DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ BAĞLAMINDA CEBİRSEL MUHAKEMELERİNİN İNCELENMESİ: ÜÇGENLER ALT ÖĞRENME ALANINDA BİR UYGULAMA

Doktora Tezi

Ferda ADIGÜZEL DOĞAN

Eskişehir 2021

DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ BAĞLAMINDA CEBİRSEL MUHAKEMELERİNİN İNCELENMESİ: ÜÇGENLER ALT ÖĞRENME ALANINDA BİR UYGULAMA

Ferda ADIGÜZEL DOĞAN

DOKTORA TEZİ

Matematik Eğitimi Doktora Programı

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tuba ADA

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Haziran 2021

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

ÖZET

DOKUZUNCU SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GEOMETRİ BAĞLAMINDA CEBİRSEL MUHAKEMELERİNİN İNCELENMESİ: ÜÇGENLER ALT ÖĞRENME ALANINDA BİR UYGULAMA

Ferda ADIGÜZEL DOĞAN

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı
Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Nisan 2021
Danışman: Prof. Dr. Tuba ADA

Bu tezin iki temel amacı vardır; üçgenler alt öğrenme alanında cebir ve cebirsel muhakemenin ön plana alınması suretiyle alanlar arasındaki bağlantıyı ortaya çıkarmak ve öğrencilerin cebirsel muhakemelerini geliştirmek. Nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyinin kullanıldığı bu araştırma sekiz hafta süresince otuz üç kişiden oluşan bir dokuzuncu sınıfta yürütülmüştür. Araştırmanın öncesinde uygulanan cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testi sonuçlarına göre ikişer adet zayıf, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip toplam altı odak öğrenci ile üç adet klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyi Kaput'un cebirsel muhakeme ve McCrory ve diğerlerinin ortaöğretim seviyesinde cebir öğretimi teorik çerçeveleri ekseninde tasarlanmıştır. Öğretim dizisinde geometrik ilişkilerin öğrenciler tarafından keşfinin sağlanması için sınıf-içi tartışma ortamları yaratılmış ve Cabri Geometry II dinamik yazılımı kullanılmıştır. Odak öğrencilerle gerçekleştirilen ön, ara ve son klinik görüşmeler ve öğretim dizisinin video ve ses kayıtları, odak öğrencilerin klinik görüşmelerde üzerinde çalıştıkları çalışma kâğıtları ve araştırmacı günlüğü veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Odak grup öğrencileri sınıfın mikro seçkisi olduğundan klinik görüşmeler araştırmacıya öğrencilerin geometri sorularında cebiri ve cebirsel muhakemeyi ne ölçüde merkeze aldıkları hakkında bulgular sunmuştur. Bulgular öğrencilerin geometri problemlerini çözmelerinde cebirsel muhakeme ile geometrik bilgi yapılarının etkileşime girdiğini ve bunlardan birinin eksikliğinin öğrencilerin çözüme ulaşmalarına engel olduğu sonucunu ortaya koymuştur.

Anahtar sözcükler: Cebir, Cebirsel muhakeme, Cabri geometry II, Üçgenler öğrenme alanı.

ABSTRACT

ANALYZING NINTH-GRADE STUDENTS' ALGEBRAIC THINKING IN GEOMETRY: AN APPLICATION IN TRIANGLES SUB-LEARNING DOMAIN

Ferda ADIGÜZEL DOĞAN

Department of Mathematics

Anadolu University, Graduate School of Educational Sciences, April 2021

Supervisor: Prof. Dr. Tuba ADA

The aim of this dissertation is twofold; it aims at promoting the understanding about the relationship between algebra and geometry through foregrounding algebra and algebraic reasoning in the triangles sub-learning domain and, improving the algebraic reasoning of students. The dissertation employed the teaching experiment method, which is one of common qualitative research methods, at a ninth-grade classroom that involved thirty-three participants and lasted for eight weeks. Prior to the research, algebraic thinking and van Hiele geometric thinking tests were employed in the class and, accordingly, three clinical interviews were conducted with six focus group students with low, medium, and high achievement levels. The teaching experiment was designed based on Kaput's algebraic reasoning as well as the theoretical framework of McCrory's and his colleagues' studies about teaching algebra at the secondary education level. To facilitate students' discovering the geometric relationships, discussion environment was created in the classroom as well as Cabri II Geometry dynamic software was used in the teaching episodes. Video and audio recordings of the pre, mid, and final clinical interviews with the focus-group students as well as of the teaching episodes; worksheets of the focus-group students during the clinical interviews, and the researcher's diary were used as the data gathering tools in the research. Because the focus-group students were the micro sample of the class, the clinical interviews provided the researcher with important findings regarding to what extent the students prioritized algebra and algebraic reasoning in the process of solving geometry questions. The dissertation concludes that the structures of both algebraic reasoning and geometric knowledge interact while students work on solving geometry problems and that the lack of either one prevents students from reaching a solution.

Keywords: Algebra, Algebraic reasoning, Cabri geometry II, the Sub-learning domain of triangles.

TEŞEKKÜR

Doktora tez metninin en önemli ve belki de en zor kısımlarından birinin "Teşekkür" sayfasını yazmak olduğunu hissettim. Nedeni, bu uzun süreçteki tüm duygu ve düşüncelerin kelimelere aktarılmasının zorluğu yanında, teşekkür edilmesi gereken birçok kişinin varlığı ve kısa bir metinde hepsini anma güçlüğüdür. Dolayısıyla, bu süreçte emeği geçen herkese öncelikle teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Bununla beraber, bazı özel kişilerin ve kurumların da adını anmak istiyorum.

Matematik dalında Yüksek Lisans derecemi aldıktan sonra çok severek yaptığım öğretmenlik mesleği nedeniyle lisansüstü çalışmalarıma bir dönem ara vermek zorunda kalmıştım. Doktora çalışmalarına başlamam için beni cesaretlendiren ve bu süreçte her zaman manevi ve akademik açıdan destek olan değerli eşim Prof. Dr. Nejat Doğan'a çok teşekkür ederim.

Bu süreçte yanımda olan değerli hocalarım; sizlere çok teşekkür ediyorum. Danışmanım Prof. Dr. Tuba Ada'ya emekleri ve özellikle geometri konusundaki desteği için teşekkür ediyorum. Doktora eğitimim süresince gerek derslerde gerekse tez dönemindeki destek ve katkıları için Prof. Dr. Dilek Tanışlı'ya şükranlarımı sunuyorum; Dilek Hocamızın özellikle cebir ve cebirsel düşünce konularındaki katkılarından dolayı da ayrıca kendisine teşekkür ederim. Tez Komitesi üyelerinden Dr. Özlem Esen'e, izleme sürecindeki hem manevi hem de akademik desteklerinden dolayı teşekkür ederim. Prof. Dr. Nilüfer Köse'nin özellikle geometrik yazılımlar ve matematiğe yeni yaklaşımlar konusunda eğitim ve tez sürecime önemli desteği ve katkıları olmuştur; kendisine çok teşekkür ederim. Prof. Dr. H. Bahadır Yanık'ı da aynı nedenlerden dolayı anmadan geçemeyeceğim; katkılarından dolayı kendisine çok teşekkür ederim.

Aileme de bu noktada özel bir teşekkürü borç bilirim. Annem Necla Adıgüzel, ilkokuldan doktora çalışmalarıma kadar tüm eğitim-öğretim ve akademik süreçlerde her zaman yanımda olmuş ve maddi-manevi desteğini esirgememiştir. Kendisine ne kadar teşekkür etsem azdır. Keza, babam Emekli Kurmay Albay M. Bahattin Adıgüzel'e aynı nedenlerden dolayı çok teşekkür ederim; çocukluğumdan beri beni hep doktora derecesine sahip bir öğretmen olarak hayal etmişti. Bu başarımla sanırım hem anneme hem de babama en güzel hediyelerden birini vermiş oluyorum. Kardeşim Yıldırım Adıgüzel ve ailesine de manevi desteklerinden dolayı teşekkür ediyorum. Ne zaman doktora çalışmaları beni bunaltacak gibi olsa aradığım Kardeşim Yıldırım, yaptığımız

uzun telefon görüşmelerinde beni duygusal olarak hep rahatlatmıştır. Her zaman yanımda olduğunu bilmek çok güzel bir duygu. Ve yeni doğan bebeği: Leo Alp Adıgüzel. Ona sevgimi anlatmak çok zor; bu nedenle doktora tezi Leo Alp Adıgüzel'e adanmıştır.

Doktora eğitimi ve tez yazımı sürecinde bana destek olan kurumları, idarecileri ve meslektaşlarımı da anmak istiyorum. Anadolu Üniversitesi Matematik Eğitimi Bölümü'ne, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü ve çalışanlarına, ayrıca TOKİ Şehit İkram Cirit Anadolu Lisesi ile değerli idarecilerine ve mesai arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

Tez sürecine katılan Anadolu Lisesi'ndeki değerli öğrencilerime de ayrıca çok teşekkür ederim. Onların katılımı ve karşılıklı öğrenme ortamı yaratmaları sayesinde bu tezi tamamlayabildim. Öğrencilerim olmadan bu tez olamazdı. Umarım bu sürece katılımları da eğitim-öğretim yaşamlarında kendilerine katkıda bulunacaktır.

Bu vesileyle, yaşamımda ve doktora eğitim sürecinde bana katkıda bulunan aile üyelerime, hocalarıma, öğrencilerime ve meslektaşlarıma tekrar teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Doktora derecesinin şahsıma yüklediği sorumlulukların da farkındayım; ben de sizlere destek vermeye ve katkıda bulunmaya devam etme kararlılığında olduğumu burada teyit ederim. Bu doktora tezinin akademisyenlere, eğitmenlere, öğrencilere ve konuya ilgi duyan toplumun her kesiminden okurlara faydalı olacağını umuyorum.

07/06/2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Ferda ADIGÜZEL DOĞAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BAŞLIK SAYFASI ……..…...i

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI ……..…..ii

ÖZET ……..….iii

ABSTRACT ……...iv

TEŞEKKÜR ……..……..v

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ …….…...vii

İÇİNDEKİLER ……viii

TABLOLAR DİZİNİ ……...…xiv

ŞEKİLLER DİZİNİ ……xvii

GÖRSELLER DİZİNİ ……...…xxiii

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ …….……xxiv

1. GİRİŞ ……..….1

1.1. Problem Durumu ……..…1

1.2. Teorik Çerçeve ……..…8

1.2.1. Kaput'un cebir içerik analizi ve cebirsel muhakeme çerçevesi ……...…8

1.2.2. McCrory ve diğerlerinin ortaöğretimde cebir öğretimi teorisi ……..…15

1.3. Araştırmanın Amacı …..……...……..18

1.3.1. Araştırma problemleri ……18

1.4. Araştırmanın Önemi ……..19

1.5. İlgili Alan Yazın ……..20

2. YÖNTEM ……...23

2.1. Araştırmanın Deseni ……..23

2.1.1. Öğretim deneyi ……24

2.1.2. Araştırmada benimsenen öğretim deneyinin bağlamı …….….25

2.1.3. Araştırmacının rolü ……26

2.2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi ……27

2.3. Pilot Çalışma ……28

2.4. Katılımcılar ……..29

2.5. Araştırmanın Veri Toplama Araçları ……30

Sayfa

2.5.1. Cebirsel düşünme testi …….30
2.5.2. Van Hiele geometrik düşünme testi ……30
2.5.3. Öğretim dizisi ……..31
2.5.4. Klinik görüşmeler ……34
2.6. Verilerin Analizi …….35
2.6.1. Analiz temaları …….38
2.6.1.1. Geometri bilgi yapısı analiz temaları ……38
2.6.1.2. Cebir bilgi yapısı analiz temaları ……..41
2.7. Geçerlik ve Güvenirlik ……..46
2.8. Etik Konular ……..47
3. BULGULAR VE YORUMLAR ……..49
3.1. Ön Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular ……..49
3.1.1. Ön klinik görüşmenin birinci problemine ilişkin bulgular ……..…….49
3.1.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular ……...50
3.1.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular ……..54
3.1.2. Ön klinik görüşmenin ikinci problemine ilişkin bulgular ……...…..58
3.1.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular ……..58
3.1.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular ……..60
3.1.3. Ön klinik görüşmenin üçüncü problemine ilişkin bulgular ……..…63
3.1.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular ……...64
3.1.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular ……...67
3.1.4. Ön klinik görüşmenin dördüncü problemine ilişkin bulgular ….……73
3.1.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular ……...73
3.1.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular ……...74

Sayfa

3.2. Birinci Etap Öğretim Dizisine İlişkin Bulgular ……78
3.2.1. Birinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular …….……..……..78
3.2.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular ……....78
3.2.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…...82
3.2.2. İkinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular …….…….……86
3.2.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….……...87
3.2.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….……...92
3.2.3. Üçüncü hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular …….……104
3.2.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….……104
3.2.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….……108
3.2.4. Dördüncü hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular …….....115
3.2.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….115
3.2.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….119
3.2.5. Beşinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular …….……123
3.2.5.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….123
3.2.5.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….132
3.3. Ara Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular ……...……138
3.3.1. Ara klinik görüşmenin birinci problemine ilişkin bulgular ……..…..139
3.3.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….….139
3.3.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….….140

Sayfa

3.3.2. Ara klinik görüşmenin ikinci problemine ilişkin bulgular ……..…144
3.3.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….144
3.3.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….149
3.3.3. Ara klinik görüşmenin üçüncü problemine ilişkin bulgular ……..….157
3.3.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….….158
3.3.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….….162
3.4. İkinci Etap Öğretim Dizisine İlişkin Bulgular …….……...165
3.4.1. Birinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular …….……..…165
3.4.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….165
3.4.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….178
3.4.2. İkinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular ……..……..184
3.4.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….185
3.4.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….190
3.4.3. Üçüncü hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular ……...……..192
3.4.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….192
3.4.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….205
3.5. Son Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular ……...210
3.5.1. Son klinik görüşmenin birinci problemine ilişkin bulgular ……..…..210
3.5.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….211
3.5.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….213

Sayfa

3.5.2. Son klinik görüşmenin ikinci problemine ilişkin bulgular ……..….218
3.5.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….….219
3.5.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….……..…219
3.5.3. Son klinik görüşmenin üçüncü problemine ilişkin bulgular …...……222
3.5.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular ……..……223
3.5.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….224
3.5.4. Son klinik görüşmenin dördüncü problemine ilişkin bulgular ……...226
3.5.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular …….…….227
3.5.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular …….…….229
4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER ……232
4.1. Sonuç ……232
4.1.1. Ön klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar ……232
4.1.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar ……232
4.1.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar ……233
4.1.2. Birinci etap öğretim dizisine ilişkin sonuçlar …….…..233
4.1.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar ……234
4.1.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar ……235
4.1.3. Ara klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar …….……..236
4.1.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar ……236
4.1.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar ……236

Sayfa

4.1.4. İkinci etap öğretim dizisine ilişkin sonuçlar ……237

4.1.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar ……237

4.1.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar ……238

4.1.5. Son klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar ……..239

4.1.5.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar ……239

4.1.5.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar ……239

4.2. Tartışma ……240

4.2.1. Ön klinik görüşmelere ilişkin tartışma ……240

4.2.2. Birinci etap öğretim dizisine ilişkin tartışma ……..243

4.2.3. Ara klinik görüşmelere ilişkin tartışma ……..246

4.2.4. İkinci etap öğretim dizisine ilişkin tartışma ……248

4.2.5. Son klinik görüşmelere ilişkin tartışma ……..251

4.3. Öneriler ……252

4.3.1. Araştırmanın sonuçlarına yönelik öneriler ……252

4.3.2. Gelecekte yapılacak araştırmalara yönelik öneriler ……..255

KAYNAKÇA ……...256

EKLER

ÖZGEÇMİŞ

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

Tablo 1.1. Kaput'un (2008) cebir ve cebirsel muhakeme içerik analizi …….……9

Tablo 1.2. Ön klinik görüşmenin birinci probleminin Kaput'un merkezi bakış açılarına göre çözümleri …….……..11

Tablo 1.3. Son klinik görüşmenin ikinci probleminin McCrory vd. nin ortaöğretim cebir öğretimi teorik çerçevesine göre uyarlanması ……..……17

Tablo 2.1. Odak öğrencilerin cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testlerine göre seviyeleri ……30

Tablo 2.2. Birinci etap öğretim dizisinin haftalık amaç ve içeriği …….……..32

Tablo 2.3. İkinci etap öğretim dizisinin haftalık amaç ve içeriği …….33

Tablo 2.4. Klinik görüşme sorularının amaç ve içeriği ……...35

Tablo 3.1. Ön klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..50

Tablo 3.2. Ön klinik görüşmenin birinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……54

Tablo 3.3. Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..58

Tablo 3.4. Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……60

Tablo 3.5. Ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..64

Tablo 3.6. Ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……68

Tablo 3.7. Ön klinik görüşmenin dördüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……74

Tablo 3.8. Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..78

Tablo 3.9. Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……82

Sayfa

Tablo 3.10. Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……...87

Tablo 3.11. Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi …….93

Tablo 3.12. Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..104

Tablo 3.13. Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……109

Tablo 3.14. Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..115

Tablo 3.15. Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……119

Tablo 3.16. Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi …….…….124

Tablo 3.17. Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……133

Tablo 3.18. Ara klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……...…..140

Tablo 3.19. Ara klinik görüşmenin birinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...……141

Tablo 3.20. Ara klinik görüşmenin ikinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi …….145

Tablo 3.21. Ara klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...…150

Tablo 3.22. Ara klinik görüşmenin üçüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi …….158

Tablo 3.23. Ara klinik görüşmenin üçüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi …….…….162

Tablo 3.24. İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……166

Tablo 3.25. İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi …….…….178

Tablo 3.26. İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - geometri bilgi yapısının

Sayfa

cebirsel muhakemeye etkisi ……185

Tablo 3.27. İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...190

Tablo 3.28. İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi …….193

Tablo 3.29. İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...…205

Tablo 3.30. Son klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi …….211

Tablo 3.31. Son klinik görüşmenin birinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...……214

Tablo 3.32. Son klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...…219

Tablo 3.33. Son klinik görüşmenin üçüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……...224

Tablo 3.34. Son klinik görüşmenin dördüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ……..227

Tablo 3.35. Son klinik görüşmenin dördüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ……229

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1. Araştırmada kullanılan cebir reform çerçevesi ……...……..….3

Şekil 2.1. Öğretim deneyinin uygulama süreci ……..…….26

Şekil 2.2. Bulguların analizi sonucunda elde edilen model …….……37

Şekil 2.3. Odak öğrenci Tuna'nın son klinik görüşmenin üçüncü problemi çözüşünün analizi ……..…….37

Şekil 2.4. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi analiz temaları ……..…39

Şekil 2.5. Cebirsel muhakemenin geometriye etkisi analiz temaları ……...42

Şekil 3.1. Ön klinik görüşmenin birinci problemi ……50

Şekil 3.2. Bora'nın ön klinik görüşmenin birinci problemi için oluşturduğu CDE üçgeninin iç açılarına atadığı değişkenler ile gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon ……..56

Şekil 3.3. Bora'nın ön klinik görüşmenin birinci problemi için oluşturduğu ABC üçgeninin iç açılarına atadığı değişkenler ile gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon ……...…….57

Şekil 3.4. Ön klinik görüşmenin ikinci problemi …….……58

Şekil 3.5. Ön klinik görüşmenin üçüncü problemi ……..64

Şekil 3.6. Ata'nın iki iç açının toplamının dış açıya eşit olduğu özelliğini kullanarak kurduğu denklem ve denkleme uyguladığı manipülasyon ……..…70

Şekil 3.7. Ön klinik görüşmenin dördüncü problemi …….……..73

Şekil 3.8. Öğretim dizisinin 1. problemi …….……84

Şekil 3.9. Öğretim dizisinin 3. problemi …….……84

Şekil 3.10. Öğretim dizisinin 5. problemi ……85

Şekil 3.11. Öğretim dizisinin 2. problemi ……86

Şekil 3.12. Öğretim dizisinin 11. problemi …….……89

Sayfa

Şekil 3.13. Öğretim dizisinin 7. problemi ……90

Şekil 3.14. Öğretim dizisinin 14. problemi ……..91

Şekil 3.15. Öğretim dizisinin 21. problemi ……..92

Şekil 3.16. Öğretim dizisinin 16. problemi …….……94

Şekil 3.17. Öğretim dizisinin 8. problemi ……95

Şekil 3.18. Öğretim dizisinin 9. problemi ……95

Şekil 3.19. Öğretim dizisinin 19. problemi ……..97

Şekil 3.20. Öğretim dizisinin 15. problemi …….……99

Şekil 3.21. Öğretim dizisinin 22. problemi …….……99

Şekil 3.22. Öğretim dizisinin 10. problemi ……...….100

Şekil 3.23. Öğretim dizisinin 18. problemi ……101

Şekil 3.24. Öğretim dizisinin 12. problemi ……103

Şekil 3.25. Öğretim dizisinin 17. problemi ……103

Şekil 3.26. Öğretim dizisinin 33. problemi ……106

Şekil 3.27. Öğretim dizisinin 24. problemi ……107

Şekil 3.28. Öğretim dizisinin 31. problemi ……107

Şekil 3.29. Öğretim dizisinin 32. problemi ……108

Şekil 3.30. Öğretim dizisinin 23. problemi ……110

Şekil 3.31. Öğretim dizisinin 25. problemi ……111

Şekil 3.32. Öğretim dizisinin 27. problemi ……112

Sayfa

Şekil 3.33. Öğretim dizisinin 28. problemi ……112

Şekil 3.34. Öğretim dizisinin 34. problemi ……....114

Şekil 3.35. Öğretim dizisinin 35. problemi ……114

Şekil 3.36. Öğretim dizisinin 37. problemi ……116

Şekil 3.37. Öğretim dizisinin 38. problemi ……117

Şekil 3.38. Öğretim dizisinin 39. problemi ……118

Şekil 3.39. Öğretim dizisinin 43. problemi ……120

Şekil 3.40. Öğretim dizisinin 42. problemi ……121

Şekil 3.41. Öğretim dizisinin 40. problemi ……122

Şekil 3.42. Öğretim dizisinin 50. problemi ……126

Şekil 3.43. Öğretim dizisinin 47. problemi ……127

Şekil 3.44. Öğretim dizisinin 48. problemi ……127

Şekil 3.45. Öğretim dizisinin 54. problemi ……128

Şekil 3.46. Öğretim dizisinin 56. problemi ……129

Şekil 3.47. Öğretim dizisinin 64. problemi ……130

Şekil 3.48. Öğretim dizisinin 49. problemi ……131

Şekil 3.49. Öğretim dizisinin 51. problemi ……131

Şekil 3.50. Öğretim dizisinin 59. problemi ……132

Şekil 3.51. Öğretim dizisinin 53. problemi ……134

Şekil 3.52. Öğretim dizisinin 57. problemi ……...……135

Sayfa

Şekil 3.53. Öğretim dizisinin 63. problemi ……135

Şekil 3.54. Öğretim dizisinin 52. problemi ……..……..136

Şekil 3.55. Öğretim dizisinin 55. problemi ……137

Şekil 3.56. Öğretim dizisinin 45. problemi ……138

Şekil 3.57. Ara klinik görüşmenin birinci problemi ……..139

Şekil 3.58. Ara klinik görüşmenin ikinci problemi ……..……..145

Şekil 3.59. Bora'nın yok etme yöntemini yanlış uygulayarak y değişkeninin değerine ulaşması ……...……151

Şekil 3.60. Bora'nın yok etme yöntemini yanlış uygulayarak x değişkeninin değerine ulaşması ……...……151

Şekil 3.61. Kayla'nın yerine koyma yöntemi ile x değişkeninin değerini bulması ……152

Şekil 3.62. Ara klinik görüşmenin üçüncü problemi ……158

Şekil 3.63. Öğretim dizisinin 71. problemi ……168

Şekil 3.64. Öğretim dizisinin 77. problemi ……168

Şekil 3.65. Öğretim dizisinin 80. problemi ……...…….169

Şekil 3.66. Öğretim dizisinin 85. problemi ……172

Şekil 3.67. Öğretim dizisinin 66. problemi ……172

Şekil 3.68. Öğretim dizisinin 74. problemi ……...…….173

Şekil 3.69. Öğretim dizisinin 84. problemi ……174

Şekil 3.70. Öğretim dizisinin 86. problemi ……174

Şekil 3.71. Öğretim dizisinin 87. problemi ……175

Şekil 3.72. Öğretim dizisinin 78. problemi ……...…….178

Sayfa

Şekil 3.73. Öğretim dizisinin 67. problemi ……179

Şekil 3.74. Öğretim dizisinin 65. problemi ……180

Şekil 3.75. Öğretim dizisinin 69. problemi ……181

Şekil 3.76. Öğretim dizisinin 76. problemi ……182

Şekil 3.77. Öğretim dizisinin 70. problemi ……182

Şekil 3.78. Öğretim dizisinin 72. problemi ……183

Şekil 3.79. Öğretim dizisinin 97. problemi ……186

Şekil 3.80. Öğretim dizisinin 89. problemi ……187

Şekil 3.81. Öğretim dizisinin 91. problemi ……187

Şekil 3.82. Öğretim dizisinin 93. problemi ……188

Şekil 3.83. Öğretim dizisinin 95. problemi ……188

Şekil 3.84. Öğretim dizisinin 96. problemi ……189

Şekil 3.85. Öğretim dizisinin 90. problemi ……192

Şekil 3.86. Öğretim dizisinin 107. problemi ……194

Şekil 3.87. Öğretim dizisinin 114. problemi ……..195

Şekil 3.88. Öğretim dizisinin 120. problemi ……..196

Şekil 3.89. Öğretim dizisinin 121. problemi …….……196

Şekil 3.90. Öğretim dizisinin 99. problemi ……197

Şekil 3.91. Öğretim dizisinin 102. problemi …….198

Şekil 3.92. Öğretim dizisinin 105. problemi …….……198

Sayfa

Şekil 3.93. Öğretim dizisinin 112. problemi …….……199

Şekil 3.94. Öğretim dizisinin 111. problemi …….…….200

Şekil 3.95. Öğretim dizisinin 115. problemi …….…….200

Şekil 3.96. Öğretim dizisinin 116. problemi …….…….201

Şekil 3.97. Öğretim dizisinin 117. problemi ……..……201

Şekil 3.98. Öğretim dizisinin 122. problemi …….…….202

Şekil 3.99. Öğretim dizisinin 118. problemi ……..206

Şekil 3.100. Öğretim dizisinin 100. problemi ……206

Şekil 3.101. Öğretim dizisinin 103. problemi ……207

Şekil 3.102. Öğretim dizisinin 109. problemi ……208

Şekil 3.103. Öğretim dizisinin 104. problemi ……209

Şekil 3.104. Öğretim dizisinin 108. problemi ……..……..……209

Şekil 3.105. Öğretim dizisinin 110. problemi ……210

Şekil 3.106. Son klinik görüşmenin birinci problemi ……211

Şekil 3.107. Son klinik görüşmenin ikinci problemi …….……218

Şekil 3.108. Son klinik görüşmenin üçüncü problemi …….……..223

Şekil 3.109. Son klinik görüşmenin dördüncü problemi ……226

GÖRSELLER DİZİNİ

Sayfa

Görsel 3.1. Bora'nın ön klinik görüşmenin birinci problemi için m ışınının doğrusal uzantısına b ölçülü açının bulunduğu köşeden çizdiği doğru parçası ile oluşturup CDE olarak adlandırdığı üçgen ve bu üçgenin iç açılarına atadığı değişkenler …….……56

Görsel 3.2. Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde Ata'nın $1-8-19$ kenar uzunluklu doğru parçaları ile bir üçgenin çizilemeyeceğini ifade etmek için yaptığı çizim ……..…….…….59

Görsel 3.3. Ata'nın ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon ……71

Görsel 3.4. Odak öğrenci Kayla'nın üçgenin dış açılarının sayısını göstermek için kullandığı çizim ……...……..82

Görsel 3.5. İki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıya eşit olduğunun öğrenciler tarafından keşfedilmesi ……...…96

Görsel 3.6. Odak öğrenci Ata'nın oran-orantı ilişkisi içeren üçgen problemi …….……97

Görsel 3.7. Öğrencilerin üçgende açı-kenar ilişkileri üzerine keşifte bulunmaları için CG-II yazılımında çizilmiş bir üçgen ……....101

Görsel 3.8. Öğrencilerin üçgen eşitsizliğine duyulan ihtiyacı hissetmeleri için CG-II yazılımında yapılmış çizim ……110

Görsel 3.9. Bahar'ın 42. problemde gerçekleştirdiği sözdizimsel manipülasyon ….….121

Görsel 3.10. Utku'nun niceliksel muhakeme ile 40. problemi çözüşü …….…….122

Görsel 3.11. Ata'nın ara klinik görüşmenin ikinci probleminde üçgenin alanını bulması ……...……..149

Görsel 3.12. Kenarortayın öğrencilere tanıtılması için kullanılan çizim ……..…….170

Görsel 3.13. İç ve dış açıortayların tanıtımı için kullanılan CG-II çizimi ……..……171

Görsel 3.14. Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktanın açı kollarına eşit uzaklıkta olması özelliğinin keşfi için CG-II yazılımında gerçekleştirilen çizim ……...……176

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

CBMS	: Conference Board of the Mathematical Sciences
CG-II	: Cabri Geometry II
GBA	: Gelişen Bakış Açısı
MEB	: Milli Eğitim Bakanlığı
NCTM	: The National Council of Teachers of Mathematics
UCSMP	: University of Chicago School Mathematics Project

1. GİRİŞ

Bu bölümde problem durumu, teorik çerçeve, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi ve ilgili alan yazın kısımlarına yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Matematik kendisini oluşturan bileşenler arasında sıkı bağların mevcut olduğu bir disiplin ağıdır. Matematiksel her kavram diğer bir matematiksel kavramdan türetilir ve diğer matematiksel kavramların oluşumuna katkıda bulunur, dolayısıyla hiyerarşinin bir parçasıdır (Skemp, 1987, s.22). Matematiğin hiyerarşik yapısının öğrenciler tarafından takdir edilmesi, bileşenler arasındaki bağlantıları fark etmelerini sağlayacak bir öğretim programı ile gerçekleştirilir. The National Council of Teachers of Mathematics'in [NCTM] 2000 yılında yayınladığı Okul Matematiği için Prensip ve Standartlar dokümanı da öğrencilerin okul matematiğinde karşılaşacakları farklı kavramlar arasında bağlantıların kurulması gerektiğini vurgulamıştır.

Okul Matematiği için Prensip ve Standartlar dokümanını cebir öğrenme alanı açısından değerlendiren Kaput (2008, s.6), cebirin izole bir ders olarak öğretiminden ziyade ilköğretimden başlayarak tüm matematik eğitimi süresince bir düşünme ve problem çözme başlığı olarak gitgide artan boylamsal bir bakış açısıyla ele alınması gerektiğini ifade etmiştir. Cebir tüm okul seviyelerinde matematik reformunun odak noktasıdır (Kaput, 1995; NCTM, 2000), çünkü cebir mevcut matematik müfredatının büyük bir kısmını az sayıda kavram altında daha bağlantılı bir matematiksel deneyim sağlayarak bir araya getirebilir (Kaput, Carraher ve Blanton, 2008, s.xix).

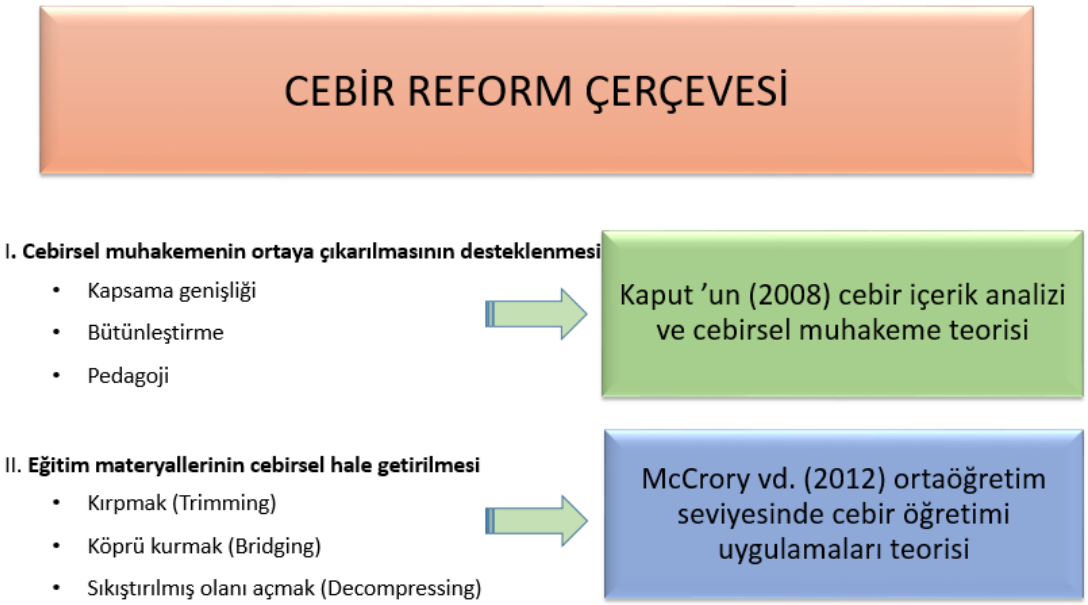
Matematik ve geometri derslerine ait farklı öğretim programlarının olmasının öğrencilerin zihninde matematik ve geometrinin birbiriyle etkileşiminin az ve birbirinden ayrı dersler olduğu (Dindyal, 2003, s.1) şeklinde bir algıya yol açtığı düşünülmektedir. Türk Milli Eğitim sisteminde ortaöğretim matematik müfredatındaki cebir, geometri, veri -sayma ve olasılık öğrenme alanlarının birbiri ardına sıralanışı, matematiksel kavramların birbiriyle bağlantılı yapısının ortaya çıkması açısından önemlidir. 2013-2014 eğitim öğretim yılından itibaren, cebir ve olasılık öğrenme alanlarından oluşan matematik, geometri ve analitik geometri dersleri tek çatı altında birleştirilmiştir. 2018 yılında Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından yayımlanan Ortaöğretim Matematik Programına göre

eğitim sistemimizin temel amacının değerlerimiz ve yetkinliklerle bütünleşmiş bilgi, beceri ve davranışlara sahip bireyler yetiştirmek olduğu ifade edilmiştir. Yetkinlik çerçevesinin anahtarlarından biri olan matematiksel yetkinlik kavramının tanımlaması da öğrenme alanlarının bağlantılı yapısının ortaya çıkarılmasının önemini vurgulamaktadır (MEB, 2018, s.6). Türk Milli Eğitim sistemi matematik ortaöğretim müfredat programında cebir ve geometri öğrenme alanları programın sırasıyla % 53 ve % 35'ini teşkil etmekte (MEB, 2018, s.12-15) ve alanlar arasındaki bağlantılı yapının öğrenciler tarafından keşfinin öğrencilerin matematiğe yabancılaşma duygusunu ortadan kaldıracağı düşünülmektedir.

"Cebir ile geometri arasındaki bağlar neredeyse görünmez ve kopmaz nitelikte" (Mazur, 2017, s.230) olup oldukça eskiye dayanmaktadır. "Cebir" kelimesi, İslam dünyasının önde gelen matematikçilerinden Ebû Ca'fer Muhammed bin Mûsâ el-Hârizmî'nin 9. yüzyılda yayınladığı *El-Kitâbü'l-Muhtasar fî Hisâbü'l-Cebr ve'l-Mukâbele* isimli kitabındaki *l-Cebr* kelimesinden ortaya çıkmıştır. "Kitabın başlığının çevirisi "Tamamlama ve Denkleştirme Yoluyla Hesaplama Hakkında Özet Kitap" şeklinde olup, *cebr* kelimesi "tazmin" ya da "tamamlama" olarak çevirilir" (Mazur, 2017, s.142). Bu eserinde Hârizmî, birinci ve ikinci dereceden denklemlerin çözümleri, binom çarpımları ve çeşitli cebir problemleri üzerinde durmuştur. "Avrupa'ya cebirin geçişi Harizmi'nin eserleri sayesinde 12. ve 13. yüzyıllarda olmuştur" (Baki ve Bütüner, 2011, s.214). 16. ve 17. yüzyıllara gelindiğinde Avrupa'da cebir üzerine çalışmalar son derece genişlemiş ve tarihin en mutlu evliliklerden biri olarak ifade edilebilecek iki sistemin bir araya gelişi Descartes sayesinde gerçekleşmiştir (Skemp, 1987, s.76). Böylece hem geometrik kavramlar cebirsel olarak formüle edilebilir hale gelmiş hem de geometrik kavramlara cebir yoluyla ulaşım söz konusu olmuştur. Mazur (2017, s.183) geometrinin nasıl cebir olacağı sorusunu yönelten okuyucuya "toplama ya da çıkarma işlemi, doğruların uzatılması ya da kesilmesiyle aynı şeydir: a ve b sayılarının çarpımı a ve b komşu kenarlarına sahip bir dikdörtgenin geometrik inşasından farksızdır" cevabını vermiştir. Lagrange, cebir ve geometrinin birbirinden farklı yollardan yürüdükleri zamanlarda ilerlemelerinin yavaş ve uygulamaların sınırlı olduğunu, ancak ne zaman ki bu iki bilim beraber olup birbirinden taze yaşama gücü alması ile beraber mükemmelliğe doğru seri ve düzenli adımlarla yürüdüğünü ifade etmiştir (Kline'dan alıntı, 1972, s.322).

Geometri öğrenme alanında yer alan üçgenler alt öğrenme alanında eğitim materyallerinin cebirsel hale getirilmesi ve öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ortaya

çıkarılmasının desteklenmesi ile gerçekleşebilecek bir cebir reform uygulamasının bağlantılı bir matematik deneyimi sağlayacağı düşünülmektedir. Bu araştırmada kullanılan cebir reform çerçevesi Şekil 1.1.'de sunulmuştur.



Şekil 1.1. *Araştırmada kullanılan cebir reform çerçevesi*

Cebir reformunun bileşenlerinden biri, öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ortaya çıkarılmasının desteklenmesidir. Blanton ve Kaput'a (2005, s.413) göre cebirsel muhakeme süreçleri; bir dizi örnekten matematiksel fikir genellemesi yapmak, argümantasyon ile genellemeler yapmak ve bunları öğrencinin yaşına uygun biçimde gitgide artan bir dille ifade etmektir. Kaput, Blanton ve Moreno'ya (2008, s.20) göre genelleme, kişinin pek çok duruma uyan, her bir durum için tekrara yer vermeden tek bir ifade ile durumlara işaret eden bir çeşit birleştirici ifadede bulunmasıdır. Genelleme; kişinin muhakemesi veya iletişimini üzerinde durulan durumların ötesi bir menzile genişletmesini, durumlar arası benzerlikleri belirleyip ortaya çıkarmasını veya durumların kendilerinden ziyade durumlar arası ilişki ve örüntüler arası muhakeme ve iletişim seviyesine yükseltmeyi içerir (Kaput, 2000b, s.7). Durumların genellemesi ve bu genellemelerin sistematik olarak geleneksel sembol sistemleriyle ifade edilmesi ve geleneksel sembol sistemleri ile ifade edilen genellemeler üzerinde sözdizimsel rehberli muhakeme, cebirin içerik analizi (Kaput, 2008, s.11) olduğu için sembolizasyon genellemeden ayrı düşünülemez. Genelleme ve sembolleştirmeyi matematiksel

muhakemenin kalbi olarak değerlendiren Moreno-Armella, Hegedus ve Kaput (2008, s.100) genelleme ve sembolleştirmenin neden bu denli sıkı sıkıya bağlı olduğu sorusuna:

> Bakış açımıza göre, bir kişinin pek çok duruma uyan ve tekrara gerek kalmaksızın tek bir ifadede -genelleme- bulunmasının tek yolu durumlara işaret eden ve tek bir şeymiş gibi birleştiren bir çeşit birleştirici ifade oluşturmaktır. Ancak bu birleştirici ifade bir çeşit sembolik yapı gerektirir (2008, s.101).

yanıtını vermişlerdir. Genelleme sembolik nesne yaratma eylemi olduğundan dolayı, sembolleştirme genelleme için bir araç görevi üstlenir. Öğrencilerin yüksek matematikte başarılı olabilmeleri, içinde bulundurduğu anlam ile sembol manipülasyonunu akıcı bir biçimde gerçekleştirebilmelerine bağlıdır. Kaput (1995, s.8), denklemlere anlamsal davranmanın mümkün olduğunu ifade eder ve iki çeşit yaklaşımdan bahseder. Bu yaklaşımlardan biri anlamsal (semantic) yani nümerik kavramsal sistemi içinde muhakemenin formal denklem ile ifade edilişidir. Diğeri ise sözdizimsel (syntactic) yani nesnelere varlıkmış gibi davranılan ve kavramsal sistem kurallarının semboller sistemine ve sembollerin neye karşılık geldiğine odaklanmadan uygulandığı yaklaşımdır. Örneğin;

$$2x + 5 = 13$$

denkleminin anlamsal yaklaşım ile çözümü "Bir sayının 2 katına 5 eklersem 13 elde ediyorum. Sayının 2 katı 8 olmalı, o zaman bu sayı 4 tür" şeklinde olup işlemleri tersine çevirme şeklindeki yaklaşımdır. Aynı denklemin sözdizimsel yaklaşım ile çözümü ise;

$$2x + 5 - 5 = 13 - 5,$$

$$2x = 8,$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{8}{2},$$

$$x = 4.$$

şeklinde gerçekleşir. Sözdizimsel yaklaşım ile yapılan çözümlemelerde kurallar türetilir ve matematiksel nesnelere hareket eden varlıklarmış gibi davranılır; "5'i denklemin sağ tarafına gönderelim ve işaretini değiştirelim" gibi. Ancak, ne formalizmler ne de formalizmler üzerindeki eylemler anlamsal başlama noktası olmadan tutarlı bir şekilde öğrenilebilir (Kaput, 1995, s.8). Skemp (1987, s.85), "x leri bir tarafa, sayıları diğer tarafa" ve "bunu yaparken işaretini değiştirin" şeklindeki talimatların zekâya bir dizi hakaret olarak tanımlanabileceğini, çünkü bu tür talimatların mantığa oturuyormuş gibi göründüğünü ancak genellikle öyle olmadığını ifade etmiştir.

Tek başına aritmetik becerilerin ve hesaplamada akıcılığın, içinde bulunduğumuz yüzyılın gitgide karmaşıklaşan matematiği için yeterli olmadığı görülmektedir. Richard Hamming'in de belirttiği üzere hesaplamanın amacı sayılar değil, onun içyüzünü kavramaktır (http-1). Bu bağlamda niceliksel muhakeme cebirde temsil ve manipülasyonun çok miktarda biçimi için kavramsal alan yaratır (Smith III ve Thompson, 2008, s.100). Niceliksel muhakeme modelleme içerir ve pek çok araştırmacı durumların modellenmesinin cebir çalışmanın temel sebeplerinden biri olduğunu savunur (Kaput, 2000a, s.24). Modelleme problem durumunu matematiksel hale getirmektir. Nicelikler hakkında düşünebilmek için niceliklerin sayısal değerlerini bilmeye gerek yoktur (Tanışlı ve Dur, 2018, s.62). Niceliksel muhakemenin yürütüldüğü matematikselleştirme üzerine kurulu formelleştirme ile kavramsal bir anlayışa ulaşmak olasıdır.

Sınıf-içinde matematiksel kavramlar üzerinde yansıtma ve tartışmaların yapıldığı cebirsel konuşmalar, belirli zaman aralıklarında cebirsel temaların tekrar edilmesi, çoklu temsillerin kullanımı, problem durumlarında parametrelerin çeşitlendirilmesi cebirsel muhakemenin derse dahil edilmesini sağlayan eğitim uygulamalarıdır. Blanton ve Kaput'un (2005, s.440) da ifade ettiği üzere, cebirsel muhakeme görevleri matematiksel "saha ziyaretlerinden" ziyade eğitimin günlük kumaşına dokunmalıdır. Öğretmenler öğrencilerinden problem durumu için eylem planlarını açıklamalarını, ulaştıkları sonuçlar için gerekçeli açıklamalarda bulunmalarını, problemin farklı yollardan çözülüp çözülmeyeceğini araştırmalarını, çözümün problem durumu ile bağlantılarını ortaya koymalarını, problemin parametreleri değiştiğinde nelerin değişip nelerin aynı kalacağını tespit etmelerini istemelidir. Sınıf içinde cebirsel muhakemenin ortaya çıkarılması çözüm odaklı bir yaklaşım yerine, farklı çözüm yollarının tartışıldığı bir ortamda gerçekleşir. Cebirsel muhakemeyi teşvik etmek varsayım, argümantasyon ve genellemeleri amaçlı bir biçimde harmanlamayı içerir; böylece öğrenciler güvenilir bilgi oluşturmanın bir yolu olarak argüman oluşturmayı dikkate alırlar (Blanton ve Kaput, 2003, s.74).

Cebir reformunun bir diğer bileşeni ise, eğitim materyallerinin cebirsel hale getirilmesidir. Cebirselleştirme cebirsel muhakemenin ortaya çıkarılmasını gerektirir. Bunun için de farklı temsillerin kullanımı gerekmektedir. Örneğin 2017-2018 Eğitim Öğretim yılı MEB 9. sınıf matematik ders kitabında mutlak değer,

$$|x| = \begin{cases} x : x \geq 0 \\ -x : x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış ve "mutlak değer içerisindeki ifadenin gerçek sayı değeri 0 ya da 0'dan büyükse ifade mutlak değer dışına aynı olarak çıkarılır. 0'dan küçükse mutlak değer dışına -1 ile çarpılarak çıkarılır. Böylece dışarıya 0'dan büyük çıkması sağlanır" şeklinde açıklanmıştır (Maviş vd., 2017, s.101). Brumfiel'e (1980, s.440) göre bu tanım matematik öğretiminde en yaygın olarak kullanılan tanım olup, öğrenciler bir fonksiyonun tanımında birden fazla tarifi kullanmakta zorluk çekmektedirler. Öğrenciler $-x$ ifadesini bir fonksiyon için sembol olarak görememekte ve bir negatif sayıyı temsil ettiğini düşünmektedirler. Mutlak değerin bu şekilde ifade edilmesi $f(x) = |x|$ parçalı fonksiyonunun sembolik ifadesinin sözdizimsel hali yani bir nevi kural haline getirilmesidir. Mutlak değer kavramının öğretiminde geometrik yorumun kullanımı dokuzuncu sınıf seviyesinde hem farklı temsillerin kullanımına imkan verir hem de geometri ve cebir öğrenme alanları arasındaki bağlantıyı ortaya koyar.

NCTM (2000), 9-12. sınıf seviyeleri için okul geometrisinin iki boyutlu ve üç boyutlu geometrik şekillerin nitelik ve özelliklerini analiz etmek ve geometrik ilişkiler hakkında argüman geliştirmek, geometrik yer belirlemek ve koordinat geometrisi ve diğer temsil sistemlerini kullanarak uzamsal ilişkileri tanımlamak, problem çözmek için zihinde canlandırma, uzamsal muhakeme ve geometrik modeller kullanmak yönlerini vurgulamıştır. MEB Ortaöğretim Matematik Öğretimi Programının da (2018) buna benzer vurguları söz konusudur. Bu kurum ve kuruluşların ortaöğretim seviyesinde geometri öğretimi için vurguladıkları hususlar, cebir ve geometri öğrenme alanları arasındaki bağlantıları ortaya çıkarır. Geometrik nesneleri ifade etmek için sembolik temsil, kenar veya açılar için bilinmeyen/değişken kullanımı, geometrik ilişkilerin kullanımı ile denklem/eşitsizlik kurma, bilinmeyen/değişken hakkında veriye ulaşmak üzere sembolik manipülasyon yürütme, modelleme ve temsiller arası geçiş, niceliksel muhakeme ve genellemede bulunma cebirin ve cebirsel muhakemenin geometride ne denli etkin olduğuna işaret eder. Boester ve Lehrer'e göre (2008, s.211) uzamsal yapı cebirsel muhakemeye önemli bir tramplen görevi sunar, aynı zamanda doğruları ve diğer geometrik nesneleri yeni bir ışık ile görmeyi destekler. Cebir ve geometriyi ayrı alanlar olarak görmek yerine, Goldenberg, Cuoco ve Mark'ın (1999, s.40) önerdiği gibi görselleştirme cebirsel muhakeme için ön yüklenici ve cebirsel muhakeme de uzamsal yapıya yeni bir bakış açısı sağlayıcı olarak ele almak matematiğin bağlantılı yapısını ortaya çıkarmak adına önemlidir.

Hoffer (1981, s.11-13) okul geometrisinde öğrencilerin kazanmalarının beklendiği beş temel beceriyi "görsel, sözel, çizim, mantık ve uygulama" olarak ifade etmiştir. Görsel beceriler bir şekli tanıma, özellikleri gözlemleme iken; sözel becerilerin de terminolojiyi doğru kullanma, uzamsal kavram ve ilişkileri tanımlarken iletişim boyutuna dikkat çekmiştir. Çizim becerileri kapsamında çizim yaparak iletişim, geometrik nesneleri iki boyutta ve üç boyutta temsil edebilme, izometrik şekilleri çizmeyi içerirken, mantık becerilerinin temel özellikleri tanıma ve sınıflandırma, örüntü sezme, varsayımda bulunma ve varsayımları test etme, çıkarımda bulunma, tersine örnek sunma olarak tanımlamıştır. Uygulama becerisinde ise, öğrenilen geometrik sonuçları örneğin bir kutudan ambalaj yapmak gibi gerçek hayat durumlarına uygulama yer almıştır. Okul geometrisinde öğrencilerin kazanmalarının beklendiği bu beceriler de, cebir bilgi yapısına ait kazanımlar ve cebirsel muhakeme gerektirmektedir.

Ortaöğretim seviyesinde cebir eğitiminin yaygın odak noktası sembol içeren ifadeler ile çalışma, yani denklem çözme, ifade sadeleştirme ve çarpanlara ayırma şeklindeki ezberlenmiş süreçlerin çağrılması biçimindedir. Cebir, diğer konu alanlarından izole edilmiş, öğrencilere birden bire sunulan ve çoğunlukla lise sonrasında büyük bedeller ödenerek öğrencinin matematiğini iyileştirmek amacıyla tekrarlanan bir ders görünümündedir (Kaput, 1995, s.3). Süreçleri işletemeyen ve diğer alt öğrenme alanları ile bütünleştiremeyen öğrenciler için matematiksel gelişim durmakta ve öğrenciler matematiği hayatta karşılaşacakları sınavlarda başarılı olmalarını sağlayacak ölçüde gerekliliği bulunan, birbiriyle bağlantısız formüller silsilesi olarak görmektedirler. Öğrencilerin büyük çoğunluğu, cebirsel ifadeleri rastgele oluşturulmuş dönüşümler tarafından yönetilen anlamsız semboller olarak görmektedir (Sfard, 1995, s.30). Godfrey ve Thomas (2008, s.89), matematiksel denklem nesnesini anlamanın ikonik görüntünün çok katmanlı şematik özellikler ile kaplanmasını gerektirdiğini ifade eder. Bir başka deyişle, bir matematiksel denklemi oluşturan yapının denklik ilişkisinin özellikleri ve bu özellikleri bünyesinde birleştiren yapısı ile aritmetik sayılar, değişkenler, operatörler, eşit işareti gibi bir dizi birbirinden farklı semboller içermesidir. Bir matematiksel denklem üzerinde uygulanan sembolik manipülasyonun anlamlı olması eşitliğin özellikleri, misyonlarını kavramak ve sembolik temsillerin doğasını anlamaktan geçer.

Bu araştırmada 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakemeleri ve geometri bilgi yapılarının sırasıyla geometri bilgi yapıları ve cebirsel muhakemeleri üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Araştırma süresince öğrencilere cebir ve cebirsel muhakemenin ağırlıklı

olduğu geometrik problemler ve görevler yöneltilmiştir. Cebirsel muhakeme sadece cebirde geçerli olan bir biçim olmadığından dolayı, sembolik manipülasyon ve cebirsel ilişkilerin kullanımıyla geometri çalışmak öğrencilerin geometrideki düşünme yollarının anlaşılması adına önemlidir.

1.2.Teorik Çerçeve

Üçgenler alt öğrenme alanında öğrencilerin cebirsel muhakeme gelişiminin hedeflendiği bu araştırmada Kaput'un (2008) cebir içerik analizi ve cebirsel muhakeme çerçevesi ile McCrory ve diğerlerinin (2012) ortaöğretimde cebir öğretimi teorik çerçevesi kullanılmıştır.

