark operatörüyle yukarıdaki denklem,

$$\Delta(a_{n-1} \Delta y_{n-1}) + (q_n - \lambda) y_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

S-L denkleminin ayrık analogu formunda yazılabilir.

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad a_0 = 1, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

denklemi $y_0 = 0$ sınır koşuluyla verilsin. Burada λ spektral parametre, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli diziler ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \neq 0$ dır.

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ için;} & \quad b_1 y_1 + a_1 y_2 = \lambda y_1 \\ n = 2 \text{ için;} & \quad a_1 y_1 + b_2 y_2 + a_2 y_3 = \lambda y_2 \\ n = 3 \text{ için;} & \quad a_2 y_2 + b_3 y_3 + a_3 y_4 = \lambda y_1 \\ & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \\ & \quad \cdot \quad \quad \quad \cdot \end{aligned}$$

olmak üzere denklem,

$$\begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

matris formunda yazılabilir.

3.2 İmpulsif ayrık Sturm-Liouville problemi

$l^2(\mathbb{N})$ uzayında (1.7)-(1.9) İSDP 'yi $\lambda = 2 \cos z$ spektral parametresiyle

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = 2 \cos z y_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\} \quad (3.1)$$

$$y_0 = 0 \quad (3.2)$$

sınır koşulu ve

$$\begin{aligned} y_{m_0+1} &= \gamma_1 y_{m_0-1} \\ \Delta y_{m_0+1} &= \gamma_2 \nabla y_{m_0-1} \quad ; \quad \gamma_1 \gamma_2 \neq 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.3)$$

impulsif koşulları ile birlikte alalım. Burada, ∇ geri fark operatörü olmak üzere $\nabla y_n := y_n - y_{n-1}$ şeklinde tanımlanır. (3.1) de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli diziler olup

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n (|1 - a_n| + |b_n|) < \infty \quad (3.4)$$

koşulunu gerçekler. Ayrıca her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $a_n \neq 0$ dır.

3.2.1 Temel çözümler

$$\Pi_+ := \left\{ z \in \mathbb{C} : z = \eta + i\zeta, \zeta > 0, -\frac{\pi}{2} \leq \eta \leq \frac{3\pi}{2} \right\} \text{ ve } \Pi := \Pi_+ \cup \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

şeklinde iki tane yarı şerit tanımlayalım.

Tanım 3.1 (3.1)-(3.2) probleminin $y = \{y_n(z)\}$ ve $u = \{u_n(z)\}$ olarak verilen herhangi iki çözümünü olsun. Bu çözümlerin Wronskiyeni

$$\begin{aligned} W[y, u]_n &: = a_n \{y_n(z) u_{n+1}(z) - y_{n+1}(z) u_n(z)\} \\ &: = a_n [y_{n+1}(z) \Delta u_n(z) - \Delta y_n(z) u_{n+1}(z)] \\ &: = a_{n-1} [y_{n-1}(z) \nabla u_n(z) - \Delta y_{n-1}(z) u_{n-1}(z)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

olarak tanımlanır.

Sonuç 3.1 (3.5) ile tanımı verilen Wronskiyen n değişkeninden bağımsızdır.

İspat. (3.1)-(3.2) probleminin herhangi iki çözümünü $n \in \mathbb{N} \setminus \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\}$ için $y = \{y_n(z)\}$ ve $u = \{u_n(z)\}$ olsun. İleri fark operatörü Δ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta(W[y, u]_{n-1}) &= W[y, u]_n - W[y, u]_{n-1} \\ &= a_n \{y_n(z) u_{n+1}(z) - y_{n+1}(z) u_n(z)\} \\ &\quad - a_{n-1} \{y_{n-1}(z) u_n(z) - y_n(z) u_{n-1}(z)\} \\ &= y_n(z) \{a_{n-1} u_{n-1}(z) + a_n u_{n+1}(z)\} \\ &\quad - u_n(z) \{a_{n-1} y_{n-1}(z) + a_n y_{n+1}(z)\} \\ &= (z - b_n) (y_n(z) u_n(z) - y_n(z) u_n(z)) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $W[y, u] = k$ (k sabit) dır. ■

Sonuç 3.2 (3.1)-(3.2) probleminin iki çözümünü $n \in \mathbb{N} \setminus \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\}$ için $y = \{y_n(z)\}$ ve $u = \{u_n(z)\}$ olsun. Bu iki çözümün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart $W[y, u] \neq 0$ olmalıdır.

İspat. $y = \{y_n(z)\}$ ve $u = \{u_n(z)\}$ bu problemin herhangi iki çözümünü olmak üzere $\Rightarrow: W[y, u] = 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\}$ için (3.5) eşitliğinden,

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow y_n = k u_n, k \neq 0 \text{ dır.}$$

Yani $y = y_n$ ve $u = u_n$ çözümleri lineer bağımlıdır.

$\Leftarrow$: Her $n \in \mathbb{N} \setminus \{m_0 - 1, m_0, m_0 + 1\}$ için $y = y_n$ ve $u = u_n$ çözümleri lineer bağımlı olsun, yani $y_n = ku_n, k \neq 0$ dır. Bu durumda (3.5) 'ten,
 $W[y, u] = a_n \{ku_n(z)u_{n+1}(z) - ku_{n+1}(z)u_n(z)\} = 0$ dır. ■

Tanım 3.2 Her $z \in \Pi$ ve $n = 0, 1, \dots, m_0 - 1$ için (3.1) denkleminin

$$y_0(z) = 0, \quad y_1(z) = 1$$

ve

$$y_0(z) = \frac{1}{a_0}, \quad y_1(z) = 0$$

başlangıç koşullarını gerçekleyen temel çözümleri sırasıyla $\{P_n(z)\}$ ve $\{Q_n(z)\}$ olarak verilir.

Şimdi sırasıyla $\{P_n(z)\}$ ve $\{Q_n(z)\}$ çözümlerinin gösterimlerini elde edelim.

(3.1) denkleminin

$$P_0(z) = 0, \quad P_1(z) = 1$$

koşulları altında $P_n(z)$ çözümünü bulalım.

$$n = 1 \text{ için, } P_2(z) = \frac{\lambda - b_1}{a_1}$$

$$n = 2 \text{ için, } P_3(z) = P_2(z) \frac{(\lambda - b_2)}{a_2} - \frac{a_1}{a_2} = \frac{(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)}{a_1 a_2} - \frac{a_1}{a_2}$$

$$n = 3 \text{ için, } P_4(z) = P_3(z) \frac{(\lambda - b_3)}{a_3} - P_2(z) \frac{a_2}{a_3}$$

$$= \frac{(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)(\lambda - b_3)}{a_1 a_2 a_3} - \frac{a_1}{a_2} \frac{(\lambda - b_3)}{a_3} - \frac{a_2}{a_3} \frac{(\lambda - b_1)}{a_1}$$

$$n = 4 \text{ için, } P_5(z) = P_4(z) \frac{(\lambda - b_4)}{a_4} - P_3(z) \frac{a_3}{a_4}$$

$$= \frac{(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)(\lambda - b_3)(\lambda - b_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4} - \frac{a_1}{a_2} \frac{(\lambda - b_3)(\lambda - b_4)}{a_3 a_4} - \frac{a_2}{a_3} \frac{(\lambda - b_1)(\lambda - b_4)}{a_1 a_4} - \frac{a_3}{a_4} \frac{(\lambda - b_1)(\lambda - b_2)}{a_1 a_2} + \frac{a_1 a_3}{a_2 a_4}$$

$\vdots$ $\vdots$

olmak üzere

$$P_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a_k} \sum_{j=1}^k (\lambda - d_j - d_{j+1} - b_j) P_j(z), \quad d_1 := 0, \quad d_j := a_{j-1}, \quad j = 2, 3, \dots,$$

$n = 1, 2, \dots$ şeklinde ifade edilir.