1.2.1. Kaput'un cebir içerik analizi ve cebirsel muhakeme çerçevesi

Alfanümerik karakterlerin sembolik manipülasyon kuralları rehberliğinde cebir eğitimi, öğrencilerin matematikten yabancılaştığı (Kaput, 1995, s.3) ve matematiğin bileşenlerinin birbirinden kopuk olduğu bir algı yaratır. Böyle bir bakış açısına sahip öğrenci; problem durumu ile ilgili ezberlenmiş işlem süreçlerini çağırır, daha önceden çözülmüş ve mevcut probleme benzeyen durumları araştırır ve elde ettiği sonuç üzerine yansıtma yapamaz. Bu durum öğrencinin kendi matematiksel bilgisini oluşturamamasına yol açar.

Kaput (2000b, s.7) genelleme ve sembolleştirmeyi merkezine almayan bir faaliyeti matematiksel olarak değerlendirmenin zor olduğunu ve bir şeyi matematiksel kılan eylemin düşünme olduğunu ifade etmiştir. Genelleme süreçleri ve sembolleştirmeye odaklanan cebir reformu, öğrencilerin cebirsel muhakeme yetkinliği kazanmaları suretiyle okul matematiğini cebirsel hale getirmektir. Kaput'a (2000b, s.2) göre cebirselleştirme aşağıdaki üç önemli problemi çözer:

1. 21. yüzyıl matematiğine yer açar;
2. Okul matematiğine yeni seviyede tutarlılık, derinlik ve güç kazandırır;
3. Günümüz okul matematiğindeki izole ve yapay lise cebir derslerini bertaraf eder.

Kaput (1995, s.4), cebir reformunun kısa, orta ve uzun vadede olmak üzere üç aşamada gerçekleştirilebileceğini ifade etmiştir. Uzun vadede gerçekleştirilecek reformu, cebirsel muhakemenin formlarını tüm sınıf seviyelerine tam olarak bütünleştirmeyi ve özellikle ortaöğretim seviyesinde müfredatın yeniden yapılandırılması suretiyle

öğrencilerin gelecekte ihtiyaç duyacakları yeni ve önemli içeriklere yer açmak olarak tanımlamıştır.

Kaput (1995, s.6), matematiği konuların öğreniminde yer alan nesneler, süreçler ve ilişkiler gibi paylaşılan kültürel artifaktler ile genelleme, özelleme, soyutlama, hesaplama ve doğrulama gibi düşünme yolları olarak ifade etmiş ve cebirin paylaşılan kültürel artifakt ve düşünme yollarının bir karışımı olduğunu belirtmiştir. Cebiri, matematiğe hem hizmet eden hem de onu oluşturan yapı ve süreçlerin bir bütünü olarak tanımlayan Kaput (2008, s.11), cebir ve cebirsel muhakemenin içeriğini Tablo 1.1.'de verildiği biçimde analiz etmiştir.

Tablo 1.1. *Kaput'un (2008) cebir ve cebirsel muhakeme içerik analizi*

MERKEZİ BAKIŞ AÇILARI
(A) Sabit ve sürekli durumları genelleme ve bu genellemeleri sistematik olarak geleneksel sembol sistemleriyle ifade etme olarak cebir.
(B) Geleneksel sembol sistemleri ile ifade edilen genellemeler üzerinde sözdizimsel rehberli muhakeme ve eylemler olarak cebir.
KISIMLAR – (A) ve (B) Merkezi Bakış Açıları üç kısımda şekillenir.
1. Aritmetik (genelleştirilmiş aritmetik olarak cebir) ve niceliksel muhakemeden doğan hesap ve ilişkilerden soyutlanmış yapı ve sistemlerin çalışması olarak cebir.
2. Fonksiyon, bağıntı ve orantı çalışması olarak cebir.
3. Matematik dahili ve haricinde modelleme dilleri demetinin uygulaması olarak cebir.

A ve B merkezi bakış açıları ve bu bakış açılarının şekillendiği kısımlar, cebirin derinlik, çeşitlilik ve matematik ile bağlantısını vurgular (Kaput, 2008, s.11).

Bakış açısı (A): Cebiri aritmetiğin, özellikle de işlemler ile ilgili kurallarını kodlama dili olarak gören 18. ve 19. yüzyıl bakış açısının cebir eğitiminde hala baki olduğu görülmektedir (Sfard, 1995, s.27). Sadece bu yönü ile ele alınacak cebir eğitimi, genellemenin merkezde olduğu matematiksel faaliyetleri göz ardı eder. Birçok matematik eğitimcisi cebirsel muhakemenin oluşumunda niceliklerin hesaplanması olan aritmetikten ziyade, niceliksel muhakemenin çıkarım yapmaya odaklı olmasından dolayı daha üstün olduğunu ifade etmişlerdir (Kaput, 1995; Smith III ve Thompson, 2008; Tanışlı ve Dur, 2018). Kaput (1995, s.6), (A) merkezi bakış açısını oluşturan unsurların i) matematiksel yapıyı anlamanın temel rol oynadığı aritmetikte genelleme ve ii) durumun semantiğini anlamanın temel rol oynadığı niceliksel muhakeme olduğunu ifade etmiştir.

Bakış açısı (B): Geleneksel cebirsel biçimler ile uğraşırken odak semboller ve sembolleri sözdizimsel kurallar ile manipüle etmek üzerine olsa da biçimlere semantik olarak davranmanın mümkün olduğunu ifade eden Kaput (1995, s.8), semantik ve sözdizimsel yaklaşımların arasındaki farkı $3x - 2 = 10$ denklemi üzerinden açıklamıştır. "İşlemleri tersine çevirmek" olarak düşünülebilecek semantik yaklaşımda $3x - 2 = 10$ denklemi için "bir sayının 3 katından 2 çıkarırsak 10 elde ediyoruz. O zaman sayının 3 katı 12 olmalı ki sayıyı 4 buluruz" şeklinde bir düşünce söz konusudur. Sembollere fiziksel nesne gibi davranıldığı ve kurallar kavramsal sisteminin sembollere uygulandığı sözdizimsel yaklaşımda ise $3x - 2 = 10$ denklemi için "denklemin her iki tarafına 2 rakamını ekler ve $3x = 12$ elde ederiz, sonra da her iki tarafı 3 e bölerek $x = 4$ buluruz" şeklinde çözüm gerçekleştirilir. Modern bilimin arkasındaki matematik her ne kadar sembolizm üzerinde yükseliyor olsa da, Kaput (1995, s.8) semantik başlangıç olmadan biçimciliğin uygun bir şekilde öğrenilemeyeceğini ifade etmiştir. Cebirsel muhakeme ile gerçek hayat durumları sembolik nesnelere dönüştürülür ve kısa bir süreliğine durum ile ilişkisi kesilir, fakat önemli olan herhangi bir anda anlamın geri yüklenebilir olmasıdır.

Niceliksel muhakemenin ön planda olduğu (A) bakış açısı ile çözüm a, b ve c ölçüleri üzerinde düşünmeksizin oluşan yeni geometrik yapıların genel özelliklerinin kullanımı ile gerçekleşmiştir. Sembolik temsil kullanımının ön planda olduğu (B) bakış açısı ile çözüm değişkeni bir diğeri cinsinden yazma ve a, b ve c ölçülü açıları içinde bulunduran bir denklem oluşturmayı ve denklem üzerinde sembolik manipülasyon gerçekleştirmeyi gerektirmiştir.

Smith (2008, s.133), (A) ve (B) bakış açılarını sırasıyla "sembolik düşünme" ve "temsili düşünme" olarak yorumlamıştır. (A) ve (B) merkezi bakış açılarının şekillendiği üç kısım ise genelleştirilmiş aritmetik ve niceliksel muhakeme; fonksiyon, bağıntı ve orantı; modelleme dilleri uygulaması olarak cebirdir.

Kısım 1. Pek çok eğitimci ve araştırmacı aritmetik ve niceliksel muhakemeden genellemeler oluşturmanın cebir için temel rota olduğunu kabul etmektedir (Vance, 1998; Carpenter, Franke ve Levi 2003; Kaput, 2008). Kaput'a (2008, s.12) göre genelleştirilmiş aritmetik işlemler ve özellikleri ile daha genel ilişkiler hakkında genelleme yapmak ve aritmetiksel ifadelerin sayısal sonuçlarından ziyade, formlarına yeni bir bakışı içerir. Bu bakış açısı ile genelleştirilmiş aritmetik cebirin merkezidir. Cebirin bu kısmı aynı zamanda niceliksel muhakemeyi de içermektedir. Niceliksel muhakemenin en

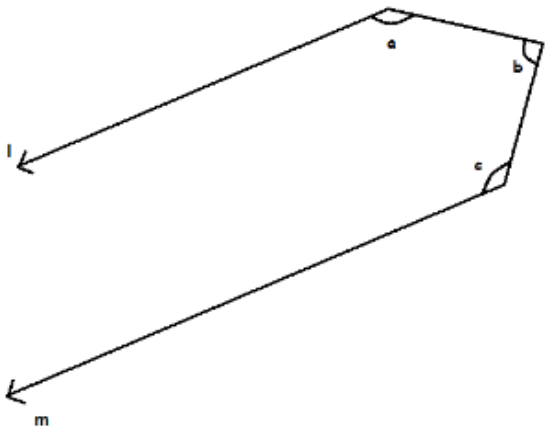
karakteristik özelliği sayılar, sayısal ilişkiler veya değişkenleri açısından ikincil öneme sahip olması (Tanışlı ve Dur, 2018, s.61) ve durumun başlıca analizine girmemesidir. Önemli olan nicelikler arasındaki ilişkidir (Thompson, 1993, s.165). Kaput'a (1995, s. 6) göre,

> Aritmetik ve niceliksel muhakeme tam olarak şu şekilde ayrılır: aritmetikte (sayısal örüntüler, aritmagon, vb.) genelleme çoğunlukla tamsayılar sistemi, tamsayıların özellikleri ve tamsayılarda işlemler olmak üzere bir matematiksel sistem içerisinde başlar, burada matematiksel yapının anlaşılması kısıtlayıcı bir rol oynar; niceliksel muhakeme durumları matematikselleştirme üzerine kuruludur ve genelleme ve formelleştirme için farklı bir taban oluşturur, burada durumun semantiğini anlamak kısıtlayıcı roldür.

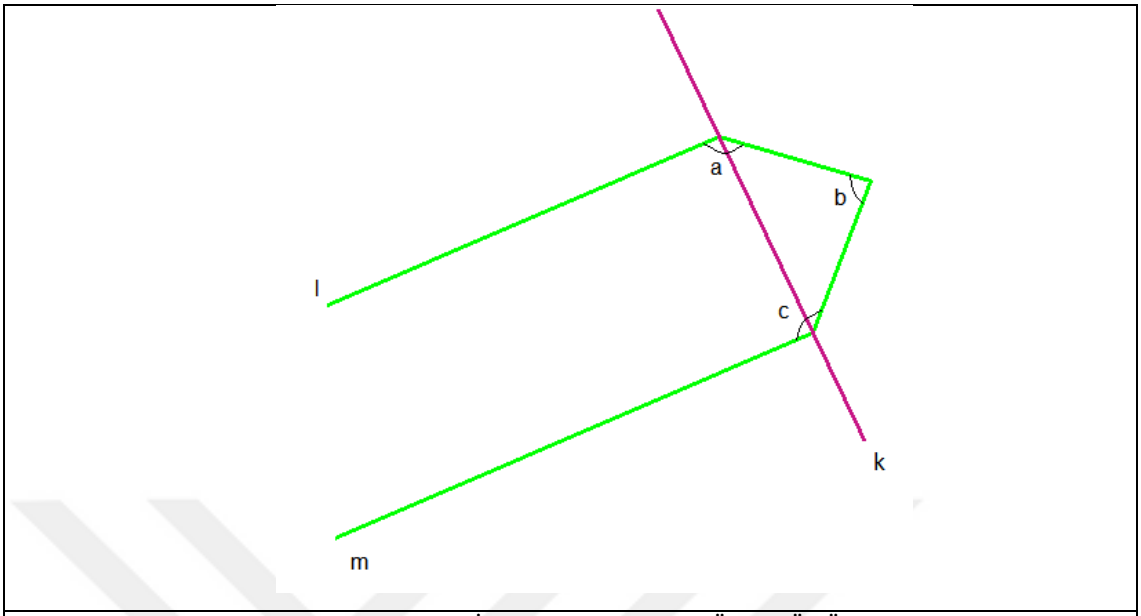
Aritmetiksel muhakeme niceliklerin değerlerini hesaplamaya odaklı iken, niceliksel muhakeme ifadeler arası çıkarım ilişkilerine odaklıdır.

Tablo 1.2.'de bu araştırmanın ön klinik görüşmesinin birinci probleminin (A) ve (B) merkezi bakış açılarına göre çözümleri sunulmuştur.

Tablo 1.2. *Ön klinik görüşmenin birinci probleminin Kaput'un merkezi bakış açılarına göre çözümleri*

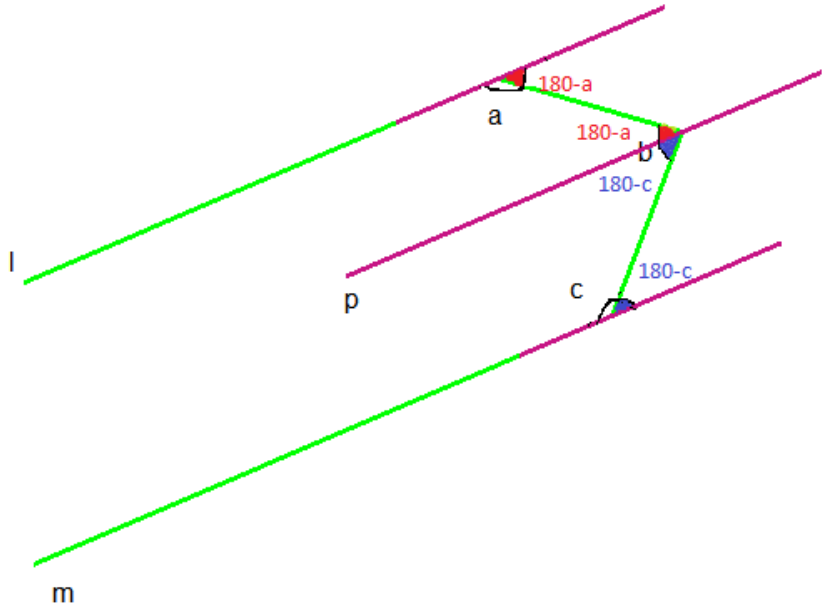
ÖN KLİNİK GÖRÜŞMENİN BİRİNCİ PROBLEMİ
Aşağıda verilen şekilde $l//m$ ise $a + b + c$ toplamı kaçtır? 
(A) MERKEZİ BAKIŞ AÇISINA GÖRE ÇÖZÜM
1. a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştiren bir k doğru parçası çizmek. 2. k doğru parçasının verilen çizimi bir üçgen ve paralel doğruların bir kesen ile kesilmesiyle oluşturduğu nesneyi tanımak. 3. Üçgenin iç açıları toplamı ile paralel doğruların kesen ile kesildiğinde oluşan açılar toplamının 180 er derece olmasından dolayı problemde istenen açılar toplamının 360° olduğunu elde etmek.

Tablo 1.2. (Devam) *Ön klinik görüşmenin birinci probleminin Kaput'un merkezi bakış açılarına göre çözümleri*



(B) MERKEZİ BAKIŞ AÇISINA GÖRE ÇÖZÜM

1. b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m doğru parçalarına paralel olacak biçimde bir p doğru parçası çizmek.
2. a ve c ölçülü açıların bütünleyenleri çizmek için l ve m doğru parçalarını uzatmak.
3. a ve c ölçülü açıların bütünleyenlerini sırasıyla $180 - a$ ve $180 - c$ olarak ifade etmek.
4. p doğru parçasının b ölçülü açıyı ayrıştırdığı açıların a ve c ölçülü açıların bütünleyenlerine eşit olduğunu ters açılar kavramından faydalanarak görmek.
5. $b = 180° - a + 180° - c$ denklemini kurarak $a + b + c = 360°$ olduğunu elde etmek.



Kısım 2. Genellemenin bir ürünü olarak fonksiyon fikrinin kökleri, nedensellik ve orantı ilkesindedir (Freudenthal, 1982, s.8). İterasyon ve tekrar olgularının genellemeye duyulan ihtiyacı ortaya çıkarmasından dolayı, fonksiyon ve bağıntı çalışmaları cebir ve

niceliksel muhakeme de dahil olmak üzere cebirsel muhakemenin önemli bir kısmını oluşturmaktadır.

Kısım 3. Kaput'a (2008, s.14) göre cebirsel bir faaliyeti modellemek (A) ve (B) merkezi bakış açılarını devreye sokmaktır.

Kaput'un (1995, s.4-5) cebir öğretimi için önerdiği reformun üç boyutu vardır: kapsama genişliği, bütünleştirme ve pedagoji. Kapsama genişliği, cebirin genelleme, soyutlama ve temsil, nesneler üzerine sözdizimsel manipülasyon, hesaplamalardan soyutlanmış yapıların çalışması, modelleme dili, fonksiyon, bağıntı ve doğru orantı çalışması ve simülasyonlar dahil olmak üzere fiziksel veya sibernetik olguların kontrolü gibi pek çok formuna, cebirsel muhakemeye ve bunların bağlantılı oluşuna işaret eder. Farklı alanlarda cebir öğrenimini gerçekleştirmek, alanların temellerinde bulunan fikirlerin benzerliğini ortaya çıkarır ve eş zamanlı olarak yapıların anlaşılmasını kuvvetlendirir. Bütünleştirme boyutu, cebirin matematiksel olan ve olmayan diğer konu alanlarıyla müfredat anlamında bütünleştirilmesidir. Öğrenciler farklı bir konu alanı öğrenirlerken cebir öğrenebilirler ve cebir öğrenilen diğer konu alanının öğrenimine ivme kazandırır. Kapsama genişliği ve bütünleştirme boyutlarıyla cebir, diğer konu alanlarıyla boylamlamasına tutarlı bir yeniden yapılanmaya girer ve böylece lise müfredatında öğrencilerin gelecek yüzyıl için ihtiyaç duyacakları yeni matematik konuları için yer açılır. Pedagoji boyutu ise özellikle teknolojinin kullanımı ile öğrencilerin daha aktif, yansıtmaya ve keşfe açık bir sınıf ortamıdır. Boyutlar birbirinden tamamen bağımsız olmayıp (Kaput, 1995, s.5) pek çok reform girişimi boyutlar arası gelişim üzerine kuruludur.

Öğrencilerin matematiğin derinlerinde yatan yapıları anlamaları için cebirsel muhakemeyi zihnin alışkanlığı haline getirmeleri gerekir (Blanton ve Kaput, 2005, s.412). Cebirsel muhakemeyi zihnin bir alışkanlığı haline getirmek sınıf-içinde oluşturulacak uygun ortam ile gerçekleşir. Kaput (2000a, s.4), tüm öğrencilerin cebiri anlayarak öğrenmelerini sağlamak için oluşturulacak sınıf atmosferinin ana hatlarını aşağıdaki şekilde belirlemiştir:

- Özellikle öğrencinin informal bilgileri üzerine kurulacak biçimde cebire erken başlamak,
- Matematiksel bilgiyi uygulamak ve genişletmek suretiyle diğer konu alanlarının öğrenimi esnasında cebir öğrenimini bütünleştirmek,

- Matematiksel bilgiyi uygulayarak cebirsel muhakemenin farklı formlarını dahil etmek,
- Öğrencilerin öğrendikleri ve bildikleri üzerine yansıtma yapmalarını destekleyerek bilgiyi doğal dilsel ve bilişsel güçleri üzerine kurmak,
- Anlam yaratma ve anlayış üzerine özel bir vurgu ile aktif öğrenmeyi ve ilişki kurmayı desteklemek.

Bu rota öğrencilere cebir, modellemeler, geometri, veri, sayma ve olasılık gibi matematiğin tüm alanlarında genellemede bulunma ve bu genellemeleri artan şekilde formelleştirmelerini sağlayacaktır. Kaput ve Blanton 2000 yılındaki (s.9) çalışmalarında cebirselleştirme terimini öğretmen bazlı sınıf-içi değişimin üç boyutu ile ifade etmişlerdir: Birinci boyut özellikle mevcut eğitim materyallerinden genelleme yapma ve gitgide artan formelleştirme fırsatlarını yakalama ile cebirsel muhakeme fırsatları oluşturma süreci, ikinci boyut öğretmenlerin genelleme ve bu genellemelerin sistematik ifadesi için ortaya çıkan fırsatları fark etmelerini sağlayan cebir göz ve kulakları geliştirmeleri ve amaçlı varsayım, üçüncü boyut argüman bağlamında aktif öğrenci genellemesi ve formelleştirmeyi destekleyen sınıf uygulamaları ve kültürü yaratma sürecidir. Pek çok öğrenci için cebiri anlamak demek, formülleri veya kuralları hatırlamak anlamına gelmektedir.

Mason'a göre (2008, s.58) cebirsel düşünme, aritmetiği enstrümental olarak gerçekleştirmekten ziyade aritmetikten anlam yaratmak için gereklidir. Matematik için doğru karışım % 5 ezber öğrenme ve % 95 akıllıca öğrenmedir: ancak öğretim çoğunlukla ikinciyi imkânsız kılan bir biçimdedir (Skemp, 1987, s.103). Öğretmen tarafından uzun süreli ve dikkatle yapılacak olan sorgulamalar ve açık bir şekilde yürütülen tartışma ortamının oluşturulması, öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ortaya çıkarılmasını destekleyecektir. Araştırmalar öğrencilerin kendi bilgilerini oluşturamadıklarında ya da yansıtma yapmak için kendilerine yeterince zaman tanınmadığında yaşadıkları zorluklara dair pek çok örnek sunmaktadır; herhangi bir a ve b için $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ şeklinde aşırı genellemelerde bulunma gibi (Kaput, 2000a, s.12). Öğrencilerin semboller ve işlemlerin özellikleri üzerinde yansıtma yapmalarını sağlayarak, geometrik yorumu kullanarak ve denemeler ile a ve b değişkenlerinin 0 değerini almadığı durumlarda birçok öğrenci böyle bir aşırı genellemenin yanlış olduğunu görecektir.

Matematik bir keşif alanıdır ve matematik yapmak öğrencilerin aktif ve amaçlı olarak varsayımda bulundukları, fikirleri gözden geçirdikleri, kanıt öne sürdükleri ve

matematiksel olarak tartıştıkları sosyal bir süreçtir (Bastable ve Schifter, 2008, s.182). Öğrenciler genellemelere gündelik konuşma, jest ve mimikler ile başlarlar. Doğal dil öğrencilerin cebir öğrenmelerinde önemli bir başlangıç noktasıdır, çünkü cebirsel kavramları tanımlamak ve onlardan anlam yaratmayı bildikleri dili kullanarak gerçekleştirirler (Kaput, Carraher ve Blanton, 2008, s. xx). Öğrencilerin yaptıkları genellemelerin tespiti ve desteklenmesi öğretmenin iyi bir dinleyici olmasını gerektirir. Öğrencilerin düşüncelerini takip ederek formel hale getirmelerine yardımcı olmak ve sembolik ifade yeterliliği kazandırmak, cebir reformunu gerçekleştirmek adına son derece önemlidir. "Bir matematiksel ispatı anlayabilmemiz, işleri kolaylaştırmak, matematikle ilgili bir şeylere bakarken sağladıkları basitleştirmeyle neler olup bittiği hakkında kabaca bir görsel fikre sahip olabilmemiz üzere vardırlar" (Mazur, 2017, s.226). Geleneksel cebir eğitiminin eleştiri alan yönü sembolik ifadelerin doğasını ve sembol manipülasyonunun amacını yeterince açıklayamamasıdır (Chazan, 1994, s.4). Ezberlenmiş kurallar ile anlam yüklemeden yapılan sembol manipülasyonu anlamsız olduğu için sadece sıkıcı değil, aynı zamanda da zordur; çünkü kuralları hatırlamak entegre edilmiş kavramsal bir yapıyı hatırlamaktan daha zordur (Skemp, 1987, s.17). Cebir reformunun gerçekleştirilmesi Peled ve Carraher'e (2008, s.311) göre öğrencilere sorulacak sorularda sınır koşullarını kontrol etme, informal bilgiyi kullanarak farklı durumları araştırma, genellemeleri keşfetme ve formal bilgiyle bağlantı kurma gibi geniş bir durum çeşitliliği gözetilmesidir.

1.2.2. McCrory ve diğerlerinin ortaöğretimde cebir öğretimi teorisi

Michigan Eyalet Üniversitesinden McCrory ve diğerlerinin 2012'de yayınladığı (s.595) "Cebir Öğretimi için Bilgi: Bilgi ve Uygulamalar için Çerçeve" başlıklı çalışma, ortaöğretim seviyesinde cebir öğretimi için gerekli bilgiyi okul cebiri bilgisi, ileri matematik bilgisi ve cebir öğretim bilgisi olarak sınıflandırmıştır. Bu çalışma Ball ve diğerlerinin (Ball, 1988; Ball, 1990; Ball ve Bass, 2000a; Ball ve Bass, 2000b; Ball ve Bass, 2003; Ball ve McDiarmid, 1990) temel seviyede okul öğretimi üzerine yaptıkları çalışmalar ve Conference Board of the Mathematical Sciences [CBMS] (2001) tavsiyeleri üzerine inşa edilmiştir. Ortaöğretimde cebir öğretimi teorisi temelde öğretim uygulamalarının üç kategorisi olan kırpmak *(trimming),* köprü kurmak *(bridging)* ve sıkıştırılmış olanı açmak *(decompressing)*, öğretime özgü bilginin matematiksel kullanımlarına işaret etmektedir (McCrory, 2012, s.584). McCrory ve diğerleri öğretime özgü matematiksel bilginin bileşenlerini aşağıdaki gibi açıklamışlardır:

Kırpmak (trimming), bir problemin zorluk veya soyutluk seviyesini ayarlamak, maksatlı olarak detay eklemek ya da çıkarmak, kaynak kitabın matematiksel bir fikre yaklaşımı veya problemleri öğrenci seviyesine göre uyarlamak, kaynak kitaplarda önemli detayların veya özel durumların atlanması ile sonuçlanmış aşırı kırpma durumlarını fark etmek, öğrencilerin matematiksel fikirlerine cevap vermek ve yeni problemler yaratmaktır. Kırpma bileşeni ayrıca hangi bilginin öğrenciye sunulmasının gerekli, hangi bilginin cebirsel kavram, algoritma ve süreçlerden elde edilebilir olduğu ve öğrencilerin sonraki öğrenim safhalarında edinecekleri matematiksel kazanımları ve olası yanlış anlamaları ön görmektir (McCrory vd., 2012, s.604).

Köprü kurmak (bridging), matematiği konular, kavramlar ve amaçlar arasında bağlantılı hale getirmek, yani yatay ve dikey müfredat hizalamasıdır. Öğrenci anlayışlarından öğretmeninin ulaşmak istediği hedeflere, okul cebiri fikirlerini soyut cebir ve reel analize bağlamaktan, bir matematik alanını diğeri ile bağlantılı hale getirmek gibi matematik öğretmenlerinden beklenen çeşitli türde bağlantıları içerir. Köprü kurmak, cebirsel kavramlar ile matematiğin diğer öğrenme alanlarının kesişimini anlamayı içermesinden dolayı matematiğin bağlantılı ve tutarlı yapısını ortaya koyar. Öğrencilerin matematikteki büyük resmi görmelerine, konular arasında bağlantılar kurmalarına ve sınıf içinde büyük çapta fikir paylaşımına imkan tanır. (McCrory vd., 2012, s.606-607).

Sıkıştırılmış olanı açmak (decompressing), içeriğin tam anlayışı için içeriğin bileşenlerinin açılması, tersine çalışabilme, kurallara nasıl ulaşıldığının öğrenci tarafından keşfedilmesinin sağlanmasıdır. Denklem veya denklem sistemlerini çözme ve ifadelerin sadeleştirilmesi esnasında kullanılan algoritmalar ve metin, sembolik, grafik, tablo gibi temsiller arası geçişlerin açıklanması, süreçlerin mantığı ve süreçleri kısıtlayan unsurlar, sonraki öğrenim yaşantılarında yapacakları soyutlamalara bir bakış şeklinde özetlenebilecek sıkıştırılmış olanı açmak öğrencilerin cebirin faydasını ve önemini anlamalarına yardımcı olur. Sıkıştırılmış olanı açmak derslerin tasarımı ve cebirsel görevlerin seçimi ve sıralanmasının yanı sıra öğrencilerin yanlış anlama ve soruları ile etkileşimlerde meydana çıkar (McCrory vd., 2012, s.593).

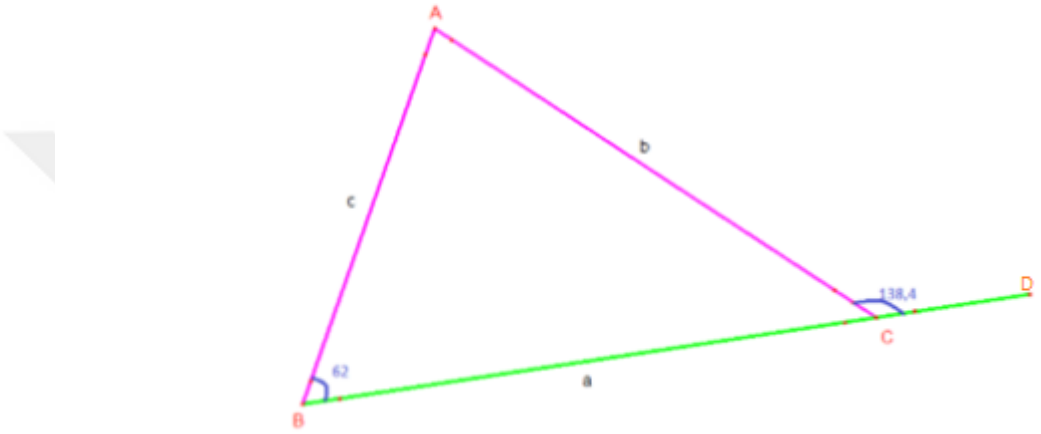
McCrory ve diğerlerinin ortaöğretimde cebir öğretimi teorik çerçevesi araçları kullanılarak modifiye edilmiş son klinik görüşmenin ikinci problemi Tablo 1.3.'de sunulmuştur. Geometri ve cebir arasındaki bağlantılılığı öğrencilerin fark etmelerine imkan sağlamak için köprü kurma, üçgende açı-kenar bağıntısını kurmaları ve ondalıklı sayılarla aritmetik işlem gerçekleştirmeleri amacıyla kırpma ve geometrinin

görselleştirme gücünden faydalanarak mutlak değere ilişkin tam anlayış sağlamak adına sıkıştırılmış olanı açma araçları kullanılmıştır.

Tablo 1.3. Son klinik görüşmenin ikinci probleminin McCrory vd. nin ortaöğretim cebir öğretimi teorik çerçevesine göre uyarlanması

<table>
<tr><td colspan="2">SON KLİNİK GÖRÜŞMENİN İKİNCİ PROBLEMİ

ABC üçgeninde $m(\widehat{ABD}) = 62°$, $m(\widehat{ACD}) = 138{,}4°$ dir. Buna göre,
$|a-c| + |b-a| - |b-c|$ ifadesi neye eşittir?

 
</td></tr>
<tr><td>KIRPMAK (TRIMMING)</td><td>• Üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkinin üçgende açı-kenar ilişkisini kullanılarak elde edilmesi durumu maksatlı olarak probleme yerleştirilmiştir.
• Üçgenin birer adet iç ve dış açının verilmiş olması ve dış açı ölçüsünün ondalıklı sayı olması problemin zorluk seviyesini ayarlamak için tercih edilmiştir.
• Problemde verilen çizimin prototip algı yaratmaması adına CG-II yazılımı kullanılarak çizilmiştir.</td></tr>
<tr><td>KÖPRÜ KURMAK (BRIDGING)</td><td>• Problemde açı-kenar ilişkisini öğrencinin geometrik bilgisini uygulayarak elde etmesi ve problemden istenen ifadenin mutlak değer içermesi geometri ile cebir arasındaki bağlantıyı ortaya koymuştur.
• Problemin soru kökü “ifadesi neye eşittir” biçiminde olması günlük dil ile matematiksel dil arasında çıkabilecek uyumsuzluğu bertaraf etmek adına tercih edilmiştir.</td></tr>
<tr><td>SIKIŞTIRILMIŞ OLANI AÇMAK (DECOMPRESSING)</td><td>• Bu probleme eş olarak tasarlanabilecek “$c < b < a$ olmak üzere $|a-c| + |b-a| - |b-c|$ ifadesi neye eşittir?” problemi mutlak değer kavramı ile ilgili içeriğin tam anlayışını sağlamaz. Son klinik görüşmenin üçüncü problemi geometrinin görselleştirme gücünden faydalanarak mutlak değer kavramı içeriğinin tam anlayışı için ortam yaratır.
• “ifadesi neye eşittir” biçimindeki soru kökü problemin çözümünün sembolik temsiller içereceği hissini sağlaması açısından tercih edilmiştir.</td></tr>
</table>

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada amaç, 9. sınıf öğrencilerinde cebirsel beceriler ve sembolik manipülasyonunun üçgenler alt öğrenme alanında anlamlı hale getirilmesi suretiyle öğrencilerde cebirsel muhakemenin gelişimini sağlamaktır. Bu araştırmayla, işlem yapma ve formül odaklı bir matematik öğretimi yerine kavramsal anlayışın sınıf-içi tartışmalarla yapılandırıldığı, öğrencilerin sezgilerinden yola çıkarak gitgide artan soyutlama becerilerinin geliştiği bir reform hareketi ile konuların hem yatay hem de dikey yapılandırmasını sağlamak hedeflenmektedir.

Yanık ve Ada'ya göre (2013, s.48) matematik eğitiminde matematiksel düşünceyi en üst düzeye çıkarmayı amaçlayan önemli araştırma alanlarından biri geometridir. Geometrinin doğasında bulunan görselleştirme gücünden faydalanılarak öğrencilerin cebirsel muhakemelerini kuvvetlendirmenin amaçlandığı bu araştırmada vurgulanmak istenen öğrencilerin geometrik düzeylerini van Hiele geometrik düşünme metodu dahilinde belirlemek olmayıp cebir ve cebirsel muhakemeyi geometriye nasıl bütünleştirdikleri ve geometri bilgi yapısının cebiri ve cebirsel muhakemeyi nasıl etkilediğini incelemektir.

Cebirsel muhakemenin ortaya çıkarılmasının desteklenmesini sağlayan unsurlardan biri de pedagoji boyutudur. MEB 2011 yılında (s.15-16) yayınladığı "Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı"nda, öğrenme ortamları hazırlarken öğretmenlerin dinamik geometri yazılımlarının etkileşimli yapılarından yararlanmaları gerektiğini vurgulamıştır. 2013 yılında yayınlanan MEB Öğretim Programı'nda (s.10) ise bilgisayar teknolojisinin sürekli gelişmesi sonucunda; öğretim yazılımlarının hem niteliği hem de niceliği artmakta olduğu vurgulanarak, alternatiflerin sürekli çoğalmakta olduğu ifade edilmiştir. İlgili Programda, geometrik ilişki kazanımında Dinamik Geometri Yazılımlarının (DGY) kullanımı oldukça sık vurgulanmıştır. DGY, öğrencilere ölçüm yapma, karşılaştırma, şekilleri manipüle etme gibi deneyimler sunmaktadır. Bu deneyimler şekiller üzerindeki değişen ve değişmeyenlerin incelenmesine fırsat verdiği ve geometrik ilişkilerin keşfine olanak sağladığı için bu araştırmanın pedagoji boyutunda kullanılmıştır.

1.3.1. Araştırma problemleri

Bu araştırmada öğrencilerin geometri öğrenme alanında cebirsel muhakemelerini geliştirmeye yardımcı olmak için oluşturulmuş cebir reformu çerçevesi kullanılmıştır.

Cebirsel muhakemenin ortaya çıkarılmasının desteklenmesi amacıyla Kaput'un (2008) cebir içerik analizi ve cebirsel muhakeme çerçevesinin iki merkezi bakış açısı göz önünde bulundurulmuştur. Cebir reformunda ele alınan eğitim materyallerinin cebirselleştirilmesi için McCrory ve diğerlerinin (2012) cebir öğretimi için bilgi çerçevesi kullanılmıştır. Araştırmanın amacı doğrultusunda aşağıdaki araştırma soruları yanıtlanmaya çalışılmıştır:

1. 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakemeleri üçgenler alt öğrenme alanındaki bilgi yapılarını nasıl etkilemektedir?

2. 9. sınıf öğrencilerinin üçgenler alt öğrenme alanındaki bilgi yapıları cebirsel muhakemelerini nasıl etkilemektedir?

1.4. Araştırmanın Önemi

Üçgenler alt öğrenme alanında gerçekleştirilmesi planlanmış cebirselleştirme hareketi ile, cebir ve diğer matematik konu alanlarının yeniden yapılandırılması amaçlanmaktadır. Cebirin diğer öğrenme alanları ve farklı disiplinlerle ilişkisinin öğrenciler tarafından görülmesini sağlayacak olan faktör cebirsel muhakemenin ön plana çıkarılmasıdır. Öğrencilerin aktif bir biçimde derse katıldığı, düşüncelerini yansıtma fırsatlarının tanındığı ve git gide artan formel dilin kullanıldığı bir sınıf ortamı cebirselleştirmenin gerçekleşeceği bir ortamdır. Cebir reformu ile kastedilen, salt sayılar ve cebir öğrenme alanı ile ilintili değildir. Cebir hem bir araç hem de bir süreçtir. Buradan yola çıkarak, bu araştırmada geometride cebirsel düşünmenin ortaya çıkarılması ve cebir reformunun üçgenler alt öğrenme alanında da gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir.

9. sınıfı takip eden sınıf seviyelerinin matematik programında yer alan Dörtgenler ve Çokgenler, Trigonometri, Analitik Geometri, Çember ve Daire, Uzay Geometrisi ve Analitik Düzlemde Dönüşümler alt öğrenme alanlarının kazanımında üçgenler temel teşkil etmektedir. Üçgenler alt öğrenme alanında öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin gelişimi ve geometrik ilişkilerin kendileri tarafından elde etmeleri rotası ile ilerleyen sınıf seviyelerinde geometrinin diğer alt öğrenme alanlarındaki kazanımlarının olumlu etkileneceği düşünülmektedir.

NCTM (1989), Müfredat ve Değerlendirme Standartları dokümanında cebir ve geometri gibi matematiğin farklı alanlarında bağlantıların kurulması vurgusu ile matematik eğitiminde bağlantılar kurmanın gerekliliğine işaret etmiştir. Kaput (1995,

s.11) diğer konu alan bilgisinin öğrenilmesi esnasında cebirin inşa edildiğini, yapıların anlaşılmasının kuvvetlenmesi ile fikirler arasındaki benzerliklerin ortaya çıktığını, ilgili işlemsel becerilerle idman yapmaya olanak sağladığı ve matematiğin gücünü takdir etme hissini kuvvetlendirdiğini ifade etmiştir.

1.5. İlgili Alan Yazın

Thompson ve Senk yarısı geleneksel yarısı da University of Chicago School Mathematics Project [UCSMP] kapsamında geliştirilen müfredata göre, ortaöğretim 9-12. sınıf seviyelerinde sekiz adet sınıf üzerinde 2001 yılında kapsamlı bir çalışma gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmayla, NCTM standartlarına yönelik tasarlanmış bir müfredatta okuyan öğrencilerin geleneksel bir müfredatla okuyan öğrencilerden daha az başarılı olacağına dair endişelerin doğrulanmadığını ortaya koymuşlardır. UCSMP 1983 yılından itibaren öğrencilerin büyük çoğunluğu için matematik eğitimini geliştirmeye yönelik çok yönlü bir projedir. Thompson ve Senk'in (2001) çalışmalarında fonksiyon (doğrusal, ikinci dereceden, üstel, logaritmik fonksiyonlar) ve modelleme ana temaları yer almıştır. Bu temaların öğretiminde geometrinin nokta, doğru ve düzlemin geometrik özellikleri, yansıma, öteleme ve dönüşümleri ve eşlik ile denklik bağıntıları ele alınmış ve öğrencilerin geometri ve cebir arasında açık bağlantılar kurmaları, problemlere çoklu bakış açıları ile yaklaşımları ve birden fazla çözüm yolu sunmaları desteklenmiştir. Çalışmada kullanılan UCSMP İleri Cebir ders kitabı; beceriler, özellikler, kullanım, temsiller olmak üzere anlayışın dört boyutunu vurgular ve tüm boyutlar cebirsel muhakemenin gelişimi ve alanlar arasındaki bağlantının öğrenciler tarafından anlaşılmasına odaklıdır.

Venenciano ve diğerlerinin (2020) ilköğretim birinci sınıf seviyesinde cebirsel muhakemeyi bütünleştirmeyi amaçladıkları çalışmalarında, birinci sınıf kazanımlarını cebirsel muhakemenin ön planda tutulduğu bir program ile gerçekleştirmişlerdir. Araştırmacılar birinci sınıf öğrencileri için erken cebirsel muhakemenin gelişimi kapsamında; a) eşitlik ve eşit işareti, b) sayı ve işlemlerin özellikleri, c) değişken kavramı, d) genelleme becerisi, e) esnek düşünme becerisi bileşenlerini ele almışlardır. Öğrencilerin fiziksel dünyadaki nesnelerin özelliklerini tanımaya ve kıyaslamaya başladıkça, deneyimleriyle uyumlu olarak nitel ilişkiler ve matematiksel özelliklerle ilgili anlayış gerçekleştirdikleri sonucuna ulaşmışlardır.

Apsari ve diğerlerinin 2020 yılında beşinci sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakemelerini geliştirmek için geometrik temsillerin rolü üzerine yaptıkları çalışma, öğrencilerin geometrik temsillerin örüntü belirleme ve genelleme oluşturmalarına yardımcı olduğunu ortaya koymuştur.

Dindyal'in (2003) ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerinin geometride cebirsel muhakeme, sembol ve cebirsel ilişkiler, farklı temsil biçimleri, örüntü ve genelleme kullanımını ve ilgili kavramsal zorlukları araştırdığı doktora tezinden elde edilen sonuçlar öğrencilerin geometri problemlerini çözerken cebirsel muhakemeyi kullandıklarını göstermiştir. Ancak, öğrencilerin değişkenin doğasını anlama, denklem veya ifade yazma, formülleri hatırlama ve kullanma, farklı temsil biçimlerinin kullanımını anlama ve örüntüler için genelleme bulma gibi çeşitli zorluklar yaşadıklarını da ifade etmiştir. Hata kaynaklarının bazen geometrik kavramlar bazen de cebirsel kavramlar ile ilgili olduğu görülmüştür. Van Hiele seviyelerinin öğrencinin geometrik düşüncesinin tam bir resmini vermediği de bulgular arasında yer almıştır.

2004 yılında Dindyal'in ortaöğretimde öğrencilerin değişken ve bilinmeyenleri geometride kullanmaları üzerine yayınladığı makalede, öğrencilerin karşılaştıkları sorunların bir kısmının cebire özgü, diğerlerinin ise geometrik veya cebirsel kavramlara ilişkin zayıf kavrayıştan kaynaklandığını ifade etmiş ve geometride cebirin önemini vurgulamıştır.

Atasoy ve Bulut (2018), 12. sınıf öğrencilerinin geometri kavramlarını kullanılarak cebirsel düşünmenin bileşenleri olan semboller ve cebirsel ilişki, gösterimlerin farklı formları, örüntüleri genelleme ile ilgili düşünme süreçlerini analiz ettikleri çalışmalarında, öğrencilerin geometri problemlerinde genellikle cebirsel olarak çözüm yapmaktan çekindiklerini ve formül hatırlama yolunu tercih ettiklerini gözlemlemişlerdir. Ayrıca öğrencilerin cebirsel düşünme becerilerinin problem çözümlerinde yeterli düzeyde olmadığını, gösterimler arası dönüşüm durumlarında öğrencilerin başarı düzeyleri arasında bir farklılığın ortaya çıktığını belirlemişlerdir. Araştırmacılar, geometri düşünme düzeyi düşük olan öğrencilerde cebirsel düşünme düzeylerinin de düşük olduğunu ifade etmişlerdir.

Oral, İlhan ve Kınay'ın 2013 yılında 8. sınıf öğrencileriyle geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişkiyi incelemek üzere yürüttükleri çalışmalarında, öğrencilerin hem geometrik ve cebirsel düşünme düzeylerinin cinsiyete göre farklılaşmadığını hem de geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasında pozitif

yönde, orta düzeyde ve anlamlı bir ilişki olduğunu belirlemişlerdir. Araştırmacılar geometrik ve cebirsel düşünme düzeylerini incelemeye yönelik farklı kademelerde öğrenim gören öğrenciler ile çalışmaların yapılmasının önemini vurgulamışlardır.

2019 yılında Ataş'ın 8. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdiği yüksek lisans tezinde öğrencilerin cebirsel düşünme düzeylerindeki artışın geometri ve cebir arasında kurdukları bağlantılarda gelişmeye işaret etmiş ve öğrencilerin farklı temsilleri kullanma, temsiller arası geçiş yapabilme ve temsillerin geometrik anlamlarını yorumlayabilme becerilerinin arttığını ortaya koymuştur. Ancak öğrencilerin doğrusal ilişki ve doğrusallık kavramlarına ile ilgili kavramsal zorluklar yaşadıkları sonucu da bu çalışmada ortaya çıkmıştır.

Cebirsel muhakemenin matematiğin öğrenme alanlarında ön plana alındığı yerli ve yabancı alan yazın bulguları cebirsel muhakemedeki gelişimin matematik öğrenmeye ivme kazandırdığı sonucunu ortaya koymaktadır. Sınıf seviyesi ve öğrenme alanından bağımsız olarak, cebirsel muhakeme ile bütünleştirilmiş bir öğretim programının öğrencilerin problem durumlarına çoklu bakış açısı geliştirmelerini sağlayacağı alan yazından görülmektedir. Bu sonuçlar ışığında 9. sınıf öğrencileri ile yürütülmüş olan bu araştırma, matematiğin alt öğrenme alanları arasındaki bağlantılı yapının öğrenciler tarafından anlaşılması hedeflenerek tasarlanmıştır. Bu hedefin karşılıklı olarak üçgenler alt öğrenme alanında öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ve cebirsel yapılar altındaki geometrik yapıları ortaya çıkartmak suretiyle geometrik düşünmenin gelişimini destekleyerek gerçekleşebileceği düşünülmüştür. Geometrik temsillerin rollerini kavrama, farklı temsil biçimleri arasında geçiş yapma, örüntüleri genelleme ve problemlere çoklu bakış açısı geliştirmenin ön planda tutulduğu bu araştırma öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin gelişiminini destekleyemesi açısından önem arz etmektedir.

2. YÖNTEM

1980'li yıllar, yapılandırmacı öğrenme kuramının davranışçılığın etkisine karşı koyulması ve nitel araştırma yöntemlerinin matematik eğitimindeki karmaşık sorunlara hitap etmede değerli bulunmaya başlanması ile önemli bir dönüm noktası olmuştur (Presmeg, 2006, s.2). Üçgenler alt öğrenme alanında 9. sınıf öğrencilerinin cebirsel muhakemelerinin gelişiminin hedeflendiği bu araştırmada, cebirsel muhakemenin hangi durumlarda ortaya çıkacağı derinlemesine bir inceleme gerektirmektedir. Öğrencilerin içsel temsillerinin dışsal temsiller temelinde elde edilişi bilişsel bir süreçtir ve öğrencilerin eylemlerinin gözlemlenmesi ile elde edilebilir. Dolayısıyla bu araştırma için kullanılan yöntem, Merriam ve Tisdell'in (2015, s.6) tanımladığı gibi, bireylerin deneyimlerini nasıl yorumladıklarını, dünyalarını nasıl yapılandırdıklarını ve deneyimlerine ne anlam yüklediklerini kavramaya çalışan "nitel araştırma yaklaşımı" olmuştur. Nitel araştırma paradigmalarından biri olan yorumlayıcı/yapılandırmacı araştırma Merriam ve Tisdell'e (2015, s.9) göre, gerçekliğin sosyal olarak oluşturulduğu ve gözlemlenebilir tek bir gerçeğin olmadığını varsayan en yaygın nitel araştırma türüdür. Nitel araştırmacılar insanların yaşadıkları dünyadan ve bu dünyadaki deneyimlerden edindikleri manayı anlamak ile ilgilenirler (Merriam ve Tisdell, 2015, s.15).

Tüm okul seviyelerinde matematik reformunun odak noktası olan cebiri bu araştırmada üçgenler alt öğrenme alanında ele almak pek çok değişkeni incelemek suretiyle yorumlama, yapılandırma ve anlam yüklemeyi gerektirir. Nitel araştırma bireylerin oluşturdukları anlamları incelemek olduğu için (Özden ve Saban, 2017, s.5) bu araştırmanın deseni, araştırmacının rolü, katılımcılar, verilerin toplanması ve analizi ile geçerlik ve güvenirlik süreçlerinde nitel araştırma yaklaşımını gerektirmiştir.

2.1. Araştırmanın Deseni

Nitel araştırma yaklaşımlarında yer alan yöntemlerden biri olan öğretim deneyi öğrencilerin matematiksel kavramlar, ilişkiler ve işlemler üzerindeki düşünme biçimlerini derinlemesine anlayabilmek için bu araştırmada kullanılmıştır. Steffe ve Thompson'a (2000, s.267) göre öğretim deneyi yönteminin kullanılmasındaki en temel neden, öğrencilerin matematiksel yapı oluşumlarında kullandıkları dil ve eylemler ile yaptıkları hatalar şeklindeki sınırlılıkları deneyimlemektir.

2.1.1. Öğretim deneyi

Eğitimde yapılandırmacı yaklaşımın etkin hale gelmesi sonucunda eğitimciler, geleneksel öğretimin aksine, öğrencilerin anlamı nasıl yarattığı konusuna odaklanmışlardır. Öğrencilerin matematikte yarattıkları anlamı keşfetmek için sıklıkla kullanılan öğretim deneyi, araştırmacının faaliyetlerini düzenleyen ve keşif gücüne sahip bir kavramsal araçtır (Steffe ve Thompson, 2000, s.274). Öğretim deneyi yöntemi ise, altı hafta ile iki yıl arasında sürebilecek bir zaman diliminde gerçekleştirilecek bir seri öğretim dizisi ve münferit mülakatları içerir (Cobb ve Steffe, 1983, s.83). Öğretim deneyinin kompartımanlarından biri olan klinik görüşmeler yani münferit mülakatlar Steffe ve Thompson'ın (2000, s.274) ifade ettiği üzere öğrencinin mevcut bilgisini anlamaya yönelik iken, öğretim deneyi uzun bir sürede öğrencideki gelişimi anlamaya yöneliktir. Klinik görüşmeyi yürüten araştırmacının odağı öğrencilerin muhakemesinin orijinalitesini anlamak ve çeşitli bağlamlarda tutarlığını, sağlamlığını veya kırılganlığını tanımlamaktır (Ackermann, 1995, s.346). Öğretim deneyinin bir diğer kompartımanı ise öğretim dizisidir. Bir seri öğretim dizisi; öğretmen, bir ya da daha fazla sayıda öğrenci, öğretim dizilerinin şahidi ve (takip eden dizileri hazırlamak ve deneyin kavramsal analizinde kullanmak üzere yapılan) kayıtları içerir (Steffe ve Thompson, 2000, s. 274).

Aşık ve Yılmaz (2017, s.353) tarafından Türkçe'ye çevrilmiş olan öğrenci matematiği (students' mathematics) ve algılanan öğrenci matematiği (mathematics of students) terimlerini Steffe ve Thompson (2000, s. 268) sırasıyla öğrencilere ait matematiksel gerçekleri oluşturan yani herhangi bir matematiksel faaliyette öğrencilerin söyledikleri ve yaptıkları ile araştırmacıların öğrencilerin sahip olduğu matematiği yorumlaması şeklinde tanımlamışlardır. Öğretim deneyinin temel hedefi "öğrencilerin matematiği" modellerini oluşturmaktır (Steffe ve Thompson 2000, s.268). Başka bir deyişle öğrencilerin söylem ve eylemlerinin arka planını incelemek ve anlamaya çalışmak öğretim deneyinin temel hedefidir. Steffe ve Wiegel (1992, s.461) matematik eğitimindeki mevcut reform girişimlerini desteklemek için "öğrencilerin matematiği"ni anlamanın çok önemli olduğuna dikkat çekmişlerdir.

Cobb (2000, s.308) öğretim deneyinin üç merkezi yönü olduğunu ifade etmiştir: öğretimin tasarımı ve planlanması, sınıf-içi aktivitelerin sürekli analizi, öğretim deneyi süresince elde edilen verinin geçmişe yönelik analizi. Öğretim deneyinin ilk aşamasında araştırmacıların, öğrencilerdeki öğrenme süreçlerine ilişkin önceki araştırmaların sonuçlarını ya da kendi öğretimsel deneyimlerini temel alarak öğrenci matematiğinin

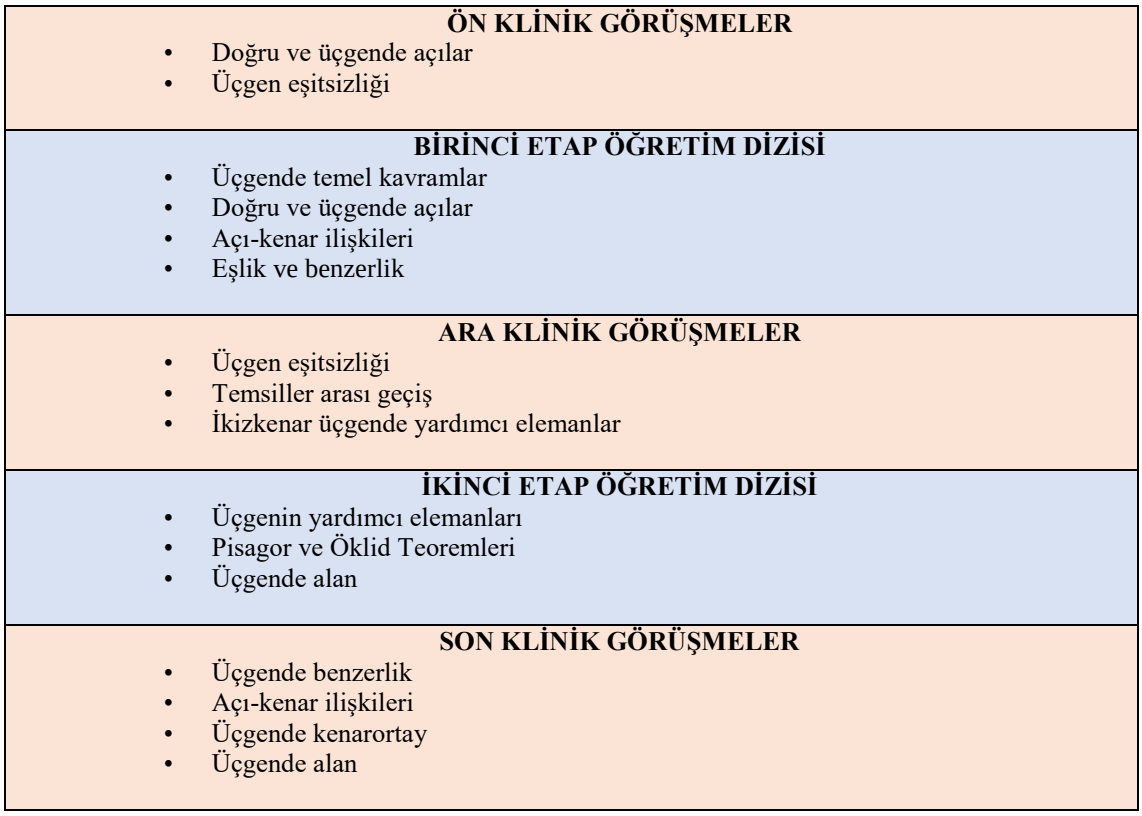
gelişimine yönelik öncül hipotezleri oluşturdukları görülmektedir (Uygan, 2019, s.794). Öğretim deneyinin başında formüle edilen araştırma hipotezleri, öğrenci seçimi de dahil olmak üzere araştırmacının çalışmasını yönlendirir. Öncül hipotezlerin yanı sıra öğretim deneyi süresince öğrencilerle etkileşim sonucu doğaçlama ya da araştırmacının bir önce gerçekleşmiş öğretim dizisinin kayıtlarını gözden geçirerek bir sonraki dizide test edilebilecek hipotezler oluşturabilir (Steffe ve Thompson, 2000, s.277). Bu hipotezler, öğrencilerin düşünce ve eylemlerinin arka planındaki anlamları çözümlemek suretiyle gerçekleşir.

2.1.2. Araştırmada benimsenen öğretim deneyinin bağlamı

Öğretim deneyi bir gelişim ve öğrenme çalışması olup kendiliğinden gelişen ürünlerin avantaja çevrilmesini gerektirir (Steffe ve Thompson, 2000, s.289). Bu araştırmada yapılandırmacılığın psikolojik ve sosyal yönünü bir denge dahilinde (Cobb ve Yackel, 1996) ele alan bir öğretim deneyi olan Gelişen Bakış Açısı – [GBA] (Emergent Perspective) benimsenmiştir. GBA teorik çerçevesi, öğrencilerin bireysel matematiksel etkinliklerini yeniden düzenlerken, gelişen sınıf matematiksel uygulamalara katkıda bulundukları ve yeniden düzenlemeleri yapma yolları, gelişen sınıf uygulamalarına katılımları ile sınırlı olduğu temel fikri üzerine kuruludur (Cobb, 2000, s.310).

Entelektüel ve sosyal otonominin gelişimi matematik eğitiminde reform hareketinin hedeflerinden biridir (Dindyal, 2003, s.155). Öğretim dizisi süresince bu araştırmada öğrencilerin entelektüel ve sosyal otonomilerinin gelişiminini sağlayacak sınıf ortamı araştırmacı tarafından oluşturulmuştur. Odak öğrenciler ile ön, ara ve son klinik görüşmeler ve sınıfın tümü ile öğretim dizileri gerçekleştirilmiştir. Ön klinik görüşmelerde, doğru ve üçgende açılar ile üçgen eşitsizliği konularını temel alan dört adet problem vasıtasıyla öğrencilerin geometri ve cebir öğrenme alanlarında sahip oldukları ön bilgiler ve bu bilgileri problem durumlarına nasıl uyguladıkları deneyimlenmiştir. Birinci etap öğretim dizisi, ön klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizi doğrultusunda öğrencilerin geometrik ve cebirsel ön bilgi eksikliklerini gidermenin hedeflendiği beş haftalık bir süreç olarak planlanmış ve yürütülmüştür. Ara klinik görüşmeler; odak grup öğrencilerinin birinci etap öğretim dizisinde elde edilen kazanımları nasıl yapılandırdıklarını ayrıntılı bir şekilde anlamak için üçgen eşitsizliği, temsiller arası geçiş ve ikizkenar üçgenin özellikleri konularından üç adet problemin yöneltilmesi şeklinde gerçekleştirilmiştir. İkinci etap öğretim dizisi; ara klinik

görüşmelerden elde edilen verilerin analizi doğrultusunda öğrencilerin hem cebirsel muhakemelerini geliştirmek hem de üçgenler alt öğrenme alanının geri kalan kazanımların sunulması hedefi ile üç hafta olarak planlanmış ve yürütülmüştür. Son klinik görüşmeler; odak grup öğrencilerinin öğretim deneyi uygulaması süresince elde ettikleri kazanımları geometrik ve cebirsel olarak yapılandırma biçimlerini ayrıntılı olarak anlamak için gerçekleştirilmiştir. Son klinik görüşmelerde öğrencilere yöneltilen dört adet problemde; üçgende benzerlik, açı-kenar ilişkileri, üçgende kenarortay ve alan konuları temel alınmıştır. Öğretim deneyinin uygulama süreci ve kapsanan içerikler Şekil 2.1.'de sunulmuştur.



Şekil 2.1. *Öğretim deneyinin uygulama süreci*

2.1.3. Araştırmacının rolü

Öğrencinin matematiksel bilgisinin oluşumunun keşfinde öğretmenlik görevini üstlenen araştırmacının öğretmen sıfatıyla öğrencilerle etkileşimi gerekmektedir. Cobb ve Steffe (1983, s.83), çocukların matematiksel bilgi inşasının, öğretmenleriyle etkileşim yoluyla yaşadıkları deneyimlerden büyük ölçüde etkilendiğini ve araştırmacının öğretmen olmasının önemini vurgulamıştır. Araştırmacı, araştırmanın gerçekleştirildiği

devlet lisesinde görev yapmaktadır ve yirmi yıllık meslek tecrübesine sahiptir. Araştırmanın gerçekleştiği sınıf seviyesinin 9. sınıf olmasından dolayı araştırmacı, araştırmanın gerçekleştiği eğitim öğretim yılının başında katılımcılar ile tanışmış ve aynı zamanda araştırmaya katılan öğrencilerin matematik derslerini yürütmüştür.

Steffe ve Thompson (2000, s.275) kısa süreli öğretimin öğrencilerin düşünmeleri ve bu düşünmelerin nasıl etkilendiği hakkında somut bir anlayış için temel olmayacağını ifade etmiştir. Araştırmacı, araştırmanın gerçekleştirildiği sınıf ile beş aylık keşfedici öğretim aşaması sayesinde öğrencilerin matematiksel ön bilgi ve düşünme biçimleri hakkında bilgi sahibi olmuştur. Bu zaman sürecinde, öğrencilerin matematik dersinde bilginin oluşturulması için gerçekleştirilen sınıf-içi tartışmalarda düşüncelerini dile getirdiği, söz alan kişinin diğerleri tarafından dinlendiği, öğrencilerin birbirlerini sorguladığı, bir öğrencinin arkadaşının sunduğu açıklama ve gerekçelere katıldığı ya da karşı çıktığı yönünde bazı sınıf-içi normlar oluşturulmuştur.

Öğrencinin düşünme ve öğrenme süreçlerini analiz etme ve anlama yeterliği tanı yeterliği olarak tanımlanmıştır. Tanı yeterliğinin bileşenleri ise; öğrenci düşüncesi ile ilgili olmak, içsel bir bakış açısı ile öğrenci anlayışını yorumlamak, öğrenme süreçleri üzerine bilgi ve alana özgü matematiksel bilgiye sahip olmaktır (Prediger, 2010, s.77). Araştırmacı öğretim deneyi öncesi ve süresince tanı yeterliği bileşenlerini yerine getirmek için azami çaba göstermiştir.

Nitel araştırmanın merkezinde anlam yaratmak olduğu için Merriam ve Tisdell'in (2015, s.16) ifade ettiği gibi, temel mesele odaktaki fenomeni araştırmacının değil katılımcıların bakış açısı ile anlamak olup araştırmacı veri toplama ve analizinde temel enstrümandır.

2.2. Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Nitel araştırmalar, doğrudan bilgi kaynağı olan katılımcıların bulunduğu gerçek ortamlarda yapılır (Özden ve Saban, 2017, s.6). Bu araştırmanın katılımcılarının doğal ortamları olan matematik derslikleri nitel araştırmaya imkân veren çoklu ve öznel gerçekliklerin mevcut olduğu kümeler olup, görüşmeler, gözlemler ve dokümanların analizleri çoklu ve öznel gerçeklerin elde edileceği kaynaklardır.

Öğrencilerin üçgenler alt öğrenme alanında cebirsel muhakeme gelişiminin hedeflendiği bu araştırmada, Kaput'un cebir içerik analizi ve cebirsel muhakeme çerçevesinin (A) merkezi bakış açısı ön planda tutulmuş ve (B) merkezi bakış açısının

gitgide gelişmesi amaçlanmıştır. (B) merkezi bakış açısı cebiri kültürel bir artifakt yani başlı başına bir bilgi yumağı olarak ele alırken, (A) merkezi bakış açısı cebirsel muhakemeyi insan eylemi olarak ele almaktadır (Kaput, 2008, s.9). Kaput'un "cebirin tüm sınıf seviyeleri ve tüm konulara entegre edilmesi" (2008, s.8) hedefi ile öğretim dizisinin içeriği ve klinik görüşmelerde kullanılan problemler öğrencilerin cebirsel muhakemelerini destekleyici bir öğretim düzeneği oluşturulacak biçimde kurgulanmıştır. Öğretim dizisi, sembolik manipülasyona ağırlık verilmesinden ziyade, öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ön plana çıkarılmasının hedeflendiği bir öğretim programı olarak hazırlanmıştır. Öğretim deneyinin gerçekleşmesi öncesinde, araştırmanın yürütüldüğü sınıfın öğrencileri ile sırasıyla "mantık", "kümeler," "denklem ve eşitsizlikler" konuları işlenmiştir. Öğretim dizisinde öğrencilere yöneltilen tüm problemler cebirsel açıdan öğrencilerin eğitim öğretim yılı içinde öğrendikleri konulardır. 9. sınıf trigonometri alt başlığı trigonometri alt öğrenme alanının girişi mahiyetinde olduğu ve bu sınıf seviyesinde bir fonksiyon olarak öğretimi yapılmadığından dolayı ele alınmamıştır.

Dindyal (2007, s.2) geometri müfredatlarında "değişken" ve "bilinmeyen" kavramlarının anlayışını gerektiren cebirsel ifade yazma, ifadede yerine yazma, denklem kurma ve denklemleri çözmeye daha fazla vurgunun olduğunu ifade etmiştir. Bu araştırmanın öğretim dizisi ve klinik görüşmelerinde Kaput'un (2008) gerek (A) gerekse (B) merkezi bakış açıları ile çözülebilecek problemler yer almıştır. Öğretim dizisi, McCrory ve diğerlerinin ortaöğretimde cebir öğretimi teorik çerçevesinde öğretim uygulamalarının kategorileri olan kırpmak *(trimming)*, köprü kurmak *(bridging)* ve sıkıştırılmış olanı açmak *(decompressing)* araçları kullanılarak öğrencilerin üçgenler alt öğrenme alanında cebirsel muhakemelerini ön plana çıkaracak şekilde tasarlanmıştır.

2.3. Pilot Çalışma

Cebirsel muhakemenin üçgenler alt öğrenme alanında gelişiminin hedeflenerek tasarlandığı öğretim deneyi, araştırmanın gerçekleştirildiği okulun otuz kişiden oluşan farklı bir şubesinde 2018-2019 eğitim öğretim yılının birinci döneminde pilot çalışma olarak uygulanmıştır. Pilot çalışmanın kısımları, ana çalışma ile aynı biçimde ve aynı süre zarfında yürütülmüştür. Bunun sağlanabilmesi için sınıfın haftalık matematik ders sayısında artışa gidilmiştir. Cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testleri sonucunda bu sınıftan düşük, orta ve yüksek başarı seviyesine sahip altı adet öğrenci ile

klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Gerçekleştirilen klinik görüşmeler ve öğretim dizilerinin video ve ses kayıtları alınmış ve uzman bir matematik eğitimcisi ile analizleri yapılarak makro analizler gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmanın analizi sonucu elde edilen veriler ışığında araştırma sorularının gerekli görülen kısımlarında olumsuz faktörleri bertaraf eden iyileştirmeler yapılmıştır. Problemlerin daha anlaşılır olması için cümlelerde değişiklikler yapılması ve prototip algı oluşturabilecek çizimlerin yenilenmesi bu iyileştirmeler dahilinde gerçekleşmiştir.

2.4. Katılımcılar

Araştırma 2018-2019 eğitim öğretim yılının ikinci döneminde Eskişehir ilindeki bir devlet lisesinde öğrenim görmekte olan otuz üç kişilik bir 9. sınıfın öğrencileri ile yürütülmüştür. Araştırmanın gerçekleştiği okul, sosyo-ekonomik açıdan düşük ve orta seviyede olan bir bölgede yer almaktadır ve öğrencileri adrese-dayalı yerleştirilmiş öğrencilerden oluşmaktadır. Okulun sınıf şubeleri heterojen oluşturulmuştur. Cebirsel muhakemenin erken yaşlardan itibaren kazandırılması matematikte cebir reformunun ön koşullarından biri olduğu için, araştırma 9. sınıf seviyesinde ve yine reformun gerektirdiği matematiksel bağlantılılığın ortaya çıkarılması hedefi ile üçgenler alt öğrenme alanında gerçekleştirilmiştir.

Araştırmanın gerçekleştiği eğitim öğretim yılının birinci döneminde keşfedici öğretim yapıldığı için, matematik dersine ilgi ve tutumları, derse katılım konusunda istekleri, yorumda bulunmada girişken olmaları gibi kıstaslar açısından öğrenciler gözlemlenmiştir. Bu gözlemler dikkate alınarak araştırma öncesi uygulanmış olan cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testleri sonucunda, altı adet odak öğrenci seçilmiştir. Odak öğrenci seçiminde, cinsiyetlerin eşit temsili göz önünde bulundurulmuş ve toplam altı öğrencinin üçü kız, üçü de erkek olarak seçilmiştir. Dolayısıyla Lara ve Bora "düşük," Kayla ve Tuna "orta," Arya ve Ata "yüksek" başarı düzeyine sahip ve isimleri kodlanmış odak öğrenciler olarak belirlenmiştir. Odak öğrencilerin cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testleri sonuçları Tablo 2.1.'de verilmiştir.

Araştırmanın gerçekleştirildiği sınıfın cebirsel düşünme testi sonuçlarına göre 20 öğrencinin düşük (0-10 puan arası), 8 öğrencinin orta (11-20 puan arası), 5 öğrencinin yüksek (21-40 puan arası) başarı düzeyinde oldukları görülmüştür. Van Hiele testi

sonuçlarına göre ise 1 öğrencinin düzeyinin ölçüme uygun olmadığı, 6 öğrencinin analiz, 26 öğrencinin görsel düzeyde olduğu sonucu ortaya çıkmıştır.

Tablo 2.1. *Odak öğrencilerin cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testlerine göre seviyeleri*

Odak öğrencilerin kod isimleri	Cebirsel düşünme testi	Van Hiele geometrik düşünme testi
Bora	7/40	Görsel düzey(1/5)
Lara	8/40	Görsel düzey(1/5)
Kayla	11/40	Görsel düzey(1/5)
Tuna	13/40	Görsel düzey(1/5)
Ata	21/40	Görsel düzey(1/5)
Arya	27/40	Görsel düzey(1/5)

2.5. Araştırmanın Veri Toplama Araçları

Cebirsel muhakemenin matematiğin farklı konu alanlarında geliştirilmesinin hedeflendiği bu araştırmada veri kaynakları öğretim dizisi ve klinik görüşmelere ait ses ve video kayıtları, öğrencilerin cebirsel ve van Hiele düşünme testleri kağıtları, araştırma süresince kullandıkları çalışma kağıtları ve araştırmacı günlüğüdür. Araştırmanın veri toplama kaynakları ile ilgili ayrıntılı açıklamalar bu alt bölümde sunulmuştur.

2.5.1. Cebirsel düşünme testi

Araştırmacı tarafından hazırlanmış ve üç matematik eğitim uzmanının görüşünün alındığı cebirsel düşünme testi, temel cebirsel beceri ve muhakemeye odaklı açık-uçlu on adet sorudan oluşmuştur (EK-2). Uzman görüşü ile son halini almış olan cebirsel düşünme testi, pilot ve ana çalışma sınıflarındaki tüm öğrencilerine araştırmadan önce uygulanmıştır. Cebirsel düşünme testi soruları, cebirsel ilişkilerin kullanımı, niceliksel muhakeme, sayı örüntülerini genelleme, temsiller arası geçiş ve sembolik manipülasyon şeklinde bilgi ve becerilerin kullanımını içermiştir. Testteki her bir soru 0-4 puan arası puanlanmıştır ve süre olarak öğrencilere kırk dakika tanınmıştır.

2.5.2. Van Hiele geometrik düşünme testi

Van Hiele geometrik düşünme modeli, Dina van Hiele ve Pierra Marie van Hiele'nin Utrecht Üniversitesi'nde doktora çalışmalarının bir ürünü olup (Güven, 2006, s.9) öğrencilerin çeşitli seviyelerde geometrik düşüncelerini kavramsallaştırmak amacıyla pek çok çalışmada kullanılmıştır (Dindyal, 2007, s.1). Öğrencilerin geometride sıkıntı yaşamalarının sebebini, bulundukları veya hazır oldukları van Hiele düzeyinin

üzerinde eğitildikleri düşüncesini temel alan bir teoridir (Usiskin, 1982, s. 1). Van Hiele modeli öğrencilerin geometrik düşünmelerindeki gelişimini görsel (recognition), analiz (analysis), mantıksal çıkarım öncesi (informal deduction), mantıksal çıkarım (formal deduction) ve en üst düzey (rigour) olmak üzere beş hiyerarşik düzeyde tanımlar (Güven, 2006, s.9-14). Geometrik düşünme, hiyerarşik olarak bu beş farklı düzeyde gelişir ve bir öğrenci bir düzeyden diğerine sırasıyla ve herhangi bir düzeyi atlamadan ilerler. Bir seviyeden diğerine ilerleme, bireyin olgunluğuna bağlı değil, öğretme ve deneyimin sonucudur (Haj-Yahya, 2019, s.2). Van Hiele geometrik düşünme testi, birbirini hiyerarşik olarak takip eden beşerli gruplar halinde toplam yirmi beş sorudan oluşmaktadır. Bu araştırmada van Hiele 1-5 numaralandırılması (Senk, 1989, s.310) tercih edilmiş ve odak öğrencilerin tümünün 1. düzey olan "görsel" düzeyde oldukları gözlemlenmiştir. Görsel düzey, öğrencilerin geometrik şekilleri görünüşleri itibariyle belirleyebildikleri ancak tanımlarına bağlı kavrayamadıkları düzeydir (Usiskin, 1982, s.4). Van Hiele testi için öğrencilere kırk dakikalık süre tanınmıştır.

2.5.3. Öğretim dizisi

Öğretim deneyinin kompartımanlarından olan öğretim dizileri, haftada altı saat olmak üzere beş ve üç haftalık iki etapta gerçekleştirilmiştir. Öğretim dizisinin amacı, üçgenler alt öğrenme alanına ait kazanımları gerçekleştirmek ve bu süreçte öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ön plana çıkarılmasını sağlamaktır. Öğrencilerin üçgenler alt öğrenme alanına ait ilişkileri keşfetmelerine yardımcı olması için Cabri Geometry II [CG-II] yazılımı kullanılmıştır. Öğretim dizileri toplamda yüz yirmi üç adet problemin otuz üç kişilik sınıf içinde tartışılması ve çözümü şeklinde gerçekleşmiştir. Ayrıca bu öğretim dizileri, biri sınıfın genelini diğeri de akıllı tahtayı ve yazı tahtasını gören iki adet video kamera ile kayıt altına alınmıştır. Öğretim dizileri süresince odak öğrencilerin konuşmaları ses kayıt cihazları ile kaydedilmiştir. Öğretim dizisindeki problemlerde kullanılan dil ve terminoloji, geometrik nesneleri temsil etmekte kullanılan sembolik temsiller ve çizimlerin prototip algılara yol açmaması açısından araştırmacı tarafından dikkat ve özenle hazırlanmış ve pilot çalışma sonrasında gerekli görülen düzenlemeler ile iyileştirilmiştir. Birinci ve ikinci etap öğretim dizilerine ait haftalık ders planları ayrıntılı olarak sırasıyla EK-4 ve EK-5'te verilmiş olup birinci ve ikinci etap öğretim dizilerinin haftalık bazda amaçları ve içerikleri sırasıyla Tablo 2.2. ve Tablo 2.3.'de sunulmuştur.

Tablo 2.2. *Birinci etap öğretim dizisinin haftalık amaç ve içeriği*

HAFTA	AMAÇLAR	İÇERİK
Birinci hafta	❖ CG-II yazılımını tanıtmak. ❖ Yöndeş açıların ölçülerinin eşit oluşunu dinamik geometri yazılımı ile göstermek. ❖ Paralel doğru denklemlerini hatırlatmak. ❖ Paralel iki doğrunun bir ya da daha fazla kesen ile kesildiğinde oluşan açılar ile ilgili problem çözmek. ❖ Doğruda açı ile ilgili problem çözerken kullanılacak geometrik ve cebirsel araçları tanıtmak. ❖ Üçgenin temel elemanlarının temsillerini tanıtmak. ❖ Üçgen ve açının tanımları ve üçgenin iç açıları toplamı ispatının öğrenciler tarafından keşfedilmesini sağlamak.	▪ Doğruda ve üçgende açılar ▪ Üçgenin temel elemanları ▪ Üçgenin iç açıları toplamının ispatı
İkinci hafta	❖ Üçgenin dış açılarını belirlemek. ❖ Üçgenin dış açılar toplamının cebirsel kanıtını yapmak. ❖ Bir üçgende "iki iç açının toplamı bunlara komşu olmayan açının dış açısının ölçüsüne eşit olması" özelliğini öğrencilerin keşfetmesini sağlamak. ❖ Kenarlarına göre üçgenlerde açılar ile kenarlar arasındaki ilişkileri tanıtmak. ❖ Üçgende açı ile açının gördüğü kenar arasındaki ilişkiyi değerlendirmek.	▪ Üçgende açılar ▪ Kenarlarına göre üçgenlerde açılar ▪ Üçgende açı ve kenar ilişkileri
Üçüncü hafta	❖ Üçgen eşitsizliğine duyulan ihtiyacı CG-II yazılımı ile öğrencilerin hissetmesini sağlamak. ❖ Üçgen eşitsizliğini tanıtmak. ❖ Üçgen eşitsizliği ve üçgende açı-kenar ilişkilerinden oluşan ilişkileri değerlendirme becerisini geliştirmek. ❖ Üçgen eşitsizliğini problemlerde kullanmak. ❖ Üçgende açı ve açı - kenar ilişkileri ile ilgili problemler çözmek. ❖ Üçgenin yardımcı elemanları ile bu yardımcı elemanlarının ait olduğu kenarların uzunlukları arasındaki ilişkinin CG-II yazılımı yardımıyla öğrencilere sezdirmek ve bu ilişkilerin öğrenciler tarafından genellenmesini sağlamak.	▪ Üçgen eşitsizliği ▪ Üçgenin kenar ve açıları arasındaki ilişkiler ▪ Üçgende açı ve açı – kenar ilişkileri ile ilgili problemler ▪ Üçgenin yardımcı elemanları ile bu yardımcı elemanlarının ait olduğu kenarların uzunlukları arasındaki ilişki
Dördüncü hafta	❖ İki üçgenin eş olması gereken koşulları fark etmelerini sağlamak ❖ Üçgenlerde eşlik aksiyomlarını öğrencilerin kavramalarını sağlamak. ❖ Eş üçgenlerle ilgili aksiyomları ve eşlik bağıntılarını kurarak problem çözebilmek.	▪ Üçgenlerde eşlik aksiyomları ▪ Eşlik aksiyomları ile ilgili problemler
Beşinci hafta	❖ İki üçgenin benzer olması gereken koşulları incelemek. ❖ Üçgenlerde benzerlik teoremlerini öğrencilerin kavramasını sağlamak. ❖ Üçgenlerde benzerlik ile eşlik arasındaki farkı anlamalarını sağlamak. ❖ Benzer üçgenlerle ilgili teoremleri ve benzerlik bağıntılarını kurarak problem çözebilmek. ❖ Üçgenlerde eşlik ve benzerlik bağıntılarını yazabilmek. ❖ Üçgende orantılı doğru parçaları teoremini kavramak ve problem çözmek. ❖ Thales teoremini kavramak.	▪ Benzerlik teoremleri ▪ Benzerlik teoremleri ile ilgili problemler ▪ Orantılı doğru parçaları teoremi ▪ Thales teoremi

Tablo 2.3. *İkinci etap öğretim dizisinin haftalık amaç ve içeriği*

HAFTA	AMAÇLAR	İÇERİK
Birinci hafta	❖ Üçgende benzerlik teoremlerini kullanarak problem çözmek. ❖ Üçgenin bir kenarına paralel ve diğer iki kenarı kesecek şekilde çizilen doğrunun ayırdığı doğru parçaları arasındaki ilişkiyi kurabilmek. ❖ Temel orantı teoremini kullanarak problem çözmek. ❖ Bir üçgende iç ve dış açıortayı tanıtmak. ❖ Açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına olan uzaklıklarının eşit olduğunu keşfetmek. ❖ Açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına indirilen dikme ayakları ile açının köşesine olan uzaklıkların eşit olduğunu keşfetmek. ❖ Açıortaya ilişkin özellikleri tersine işletmek.	▪ Benzerlik teoremleri ile ilgili problemler ▪ Orantılı doğru parçaları teoremi ▪ Orantılı doğru parçaları teoremi ile ilgili problemler ▪ İç açıortay ▪ Dış açıortay ▪ Açıortayın özellikleri ▪ İç ve dış açıortay teoremleri ▪ Kenarortay ve ağırlık merkezi.
İkinci hafta	❖ İç ve dış açıortay teoremlerini tanıtmak. ❖ Üçgende kenarortayı tanıtmak ve ağırlık merkezini oluşturan koşulları incelemek. ❖ Üçgende kenarortay ile ilgili problem çözebilmek. ❖ Üçgende kenarortay uzunluğunu formül yardımıyla bulabilmek. ❖ Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay ile dik kenarlar arasındaki ilişkiyi tanıtmak. ❖ Üçgende kenar orta dikmeyi tanıtmak. ❖ Üçgende çevrel çemberi ve özelliklerini tanıtmak. ❖ Üçgende yüksekliği tanıtmak. ❖ Üçgende diklik merkezi ve özelliklerini tanıtmak. ❖ İkizkenar üçgende yardımcı elemanların özelliklerini tanıtmak. ❖ 30°- 60°- 90° üçgeninin özelliklerini tanıtmak.	▪ Kenarortay uzunluğu ▪ Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay ile dik kenarlar arasındaki ilişki ▪ Kenar orta dikme ▪ Üçgenin çevrel çemberi ▪ Üçgende yükseklik ▪ Diklik merkezi ▪ İkizkenar üçgende yardımcı elemanlar ▪ 30°- 60°- 90° üçgeni
Üçüncü hafta	❖ Üçgende yükseklik ile ilgili problem çözebilmek. ❖ Eşkenar üçgende yardımcı elemanların özelliklerini tanıtmak. ❖ Dik üçgende Öklid bağıntılarını tanıtmak. ❖ Öklid bağıntısının açı-açı benzerlik teoreminden elde etmek. ❖ Üçgende alan formülünün gereksinimlerini tanıtmak. ❖ Alanların benzerlik oranını keşfetmek. ❖ Üçgende alan ile ilgili problem çözebilmek.	▪ Eşkenar üçgende yardımcı elemanlar ▪ Öklid bağıntıları ▪ Üçgende alan ▪ Benzer üçgenlerin alanları

Öğretim dizisinin uygulanması sırasında yaşanan sıkıntılar ders esnasında giderilmeye çalışılmış ve izleyen dersler için bazı tedbirler alınmıştır. Örneğin öğrencilerin değişkenin ait olduğu kümeyi değerlendirmekte zorlanmaları üzerine, bir reel sayı değişkeninin bir aralıkta sonsuz değer alabileceği geometrik temsil ile açıklanmış ve temsiller arası farkı keşfetmeleri sağlanmıştır.

Bu araştırmada benimsenen öğretim deneyinin bağlamı GBA ekseninde olduğu için, öğrencilerin bireysel kazanımları sınıf-içi etkileşim ile şekillenmiştir. Açıklamada bulunma, argümantasyon ve doğrulama eylemlerini öğrencilerin matematik öğrenme süreçlerinde alışkanlık haline getirmelerini sağlamak amacıyla sosyal ve sosyo-matematiksel normlar oluşturulmaya çalışılmıştır. Geometrik kavramlara ilişkin özelliklerde ve problem çözümlerinde düşünce veya sonuçlarını açıklamaları, farklı bakış açıları veya çözüm yöntemleri sunmaları, düşünceleri veya çözümlerinde farkı oluşturan unsurlar üzerine yorumda bulunmaları ve birbirlerini dinleyerek görüşleri onaylama ya da karşı çıkma durumları gibi normlar açısından öğenciler teşvik edilmiş ve böylece entelektüel ve sosyal otonomilerinin gelişimine katkıda bulunma amacı güdülmüştür.

2.5.4. Klinik görüşmeler

Öğretim deneyinin bir diğer kompartımanı olan klinik görüşmeler ile araştırmacı, öğrencilerin çevreleriyle etkileşim yoluyla edindikleri deneyimden soyutlayabilecekleri yapısal örüntüleri belirleme imkanı sağlar (Cobb ve Steffe, 1983, s.84). Üçgenler alt öğrenme alanında cebirsel muhakenin geliştirilmesi amacıyla, bu araştırmada odak öğrenciler ile ön, ara ve son olmak üzere üç adet klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelerde kullanılan problemler uzman bir matematik eğitimcisi ile hazırlandıktan sonra iki uzman matematik eğitimcisi tarafından değerlendirilmiştir. Araştırmanın amaçları doğrultusunda klinik görüşme problemleri, çoklukları harflerle temsil ederek genellemeye imkan verecek şekilde ve niceliksel ilişkilerin yoğun olduğu biçimde tasarlanmıştır. Schoenfeld (1985) problemi alıştırmadan ayıran özellikleri, rutin ve pekişmiş metotlar ile çözülememesi ve düşünme gerektirmesi olarak ifade etmiştir. Bu görüş ile uyumlu olarak klinik görüşmelerde kullanılan soruların cebirsel muhakeme ve geometrik düşünme gerektirmesinden dolayı birer problem olduğu söylenebilir. Klinik görüşmeler öğrencilerin entelektüel özerklik seviyeleri hakkında araştırmacıya bilgi vermiştir.

Odak öğrenciler ile gerçekleştirilen her bir klinik görüşme kırk dakika sürmüştür ve görüşmelerin ses ve video kayıtları alınmıştır. Klinik görüşme problemleri bulgularda sunulmuştur. Tablo 2.4.'de klinik görüşme problemlerinin amaç ve içeriğine dair bilgi sunulmuştur.

Tablo 2.4. *Klinik görüşme sorularının amaç ve içeriği*

KLİNİK GÖRÜŞMELER	PROBLEMLERİN AMACI	İÇERİK
ÖN KLİNİK GÖRÜŞME	**1. Problem** - Paralel iki ışın ve bu ışınları kesen iki doğru parçası ile oluşan açılar arasındaki ilişkiyi cebirsel olarak keşfetmek. **2. Problem** - Sayı küme bilgisi ve eşitsizlik bilgilerini devreye sokarak üçgenin çevresi ve üçgen eşitsizliği bilgilerini ve geometrik temsil kullanmak. **3. Problem** - İki iç açıortayın kesişimi ile oluşan açı ile üçgenin diğer açısı arasındaki cebirsel ilişkiyi elde etmek. **4. Problem** – Değişkenler ile temsil edilen açılar arasındaki eşitsizlik ilişkisinin iç açılar toplamından faydalanarak değerlendirilmesi.	**1. Problem** –Doğruda açı **2. Problem** – Üçgen eşitsizliği **3. Problem** – Üçgende açı **4. Problem** – Üçgende açı
ARA KLİNİK GÖRÜŞME	**1. Problem** – Kenar uzunluklarının değişkenler ile temsil edildiği üçgenin çevresini ifade edebilmek, üçgen eşitsizliği ve geometrik temsil kullanmak. **2. Problem** - Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin dik koordinat sisteminde geometrik olarak temsil edilmesi yeterliliği ve bu sistemi oluşturan doğrular ile x-ekseni arasında kalan üçgensel bölgenin alanını bulmak. **3. Problem** - İkizkenar üçgende tepe açısına ait kenarortayın aynı zamanda açıortay ve yükseklik olduğu bilgisinin elde edilmesi.	**1. Problem** – Üçgen eşitsizliği **2. Problem** – Temsiller arası geçiş ve üçgende alan **3. Problem** – İkizkenar üçgende yardımcı elemanlar
SON KLİNİK GÖRÜŞME	**1. Problem** - Üçgenlerde benzerlik bağıntısını verilen oran-orantı ilişkilerini kullanarak oluşturmak. **2. Problem** – Üçgende açı-kenar ilişkilerini elde ederek mutlak değerli ifadenin değerine ulaşmak. **3. Problem** - Ağırlık merkezinin üçgenin kenar ve köşelerine olan uzaklıkları arasındaki ilişkiyi oran ilişkisinden faydalanarak elde etmek. **4. Problem** - aynı tabana ait yüksekliğe sahip üçgenlerde alanın taban uzunluğu ile orantılı olması bilgisinin kullanılması.	**1. Problem** - Benzerlik **2. Problem** – Açı-kenar ilişkisini mutlak değere uygulama **3. Problem** - Kenarortay **4. Problem** – Üçgende alan

2.6. Verilerin Analizi

Tek bir gözlem öğrenme göstergesi olarak alınamaz, çünkü değişim bir noktadan diğerine geçiş olduğu için farklı zamanlarda en az iki gözlem gerektirir (Steffe ve Thompson, 2000, s.300). Dolayısıyla bu araştırmada yöntem olarak benimsenmiş olan

öğretim deneyi süresince, sürekli ve geriye dönük olmak üzere iki boyutta analiz gerçekleştirilmiştir. Öğretim dizisinin yürütülmesi süresince sürekli analizler ve öğretim deneyi sonrasında tüm veriler üzerinde geriye dönük analizler yapılmıştır.

Kaput'un iki merkezi bakış açısı altında öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin gelişimi ve cebir reformunun matematiğin bağlantılı yapısının anlaşılmasındaki rolünün analizi bu araştırmanın temelini oluşturmaktadır. Öğretim deneyinin bileşenleri olan öğretim dizisi ve klinik görüşmelere ait kayıtlar, sınıf-içi gözlemler ve araştırmacı günlüklerinden oluşan nitel veri kaynaklarının analizi içerik analizi ile gerçekleştirilmiş olup toplanan verileri açıklayabilecek kavram ve ilişkilere ulaşılmaya çalışılmıştır. İçerik analizi; hem görüşmelerin hem alan notlarının hem de yazılı dokümanlarda bulunan içeriklerin sistematik ve bütünsel bir amaca uygun olarak yapılan analizidir (Bal, 2016, s.258). Temel olarak içerik analizlerinde, belirli içeriklerde belirli özelliklerin bulunup bulunmadığı ve/veya ne sıklıkta bulunduğu saptanmaktadır (Türer, 1991, s.321). Analiz sürecinde; 1. verilerin kodlanması, 2. temaların oluşturulması, 3. temaların düzenlenmesi, 4. bulguların tanımlanması ve yorumlanması (Corbin ve Strauss, 2007) aşamaları izlenmiştir.

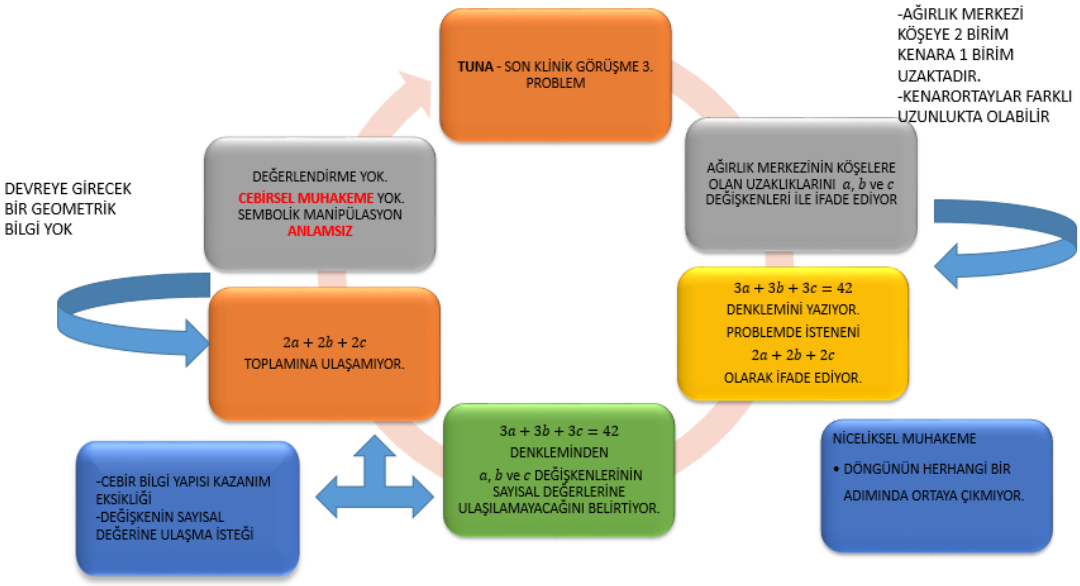
Öğretim deneyleri; kavramsal yapılar ve öğrenme ya da gelişim olarak kabul edilen değişim türlerinin modelleri ile ilgilenir (Steffe ve Thompson, 2000, s.298). Bu araştırmanın sürekli ve geçmişe yönelik analizleri öğrencilerin özümseme, uyum, potansiyel oluşum, iletişim, gelişim, etkileşim ve zihinsel şemaları üzerine sunduğu veriler araştırmacının model oluşturmasında rol oynamıştır.

Araştırmada elde edilen bulguların analizi sonucunda Şekil 2.2.'de sunulan model elde edilmiştir. Problem durumunda, öğrencinin bilinmeyenlere değişken atamak suretiyle başlattığı çözüm sürecinde geometrik bilgisini devreye sokarak denklem veya eşitsizlik oluşturması söz konusudur. Denklem veya eşitsizliğe uygulayacağı sembolik manipülasyon, genelleştirilmiş aritmetiksel muhakemeden ve cebir bilgi yapısından beslenir. Sembolik manipülasyon neticesinde değişken için elde ettiği sayısal değer, aralık ya da bir başka değişkeni problem durumu ile değerlendirmesi öğrencinin anlamlı sembolik manipülasyon gerçekleştirdiğine işaret etmektedir ve bu durumda cebirsel muhakemenin varlığı söz konusudur. Bu döngünün herhangi bir adımında ortaya çıkabilecek niceliksel muhakeme de öğrencinin cebirsel muhakemesinin varlığına işaret eder.



Şekil 2.2. *Bulguların analizi sonucunda elde edilen model*

Şekil 2.3.'de, odak öğrenci Tuna'nın son klinik görüşmenin üçüncü problemini çözmesi model dahilinde izah edilmiştir.



Şekil 2.3. *Odak öğrenci Tuna'nın son klinik görüşmenin üçüncü problemi çözüşünün analizi*

Odak öğrenci Tuna, son klinik görüşmenin üçüncü probleminde kenarortay uzunluklarının farklı olma ihtimalini gözeterek kenarortay uzunluklarını farklı

değişkenler ile temsil etmiş ve ağırlık merkezinin kenarortayı hangi oranlarda böldüğü bilgisini devreye sokarak çözüme başlamıştır. Öğrenci kullandığı değişkenler ile kenarortay uzunlukları toplamını bir denklem ve problemde istenileni cebirsel bir ifade ile matematiksel olarak ifade etmiştir. Ancak öğrencinin oran kavrayışındaki eksiklik ve kullandığı değişkenlerin tek tek sayısal değerine ulaşma isteği, öğrencinin problemde istenilene ulaşmasına engel olmuştur. Niceliksel muhakemenin döngünün herhangi bir adımında ortaya çıkmadığı da gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisi esnasında gerçekleşen sınıf-içi tartışmaların döngüyü kolektif olarak tamamlamalarında etkisi olacağı düşünülmüştür.

2.6.1. Analiz temaları

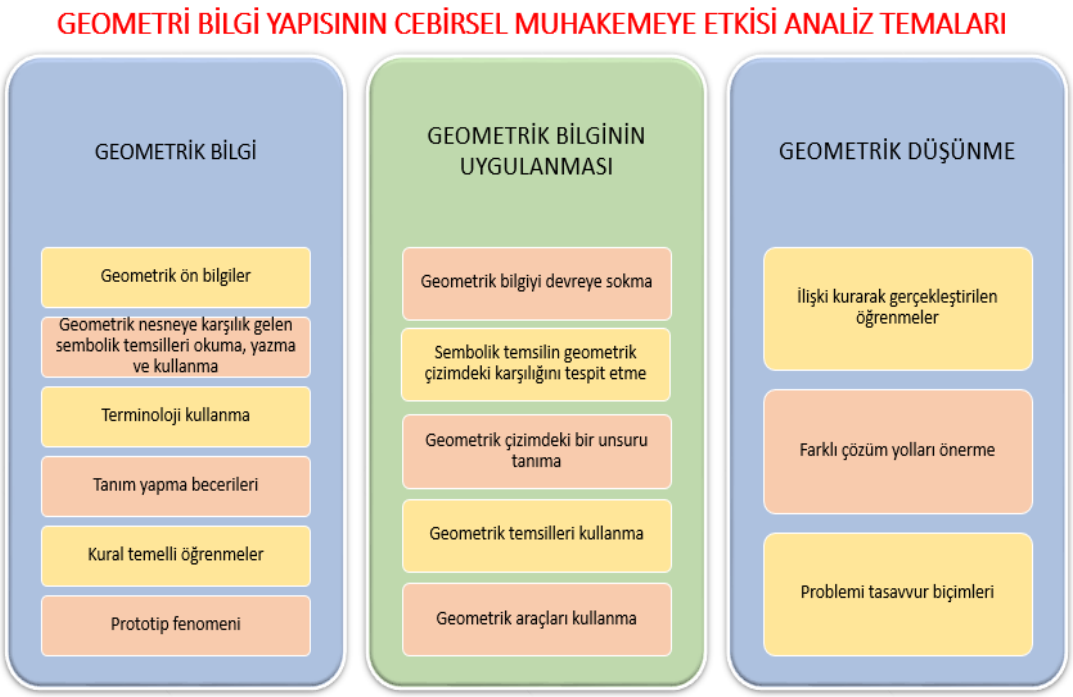
Cebir reformunun matematiğin bağlantılı yapısının ortaya çıkarılması ayağı üzerine temellendirilmiş bu araştırmada elde edilen bulgular iki boyutta incelenmiştir. Bu boyutlardan biri öğrencilerin üçgenler alt öğrenme alanında sahip oldukları bilgi yapısının cebirsel muhakemelerini nasıl etkilediği iken, diğer boyut öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapılarını nasıl etkilediğidir. Dolayısıyla bulgular geometri ve cebir bilgi yapısı ana çatıları altında analiz edilmiştir.

2018–2019 eğitim öğretim yılı 9. sınıflar matematik öğretim programında, denklem ve eşitsizlikler alt öğrenme alanı üçgenler alt öğrenme alanından önce verilmiştir. Denklem ve eşitsizlik alt öğrenme alanında değişken, denklem ve eşitsizlik kavramları Kaput'un cebir içerik analizi ve cebirsel muhakeme teorik çerçevesi temel alınarak kazanım gerçekleştirilmeye çalışılmıştır. Geometri bilgi yapısı ise, öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında belirli bir ölçüde edindikleri üçgen kazanımları ve 9. sınıf "Üçgenler" ünitesinde kazanımının sağlanmasının amaçlandığı bilgi yapısıdır.

2.6.1.1. Geometri bilgi yapısı analiz temaları

Bu araştırmada, geometri bilgi yapısı bileşenlerinde gözlemlenecek gelişimin öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin gelişimini de destekleyeceği düşünülmektedir. Geometri bilgi yapısını oluşturan alt temalar; geometrik bilgi, geometrik bilginin uygulanması, geometrik düşünmedir. Geometrik bilgi alt temasının bileşenleri; geometrik ön bilgiler, geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsilleri okuma, yazma ve kullanma, terminoloji kullanma, tanım yapma becerileri, kural temelli öğrenmeler ve

prototip fenomenidir. Geometrik bilginin uygulanması alt teması; geometrik bilgiyi devreye sokma, sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme, geometrik çizimdeki bir unsuru tanıma, geometrik temsil ve araçları kullanma bileşenlerini içermektedir. Geometrik düşünme alt teması kapsamında ise; ilişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler, farklı çözüm yolları önerme ve öğrencilerin problemi tasavvur biçimleri yer almaktadır. Şekil 2.4.'de geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi analiz temaları sunulmuştur.



Şekil 2.4. *Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi analiz temaları*

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında edindikleri geometrik ön bilgilerinin incelendiği bileşendir.

- Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsilleri okuma, yazma ve kullanma: Geometrik kavramların öğretimi ve problem metinlerinde geometrik nesneye işaret eden sembolik temsillerin öğrenciler tarafından hangi kavrama karşılık geldiğini bilmeleri ve bu temsilleri yazılı ifade edişleri bu bileşende incelenmiştir. Son klinik görüşmenin birinci probleminde odak öğrenci Ata'nın $m(\widehat{DBR}) = m(\widehat{RKL})$ sembolik temsilini "$mDBR$ üçgeni eşittir $mRKL$ üçgeni" olarak okuyarak DBR ve RKL üçgenlerine ait

benzerlik bağıntısının verilmiş olduğunu düşünmesi bu alt bileşene örnek olarak verilebilir.

- Terminoloji kullanma: Öğrencilerin geometrik kavrama karşılık gelen terimleri kullanma durumlarını incelemek için kullanılmıştır. Bora'nın ara klinik görüşmede "tepe açısı" terimine vakıf olmayışının sözel genellemede bulunmasına engel olması, terminoloji kullanımı bileşenine örnek teşkil etmiştir.

- Tanım yapma becerileri: Tanımlar bir matematiksel kavramın oluşturulmasında, diğer kavramlardan ayırt edilmesinde veya matematiksel düşüncelerin ifade edilmesinde temel teşkil ederler (Çakıroğlu, 2015, s.1). Bu bileşende öğrencilerin geometrik kavramlara ilişkin yaptıkları tanımların informal veya formal oluşu incelenmiştir.

- Kural temelli öğrenmeler: Geometrik özelliklerin çoğunlukla bir nesneye benzetme yoluyla veya hatırda kalacağı düşünülen kelime öbekleri ile sunulması olarak tanımlanabilir. Öğrencilerin, birbirine paralel iki doğrunun bir kesen ile kesilmesi ile oluşan görüntüyü "Z kuralı" veya hipotenüse ait kenarortay uzunluğunun hipotenüs uzunluğunun yarısı olmasına "muhteşem üçlü" olarak adlandırmaları kural temelli öğrenmelere örnek teşkil etmiştir.

- Prototip fenomeni: Fujita (2012, s. 60) ortalamanın üzerindeki öğrencilerin yarısından fazlasının, doğru tanımları bilseler bile, dörtgenleri prototip örneklerle tanıma eğiliminde olduğunu ifade etmiştir. Prototip fenomeni bileşeni öğrencilerin prototip algılarının geometrik kavram kazanımı ve problem çözmeleri üzerindeki tesirini incelemek için kullanılmıştır.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında edindikleri yanlış kazanımların yerine alan ve öğretim dizisi boyunca edindikleri geometrik kazanımları problemlerde kullanabilme durumlarını analiz etmek amacıyla kullanılmıştır.

- Sembolik temsilin çizimdeki karşılığını tespit etme: Problem metinlerinde veya geometrik kavramların tanımlarında verilen sembolik temsillerin geometrik çizimde hangi nesneye karşılık geldiğini kavrama becerilerini incelemek amacıyla kullanılmıştır.

- Geometrik çizimdeki bir unsuru tanıma: Öğrencilerin üzerinde yapıların kurulu olduğu bir unsuru tanıma durumlarının analizi için kullanılmıştır. Örneğin üçgende ağırlık merkezi olduğu belirtilmemiş bir noktanın ağırlık merkezi olmasını, noktaya atfedilen diğer özelliklerden çıkarsama.

- Geometrik temsilleri kullanma: Geometrik çizimin verilmediği problemlerde öğrencilerin geometrik temsilleri kullanma biçimlerini inceleme amacıyla kullanılmıştır.

- Geometrik araçları kullanma: Geometrik bilginin kullanımı için öğrencilerin paralel doğrulara paralel bir diğer doğru çizmek, doğru parçasını uzatmak gibi çizim üzerinde yaptıkları değişikler için kullanılmıştır. Örneğin, Lara'nın ön klinik görüşmenin birinci problemindeki çizimde a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşelerden geçen bir doğru parçası çizerek çizimi tanıdığı iki cisme ayırması.

Geometrik Düşünme

- İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler: Öğretim dizisi süresince öğrencilerin edindikleri geometrik kavram kazanımları arasında kurdukları ilişkileri analiz etmek amacıyla kullanılmıştır. CG-II yazılımında açıortay doğrusu çizme aracını Meltem'in açının ölçüsünü hesaplama eylemine benzer şekilde gerçekleştirmesi kavramlar arasındaki ilişkinin doğru bir şekilde oluşturulmasına örnek iken, Ata'nın farklı üçgenlerde eş ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit olacağı ilişkisini kurması yanlış kurulan bir ilişki örneği olarak gerçekleşmiştir.

- Farklı çözüm yolları önerme: Öğrencilerin problem için alternatif çözüm yolu geliştirmelerini incelemek için kullanılmış bir alt temadır.

- Problemi tasavvur biçimleri: Geometrik çizimin verilmediği problemlerde öğrencilerin gerçekleşecek geometrik nesneyi zihinlerinde nasıl canlandırdıklarını analiz etmek için kullanılmıştır. Bu bileşen, ara klinik görüşmenin ikinci probleminde ortaya çıkmıştır.