$P_n(z)$ fonksiyonu n . dereceden λ 'nın polinomlarıdır. Ayrıca $P_n(z)$ çift fonksiyondur yani $P_n(-z) = P_n(z)$ dir.

(3.1) denkleminin

$$Q_0(z) = \frac{1}{a_0}, \quad Q_1(z) = 0$$

koşulları altında $Q_n(z)$ çözümünü bulalım.

$$n = 1 \text{ için }, \quad Q_2(z) = -\frac{1}{a_1}$$

$$n = 2 \text{ için }, \quad Q_3(z) = Q_2(z) \frac{(\lambda - b_2)}{a_2} = -\frac{1}{a_1} \frac{(\lambda - b_2)}{a_2}$$

$$\begin{aligned} n = 3 \text{ için }, \quad Q_4(z) &= Q_3(z) \frac{(\lambda - b_3)}{a_3} - Q_2(z) \frac{a_2}{a_3} \\ &= -\frac{(\lambda - b_2)(\lambda - b_3)}{a_1 a_2 a_3} + \frac{a_2}{a_1 a_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 4 \text{ için }, \quad Q_5(z) &= Q_4(z) \frac{(\lambda - b_4)}{a_4} - Q_3(z) \frac{a_3}{a_4} \\ &= -\frac{(\lambda - b_2)(\lambda - b_3)(\lambda - b_4)}{a_1 a_2 a_3 a_4} + \frac{a_2}{a_1 a_3} \frac{(\lambda - b_4)}{a_4} + \frac{a_3}{a_4} \frac{(\lambda - b_2)}{a_1 a_2} \end{aligned}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

olmak üzere

$$Q_n(z) = \frac{1}{P_{n-1}(z)} \left[P_n(z) Q_{n-1}(z) - \frac{1}{a_{n-1}} \right], \quad n = 2, 3, \dots$$

şeklinde ifade edilir.

$Q_n(z)$ fonksiyonu $(n-1)$. dereceden λ 'nın polinomlarıdır. Ayrıca $Q_n(z)$ çift fonksiyondur yani $Q_n(-z) = Q_n(z)$ dir.

Teorem 3.1

$$W [P_n(z), Q_n(z)] = -1, \quad z \in \mathbb{C}$$

sağlanır.

İspat. Wronskiye n değişkeninden bağımsız olduğundan $n = 0$ alınmasıyla,

$$W [P_n(z), Q_n(z)] = a_0 \{P_0(z) Q_1(z) - P_1(z) Q_0(z)\} = -1, \quad z \in \mathbb{C}$$

bulunur. ■

$\{P_n(z)\}$ ve $\{Q_n(z)\}$ fonksiyonları z 'nin tam fonksiyonlarıdır.

3.2.2 Jost çözümü ve özellikleri

Tanım 3.3 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli dizilerin sağladığı (3.4) koşulu altında (3.1) ayrık Sturm-Liouville probleminin her $z \in \Pi$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-inz} e_n(z) = 1$$

koşulunu gerçekleyen çözümüne Jost çözümü denir ve $e(z) := \{e_n(z)\}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2 (3.4) şartıyla (3.1) ayrık Sturm-Liouville probleminin, $z \in \Pi$ için $e_n(z)$ Jost çözümü

$$e_n(z) = \mu_n e^{inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right), \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \quad (3.6)$$

şeklindedir. Burada μ_n ve A_{nm} dizileri $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ ve $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli dizileri cinsinden ifade edilir.

İspat. $z \in \Pi$ olmak üzere (3.6) ifadesi çözüm olduğundan (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$a_{n-1}e_{n-1} + b_n e_n + a_n e_{n+1} = (e^{iz} + e^{-iz}) e_n$$

ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} & e^{inz} [a_{n-1}\mu_{n-1}e^{-iz} + b_n\mu_n - \mu_n(e^{iz} + e^{-iz}) + a_n\mu_{n+1}e^{iz}] \\ & + e^{i(n-1)z} a_{n-1}\mu_{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} A_{n-1,m} e^{imz} + e^{i(n+1)z} a_n\mu_{n+1} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{n+1,m} e^{imz} \right) \\ & = e^{inz} \mu_n (e^{iz} + e^{-iz} - b_n) \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
a_{n-1}\mu_{n-1} &= \mu_n, \\
A_{n1} - A_{n-1,1} &= b_n, \\
A_{n2} - A_{n-1,2} &= a_n^2 - 1 + b_n A_{n1}, \\
A_{n-1,m+2} - A_{n,m+2} &= -a_n^2 A_{n+1,m} - 1 + b_n A_{n,m+1} + A_{nm}, \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerden ise μ_n ve A_{nm} dizileri tek olarak aşağıdaki biçimde bulunurlar.

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} a_k \right\}^{-1}, \\
A_{n1} &= - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k, \\
A_{n2} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1 - a_k^2) + b_k \sum_{p=k+1}^{\infty} b_p \right\}, \\
A_{n,m+2} &= A_{n+1,m} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \{ (1 - a_k^2) A_{k+1,m} - b_k A_{k,m+1} \}, \quad m = 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

μ_n ve A_{nm} dizileri (3.4) koşulu altında yakınsaktır. ■

Lemma 3.1

$$|A_{nm}| \leq c \sum_{k=n+\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada $c > 0$ olmak üzere sabit bir sayı ve $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ ise $\frac{m}{2}$ nin tam kısmıdır.

İspat. m verilmiş bir doğal sayı olmak üzere Teorem 3.2 'nin ispatındaki A_{nm} katsayılarının kullanılmasıyla n doğal sayısı üzerinden tümevarım yöntemiyle ispatı yapılır. ■

Lemma 3.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 3.3 A_{nm} dizisi her n ve her m için sınırlıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}
|A_{nm}| &\leq c \sum_{k=n+\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&\leq c \sum_{k=n}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&\leq c \sum_{k=1}^{\infty} k (|1 - a_k| + |b_k|) < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle A_{nm} dizisi her n ve her m için sınırlıdır. ■

Sonuç 3.4 A_{nm} dizisi her m için n değişkenine ve her n için m değişkenine göre $l^1(\mathbb{N})$ uzayına aittir.

İspat. İlk olarak A_{nm} dizisinin n değişkenine göre $l^1(\mathbb{N})$ uzayından olduğunu gösterelim. Bunun için

$$|A_{nm}| \leq c \sum_{k=n+\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|)$$

eşitsizliğinde I gösterge fonksiyonundan ve Teorem 2.2 'den yararlanalım.