2.6.1.2. Cebir bilgi yapısı analiz temaları

Kaput'un cebirin içerik analizi ve cebirsel muhakeme teorik çerçevesinin (A) ve (B) merkezi bakış açılarını gerçekleştirmede rol oynayan analiz temaları Şekil 2.5.'de sunulmuştur. Cebirsel muhakemeyi oluşturan alt temalar; genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme, niceliksel muhakemedir. Genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme alt temasında; aritmetik ön bilgiler, sayı kümeleri bilgisi, aritmetik işlem becerileri, işlemlerin özelliklerini kullanma becerileri, 0 sayısının özellikleri, eşitliğin misyonları ve eşitlik ile eşitsizliğin özellikleri ele alınmıştır. Cebirsel ön bilgiler, temsiller arası geçiş yapabilme, cebirsel özellik kullanma ve denklem kurma bileşenleri ise cebir bilgi yapısı alt temasında incelenmiştir. Sembolik manipülasyon alt temasında; sembolik temsilleri kullanma, cebirsel işlem

becerileri, değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme, değişkenin doğasını anlama, değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği, sembolik manipülasyon becerileri ele alınmıştır. Öğrencilerin genelleme becerileri; sözlü genellemede bulunma, genellemeyi doğrulama ile genellemeyi matematiksel olarak ifade etme kapsamında incelenmiştir. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi analiz temalarından niceliksel muhakeme ise, başlı başına bir alt tema olarak ele alınmıştır.



Şekil 2.5. *Cebirsel muhakemenin geometriye etkisi analiz temaları*

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

Genelleştirilmiş aritmetik, sayılarla ilişkili işlemler ve özellikler hakkında akıl yürütmektir. Aritmetiği genellemek, sayılar üzerindeki hesaplamaların ötesine geçerek, aritmetikte bulunan örüntüleri belirlemek suretiyle aritmetiğin temelindeki matematiksel yapı hakkında düşünmekle ilgilidir (Carpenter, Franke ve Levi, 2003).

- Aritmetik ön bilgiler: Aritmetik bilinenden bilinmeyeni bulmaktır (Bednarz, Kieran ve Lee, 1996) ve aritmetikte başarı için cebirsel düşünme gereklidir, yani cebir ve aritmetik birbirine örülüdür (Mason, 2008, s.79-80).

- Sayı kümeleri bilgisi: Schoenfeld ve Arcavi'ye (1988, s. 423) göre değişkeni kavramak değişkenin tanım kümesi kavramına bağlıdır ve birini anlamadan diğerin anlamak zordur.

- Aritmetik işlem becerileri: Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında edindikleri aritmetik işlem becerilerini analiz etmek için kullanılmış alt bileşendir.

- İşlemlerin özelliklerini kullanma becerileri: Değişme, birleşme, dağılma, birim ve ters eleman özellikleri ezber süreçlerinin ötesinde büyüklükler arasındaki ilişkiler ve işlemler ile ilgili anlayışı destekler (Venenciano vd., 2020, s.41). İşlemlerin özelliklerini anlamak sayısal işlemlere özgü yapısal ilişkilere odaklanmayı sağlar. Öğrencilerin özellikle sembolik temsillerin bulunduğu ifadelerde işlemlerin özelliklerini kullanma becerileri bu alt temada incelenmiştir.

- 0 sayısının özellikleri: Cankoy (2010, s.753) diğer sayılara nazaran 0 sayısının öğretiminde daha dikkatli bir planlamanın yapılması gerektiğini belirtmiştir.

- Eşitliğin misyonları: Prediger (2010, s.81) "eşit sembolü"nün misyonunun üç farklı şekilde ele alındığını ifade etmiştir; hesaplamanın gerekli olduğu yani işlemsel misyon, iki çokluk veya ifadenin denk olduğu yani ilişkisel misyon, bir niceliğin tanımlandığı yani belirtim misyonu.

- Eşitlik ve eşitsizliğin özellikleri: Dougherty (2008, s.393, 412) eşitliğin temel özelliklerinin yansıma, simetri ve geçişme olarak ifade etmiş ve ilköğretim matematiğinin sayı-merkezli yaklaşımdan matematiksel yapı yaklaşımına dönüştürülmesini savunmuştur. Eşitsizlikler matematiğin birçok öğrenme alanında önemli rol oynar ve didaktik zorlukları bünyesinde bulundurur (Bazzini, Boero ve Garuti, 2001; Bazzini ve Tsamir, 2001).

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında edindikleri cebirsel ön bilgilerinin incelenmiş olduğu bileşendir.

- Temsiller arası geçiş yapabilme: Kaput (1985, s.383) temsili, sembol ile göndergesi arasındaki bir çeşit ilişki olarak tanımlar ve pek çok araştırmacı matematik eğitiminde çoklu temsillerin önemi üzerinde durmuştur (Tall, 1992; Vinner, 1983; Venenciano vd, 2010). Nitekim odak öğrenciler ara klinik görüşmenin ikinci probleminde verilen denklemlerin birer doğru temsil ettiğini ifade etmişler, ancak dik koordinat sisteminde temsil edememişlerdir.

- Cebirsel özellik kullanma: Öğrencilerin cebirsel özellikleri problem çözümlerinde kullanış biçimlerini incelemek için kullanılmış alt bileşendir.

- Denklem kurma: Matematiksel denklem nesnesi; denklik ilişkisinin formal özellikleri ve bunları bünyesinde birleştiren yapısı ile aritmetik sayılar, değişkenler,

operatörler, eşit işareti gibi bir dizi birbirinden farklı semboller içerir. Bu yapısı ile matematiksel nesneyi anlamak, ikonik görünüm üzerine çok katmanlı şematik özellikleri yerleştirmeyi gerektirir (Godfrey ve Thomas, 2008, s.89).

Sembolik Manipülasyon

Sembolik manipülasyonu anlamlı hale getirerek öğrencinin doğal dil ve biliş gücünü dikkate alarak cebirsel muhakemeyi merkeze almanın hedeflendiği bu araştırmada aşağıdaki bileşenlere odaklanılmıştır.

- Sembolik temsilleri kullanma: Weinberg, Dresen ve Slater'a (2016, s.70) göre öğrencilerin matematiksel kavramlarla tam olarak ilgilenmeleri ve matematikte ilerlemeleri açısından cebirsel sembolleri akıcı bir şekilde kullanmaları gerekir. Malle (1993) değişkenin beş yorumunu şu şekilde belirlemiştir: i) yer tutan - yerine koyma yönüyle, ii) bilinmeyen - durumsal yönüyle, iii) genelleştirilmiş büyüklük - durumsal yönüyle, iv) anlamsız sembol - hesaplama yönüyle, v) değişen çokluk/nicelik - fonksiyon yönüyle.

- Cebirsel işlem becerileri: Öğrencilerin cebirsel süreçleri yönetirken gerçekleştirdikleri eylemleri incelemek için kullanılmıştır.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme: Ferrini-Mundy, Floden ve McCrory (2003, s.21) cebirsel ifade ve eşitlik kavramları ile örülmüş olan doğrusal ilişki kavramının okul cebirinde önemli yer tuttuğunu ifade etmişlerdir. Bu araştırmada değişkenlerin birbiri cinsinden ifade edilmesi olarak adlandırılan doğrusal ilişki kavramı, öğrencilerin sonraki sınıf seviyelerinde fonksiyon kavramının öğrenimde önemli rol oynar.

- Değişkenin doğasını anlama: Schoenfeld ve Arcavi (1988, s. 421), "değişken"i değişen veya pek çok değere sahip olan, "bilinmeyen"i ise sabit bir değeri olmakla birlikte henüz bu değerin bilinmediği nesne olarak tanımlarlar. Bu araştırmada değişken terimi, i) genelliği ifade eden, ii) henüz bilinmeyen sayıya işaret eden ve iii) değişen nicelik olarak kullanılmıştır. Değişkenin doğasını anlama alt teması bilinmeyeninin doğasını anlamayı kapsayacak şekilde ele alınmıştır.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Pek çok araştırma öğrencilerin cebirsel harflerin genellenmiş bir sayı için mi yoksa bilinmeyen için mi kullanıldığının ayrımını yapamaması dahil olmak üzere bilinmeyen ve değişken kullanımında zorluk çektiğini göstermektedir (MacGregor ve Stacey, 1997, s.1). Öğrencilerin değişken kullanımında

yaşadıkları zorluk, geometrik ya da cebirsel bilgiyi devreye sokmadan değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği doğurduğu düşünülmektedir.

- Sembolik manipülasyon becerisi: Kaput'un (2008, s. 11) cebir ve cebirsel muhakeme içerik analizinin merkezi (B) bakış açısı öğrencilerin sembolik manipülasyonlarının anlamlı olarak gerçekleşmesinin önemini vurgular. Bu çalışmanın amaçlarından biri, öğrencilerin semantik sembolik manipülasyon gerçekleştirmeleri suretiyle cebirsel muhakemelerini geliştirmeye yardımcı olmaktır. Öğrencilerin gerçekleştirdikleri sembolik manipülasyon sonucunda elde ettiklerini geometrik çizim üzerinde değerlendirme becerileri de anlamlı sembolik manipülasyon kapsamında ele alınmıştır. Ata'nın son klinik görüşmenin birinci probleminde doğru parçaları arasında elde ettiği orantı ilişkisini çizim üzerinde değerlendirmesi orantı ilişkisini problemin ikinci şıkkında rahat bir şekilde kullanabilmesini sağlamıştır.

Genelleme

Sfard (1995, s.18) cebiri aritmetikten farklı kılan özelliklerden en göze çarpanın genelleme olduğunu ifade etmiştir.

- Genellemede bulunma (sözlü): Öğrencilerin genelleme yapmalarını sağlamak için öğretmenlerin öğrencileri harekete geçirmesi gerekir; matematiksel kavram ile ilgili belirli durumları vermek, metot öğretmek ve örnek sunmak yeterli olmaz (Mason, 2008, s. 64).

- Genellemeyi doğrulama: Argümantasyon ve doğrulamanın olmadığı ortamlarda cebir öğrenme zorluğu ortaya çıkar (Clement, Lochhead ve Monk, 1981; Kaput, Blanton, Moreno, 2008). Araştırma süresince öğrencilerin argümanlar sunmaları ve bu argümanları doğrulama ve çürütme becerileri geliştirmeleri hedefler arasında yer almıştır.

- Genellemeyi matematiksel olarak ifade etme: Bu kavram, sembolik temsiller ile cebirsel yapıyı genelleme amaçlı matematiksel formda ifade etmektir.

Niceliksel Muhakeme

Sayısal olmayan çokluklar hakkında akıl yürütmek cebirsel muhakemeye temel oluşturur (Yackel, 1997, s.278). Niceliksel muhakeme modelleme içerir ve ifadeler arası çıkarım amaçlı ilişkiye odaklıdır. Cebirsel muhakemeye temel oluşturan niceliksel muhakeme, ağırlıklı olarak günlük yaşam deneyimleri üzerine kurulu olsa da kolaylıkla ve hızla gelişmez; çünkü standart bir örüntü veya geleneksel cebir çözümlerinde kullanılan değişken atama, denklem çözme gibi rutin takip etmez (Smith III ve Thompson, 2008, s.100, 105). Sfard'a (1995, s.18) göre cebirsel semboller genellemenin

olası tek aracı değildir, dolayısıyla bir rutin takip etmeyen niceliksel muhakeme cebirsel muhakemenin en ayırt edici bileşenidir. Smith III ve Thompson (2008, s.121-122) niceliksel muhakemenin gelişimi için sınıf-içi tartışmalarda sayılar üzerine değil çokluklar üzerine soruların yöneltilmesi gerektiğini ifade etmişler ve öğretmenin sahip olması gereken en merkezi becerinin ise dikkatli bir biçimde dinlemek olduğunu belirtmişlerdir.

2.7. Geçerlik ve Güvenirlik

Bir araştırmayı bilimsel kılan araştırmanın hem geçerli hem de güvenilir olmasıdır. Nitel araştırma yöntemlerin doğasının nicel araştırmalardan farklı olmasından dolayı, bir araştırmada geçerlik ve güvenirliği sağlamak için farklı düşünsel geleneklere göre farklı ölçütler söz konusudur (Arastaman, Fidan ve Fidan, 2018, s.49). Yorumlayıcı paradigmanın benimsendiği bu araştırmada Eisenhart ve Howe'nin (1992) önermiş olduğu niteliği arttırıcı ölçütler aşağıdaki şekilde uygulanmıştır:

1. Araştırma soruları, veri toplama ve analiz teknikleri arasında uyumun sağlanması: Bu araştırmaya ait görüşmeler ve gözlemler gibi farklı veri kaynaklarının araştırma soruları doğrultusunda analizi ve elde edilen sonuçların karşılaştırılması güvenilirliği sağlamak adına gerçekleştirilmiştir. Yıldırım ve Şimşek'e (2011) göre veri çeşitlemesi bireylerin farklı algı ve bakış açılarının zenginliğini ortaya koymak adına önemli bir stratejidir. Bütün ölçütlerin uyum içinde kullanılmasını sağlamak için araştırma süresince beş uzman akademisyenden sürekli görüş alınmış ve geri bildirimler doğrultusunda uyum gözetilmiştir.
2. Uygun veri toplama ve analiz yöntemlerinin kullanımı: Görüntü ve ses kayıt cihazları ile araştırmacı günlüğü bu araştırmanın ham veri kaynaklarını oluşturmuştur. Klinik görüşmelere ilişkin tüm verilerin yazılı dökümü, öğretim dizilerinde ise öğrencilerin ders işleyişi ile ilgili konularda bildirdikleri tüm görüşlerin yazılı dökümü alınmıştır. Araştırmanın amacı, araştırma soruları ve araştırmanın teorik çerçevesi ışığında ham verinin süregelen ve geçmişe yönelik analizleri sonucunda geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ve cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi makroları ortaya çıkmıştır. Bu makrolar altında tema ve alt temalar sürekli analizler neticesinde ortaya çıkmıştır. Bulguların sunumunda öğrencilerin alıntıları çalışmanın onaylanabilirliğini sağlamak adına sıklıkla yer verilmiştir.

3. İlgili alan yazınla kıyaslandığında inanılabilir bulgulara ulaşılması: Araştırmanın gerçekleştirildiği sınıf ile beş ay süre ile keşfedici eğitim sürecinin gerçekleştirilmiş olması öğrenciler ile karşılıklı güvene dayalı ve öğrencilerin görüşlerini çekinmeden ifade etmelerine imkan sağlayan bir ortam yaratmıştır. Creswell (2007) uzun süreli etkileşimin araştırmanın amacına yönelik kararlar almada önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu araştırmada inanırlık ölçütünü karşılamak adına araştırma konusu hakkında bilgiye sahip ve nitel araştırma yöntemleri konusunda uzmanlaşmış beş akademisyen tarafından hem içerik hem de araştırma deseni, veri toplama araçları, verilerin analizi ve elde edilen bulgular açısından incelenmiş ve araştırmacıya geri bildirimde bulunulmuştur.
4. Uygulamada kullanılabilecek değerli sonuçlara ulaşılması: Araştırmanın değerini yargılamada kullanılan aktarılabilirlik, sonuçların nasıl genelleneceği ve nasıl iletileceğini içerir (Başkale, 2016, s. 26). Bu araştırmanın klinik görüşme katılımcıları keşfedici öğretim esnasında derse katılımları, araştırma öncesinde uygulanan van Hiele geometrik düşünme ve araştırmacı tarafından hazırlanan ve alanında uzman akademisyenler tarafından onaylanan cebirsel düşünme testi sonuçlarına göre seçilmiştir. Bu kriterler altında zayıf, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip, sınıfın mikro seçkisi sayılabilecek altı öğrenci seçilmiştir. Merriam (1998), insan davranışının sabit olmayışını öne sürerek elde edilen verilerden anlamlı sonuçlar çıkarmanın önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu doğrultuda öğretim dizisinden elde edilen bulguların analizi ile ulaşılan sonuçların öğretmenler, alan yazın ve akademisyenler ile tartışılması sonucunda araştırmadan elde edilen sonuçların uygulamada kullanılabilir olduğu görüşüne ulaşılmıştır.

Niteliği artırıcı bu ölçütler geçerlik ve güvenirliği sağlayan inanırlık, güvenilebilirlik, onaylanabilirlik ve aktarılabilirlik (Guba ve Lincoln, 1982) kriterlerini karşılamıştır.

2.8. Etik Konular

9. sınıf öğrencileri ile üçgenler alt öğrenme alanında cebirsel muhakemenin gelişiminin hedeflendiği bu araştırmanın hazırlık, uygulama, veri toplama, verilerin analizi ve sunumu aşamalarında bilimsel etik ilkelere ve kurallara uygun davranılmıştır. Araştırma öncesinde uygulama okulunun müdürlük makamı bilgilendirilmiş ve gerekli

izinler alınmıştır. Araştırmaya katılacak sınıflardaki öğrencilerin velileri araştırma konusunda kapsamlı olarak bilgilendirilmiş ve EK-2'de sunulan onam formu ile yazılı izinleri alınmıştır. EK-1'de sunulduğu üzere, Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğünden de araştırmanın gerçekleştirilmesi için gereken izin alınmıştır.

Bu araştırmada yararlanılan alanyazına ilişkin tüm bilgilere ve belgelere kaynak gösterilmiş ve bu kaynaklar kaynakça kısmında yer almıştır. Anadolu Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla araştırmanın taraması gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın bileşenlerinde adı geçen tüm öğrencilerin isimleri kodlanmış olup görsellerde yüzlerinin görünmemesine dikkat edilmiştir.

3. BULGULAR

Bu bölümde araştırma boyunca elde edilmiş verilerin analizi sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir. Bulgular odak grup öğrencileri ile gerçekleştirilen klinik görüşmeler ve öğretim dizisi süresince öğrenciler arasında gerçekleşen tartışmalardan doğrudan alıntılar ile desteklenmiştir. Bulgulara ilişkin tablolar, öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylemlerin özeti niteliğinde sunulmuştur.

3.1. Ön Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular

Üçgenler alt öğrenme alanının öğretimi esnasında cebirsel muhakemenin gelişiminin hedeflendiği bu araştırmada öğretim dizisinin tasarımı, öğrencilerin ön bilgilerinin dikkate alınmasını gerektirmiştir. Bu sebeple ön klinik görüşme problemleri ile öğrencilerin ön bilgi ve yeterlikleri belirlenmeye çalışılmıştır. Cebirsel düşünme ve van Hiele geometrik düşünme testleri sonuçlarına göre seçilmiş olan sırasıyla düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip Lara, Bora, Kayla, Tuna, Ata ve Arya isimli altı odak grup öğrencisi ile gerçekleştirilmiş olan ön klinik görüşmelerden elde edilen bulgular;

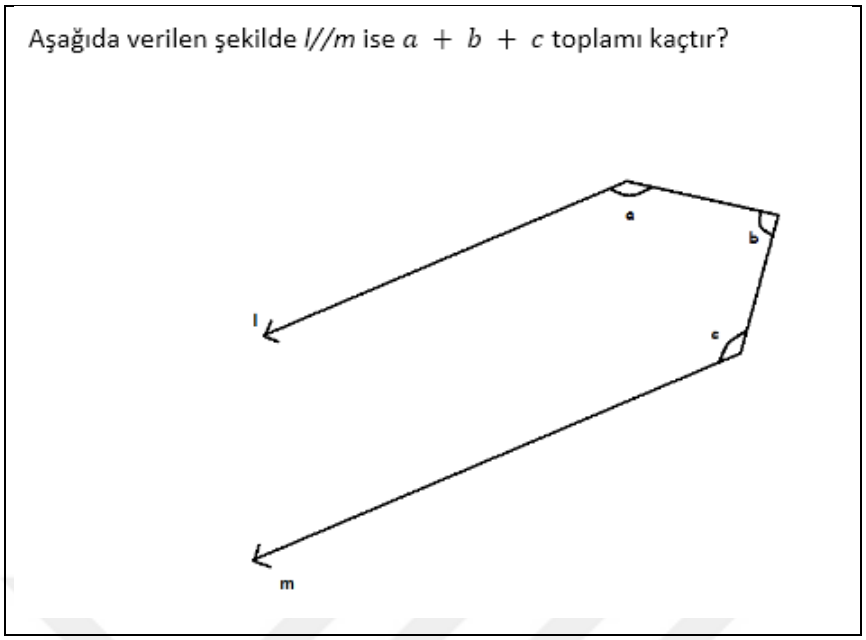
- Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi
- Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi

temaları altında sunulmuştur.

3.1.1. Ön klinik görüşmenin birinci problemine ilişkin bulgular

Ön klinik görüşmenin Şekil 3.1.'de verilen birinci probleminin geometrik hedefi, öğrencilerin paralel iki ışın ve bu ışınları kesen iki doğru parçası ile oluşan açılar arasındaki ilişkiyi keşfetmeleridir. Çizimdeki açı ölçülerinin değişkenler ile ifade edilmesi problemi cebirsel kılmaktadır. MEB matematik ders kitapları ve bazı üniversite giriş sınavı hazırlık kitaplarının doğruda açı konu başlığı altında bir özellik olarak öğrencilere sunduğu bu ilişki, odak grup öğrencilerinin geometrik bilgi yapılarını nasıl kullandıkları ve cebirsel muhakemeleri hakkında çeşitli veriler sunmuştur.

Problemde niceliksel muhakemenin ortaya çıkacağı çözüm stratejisi a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştiren bir doğru parçasının çizilmesi suretiyle bir üçgenin iç açıları toplamı ile birbirine paralel iki ışının bir kesen ile oluşturduğu açılar kavramlarının kullanılmasıyla gerçekleşir. Bu problemde çeşitli geometrik araçların devreye sokulmasıyla pek çok farklı cebirsel çözüm gerçekleştirilebilir.



Şekil 3.1. *Ön klinik görüşmenin birinci problemi*

3.1.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin geometrik bilgi kapsamında ve sahip oldukları geometrik bilgilerini problemin çözümü için nasıl devreye soktuklarına dair bulgular sunulmuştur. Tablo 3.1.'de geometrik bilgi kapsamında beş bileşen ve geometrik bilginin uygulanması kapsamında iki bileşen yer almıştır.

Tablo 3.1. *Ön klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Geometrik ön bilgiler **Lara** - Üçgenin temel kavramlarına ilişkin ön bilgi eksikliği. **Bora** - Üçgenin dış açısını doğru bir biçimde belirleyememe, ters açıları tespit edememe. **Kayla** - Üçgende kenar ve açı kavramlarına ilişkin karmaşa yaşaması. **Ata** - Kapalı olmayan geometrik nesnenin dış açıya sahip olduğunu düşünmesi. Üçgende açılar temel kazanımına sahip olma. Terminoloji kullanımı Tüm öğrenciler - Yanlış terminoloji kullanımları, kullanılan terimin hangi geometrik nesneye karşılık geldiğini bilmeme. Kural temelli öğrenmeler **Lara**, **Bora** ve **Kayla** - "U" kuralı kullanmak istemeleri, ancak kuralın ne olduğunu bilmeme.	Geometrik bilgiyi devreye sokma **Ata** - "bir üçgende iki iç açının toplamının diğer açının dış açısına eşit olması" özelliğini kapalı olmayan geometrik nesnede uygulaması. Geometrik araçları kullanma **Lara**, **Bora**, **Kayla**, **Ata** ve **Arya** - a ve c ölçülü açıların bulundukları köşeleri birleştiren bir doğru parçası çizerek bir üçgen elde etmeleri. **Lara'nın** bu eylem ile diğer öğrencilerden farklı olarak oluşan yapıları tanıması, ancak geometrik ön bilgi eksikliği niceliksel muhakeme ile elde edilecek çözüme ulaşmasına engel oluşu.

Tablo 3.1. (Devam) *Ön klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Tanım yapma becerileri **Lara** - ışın tanımının formal yapıda olmaması. Prototip fenomeni **Bora**, **Kayla**, **Tuna** ve **Arya** - ışınların paralel oluşunun açıların ya da açıların bütünlerinin eşit olmasını sağladığı prototip algısı. **Bora** - Görsel algı kaynaklı prototip algı.	Geometrik araçları kullanma **Bora** - geometrik ön bilgi eksikliklerinin bir stratejiden diğerine geçmesine sebep oluşu ve bu stratejiler için farklı geometrik araçlar kullanabilmesi.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Lara a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştirerek elde ettiği üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu ifade etmiş ve bu üçgen hakkında "üç tane açısı olduğu, üç tane kenarı, üç tane köşesi olduğunu biliyorum. Ondan sonra iç açıları toplamının 360 derece olduğunu ve dış açıları toplamının 180 derece" yorumunda bulunmuştur. Kayla da Lara gibi oluşturduğu üçgenin bir ikizkenar üçgen olduğunu belirtip eşit olan kenarlarını ab ve cb şeklinde ifade etmiş ve elleriyle b ve c açılarını göstermiştir. Lara'nın üçgen ile ilgili temel kazanımlarının, Kayla'nın üçgende kenar ve açı kavramlarına ilişkin ön bilgilerinin eksik olduğu görülmüştür.

Bora'nın a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştirerek oluşturduğu üçgenin dış açılarını $180 - a$ ve $180 - c$ olarak ifade etmesi öğrencinin üçgenin dış açılarını belirleyemediğini göstermiştir. Öğrencinin bir açının dış açı olması için "üçgenin dış bölgesine düşmesinin" yeterli olacağı düşüncesi bir diğer stratejisinde b ölçülü açının bulunduğu köşeden m ışınının doğrusal uzantısına çizdiği bir doğru parçası ile oluşturduğu üçgenin dış açılarının "c" ve "b" olduğunu ifade etmesi olarak tekrar ortaya çıkmıştır. "c" ölçülü açı oluşan üçgen için bir dış açı iken "b" ölçülü açının dış açı olmadığı aşikârdır.

Bora bir diğer stratejisinde b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m ışınlarına bir paralel doğru parçası çizmiş, ancak oluşan ters açıları tespit edemediği için problemin cebirsel yöntem ile gerçekleştirilecek çözümüne ulaşamamıştır.

Ata'nın doğruda açının bütünleyenine "dış açı" olarak hitap etmesi, bu öğrencinin kapalı olmayan düzlemsel geometrik şeklin dış açıya sahip olduğunu düşündüğünü göstermiştir. Öğrencinin konveks geometrik nesnenin dış açılar toplamının 360° olduğu, üçgenin iç açılarının toplamının 180° olduğu ve bir üçgende iki iç açının toplamının diğer açının dış açısına eşit olduğu bilgilerine sahip olduğu görülmüştür.

- Terminoloji kullanımı: Öğrencilerin doğruda açılar ile ilgili yanlış terminoloji kullanımları gözlemlenmiştir. Lara ışınlara önce "açı" ve sonra "kenar" olarak, Tuna bütünleyen açıya "açının devamında", ışınların paralel olmasına "a ve c açılarına paralel" ifadelerini kullanarak, Ata ışınlara "doğru", bütünleyen açılara "dış açı" olarak hitap etmiştir. Doğru parçasına "çizgi" olarak hitap eden öğrenciler ise Lara, Kayla ve Tuna olmuştur. Lara ayrıca a ve c ölçülü açıların birbirine "komşu açılar" olduğunu ifade etmiş ve açıların birbirine nasıl komşu olduğu sorusunu "birbirinin karşısında olma" şeklinde cevaplamıştır. Diğer odak öğrencilerden farklı olarak Ata'nın terminoloji kullanımının daha seyrek olduğu ve "iki iç açı bir dış açıyı vereceği için şununla şu burayı veriyor, bununla bu burayı veriyor, bununla da bu burayı vereceği için 360 olduğunu düşünüyorum" şeklindeki ifadesinden görülebileceği gibi sıklıkla işaret zamirleri kullandığı gözlemlenmiştir. Öğrencinin işaret zamirleri kullanarak ifade ettiği cümle "a ve c ölçülü açının toplamının b ölçülü açının bütünleyenini, a ve b ölçülü açıların toplamının c ölçülü açının bütünleyenini ve b ve c ölçülü açıların toplamının a ölçülü açının bütünleyenini verdiği için a, b ve c ölçülü açıların toplamının 360°" anlamına geldiği analiz sonrası anlaşılmıştır.

- Kural temelli öğrenmeler: Lara, Bora ve Kayla "U" kuralından bahsetmişlerse de, kuralın içeriğini bilmedikleri gözlemlenmiştir.

- Tanım yapma becerileri: Lara'nın l ve m nesnelerinin ışın olduğuna karar vermesi üzerine kendisine ışının ne olduğu sorulmuş ve öğrenci "ışın, bir noktada tutup [kaleminin ucunu kâğıt üzerinde bir noktaya saplıyor, diğer elinin işaret parmağıyla o noktaya işaret ediyor] okun sonsuza kadar gitmesi" cevabını vermiştir. Öğrencinin formal bir tanım yapmak için gerekli terminolojiye sahip olmaması kavramı beden dilini kullanarak ifade etmesine sebep olmuştur.

- Prototip fenomeni: Işınların paralel oluşunun açıların ya da açıların bütünlerinin eşit olmasını sağladığı şeklindeki prototip algı, Ata ve Lara hariç diğer dört öğrencide gözlemlenmiştir. Bora l ve m ışınlarının paralel olmasından dolayı a ve c ölçülü açıların bütünlerinin eşit olduğunu düşünerek b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m ışınlarının doğrusal uzantılarına çizdiği doğru parçaları ile oluşturduğu üçgenlerin eş üçgenler olduğunu ifade etmiştir.

Bora a ve c ölçülü açıların eşit olduğunu kabul ettiği bir diğer stratejisinde a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştiren doğru parçası ile oluşan üçgenin ikizkenar veya eşkenar olduğunu ifade etmiştir. Kayla da Bora gibi oluşturduğu üçgenin ışınların

paralelliğinden dolayı ikizkenar üçgen olduğunu ifade etmiştir. Kayla sonradan bu düşüncesi terk etmiş olsa da, paralellik ve ikizkenar üçgen arasında bir bağ olabileceğini düşündüğünü belirtmiştir. Tuna görüşmenin başında a ve c ölçülü açıların birbirine eşit olmadığını düşündüğünü söylemiş, ancak sonrasında bu açıların bütünlerine ışınların paralel olmasından dolayı aynı değişkenin atanabileceğini ifade etmiştir. Tuna'nın paralelliği geleneksel gösterim olan çift ok yerine çift çentikler ile temsil etmesi ve "bu çizgiler, bu ikisi [l ve m ışınlarının üzerine çift çentik koyuyor] paralel; düşününce c nin devamında x olma ihtimali var, a nın dış açısı ile beraber" şeklindeki ifadesi, öğrencinin problemdeki a ve c ölçülü açılarının bütünleyenlerine aynı değişkeni (x) atamasının sebebi olduğu düşünülmüştür. Arya'nın da l ve m ışınlarının paralel olmasından dolayı a ve c açılarının eşit olabileceğini düşündüğü görülmüştür.

Bora'nın a ve c ölçülü açıların bütünleyenlerinin aynı yöne bakmalarından dolayı eşit olduğunu ifade etmesi de, öğrencinin görsel algılarından kaynaklanan prototip algısına örnek teşkil etmiştir.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Ata'nın "*bir üçgende iki iç açının toplamının diğer açının dış açısına eşit olması*" özelliğini, problemde verilen kapalı olmayan düzlemsel geometrik nesnede uygulaması hatalı olmuştur.

- Geometrik araçları kullanma: Lara a ve c ölçülü açıların bulundukları köşeleri birleştiren bir doğru parçası çizerek bir üçgen ve kendi tabiriyle bir "U" elde etmiştir. Öğrenci çizdiği doğru parçasının a ölçülü açıyı eşit iki parçaya ayırmadığının farkında olduğunu ifade etmiştir. Tuna haricindeki tüm öğrenciler a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştiren bir doğru parçası çizmiş ve bir üçgen elde etmişlerdir.

Birden fazla çözüm stratejisi sunmuş olan Bora, bu stratejiler için farklı geometrik araçlar kullanmıştır. b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m ışınlarına bir paralel ışın çizme, b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m ışınlarının doğrusal uzantılarına çizilen doğru parçaları ile üçgenler oluşturma ve a ile c ölçülü açıların bulundukları köşeleri birleştiren bir doğru parçası çizme öğrencinin kullandığı araçlar olduğu görülmüştür. Bora'nın geometrik ön bilgi eksiklikleri stratejilerini sürdürmesine engel olmuş ve sürekli strateji değiştirmesine sebep olmuştur.

Tuna ve Ata l ve m ışınlarını doğrusal olarak uzatmış ve a ve c ölçülü açıların bütünlerini doğru bir şekilde belirleyebilmiş olmalarına rağmen bu eylemlerin öğrencilerin soruyu çözmelerinde bir faydası olmadığı görülmüştür.

3.1.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin cebir bilgi yapıları, sembolik manipülasyon becerileri ve niceliksel muhakemelerine ilişkin alt bileşenler Tablo 3.2.'de sunulmuştur.

Tablo 3.2. *Ön klinik görüşmenin birinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞ-TİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	NİCELİKSEL MUHAKEME
<u>Eşitliğin misyonları</u> **Bora'nın** eşitliği nicelikler arasında bir ilişki olarak algılayamaması **Tuna'nın** eşitliği nicelikler arasında bir ilişki olarak algılayışı	<u>Denklem kurma</u> **Bora** - bilinmeyenlere değişkenler atayıp üçgenin iç açıları toplamı denklemini yazması.	<u>Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği</u> **Lara** - sayısal veri olmadığını vurgulasa da sayısal veri olmadan da problemin çözülebileceğini ifade etmesi. **Kayla** - sayısal verinin olmadığı problemin zor olduğunu ifade etmesi. <u>Değişkenin doğasını anlama</u> **Bora** – üçgen etikent temsilini açı temsilinde de kullanması ile değişkenlerin rollerini karıştırması. **Kayla** – Problemde verilen değişkenlerin neyi temsil ettiğinden emin olmaması. <u>Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme</u> **Bora** - a ve b ölçülü açılarının bütünlerini doğru ifade edebilmesi. **Tuna'nın** a ve b ölçülü açılarının bütünleyenlerini bir başka değişken ile temsil etmesi. <u>Sembolik manipülasyon becerisi</u> **Bora'nın** iki bilinmeyenli iki denklem elde etmesi, sembolik manipülasyon sonuçlarını çizim üzerinde araştırması ve sözdizimsel sembolik manipülasyonu.	**Lara** – çizimde iki geometrik nesne elde etmesi ancak bu nesnelere ait temel ön bilgilerinin yetersiz oluşu niceliksel muhakeme ile gerçekleştirilecek çözüme ulaşmaması. **Bora** - fazlaca strateji ortaya koyması, stratejilerde çok miktarda değişken kullanıp yoğun sembolik manipülasyon içerisine girmesinin niceliksel muhakemede bulunmasına engel oluşu. **Ata** - geometrik nesneye kapalı konveks yapı olarak davranması ve problem durumuna uygun olmayan geometrik bilgisini uygulaması niceliksel muhakemede bulunmasına engel oluşu. **Arya** – Verilen açılar toplamının 180 ° den küçük olabileceğini düşünmesi niceliksel muhakemeye sahip olmadığına işaret.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- <u>Eşitliğin misyonları</u>: Bora a ve c ölçülü açılarının bütünleri için "bunlar [a ve c açılarına işaret ederek] karşılıklı olduğu için" açıklaması ile sırasıyla $180 - c = x$ ve $180 - a = x$ denklemlerini yazmış ve yok etme metodu ile $a = c$ sonucuna ulaşmıştır. Bu durum öğrencinin eşitliğin nicelikler arasında bir ilişki olarak algılamadığını göstermiştir. Bora'dan farklı olarak Tuna, a ve c ölçülü açıların bütünleyenlerine aynı

değişken atandığında bu açıların eşit olacağını herhangi bir işleme gerek olmadan görebilmiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Denklem kurma: Bora b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m ışınlarının doğrusal uzantılarına çizdiği doğru parçaları ile oluşturduğu üçgenlerin iç açılara değişkenler atadıktan sonra iç açılar toplamını veren denklemleri doğru bir şekilde kurabildiği gözlemlenmiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Problemde verilen tüm açıların birer değişken ile ifade edilmesi ve sayısal olarak belli olmayışını Lara görüşme süresince birkaç sefer vurgulanmıştır. Lara sayısal veri olmasa da problemin çözülebileceğini ifade etmiştir. Kayla'nın "sayı olmadığı için çözüm şu an çok zor gibi geliyor bana" şeklindeki ifadesi, problemin çözümü için değişkenin sayısal değer alması gerektiği düşüncesini ortaya koymuştur.

- Değişkenin doğasını anlama: Bora'nın b ölçülü açının bulunduğu köşeden l ve m ışınlarının doğrusal uzantılarına çizdiği doğru parçaları ile oluşturduğu üçgenleri adlandırmak için kullandığı sembolik temsilleri (etiketleri) aynı zamanda üçgenin iç açılarını temsilde kullanması değişkenlerin rollerinin farkında olmadığına işaret etmiştir. Öğrenci $180 - a$ ile doğru bir şekilde ifade ettiği bütünler açıyı köşeleri temsil etmek için kullandığı sembollerden biri olan A harfine eşitleme ihtiyacı duymuştur. Bora görüşmenin ilerleyen dakikalarında bu düşüncesinden vazgeçip bütünleyen açılara küçük harf sembolleri atamıştır. Öğrencinin açı ve köşe temsillerinde kullandığı etiket ve değişkenlerin bir süre sonra birbirine karışmasından dolayı, yazmış olduğu iç açıları toplamı denklemlerinin öğrenciye anlamlı gelmediği gözlemlenmiştir.

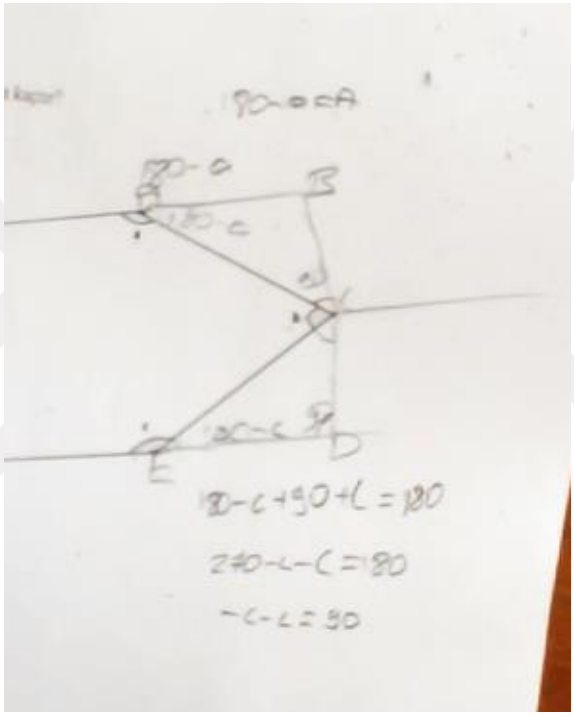
Kayla'nın görüşme esnasında a, b, c değişkenlerinin neyi temsil ettiğinden emin olmadığı, bu değişkenlere önce "açı" sonra "köşe" olarak hitap etmesinden anlaşılmıştır.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme: Bora a ve b ölçülü açılarının bütünlerini sırasıyla $180 - a$ ve $180 - b$ olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Tuna ise, bu açıları a ve b cinsinden yazamamış ve başka bir değişken kullanma ihtiyacı duymuştur.

- Sembolik manipülasyon becerisi: Görüşmenin görece daha uzun bir zaman diliminde Bora, iki bilinmeyenli iki denklem üzerinde çalışmıştır. Öğrencinin sembolik manipülasyon sonuçlarını çizim üzerinde araştırdığı gözlemlenmiştir. Denklem

çözümlerinde bilinmeyen ve sabitlere sözdizimsel yaklaştığı "bunu karşıya attığımızda …" şeklindeki ifadesinden anlaşılmıştır.

Görsel 3.1.'de görüleceği üzere Bora'nın m ışınının doğrusal uzantısı olan doğru parçası ile b ölçülü açının bulunduğu köşeden çizdiği doğru parçası ile oluşturduğu ve CDE olarak isimlendirdiği üçgende, c ölçülü açının bütünlerini $180° - c$, D açısını $90°$ ve ECD açısını C ile ifade etmiş ve sembolik manipülasyonunu Şekil 3.2.'de görüleceği şekilde gerçekleştirmiştir.



Görsel 3.1. *Bora'nın ön klinik görüşmenin birinci problemi için m ışınının doğrusal uzantısına b ölçülü açının bulunduğu köşeden çizdiği doğru parçası ile oluşturup CDE olarak adlandırdığı üçgen ve bu üçgenin iç açılarına atadığı değişkenler*

$$180 - c + 90 + C = 180 \ldots \text{I}$$
$$270 - c - C = 180 \ldots \text{II}$$
$$-c - C = 90 \ldots \text{III}$$

Şekil 3.2. *Bora'nın ön klinik görüşmenin birinci problemi için oluşturduğu CDE üçgeninin iç açılarına atadığı değişkenler ile gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon*

Bora gerçekleştirdiği sembolik manipülasyonunun I. adımından II. adımına (Şekil 3.2.) geçerken C değişkeni $-C$ olarak yazmıştır. III. adımda elde ettiği $-c - C = 90$

denklemini "o zaman bununla [ECD açısını parmağıyla göstererek] bunun [c ölçülü açıyı parmağıyla göstererek] farkı 90 oldu" olarak yanlış bir şekilde yorumlamıştır. Bora oluşturduğu CDE üçgenine benzer şekilde ABC olarak isimlendirdiği üçgeni l ışınının doğrusal uzantısı olan doğru parçası ile b ölçülü açının bulunduğu köşeden çizdiği doğru parçası ile oluşturmuştur. ABC üçgeninde a ölçülü açının bütünlerini $180° - a$, BCA açısını $90°$ ve ABC açısını B ile ifade etmiş ve sembolik manipülasyonunu Şekil 3.3.'de görüleceği şekilde gerçekleştirmiştir.

$$180 - a + 90 + B = 180 \ldots \text{I}$$
$$270 - a + B = 180 \ldots \text{II}$$
$$-a - B = -90 \ldots \text{III}$$

Şekil 3.3. *Bora'nın ön klinik görüşmenin birinci problemi için oluşturduğu ABC üçgeninin iç açılarına atadığı değişkenler ile gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon*

Bora gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon sonrasında B ile temsil ettiği BCA açısının $90°$ olmadığını fark etmiştir. Bora'nın bu stratejisi birden fazla denklem sistemini çözerek değerlendirme yapmayı gerektirdiği için, doğru bir şekilde yürütülen sembolik manipülasyon becerisi gerektirdiği aşikardır.

Niceliksel Muhakeme

a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşe noktalarını birleştiren bir doğru parçasının çizilmesi suretiyle bir üçgen ile birbirine paralel iki ışının bir kesen ile oluşturduğu açılar kavramlarına ilişkin geometrik bilginin kullanılmasıyla ortaya çıkması beklenen niceliksel muhakemeye Lara geometrik ön bilgilerinin eksik olmasından dolayı ulaşamamıştır. Zira öğrencinin a ve c ölçülü açıların bulunduğu köşeleri birleştiren bir doğru parçası ile meydana gelen oluşumları tanıdığı görülmüştür.

Bora'nın birden fazla strateji ortaya koyması ve bu stratejilerde çok miktarda değişken kullanıp yoğun bir sembolik manipülasyon içerisine girmesi öğrencinin niceliksel muhakemede bulunmasına engel teşkil etmiştir.

Ata'nın problemdeki geometrik nesneyi bir konveks yapı olarak algılaması ve üçgende açılar ile ilgili sahip olduğu "iki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıyı vermesi" bilgisini bu yapıya uygulaması niceliksel muhakemesini yanlış bir şekilde yönlendirmiştir.

Arya'nın a, b ve c ölçülü açıların toplamının 180 dereceden küçük olabileceğini düşünmesi, öğrencinin niceliksel muhakemeye sahip olmadığını göstermiştir.

3.1.2. Ön klinik görüşmenin ikinci problemine ilişkin bulgular

Geometrik olarak üçgenin çevresi ve üçgen eşitsizliği bilgilerinin kullanımını gerektiren ön klinik görüşmenin Şekil 3.4.'te verilen ikinci probleminin cebirsel odağı sayı küme bilgisi ve eşitsizlik kavramıdır. Kenar uzunluklarının sayısal olarak verilmemesi problemi cebirsel hale getirmiştir. Problemde öğrencilere bir çizim verilmemiş ve öğrencilerin geometrik temsil kullanma becerileri incelenmiştir.

Çevresi 28 cm olan bir üçgenin kenar uzunlukları x, y, z tamsayılarıdır.
$x < y < z$ olmak üzere x in en küçük değerini bulunuz.

Şekil 3.4. *Ön klinik görüşmenin ikinci problemi*

3.1.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin geometri bilgi yapılarının cebirsel muhakemeye etkisi ana teması altında öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgi ve bu bilgileri problemin çözümü için nasıl devreye soktuklarına dair bulgular Tablo 3.3.'de yer almıştır.

Tablo 3.3. *Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Geometrik ön bilgiler **Lara** ve **Bora** - Üçgenin kenar uzunluğuna negatif tamsayı değeri atama. **Kayla** - Üçgende kenar, köşe ve açı kavramlarına ilişkin karmaşa yaşaması. **Ata** – Sezgisel olarak üçgen eşitsizliğinin mevcut olması. Tanım yapma becerileri **Lara** - somut nesne üzerinden tanım yapabilmesi. **Kayla** –çevre tanımı informal Prototip fenomeni **Tüm öğrenciler** - prototip üçgenler ile temsilleri.	Geometrik temsilleri kullanma **Tüm öğrenciler**in problem durumunu bir üçgen çizerek temsil etmeleri.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Odak öğrenciler üçgenin kenar uzunluklarını temsil eden değişkenlere 0 değerinin atanmayacağını ifade etmişler, Lara ve Bora'nın x değişkenine negatif tamsayı değerleri atadıkları görülmüştür.

Kayla'nın üçgende köşe, kenar ve açı kavramları ile ilgili kazanımlarının bulanık olduğu gözlemlenmiştir. Öğrenci problemin çözümü için bir üçgen çizmiş, kenar uzunluklarını temsil eden x, y ve z değişkenlerini açı ölçülerine yazmış ve yaptığı eylemi "köşeleri, üçgenin evet köşeleridir ve bunların toplamı *28* santim" olarak ifade etmiştir. Kayla köşe kavramını "köşe iki doğrunun çakışmasıyla oluşan" şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin kullandığı "çakışma" kelimesi ile ifade etmek istediğinin "kesişim" olduğu, kullandığı beden dilinden anlaşılmıştır. Sonrasında öğrencinin köşe terimi ile kastetmek istediğinin kenar olduğu "burada x ... hiçbir açısı ve köşesi eşit değil birbirlerine" ifadesinden anlaşılmıştır. Bu açıklamasından sonra "ve ben sanırım bunları yanlış yere yazdım, x, y, z köşeleri, ben şu an açıları belirtmiş olabilirim. O yüzden ben bunları dışına yazmak istiyorum" ifadesiyle üçgenin köşelerine x, y ve z değişkenlerini yazmıştır. Öğrenciden problemi tekrar okuması istenmiş ve kendisine köşelerin birbirine göre sıralamasının nasıl yapılacağı sorulmuştur. Bu soru üzerine Kayla problemdeki değişkenlerin kenar uzunluklarına işaret ettiğini anlayarak bu değişkenleri çizdiği üçgenin kenarlarına yazmıştır.

Odak grup öğrencilerinin üçgen eşitsizliği ön bilgisine sahip olmadıkları görülmüştür. Ancak Ata üçgen eşitsizliğini sezgisel olarak hissettiğine dair Görsel 3.2.'deki çizimi gerçekleştirmiştir.



Görsel 3.2. *Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde Ata'nın* $1 - 8 - 19$ *kenar uzunluklu doğru parçaları ile bir üçgenin çizilemeyeceğini ifade etmek için yaptığı çizim*

Ata değişkenler arasındaki eşitsizliği gözeterek ve toplamları 28 olacak biçimde x, y ve z değişkenlerine atadığı $1-8-19$ kenar uzunluklarına sahip bir üçgen çizilip çizilmeyeceği sorusuna "çizemeyiz ama. Çünkü 19, uzun bir şey, şöyle, şöyle bir şey olabilir. Şöyle (Görsel 3.2.) bir şekil oluşuyor" cevabını vermiştir. Ata yaptığı çizim sonrasında "kenarlar birleşmez, bunu küçültmemiz lazım. Bence $6-7-11$ olabilir çünkü birbirine yakın sayılar" açıklamasında bulunmuştur.

- Tanım yapma becerileri: Lara üçgenin çevresini "kapladığı alan" olarak tanımlamıştır. Öğrenciye "masanın çevresini ölç" şeklindeki somut bir ifade üzerinden sorulduğunda ise "dışta kalan kısımlar çevre oluyor" şeklinde izah etmiştir. Kayla ise üçgenin çevresi için "etrafını belirleyen, sınırlarını belirleyen şey, yani terim. Ama yani alan dışında kalan yerler olabilir" tanımlamasını yapmıştır.

- Prototip fenomeni: Öğrencilerin tümünün problemi temsil etmek için çizdikleri üçgenlerin prototip olduğu yani tabanı yatay düzleme paralel olacak biçimde ve ikizkenar veya eşkenar üçgene benzer olduğu gözlemlenmiştir.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik temsilleri kullanma: Tüm odak öğrenciler problemi bir üçgen çizerek temsil etmişlerdir.

3.1.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında ikinci problemde öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakemeleri, cebir bilgi yapıları ve sembolik manipülasyon becerileri Tablo 3.4.'te sunulmuştur.

Tablo 3.4. *Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Aritmetik işlem becerileri **Lara** - negatif tamsayılar ile aritmetik işlemlerinin hatalı olması. Eşitliğin misyonları **Lara** ve **Bora'nın** eşitliği işlemsel olarak kavrayamamaları.	Cebirsel ön bilgiler **Tüm öğrenciler** - eşitsizlik temsilini kavramaları. **Ata** - problemdeki üçgenin çeşitkenar üçgen olduğunu ifade ederek kenarlar arasındaki eşitsizlik ilişkisini geometrik olarak yorumlaması.	Değişkenin doğasını anlama **Kayla** - üçgenin açı, köşe ve kenarlara atanan sembolik temsillerin rollerini kavrayamaması. **Bora** - çizdiği üçgenin köşelerini büyük harfler ile temsil etmesi.

Tablo 3.4. (Devam) *Ön klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Sayı kümeleri bilgisi **Lara** ve **Arya**'nın tamsayılar kümesini tanımamaları. İşlemlerin özelliklerini kullanma becerileri **Lara** - toplamlardan birinin en küçük olmasının diğer iki değişkenin toplamlarının büyük olması ile sağlanacağı muhakemesine sahip olmaması.	Denklem kurma **Bora**, **Kayla** ve **Tuna'nın** üçgenin çevresini $x + y + z = 28$ denklemi ile ifade etmeleri.	Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme **Kayla** - y ile z değişkenlerinin toplamını $28 - x$ olarak ifade edebilmesi.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik işlem becerileri: Lara x değişkenine -4 değerini atadıktan sonra aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir.

> Lara: Artı 24 eksi eksi 4 $[+24 - (-4)$ yazıyor, sonra 24 ile -4 arasındaki eksiyi artıya çeviriyor]
>
> Araştırmacı: Neden burada artıyı eksi yaptın?
>
> Lara: Eksiler artıya dönüşüyor diye.
>
> Araştırmacı: Ne zaman eksiler artıya dönüşüyor?
>
> Lara: Çıkarma işleminde.
>
> Araştırmacı: Peki çıkarmayı niye yaptın?
>
> Lara: Toplama yapacaktım.
>
> Araştırmacı: Sonuç nedir?
>
> Lara: Artı 20.
>
> Araştırmacı: Peki, bu bulduğun 20 nedir?
>
> Lara: x e 4 verdiğimde çıkan çevre.

Öğrencinin negatif tamsayılar ile ilgili aritmetik işlemlerinin hatalı olduğu görülmektedir.

- Eşitliğin misyonları: Lara'nın aritmetik işlem becerilerine ilişkin verinin bulunduğu diyalogda öğrencinin ayrıca değişkenlerden birinin negatif tamsayı değeri alması durumunda sabit bir veri olan çevre uzunluğunun değişeceğini düşündüğü gözlemlenmiştir. Bora'nın da Lara gibi düşündüğü x değişkenine -10 değerini verdiğinde "o zaman, ikisinin yani y ve z nin toplamı *38* olur, x e de eksi 10 verebiliriz. Bu sefer de x daha küçük bir sayı olur" şeklindeki ifadesinden anlaşılmıştır. Lara ve Bora'nın eşitliğin işlemsel misyonunu bu problem bazında kavrayamadıkları görülmüştür.