$m = 2p$, $p = 1, 2, \dots$, olsun, böylelikle

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |A_{nm}| &\leq c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n+p}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&= c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I(k \geq n+p) (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&= c \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=p+1}^{\infty} I(k \geq n+p) (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&= c \sum_{k=p+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \sum_{n=1}^{\infty} I(n \leq k-p) \\
&= c \sum_{k=p+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \sum_{n=1}^{k-p} 1 \\
&= c \sum_{k=p+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) (k-p) \\
&\leq c \sum_{k=1}^{\infty} k (|1 - a_k| + |b_k|) < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $m = 2p + 1$, $p = 1, 2, \dots$, tek sayıları içinde ispat aynıdır. Bu durumda n değişkenine göre $A_{nm} \in l^1(\mathbb{N})$ dir. Şimdiyse A_{nm} dizisinin m değişkenine göre $l^1(\mathbb{N})$ uzayından olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| &\leq c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=n+\lceil \frac{m}{2} \rceil}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&= c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} I\left(k \geq n + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil\right) (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&= c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} I\left(k \geq n + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil\right) (|1 - a_k| + |b_k|) \\
&= c \sum_{k=n+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \sum_{m=1}^{\infty} I\left(\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \leq k - n\right) \\
&= c \sum_{k=n+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) \sum_{m=1}^{k-n} 1 \\
&= c \sum_{k=n+1}^{\infty} (|1 - a_k| + |b_k|) (k - n) \\
&= c \sum_{k=1}^{\infty} k (|1 - a_k| + |b_k|) < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylelikle m değişkenine göre $A_{nm} \in l^1(\mathbb{N})$ dir. ■

Sonuç 3.5 $e_n(z)$ Jost çözümü z 'ye göre $\mathbb{C}_+$ üzerinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ üzerinde sürekli ve her $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için $e_n(z) = e_n(z + 2\pi)$ dir.

İspat. Öncelikle $e_n(z)$ Jost çözümünün analitikliğine bakalım.

$$e_n(z) = \mu_n e^{inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right)$$

eşitliğinin düzgün yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}$ ifadesinin z 'ye göre $\mathbb{C}_+$ de düzgün yakınsak olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| |e^{imz}| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| e^{-m \operatorname{Im} z} \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| < \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}$, $z \in \mathbb{C}_+$ için düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla z 'ye göre türev mevcuttur. Yani,

$$\dot{e}_n(z) = \mu_n i n e^{inz} + \mu_n i \left(\sum_{m=1}^{\infty} (m+n) A_{nm} e^{i(m+n)z} \right)$$

olduğunda $\mathbb{C}_+$ üzerinde z 'ye göre analitiktir.

Süreklilik tanımından $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ve $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} e_n(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \mu_n e^{inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right) \right\} \\ &= e_n(z_0) \end{aligned}$$

yazılır. Böylelikle keyfi bir $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}_+$ noktasında Jost çözümünün sürekli olduğu görülür.

Üstel fonksiyonun tanımından her $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için

$$\begin{aligned} e^{in(z+2\pi)} &= e^{inz} e^{in2\pi} \\ &= e^{inz} [\cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n)] \\ &= e^{inz} \end{aligned}$$

olur. Bu ise Jost çözümünün 2π periyotlu olduğunu gösterir, yani $e_n(z) = e_n(z + 2\pi)$ sağlanır. ■

Teorem 3.3 $e_n(z)$ Jost çözümü (3.4) koşulu altında aşağıda verilen asimptotik eşitlikleri sağlar:

1. $e_n(z) = e^{inz} [1 + o(1)]$, $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $n \rightarrow \infty$
2. $e_n(z) = \mu_n e^{inz} [1 + o(1)]$, $n \in \mathbb{N}$, $z = \xi + i\tau$, $\tau \rightarrow \infty$.

İspat. 1. (3.6) Jost çözümü eşitliğinden

$$e_n(z) e^{-inz} = \mu_n + \mu_n \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \quad (3.7)$$

elde edilir. Buradan her $m = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} \left| \mu_n + \mu_n \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right| &\leq |\mu_n| + |\mu_n| \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm} e^{imz}| \\ &= |\mu_n| + |\mu_n| \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| e^{-m \operatorname{Im} z} \\ &\leq |\mu_n| + |\mu_n| \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}|, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+ \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. Diğer taraftan (3.4) koşulundan $a_k \rightarrow 1$, $k \rightarrow \infty$ olup $n \rightarrow \infty$ için

$$\mu_n = \left\{ \prod_{k=n}^{\infty} a_k \right\}^{-1} \rightarrow 1 \text{ gerçeklenir. Ayrıca } A_{nm} \in l^1(\mathbb{N}) \text{ olduğundan}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| = 0$$

bulunur. O halde,

$$\mu_n + \mu_n \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} = 1 + o(1), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad n \rightarrow \infty$$

sağlanır. Bu eşitlik (3.7) denkleminde dikkate alındığında

$$e_n(z) = e^{inz} [1 + o(1)], \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad n \rightarrow \infty$$

elde edilir.

2. (3.6) Jost özümü eşitliğinden

$$\frac{e_n(z) e^{-inz}}{\mu_n} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \quad (3.8)$$

yazılır. Buradan her $m = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} \right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm} e^{imz}| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |A_{nm}| e^{-m\tau}, \quad z = \xi + i\tau \end{aligned}$$

elde edilir. $\tau \rightarrow \infty$ için $e^{-m\tau} \rightarrow 0$ sağlanır. $A_{nm} \in l^1(\mathbb{N})$ olduğundan

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} = o(1), \quad \tau \rightarrow \infty$$

gerçeklenir. Bu eşitlik (3.8) denkleminde dikkate alındığında

$$e_n(z) = \mu_n e^{inz} [1 + o(1)], \quad n \in \mathbb{N}, \quad z = \xi + i\tau, \quad \tau \rightarrow \infty$$

olup ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.2 Her $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus [0, \pi]$ için

$$W[e_n(z), e_n(-z)] = -2i \sin z$$

gerçeklenir.

İspat. Sonuç 3.1 'den Wronskiye'nin n değişkeninden bağımsız olduğunu biliyoruz. Böylece

$$W[e_n(z), e_n(-z)] = \lim_{n \rightarrow \infty} W[e_n(z), e_n(-z)]$$

yazılabilir. Tanım 3.3 'te verilen eşitliğin ve (3.4) koşulunun kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} W[e_n(z), e_n(-z)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n [e_n(z) e_{n+1}(-z) - e_{n+1}(z) e_n(-z)]\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n [e^{-iz} e_n(z) e^{-inz} e_{n+1}(-z) e^{i(n+1)z}] \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n [e^{iz} e_{n+1}(z) e^{-i(n+1)z} e_n(-z) e^{inz}] \\ &= e^{-iz} - e^{iz} \\ &= -2i \sin z \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.4 Her $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus [0, \pi]$ için $e_n(-z) = \overline{e_n(z)}$ gerçekleşir.