- Sayı kümeleri bilgisi: Lara'ya tamsayıların nasıl sayılar olduğu sorulduğunda "tamsayılar 0 dan başlayıp…" cevabını vermiş ve kümenin elemanlarını tanımlayamamıştır. Kendisinden tamsayı örneği vermesi istendiğinde ise "mesela *4* de olur, 1.4 de olur, $\frac{1}{4}$ de olur" cevabını vermiştir. Görüşmenin ilerleyen dakikalarında tamsayılar kümesini "rasyonel sayıları, virgüllü sayıları kapsayan" olarak ifade etmesi, öğrencinin tamsayılar kümesini tanımadığını göstermiştir. Bora kenar uzunluklarına sayısal değerler atarken değişkenlerin ait olduğu kümeden seçimler yapmış ve x değişkeninin en küçük değerinin 1 olabileceğini düşünmüştür. Öğrenciye en küçük değerin 1 olup olmadığı sorulunca "hayır; tamsayı olduğu için eksiler de giriyor işin içine" cevabını vermiştir. Öğrencinin tamsayılar kümesini tanıdığı ancak bir üçgenin kenar uzunluğunun negatif bir sayı olamayacağını bilmediği gözlemlenmiştir. Arya ise tamsayıları "0 dan sonsuza kadar sayılar" olarak tanımlarken -5 sayısının tamsayı olup olmadığı sorusuna "hayır. Değil mi? Uff. -5 tamsayı değil" cevabı ile tamsayılar kümesini tanımadığı görülmüştür.

Tuna'nın değişkenlere atadığı sayısal değerlerden, Ata'nın ise tamsayıyı "rasyonel sayı olmayan, tam sayı" olarak ifade etmesinden bu öğrencilerin tamsayılar kümesini tanıdıkları anlaşılmıştır.

- İşlemlerin özelliklerini kullanma becerileri: Lara toplamları 28 olan x, y ve z değişkenlerine, değişkenler arasındaki eşitsizliği gözeterek sırasıyla 4, 10 ve 14 değerlerini atamıştır. x tamsayısının en küçük değerinin 4 olup olmayacağı sorusuna "bunun en küçük değerini bulmam için [x uzunluklu kenara işaret ederek] bunlara da [y ve z uzunluklu kenarlara işaret ederek] küçük vermem lazım" cevabını vermiştir. Öğrencinin toplamlardan birinin en küçük olmasının diğer iki değişkenin toplamlarının büyük olması ile sağlanacağı muhakemesine sahip olmadığı gözlemlenmiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Problemde verilen eşitsizliği Lara "kenarlar birbirine eşit değil yani" şeklinde doğru bir şekilde yorumlamıştır. Ata problemdeki üçgenin çeşitkenar üçgen olduğunu ifade ederek kenarlar arasındaki eşitsizlik ilişkisini geometrik olarak yorumlayan tek öğrenci olmuştur. Kayla hariç tüm öğrenciler değişkenlere eşitsizliği gözeterek sayısal değerleri atamışlardır.

- Denklem kurma: Bora, Kayla ve Tuna problem durumuna uygun olarak $x + y + z = 28$ denklemini yazmıştır.

Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin doğasını anlama: Kayla'nın üçgenin açı, köşe ve kenarlara atanan sembolik temsillerin rollerini kavrayamadığı x, y ve z değişkenlerini çizdiği üçgende ilk olarak açı ölçülerine, sonra üçgenin köşelerine ve en sonunda da kendisine yöneltilen köşelerin birbirine göre sıralamasının nasıl olacağı sorusu üzerine bu değişkenleri üçgenin kenarlarına yazmasından anlaşılmıştır. Lara, Bora, Ata ve Arya çizdikleri üçgenlerin kenarlarına x, y ve z değişkenlerini yazmışken, Tuna önce açılara bu değişkenleri yazmış, soruyu tekrar okuması istendiğinde bu değişkenleri kenarlara yazmıştır. Bora çizdiği üçgeni etiketler ile temsil etmiştir.

Ata'nın değişkenin ait olduğu sayı kümesi ile değişkenin doğası hakkında sahip olduğu görüşlerin aşağıda verilen diyaloğa göre doğru olduğu görülmüştür.

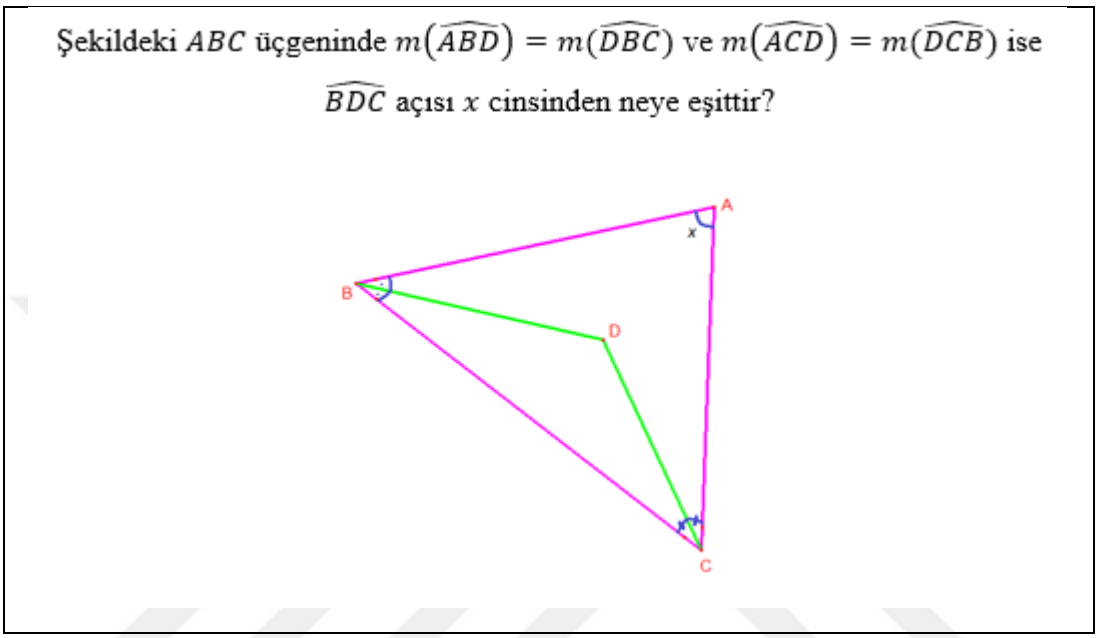
> Araştırmacı: Tamsayılarda negatif sayılar var mıdır?
> Ata: Olabilir.
> Araştırmacı: Peki. x negatif bir sayı olabilir miydi?
> Ata: Olamaz çünkü uzunluklarda -1 metre ya da -2 metre diyemeyiz.
> Araştırmacı: 0 olabilir miydi?
> Ata: Olamaz.
> Araştırmacı: Neden?
> Ata: Üçgen, bir uzunluğu olması lazım, eğer 0 olsaydı şöyle [bir doğru parçası çiziyor, üstünden bir daha geçiyor] yani üst üste doğrular oluşurdu.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme: Kayla yaşadığı açı-köşe-kenar karmaşasını aştıktan sonra üçgenin çevresini veren denklemi yazmış ve y ile z değişkenlerinin toplamını $28 - x$ olarak ifade edebilmiş ancak sonuca ulaşamayacağını düşünmüştür. "Burada bu yaptığım denklemin [$x + y + z = 28$ denklemine işaret ederek] doğru olduğunu düşünüyorum. Çevresi *28* cm diyor. Burada z en büyük, x en küçük oluyor ve bize x i soruyor. Ya böyle bir şeyden x i nasıl buluruz? Bilinmeyen yani, bilinmeyenler var ve *28* i buna nasıl dağıtırız? Böyle bir şey yapamayız. Bu sorunun gerçekten bir sayı cevabı var mı?" yorumunda bulunmuş ve değişkenlere sayısal değer atamamıştır.

3.1.3. Ön klinik görüşmenin üçüncü problemine ilişkin bulgular

Şekil 3.5.'de verilen ön klinik görüşmenin üçüncü problemi, geometrik olarak üçgende iç açılar toplamı bilgisi üzerine kuruludur ve ağırlıklı olarak cebirseldir. BDC açısının ölçüsünün x cinsinden ifade edilmesi süreci sembolik temsil kullanımı ve

sembolik manipülasyon becerileri gerektirmektedir. İki iç açıortayın kesişimi ile oluşan açı ile üçgenin diğer açısı arasındaki bu ilişki MEB lise matematik ders kitapları ve bazı üniversite giriş sınavı hazırlık kitaplarının üçgende açı konu başlığı altında bir özellik olarak öğrencilere sunulmaktadır.



Şekil 3.5. *Ön klinik görüşmenin üçüncü problemi*

3.1.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin geometri bilgi yapılarının cebirsel muhakemeye etkisi ana teması altında öğrencilerin geometrik bilgileri ve sahip oldukları geometrik bilgilerini problemin çözümü için nasıl devreye soktuklarına dair bulgular sunulmuştur. Tablo 3.5.'de geometrik bilgi ve geometrik bilginin uygulanması kapsamlarında ikişer alt tema yer almıştır.

Tablo 3.5. *Ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Geometrik ön bilgiler **Kayla** - açı ve köşe terimlerini karıştırması.	Geometrik çizimdeki bir unsuru tanıma **Bora**, **Tuna**, **Ata**, **Arya** - BD doğru parçasının açıortay olduğunu belirtmeleri.
Kural temelli öğrenmeler **Tuna** - Z kuralını yanlış bir şekilde kullanması, ok başı konkav dörtgeni ile ilgili kural hatırlama çabası.	Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme becerisi **Lara** - $m(\widehat{ABC})$ şeklinde üç değişken ile temsil edilen açıların yerini çizimde tespit edememesi, **Tuna'nın** bu temsilin üçgen temsili olduğunu düşünmesi. Çizim üzerindeki nokta ve çentiklerden çıkarsama yapmaları

Tablo 3.5. (Devam) *Ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Prototip fenomeni Anlık prototip algılar **Kayla** ve **Tuna** – Açıortayların varlığından dolayı ABC ve BDC üçgenlerinin eşkenar ve ikizkenar üçgen olduğunu düşünmeleri.	Geometrik araçları kullanma **Tuna** - CD ve DB doğru parçalarını AB ve AC kenarlarıyla kesişecek biçimde uzatması ve oluşan ters açıları doğru tespit etmesi. **Ata** - A açısının dış açısını çizip dış açının B ve C açılarına atadığı değişkenlerin toplamı olduğunu "iki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıya eşit olması" bilgisini devreye sokarak ifade etmesi. **Ata** - A noktasından BC kenarına D noktasından geçecek şekilde bir doğru parçası çizip, bu doğru parçasının BC kenarını dik kestiğini ve D açısını iki eşit parçaya ayırdığını düşünmesi ancak bu düşüncesinin yarattığı DBC ve DCB açılarının eşit olacağı çelişkisini görerek düşüncesinden vazgeçmesi.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Kayla'nın açı ve köşe kavramları ile ilgili kavrayış sıkıntıları, üçüncü problemde de açı terimi için "köşe" terimini kullanması ile ortaya çıkmıştır. Kayla'nın "A ve D birbirinin açıortayı da diyemeyiz" şeklindeki ifadesi üzerine "iki noktanın açıortayı" ile kast etmek istediğinin ne olduğu sorusunu öğrenci "A nın açıortayının D den geçtiğini söyleyemeyiz, bir sayı, rakam olmadığı için" şeklinde açıklamıştır.

- Kural temelli öğrenmeler: Tuna problemin çözümü için Z kuralının uygulanabileceğini ifade etmiş ve gördüğü Z şeklini "şu şekilde A, B, BD ve DC [söylediği köşe ve kenarların üzerinden kalemi ile geçiyor]" şeklinde açıklamıştır. Kendisine Z kuralının ne olduğu sorulunca, "bir paraleller olduğunda işliyordu sanırım Z kuralı. Çizeyim şuraya, Z kuralında hatırladığım kadarı, sanırım şuradaki ile burası eşit oluyordu [birbirine paralel iki doğru ile bir kesen çiziyor ve eşit açı çiftlerine işaret ediyor]" açıklamasında bulunmuştur. Tuna yaptığı açıklamadan sonra çizimde kalemi ile üzerinden geçtiği kısımda Z kuralını uygulayamayacağını fark etmiş ve "burada tüm doğrular çakışıyor. Bir paralel olma ihtimali olmaz" açıklamasında bulunmuştur. Öğrenci "çakışma" kelimesini "kesişme" anlamında kullandığı "BA, CA yı düşünürsek, ikisi çakışıyor A noktasında" ve "çakışma, bir noktada buluşmaları. Yoo, o kenarı ortadan kesmesi, ortadan değil de kesmesi" şeklindeki ifadesinden anlaşılmıştır.

Tuna ABD ve ACD açılarına sırasıyla z ve a değişkenlerini atadıktan sonra $x = z + a$ olduğunu hatırladığını ifade etmiştir. Tuna'nın hatırladığı bu ilişki öğrencinin kullandığı değişkenlere göre düzenlenince $y = z + x + a$ şeklinde ifade edilen $ABDC$ ok başı konkav dörtgeninde 180 dereceden büyük açının tam açıya tamamlayan kısmının

diğer iç açılar toplamına eşit olması özelliğidir, ancak öğrenci özelliği doğru bir biçimde hatırlayamamıştır.

- Prototip fenomeni: Kayla BC ve CD açıortaylarının varlığından dolayı ABC ve BDC üçgenlerinin birer eşkenar üçgen olduğunu ifade etmiştir. ABC üçgenindeki B ve C açılarının eşit olmadığını problem üzerine konuşmaya devam edince fark etmiştir.

Tuna problem metnindeki verileri çizim üzerinde inceledikten sonra ABC üçgeninin bir ikizkenar üçgen olduğunu söylemiş, fakat hemen sonra bu düşüncesinden vazgeçmiştir. Üçgenin neden bir ikizkenar üçgen olmayacağı sorusuna "bu B açısındaki çizgiler ile C açısındaki noktaların aynı olmadığını fark ettim, bu da açıların farklı olduğunu söyler" cevabını vermiştir.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik çizimdeki bir unsuru tanıma: Bora problemdeki açıların eşit ölçülü olduğunu temsil eden sembolik temsilleri çizimin üzerinden izlemiş ve BD doğru parçasının açıortay olduğunu "açıyı eşit böldüğü" gerekçesi ile doğru bir şekilde ifade etmiştir. Tuna "BD doğrusu B açısının açıortayı" yorumunda bulunmuş ve Ata da BD ve CD doğru parçalarını işaret zamirleriyle ifade ederek "şunların açıortay olduğunu anladım, şu ikisinin" şeklinde görüşünü ifade etmiştir. Arya'ya BD ve DC doğru parçalarının nasıl doğru parçaları olduğu sorulduğunda, açıortay olduklarını söylemiştir.

- Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme becerisi: Lara'nın problemi "ABD nin ölçüsü DBC nin ölçüsü ve ACD nin ölçüsüne eşittir, DBC nin ölçüsü ise BDC açısı x cinsinden" şeklinde yanlış okuması, sembolik temsillerin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etmede zorlanmasına sebep olmuştur. Çizimde verilen eşit açı çiftleri için kullanılmış olan nokta ve çentikler, öğrencinin hangi açıların eşit olduğunu anlamasına yardımcı olmuştur. Lara'nın tek değişken ile ($m(\hat{A})$ gibi) temsil edilen açıların geometrik çizimdeki yerini göstermede üç değişken ile ($m(\widehat{ABC})$ gibi) temsil edilen açıları göstermeye nazaran daha başarılı olduğu görülmüştür. Problem metninde verilen sembolik temsilleri anlamada ve yerlerini tespit etmede sıkıntı yaşaması, çözümü gerçekleştirememesi ile sonuçlanmıştır.

Bora problemdeki açıların ölçülerinin eşit olduğunu temsil eden sembolik temsilleri okurken çizim üzerinden takip etmiş ve sembolik temsiller ile çizim bağlantısını kurmuştur. Kayla'nın da geometrik çizim ile sembolik temsilleri senkronize takip edebildiği gözlemlenmiştir.

Tuna'nın problem metninde açıyı ifade etmekte kullanılan temsili bilmediği, bu sembolik temsilleri üçgen olarak okuduğu, fakat verileri çizim üzerinde incelediğinde ABD bir üçgen oluşturmayacağı için $m(\widehat{ABD})$ temsilinin üçgeni değil açıyı temsilde kullanıldığına kani olmuştur.

Ata'nın $m(\widehat{ABD})$ şeklindeki sembolik temsili "açının derecesi" olarak okuması, bu temsilin neye işaret ettiğini bildiğini göstermiştir. Eşit olan açı çiftlerini okurken verilen çizimde eşit açı çiftlerine kalemiyle işaret ettiği gözlemlenmiştir.

Arya, problem metninde verilen sembolik temsilleri doğru bir şekilde okumuş ve verilen çizim üzerinde eşit ölçülü açıları gözlemleyebilmiştir.

- Geometrik araçları kullanma: Tuna "bu çizgileri uzatmayı düşünüyorum, şu şekilde. Uzatabileceğimiz çizgiler bunlar duruyor, işimize yarayabileceklerden" yorumunda bulunarak CD ve DB doğru parçalarını AB ve AC kenarlarıyla kesişecek biçimde uzatmış ve oluşan ters açının da y ile temsil ettiği BDC açısına eşit olduğunu doğru bir şekilde ifade etmiştir.

Ata, problemin çözümü için giriştiği ikinci denemesinde A açısının dış açısını çizmiş ve dış açının B ve C açılarına atadığı değişkenlerin toplamı olduğunu "*iki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıya eşit olması*" bilgisini devreye sokarak ifade etmiştir.

Ata dördüncü denemesinde ise, A noktasından BC kenarına D noktasından geçecek şekilde bir doğru parçası çizmiş ve bu doğru parçasının BC kenarını dik kestiğini ve D açısını iki eşit parçaya ayırdığını düşünmüş ancak bu düşüncesinin yarattığı DBC ve DCB açılarının eşit olacağı çelişkisini görerek düşüncesinden vazgeçmiştir.

3.1.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin cebir bilgi yapıları ve sembolik manipülasyon becerileri bu bölümde sunulmuştur. Tablo 3.6.'da öğrencilerin cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon temalarına ilişkin alt temalar verilmiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Sembolik temsilleri kullanma: Bora eşit ölçülü açı çiftleri olan ABD ve DBC ile ACD ve DCB açılarına sırasıyla y ve z değişkenlerini, BDC açısına t değişkenini atamıştır.

Tablo 3.6. *Ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

SEMBOLİK MANİPÜLASYON	CEBİR BİLGİ YAPISI
Sembolik temsilleri kullanma **Bora**, **Tuna**, **Ata** - bilinmeyenlere sembolik temsil atamaları. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Kayla**- sayısal veri olmamasından dolayı soruyu zor bulması, **Ata** - sayısal veri bulmayacağının farkında olması. Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme **Bora**, **Kayla**, **Ata** - "x cinsinden" ifade etmeyi "x in bir katı" olarak değerlendirmeleri. **Kayla**, **Arya** - ölçüsü "x cinsinden" istenen açıya x yazmaları. Sembolik manipülasyon becerisi **Ata** - anlamsız sembolik manipülasyonu Cebirsel işlem becerileri: **Bora** - üç bilinmeyenli iki denklemin ikişer değişkenini yok etme yöntemi ile yok ederek $x - 2t = -180$ denklemine ulaşması ancak t (problemde ölçüsü istenen açı) açısını x cinsinden yazmaya çalışırken yaptığı cebirsel işlem hataları.	Denklem kurma **Bora** - ABC ve BDC üçgenlerinin iç açıları toplamı denklemlerini atadığı değişkenler ile doğru bir şekilde ifade etmesi. **Tuna** – Çeşitli geometrik araçlar kullanarak oluşturduğu üçgenlerin iç açılar denklemlerinden birini doğru diğerini yanlış kurması ve fazla değişken kullandığını ifade ederek çözüme devam etmemesi. **Ata** – Yazdığı iç açılar denklemlerini ortak çözmek yerine ölçüsünün x cinsinden yazmasının istendiği açı için kabullerde bulunması . Çelişkiler elde ederek varsayımlarından vazgeçmesi. **Ata** - İkinci denemesinde A açısının dış açısını B ve C açılarının toplamına eşit olması özelliğini kullanmak üzere denklemler yazması. Cebirsel özellik kullanma **Ata** – Parantez kullanım hatası, "artıyı dağıtmak" olarak ifade ettiği eylem ile değişkeninin işaretini pozitife çevirmesi. **Ata** – Yazdığı denklemlerde eşitliğin geçişme özelliğini kullanması.

Sembolik Manipülasyon

- Sembolik temsilleri kullanma: Tuna'nın problem metnini okuduktan sonraki ilk eylemi, x cinsinden ölçüsü istenen açıya x değişkeni yazmak olmuş, ancak A açısının ölçüsünün x olarak verildiğini fark edince "biz buraya [BDC açısını kastediyor] x değeri vermiştik, A da x vermiş. O zaman değeri değiştirmeliyiz. x cinsinden soruyor ama" yorumunda bulunmuştur. Görüşmenin ilerleyen kısımlarında da BDC açısına x değişkenini atamayı düşünmüş, fakat A açısı ile eşit olacak olması öğrencinin düşüncesini değiştirmesine sebep olmuş ve "görünüm olarak eşit durmuyorlar. D açısı daha çok geniş açıyı anımsatıyor. A açısı da dar açıyı" yorumunda bulunmuştur.

Bir diğer çözüm stratejisinde Tuna, BD doğrusunun AC kenarı ile kesişimi ile oluşan açılara da g ve d değişkenleri atamıştır. Oluşan açılara farklı değişkenler atamasını "köşeli olması 90 derece yapıyordu, bunlar farklı açılar olur" şeklinde açıklamıştır. Böylece Tuna, BD doğrusunun AC kenarını dik kesmeme ihtimalini göz önünde bulundurmuştur.

Ata çözüm için giriştiği ilk denemesinde BD ve CD açıortaylarının oluşturduğu açılara sırasıyla z ve y değişkenlerini atamış ve bu değişkenler ile ABC üçgeninin iç açılar toplamı denklemini yazmıştır. A dış açısını B ve C açıları cinsinden yazma şeklindeki ikinci denemesinde ise eşit ölçülü ABD ve DBC açı çiftine a, eşit ölçülü ACD ve DCB açı çiftine z değişkeni atamıştır. Bu denemesinde de bir sonuca ulaşamayınca, BDC açısına y değişkenini atamıştır. Öğrenci değişkenler içinde boğulmuş ve ABC ve BDC üçgenleri için yazdığı iç açılar toplamı denklemlerini cebirsel anlamda değerlendirememiştir.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Kayla'nın x cinsinden yazma hakkında belirli bir görüşe ulaşmasının ardından "Ya evet, aslında böyle şeyler zor geliyor, çünkü herhangi bir rakam verilmemiş, yani nasıl bulabileceğimiz hakkında, açı verilmemiş" yorumunda bulunmuştur. Sayısal değerlerin verilmediği bir problemin çözülüp çözülemeyeceği sorulduğunda "çözülebilir ama çok zor geliyor" cevabını vermiştir.

Ata'nın *BDC* açısının ölçüsüne dair "belli değil, sadece bilinmeyen atayarak bulabiliyoruz" şeklindeki yorumu ile, açının sayısal bir değer almayacağını bildiğini göstermiştir.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme: Bora "x cinsinden" ifadesini "x in bir katı veya x e benzer olarak demiş olabilir" şeklinde açıklamıştır. Bora BDC açısına t değişkenini atayıp doğru şekilde kurduğu denklemlere uyguladığı doğru sembolik manipülasyon ile $x - 2t = -180$ denklemine ulaşmıştır. Öğrencinin bu aşamadan sonraki adımı t değişkenini yalnız bırakmak olmasına rağmen, bu işlemi gerçekleştirememiştir.

Kayla'nın problem metnini okuduktan sonra x cinsinden ölçüsü istenen açıya x değişkeni yazması, "x i neden buraya [A açısını göstererek] koymuş" sorusunu yöneltmesi ve "bize A açısını soruyor" yorumunda bulunması öğrencinin bir değişkeni bir başka değişken cinsinden ifade etmenin ne anlama geldiğini bilmediğini göstermiştir. x cinsinden yazmanın ne demek olduğu sorulduğunda ise, önce "onunla orantılı" ve görüşmenin ilerleyen dakikalarında "x in katı" şeklinde açıklamıştır.

Ata problemi okuduktan sonra kendisinden "bize x i soruyor" yorumuyla x değişkeninin değerinin istendiğini düşünmüştür. Ata üçüncü denemesinde BDC açısına önce $2x$ ve sonra $\frac{x}{2}$ değişkenlerini atayarak ABC ve BDC üçgenlerinin iç açıları toplamı

denklemlerini birbirine eşitleme stratejisi izlemiştir, ancak bu strateji sonuç vermeyince "demek ki x in bir katı değilmiş burası" yorumunda bulunmuştur.

Arya'nın da ilk eylemi BDC açısına x değişkenini yazmak olmuştur. Kendisine BDC açının x olup olmadığı sorulunca olmadığını söylemiş olsa da, ilerleyen dakikalarda "üçgenin iç açıları toplamı *180* derece olduğu için acaba bu [BDC açısını göstererek] x e eşit olabilir mi diye düşündüm" yorumunda bulunmuştur. Arya ABC açısını x cinsinden "$180 - x$" olarak ifade etmiş, ancak sonrasında bu durumda ACB açısına bir değer kalmayacağı için bu düşüncesinden vazgeçmiştir.

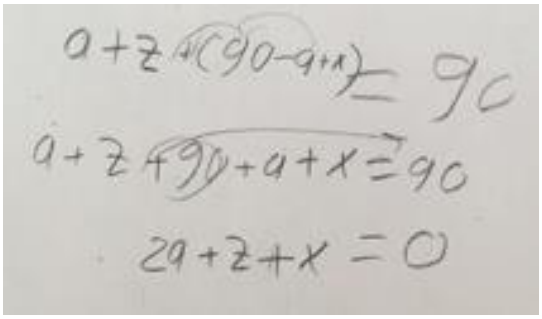
- Sembolik manipülasyon becerisi: Ata ABC ve ACB açılarına sırasıyla $2a$ ve $2z$ değişkenlerini atayıp, "*iki iç açının toplamının kendilerine komşu olmayan açının dış açısına eşit olması*" özelliğini kullanarak kurduğu denklem ve denkleme uyguladığı manipülasyonlar Şekil 3.6.'daki gibi gerçekleşmiştir.

$$2a + 2z + (180 - 2a + 2x) = 180 \ldots \text{I}$$
$$a + z + (90 - a + x) = 90 \ldots \text{II}$$
$$a + z + 90 + a + x = 90 \ldots \text{III}$$
$$2a + z + x = 0 \ldots \text{IV}$$

Şekil 3.6. Ata'nın *iki iç açının toplamının dış açıya eşit olduğu özelliğini kullanarak kurduğu denklem ve denkleme uyguladığı manipülasyon*

Sembolik manipülasyonu sonucunda Ata'ya elde ettiği denklemin ne anlama geldiği sorulduğunda, "Yani $2a$, z ve x hiçbir şeye eşit değil" cevabını vermiştir. Öğrencinin kurduğu denklemin hatalı olması ve kusurlu cebirsel özellik uygulamalarına rağmen öğrencinin bu yorumu yapmış olması, yürüttüğü sembolik manipülasyonun anlamsız olduğunu fark ettiğini göstermiştir. Manipülasyonunun anlam kazanması için II. satırda "çünkü bu iki açının [B ve C açılarına işaret ederek] daha büyük olacağını düşünüyorum. Bunların ikisi burayı [A nın dış açısına işaret ederek] vereceği için daha büyük olacağını düşündüm" yorumu ile $a + z + (a + x - 90) = 90$ değişikliğini yaparak $2a + z + x = 180$ denklemini elde etmiştir. Yaptıklarının anlamlı olup olmadığı sorulduğunda "değil, saçma oldu birazcık" yorumunu yapmıştır. Ata'nın gerçekleştirdiği sembolik manipülasyonlarda terimlere hareket eden nesneler gibi

davranmakta olduğu "Bu *90* eksi olarak gider…" ifadesi ve Görsel 3.3.'de görüldüğü gibi 90 ı daire içine alıp eşitliğin karşı tarafına bir ok çizmesinden anlaşılmaktadır.



Görsel 3.3. *Ata'nın ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon*

Ata farklı çözüm yolları geliştirebilmiştir. Ancak cebirsel özellikleri yanlış kullanması ve sembolik manipülasyon becerilerinin kısıtlı olması, öğrencinin sonuca ulaşmasına engel olmuştur.

- Cebirsel işlem becerileri: Bora, yazmış olduğu üç bilinmeyenli iki adet denklemin ikişer değişkenini yok etme yöntemi ile yok etmiştir. Bunun için $y + t + z = 180$ denklemini -2 ile genişletmiş ve bu denklemi $x + 2y + 2z = 180$ denklemi ile toplamıştır. Sol taraftaki toplama x değişkenini eklemeyi unutunca $t = 90$ elde etmiş ve BDC açısını göstererek "bura *90* olmaz, değil mi" yorumunda bulunmuştur. Bora yaptığı hatayı fark edince $x - 2t = -180$ denklemine ulaşmış ve denklemin her iki tarafını $x - 2t$ ifadesine bölme sürecine girişmiştir. $x - 2t$ ifadesini $x - 2t$ ifadesine oranlamış ve sadeleştirme yaparken toplamsal ifadeyi bir blok olarak sadeleştirmesi gerekirken önce x değişkenlerinin ve sonra $-2t$ değişkenlerinin üstünü çizmiş ve "gittiler. Ama hiçbir sonuca varamadık. Bu kadar zor olacağını bilmiyordum ya. Aslında zor değil, di mi? Bana öyle geliyor" yorumunda bulunmuştur. Öğrencinin $\frac{x-2t}{x-2t}$ oranının 1 olduğunu göremediği gözlemlenmiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Denklem kurma: Bora, ABC ve BDC üçgenlerinin iç açıları toplamını sırasıyla $x + 2y + 2z = 180$ ve $y + t + z = 180$ denklemleri ile ifade etmiştir.

BD doğrusunun AC kenarı ile kesişimi ile oluşan açılara da g ve d değişkenleri atamış olan Tuna, bu doğruların kesim noktası (yazarın notu: kolay takip edilebilmesi açısından bu nokta H olsun) ve A, B noktaları ile B, C noktaları ile oluşan üçgenler için iç açılar toplamı denklemini kurmuştur. ABH üçgeni için kurduğu $x + z + g = 180°$

denklemi doğru iken BHC üçgeni için kurduğu $z + d + a = 180°$ denklemi yanlış olmuştur. Öğrenci bu aşamadan sonra devam edemeyeceğini ifade etmiş ve "biraz fazla bilinmeyenleri artırarak bir hata yaptığımı düşünüyorum" açıklamasında bulunmuştur.

Ata, B ve C açılarına atadığı değişkenler ile ABC üçgeninin iç açıları toplamını $2z + 2y + x = 180$ denklemi ile doğru bir şekilde ifade etmiştir. BDC açısının $z + y + \frac{x}{2}$ ifadesine eşit olduğunu "z, y ve x in yarısı buraya [D açısını göstererek] eşittir. *2* katı, açılar *2* katına çıktığı için yarıya düşürdük" açıklaması ile öne sürmüştür. Öğrencinin düşüncesinin cebirsel olarak kusurlu olduğu görülmüştür. Ata, ABC üçgeninin $2z$ ve $2y$ ölçülü açıları ile BDC üçgeninin z ve y ölçülü açıları arasındaki iki kat ilişkisinden yola çıkarak BDC açısının ölçüsünü bulacağını düşünmüştür.

Ata problemin çözümü için giriştiği ikinci denemesinde, A açısının dış açısını çizmiş ve "bu dış açının ölçüsü B ve C açılarının toplamına eşit" ifadesi ile özellik kullanmak istemiştir. Ata'nın "bunların ikisinin dış açıyı vereceği için [B ve C açılarını göstererek A nın dış açısına işaret ediyor], bunlardan bunu çıkardığın zaman *180* den bu dereceyi bulacağımız için" şeklindeki ifadesi ile yazmak istediği denklemin $180 - x = 2a + 2z$ olduğu anlaşılmıştır. Ata sözel olarak $2x$ ifadesine $2z$ olarak hitap etmiş ve $2a + 2z + (180 - 2a + 2x) = 180$ denklemini yazmıştır. Öğrencinin aritmetik hatalar içeren ifadesi üçgenin bir dış açısı ile $180°$ den dış açının çıkarılarak elde edilen iç açının toplamının $180°$ anlamında olduğu anlaşılmıştır. Sembolik ifadesinin bir totoloji olduğunun Ata'nın farkında olmadığı gözlemlenmiştir.

Ata üçüncü denemesinde, x cinsinden yazılması istenen D açısının ölçüsünü $2x$ olarak kabul etmiş ve ABC ve BDC üçgenlerinin iç açıları toplamını veren $a + z + 2x = 180$ ve $2a + 2z + x = 180$ denklemlerini yazmış ve bu denklemleri eşitliğin geçişme özelliğini kullanarak birbirine eşitlemiştir. Bu kabul ve manipülasyonlar sonrası elde ettiği $x = a + z$ ilişkisinin bu koşullar altında üçgen oluşturamayacağını öğrenci fark etmiştir.

Arya, ABC üçgenin iç açıları toplamı için kurduğu sözel denklem "x artı B açısı artı C açısı eşittir 180 derece" şeklinde olup ABC ve ACB açılarına sırasıyla y ve z değişkenlerini atayarak $x + y + z = 180$ denklemini yazmıştır.

- <u>Cebirsel özellik kullanma</u>: Ata, iki iç açının toplamının dış açıya eşit olduğu özelliğini kullanarak yanlış bir biçimde kurduğu $2a + 2z + (180 - 2a + 2x) = 180$ denklemin her iki tarafını ikiye bölerek $a + z + (90 - a + x) = 90$ denklemine ulaşmış

ve "parantezi açmak için artıyı dağıtacağım" ifadesinde bulunarak $a + z + 90 + a + x = 90$ yazmıştır. Öğrencinin parantez kullanımı yanlış olduğu gibi "artıyı dağıtmak" olarak ifade ettiği eylem ile a değişkeninin işaretini pozitife çevirmiştir.

Ata'nın x cinsinden yazılması istenen D açısının ölçüsünü $2x$ olarak kabul ettiği ve ABC ve BDC üçgenlerinin iç açıları toplamını veren $a + z + 2x = 180$ ve $2a + 2z + x = 180$ denklemlerini yazıp bu denklemleri birbirine eşitlemesi, eşitliğin geçişme özelliğini kullanabildiğini göstermiştir.

3.1.4. Ön klinik görüşmenin dördüncü problemine ilişkin bulgular

Ön klinik görüşmenin Şekil 3.7.'de verilen dördüncü probleminde üçgenin iç açı ölçüleri değişkenler ile ifade edilmiştir. Bu değişkenlerin birbiri cinsinden ifade edilmesi ve eşitsizlik kavrayışı gerektirmesinden ötürü ağırlıklı olarak cebirseldir.

Bir $\boldsymbol{ABC}$ üçgeninin iç açıları arasında $\boldsymbol{4m(\widehat{A}) > 5m(\widehat{B}) - 4m(\widehat{C})}$ ilişkisi olduğuna göre $\boldsymbol{m(\widehat{B})}$ nin alabileceği en büyük tamsayı değeri kaç derecedir?

Şekil 3.7. *Ön klinik görüşmenin dördüncü problemi*

3.1.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin ön klinik görüşmenin dördüncü probleminde, geometrik bilgiyi nasıl devreye soktuklarına dair bulgular elde edilmiştir.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik temsilleri kullanma: Tuna hariç tüm öğrenciler problemin temsili için bir üçgen çizmiş ve üçgeni A, B ve C ile harfleri ile adlandırmışlardır. Bora çizdiği üçgenin açılarını işaretleyerek "4 tane A açısı, bundan [A açısını göstererek] 4 tane, bundan 5 tane [B açısını göstererek]" yorumunda bulunması öğrencinin problemde verilen katsayıların açı ölçülerinin katları olduğunu anladığını göstermiştir. Bora açıların katlarını görselleştirmek amacıyla, A açısının bulunduğu köşeden yaklaşık A açısı büyüklüğü kadar dört tane A açısı çizmiştir.

Kayla'nın bu problemde köşe, kenar ve açı kavramları ile ilgili kavram karmaşası yaşamadığı gözlemlenmiştir.

3.1.4.2. Cebirsel Muhakemenin Geometri Bilgi Yapısına Etkisine İlişkin Bulgular

Ön klinik görüşmenin dördüncü probleminde, odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometrik bilgi yapısına etkisine ilişkin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, sembolik manipülasyon ve cebir bilgi yapısı olmak üzere üç alt temada bulgu elde edilmiştir. Bu alt temalara ait bileşenler Tablo 3.7.'de sunulmuştur.

Tablo 3.7. *Ön klinik görüşmenin dördüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	CEBİR BİLGİ YAPISI
Aritmetik ön bilgiler **Lara** - eşitsizlik operatörleri ile aritmetik operatörlerini birbirinden ayırt edememesi, eşitsizliği denklem olarak algılaması. **Lara**, **Ata** - eşitsizliğin bir kısmını algılamaları. **Tuna** - eşitsizliğe "denklem" olarak hitap etmesi.	Sembolik temsilleri kullanma **Lara**, **Bora** - açı ölçüsünü temsili olan m sembolünün açının ölçüsünü temsilde kullanıldığını ve katsayıların ilgili açı ölçülerinin katları olduğunu anlamaları. **Kayla**, **Ata** – üçgenin iç açılarına açı temsillerinin katsayıları ile orantılı olacak biçimde tek değişken atamaları. **Arya**'nın açı ölçülerine farklı değişkenler ataması. Değişkenin doğasını anlama **Kayla**, **Ata** – eşitsizliği açı ölçülerinin katsayılarını ihmal ederek yorumlamaları ve açı ölçülerinin açı temsillerinin katsayıları ile orantılı olduğunu düşünmeleri. **Tuna** - $5m$ ifadesini dağıtılacak bir nesne olarak görmesi. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Kayla**, **Ata** - üçgenin açılarına eşitsizlikte verilen katsayılar ile orantılı olacak biçimde tek değişken kullanarak iç açılar toplamı denklemini yazmaları. Sembolik manipülasyon becerisi **Lara** – sözdizimsel yaklaşımı.	Denklem kurma **Kayla** – $4x + 5x - 4x = 180$ ve $4x + 5x + 4x = 180$ **Ata** – $4m + 5m + m = 180$ **Arya** – $A + B + C = 180$ ve $4A + 5B + 4C = 180$ denklemlerini kurmaları. Cebirsel ön bilgiler **Lara** - Eşitsizliğin $4m(\hat{A}) > 5m(\hat{B})$ kısmı için yapmış olduğu "A , B den büyükse olabilir" yorumunun doğru oluşu. **Bora** – Verilen eşitsizliği doğru yorumlaması.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik ön bilgiler: Lara'nın eşitsizlik operatörleri ile aritmetik operatörlerini birbirinden ayırt edemediği ve eşitsizliği bir denklem olarak algıladığı "büyüktür, sonra fark olmuş. Aynı denklem içinde ben hiç kullanıldığını görmedim" şeklindeki açıklamasından anlaşılmıştır. Benzer şekilde Tuna da eşitsizliğe "denklem" olarak hitap

etmiştir. Araştırmacı Lara'ya denklemin ne olduğu sormuş ve öğrenci denklemi "denklem, bilinmeyen olduğunda denklem olur" şeklinde açıklamıştır. Öğrencinin eşitsizlikteki A ile B açıları hakkında "4 kat, 5 kattan nasıl büyük olur" şeklindeki sorusuna kendisinin verdiği "A, B den büyükse olabilir" yanıtı, eşitsizliği A ile B açıları arasında algıladığını göstermiştir. İlerleyen dakikalarda Lara'nın "şuraya [$5m(\hat{B}) - 4m(\hat{C})$ kısmına işaret ederek] kafam çok takıldı. Şuraya [$5m(\hat{B})$ ile $4m(\hat{C})$ arasına işaret ederek] eşittir koysaydı" şeklindeki yorumu öğrencinin zihninde bir matematiksel cümlenin aynı anda hem eşitsizlik hem de eşitlik içerebileceğini göstermiştir.

Ata'nın A, B ve C açılarına sırasıyla $4m$, $5m$ ve m değişkenlerini atadıktan sonra üçgenin iç açıları toplamından elde ettiği $m = 18$ değerinin doğru cevap olmayışını "$4m$ nin daha büyük olması lazım ama $5m$ daha büyük oluyor" şeklinde açıklaması, Lara gibi eşitsizliği A ile B açıları arasında algıladığını göstermiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Sembolik temsilleri kullanma: Lara ve Bora'nın açı ölçüsünü temsilde kullanılan m sembolünün açının ölçüsü temsili olduğunu bildiği ve problemdeki açı ölçülerine ait katsayıların ilgili açı ölçülerinin katları olduğunu anladığı gözlemlenmiştir.

Kayla $4m(\hat{A})$ sembolik temsilini "A açısı $4m$" şeklinde okumuş ve "A açısının, eğer 4 olmasaydı A açısının ölçüsü diye okurdum" açıklamasında bulunmuştur. A ve B açılarına sırasıyla $4x$ ve $5x$, C açısına biraz tereddüt ederek $-4x$ değişkenlerini eşitsizlikteki katsayılar ile orantılı olacak biçimde atamıştır. Bu değişkenler ile üçgenin iç açıları toplamı denklemini çözerek $x = 36$ elde etmiş ve ABC üçgeninin iç açıları toplamının 180 dereceyi aştığını fark edince C açısına $4x$ değişkenini atamıştır. Benzeri düşünce Ata'da gözlemlenmiştir. Ata A ve B açı ölçülerine açı temsillerinin katsayıları ile orantılı olacak biçimde sırasıyla $4m$, $5m$ ve C açısına m değişkenini atamıştır. Arya ise, Kayla ve Ata'dan farklı olarak açı ölçüleri için farklı değişkenler kullanmıştır.

- Değişkenin doğasını anlama: Kayla'nın $4m(\hat{A}) > 5m(\hat{B}) - 4m(\hat{C})$ eşitsizliğini "B açısı ile C açısının birbirinden çıkardığımız zaman A dan küçük bir açı oluyormuş" şeklinde açı ölçülerinin katsayılarını ihmal ederek yorumlaması ve açı ölçülerinin açı temsillerinin katsayıları ile orantılı olduğunu düşünmesi, öğrencinin değişkenin doğasını anlamadığını ortaya koymuştur.

Tuna açı ölçüsünü temsilde kullanılan m sembolünü "açının önündeki ifade diye biliyorum" şeklinde açıklamış ve $5m$ ifadesini katsayıya sahip bir değişken olarak algılayıp dağıtılacak bir nesne olarak gördüğü gözlemlenmiştir.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Kayla ve Ata'nın üçgenin açılarına eşitsizlikte verilen katsayılar ile orantılı olacak biçimde tek değişken kullanarak iç açılar toplamı denklemini yazmaları değişkenin sayısal değerine ulaşma isteklerini ortaya koymuştur.

- Sembolik manipülasyon becerisi: $4m(\hat{A}) > 5m(\hat{B}) - 4m(\hat{C})$ eşitsizliğinin denklem olduğunu ifade eden Lara'ya yöneltilen "biz denklemlerde neler yapıyoruz" sorusuna öğrencinin verdiği "eşitliğin iki tarafını eşitlemeye çalışıyoruz ya da sadeleştiriyoruz, genişletiyoruz, gönderiyoruz o tarafa" şeklindeki cevabı, Lara'nın denklemlere sözdizimsel yaklaştığını göstermiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Lara problemde verilen eşitsizliğin C açısı ile ilgili kısmını anlamlandıramamasından dolayı $4m(\hat{A}) > 5m(\hat{B})$ kısmı için yapmış olduğu "A, B den büyükse olabilir" yorumunun doğru olduğu görülmüştür. Benzer şekilde Bora da ilk olarak $4m(\hat{A}) > 5m(\hat{B})$ ifadesi için "O zaman *4* tane A açısı, *5* tane B açısından büyükse A açısı daha büyüktür B den" ve "çünkü 5 tane olsa bu [B açısına işaret ederek] A ya yetişememiş" yorumlarında bulunmuş, fakat hemen sonrasında "hayır, dur, şurası [eşitsizliğin sağ tarafının altını çizerek] bir bütün. Yanlış oldu. *5* tane B açısından 4 tane C açısını çıkartırsak *4* tane A dan büyük olmuyor" açıklaması ile soruyu doğru bir şekilde anladığını ortaya koymuştur.

- Denklem kurma: Kayla; tüm açılar için aynı değişkeni kullanarak ve eşitsizlikteki katsayılar ile orantılı olacak biçimde A açısına $4x$, B açısına $5x$ ve C açısına $-4x$ değişkenlerini atamış, üçgenin iç açıları toplamı denklemini kurmuş ve bu denklemden $x = 36$ elde edince, C açısına $4x$ değişkenini atamıştır. İç açıları denkleminden bu sefer $13x = 180$ elde etmiş, 180 sayısını 13 e bölmüş ve "tam çıkmıyor" yorumunda bulunmuştur.

Ata A, B ve C açılarına sırasıyla $4m$, $5m$ ve m değişkenlerini atadıktan sonra, üçgenin iç açıları toplamından $10m = 180$ denklemini kurmuş ve $m = 18$ değerine ulaşmıştır. Problemin çözümüne ulaşıp ulaşmadığı sorulunca "hayır, şuradaki [eşitsizliğe

işaret ederek] büyüktür işaretinden dolayı ulaşamadım" cevabını vermiş ve "$4m$ nin daha büyük olması lazım ama $5m$ daha büyük oluyor" açıklamasını yapmıştır.

Arya ABC üçgeninin iç açıları toplamını veren $A + B + C = 180$ denklemini yazmış ve eşitsizliği göz önüne alarak A, B ve C açıları arasında bir sıralama yapmaya çalışmış ancak bir sonuca ulaşamamıştır.

> Arya: En büyük açı A olabilir mi?
>
> Araştırmacı: Öyle mi düşünüyorsun?
>
> Arya: Sanırım çünkü B açısının 5 katından C açısının 4 katı çıktığında bu [$4m(A)$ göstererek] büyük oluyor. Emin değilim.
>
> Araştırmacı: Peki, o ilişkiyi değerlendir bakalım.
>
> Arya: Yani C açısı bence en küçük açı.
>
> Araştırmacı: Nasıl anladın peki?
>
> Arya: B açısından C açısı çıktığına göre B açısı daha büyük.
>
> Araştırmacı: B açısından C açısı mı çıkıyor peki?
>
> Arya: Hayır, B açısının 5 katından C açısının 4 katı çıkıyor. [Sessizlik]

Arya'nın açı ölçüleri arasında bir sıralama yapmaya çalışmasının ardından verilen eşitsizlikteki katsayıları kullanarak "A açısına x desek, A nın 4 katı $4x$ olur, B ye z desek $5z$ ve C ye de y dersek $4y$ eşittir 180 olur" yorumunda bulunarak $4x + 5z + 4y = 180$ denklemini yazmıştır. Öğrenciye ilk yazdığı $A + B + C = 180$ denklemi ile bu denklemi yorumlaması istendiğinde, yazdığı $4x + 5z + 4y = 180$ denkleminin yanlış olduğuna karar vermiştir:

> Araştırmacı: İlk denklemin neyi temsil ediyor?
>
> Arya: İlk denklemim üçgenin iç açıları toplamı 180 dir.
>
> Araştırmacı: İkinci denklemin neyi temsil ediyor?
>
> Arya: O da aynı. Hayır, ben bu sefer bunların katlarını, bu ikinci denklemde yanlış bir şey yapmış oldum sanırım.
>
> Araştırmacı: Neden?
>
> Arya: Çünkü iç açılarına x, y, z verdim sonra 180 olmaz bunların toplamları…
>
> Araştırmacı: Nasıl olur? Daha mı büyük olur daha mı küçük olur?
>
> Arya: Daha büyük olur.

Arya üçgenin iç açıları toplamından faydalanarak açılardan birini diğerleri cinsinden parantez kullanmadığından dolayı, $180 - x + z = y$ şeklindeki ifadesi yanlış olmuştur.

3.2. Birinci Etap Öğretim Dizisine İlişkin Bulgular

Bu bölümde ara klinik görüşmelere kadar devam eden ve beş hafta süren öğretim dizisinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Öğretim dizisinden elde edilen bulgular geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ve cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi başlıkları altında haftalık olarak sunulmuştur.

3.2.1. Birinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin ilk haftasında CG-II yazılımı öğrencilere tanıtılmıştır. Açı kavramı, paralel iki doğrunun bir kesen ile kesildiğinde oluşan açılar ve üçgenin temel elemanları öğrenciler ile tartışılmıştır. Birinci hafta öğretim dizisi öğrencilerin geometri ve cebir alanlarında sahip oldukları ön bilgileri, geometrik nesneleri kavrayışları ve cebirsel işlem becerileri hakkında ön klinik görüşmelerden elde edilen bulgular ışığında düzenlenmiştir. Araştırmanın yürütüldüğü sınıfın öğrencilerinin tümü önceki öğrenim safhalarında dinamik geometri yazılımlarını duymadıkları ve yazılımlardan herhangi birinin kullanıldığı bir öğrenme ortamını deneyimlemediklerini ifade etmişlerdir.

3.2.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin matematiksel ifade ve eylemleri geometrik bilgi ve geometrik düşünme temaları altında Tablo 3.8.'de sunulmuştur.

Tablo 3.8. *Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftası- geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK DÜŞÜNME
<u>Geometrik ön bilgiler</u> Açı ve üçgenin temel elemanlarına ait kazanım eksiklikleri. Utku – üçgenin iç açılar toplamının 180° olduğunu ispatlaması. <u>Kural temelli öğrenmeler</u> **Bora**, **Ata**, birçok öğrenci - Z kuralı: ancak kuralı açıklayamama. <u>Terminoloji kullanma</u> - Yanlış terim kullanımı. <u>Tanım yapma becerileri</u> Öğrenci tanımları formal yapıda olmayışı, tanım için beden dili kullanma, tanım yerine kavramın özelliklerini sıralama ya da varsa çeşitlerini sayma. Açının dinamik tanımını bilmeme.	<u>İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler</u> **Kayla** "ters açıların ölçülerinin eş oluşunu, doğruda açı kavramı ile ilişkilendirmesi. **Arya** ve Bahar'ın dış açıyı bütünler açılar ile ilişkilendirmesi.

Tablo 3.8. (Devam) *Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftası- geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Prototip fenomeni Kaptan – CG-II yazılımında çizdiği üçgenin eşkenar üçgen görünümünde ve üçgenin tabanının yatay düzleme paralel olması, üçgeni büyütünce sürükleme aracı ile yine eşkenar üçgene benzeyen ve tabanı yatay düzleme paralel olacak biçimde sürükleme.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler Üçgenin dış açılarının sayısının üçten fazla olduğunu söyleyen öğrencilerin bu durumu paralel doğruların bir kesen ile kesildiğinde oluşan açılar bilgisi ile ilişkilendirmiş olmaları.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Öğretim dizisinin gerçekleştirildiği sınıftaki öğrencilerin büyük çoğunluğunun açı ve üçgenin temel elemanlarına ait kazanımlarının 9. sınıf seviyesi için yetersiz ve sınırlı olduğu, öğretim dizisinin ilk dersinde öğrencilere yöneltilen sorulara vermiş oldukları cevaplardan anlaşılmıştır. Geometrik kavramlarla ilgili kullandıkları terminoloji ve bu kavramlara ilişkin özellikler hakkındaki ifadelerinin bu görüşü destekler nitelikte olduğu görülmüştür.

Paralel iki doğrunun bir kesen ile kesildiğinde oluşan açılar üzerine yapılan tartışmada "yöndeş açıların ölçüsü farklıdır", "yöndeş açıların toplamı *180* e eşittir" şeklinde yanlış kazanımlara sahip öğrencilerin olduğu görülmüştür.

Üçgenin dış açılarının sayısının ne olacağı sorusuna ise öğrencilerin verdiği cevaplar "*2, 3, 4, 6, 9,* sonsuz" şeklinde olmuştur. Öğrenciler ayrıca üçgenin dış açılarının toplamından da emin olmadıklarını söylemekle beraber "*180*" ve "*360*" olduğunu düşündüklerini ifade etmişlerdir. Tümler açılar ve bütünler açılar ile ilgili olarak odak öğrenci Bora "bir açının bütünleyeni *360* dereceye tamamlar" ifadesinde bulunmuştur.

Bir ışını doğru parçası olarak algılayan öğrenciler olmakla beraber Ece, ışın ile doğru arasındaki ayrımı "doğru iki yöne de gider sonsuza kadar ama ışında bir noktada durur, diğerinde sonsuza kadar gider" ifadesi ile doğru bir şekilde açıklamıştır. Serhat'ın ise, $[OE$ temsilinin ışını göstermekte kullanıldığını bildiği görülmüştür. Odak öğrenci Bora'nın $[AB]$ temsilinin bir doğru parçasını temsil etmek için kullanıldığını ve odak öğrenci Tuna'nın doğru parçasının sonlu olduğunu bildikleri gözlemlenmiştir.

Üçgenin iç açılar toplamının $180°$ olduğunun ispatını Utku gerçekleştirmiştir. Tahtaya herhangi bir üçgen çizmiş, üçgenin tepe açısının bulunduğu noktadan "yukarı bir çizgi çizeriz" ifadesinde bulunup üçgenin tabanına paralel bir doğru parçası çizmiştir. "kurala göre paralelden ama kuralın ne olduğunu söyleyemem" ifadesinde bulunarak

üçgenin iç açılarına x, y ve z değişkenlerini atamıştır. Üçgenin tepe kısmında oluşan açıları iç ters açılardan faydalanarak üçgenin iç açıları olarak ifade etmiş doğru açı kavramından iç açılarının toplamının 180 derece olduğunu ispatlamıştır. Utku yapmış olduğu ispatı önceden bildiğini belirtmiştir.

- Kural temelli öğrenmeler: Odak öğrenciler Bora, Ata ve diğer birçok öğrenci Z kuralının varlığını ifade etmişler ancak kuralı açıklayamamışlardır. Paralel iki doğrunun bir kesen ile kesilmesiyle oluşan ters ve yöndeş açıların birbirine eşit olması doğruda açı kavramı ile öğrencilere anlatılmıştır.

- Terminoloji kullanımı: Öğrencilerin ters açılara "karşılıklı açılar", "kelebek", "komşu açılar"; iç ters açılara "karşılıklı ters açılar" ve "karşılıklı komşu açılar" olarak hitap etmeleri ve Utku ile odak öğrenci Kayla'nın doğru parçasına "çizgi" olarak hitap etmeleri öğrencilerin yanlış terminoloji kullanımlarına örnek teşkil etmiştir.

Ölçüleri eşit olmayan komşu tümler açı hakkında yapılan tartışmada Emre'nin ortak ışının "açıortay" ve oluşan açıların "eşit açılar" olduğunu ifade etmesi üzerine, diğer öğrencilerin bu görüşe karşı çıkmaları yerinde olmuş ancak öğrenciler bu açılara "karşılıklı açılar", "komşu açılar" olarak hitap etmişlerdir. Odak öğrenci Arya'nın ise, "birbirinin tümleyeni olabilir mi" sorusu ile açıların tümler olduğunu bildiği görülmüştür.

- Tanım yapma becerileri: Öğrencilerin geometrik kavramlara ilişkin yaptıkları tanımların formal yapıda olmadığı, tanımı ifade edebilmek için beden dillerini kullandıkları ve tanım yapmak yerine kavramın özelliklerini sıralama ya da varsa çeşitlerini sayma yoluna gittikleri gözlemlenmiştir. Serhat'ın "iki doğrunun oluşturduğu köşe", odak öğrenci Lara'nın "iki kenarın birleşip ortaya bir derece geldiği", odak öğrenci Kayla'nın "iki doğrunun birleşip aralarındaki açıklığa açı denir" şeklindeki ifadelerinden, öğrencilerin açı tanımlarının statik formda olduğu görülmüştür. Sefa'nın açıyı (parmağıyla işaret ederek) "şu köşeler; dik açı, geniş açı, dar açı, iki köşeyi, ıııı, işte şey şurası, iki doğrunun kesiştiği yer" şeklindeki tanımı da, öğrencinin tanım yapmaktan ziyade açı çeşitlerini ifade etmesi şeklinde gerçekleşmiştir.

Üçgenin temel elemanlarının CG-II yazılımında çalışılması için Kaptan gönüllü olarak akıllı tahtaya gelmiş ve bir üçgen çizmiştir. Öğrenciden üçgenin iç açılarını bulması istenmiş, ancak öğrenci açı ölçme aracını kullanırken açının dinamik tanımını göz ardı etmiş ve iç açıların toplamı 205,5° olarak elde edilmiştir. Yazılımda kullanıcının bir açının ölçüsünü bulabilmesi için açı ölçme aracını fare ile "açıyı oluşturan ışınlardan birinin üzerinde bir nokta-açının köşesi-açıyı oluşturan diğer ışın üzerinde bir nokta"

tıklaması yaparak kullanmasını gerekmektedir, çünkü açının dinamik tanımı bir ışının bir noktadan diğerine olan pozisyon değişikliğindeki dönme ölçüsüdür. Öğrenciler bu tecrübe ile açının dinamik tanımını yaşayarak öğrenme imkânına ulaşmışlardır.

Birinci haftanın ikinci dersinde öğrencilerin ilk derste gözden geçirilen bazı kavramlar ile ilgili yaptıkları tanımların daha formal bir yapıya büründüğü görülmüştür. Belinay'ın doğrusallığı "aynı doğru üzerinde olma", odak öğrenci Bora'nın açıortayı "bir açıyı ortadan iki eşit parçaya bölen doğru" ve odak öğrenci Tuna'nın tümler ve bütünler açıların tanımlarını doğru bir biçimde yapmaları bu duruma örnek verilebilir.

- Prototip algılar: Üçgenin temel elemanlarının CG-II yazılımında çalışılması için akıllı tahtaya gönüllü olarak gelen Kaptan'ın çizdiği üçgenin eşkenar üçgen görünümünde ve üçgenin tabanının yatay düzleme paralel olduğu görülmüştür. Kendisinden üçgeni büyütmesi istenince, sürükleme aracı ile yine eşkenar üçgene benzeyen ve tabanı yatay düzleme paralel olacak biçimde sürüklemiştir.

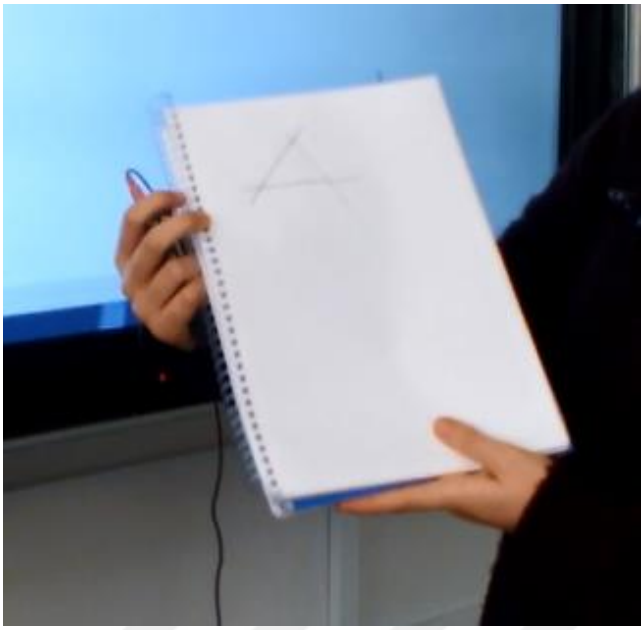
Geometrik Düşünme

- İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler: Birinci etap öğretim dizisinin ilk haftasının birinci dersinde ters açıların ölçülerinin neden birbirine eşit olduğu, doğruda açı kavramı ile anlatılmıştır. Anlatım esnasında odak öğrenci Kayla "Orada bir doğru var ve *180* e eşit bir şey var" şeklindeki açıklaması ile ters açıların ölçülerinin eşit oluşunu, doğruda açı kavramı ile ilişki kurarak gerçekleştirmiştir.

Araştırmacı üçgenin dış açısını çizmiş ve çizdiğinin ne olduğunu öğrencilere sormuştur. Çizilen açıyı odak öğrenci Arya'nın "bütünleri" ve Bahar'ın "komşu bütünleri" olarak adlandırmaları, öğrencilerin üçgenin dış açısını tanımadıkları göstermekle beraber öğrencilerin birinci derste tanımlanan bütünler açılar kavramı ile ilişki kurdukları gözlemlenmiştir.

Üçgenin dış açılarının sayısı üzerine yapılan tartışmada öğrencilerin verdiği yanlış cevapların paralel doğruların bir kesen ile kesildiğinde oluşan açılar bilgisi ile ilişkilendirdikleri, yani dış açı olarak ters ve komşu açıları da saydıkları odak öğrenci Görsel 3.4.'deki Kayla'nın çiziminden anlaşılmıştır.

Bir üçgenin iç açıları toplamının $180°$ olduğunun ispatı için Pelin çokgenin iç açıları toplam formülü olan $(n-2).180°$ formülünü kullanmayı önermiştir. Öğrenci üçgenin bir çokgen çeşidi olduğunu bildiği ve çokgenin iç açı toplamı formülünü kullanarak üçgenin iç açılar toplamının elde edileceği ilişkisini kurduğu görülmüştür.



Görsel 3.4. *Odak öğrenci Kayla'nın üçgenin dış açılarının sayısını göstermek için kullandığı çizim*

3.2.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon ve niceliksel muhakeme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.9.'da bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.9. *Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	NİCELİKSEL MUHAKEME
<u>Cebirsel ön bilgiler</u> Üçgen tanımında **Kayla** "birleşim" teriminin yerine "kesişim" teriminin kullanılması gerektiğini söylemesi. Selin "oran" terimini anlamlandıramazken "kat" terimini anlamlandırması ancak cebirsel olarak ifade edememesi. <u>Denklem kurma</u> Utku, Meltem -Araştırmacı değişken atadığında geometrik bilgi devreye sokarak denklem yazmaları. Selin - sözel olarak ifade ettiğini denklem olarak yazamaması.	<u>Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği</u> Değişkenin değerinin bulunmasının gerekmediği durumlarda değişkenlere sayısal değer atama. **Bora** – (5. problem) değişkenin doğasını anlamama, geometrik bilgi devreye sokmadan değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği. <u>Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme</u> Birbiri cinsinden yazılabilecek bilinmeyenler için birden fazla değişken atama.	**Ata** – (1. problem) niceliksel muhakeme ile çözüşü.

Tablo 3.9. (Devam) *Birinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	NİCELİKSEL MUHAKEME
Denklem kurma **Arya**, **Ata** – Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edip denklem yazabilmeleri.	Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme **Bora** – (3. problem) değişkenin doğasını anlamama ve değişkenleri birbiri cinsinden yazmayı anlamlandıramama.	

Cebir Bilgi Yapısı

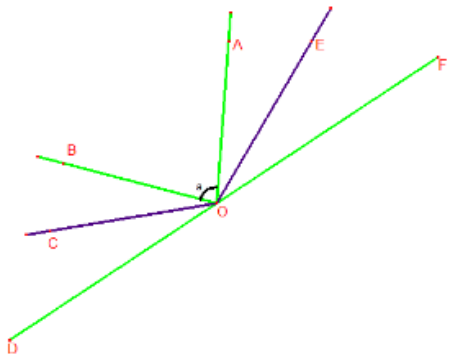
- Cebirsel ön bilgiler: "*Doğrusal olmayan* $[AB]$, $[AC]$ *ve* $[BC]$ *doğru parçalarının birleşiminden oluşan geometrik cisim üçgendir*" şeklinde öğrencilere sunulan üçgen tanımı için odak öğrenci Kayla "birleşim" teriminin yerine "kesişim" teriminin kullanılması gerektiğini ifade etmiştir. Öğrencilere doğru parçalarının reel sayılar kümesinin birer alt kümesi olduğu ve bu kümelerin birleşimi ile kesişimi arasındaki fark tekrar anlatılmıştır.

3. problemde (Şekil 3.9.) Selin "oran" kelimesini anlamlandıramazken, "oran" terimi yerine "iki nicelikten birinin diğerinin katı" şeklindeki ifadenin öğrencinin zihninde bir yapı oluşturduğu gözlemlenmiştir.

- Denklem kurma: Şekil 3.8.'de verilen 1. problem ile öğrencilere problemlerde değişkenlerin kullanımı üzerine bilgi verilmiştir. Problemde $m(\widehat{DOC}) = m(\widehat{COB}) = x$ ve $m(\widehat{FOE}) = m(\widehat{EOA}) = y$ değişkenleri araştırmacı tarafından atanınca; Utku doğruda açı kavramını kullanarak $2x + 2y + a = 180°$ denklemini, Meltem ise COE açısının ölçüsünü veren $x + y + a = 120°$ denklemini doğru bir şekilde kurmuşlardır. Öğrenciler yok etme yöntemini kullanarak çözümü gerçekleştirebileceklerini ifade etmişlerse de, yöntemin kullanımını hatırlatmak amacıyla çözümü araştırmacı gerçekleştirmiştir.

1. Problem:

Aşağıda verilen şekilde D, O ve F noktaları doğrusal, $[OE$ ve $[OC$ açıortay, $m(\widehat{COE}) = 120°$ ise $m(\widehat{AOB})$ =a kaç derecedir?



Şekil 3.8. *Öğretim dizisinin 1. problemi*

Şekil 3.9.'da verilen 3. problem öğrencilerin oran-orantı bilgilerini devreye sokarak bir denklem kurmalarını gerektirmiştir.

3. Problem:

Bütünleri ile tümlerinin oranı 7 olan açı kaç derecedir?

Şekil 3.9. *Öğretim dizisinin 3. problemi*

Bu problemde Selin'in oran ifadesini anlamlandıramaması üzerine kendisine "kız öğrencilerin sayısının erkek öğrencilerin sayısına oranı 2" cümlesinden ne anladığı sorulmuş, Selin "2 katıdır" şeklinde cevaplamış ancak cevabı hangi niceliğin diğerinin katı olduğunu ifade etmemiştir. Bu örnek üzerine Selin, "bütünleri tümlerinin 7 katı" şeklinde problemi doğru yorumlamış ancak bir denklem kuramamıştır. Açıyı ve açının bütünlerini birbiri cinsinden ifade edebilen Arya, $(90 - x).7 = 180 - x$ denklemini doğru bir şekilde oluşturarak doğru çözüme ulaşmıştır. Odak öğrenci Ata, problemi Arya'dan farklı olarak içler dışlar çarpımı yaparak çözdüğünü ifade etmiş ve tahtaya $\frac{180-x}{90-x} = 7$ denklemini yazmıştır. Ata'nın yazdığı denklem ile Arya'nın yazdığı denklemin aynı olduğu öğrencilere anlatılmıştır.

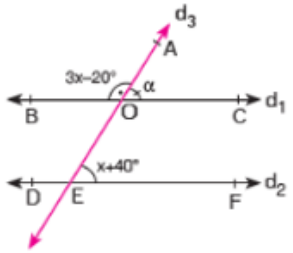
Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: 1. problemde (Şekil 3.8.) bilinmeyen açılara x ve y değişkenleri atanarak iki denklem yazılmış ve yok etme yöntemi gerçekleştirilen çözümünde $x + y = 60°$ elde edilmiştir. x ve y değişkenlerinin sayısal değerlerinin bulunmasının gerekmediği bu problemde bazı öğrencilerin x ve y değişkenlerinin $30°$ lik değer alacaklarını ifade etmeleri, öğrencilerin değişkenlerin sayısal değerine ulaşma isteğini ortaya koymuştur.

Şekil 3.10.'da verilen 5. problemde odak öğrenci Bora'nın değişkenin doğasını anlamadığı ve değişkenin doğasına ulaşma isteği kurmuş olduğu denklemden görülmüştür.

5. Problem:

Verilen şekilde $d_1 // d_2$, $m(\widehat{AOB}) = 3x + 20$ ve $m(\widehat{OEF}) = x + 40$ olduğuna göre $m(\widehat{AOC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.



Şekil 3.10. *Öğretim dizisinin 5. problemi*

Bora tahtada "$x + 40 = 180$" denklemini yazmış ve bunun ne anlama geldiği sorulunca "hocam burası ($[FD]$ doğru parçasını göstererek) bir tane doğru olduğu için, buranın (DEO ve OEF açılarını göstererek) toplamı *180* olacağı için, buranın açısında bir tane bilinmeyen olduğu için ben de onu 180 e eşitledim" açıklamasını yapmıştır. Bora herhangi bir geometrik bilgisini devreye sokmamış, sadece x in değerine ulaşmak istemiştir.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme: Şekil 3.11.'de verilen 2. problem öğrencilerin bir açının tümleri ve bütünlerine değişken atayarak çözmelerini gerektirmiştir.

2. Problem:

Tümleri ile bütünlerinin toplamı 128° olan açının kaç derece olduğunu bulunuz.

Şekil 3.11 *Öğretim dizisinin 2. problemi*

Odak öğrenci Kayla problemdeki bilinmeyen açıya x değişkeni atamayı önermiş, tümleyeninin ne olacağı sorusuna bazı öğrenciler y cevabını vermiştir. Meltem ve bir kısım öğrenci ise x ölçülü bir açının tümleyeninin $90 - x$ şeklinde ifade edilebileceğini belirtmişlerdir. Ölçüsü değişken ile ifade edilen bir açının tümler ve bütünlerinin açı için kullanılan değişken cinsinden ifade edilmesi aritmetikten genelleme yapılarak öğrencilere anlatılmıştır.

Şekil 3.9.'da verilen 3. probleme Bora'nın farklı çözüm yolu olarak sunduğu "siz eksi x verdiniz ben normal x verdim" açıklaması ile $\frac{180x}{90x} = 7$ denklemini yazması öğrencinin değişkeni bir diğer değişken cinsinden yazmayı anlamadığını ve 180 ile –x terimleri arasındaki operatörün çarpma olduğunu düşündüğünü göstermiştir.

Niceliksel Muhakeme

1. problemde (Şekil 3.8.) değişkenlerin atanmasının üzerine araştırmacının cebirsel çözümünden önce odak öğrenci Ata problemi seri bir şekilde çözerek doğru cevaba ulaşmıştır. Ata'nın açıklaması geometrik kusurlar içerse de, öğrencinin bu problem bazında niceliksel muhakemeye sahip olduğu görülmüştür. Ata "hocam ben farklı bir şekilde yaptım. COE *120* ya, *180* den çıkartıp alt kısımları *30* buldum. Tam ortadan ikiye böldüğü için, a nın dışında kalan iki tarafı da *60* buldum. Sonra geri kalan yerleri toplayıp *120* ye eşitledim" yorumunda bulunmuştur. Öğrenci COE açısının dışında kalan DOC ve FOE açılarının toplamının 60° yani x ile y değişkenlerinin toplamının 60° olduğunu görmüş ve COB ve EOA açılarının da sırasıyla x ve y değişkenleri ile temsil edildiğinden bu açıların toplamının da 60° olduğunu fark etmiştir. Ata'nın düşüncesindeki kusur ise, x ve y değişkenlerinin eşit olduğunu düşünmesidir. Bunun sebebinin $[OE$ ve $[OC$ ışınlarının açıortay olmasından ötürü olabileceği düşünülmüştür.

3.2.2. İkinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

Öğretim dizisinin ikinci haftasında üçgenin temel elemanları, açılar ile ilgili özellikler, kenarlarına göre üçgen çeşitlerinde açı ve kenar ilişkileri, üçgende açı ve

gördüğü kenar ile ilgili ilişkiler tartışılmış ve üçgende açılar ile ilgili uygulamalar yapılmıştır.

3.2.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında öğrencilerin sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalardaki matematiksel ifade ve eylemleri geometrik ön bilgiler ve geometrik düşünme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.10.'da bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.10. *Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Geometrik ön bilgiler İç açı ölçüsü bilinen bir açının dış açı ölçüsünü bulamama, üçgenin dış açısını yanlış çizme. Utku – "iki iç açının toplamı bu açılara komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşit olması" özelliğini sınıfta tanıtılmadan önce problemin çözümünde kullanması. **Kayla**, Utku – Üçgenin yardımcı elemanları ile ilgili yanlış kazanımları. **Bora** - Problem durumuyla ilgisi olmayan geometrik ön bilgi devreye sokma. Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili okuma **Bora** - $m(\widehat{ACB})$ şeklindeki temsili anlamlandıramama. **Ata** - ABC üçgenini temsil için $\widehat{ABC}$ temsilini kullanması. Terminoloji kullanma: **Kayla** – açı terimi yerine "köşe" terimini kullanması, açı yayı çizmemesi. Kural temelli öğrenmeler Utku - paralellik ile ilgili verinin olmadığı problemde kural kullanma girişimi. Prototip fenomeni Kaptan - tahtaya çizdiği üçgen ikizkenar üçgen görünümünde ve üçgenin tabanının yatay düzleme paralel olması. **Bora** – (9. problem) ikizkenar üçgende yatay düzleme paralel olan tabana ait açıların eşit olması gerektiğini düşünmesi. Utku - Dik üçgende dik olmayan açıların eş ölçülü olduğunu düşünmesi. **Ata** – (14. problem) Herhangi bir dörtgende köşegenlerin dik kesiştiğini düşünmesi. Aynı problemde **Bora -** dörtgeni eşkenar dörtgen olarak algılaması.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler **Ata** - farklı üçgenlerde eş ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit olacağı yanlış ilişkisini kurması. **Bora** – (21. problem) ortak kenara sahip üçgenlerde ortak kenarı gören açılardan biri en büyük ölçülü açı olsa bile diğer üçgene bağımlılığın söz konusu olduğu ilişkisini kuramama.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Bazı öğrencilerin üçgenin temel elemanları ile ilgili önemli kazanım eksiklikleri olduğu gözlemlenmiştir. Bu kazanım eksiklikleri arasında en çarpıcı olanları iç açı ölçüsü bilinen bir açının dış açı ölçüsünü bulamama ve üçgenin dış açısını yanlış bir şekilde çizme olarak görülmüştür. Bunun yanı sıra üçgenin yardımcı elemanları ile ilgili yanlış kazanımlar ve problem durumu ile ilgisi olmayan geometrik bilginin devreye alınması durumları gözlemlenmiştir.

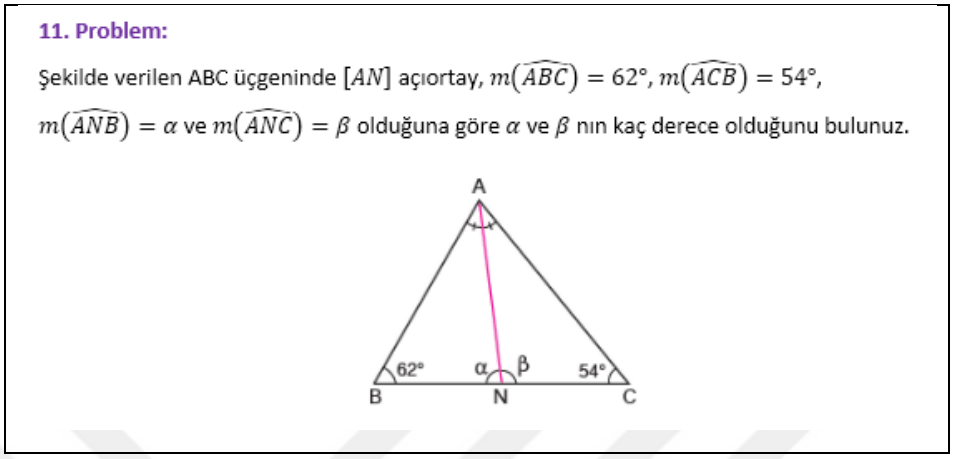
CG-II yazılımında çizilip iç açı ölçülerinin açı ölçme aracı ile hesaplandığı ve bu açı ölçülerinin ondalıklı sayılar olduğu bir üçgende, öğrencilerden üçgenin dış açı ölçülerini hesaplamaları istenmiştir. Sefa'nın dış açıları bulmak için "360 dan çıkarırız. A 89 ise dış açısı o zaman 360 dan çıkaracağız" yorumu ile ölçüsü $89.9°$ olan A açısının ondalıklı kısmını göz ardı ederek açıyı 89 olarak ifade ettiği ve doğru açının ölçüsünün $360°$ olduğunu düşündüğü görülmüştür. Diğer öğrenciler dış açıyı bulmak için $180°$ den çıkarması gerektiği şeklinde Sefa'yı uyarmışlardır.

Üçgenin dış açılarının toplamı ispatında Kaptan tahtaya çizdiği üçgenin dış açılarını üçgenin köşelerinden iç açıortayları doğrultusunda çizmiştir. Utku "doğrunun devamından gelir gibi" ve odak öğrenci Kayla "tam doğru olmalı" ifadeleri ile Kaptan'ın çizimine müdahale etmişler ve öğrenci bu öneriler doğrultusunda çizimini düzeltmiştir. Üçgenin bir iç açısı ile dış açısının bir doğru oluşturması gerektiği öğrencilere tekrar hatırlatılmıştır.

Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında bazı geometrik özellikler ile ilgili doğru kazanımlarının olduğu gözlemlenmiştir. Utku'nun "*iki iç açının toplamı bu açılara komşu olmayan dış açının ölçüsüne eşittir*" özelliğinin sınıf içinde öğrenciler ile beraber keşfinden önce 9. problemde (Şekil 3.18.) gerçekleştirilen çözüme alternatif olarak önermesi ve doğru bir biçimde kullanması bu gözleme örnek teşkil etmiştir. Bu özelliğin kullanılmasını gerektiren Şekil 3.12.'de verilen 11. problem ise öğrencilerin üçgenin yardımcı elemanları ile ilgili yanlış öğrenmelerini ortaya koymuştur. Odak öğrenci Kayla'nın "bir üçgenin açıortayını alırken aşağıda yaptığı açının 90 derece olması gerekmiyor mu" sorusu öğrencinin herhangi bir üçgende açıortayın aynı zamanda yükseklik olduğu yanlış kazanımını ortaya koymuştur. Utku'nun Kayla'yı "o şeyi ortalıyor, kenarortay" ifadesi ile düzeltmesi de yine üçgenin yardımcı elemanları ile ilgili yanlış kazanımını göstermiştir.

Öğrencilerin üçgenin yardımcı elemanlarından açıortay ve kenarortay ile ilgili kavrayış durumları 16. problemde (Şekil 3.16.) de gözlemlenmiştir. Serhat DC doğru parçasına işaret ederek DC nin "açıortay" olduğunu ifade etmiş ve diğer öğrenciler Serhat'a karşı çıkmışlardır. Serhat'ın "açıortay" olarak ifade ettiği DC doğru parçasının kenarortay olmadığına Ece "tam ortadan kesmemiş" açıklaması ile karşı çıkmış ancak DC doğru parçasının kenarortay olmayışını problemde verilen ACD ve BCD arasındaki ilişkiye dayandırmamıştır. Serhat'ın açıortay olarak ifade ettiğini Ece kenarortay olarak

algılamış ve Serhat'ın üçgenin köşesinden kenarına çizilen doğru parçalarını açıortay olarak değerlendirdiği görülmüştür.



Şekil 3.12. *Öğretim dizisinin 11. problemi*

Odak öğrenci Bora'nın 12. problemde (Şekil 3.24.) "hangi kenarın açısı büyükse onun kenarı daha büyüktür" bilgisini ifade etmesi problem durumuyla ilgisi olmayan geometrik ön bilgiyi devreye sokma durumuna örnek olmuştur. Bora'nın ifadesi üzerine Serhat'ın "açının karşısındaki kenar açıya eşit oluyor değil mi" sorusu ile düşüncesini açıklaması Serhat'ın üçgenin temel elemanları ile ilgili yanlış kazanımlarını ortaya koymuştur.

- Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili okuma ve kullanma: Açının ölçüsünün üç nokta ile temsil edildiği $m(\widehat{ACB})$ şeklindeki temsilin odak öğrenci Bora için anlamlı olmadığı öğrencinin bu temsili "$mACB$ açısı" olarak okumasından anlaşılmıştır. Bunun üzerine açıların farklı temsilleri öğrencilere tekrar hatırlatılmıştır. Öğrencilerin açı ya da üçgenlerin sembolik temsillerine ilişkin ön bilgilerinin eksikliğine bir örnek de öğrencilerden oran-orantı ilişkisi içeren bir problem üretmelerinin istendiği sınıf çalışmasında odak öğrenci Ata'nın bir ABC üçgenini temsil etmek için $\widehat{ABC}$ temsilini kullanmış olmasıdır.

- Terminoloji kullanma: Şekil 3.13.'de verilen 7. problemde odak öğrenci Kayla "üçgenin her bir köşesine $1x$, $5x$, $12x$ olarak isim verdim" diyerek bir üçgen çizmiş, açılara değişkenleri atamış ama çiziminde açı yayı kullanmamıştır. Öğrencinin sözlü ifadesinde kullandığı "köşe" terimi ve çiziminde açı yaylarını kullanmaması öğrencinin açı kavrayışındaki eksiklikleri ortaya koymuştur.

7. Problem:

Bir üçgenin iç açıları sırasıyla 1, 5 ve 12 sayıları ile orantılıdır. Buna göre üçgenin **en büyük** açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

Şekil 3.13. *Öğretim dizisinin 7. problemi*

- Kural temelli öğrenmeler: Paralellik ile ilgili verinin olmadığı problemde öğrencilerin kural kullanma girişimleri ikinci haftada da gözlemlenmiştir. 15. problemde (Şekil 3.20.) Utku değişkenleri doğru bir şekilde atamış ve değişkenler arasındaki ilişkiyi elde etmiş olmasına rağmen "burada Z görebiliriz" ifadesi ile herhangi bir paralellik dayanağı olmadan kural kullanmak istemiştir.

- Prototip algılar: Üçgenin dış açılarının toplamı ispatı için Kaptan'ın tahtaya çizdiği üçgenin ikizkenar üçgen görünümünde ve üçgenin tabanının yatay düzleme paralel olduğu görülmüştür.

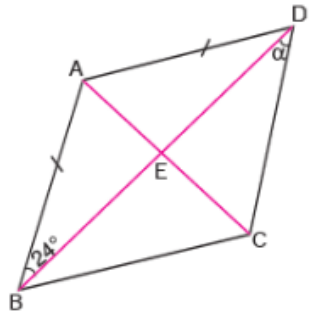
9. problemin (Şekil 3.18.) çözümünde $m(\widehat{ACD}) = 5m(\widehat{ABC})$ ilişkisi için ACD ve ABC açılarına sırasıyla atanan x ve $5x$ değişkenleri ve 80° lik A açısı ile ABC üçgeni bir ikizkenar çıkmıştır. Tabanı yatay düzleme paralel olan doğru üzerindeki açıların ölçülerinin sırasıyla $x = 20°$ ve $\alpha = 80°$ elde edilmesi üzerine odak öğrenci Bora "ikizkenar olması için α ile x in eşit olması gerek" yorumunda bulunmuştur. Bora'nın bir ikizkenar üçgende yatay düzleme paralel olan kenara ait açıların eşit olması gerektiği prototip algısı gözlemlenmiştir. Bir üçgenin ikizkenar üçgen olması için yöneliminin daima öğrencinin zihnindeki resim gibi olması gerekmediği üzerine farklı yönelimli ikizkenar üçgenler çizilmiştir.

Kenarlarına göre üçgen çeşitlerinin tanıtıldığı derste Ece, dik üçgenin de kenarlarına göre üçgenler sınıflamasında olduğunu belirtmiştir. Ancak dik üçgenin açılarına göre üçgenler sınıflamasında olduğu belirtilince Utku bu bilgiyi onaylamak amacıyla, "çünkü *90* olunca iki açıya *90* kalıyor. Onlar da *45, 45* yine ikizkenar oluyor" ifadesinde bulunmuştur. Utku'nun dik üçgende dik olmayan açıların eş ölçülü olacağına dair prototip algısı görülmüştür.

Üçgende açı problemi olan ve Şekil 3.14.'de verilen 14. problem öğrencilerin dörtgenler ile ilgili prototip algılarını ortaya çıkarmıştır.

14. Problem:

Verilen şekilde ABC eşkenar üçgen, $m(\widehat{ABE}) = 24°$ ve $|AB| = |AD|$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC}) = \alpha$ kaç derecedir?



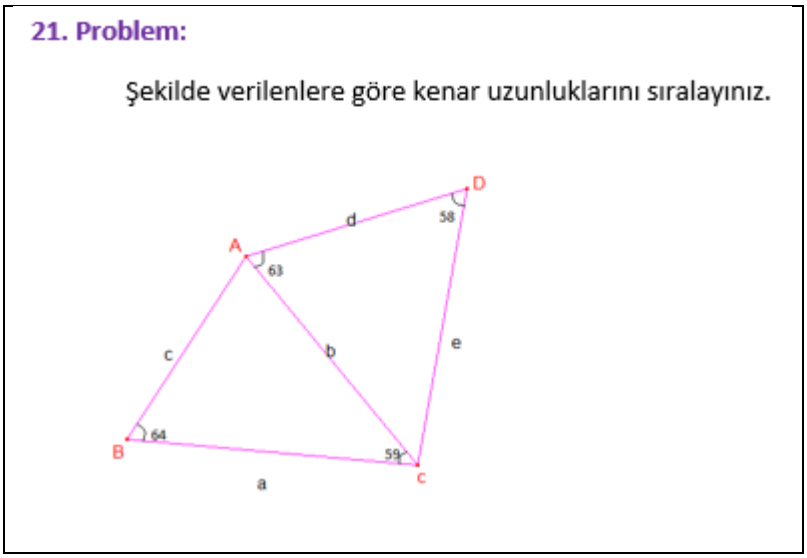
Şekil 3.14. *Öğretim dizisinin 14. problemi*

Odak öğrenci Ata'nın "E açısına *90* derece diyebilir miyiz" sorusu da, öğrencinin herhangi bir dörtgende köşegenlerin dik kesiştiği prototip algısını göstermiştir. Aynı problemde odak öğrenci Bora'nın AC ve BD doğru parçalarına işaret ederek "hocam onlar açıortay değil mi" şeklindeki sorusu da, dörtgenin eşkenar dörtgen olarak algıladığı prototip algısına dair örnek teşkil etmiştir.

Geometrik düşünme

- İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler: 14. problemde (Şekil 3.14.) E noktasında oluşan açılar elde edilince AEB ve CED açıları 96° olarak elde edilmişti. Odak öğrenci Ata "*96* ların gördüğü uzunluklar eşit olmayacak mı" sorusu ile ifade ettiği görüşü öğrencinin bir üçgende eşit ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit olduğu bilgisini farklı üçgenlerde eş ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit olacağı ilişkisine genellediği görülmüştür. Kurulan bu yanlış ilişkinin giderilmesi için CG-II yazılımında farklı üçgenlerde eş ölçülü açılara karşılık gelen kenarların eşit olmayabileceği öğrencilere gösterilmiştir.

İkişer açı ölçüsünün verildiği iki üçgende kenar uzunluklarının sıralanmasının istendiği Şekil 3.15.'de verilen 21. problemi Utku sınıf tahtasında çözmüştür. Öğrenci üçgenlerin kenar uzunluklarını küçükten büyüğe sıralamış ve bunları eşitsizlikler ile doğru bir biçimde ifade etmiştir.



Şekil 3.15. *Öğretim dizisinin 21. problemi*

Problemin çözümünün ardından odak öğrenci Bora'nın "*64* ün karşısındaki kenar daha büyük olması gerekmiyor mu" sorusu, öğrencinin ortak kenara sahip iki üçgen için kenar sıralaması ilişkisini kuramadığını ortaya koymuştur. Sılanaz ise Bora'nın düşüncesine "hayır, olamaz çünkü karşıda *58* var, o üçgende en büyük açı *63* olduğundan karşısındaki kenar daha büyük oluyor, *58* orada küçük kalıyor" açıklaması ile karşı çıkmıştır. Öğrencilerin ortak kenara sahip üçgenlerde ortak kenarı gören açılardan biri en büyük ölçülü açı olsa bile diğer üçgene bağımlılığın söz konusu olduğu CG-II yazılımı ile öğrencilere açıklanmıştır.

3.2.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme ve niceliksel muhakeme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.11.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Eşitsizliğin özellikleri: 22. problemde (Şekil 3.21.) açıların tümü tek değişken ile ifade edildikten sonra odak öğrenci Bora problemdeki eşitsizliği bu değişkenlere uyarlayarak $180 - 2x + x < 125$ eşitsizliğini doğru bir şekilde yazmıştır. Odak öğrenci Ata'nın bu eşitsizlik hakkındaki "orada eşittir *124* yazabilir miyiz" sorusu öğrencinin eşitsizlik kavrayışında eksiklikler olduğunu göstermiştir. Öğrencinin bu düşüncesinin değişkenin sayısal değerine ulaşma isteğinin bir sonucu olabileceği de düşünülmüştür.

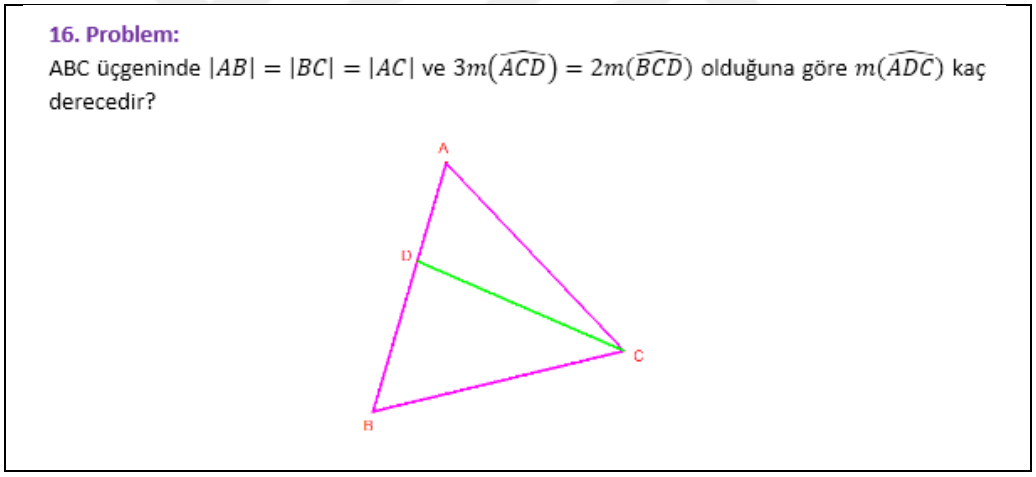
Tablo 3.11. *Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHA-KEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	GENELLE-MEDE BULUNMA	NİCELİKSEL MUHAKEME
Eşitsizliğin özellikleri **Bora** – (22. problem) Değişkenler ile eşitsizlik kurma. **Ata** – Eşitsizliği denkleme çevirme girişimi.	Cebirsel ön bilgiler Meltem, **Arya** - $m(\widehat{ACD}) = 5m(\widehat{ABC})$ orantı ilişkisini "oran" olarak doğru yorumlama. **Ata**, Utku – aynı orantı ilişkisini yanlış yorumlama. Meltem, **Tuna** - $3m(\widehat{ACD}) = 2m(\widehat{BCD})$ orantı ilişkisini yanlış yorumlama.	Değişkenin doğasını anlama **Kayla** - (8 ve 9. Problem) Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteğinin yoğun oluşundan geometrik bilgisini devreye sokmaması, değişkenlerin rollerini kavrayamaması. Selin – **Ata'nın** oran ile ilgili yazdığı problemde açı temsili ile üçgenin köşesi için kullanılan değişkenlerin rollerini kavrayamaması. 19. problemin cebirsel olarak öğrenciler tarafından çeşitlendirilmesinin üzerine öğrencilerin değişkenlerin rolleri üzerine yorum yapmaları. Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme **Ata**, **Bora** – Değişkenleri birbiri cinsinden yazarken "reversal error-tersine çevirme hatası". Pelinsu – karşı çıkması. Utku – (15. problem) değişkenleri birbiri cinsinden doğru yazması. Utku – (22. problem) $180 - 2x$ ile temsil edilen A açısının en büyük değerinin x in en küçük değer almasına bağlı olduğu genellemesini yapması. Cebirsel işlem becerileri Utku – parantez kullanmama. Ortak paranteze alma hatası $-2x - 2y = -(2xy)$ **Bora** – sadeleştirme hatası. **Ata** – değişken atama, denklem yazma ve çözebilme.	Sözlü genellemede bulunma **Bora** – CG-II yazılımında çizilmiş üçgendeki değişimleri gözlemleyerek üçgende açı-kenar ilişkisini sözlü olarak genellemesi.	Utku – üçgenin dış açılar toplamının 360 ° olduğunu iç ve dış açılar toplamının değişmez olduğu bilgisini kullanarak kanıtlaması. **Tuna** – (12. problem) eşitliğin nicelikler arasında bir ilişki olduğunu kavramış olması Sayıyı değişken olarak değerlendirmesi niceliksel muhakemeye işaret. **Bora** – (17. problem) Herhangi sayısal değeri olmayan ya da değişkenler ile temsil edilmemiş açılar ile ilgili bu çıkarımda bulunması. Meltem - çözümü değişken kullanmadan gerçekleştirmesi.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: 9. problemde (Şekil 3.18.) öğrencilere $m(\widehat{ACD}) = 5m(\widehat{ABC})$ ilişkisini açıların birbirlerine oranları olarak nasıl ifade edebileceği sorusuna Utku "ACD açısı ABC açısının 5 katıymış" şeklinde cevaplarken Meltem istenileni doğru anlayarak "ACD açısının oranı ABC açısına 5 tir" cevabını vermiştir. Orantı ilişkisini Meltem'den farklı olarak nasıl yorumlanabileceği sorusuna odak öğrenci Ata "$\frac{1}{5}$, ACD 1, ABC 5" şeklinde yanlış olarak açıklarken, odak öğrenci Arya "ABC açısının ACD açısına oranı $\frac{1}{5}$ dir" biçiminde doğru cevap vermiştir.

Açılar arasındaki orantı ilişkisinin yorumlanmasının problemin çözümü için ön koşul olduğu Şekil 3.16.'da verilen 16. problemde $3m(\widehat{ACD}) = 2m(\widehat{BCD})$ ilişkisi için Meltem "biri diğerinin 3 katı, kendisinden 3 tane diğerinden 2 tane" ve odak öğrenci Tuna "ACD açısının 3 ile BCD açısının 2 ile orantılı" yanlış açıklamalarını yapmışlardır.

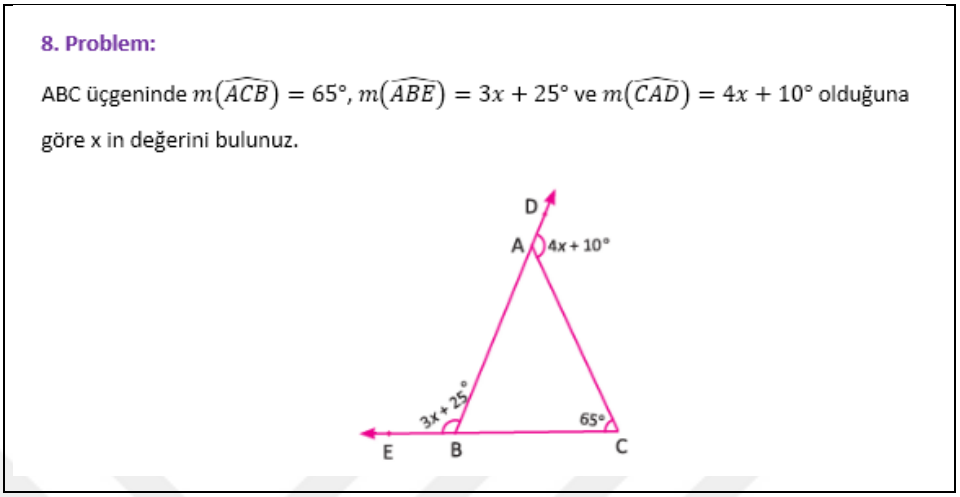


Şekil 3.16. *Öğretim dizisinin 16. problemi*

Sembolik Manipülasyon

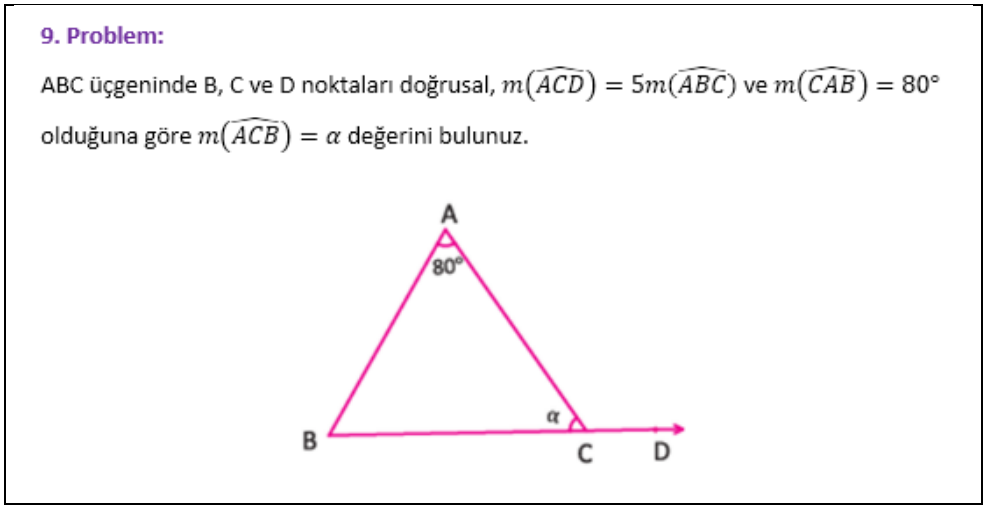
- Değişkenin doğasını anlama: Odak öğrenci Kayla Şekil 3.17.'de verilen 8. problemin çözümü için önerdiği "$3x + 25$ ile $4x + 10$ u birbirine eşitledim; iç açılarını bulmuşum" şeklindeki ifadesinden, öğrencinin değişkenin doğası hakkında doğru bir anlayışa sahip olmadığı görülmüştür. Öğrencinin odağı değişkenin sayısal değerine ulaşmak olması nedeniyle, değişken içeren ifadeleri birbirine eşitleme yoluna gitmiştir. Bu işlemi üzerine öğrenciye dış açıların eşit olup olmadığı sorulmuş, öğrenci de

"bilemeyiz" cevabını vermiştir. Kayla'nın kurduğu denklemin ne anlama geldiği üzerinde durulmuştur.



Şekil 3.17. *Öğretim dizisinin 8. problemi*

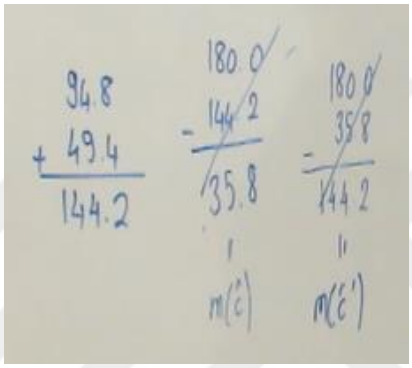
Benzer şekilde Şekil 3.18.'de verilen 9. problemde de odak öğrenci Kayla açılar arasında verilen ilişkiyi değerlendirmeden ve geometrik özellikleri kullanmadan değişkenin değerine ulaşmak istemiştir.



Şekil 3.18. *Öğretim dizisinin 9. problemi*

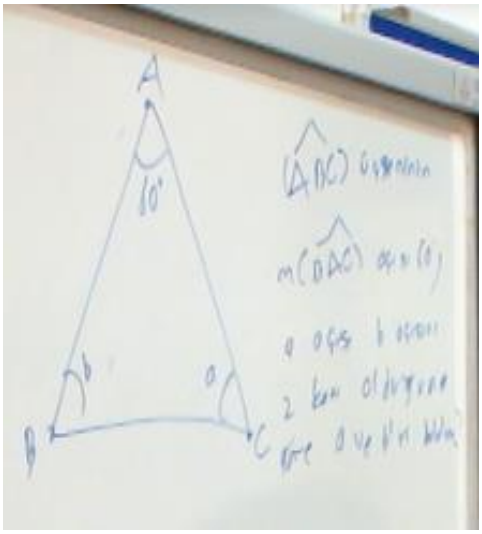
Sılanaz bu problemi tahtada çözmüş; cebirsel temsillerin gösterdiği açıların yerlerini doğru tespit etmiş ve $m(\widehat{ACD}) = 5m(\widehat{ABC})$ orantısını doğru bir biçimde değerlendirerek ABC açısına x, ACD açısına $5x$ değişkenlerini atamıştır. Bunun üzerine Kayla "180 i 5 e bölersek x i buluruz" ifadesinde bulunmuştur. Öğrenci için değişkenin

sayısal değerine ulaşma isteği değişkenlerin ne için tanımlı olduğu muhakemesinin önüne geçmiştir. Sılanaz ise çözüm için üçgenin iç açıları toplamı ve doğruda açı geometrik bilgileri ile $80° + x + \alpha = 180°$ ve $5x + \alpha = 180°$ denklemlerini kurmuş ve α nın sayısal değerine bu denklemlerde değer vererek ulaşmıştır. Utku ise "80 ile x eşittir $5x$" ifadesinde bulunarak "*bir üçgende iki iç açının toplamı bu açılara komşu olmayan açının dış açısına eşittir*" özelliğini devreye soktuğu farklı çözüm yolunu ifade etmiştir. Utku'nun kullandığı bu özellik problemin çözümünden sonra öğrenciler ile sınıfta keşfedilerek (Görsel 3.5.) elde edilmiştir.



Görsel 3.5. *İki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıya eşit olduğunun öğrenciler tarafından keşfedilmesi*

Öğrencilerden oran-orantı ilişkisi içeren bir problem üretmelerinin istenildiği bir sınıf çalışmasında odak öğrenci Ata'nın yazdığı Görsel 3.6.'da verilen problem paylaşılmış ve Selin çözüm için tahtaya çağırılmıştır. Selin k orantı sabitini kullanarak a ve b ölçülü açıları sırasıyla $2k$ ve k değişkenlerini doğru bir şekilde atamıştır. Fakat bu değişkenleri kullanarak iç açılar toplamı denklemini yazmamıştır. Selin'in "*60* ı ikiye bölersek *30* olur" ifadesinden öğrencinin köşeleri temsilde kullanılan büyük harfler (A köşesindeki 60° lik açı) ile açıları temsilde kullanılan küçük harflerin (C köşesindeki a ile temsil edilen açı) rollerini karıştırdığı anlaşılmıştır. Öğrenciye üçgenin iç açıları toplamını veren denklemi yazması istenince ancak $3k = 120$ denklemini kurabilmiş ve orantı sabitinin değerine ulaşabilmiştir.

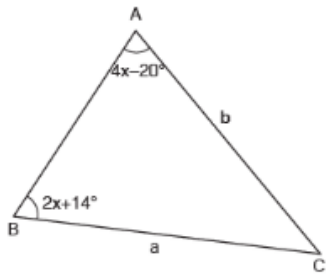


Görsel 3.6. *Odak öğrenci Ata'nın oran-orantı ilişkisi içeren üçgen problemi*

Üçgende açı-kenar ilişkilerinin öğrenciler tarafından keşfedilmesinin ardından Şekil 3.19.'daki 19. problemi odak öğrenci Bora kenarlar arasındaki eşitsizlik ilişkisini açı ölçülerine uygulayarak doğru bir biçimde çözmüştür.

19. Problem:

Şekilde verilen ABC üçgeninde $|AC| = b$, $|BC|$ =a, $m(\widehat{BAC}) = 4x - 20°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2x - 14°$ olmak üzere a> b ise x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



Şekil 3.19. *Öğretim dizisinin 19. problemi*

Problemin çözümünün ardından öğrenciler arasında aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir:

Utku: En büyük deseydi olmazdı.

Odak öğrenci Ata: Onun da bir sınırı var.

Araştırmacı: Buyurun size bir soru.

Utku: Sonsuz.

Araştırmacı: Sonsuz olur mu?

Odak öğrenci Arya: Sonsuz olamaz.

Utku: Olamaz çünkü…

Araştırmacı: Neden olamaz?

Odak öğrenci Ata: Sonsuz bir sayı değil.

Araştırmacı: Neden olamaz Meltem?

Meltem: $4x - 20$ bir aralık belirttiği için.

Utku: Bir üçgeni çizeriz, açılarının toplamı en fazla 180 olacağı için x 180 den büyük bir sayı olamaz. Hatta 100 den bile büyük olamaz.

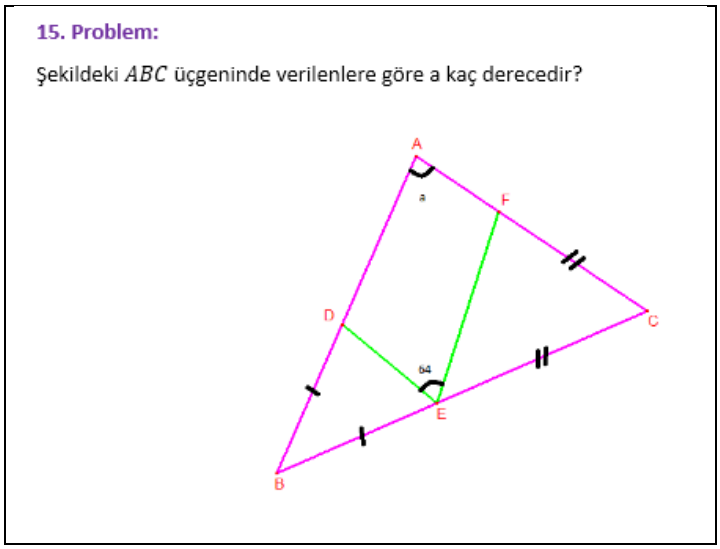
Odak öğrenci Bora: 16.