İspat. a_n ve b_n reel değerli diziler olduğundan Teorem 3.2 'nin ispatında verilen μ_n ve A_{nm} katsayıları da reel değerli olur. Böylelikle

$$\begin{aligned} \overline{e_n(z)} &= \mu_n e^{-inz} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{-imz} \right) \\ &= e_n(-z) \end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.2.3 Saçılım çözümleri ve saçılım fonksiyonu

Şimdi $e_n(z)$, $P_n(z)$ ve $Q_n(z)$ çözümlerini kullanarak

$$E_n(z) := \begin{cases} \alpha(z) P_n(z) + \beta(z) Q_n(z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ e_n(z) & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases}, \quad z \in \Pi \quad (3.9)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyonun (3.1) denkleminin çözümü olduğu açıktır.

(3.3) impulsif koşullarından,

$$\begin{aligned} E_{m_0-1}(z) &= \frac{1}{\gamma_1} E_{m_0+1}(z) \\ \nabla E_{m_0-1}(z) &= \frac{1}{\gamma_2} \Delta E_{m_0+1}(z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1} e_{m_0+1}(z) &= \alpha(z) P_{m_0-1}(z) + \beta(z) Q_{m_0-1}(z) \\ \frac{1}{\gamma_2} \Delta e_{m_0+1}(z) &= \alpha(z) \nabla P_{m_0-1}(z) + \beta(z) \nabla Q_{m_0-1}(z) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan $\alpha(z)$ ve $\beta(z)$ katsayılarını bulalım:

$$\frac{1}{\gamma_1} e_{m_0+1}(z) = \alpha(z) P_{m_0-1}(z) + \beta(z) Q_{m_0-1}(z) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_2} [e_{m_0+2}(z) - e_{m_0+1}(z)] &= \alpha(z) [P_{m_0-1}(z) - P_{m_0-2}(z)] \\ &\quad + \beta(z) [Q_{m_0-1}(z) - Q_{m_0-2}(z)] \end{aligned}$$

ifade edilir. Bu iki eşitliğin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_1} e_{m_0+1}(z) - \frac{1}{\gamma_2} [e_{m_0+2}(z) - e_{m_0+1}(z)] &= \alpha(z) P_{m_0-2}(z) \\ &\quad + \beta(z) Q_{m_0-2}(z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.10) ve (3.11) da gerekli işlemlerin yapılmasıyla,

$$\begin{aligned} -\alpha(z) [-P_{m_0-1}(z) Q_{m_0-2}(z) + P_{m_0-2}(z) Q_{m_0-1}(z)] &= \frac{1}{\gamma_1} e_{m_0+1}(z) [-\nabla Q_{m_0-1}(z)] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_2} Q_{m_0-1}(z) [\Delta e_{m_0+1}(z)] \end{aligned}$$

olup Tanım 3.1 ve Teorem 3.1 'in kullanılmasıyla

$$\alpha(z) = \frac{a_{m_0-2}}{\gamma_1 \gamma_2} [\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(z) Q_{m_0-1}(z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(z) \nabla Q_{m_0-1}(z)] \quad (3.12)$$

$z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için bulunur.

Benzer işlemlerin yapılmasıyla $\beta(z)$ katsayısı ise

$$\beta(z) = -\frac{a_{m_0-2}}{\gamma_1 \gamma_2} [\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(z) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(z) \nabla P_{m_0-1}(z)] \quad (3.13)$$

$z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için şeklinde elde edilir.

$E(z) = \{E_n(z)\}$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) İSDP 'nin Jost çözümü olarak adlandırılır.

Tanım 3.4 (3.9) eşitliğinde verilen $E_n(z)$ Jost çözümünde $n = 0$ alınmasıyla elde edilen

$$E_0(z) := \frac{\beta(z)}{a_0}$$

fonksiyonuna (3.1)-(3.3) impulsif ayırık Sturm-Liouville probleminin Jost fonksiyonu denir.

Şimdi (3.1)-(3.3) İSDP 'nin $F(z) = \{F_n(z)\}$ olmak üzere

$$F_n(z) := \begin{cases} P_n(z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ \delta(z) e_n(z) + d(z) e_n(-z) & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases}$$

$z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus [0, \pi]$ için tanımlanan çözümünü ele alalım.

(3.3) impulsif koşullarımdan,

$$\begin{aligned} F_{m_0-1}(z) &= \frac{1}{\gamma_1} F_{m_0+1}(z) \\ \nabla F_{m_0-1}(z) &= \frac{1}{\gamma_2} \Delta F_{m_0+1}(z) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan $\delta(z)$ ve $d(z)$ katsayılarını elde edelim:

$$\gamma_1 P_{m_0-1}(z) = \delta(z) e_{m_0+1}(z) + d(z) e_{m_0+1}(-z) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}\gamma_2 P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 P_{m_0-2}(z) &= \delta(z) [e_{m_0+2}(z) - e_{m_0+1}(z)] \\ &\quad + d(z) [e_{m_0+2}(-z) - e_{m_0+1}(-z)]\end{aligned}$$

ifade edilir. Bu iki eşitliğin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$(\gamma_1 + \gamma_2) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 P_{m_0-2}(z) = \delta(z) e_{m_0+2}(z) + d(z) e_{m_0+2}(-z) \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.14) ve (3.15) 'te gerekli işlemlerin yapılmasıyla,

$$\begin{aligned}\delta(z) [e_{m_0+1}(z) e_{m_0+2}(-z) - e_{m_0+1}(-z) e_{m_0+2}(z)] &= \gamma_1 P_{m_0-1}(z) \Delta e_{m_0+1}(-z) \\ &\quad - \gamma_2 e_{m_0+1}(-z) \nabla P_{m_0-1}(z)\end{aligned}$$

olup Tanım 3.1 ve Lemma 3.2 'nin kullanılmasıyla

$$\delta(z) = -\frac{a_{m_0+1}}{2i \sin z} [\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(-z) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(-z) \nabla P_{m_0-1}(z)] \quad (3.16)$$

olarak bulunur.

Benzer işlemlerin yapılmasıyla $d(z)$ katsayısı ise

$$d(z) = \frac{a_{m_0+1}}{2i \sin z} [\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(z) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(z) \nabla P_{m_0-1}(z)] \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.6 $P_n(z) = P_n(-z)$ olduğundan $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus [0, \pi]$ için

$$d(z) = \delta(-z) = \overline{\delta(z)}$$

eşitliği kolayca bulunur.

Lemma 3.3 $E(z)$ ve $F(z)$ çözümlerinin Wronskiyeni $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus [0, \pi]$ için

$$W[E(z), F(z)] = \begin{cases} \beta(z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ \frac{a_{m_0+1}}{a_{m_0-2}} \gamma_1 \gamma_2 \beta(z) & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $\{E_n(z)\}$ ve $\{F_n(z)\}$ çözümlerinin Wronskiyeni $n = 0, 1, \dots, m_0 - 1$ için

$$\begin{aligned} W[E(z), F(z)] &= a_0 [E_0(z) F_1(z) - E_1(z) F_0(z)] \\ &= a_0 [(\alpha(z) P_0(z) + \beta(z) Q_0(z)) P_1(z) \\ &\quad - (\alpha(z) P_1(z) + \beta(z) Q_1(z)) P_0(z)] \end{aligned}$$

bulunur.

$P_0(z) = 0$, $P_1(z) = 1$, $Q_0(z) = \frac{1}{a_0}$ ve $Q_1(z) = 0$ olduğundan,

$$W[E(z), F(z)] = \beta(z), \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\{E_n(z)\}$ ve $\{F_n(z)\}$ çözümlerinin Wronskiyeni $n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} W[E(z), F(z)] &= a_{m_0+1} e_{m_0+1}(z) [\delta(z) e_{m_0+2}(z) + d(z) e_{m_0+2}(-z)] \\ &\quad - a_{m_0+1} e_{m_0+2}(z) [\delta(z) e_{m_0+1}(z) + d(z) e_{m_0+1}(-z)] \end{aligned}$$

yazılır.

(3.13) 'te verilen $\beta(z)$ ve (3.17) 'de verilen $d(z)$ 'nin kullanılmasıyla

$$W[E(z), F(z)] = \frac{a_{m_0+1}}{a_{m_0-2}} \gamma_1 \gamma_2 \beta(z), \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 3.5 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ reel terimli dizilerin sağladığı (3.4) koşulu altında (3.1) ayrık Sturm-Liouville probleminin her $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{inz} \widehat{e}_n(z) = 1, \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$$

koşulunu gerçekleyen çözümüne sınırsız çözüm denir ve $\widehat{e}_n(z)$ ile gösterilir.

Lemma 3.4 Her $z \in \Pi \setminus \{0, \pi\}$ için

$$W[e_n(z), \widehat{e}_n(z)] = -2i \sin z$$

gerçeklenir.

İspat. Sonuç 3.1 'den Wronskiye'nin n değişkeninden bağımsız olduğunu biliyoruz. Böylelikle

$$W[e_n(z), \widehat{e}_n(z)] = \lim_{n \rightarrow \infty} W[e_n(z), \widehat{e}_n(z)]$$

yazılabilir. (3.4) koşulu altında, Tanım 3.3 ve Tanım 3.4 'te verilen eşitliklerin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} W[e_n(z), \widehat{e}_n(z)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n [e_n(z) \widehat{e_{n+1}}(z) - e_{n+1}(z) \widehat{e}_n(z)]\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n [e^{-iz} e_n(z) e^{-inz} \widehat{e_{n+1}}(z) e^{i(n+1)z}] \\ &\quad - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n [e^{iz} e_{n+1}(z) e^{-i(n+1)z} \widehat{e}_n(z) e^{inz}] \\ &= e^{-iz} - e^{iz} \\ &= -2i \sin z \end{aligned}$$

bulunur. ■

(3.1)-(3.3) İSDP 'nin her $z \in \Pi$ için $G(z) = \{G_n(z)\}$ çözümünü aşağıdaki şekilde ele alalım:

$$G_n(z) := \begin{cases} P_n(z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ q(z) e_n(z) + k(z) \widehat{e}_n(z) & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases}$$

(3.3) impulsif koşullarından,

$$\begin{aligned} G_{m_0-1}(z) &= \frac{1}{\gamma_1} G_{m_0+1}(z) \\ \nabla G_{m_0-1}(z) &= \frac{1}{\gamma_2} \Delta G_{m_0+1}(z) \end{aligned}$$

yazılır.

Buradan $q(z)$ ve $k(z)$ katsayılarını bulalım:

$$\gamma_1 P_{m_0-1}(z) = q(z) e_{m_0+1}(z) + k(z) \widehat{e_{m_0+1}}(z) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 P_{m_0-2}(z) &= q(z) [e_{m_0+2}(z) - e_{m_0+1}(z)] \\ &\quad + k(z) [\widehat{e_{m_0+2}}(z) - \widehat{e_{m_0+1}}(z)] \end{aligned}$$

ifade edilir. Bu iki eşitliğin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$(\gamma_1 + \gamma_2) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 P_{m_0-2}(z) = q(z) e_{m_0+2}(z) + k(z) \widehat{e_{m_0+2}}(z) \quad (3.19)$$

bulunur. (3.18) ve (3.19) 'da gerekli işlemlerin yapılmasıyla,

$$\begin{aligned} q(z) [e_{m_0+1}(z) \widehat{e_{m_0+2}}(z) - e_{m_0+2}(z) \widehat{e_{m_0+1}}(z)] &= \gamma_1 P_{m_0-1}(z) \Delta \widehat{e_{m_0+1}}(z) \\ &\quad - \gamma_2 \widehat{e_{m_0+1}}(z) \nabla P_{m_0-1}(z) \end{aligned}$$

olup Tanım 3.1 ve Lemma 3.4 'ün kullanılmasıyla

$$q(z) = -\frac{a_{m_0+1}}{2i \sin z} [\gamma_1 \Delta \widehat{e_{m_0+1}}(z) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 \widehat{e_{m_0+1}}(z) \nabla P_{m_0-1}(z)] \quad (3.20)$$

elde edilir.

Benzer işlemlerin yapılmasıyla $k(z)$ katsayısı ise

$$k(z) = \frac{a_{m_0+1}}{2i \sin z} [\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(z) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(z) \nabla P_{m_0-1}(z)] \quad (3.21)$$

olarak bulunur.

$G(z)$ fonksiyonu (3.1)-(3.3) İSDP 'nin sınırsız çözümüdür.

Ayrıca $E(z)$, $F(z)$ ve $G(z)$ çözümlerinin katsayılarından yararlanılarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.7 Her $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$k(z) = d(z) = \overline{c(z)} = -\frac{a_{m_0+1} \gamma_1 \gamma_2}{a_{m_0-2} 2i \sin z} \beta(z) \quad (3.22)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 3.5 $E(z)$ ve $G(z)$ çözümlerinin Wronskiyeni $z \in \Pi$ için

$$W[E(z), G(z)] = \begin{cases} \beta(z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ \frac{a_{m_0+1}}{a_{m_0-2}} \gamma_1 \gamma_2 \beta(z) & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases}$$

şeklindedir.

İspat. $\{E_n(z)\}$ ve $\{G_n(z)\}$ çözümlerinin Wronskiyeni $n = 0, 1, \dots, m_0 - 1$ için

$$\begin{aligned} W[E(z), G(z)] &= a_0 [E_0(z) G_1(z) - E_1(z) G_0(z)] \\ &= a_0 [(\alpha(z) P_0(z) + \beta(z) Q_0(z)) P_1(z) \\ &\quad - (\alpha(z) P_1(z) + \beta(z) Q_1(z)) P_0(z)] \end{aligned}$$

bulunur.

$P_0(z) = 0$, $P_1(z) = 1$, $Q_0(z) = \frac{1}{a_0}$ ve $Q_1(z) = 0$ olduğundan,

$$W[E(z), G(z)] = \beta(z), \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1$$

elde edilir.