Utku: En küçüğü 18, 16 nasıl olsun?

Utku'nun problemi cebirsel olarak çeşitlendirmesi ile başlayan tartışmada odak öğrenci Ata'nın x değişkenin bir sınırının olacağını ifade etmesi, değişkenin bir açının ölçüsünü belirtmede kullanıldığının farkında olduğunu göstermiştir. Ayrıca Utku'nun değişkenin sonsuz olabileceği düşüncesine Ata'nın sonsuzun bir sayı olmadığı gerekçesi ile karşı çıkışı da problemde kullanılan değişkenin doğasını anladığını göstermiştir. Meltem'in açının bir aralıkta yer alacağını ifade etmesi değişkenin doğası ile ilgili somut bir anlayışı olduğunu göstermiştir. Öğrencinin bu görüşü ayrıca açıyı dinamik olarak algıladığını da göstermiştir. Çeşitli görüşler üzerine Utku, değişkenin doğası hakkındaki algısını düzenleyerek odak öğrenci Bora'nın değişkenin sayısal değerinin alabileceği en büyük değer için "*16*" yorumunda bulunmasına soru bağlamında en küçüğünün "*18*" olması yorumuyla karşı çıkmıştır.

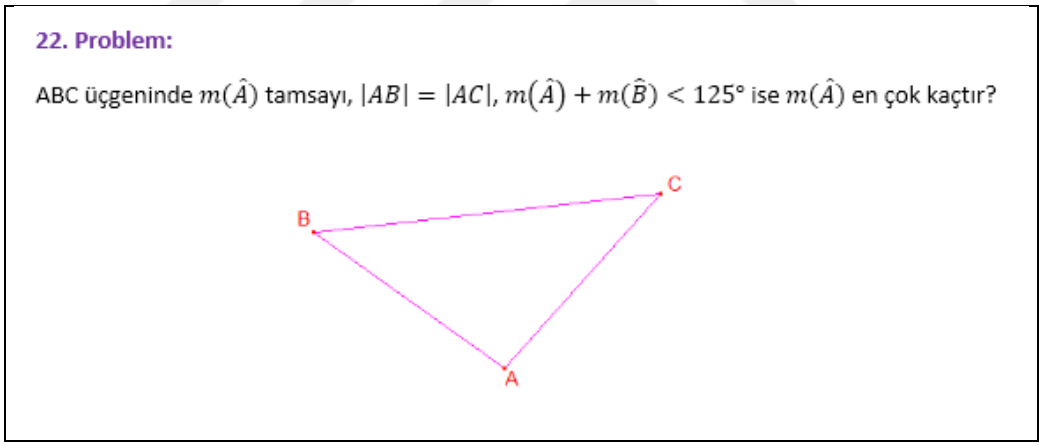
- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme: Üçgenin dış açılar toplamının cebirsel ispatı için öğrencilere "herhangi bir üçgende iç açıları bilmiyorsak ne yapmalıyız" sorusuna Belinay x, y ve z değişkenlerini atamayı önermiştir. Odak öğrenci Ata "Dış açısını bulmak için $x - 180$, $y - 180$ ve $z - 180$ vereceğiz" yorumunda bulunmuştur. Odak öğrenci Bora Ata'yı desteklemiş, Pelin ise "$180 - x$ olmaz mı" sorusu ile Ata ve Bora'ya karşı çıkmıştır.

Şekil 3.20.'de verilen 15. problemde Utku BDE ve BED açılarına x, CFE ve CEF açılarına y değişkenlerini atayarak problemin çözümüne başlamış, doğru açı kavramından $x + y + 64° = 180°$ denklemini kurmuş ve kullandığı değişkenler arasında $x + y = 116°$ ilişkisine ulaşmıştır. Kendisine B ve C açılarının nasıl ifade edilebileceği sorulunca bu açıları sırasıyla $180 - 2x$ ve $180 - 2y$ olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir.



Şekil 3.20. *Öğretim dizisinin 15. problemi*

Değişkenlerin birbiri cinsinden ifade edilmesini gerektiren Şekil 3.21.'de verilen 22. problem için odak öğrenci Bora tahtaya gelmiştir.

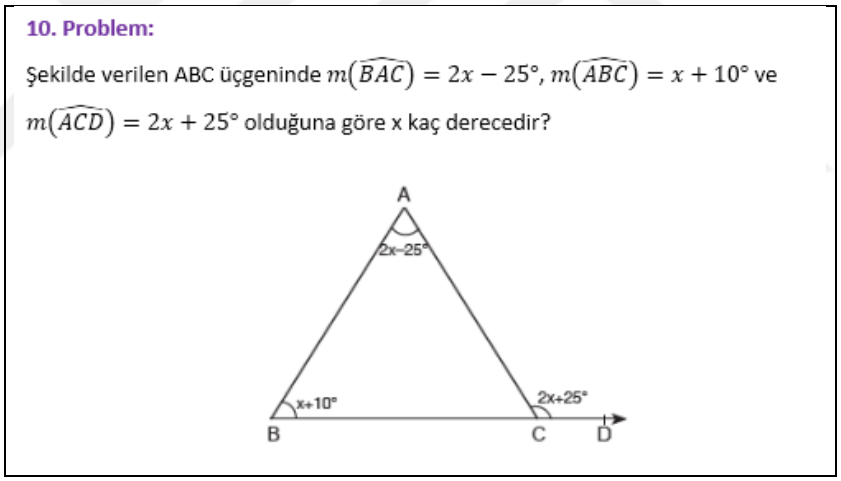


Şekil 3.21. *Öğretim dizisinin 22. problemi*

Bora eşit olan kenarları işaretledikten sonra duraklamıştır. Utku Bora'ya "Eşit olan açılara x verebilirsin" ifadesi ile yardımcı olmuştur. A açısının bu durumda ne olacağı sorusuna Bora "değer verebilirim" cevabını verirken odak öğrenci Arya "$180 - 2x$" cevabı ile A açısını eşit olan açılar cinsinden ifade edebilmiştir. Problemde verilen eşitsizlikteki açılar x cinsinden ifade edilip x in değer alacağı aralık belirlenince Utku, "x en küçük olacak ki A en büyük olsun" ifadesi ile $180 - 2x$ ile temsil edilen A açısının en büyük değerinin x in en küçük değer almasına bağlı olduğu genellemesini doğru yapmıştır.

- Cebirsel işlem becerileri: 8. problemin (Şekil 3.17.) çözümü için Utku "*180* den çıkarıp dış açılarını buluyorduk ya *180* den çıkarıp iç açılarını bulabiliriz" biçiminde farklı bir çözüm yolu önermiştir. Tahtada CBA açısının ölçüsünü bulmak için $3x + 25$ iki terimlisini paranteze almadan $180 - 3x + 25$ yazmış ve sonucu $155 - 3x$ olarak doğru bir biçimde bulmuştur. Öğrencilere bu tür işlemlerde parantez kullanımının önemi hatırlatılmıştır.

İki iç açının ölçüleri toplamının bu açılara komşu olmayan dış açının eşit olması özelliğinin öğrenciler tarafından pekiştirilmesi için yöneltilen Şekil 3.22.'deki 10. problem için odak öğrenci Bora tahtaya gelmiştir. Özelliği kullanarak $2x - 25 + x + 10 = 2x + 25$ denklemini yazmış ve denklemin her iki tarafında bulunan 25 sayılarını işaretlerini göz ardı ederek üzerlerini çizmiştir. Bu duruma odak öğrenci Arya müdahale etmiş ve "[denklemin her iki tarafındaki 25 sayılarına işaret ederek] çarpım durumunda değil" ifadesinde bulunmuştur.

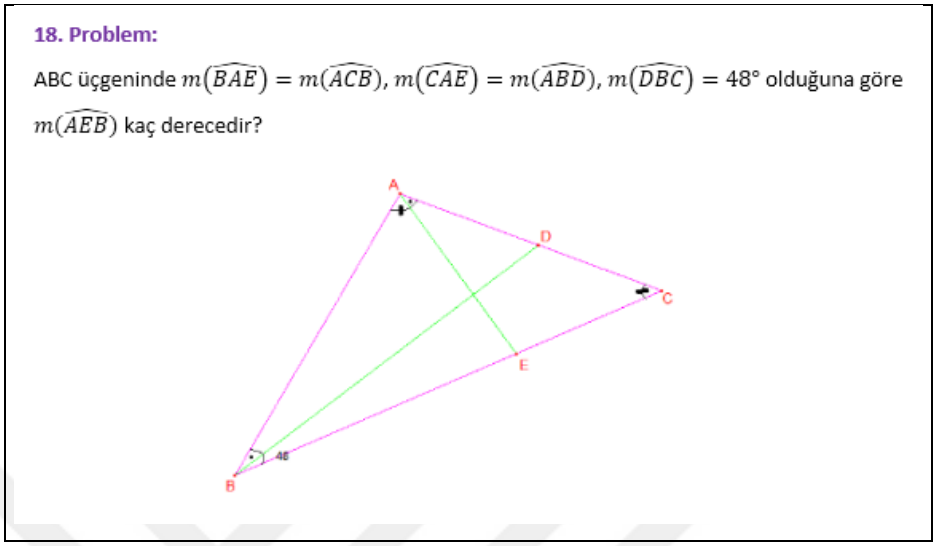


Şekil 3.22. *Öğretim dizisinin 10. problemi*

15. problemde (Şekil 3.20.) Utku atadığı değişkenler ve açıları bu değişkenler ile başarılı ifade edişinin ardından üçgenin iç açıları toplamından $180° - 2x + 180° - 2y + a = 180°$ denklemini kurmuş, ancak değişken içeren terimleri ortak paranteze $-2(xy)$ şeklinde yanlış bir biçimde almıştır.

Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasının sonuna doğru öğrenciler ölçüsü verilmemiş açılara değişkenler atayıp, üçgenin iç açıları toplamı gibi üçgenin temel elemanlarına dair ilişkileri kullanır hale gelmişlerdir. Şekil 3.23.'de verilen 18. problemi odak öğrenci Ata herhangi bir yardım almaksızın bilinmeyen açılara değişkenler

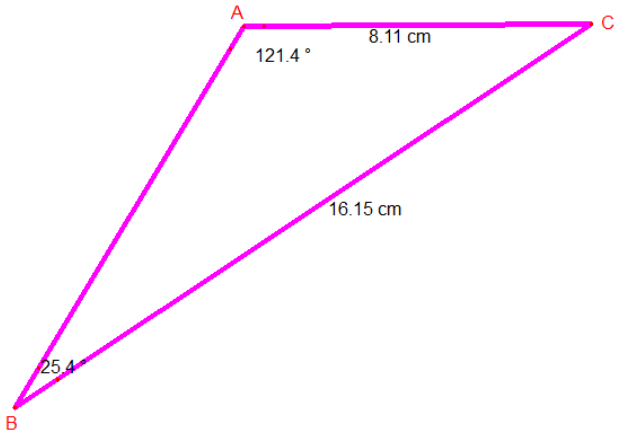
atayabilmiş, bu değişkenler ile tanımlı iç açıların toplamını veren denklemi kurabilmiş ve böylece problemde istenilene ulaşabilmiştir.



Şekil 3.23. *Öğretim dizisinin 18. problemi*

Genellemede Bulunma

- Sözlü genellemede bulunma: Üçgende açı-kenar ilişkileri CG-II yazılımı ile öğrencilere sunulmuştur. Görsel 3.7.'de verilen üçgen çizilmiş ve sürükleme aracı ile yapılan değişimleri öğrencilerin keşfetmesi sağlanmıştır.



Görsel 3.7. *Öğrencilerin üçgende açı-kenar ilişkileri üzerine keşifte bulunmaları için CG-II yazılımında çizilmiş bir üçgen*

Elde edilen ilişkiyi sözlü olarak odak öğrenci Bora "büyük açının karşısındaki kenar her zaman daha büyüktür" şeklinde genellemiştir.

Niceliksel Muhakeme

Öğrencilerin iç açı ölçülerinin sayısal olarak bilindiği bir üçgende üçgenin dış açılar ölçüleri toplamının 360° olduğunu elde etmelerinin ardından bunun her üçgen için geçerli olup olmayacağı üzerine aşağıdaki tartışma başlatılmıştır:

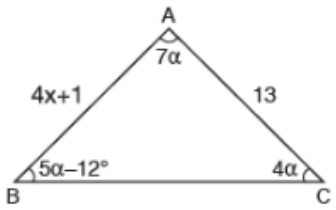
> Araştırmacı: Üçgenin dış açılarının toplamının her zaman 360 derece olduğunu bize kanıtlar mısınız?
>
> Utku: Kanıtlayayım.
>
> Araştırmacı: Bir sakin. Herkes bir düşünsün. [Sessizlik]. Üçgenin dış açılarının toplamının 360 derece olduğunu gösteriniz. [Sessizlik]. Peki, Utku ne düşünüyorsun, nasıl yaparsın?
>
> Utku: Şöyle düşünüyorum. Normalde üç eşit açıdan oluşan bir üçgen düşünelim. 60 şar.
>
> Araştırmacı: Adı ne onun?
>
> Utku: Eşitkenar.
>
> Bahar: Eşkenar.
>
> Utku: Evet, eşkenar. Her biri 60 olduğundan bunun dış açısı, komşu açısı 120 derece oluyor, üç tane olduğu için 360 ve her farklı açılarda yani içi 180, dışı da 360'a tamamlanıyor. Çünkü bir taraftan giderken öbür tarafa geliyor.
>
> Araştırmacı: Yani diyorsun ki dış açıları da 120'şer olur, topladığında 360. Peki bir örnekle bunu ispatlamış olur muyuz?
>
> Utku: Evet.
>
> Araştırmacı: Az önce de ben bir örnek gösterdim, dış açılarını buldunuz, topladınız 360. Acaba her üçgende 360 derece mi dış açılar toplamı? Belki de olmuyordur. Bana ispat etmeniz gerekir 360 olduğunu.
>
> Odak öğrenci Kayla: İç açıları toplamı 180 olan bir üçgenin, bütün üçgenlerin dış açıları toplamı 360 dır diyebilir miyiz?
>
> Araştırmacı: İşte bunu kanıtlamanızı istiyorum.
>
> Utku: Üçgenler birbirlerinin bükümlerinden, açıların değişmesinden oluşmuyor mu?
>
> Araştırmacı: Bükümleri?
>
> Utku: Yani normal bir açı, normal, eşkenar üçgeni düşünürsek, bir tarafını bozarsak öbür tarafta açı büyür, diğer tarafta küçülür. Dış açıları da büyüyecek ve küçülecek. Hiçbir türlü değişmeyecek toplamları.
>
> Araştırmacı: Güzel bir bakış açısı. Arkadaşımız bence dinamik geometri temelli düşünüyor.

Utku'nun savunması her ne kadar sayısal veriler içerse de, doğru açı bilgisi üzerine kurulu iç ve dış açılar toplamının değişmez olduğu bilgisini kullanması niceliksel muhakemeye örnek teşkil etmiştir.

Odak öğrenci Tuna'nın Şekil 3.24.'de verilen 12. problemde gerçekleştirdiği sembolik manipülasyon neticesinde elde ettiği α değişkeninin değerini B ve C açıları bazında değerlendirme biçimi de niceliksel muhakemesi hakkında bilgi vermiştir.

12. Problem:

ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 7\alpha$, $m(\hat{B}) = 5\alpha - 12°$, $m(\hat{C}) = 4\alpha$, $|AB| = 4x + 1$ br ve $|AC| = 13$ br olduğuna göre x i bulunuz.



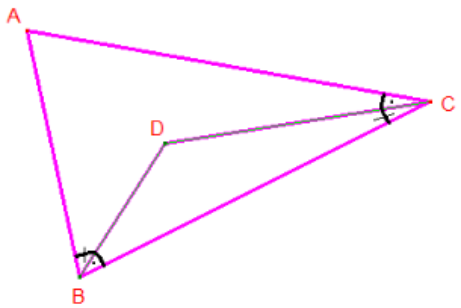
Şekil 3.24. *Öğretim dizisinin 12. problemi*

Tuna tahtada iç açılar toplamını bir denklem ile doğru bir şekilde yazmış, sembolik manipülasyonu sonucunda $\propto$ değişkenini 12 bulduğu için "*12* yi oradan götürürüz 4 $\propto$ olur ikisi de" ifadesi $5 \propto -12$ ifadesini $4 \propto$ olarak değerlendirdiğini ortaya koymuştur. Öğrencinin eşitliğin nicelikler arasında bir ilişki olduğunu kavramış olması 12 sayısını α olarak değerlendirme esnekliği sağlamıştır.

Şekil 3.25.'de verilen 17. problemde ise odak öğrenci Bora, "şu iki açıyı [ABD ve DBC açılarına işaret ederek] toplayınca diğer iki açıyı [ACD ve DCB açılarına işaret ederek] da toplayınca eşit oluyor" açıklaması ile çizimde verilen üçgenin bir ikizkenar üçgen olduğunu ifade etmiştir. Herhangi bir sayısal değeri olmayan ya da değişkenler ile temsil edilmemiş açılar ile ilgili bu çıkarımda bulunması, öğrencinin niceliksel muhakemeye sahip olduğunu göstermiştir. Utku da Bora'yı desteklemiştir.

17. Problem:

ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 68°$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DCB})$ ve $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCA})$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?



Şekil 3.25. *Öğretim dizisinin 17. problemi*

Bora'nın açıklaması üzerine Meltem problemi çözmek için tahtaya gelmiş ve değişken kullanmadan çözümü gerçekleştirmiştir: "*180* den *68* çıkarır, iki çizgi iki çentiği bulurum. İkiye bölerim. BDC üçgeninin bir çizgi bir çentiğine eşit oluyor. *180* den bu bulduğumu çıkarır bu açıyı bulurum". Meltem'in çözümü de değişken kullanmadan gerçekleştirilen bir niceliksel muhakeme örneği olmuştur.

3.2.3. Üçüncü hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

Öğretim dizisinin üçüncü haftasında üçgende açı-kenar ilişkileri ve üçgen eşitsizliği konuları işlenmiş ve değişken kullanımının ön planda olduğu üçgende açı ve açı-kenar ilişkileri üzerine problemler çözülmüştür.

3.2.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında öğrencilerin sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalardaki matematiksel ifade ve eylemleri Tablo 3.12.'de geometrik bilgi ve geometrik bilginin uygulanması temaları altında sunulmuştur.

Tablo 3.12. *Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Geometrik ön bilgiler: Belinay – üçgen eşitsizliğini formül olarak algılama. Eren, Bahar – üçgenin iki tane geniş açısı olduğunu ifade etmeleri. Terminoloji kullanımı: Eren – terminoloji eksikliği. Meltem – "ters" açıya "karşı" açı olarak ifade etmesi. Kural temelli öğrenmeler: **Bora** – (34. problem) "kum saati" önermesine Meltem'in paralellik olmadığını belirterek karşı çıkması Tanım yapma becerileri: Melike, Meltem – tanım ve özelliği beden dili kullanarak ifade etmeleri **Tuna** – çevre için formal tanım yapması, özelliği formal ifade edebilmesi. Prototip fenomeni: Utku - dik üçgende dik olmayan açılarının $45-45$ olduğunu düşünmesi **Tuna'nın** Utku'ya karşı çıkması. Utku - (31. Problem) duyuları ile hareket etmesi, arkadaşlarının Utku'ya karşı çıkması.	Geometrik bilgiyi devreye sokma **Ata** – (24. problem) dik açılı üçgende en uzun kenarın hipotenüs olması gerektiği bilgisini devreye sokması. **Tuna**, **Kayla** (28. problem) 6-8-10 Pisagor üçlüsünün varlığını hissetmeleri ancak geniş açının varlığını problem durumuna uyarlayamamaları. **Ata** – (31. problem) üçgen eşitsizliğini kenar uzunlukları değişkenler ile tanımlanmış bir üçgende kullanması. Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme **Ata** – (34. problem) üçgenin iki iç açısının bunlara komşu olmayan dış açıyı vermesi özelliğini açıları değişkenler ile tanımlanmış birden fazla üçgende kullanması. Utku – (32. problem) çözüm için gereken geometrik bilgiye sahip olmasına rağmen kenarlarının gördüğü açıları doğru tespit edememesi.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Üçgen eşitsizliğinin öğrencilerin zihninde nasıl bir yapıda olduğunun anlaşılması için öğrencilere $6 - 10 - 3$ cm uzunluğundaki doğru parçaları ile üçgen oluşturulup oluşturulamayacağı sorulmuştur. Belinay "Üçgen eşitsizliğinin formülünde iki tane kenar seçiyoruz. Bu iki kenarın birbirinden çıkarımıyla birbirinin toplamı arasında olacak" ifadesinde bulunmuştur. Belinay'ın ifadesi doğru olmakla beraber, "formül" ifadesini kullanması öğrencinin üçgen eşitsizliğini bir formül olarak algıladığını göstermiştir.

Öğrencilerin üçgenin temel elemanları ile ilgili kazanım eksiklikleri öğretim dizisinin üçüncü haftasında da gözlemlenmiştir. Bir açısı geniş açı olan ve bu açıyı gören kenarın ortak kenar olduğu iki üçgenin verildiği 28. problemde (Şekil 3.33.) öğrencilere bir üçgenin kaç tane geniş açısı olur sorusu yöneltilmiş ve Eren ile Bahar bu soruya "*iki*" cevabını vermişlerdir.

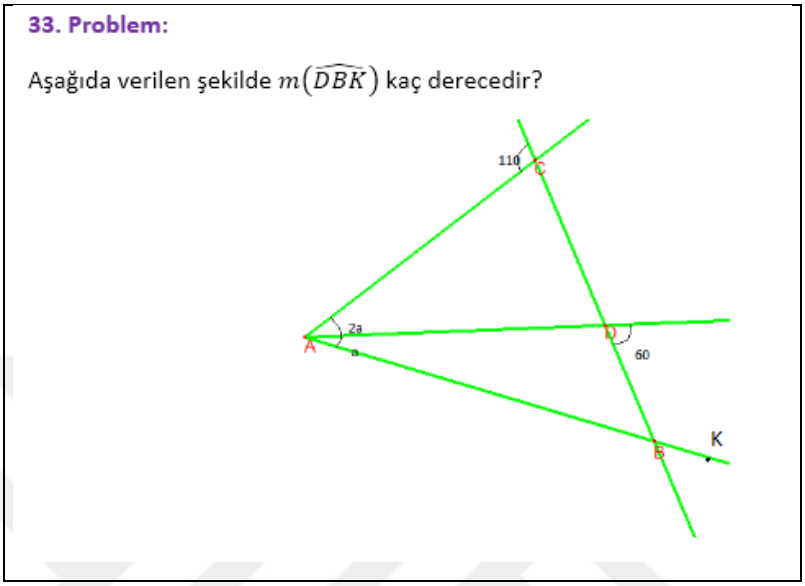
- Terminoloji kullanımı: 28. problemi (Şekil 3.33.) tahtada çözen Eren, x değişkeni ile tanımlanmış ortak kenarın en uzun kenar olduğuna karar vermiş ve her iki üçgenin diğer kenarlarına eliyle işaret ederek "şu köşelerden büyük" ifadesinde bulunmuştur. Öğrencilerin yanlış terminoloji kullanımlarına bir örnek de 33. problemde (Şekil 3.26.) Meltem'in ters açıya "karşı açı" olarak hitap etmesi şeklinde gerçekleşmiştir.

- Kural temelli öğrenmeler: Öğrencilerin kural temelli hatırlamalarını çözüm için devreye sokma girişimleri gözlemlenmiş olsa da bazı öğrencilerin karşı çıkma durumları görülmüştür. 34. problemde (Şekil 3.34.) odak öğrenci Bora "kum saati diye bir şey vardı" ifadesinde bulunmuş, ancak Meltem Bora'ya karşı çıkarak "burada paralellik belirtmemiş, onu kullanmayız" şeklinde görüş belirtmiştir. Meltem'in "kum saati" olarak tabir edilen kuralı ve bu kuralın paralellik gerektirdiğini bildiği görülmüştür.

- Tanım yapma becerileri: 27. problemde (Şekil 3.32.) Melike'ye üçgenin çevresinin ne olduğu sorulmuş ve öğrenci eliyle üçgeni bir çember içine alırmış gibi göstererek "tamamı" şeklinde yanlış cevap vermiş ve formal bir tanımda bulunamamıştır. Odak öğrenci Tuna'nın "tüm kenarların toplamı" şeklindeki çevre tanımının formal bir yapıya sahip olduğu görülmüştür.

Şekil 3.26.'da verilen 33. problemin çözümü için gerekli olan geometrik özelliği odak öğrenci Tuna'nın "üçgende iki açıyı topluyoruz, komşu olmayan dış açıya eşit" şeklinde ifade etmesini formal tanımlara olan başarılı yaklaşımını ortaya koymuştur. 34. problemde (Şekil 3.34.) Meltem üçgende iki iç açının toplamının bu açılara komşu

olmayan açının dış açı ölçüsünü vermesi özelliğini çizim üzerinde beden dili ile doğru bir biçimde ifade etmişken, sözel olarak Meltem "iki açının kenar komşusu…" ifadesi ile başlamış ancak cümlesini tamamlayamadığı görülmüştür.



Şekil 3.26. *Öğretim dizisinin 33. problemi*

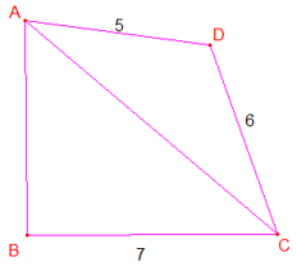
- Prototip fenomeni: Birinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında olduğu gibi, Utku 24. problemde (Şekil 3.27.) dik üçgende dik olmayan açılar ile ilgili olarak "B *90* olduğundan $45 - 45$ kalıyor" ifadesinde bulunmuş ve odak öğrenci Tuna "nereden biliyorsun" sorusu ile Utku'nun bu düşüncesinde yanıldığına dikkat çekmiştir. Utku 31. problemde de (Şekil 3.28.) duyuları ile hareket ederek "en geniş açı A açısı" yorumunu yapmış, arkadaşları Utku'ya "nereden biliyorsun" diyerek karşı çıkmışlardır.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Öğrencilerin üçgen eşitsizliği, geometrik ön bilgiler ve geometrik düşünmelerini ortaya koymalarını gerektiren Şekil 3.27.'de verilen 24. problemde odak öğrenci Ata "en büyük B açısı olacak o zaman uzunluğu yani AC en uzun olacak" ifadesi ile dik açılı üçgende en uzun kenarın hipotenüs olması gerektiği bilgisini devreye sokmuştur. Ata'nın ifadesi üzerine odak öğrenci Kayla, önce "AC açısı *7* den büyüktür" yorumunu getirmiş sonra da ifadesindeki "açı" kelimesini "kenar" olarak düzeltmiştir.

24. Problem:

$m(\hat{B}) = 90°$ ise $|AC|$ kenarının alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?



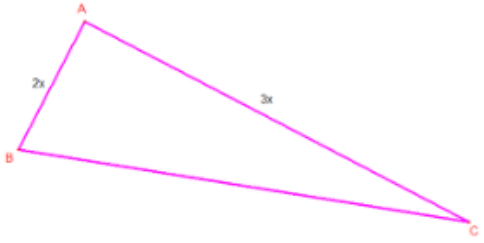
Şekil 3.27. *Öğretim dizisinin 24. problemi*

Üçgen eşitsizliğinin iki üçgen için uygulanıp ortak kenara ait bir aralık yazılmasını gerektiren çoktan seçmeli 28. problemde (Şekil 3.33.) Eren arkadaşlarının yardımıyla x değişkeni ile temsil ettikleri ortak kenar için üçgen eşitsizliklerini yazmış ve bu iki eşitsizlikten $8 < x < 12$ eşitsizliğine ulaşmıştır. x değişkeninin hangi tamsayı değerini alacağı üzerine öğrenciler arasında gerçekleşen tartışmada odak öğrenci Kayla "özel üçgenlerden biri olabilir mi" sorusunu gündeme getirmiştir. Kayla'nın yorumu üzerine Odak öğrenci Tuna, BCD üçgenin iki kenarının uzunluğunun 6 ve 8 birim olmasından yola çıkarak $3 - 4 - 5$ kenar uzunluklarına sahip dik üçgeni hatırladığını ifade etmiştir. Öğrenciler BCD açısının geniş olmasından ötürü x uzunluklu kenarın 10 birimden uzun olması gerektiği çıkarımına ulaşamamıştır.

Üçgenin iki kenar uzunluğunun x değişkenine bağlı olarak tanımlandığı Şekil 3.28.'de verilen 31. problemde odak öğrenci Ata diğer kenara y değişkenini atamış ve üçgen eşitsizliğini bu değişkenler vasıtasıyla sözel olarak ifade edebilmiştir.

31. Problem:

ABC üçgeninin çevresi 60 birimden küçük ise x in alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?

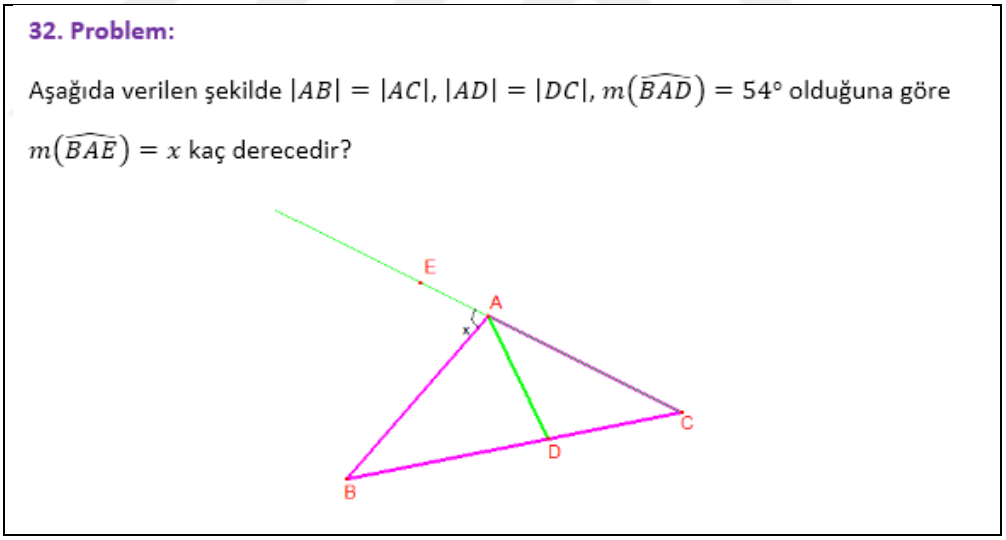


Şekil 3.28. *Öğretim dizisinin 31. problemi*

Ata'nın "y açısı x ile $5x$ arasında desek, en küçük olduğu için $2x$ i alsak olur mu" ifadesi her ne kadar eşitsizlik kavrayışındaki ve terminoloji kullanımı sorunları ortaya koymuş olsa da, öğrencinin üçgen eşitsizliği bilgisini kenar uzunlukları değişkenler ile tanımlanmış bir üçgende kullanabildiğini göstermiştir.

Odak öğrenci Ata'nın 34. problemde (Şekil 3.34.) üçgenin iki iç açısının bunlara komşu olmayan dış açıyı vermesi özelliğini açıları değişkenler ile tanımlanmış birden fazla üçgende kullanabildiği gözlemlenmiştir.

- Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme: Bir üçgende eşit uzunlukta kenarları gören açıların eşit olduğu bilgisini değişken kullanarak çözmeyi gerektiren Şekil 3.29.'da verilen 32. problemde Utku, "AD ve DC kenarları eşit olduğundan bunların gördüğü açılar birbirine eşittir; AB ile AC kenarları eşit ise bunların da gördüğü açılar eşittir" ifadesi ile çözümün nasıl gerçekleştirileceğini doğru bir biçimde açıklamasına rağmen AD ve DC kenarlarının gördüğü açıları doğru bir şekilde belirleyememesi problemi çözemeyişi ile sonuçlanmıştır.



Şekil 3.29. *Öğretim dizisinin 32. problemi*

3.2.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.13.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.13. *Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

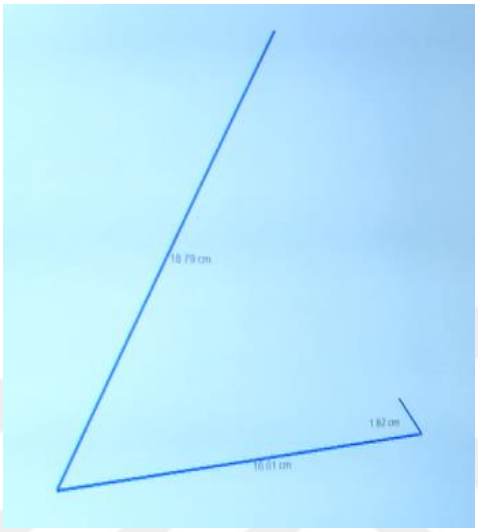
GENELLEŞTİ-RİLMİŞ ARİTMETİK-SEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Sayı kümeleri bilgisi Öğrencilerin sayı kümeleri ile ilgili kazanım eksiklikleri.	Cebirsel ön bilgiler Utku – üçgen tanımında "kesişim" terimini kullanması. Utku - (23. problem) değişken için elde ettiği iki aralığı ortak değerlendirememe, geometrik temsil üzerine anlamlandırabilme ancak sembolik temsilde hata. **Kayla** – aynı matematiksel cümle içinde hem eşitlik hem de eşitsizlik kullanmayı düşünmesi. Melike – bir aralıkta ifade edilen değişkeni bir tamsayıya eşitlemesi. **Tuna** – (28. problem) eşitsizlik kavrayışında eksiklikler. **Ata** – (31. problem) sadece değişkenlerin bulunduğu eşitsizlikte tamsayılı değişkene eşitleme isteği.	Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği Utku - üçgen eşitsizliği tanımında kenar uzunluklarının daima sayısal değerler ile tanımlanacağını düşünmesi. Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme Utku – (25. problem) ve **Arya** (34. problem) değişkenleri birbiri cinsinden ifade etmeleri. Sembolik temsilleri kullanma **Ata** (34. problem) ve **Tuna** (35. problem) değişken kullanımlarının başarılı olması. Cebirsel işlem becerileri **Bora**, **Arya** - (34. problem) cebirsel işlemlerde hata yapmaları.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Sayı kümeleri bilgisi: 23. problemde (Şekil 3.30.) BC kenarı ile ilgili $6 < |BC| < 16$ eşitsizliğinin elde edilmesi üzerine öğrencilere bu eşitsizliği sağlayan kaç tane reel sayı olduğu sorusu yöneltilmiştir. Bahar "*10*", odak öğrenci Kayla ise "*9*" cevabını vermiştir. Bunun üzerine öğrencilere reel sayıların ne olduğu sorulmuş ve odak öğrenci Tuna "sınırsız" cevabını vermiştir. Doğal sayıların ne olduğu sorusuna odak öğrenci Tuna "sanırım sadece pozitif sayılar" cevabını verirken, Utku "nötr, sıfır ve pozitif sayılar" cevabını vermiştir. Öğrencilerin doğal sayıların hangi harf ile temsil edildiğini bildikleri gözlemlenmiştir. Tam sayıların ne olduğu sorusuna ise odak öğrenci Tuna "eksiler ve artılardaki *1, 2, 3* gibi, sembolü *Z*" yanıtını vermiştir. Rasyonel sayıların ne olduğu sorusuna Meltem "kesirli" cevabını vermiştir. Bir rasyonel sayı için olmazsa olmaz koşulun ne olduğu sorulduğunda çeşitli öğrencilerden "negatif", "payı büyük" ve "payda *0* olduğunda" cevapları gelmiştir. Bu tartışma öğrencilerin sayı kümeleri ile ilgili kazanımlarında eksiklikler olduğunu ortaya koymuş ve bu problemin çözümünü müteakip sayı kümeleri tekrar edilmiştir.

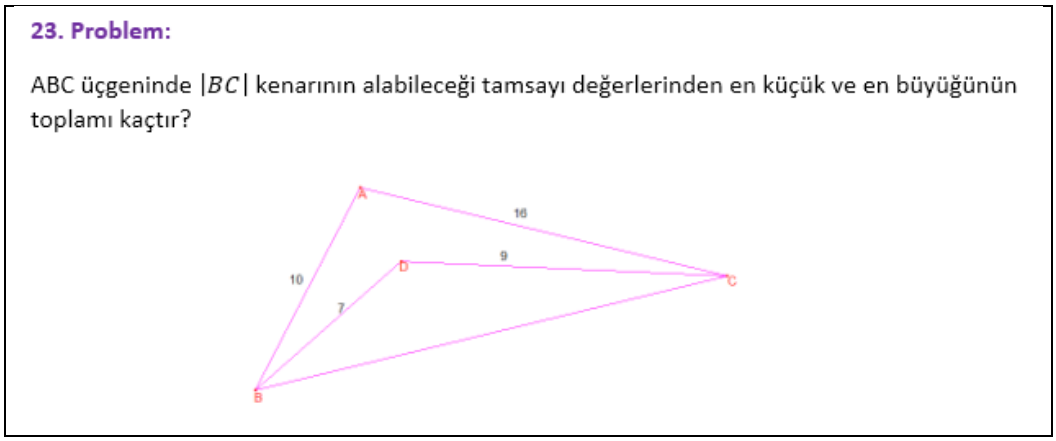
Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: CG-II yazılımında gerçekleştirilmiş Görsel 3.8.'deki çizimin neden bir üçgen oluşturmadığı üzerine başlatılmış tartışmada Utku'nun "Üçgen demek üç tane doğrunun kesişmesi demek aynı yerde" şeklindeki ifadesinden üçgenin formal tanımındaki birleşim kavramının öğrencide oluşmadığı gözlemlenmiştir.



Görsel 3.8. *Öğrencilerin üçgen eşitsizliğine duyulan ihtiyacı hissetmeleri için CG-II yazılımında yapılmış çizim*

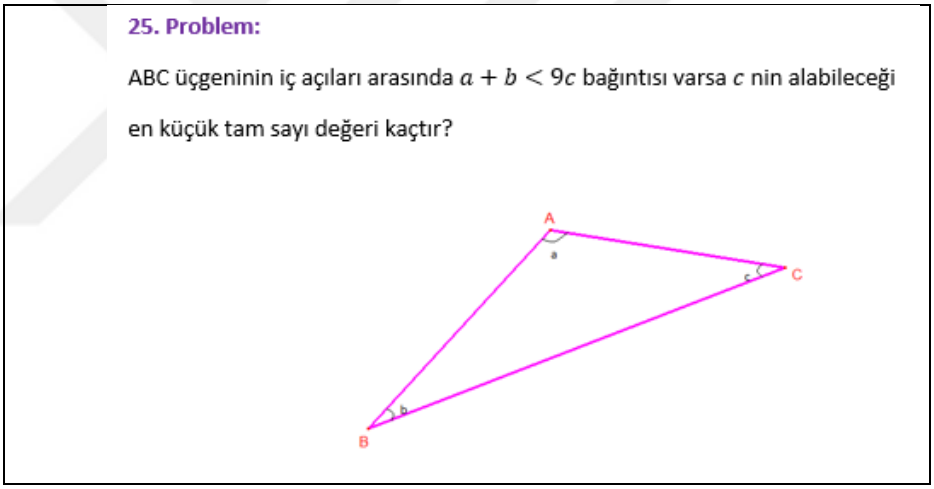
Üçgen eşitsizliğinin öğrencilere tanıtılmasının ardından öğrencilerin uygulama yapmaları için yöneltilen Şekil 3.30.'da verilen 23. problemi tahtada Utku çözmüştür. Öğrenci her iki üçgende ortak olan kenar için üçgen eşitsizliğini doğru bir şekilde uygulamıştır.



Şekil 3.30. *Öğretim dizisinin 23. problemi*

Utku BC kenarı için $6 < |BC| < 26$ ve $2 < |BC| < 16$ eşitsizliklerini elde etmiş ancak bu eşitsizliklerin aynı değişken için olduğunu değerlendirememiş ve "en küçük olarak *2,* en büyük olarak *26* alırım" ifadesinde bulunmuştur. Meltem Utku'ya "hayır, oradaki iki aralık ya olmaz" şeklinde itirazda bulunmuştur. BC kenarı için elde edilen eşitsizliklerin sayı doğrusu üzerinde temsil edilmesinin üzerine Utku bu kenar için geçerli olan eşitsizliğin bir kesişim kümesi olduğunu anlamış, BC kenarının "*6* ile *16* arasında" olduğunu ifade etmiş, ancak sözlü ifadesini matematiksel olarak $6 < 16$ biçiminde temsil etmesi öğrencinin cebirsel temsil kullanımdaki eksikliğini ortaya koymuştur.

Üçgenin tüm açı ölçülerinin birer değişken ile tanımlandığı ve bu değişkenler arasındaki ilişkinin verildiği Şekil 3.31.'deki 25. problemde odak öğrenci Kayla'nın çözüme ulaşmak için sunduğu cebirsel ifadelerin matematiksel olarak oldukça kusurlu olduğu görülmüştür.



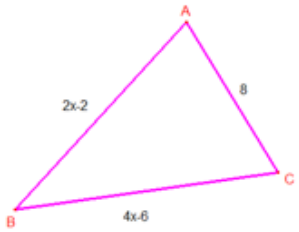
Şekil 3.31. *Öğretim dizisinin 25. problemi*

Kayla'nın "a artı b küçük $9c$ eşittir *180* desek" ifadesi eşitsizlik ve eşitlik kavramlarını aynı matematiksel cümle içinde kullanmayı düşündüğünü göstermiştir.

Üçgenin iki kenarının ortak değişken ile ifade edildiği Şekil 3.32.'de verilen 27. problemi çözmek için Melike tahtaya gelmiştir. Öğrenci açılar arasındaki sıralama ilişkisi ile doğru orantılı olarak kenar uzunluklarını küçükten büyüğe sıralamıştır.

27. Problem:

ABC üçgeninde verilenlere göre $m(\hat{C}) < m(\hat{B}) < m(\hat{A})$ ise üçgenin çevresinin alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?



Şekil 3.32. *Öğretim dizisinin 27. problemi*

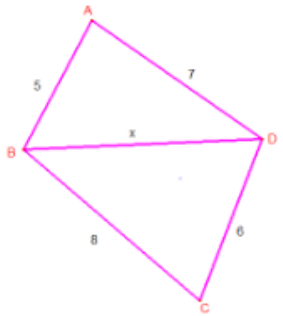
Melike elde ettiği $2x - 2 < 8 < 4x - 6$ eşitsizlik sisteminin sol tarafının çözümünde $2x < 10$ düzenlemesinin ardından $x = 5$ yazmıştır. Bunun bir denklem olmadığı hatırlatılınca $x < 5$ elde etmiş, sistemin sağ tarafının çözümünde $14 < 4x$ düzenlemesini yapmıştır. Değişkenin tamsayı çıkmayacağını anlayınca tereddüt yaşamış fakat sonrasında her iki aralığı ortak değerlendirebilmiş ve $\frac{7}{2} < x < 5$ eşitsizliğini yazmıştır. Çevreyi $6x$ olarak elde eden Melike üçgenin çevresinin en küçük tamsayı değerine bu eşitsizliği 6 ile genişleterek ulaşması gerekirken değişkeni bir tamsayı değeri seçip 6 ile çarparak çevrenin en küçük değerine ulaştığını düşünmüştür.

Şekil 3.33.'de verilen 28. problemde öğrenciler $8 < x < 12$ eşitsizliğine ulaşmışlar ancak c ve d şıkları arasında tereddütte kalmışlardır.

28. Problem:

Verilen şekilde $m(\widehat{BCD}) > 90°$ ise x aşağıdakilerden hangisi olabilir?

a) 4 b) 7 c) 9 d) 11 e) 12



Şekil 3.33. *Öğretim dizisinin 28. problemi*

Odak öğrenci Tuna: C açımız burada en büyük, yok, BCD üçgeninde en büyük açımız C açısı. 8 den büyük olacak o yüzden 9. En küçük 9 ile 12 arasında, burada 9 dahil değil, o yüzden cevap 11.

Odak öğrenci Ata: Bence 11. BAD üçgenine baktığımızda 12 den küçük olması gerektiğini söylüyor.

Utku: C açısı geniş açı, diğer açılardan farklı olması gerek o yüzden 11. Çünkü 9 olursa büyük bir farkı olmaz.

Odak öğrenci Kayla: Özel üçgenlerden biri olabilir mi?

Odak öğrenci Tuna: BCD üçgeninde bir $3-4-5$ üçgeni var gibi ama tam bir sonuç yok.

Odak öğrenci Tuna'nın eşitsizlik kavrayışında eksiklikler olduğu, odak öğrenci Ata'nın eşitsizliği değerlendirebildiği, fakat yorumunun dayanağının olmadığı görülmüştür. Benzer şekilde Utku da duyuları ile bir yorumda bulunmuştur.

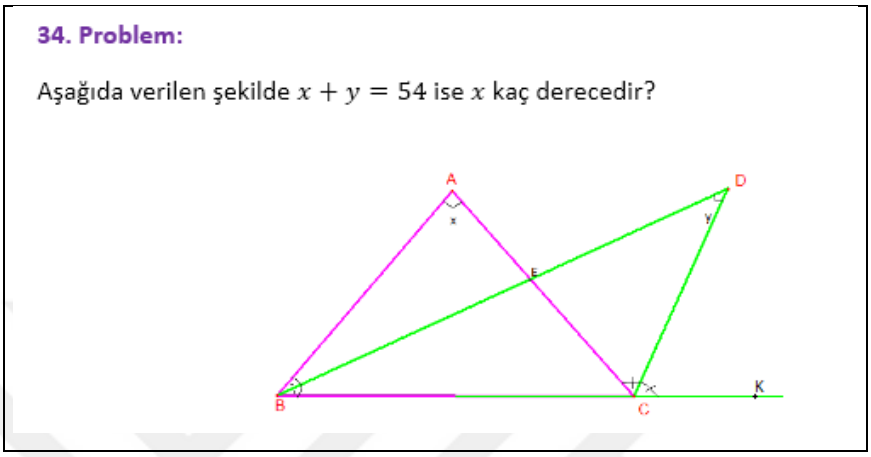
Tuna'nın eşitsizlik kavrayışına benzer şekilde odak öğrenci Ata'nın 31. problemde (Şekil 3.28.) üçgen eşitsizliğini kullanarak elde ettiği $x < y < 5x$ doğru ifadesi üzerine yönelttiği "en küçük olduğu için $2x$ i alsak olur mu" sorusu öğrencinin eşitsizlik kavrayışındaki sorunu ortaya koymuştur. Ata'nın yaklaşımının ardından Utku'nun "y ye en büyük vereceğiz ki x en küçük olsun" ifadesi öğrencinin değişkenlerin birbiri ile ilişkisini doğru bir şekilde yorumladığını göstermiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Herhangi bir üçgende a, b ve c üçgenin kenar uzunlukları olmak üzere $|a-c| < b < a+c$ şeklinde ifade edilen üçgen eşitsizliği öğrencilere tanıtıldıktan sonra Utku'nun yönelttiği "Mutlak değeri almak yerine hep büyükten küçüğü çıkarsak olmuyor mu" sorusu öğrencinin zihninde kenar uzunluklarının daima sayısal değerler ile tanımlanacağı düşüncesini ortaya çıkarmıştır.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade etme: Açıları a, b ve c ile temsil edilen 25. problemdeki (Şekil 3.31.) üçgende Utku "$a+b+9c > 180$ ve a artı b artı c eşit *180* olduğunu biliyoruz. İkisinden yola çıkarak bir şey yapabilir miyiz" sorusunu yöneltmiştir. Utku'nun problemde verilen eşitsizlikte sembolik manipülasyonu hatalı olmasına rağmen üçgenin iç açıları toplamını problemin çözümü için devreye sokması doğru bir başlangıç yapmasına yardımcı olmuştur. Sınıfa yöneltilen değişkenlerin sayısını nasıl azaltabileceğimiz sorusuna Utku'nun verdiği cevap olan "a artı b yi $180-c$ olarak düşünürüz" ifadesi, öğrencinin değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebildiğini göstermiştir.

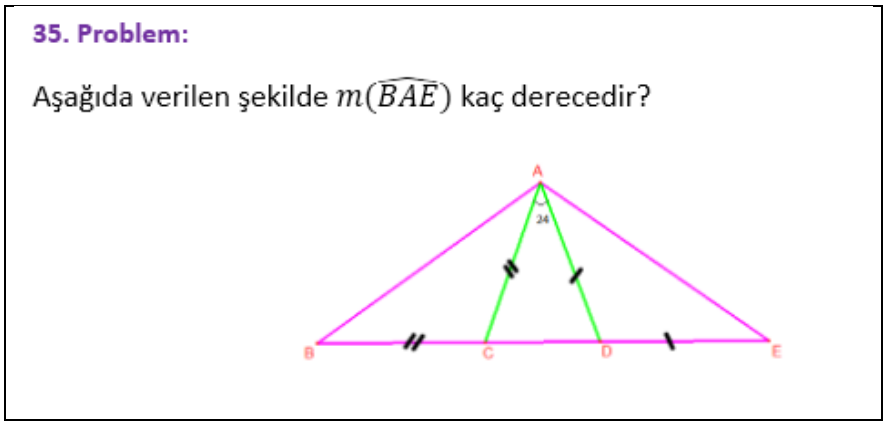
- Sembolik temsilleri kullanma: Değişken kullanımı, değişkenlerin birbiri cinsinde ifade edilmesi ve üçgende açının özelliklerinin kullanımını gerektiren ve ders kitaplarında özellik olarak sunulan Şekil 3.34.'deki 34. problemde odak öğrenci Ata "çentik ve noktaya değişkenler koyarız" ifadesi ile çözümü başlatmıştır.



Şekil 3.34. *Öğretim dizisinin 34. problemi*

$m(\widehat{ABE}) = m(\widehat{EBC}) = a$ ve $m(\widehat{ACD}) = m(\widehat{DCK}) = b$ değişkenlerinin kullanılmasının ardından Ata'nın "$2a$ artı x $2b$ yi verir. BEC açısı da x artı a" ifadesi öğrencinin üçgende iki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan açının dış açı ölçüsünü vermesi özelliğini sembolik temsiller ile başarılı bir şekilde kullanabildiğini ortaya koymuştur. ACB açısının ne olacağı sorulduğunda ise odak öğrenci Arya "$180 - 2b$" doğru cevabını vermiştir.

Sembolik temsillerin kullanılmasını gerektiren bir diğer problem Şekil 3.35.'de verilen 35. problemdir.



Şekil 3.35. *Öğretim dizisinin 35. problemi*

Odak öğrenci Tuna tahtada problem hakkında "değişkenler atayacağız" yorumunda bulunarak BAC ve CBA açılarına a değişkeni, AED ve EAD açılarına b değişkenlerini atamıştır. "$2a$ nın toplamı bunlara komşu olmayan açıya eşit" ifadesinde bulunarak ACD açısının ölçüsünü $2a$ ve ADC açısının ölçüsünü $2b$ olarak ifade etmiştir. ACD üçgeninin iç açıları toplamından a ve b değişkenlerinin toplamına ulaşmış ve problemde istenilen açının ölçüsünü doğru bir biçimde bulabilmiştir.

- Cebirsel işlem becerileri: 34. problemde (Şekil 3.34.) BCD üçgeninin iç açıları toplamı olan $a + 180° - 2b + b + y = 180°$ denkleminin yazılmasının ardından odak öğrenciler Arya ve Bora $180 - 2b + b$ ifadesini $180 - 3b$ olarak yanlış bir şekilde değerlendirmişlerdir.

3.2.4. Dördüncü hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftasında üçgenin yardımcı elemanları ile bu yardımcı elemanlarının ait olduğu kenarlar arasındaki ilişki CG-II yazılımı yardımıyla öğrencilere sezdirilmiş ve öğrencilerden bu ilişkileri genellemeleri istenilmiştir. İki üçgenin eş olması için gereken koşulların keşfedilmesi, eşlik aksiyomlarının sunulması ve bu aksiyomlar ile problem çözme dördüncü haftanın içeriğini oluşturan diğer kısımlardır.