Benzer şekilde $\{E_n(z)\}$ ve $\{G_n(z)\}$ çözümlerinin Wronskiyeni $n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$ için

$$\begin{aligned} W[E(z), G(z)] &= a_{m_0+1} e_{m_0+1}(z) \left[q(z) e_{m_0+2}(z) + k(z) \widehat{e_{m_0+2}(z)} \right] \\ &\quad - a_{m_0+1} e_{m_0+2}(z) \left[q(z) e_{m_0+1}(z) + k(z) \widehat{e_{m_0+1}(z)} \right] \end{aligned}$$

yazılır.

(3.13) 'te verilen $\beta(z)$ ve (3.21) 'de verilen $k(z)$ 'nin kullanılmasıyla

$$W[E(z), G(z)] = \frac{a_{m_0+1}}{a_{m_0-2}} \gamma_1 \gamma_2 \beta(z), \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots$$

bulunur. ■

Teorem 3.5 Her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için $\beta(z) \neq 0$ sağlanır.

İspat. En az bir $z_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ sayısı için

$$\beta(z_0) = 0$$

olduğunu kabul edelim.

(3.22) denkleminde $\beta(z_0) = 0$ olduğundan $d(z_0) = c(z_0) = 0$ bulunur. Böylece her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $F_n(z_0) = 0$ olur ve bu çözüm (3.1)-(3.3) İSDP 'nin aşikar çözümüdür. Bu ise F_n çözümünün sadece $n = 0$ için aşikar çözüm olmasıyla çelişir ($F_0 = 0$). O halde her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için $\beta(z) \neq 0$ olmalıdır. ■

Teorem 3.6 Her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$E_n(-z) = \overline{E_n(z)}$$

sağlanır.

İspat. (3.1)-(3.3) İSDP 'nin (3.9) 'da verilen Jost çözümünde

$$E_n(-z) = \begin{cases} \alpha(-z) P_n(-z) + \beta(-z) Q_n(-z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ e_n(-z) & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases}$$

yazılır. (3.12) ve (3.13) 'te sırasıyla verilen $\alpha(z)$, $\beta(z)$ katsayılarının kullanılması ve $P_n(z)$, $Q_n(z)$ fonksiyonlarının çift olmasından

$$\begin{aligned} E_n(-z) &= \begin{cases} \overline{\alpha(z)} P_n(z) + \overline{\beta(z)} Q_n(z) & , \quad n = 0, 1, \dots, m_0 - 1 \\ \overline{e_n(z)} & , \quad n = m_0 + 1, m_0 + 2, \dots \end{cases} \\ &= \overline{E_n(z)} \end{aligned}$$

gerçeklenir. ■

Bu teoremden yararlanılarak aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.8 Her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için $E_0(-z) = \overline{E_0(z)}$ gerçekleşir.

S-L denklemi için (1.4) 'te tanımlanan saçılım fonksiyonuna benzer olarak aşağıdaki tanım verilir.

Tanım 3.6 Her $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$S(z) := \frac{\overline{\beta(z)}}{\beta(z)} \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanan S fonksiyonu (3.1)-(3.3) impulsif ayırık Sturm-Liouville probleminin saçılım fonksiyonu olarak adlandırılır.

(3.9) 'dan

$$E_0(z) = \alpha(z) P_0(z) + \beta(z) Q_0(z) = \frac{\beta(z)}{a_0}$$

ve

$$E_0(-z) = \frac{\beta(-z)}{a_0}$$

bulunur.

(3.23) eşitliği ve son denklemden saçılım fonksiyonu

$$S(z) = \frac{\overline{E_0(z) a_0}}{E_0(z) a_0} = \frac{\overline{E_0(z)}}{E_0(z)} = \frac{E_0(-z)}{E_0(z)} = \frac{\beta(-z)}{\beta(z)}$$

ifade edilir.

Ayrıca (3.13) 'te verilen $\beta(z)$ 'nin tanımından saçılım fonksiyonu

$$S(z) = \frac{\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(-z) P_{m_0-1}(-z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(-z) \nabla P_{m_0-1}(-z)}{\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(z) P_{m_0-1}(z) - \gamma_2 e_{m_0+1}(z) \nabla P_{m_0-1}(z)} \quad (3.24)$$

biçiminde yazılabilir.

Lemma 3.6

$$\lim_{z \rightarrow 0} S(z) = S(0) = 1, \quad z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$$

sağlanır.

İspat. (3.24) eşitliğinde tanımı olan saçılım fonksiyonu için

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} S(z) &= \frac{\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(0) P_{m_0-1}(0) - \gamma_2 e_{m_0+1}(0) \nabla P_{m_0-1}(0)}{\gamma_1 \Delta e_{m_0+1}(0) P_{m_0-1}(0) - \gamma_2 e_{m_0+1}(0) \nabla P_{m_0-1}(0)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla elde edilir. ■

Teorem 3.7 Saçılım fonksiyonu $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$ olmak üzere

$$S(-z) = S^{-1}(z) = \overline{S(z)}$$

sağlar.

İspat. Saçılım fonksiyonun tanımından $S(-z) = \frac{E_0(z)}{E_0(-z)}$ ve $\overline{S(z)} = \frac{\overline{E_0(-z)}}{E_0(z)}$ yazılır.

Ayrıca $E_0(z) = \overline{E_0(-z)}$ ve $\overline{E_0(z)} = E_0(-z)$ olduğundan

$$S(-z) = S^{-1}(z) = \overline{S(z)}$$

bulunur. ■

Teorem 3.8

$$|S(z)| = 1, \quad z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \setminus \{0, \pi\}$$

gerçeklenir.

İspat. Saçılım fonksiyonun tanımı kullanılarak

$$|S(z)| = \frac{|\overline{E_0(z)}|}{|E_0(z)|} = \frac{|E_0(z)|}{|E_0(z)|} = 1$$

sağlanır. ■

(3.1)-(3.3) impulsif ayrık Sturm-Liouville probleminin özdeğerler kümesini σ_d ile gösterelim.

Teorem 3.9

$$\sigma_d = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2 \cos z, \quad z \in \Pi_+, \quad \beta(z) = 0\}$$

sağlanır.

İspat. Özdeğerlerin tanımından, $E_n(z)$ Jost çözümü $l^2(\mathbb{N})$ uzayından olmalıdır. (3.9) 'dan $E_n(z)$ Jost çözümünün ilk kısmı n 'nin sonlu değerlerini içerdiğinden

$$\alpha(z) P_n(z) + \beta(z) Q_n(z) \in l^2(\mathbb{N})$$

olur ve $E_n(z)$ Jost çözümünün ikinci kısmı olan $e_n(z)$ ise $l^2(\mathbb{N})$ uzayının elemanıdır. O halde $E_n(z) \in l^2(\mathbb{N})$ 'dir. Diğer taraftan (3.2) sınır koşulu sağlamalıdır. Sonuç olarak $Q_0(z)$ fonksiyonun katsayısı sıfır olmalıdır yani $\beta(z) = 0$ 'dır. ■

4. İMPALSİF AYRIK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ İÇİN ÖRNEK

Bu bölümde, (3.1)-(3.3) impulsif ayrik Sturm-Liouville probleminin özel örneğini ele alacağız. Bölüm 3 'te bulduğumuz sonuçları kullanarak, bu örnekteki problemin Jost çözümünü, saçılım fonksiyonunu ve özdeğerlerini bulacağız.

Örnek 4.1 İmpulsif ayrik Sturm-Liouville problemini

$$y_{n-1} + y_{n+1} = 2 \cos z y_n, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 3, 4\} \quad (4.1)$$

denklemi

$$y_0 = 0 \quad (4.2)$$

sınır koşulu ve

$$\begin{aligned} y_4 &= \gamma_1 y_2 \\ \Delta y_4 &= \gamma_2 \nabla y_2 \quad ; \quad \gamma_1 \gamma_2 \neq 0, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.3)$$

impulsif koşulları ile ele alalım.

(4.1) denkleminde $m_0 = 3$ (impulsif nokta), $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} = 1$ ve $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 0$ olduğu açıktır.

Öncelikle (4.1) denkleminin çözümlerini bulalım. $\{P_n(z)\}$ ve $\{Q_n(z)\}$ fonksiyonları $n = 0, 1, 2$ için

$$P_0(z) = 0, \quad P_1(z) = 1$$

$$Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = 0$$

başlangıç koşullarıyla (4.1) denkleminin temel çözümleridir. Ayrıca bu problem için $e_n(z) = e^{inz}$ olduğu kolayca görülür.

$\{P_n(z)\}$ ve $\{Q_n(z)\}$ çözümlerini (4.1) 'te $n = 1$ için yazarsak

$$P_2(z) = \lambda, \quad Q_2(z) = -1$$

elde edilir.

Ayrıca (3.9) 'dan

$$E_n(z) = \begin{cases} \alpha(z) \lambda - \beta(z) & , \quad n = 0, 1, 2 \\ e^{inz} & , \quad n = 4, 5, \dots \end{cases}, \quad z \in \Pi$$

olup (4.1)-(4.3) İSDP 'nin Jost çözümüdür.

$\lambda = 2 \cos z$ ve $m_0 = 3$ olmak üzere (3.13) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \beta(z) &= -\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} [\gamma_1 \Delta e_4(z) P_2(z) - \gamma_2 e_4(z) \nabla P_2(z)] \\ &= -\frac{1}{\gamma_1 \gamma_2} [\gamma_1 (e_5(z) - e_4(z)) P_2(z) - \gamma_2 e_4(z) (P_2(z) - P_1(z))] \\ &= \left[-\frac{(e^{5iz} - e^{4iz})(e^{iz} + e^{-iz})}{\gamma_2} + \frac{e^{4iz}(e^{iz} + e^{-iz} - 1)}{\gamma_1} \right] \\ &= e^{3iz} \left[\frac{e^{2iz} - e^{iz} + 1}{\gamma_1} - \frac{e^{3iz} - e^{2iz} + e^{iz} - 1}{\gamma_2} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer işlemlerin yapılmasıyla (3.12) 'den $\alpha(z)$ katsayısı

$$\alpha(z) = e^{3iz} \left[\frac{e^{iz} - 1}{\gamma_1} - \frac{e^{2iz} - e^{iz}}{\gamma_2} \right]$$

olarak bulunur.

(4.4) 'ten yararlanılarak (4.1)-(4.3) İSDP 'nin saçılım fonksiyonu $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \setminus \{0, \pi\}$ için

$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{\overline{\beta(z)}}{\beta(z)} \\ &= e^{-6iz} \left[\frac{\gamma_2 (e^{-2iz} - e^{-iz} + 1) - \gamma_1 (e^{-3iz} - e^{-2iz} + e^{-iz} - 1)}{\gamma_2 (e^{2iz} - e^{iz} + 1) - \gamma_1 (e^{3iz} - e^{2iz} + e^{iz} - 1)} \right] \end{aligned}$$

elde edilir.

(4.1)-(4.3) İSDP 'nin özdeğerlerinin kümesini

$$\sigma_d = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = 2 \cos z, \quad z \in \Pi_+, \quad \beta(z) = 0 \}$$

ele alalım.

$\beta(z) = 0$ ve $\lambda = 2 \cos z$ olduğundan (4.4) eşitliğinden,

$$\frac{e^{2iz} - e^{iz} + 1}{\gamma_1} - \frac{e^{3iz} - e^{2iz} + e^{iz} - 1}{\gamma_2} = 0$$

veya

$$\frac{e^{3iz} - e^{2iz} + e^{iz} - 1}{e^{2iz} - e^{iz} + 1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

yazılabilir.

$\gamma_2 = a\gamma_1$ için son denklemin kullanılmasıyla

$$e^{3iz} - (a+1)e^{2iz} + (a+1)e^{iz} - (a+1) = 0 \quad (4.5)$$

bulunur.

1. Durum: $a = 1$ için (4.5) denkleminin çözülmesiyle

$$e^{iz} \simeq 1.5437 \quad (4.6)$$

$$e^{iz} \simeq 0.22816 - i1.11514 \quad (4.7)$$

$$e^{iz} \simeq 0.22816 + i1.11514 \quad (4.8)$$

bulunur. (4.6), (4.7) ve (4.8) denklemlerinin kökleri Π_+ 'da olmadığından (4.1)-(4.3) İSDP 'nin özdeğerleri mevcut değildir.

2. Durum: $a = 2$ için (4.5) denkleminin çözülmesiyle

$$e^{iz} \simeq 2.2599$$

$$e^{iz} \simeq 0.37004 - i1.09112$$

$$e^{iz} \simeq 0.37004 + i1.09112$$

bulunur. Benzer şekilde, bu son üç denklemin kökleri Π_+ 'da değildir. Dolayısıyla (4.1)-(4.3) İSDP 'nin özdeğerleri mevcut değildir.

Ayrıca (4.5) 'ten $a \neq -1$ olduğu açıktır, yani $\gamma_2 \neq -\gamma_1$ dir.

5. SONUÇ

İmpulsif ayrık Sturm-Liouville denkleminin saçılım teorisi için yapılan bu tez çalışmasında, öncelikle kaynakçada verilen kaynaklar aracılığıyla saçılım teorisi için temel kavramlardan bahsedilmiş olup çeşitli makaleler kullanılmıştır. Bu tezin üçüncü ve dördüncü bölümlerinde 2003 yılında Adıvar tarafından basılan doktora tezi ve 2017 yılında Bairamov, Aygar ve Karshoğlu tarafından basılan makale temel alınmıştır.

Tezin üçüncü bölümünde Bairamov, Aygar ve Karshoğlu tarafından 2017 yılında yayınlanan "İmpulsif ayrık Schrödinger denklemlerinin spektrumunu ve saçılım analizi" başlıklı makalesi detaylı bir biçimde incelenmiştir. Yani $\mathbb{N}$ kümesinde ayrık Sturm-Liouville denkleminin temel çözümleri, Jost çözümü ve özellikleri bulunmuştur. Sonrasında ise impulsif ayrık Sturm-Liouville probleminin saçılım çözümleri, Jost çözümü, Jost fonksiyonu, saçılım fonksiyonu ve özellikleri elde edilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise impulsif ayrık Sturm-Liouville problemi için farklı bir örnek verilmiştir. Bu tezin üçüncü bölümünden bulduğumuz bilgilerden yararlanarak ele alınan bu problem için Jost çözümü, saçılım fonksiyonu ve özdeğerler kümesi detaylıca araştırılmıştır.

Sonuç olarak, son zamanlarda birçok alanda gelişim kaydeden impulsif problemler için bu tezde incelenen impulsif ayrık Sturm-Liouville denklemi önemli bir kaynak olacaktır. Ayrıca bu tez çalışmasından ve bu alan için bulunan çeşitli kaynaklardan yararlanılarak ayrık durumda impulsif koşullarla Dirac denklemlerinin saçılım teorisi incelenebilir. Hem de ileride impulsif ayrık dissipatif Sturm-Liouville ve diğer operatörlerin spektral analizi Lax-Phillips, Sz.-Nagy-Foiaş ve Pavlov saçılım teorisi yardımı ile de öğrenilecektir.

KAYNAKLAR

- Adivar, M., Bairamov, E., 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators, *J. Math. Anal. Appl.* 261(2), 461-478.
- Adivar, M., Bairamov, E., 2003. Difference equations of second order with spectral singularities, *J. Math. Anal. Appl.* 277(2), 714-721.
- Adivar, M., 2003. Non-selfadjoint Diskret Schrödinger Operatörünün Spektral Analizi, AÜFBE, Ankara.
- Agronovich, Z. S., Marchenko, V. A., 1963. The Inverse Problem of Scattering Theory. New York.
- Albeverio, S., Fei, S., Kurasov, P., 2002. Point interactions: PT-hermiticity and reality of the spectrum, *Lett. Math. Phys.* 59(3), 227-242.
- Allahverdiev, B. P., 2005a. A nonself-adjoint singular Sturm-Liouville problems with a spectral parameter in the boundary conditions. *Math. Nachr.*, 278, 743-755.
- Allahverdiev, B. P., 2005b. Dissipative Sturm-Liouville operators in limit-point case. *Acta Appl. Math.*, 86, 237-248.
- Allahverdiev, B. P., 2006. A dissipative singular Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in the boundary condition. *J. Math. Anal. Appl.*, 316, 510-524.
- Apostol, T. M., 1960. Mathematical Analysis. Addison-Wesley, Reading. Mass., 373-374.
- Aydemir, K., Mukhtarov, Sh. O., 2014. Completeness of one two-interval boundary value problem with transmission conditions, *Miskolc Math. Notes*, 15, 293-303.
- Bairamov, E., Ugurlu, E., 2011. The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions, *Math. Comput. Modell.* 53, 805-813.
- Bairamov, E., Aygar, Y., Karshoğlu, D., 2017. Scattering analysis and spectrum of discrete Schrödinger equations with transmission conditions, *Filomat*, 31, 5391-5399.
- Bairamov, E., Cebesoy, S., Erdal, I., 2019. Difference equations with a point interaction, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 42, 5498-5508.
- Balcı, M., 2012. Matematik Analiz-1. Sürat üniversite yayınları, İstanbul.
- Berezanski, Y. M., 1968. Expansions in Eigenfunctions of Selfadjoint Operators. AMS, Providence.
- Case, K. M., 1973. On discrete inverse scattering, II. *J. Mathematical Phys*, 14, 916-920.

- Chadon, K., Sabatier, P. C., 1997. Inverse Problems in Quantum Scattering Theory. Springer-Verlag, Berlin, New York.
- Faddeev, L. D., 1960. Scattering theory for a three-particle system, Soviet Physics. JETP, 12, 1014-1019.
- Gasymov, M. G., Levitan, B. M., 1966. Determination of the Dirac system from scattering phase, Sov. Math., Dokl. 167, 1219-1222.
- Guseinov, G. S., 1976. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation, Sov. Math., Dokl. 230, 1045-1048.
- Jaulent, M., Jean, C., 1972. The inverse s-wave scattering problem for a class of potentials depending on energy, Comm. Math. Phys. 28, 177-220.
- Krall, A. M., Bairamov, E., Cakar, O., 2001. Spectral analysis of a non-selfadjoint discrete Schrödinger operators with spectral singularities, Math Nachr. 231, 89-104.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis with Applications. Wiley, New York.
- Lakshmikantham, V., Bainov, D. D., Simenov, P. S., 1989. Theory of Impulsive Differential Equations. Teaneck, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc.
- Lax, P. D., Phillips, R. S., 1967. Scattering Theory, New York.
- Lusternik, L. A., Sobolev, V. I., 1974. Elements of Functional Analysis. Hindustan Publishing Corpn., Delhi.
- Lyubarskii, Yu. I., Marchenko, V. A., 2007. Direct and inverse problems of multi-channel scattering, Funktsional. 41, 58-77.
- Marchenko, V. A., 1986. Sturm-Liouville Operators and Applications. Birkhauser Verlag, Basel.
- Mukhtarov, F. S., Kadakal, M., Mukhtarov, Sh. O., 2003. Boundary-transmission problem for Sturm-Liouville equation with discontinuous weight eigendependent boundary conditions, Int. J. Appl. Math. 12, 235-250.
- Mukhtarov, Sh. O., Tunç, E., 2004. Eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with transmission conditions, Israel J. Math. 144, 367-380.
- Mukhtarov, F. S., Aydemir, K., Mukhtarov, Sh. O., 2014. Spektral analysis of one boundary value-transmission problem by means of Green's function, Electron. J. Math. Anal. Appl. 2, 23-30.
- Mukhtarov, Sh. O., Aydemir, K., 2015. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point, Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 35, 639-649.

- Naimark, M. A., 1968. Linear Differential Operators. Frederick Ungar Publishing Co. New York.
- Özkin, İ. K., 1989. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi. Ankara.
- Pavlov, B. S., 1975a. Selfadjoint dilation of a dissipative Schrödinger operator and on eigenfunction expansion. *Funct. Anal. Appl.*, 98, 172-173.
- Pavlov, B. S., 1975b. On separation conditions for the spectral components of a dissipative operator. *Math. USSR Izvestija*, 9, No. 1, 113-137.
- Pavlov, B. S., 1977. Selfadjoint dilation of the dissipative Schrödinger operator and its resolution in terms of eigenfunctions. *Math. USSR Sbornik*, 31, No. 4, 457-478.
- Phillips, R. S., 1959. Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90, No. 2, 193-254.
- Sabuncuoğlu, A., 2011. Lineer Cebir. Nobel yayınları, Ankara.
- Samoilenko, A. M., Perestyuk N. A., 1995. Impulsive Differential Equations. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co., Inc.
- Sz.-Nagy, B., Foiaş, C., 1970. Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space. Academia Kiada, Budapest.
- Ugurlu, E., Bairamov, E., 2013. Dissipative operators with impulsive conditions, *J. Math. Chem.* 51, 1670-1680.
- Ugurlu, E., 2014. On the perturbation determinants of a singular dissipative boundary value problem with finite transmission conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 409, 567-575.
- Ugurlu, E., Bairamov, E., 2014. On the rate of the convergence of the characteristic values of an integral operator associated with a dissipative fourth order differential operator in lim-4 case with finite transmission conditions, *J. Math. Chem.* 52, 2627-2644.