3.2.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin matematiksel ifade ve eylemleri geometrik bilgi ve geometrik düşünme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.14.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.14. *Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

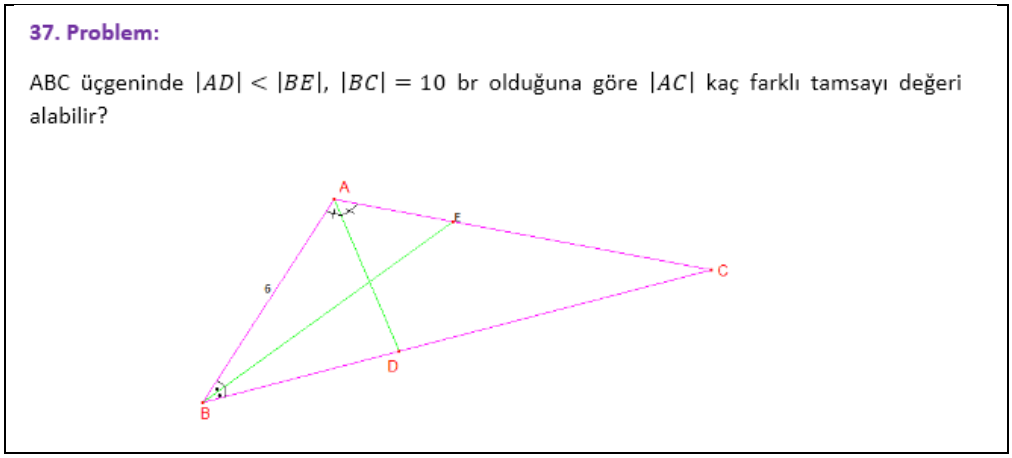
GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Geometrik ön bilgiler Üçgenin yardımcı elemanları ile ilgili kazanım eksiklikleri. **Tuna** - herhangi bir üçgende açıortayın aynı zamanda kenarortay olduğunu düşünmesi.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler CG-II yazılımında açıortay ile ait olduğu kenar arasındaki ilişkinin keşfi sırasında;

Tablo 3.14. (Devam) *Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Geometrik ön bilgiler **Arya** - açıortay ile ait olduğu kenar arasında doğru orantı olduğunu düşünmesi. **Ata'nın** duyuları ile Arya'ya karşı çıkışları. Utku ve birçok öğrenci- üçgenin yardımcı elemanlarını oluşturan doğru parçalarının uç noktalarından birinin üçgenin bir köşesinde diğerinin o köşede oluşan açının gördüğü kenar üzerinde olması gerektiğini bilmemesi. Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili tanıma Öğrencilerin $\|AE\|$ temsilini tanımamaları. **Kayla** - (43. problem) $m(\widehat{BAD}) = 2m(\widehat{DAE})$ ilişkisinde adı geçen açıları köşelerin sırasını gözetmeden okuması. Prototip fenomeni **Ata** – (37. problem), **Bora** – (38. problem) duyuları ile hareket etmeleri.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler Eren – "açının gördüğü kenara tıklama" (rastgele doğru parçası çizmek ile sonuçlanır), buna **Arya'nın** karşı çıkışı. Meltem - "bir açının kenarı-köşesi-kenarına tıklaması" (açının ölçüsünü hesaplama eylemine benzer) Utku - önce köşesine sonra açının gördüğü kenara tıklama (açıortay çizememiş olması ile sonuçlanıyor) Serhat - "açı ölçüsü belirler gibi yap" ifadesiyle Utku'yu yönlendirmesi.

Geometrik Bilgi

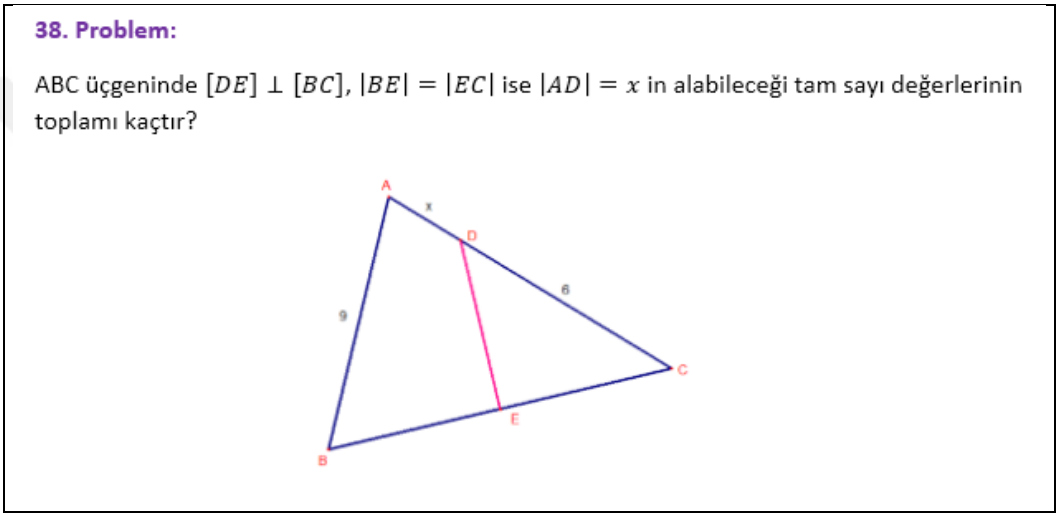
- Geometrik ön bilgiler: Öğrencilerin üçgenin yardımcı elemanları ile ilgili ön bilgi seviyelerinde önemli farklılıklar gözlemlenmiştir. Bir üçgende açıortay ile ait olduğu kenar arasındaki ilişkinin tartışıldığı Şekil 3.36.'daki 37. problemde odak öğrenci Tuna'nın "aynı olmaz mı? Bu şekilde BD ve DC aynı uzunlukta olmaz mı? AD açıyı ortaladığından BD ve DC yi aynı düşünebilirim" şeklindeki ifadesinden öğrencinin herhangi bir üçgende açıortayın aynı zamanda kenarortay olduğunu düşündüğü görülmüştür. Utku ise Tuna'nın ifadesine "hiçbir bağlantı yok. Açıortay açıyı, kenarortay kenarı ikiye böler. Açıortay olduğundan kenarı nereden böldüğünü bilemeyiz" şeklinde doğru bir cevap vermiştir.



Şekil 3.36. *Öğretim dizisinin 37. problemi*

Odak öğrenci Arya'nın "BC, AC den küçüktür, AD ye BF den küçük dediği için; açının baktığı kenar diye düşündüm" şeklindeki ifadesine göre öğrenci açıortay ile ait olduğu kenar arasında doğru orantı olduğunu düşündüğü görülmüştür. Odak öğrenci Ata'nın "BC açısı daha büyüktür çünkü açıortaylara baktığımızda A açısının gördüğü uzunluk daha büyük olduğu için BC daha büyüktür" şeklindeki ifadesi, duyuları ile hareket etmekte olduğunu ve terminoloji kullanımının hatalı olduğunu göstermiştir.

Şekil 3.37.'de verilen 38. problem ise üçgenin yardımcı elemanlarına ait temel özellikler ile ilgili öğrencilerin kazanım eksikliklerini ortaya koymuştur.



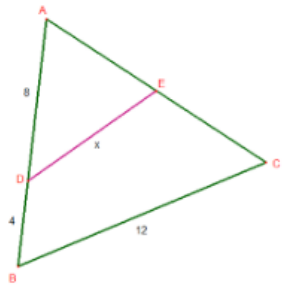
Şekil 3.37. *Öğretim dizisinin 38. problemi*

Utku'nun "DE hem kenarortay hem de dikme" ifadesi öğrencinin üçgenin yardımcı elemanlarını oluşturan doğru parçalarının uç noktalarından birinin üçgenin bir köşesinde diğerinin o köşede oluşan açının gördüğü kenar üzerinde olması gerektiğini bilmediğini ortaya koymuştur.

- Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili tanıma: geometrik nesnelere karşılık gelen sembolik temsillerinin öğrenciler tarafından nasıl tanındığını görmek amacıyla öğrencilere Şekil 3.38.'deki 39. problemde $|AE|$ temsilinin ne için kullanıldığı sorulmuştur. Bu soruyu Ece ve Belinay "AE doğrusu", Meltem ve Bahar "AE kenarı", odak öğrenci Tuna "doğru parçası" ve Utku "doğru parçası, kenarı olacak" olarak cevaplamış ve öğrencilerin hiç biri bu temsilin "AE doğru parçasının uzunluğunu" gösterdiğini ifade etmemiştir.

39. Problem:

ABC üçgeninde $|AE| = |EC|$ ise $|ED| = x$ in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?



Şekil 3.38. *Öğretim dizisinin 39. problemi*

Çizimdeki E noktasının AC kenarının nesi olduğu sorusuna ise Bahar, odak öğrenci Arya ve diğer birçok öğrenci "kenarortayı", Sefa "açıortayı" olduğunu söylerken, Utku "AC yi bölen bir nokta, ayrıştırıcı diyebiliriz" şeklinde cevaplamıştır. Soruya istenilen cevap gelmeyince soru tekrarlanmış ve bu sefer Meltem "elemanıdır", Buse "kesiştiği bir nokta", odak öğrenci Bora "kenarı olabilir mi" şeklinde cevaplamışlardır. Arkadaşları Bora'ya karşı çıkınca "köşe o zaman" cevabını vermiş ve arkadaşları Bora'ya tekrar karşı çıkmıştır. Araştırmacının yönelttiği "E orta nokta ise DE için kenarortay diyebilir miyiz" sorusuna sınıfın çoğunluğu "evet" cevabını vermiştir. Utku ise 38. problemde (Şekil 3.37.) edindiği tecrübe ile arkadaşlarının yanıldığını ifade eden "bir açıdan çıkması gerekiyor" cevabını vermiştir.

Odak öğrenci Kayla 43. problemde (Şekil 3.39.) verilen $m(\widehat{BAD}) = 2m(\widehat{DAE})$ ilişkisinde adı geçen açıları ifade ederken köşelerin sırasını gözetmeden okumuştur.

- Prototip fenomeni: Odak öğrenci Ata'nın 37. problemde (Şekil 3.36.) "BC açısı daha büyüktür çünkü açıortaylara baktığımızda A açısının gördüğü uzunluk daha büyük olduğu için BC daha büyüktür" şeklindeki ifadesi öğrencinin duyuları ile hareket ettiğini göstermiştir.

38. problemin (Şekil 3.37.) çözümü için DE doğru parçasının bir üçgende hem yükseklik hem de kenarortay olmasını sağlayan BD doğru parçası çizildikten sonra odak öğrenci Bora'nın "ABD üçgeninde Pisagor" önerisini sunması duyuları ile hareket ettiğini ve BD doğru parçasının AC kenarına dik olduğunu düşündüğünü göstermiştir.

Geometrik Düşünme

- İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler: Bir üçgende açıortay ile ait olduğu kenar arasındaki ilişkiyi öğrencilerin keşfetmelerini sağlamak için CG-II yazılımı kullanılmıştır. Utku yazılımı kullanmak için akıllı tahtada bir üçgen çizmiş ve açıortay doğrusunu çizmek için açıortay aracını seçmiştir. Aracın nasıl kullanılacağı öğrencilere sorulunca Eren açının gördüğü kenarı kastederek "kenara tıklasa olur mu" sorusunu yöneltmiş, odak öğrenci Arya ise buna karşı çıkmıştır. Meltem'in Utku'yu yönlendirmek için "bir açının kenarı-köşesi-kenarına tıklayarak açıortayı çizebilir" şeklindeki ifadesi Meltem'in açıortay kavramına ilişkin sağlam bir anlayışı olduğunu göstermiştir, çünkü Meltem yazılımda bu aracı ilk kez kullandığını ifade etmiştir. Meltem'in açıklamasını dinlememiş olan Utku, açının önce köşesine sonra açının gördüğü kenara tıklama yapmıştır. Gerçekleşen çizim açıortayı vermediği için Serhat "açı ölçüsü belirler gibi yap" ifadesiyle Utku'yu yönlendirmiştir.

3.2.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

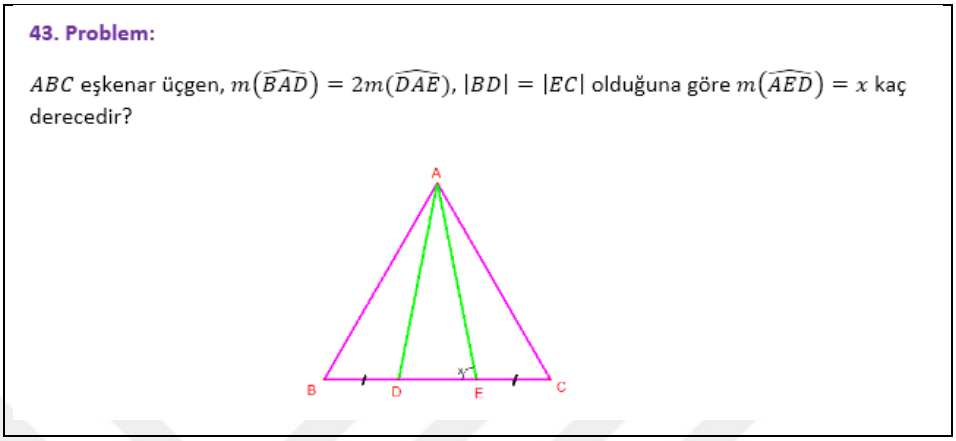
Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme ve niceliksel muhakeme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.15.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.15. *Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	GENELLEME	NİCELİKSEL MUHAKEME
Cebirsel ön bilgiler **Kayla** – (43. problem) ifade ettiği açıların problem metnindeki açıları göstermemesi ve orantı ilişkisini doğru kuramaması. **Arya**'**nın** Kayla'ya karşı çıkışı. **Tuna** doğru değişken kullanımı ancak orantı ilişkisini yanlış kurması. Sınıftan bazı öğrencilerin Tuna'ya karşı çıkışı.	Sembolik manipülasyon becerisi Bahar – (42. problem) eş olan kenarlar arasında orantı ilişkisini doğru kurması ve denklemleri yazması. Sözdizimsel sembolik manipülasyon.	Sözlü genellemede bulunma **Tuna** – CG-II yazılımında açıortay ile ait olduğu kenar arasındaki ilişkiyi "kısa açıortaya bir kenar karşılık geldiğinde o kenar uzun oluyor" şeklinde genellemesi. Birçok öğrenci - Açıortay ile ait olduğu kenar arasında ters orantı olduğunu söylemeleri.	Utku - (40. problem) değişken kullanmadan niceliksel muhakeme ile çözümü.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Açıları arasında orantı ilişkisinin verildiği Şekil 3.39.'daki 43. problem öğrencilerin orantı ilişkilerini nasıl yorumladıkları üzerine veri sunmuştur.

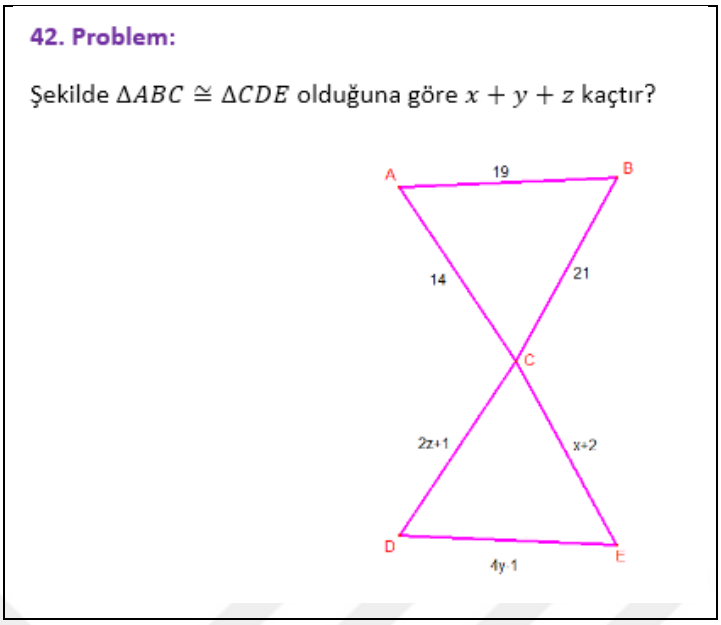


Şekil 3.39. *Öğretim dizisinin 43. problemi*

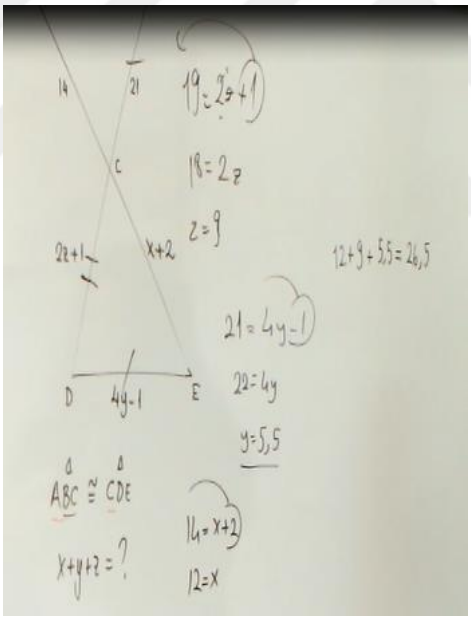
Odak öğrenci Kayla açılar arasındaki ilişki için "ABD ye x verirsek ADE $2x$ yazarız" yorumunu yapmıştır. Öğrencinin ifade ettiği açılar problem metnindeki açıları göstermemekle beraber orantı ilişkisini de kuramadığını göstermiştir. Odak öğrenci Arya "hayır tam tersi değil mi" sorusu ile Kayla'ya karşı çıkmıştır. Odak öğrenci Tuna'nın "BAD açısına y, DAE ye $2y$" ifadesi ise x den farklı bir değişken kullanmış olması açısından doğru, ancak orantı ilişkisini kuruşu açısından yanlış olmuştur. Sınıftan bazı öğrenciler Tuna'ya karşı çıkmışlar ve Tuna ifadesini düzeltmiştir.

Sembolik manipülasyon

- Sembolik manipülasyon becerisi: Üçgenler arasındaki eşlik bağıntısının öğrencilere hazır verildiği Şekil 3.40.'daki 42. problemde Bahar üçgenlerin eş olan kenarları arasındaki orantı ilişkisini doğru bir biçimde kurarak denklemleri yazmıştır. Görsel 3.9.'da görüleceği üzere Bahar'ın sembolik manipülasyonunun sözdizimsel olduğu, yani terimlere çizdiği oklar ile hareket kazandırarak terimlere hareket eden nesneler gibi davrandığı gözlemlenmiştir.



Şekil 3.40. *Öğretim dizisinin 42. problemi*



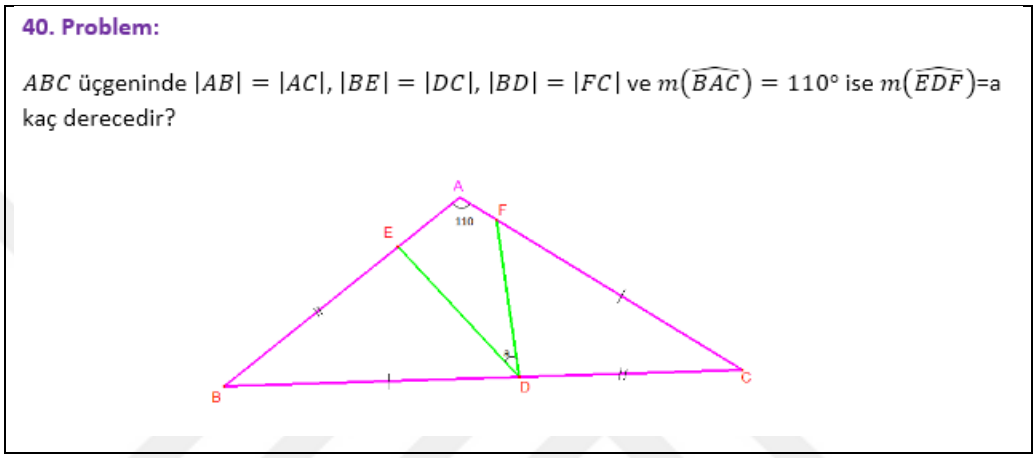
Görsel 3.9. *Bahar'ın 42. problemde gerçekleştirdiği sözdizimsel manipülasyon*

Genelleme

- Sözlü genellemede bulunma: Bir üçgende açıortay ile ait olduğu kenar arasındaki ilişkinin CG-II yazılımında keşfedilmesinin üzerine ilişkiyi odak öğrenci Tuna "kısa açıortaya bir kenar karşılık geldiğinde o kenar uzun oluyor" şeklinde genellemiştir. Açıortay ile ait olduğu kenar arasında nasıl bir ilişki olduğu sorusuna sınıfın çoğunluğu ters orantı olarak cevap vermişlerdir.

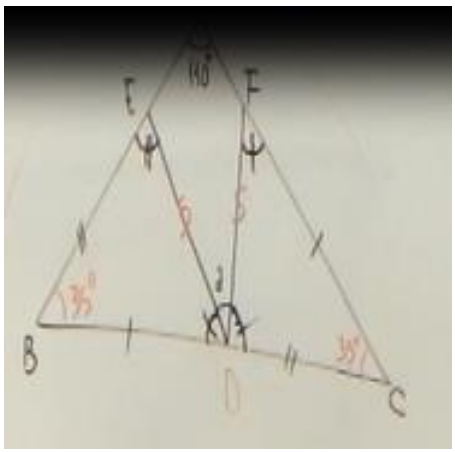
Niceliksel Muhakeme

Kenar-açı-kenar eşlik aksiyomunun kullanılmasını gerektiren Şekil 3.41.'deki 40. problemde $|AB| = |AC|$ olmasından dolayı öğrenciler ABC üçgeninin bir ikizkenar üçgen olduğunu söylemişler ve B ile C açılarının ölçülerini de $35°$ olarak doğru bir şekilde bulmuşlardır. Utku "a *35* olur. *35*, zaten C açısı, öbür iki açı birinde F açısı yani D ye eşit. Göstereyim mi" ifadesinde bulunarak tahtaya gelmiştir.



Şekil 3.41. *Öğretim dizisinin 40. problemi*

İfadesinin matematiksel olarak yetersiz olması nedeniyle Utku, düşüncesini Görsel 3. 10'da verilen şekil üzerinde ifade etme ihtiyacı duymuştur.



Görsel 3.10. *Utku'nun niceliksel muhakeme ile 40. problemi çözüşü*

Utku DFC ve EDB ile CDF ve DEB açı çiftlerine eşit büyüklükte olduklarını temsil etmek için sırasıyla çentik ve çift çentik çizmiş, "bununla bu [CFD ve CDF

açılarını parmağıyla gösteriyor] zaten *35* ile toplanınca *180* ediyor. a da o zaman *35* dir" şeklindeki açıklaması ile problemin çözümünü niceliksel muhakeme ile gerçekleştirmiştir.

3.2.5. Beşinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

Öğretim dizisinin beşinci haftasında iki üçgenin benzer olması için gereken koşulların incelenmesi, benzerlik teoremleri, eşlik ile benzerlik arasındaki ayrım, uygun benzerlik teoremini kullanarak benzerlik bağıntısını yazma, eşlik aksiyom ve benzerlik teoremlerini kullanarak problem çözme ve orantılı doğru parçaları konuları kapsanmıştır.

3.2.5.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin matematiksel ifade ve eylemleri geometrik bilgi, geometrik bilginin uygulanması ve geometrik düşünme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.16.'da bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Birinci etap öğretim dizisinin son haftasında öğrencilere sunulan problemlerin daha karmaşık bir yapı almasıyla birlikte öğrencilerin çizimdeki bazı unsurları doğru belirleyememe durumu ortaya çıkmıştır. 50. problemde (Şekil 3.42.) odak öğrenci Bora'nın iç içe girmiş üçgenlerde üçgenin bir kenarının uzunluğunu belirleyemediği, "*90* ın karşısında *5* var, o zaman diğer *90* ın karşısında *5* veya *2* katı olabilir mi" şeklindeki yorumundan anlaşılmıştır. Meltem ise "Yanlış söyledi, *90* ın karşısında $5 + x$ var" ifadesi ile Bora'yı düzeltmiştir.

- Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili anlama: Öğrencilerin terminoloji kullanımı ve geometrik nesnelerin sembolik temsillerini anlama ile ilgili sıkıntıları birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftasında da gözlemlenmiştir. 45. problemin (Şekil 3.56.) metninde yer alan $m(\hat{C})$ temsilini Esma "*mC*" olarak okumuş ve neyi temsil ettiğini anlamadığı görülmüştür. Aynı problemin çözümünde Utku'nun ABC üçgeni için "öbür üçgen", "soldaki üçgen", A açısı için "ABC üçgeninde boş, gösterilmeyen açı" ifadelerini kullandığı görülmüştür. 52. problemde (Şekil 3.54.) odak öğrenci Ata açıların eş ölçülü olduğunu göstermek için kullanılan $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{AEB})$ temsili için "DBC üçgeni ile ABE üçgeni birbirine eştir demiş" ifadesinde bulunmuştur.

Tablo 3.16. *Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Geometrik ön bilgiler **Bora** - iç içe geçmiş üçgenlerde üçgenin bir kenarının uzunluğunu belirleyememesi. Meltem'in Bora'ı düzeltmesi. Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili anlama ve terminoloji kullanımı Esma - $m(\hat{C})$ temsilini "mC" olarak okuması ve neyi temsil ettiğini bilmemesi. Utku – açıyı köşelerine göre okumama, terminoloji kullanma yerine işaret zamirleriyle anlatım. Terminoloji kullanımı **Ata** - $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{AEB})$ temsilini üçgenlerin eşliği olarak okuması. "ters açı" terimi yerine Meltem "kelebek", **Arya** ve **Tuna** "karşı" açı olarak hitap etmeleri **Arya** - açıya "nokta" terimi ile hitap etmesi. Kural temelli öğrenmeler Eren (47. problem) Z kuralı uygulamayı önermesi Meltem'in paralellik olmamasını öne sürerek karşı çıkması. Serhat - (49. problem) iki doğru parçasının paralel olmasından ötürü Z kuralının geçerli olduğunu ifade etmesi, Utku, Meltem ve **Ata'nın** meydana gelen ters ve yöndeş açıları bulmaları. Prototip fenomeni (49. problem) Herhangi bir üçgenin iki kenar uzunluğunun Pisagor üçlüsü ya da Pisagor üçlüsünün katı olduğu üçgenlere dik üçgen muamelesi yapmaları. **Bora** ve Serhat - (50. problem) eşlik ve benzerliği birbirine karıştırması. **Ata** - (55. problem) duyular ile hareket etme ve toplamları 90 derece olan iki açının birbirine eşit olduğunu düşünmesi. **Bora** – (64. problem) açıortay olmayan doğru parçasına açıortay muamelesi yapması.	Geometrik bilgiyi devreye sokma Utku – (47. problem) doğruda açı kavramının teorik yapısını kullanarak KAK teoremini kullanması. Öğrencilerin benzerliği uzamsal olarak algılamaları dönme ile ilgili iken **Tuna'nın** dönmenin derecesini belirtmesi. Ece ve Utku – (48. problem) benzerliğin teşkil edilmesinin üzerine Ece ve Utku verilen açı ölçülerinin eşit olduğunu bulmaları. Ece, Utku - İkinci dersten itibaren eşlik ve benzerlik bağıntılarının gereksinimlerini sağlamaya başlamaları. Ece – benzerlik bağıntısı için üçgenlerin köşe noktalarını hangi sıralamada yazacağına karar verememesi. Utku'nun doğru açıklaması. Utku – (51. problem) eşliği "dönme ile çakışması" olarak tanımlaması. **Arya** - (54. problem) doğru parçalarının paralelliğinden dolayı yöndeş açıların varlığından haberdar ancak bu açıları tespit edememesi. Utku - terminoloji kullanımı açısından hatalı olsa da yöndeş açıları doğru tespit etmesi. **Ata** – diğer ters açıları tespit etmesi, **Bora'nın** bu açılara "ters açılar" terimi ile ifade etmesi. Kaptan – (57. problem) ters açı çiftlerinden biri gösterildiğinde diğerini bulması. **Tuna** - (55. problem) Pisagor teoremi bilgisini devreye sokmak istemiş ancak Pisagor üçlüsünü yanlış hatırlamıştır. **Kayla'nın** Tuna'ı düzelterek "$3-4-5$ üçgeni" yorumunda bulunması. Utku – (56. problem) üçgenler arasındaki benzerlik sabitini 2 olarak bulmuş ve tüm bulguları terminolojiyi uygun biçimde kullanarak ifade etmesi. Öğrencilerin ters açıları başarılı bir şekilde tespit etmeleri benzerlik problemlerini çözmelerinde faydalı olması.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler **Tuna** – (49. problem) bir üçgende eş ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit oluşu ilişkisini "farklı üçgenlerde eş ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olacağı" yanlış ilişkisine genellemesi. **Bora** – (51. problem ve 59. problem) farklı iki üçgendeki eşit ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olacağı ilişkisini kurması ve bu iki üçgeni kenar-açı-kenar eşlik aksiyomu ile temellendirmeden eş üçgenler olarak kabul etmesi. **Arya** – (54. problem) farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olduğu şeklindeki yanılgısı. Kayla – (52. problem) paralellik ile eşit uzunluklu doğru parçaları arasında yanlış bir ilişki kurması

- Terminoloji kullanımı: Utku 47. problemde (Şekil 3.43.) ters açılar olan ACB ve ECD açılarının eşit oluşunu "C açısı eşit olacak çünkü…" biçiminde ifade etmiştir. Öğrenci hem "ters açı" terimini hatırlamamış hem de açıları noktalar yardımıyla ifade edememiştir. Aynı problemde ACB ve ECD açılarının isimlerinin ne olduğu sorulduğunda ise Meltem "kelebek", odak öğrenci Arya ve Tuna "karşı" ve bir kısım öğrenci "ters açılar" olduğunu söylemişlerdir. Utku ters açıların birbirine neden eşit olduğunu doğru açı kavramı ile açıklarken de açıklamasını tahtada eliyle göstererek işaret zamirleriyle anlatmıştır. Odak öğrenci Arya'nın 54. problemde (Şekil 3.45.) açıya "nokta" terimi ile hitap ettiği görülmüştür.

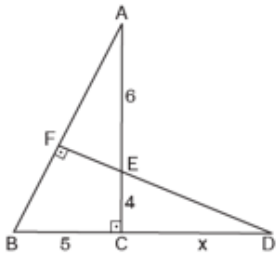
- Kural temelli öğrenmeler: Öğretim dizisinin beşinci haftasında da öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında edindikleri kural temelli öğrenmeleri çözüm için önerdikleri gözlemlenmiştir. Eren 47. problemde (Şekil 3.43.) "Z kuralının" uygulanabileceğini söylemiş, Meltem ise Eren'e "paralellik yok ki" şeklinde doğru bir gerekçe sunarak karşı çıkmıştır. 49. problemde (Şekil 3.48.) ise Serhat iki doğru parçasının paralel olmasından ötürü Z kuralını kullanılabileceğini ifade etmiş ve Utku, Meltem ile odak öğrenci Ata doğru parçalarının paralelliğinden meydana gelen ters ve yöndeş açıları bulabilmişlerdir.

- Prototip fenomeni: Öğrencilerin herhangi bir üçgenin iki kenar uzunluğunun Pisagor üçlüsü ya da Pisagor üçlüsünün katı olduğu üçgenlere dik üçgen muamelesi yapmaları 49. problemde (Şekil 3.48.) gözlemlenmiştir. Buse'nin "ADE üçgeninde acaba $3-4-5$ özel üçgeni olabilir mi? Özel üçgenden yola çıkarak acaba ora [AE doğru parçasını kastederek] *8* mi" şeklindeki yorumu öğrencinin prototip algısını göstermiştir.

Şekil 3.42.'de verilen 50. problemde öğrencilerin üçgenlerde eşlik ile benzerliği birbirine karıştırdıkları gözlemlenmiştir. Odak öğrenci Bora'nın "*90* ın karşısında *5* var, o zaman diğer *90* ın karşısında *5* veya *2* katı olabilir mi" sorusu ile ifade ettiği yorumu eşlik ile benzerlik arasındaki farkı anlayamadığını göstermiştir. Benzer şekilde Serhat "BFD dik ise AFE de *90* olmaz mı? *90*'ın karşısı [AE doğru parçasını kastederek] *6*, öbür tarafta da $5+x$ var, x i *1* olarak düşünemez miyiz" yorumuyla Bora'ya benzeyen bir düşünce yapısına sahip olduğunu göstermiştir.

50. Problem:

Verilen şekilde B, C ve D ile D, E ve F noktaları doğrusal, [DF] ⊥ [AB], [AC] ⊥[BD] ise x kaç cm. dir?



Şekil 3.42. *Öğretim dizisinin 50. problemi*

Birinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında gözlemlenen toplamları 90 derece olan iki açının birbirine eşit olduğu prototip algısı 55. problemde (Şekil 3.55.) yinelenmiştir. Odak öğrenci Ata'nın "Şu C açısının olduğu yerde 90 ın dışındakilerin toplamı 90 olur, o iki açı eşit olur" yorumu duyuları ile hareket ettiğini göstermiştir. Benzer şekilde odak öğrenci Bora duyuları ile hareket ederek 64. problemde (Şekil 3.47.) MA doğru parçasının açıortay olduğu düşünmesi prototip algılara örnek teşkil etmiştir.

Geometrik Bilginin Kullanılması

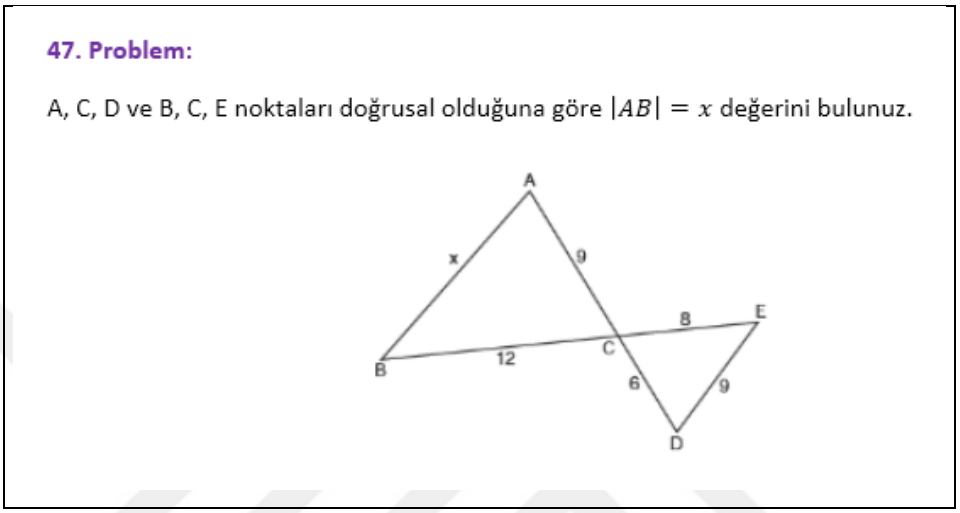
- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Kenar-açı-kenar benzerlik teoreminin kullanılmasını gerektiren Şekil 3.43.'deki 47. problemde Utku ACB ve ECD açılarının neden eşit olması gerektiği hususunu tahtada "bu [ACE açısını göstererek] bunu da [ACB açısını göstererek] 180 e tamamlar, bunu da [ECD açısını göstererek] 180 e tamamlar" şeklinde açıklamıştır. Utku'nun bu açıklaması birinci etap öğretim dizisinin ilk haftasında öğrencilere doğruda açı kavramında yapılmış ve öğrencinin kuralların temelinde yatan geometrik gerçeklerle hareket etme çabası görülmüştür. Aynı problemde öğrencilerin benzerliği uzamsal olarak nasıl algıladıklarını öğrenmek için yöneltilen "ABC ve CDE üçgenlerini ne yaparsak yönelimleri aynı olur" sorusu üzerine öğrenciler arasında aşağıdaki tartışma başlamıştır:

> Ravza: Küçük olan üçgeni CDE üçgenini diğer üçgene böyle (eliyle dönme hareketi yapıyor) yapıştırırsam.
>
> Buse: CED üçgenini D den tutup yukarıya çeviririm.
>
> Utku: (Buse'yi destekleyerek) B ye doğru.
>
> Araştırmacı: Yukarı derken…
>
> Buse: A ya doğru.

Serhat: Buse'nin dediğinin tam tersi, ABC yi A dan tutup D ye doğru.

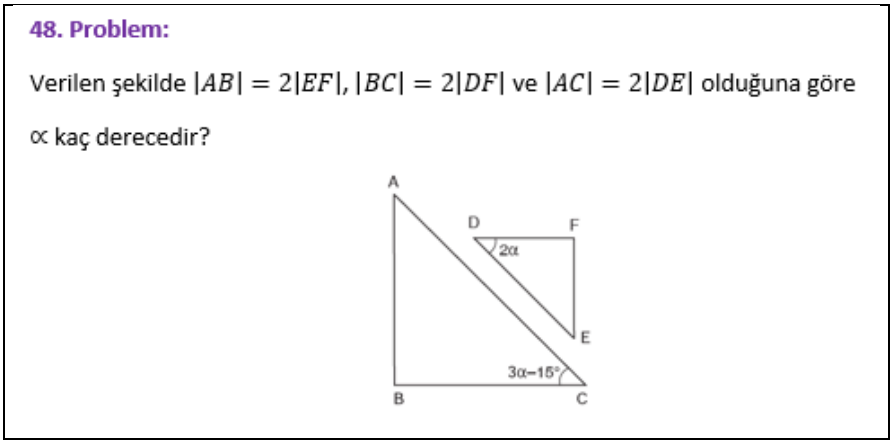
Odak öğrenci Tuna: DEC yi 180 derece döndürerek.

Odak öğrenci Tuna hariç diğer öğrenciler bir referanstan diğerine dönme hareketinden bahsetmiştir. Tuna'nın bir referans noktası belirtmemiş olmasına rağmen dönme derecesi vermesi, geometrik bilgisini devreye soktuğuna işaret etmiştir.



Şekil 3.43. *Öğretim dizisinin 47. problemi*

Kenar-kenar-kenar benzerlik teoreminin olduğu Şekil 3.44'deki 48. problemde benzerliğin teşkil edilmesinin üzerine Ece ve Utku verilen açı ölçülerinin eşit olduğunu elde etmişlerdir.



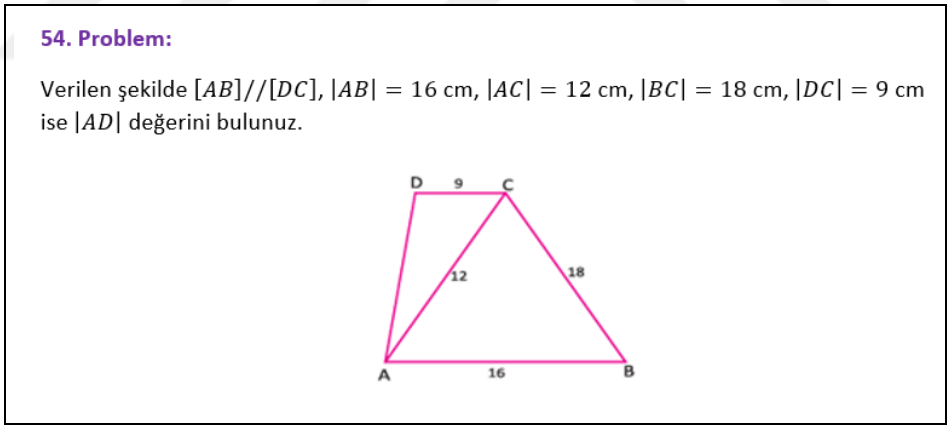
Şekil 3.44. *Öğretim dizisinin 48. problemi*

Beşinci haftanın ikinci dersinde öğrencilerin eşlik ve benzerlik bağıntılarını oluşturmak için veri araştırmasına girmeye başladıkları gözlemlenmiştir. 51. problemde

(Şekil 3.49.) odak öğrenci Tuna'nın verilen çizimde iki açının eşit ölçülü olduğunu tespit etmesi üzerine, Utku üçgenlerde benzerlik olduğunu düşünmüş ve bağıntıyı "KLM benzerdir PLM diyeceğiz" şeklinde kurmuştur. Ece tahtada üçgenler için bir benzerlik bağıntısı yazmaya çalışmış ancak üçgenlerin köşe noktalarını hangi sıralamada yazacağına karar verememiştir. Utku'nun "NPM çünkü üst üste getirince N, K yerine geliyor, P, L yerine, M de zaten M yerine geliyor" yorumu ile üçgenlerin eşliğini üçgenlerden birinin döndürülmesi suretiyle üçgenlerin çakışması biçiminde açıklamıştır.

52. problemde (Şekil 3.54.) Utku'nun "Biraz çevirip de üstüne koyarsak açılar aynı yere geliyor, o eşit kenarlar da aynı yere geliyor. Sonuçta ikisinin eşit olduğuna tanık getirebiliriz" şeklindeki yorumu verilen üçgenlerin eş olduğunu "dönme ile çakışması" olarak açıklamıştır. Utku'nun düşüncesini Meltem "DBC açısı ile EBA ters açılar" ifadesi ile temellendirmiştir.

Birbirine paralel olan doğru parçalarının bir kesen ile kesildiğinde oluşan eşit ölçülü açıların tespit edilmesinde öğrenci kavrayışları arasındaki farklar Şekil 3.45.'de verilen 54. problemde gözlenmiştir.



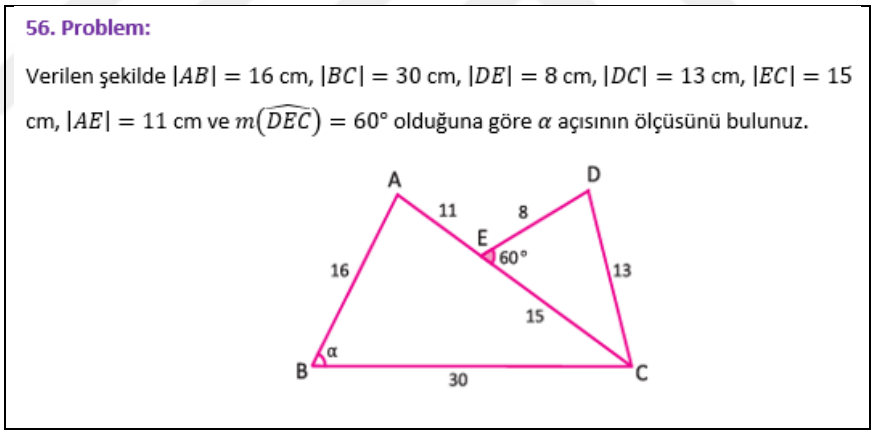
Şekil 3.45. *Öğretim dizisinin 54. problemi*

Odak öğrenci Arya'nın tahtada "bu iki nokta, açı yöndeş olduğu için eşit olabilir mi? Şurası [B açısına işaret ederek] ve şurası [ACD açısına işaret ederek]" yorumu öğrencinin doğru parçalarının paralelliğinden dolayı yöndeş açıların varlığından haberdar olduğunu, ancak bu açıları tespit edemediğini göstermiştir. Arya'nın yorumu üzerine Utku'nun "C nin üstünde bir açı olsaydı o eşit olurdu, bu olmaz" yorumu ise, terminoloji kullanımı açısından hatalı olsa da yöndeş açıların tespiti anlamında doğru olmuştur. Doğru parçalarının paralel olmasından dolayı başka hangi açıların eşit olacağı öğrencilere

sorulduğunda, odak öğrenci Ata "C ve A açısı mı? DCA ile CAB" şeklinde doğru cevabı vermiş ve odak öğrenci Bora bu açıların "ters açılar" olarak adlandırıldığını ifade etmiştir. 57. problemde ise (Şekil 3.52.) problemi tahtada çözen Kaptan çizimdeki ters açı çiftlerinden biri gösterildiğinde diğerini bulabilmiştir.

55. problemde (Şekil 3.55.) odak öğrenci Tuna, CDE üçgeni hakkında "ben ilk olarak hipotenüsü uyguladım. $9-12-13$ üçgeniydi sanırım" ifadesi ile Pisagor teoremi bilgisini devreye sokmak istemiş ancak Pisagor üçlüsünü yanlış hatırlamıştır. Odak öğrenci Kayla ise Tuna'ı düzelterek "$3-4-5$ üçgeni" yorumunda bulunmuş ve Tuna CE kenar uzunluğunu 15 cm olarak elde etmiştir.

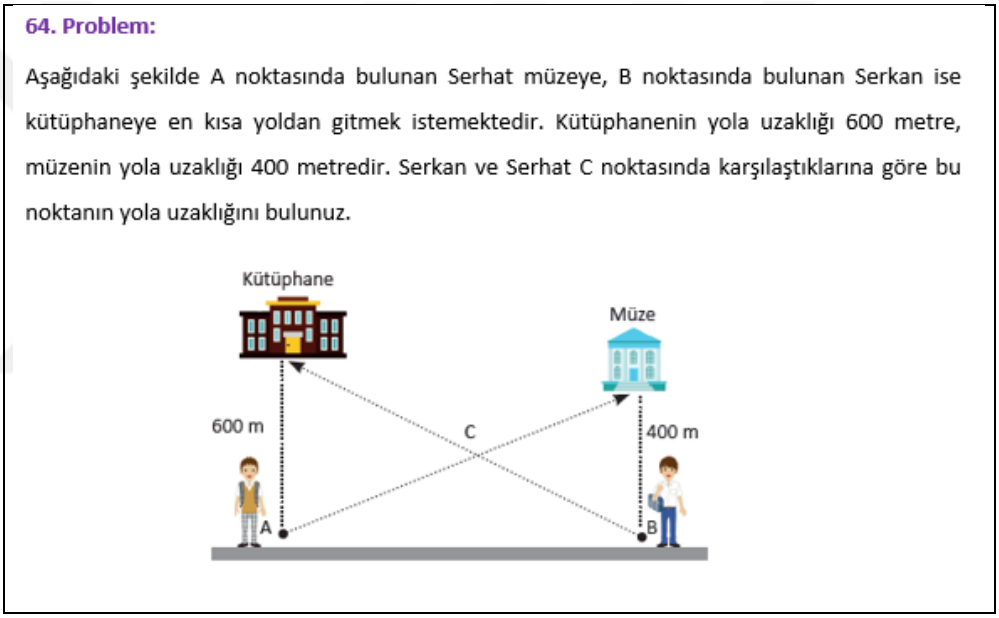
Kenar-kenar-kenar benzerlik teoreminin kullanımını gerektiren Şekil 3.46.'daki 56. problemde Utku çizimde verilen kenar uzunluklarını değerlendirerek çözüme başlamıştır. Problemde kenar-kenar-kenar benzerlik teoreminin mevcut olduğunu ifade eden Utku, üçgenler arasındaki benzerlik sabitini "2" olarak bulmuş ve tüm bulgularını terminolojiyi uygun biçimde kullanarak ifade etmiştir.



Şekil 3.46. *Öğretim dizisinin 56. problemi*

Açı-açı benzerlik teoremini kullanımını gerektiren 59. problemde (Şekil 3.50.) Utku, uygun terminoloji kullanmasa da kenar-açı-kenar benzerliğini gördüğünü ifade etmiştir. Öğrenci üçgenlerin açılarına değişkenler atamış, iki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıyı vermesi özelliğinden faydalanarak dış açıyı atadıkları değişken cinsinden yazmıştır. Diğer öğrencilerle birlikte ilk önce komşu üçgenler arasında benzerlik araştırmasına girmiş, bir netice elde edemeyince üçgenlerin açılarını bir tablo yardımıyla listelemiştir. Utku benzerliğin DAC ve CAB üçgenleri arasında olduğunu görmüş ve $\Delta DAC \approx \Delta CAB$ bağıntısını kurulmuştur.

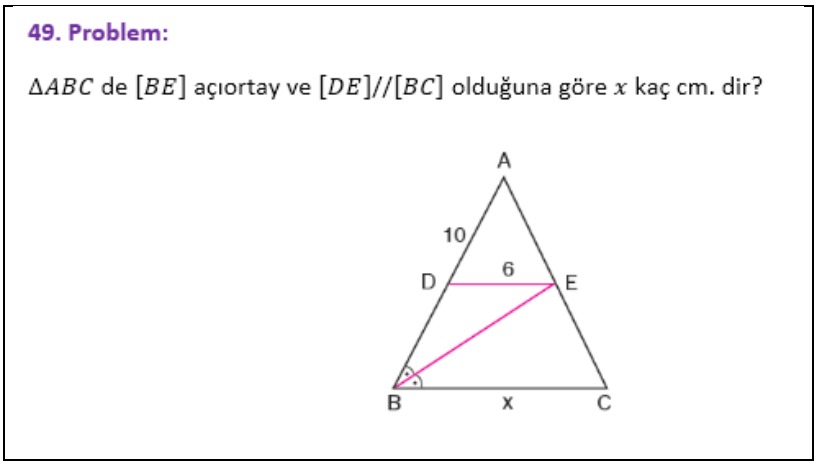
Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftasının son problemi olan Şekil 3.47.'deki 64. problemde öğrencilerin ters açıları doğru tespit etmeleri verilen üçgenlerin benzerlik araştırmasında öğrencileri doğru şekilde yönlendirmiştir. Problemde verilen çizim ilk önce geleneksel bir geometrik çizim haline getirilmiştir. Odak öğrenci Tuna'nın "A ve B açıları dik olduğu için AK paraleldir MB" şeklindeki yorumunun üzerine bazı öğrenciler ters açıları tespit ettiklerini ifade etmişlerdir. Meltem'in "KCA ve MCB açıları eşittir", odak öğrenci Bora'nın "ters açılar var, C nin orası", Utku'nun "BMA ile MAK açıları eşit" yorumları ile ters açılar elde edilmiş ve öğrenciler benzerlik oranının $\frac{2}{3}$ olduğunu ifade etmişlerdir.



Şekil 3.47. *Öğretim dizisinin 64. problemi*

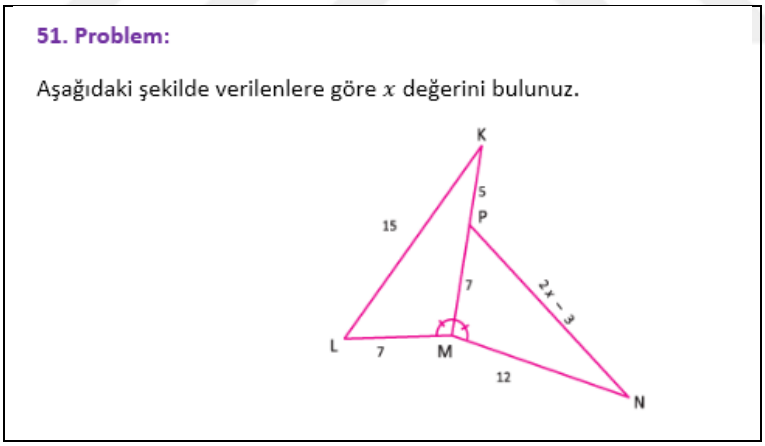
Geometrik Düşünme

- Geometrik kavramlar arasında ilişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler: Açı-açı benzerlik teoreminin kullanımını gerektiren Şekil 3.48.'deki 49. problemde odak öğrenci Tuna'nın bir üçgende eş ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit oluşu ilişkisini "farklı üçgenlerde eş ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olacağı" yanlış ilişkisine genellediği görülmüştür.



Şekil 3.48. *Öğretim dizisinin 49. problemi*

Odak öğrenci Tuna aynı üçgen içinde bulunmayan eş ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olacağı şeklinde kurduğu ilişkiyi "DE doğru parçası ile EC doğru parçası eştir, çünkü açıortayından böyle görebiliriz" şeklinde ifade etmiştir. Tuna'nın kurduğu bu yanlış ilişkinin benzerini beşinci haftanın ikinci dersinde Şekil 3.49.'da verilen 51. problemde odak öğrenci Bora kurmuştur.



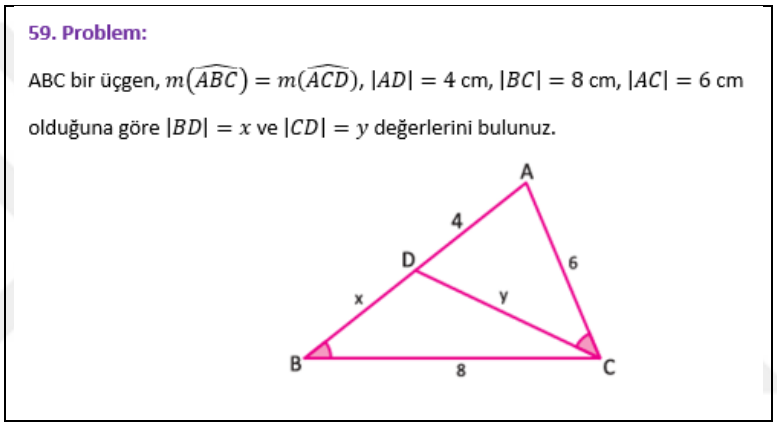
Şekil 3.49. *Öğretim dizisinin 51. problemi*

Bora "iki açı, baktığı açı aynı olduğu için $2x - 3$ 15 oluyor" ifadesinde bulunmuştur. Öğrenci farklı iki üçgendeki eşit ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olacağı ilişkisini kurmuş olmakla beraber, bu iki üçgeni kenar-açı-kenar eşlik aksiyomu ile temellendirmeden eş üçgenler olarak kabul etmiştir.

Öğrencilerin farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olduğu şeklinde kurdukları yanlış ilişkilere bir örnek de 54. problemde (Şekil 3.45.) ortaya çıkmıştır. Odak öğrenci Arya paralel doğru parçalarının oluşturduğu ters açıların

tespit edilmesinin ardından üçgenler arasındaki benzerliği düşünmeden "bunların gördüğü [DCA ve CAB açılarını kastederek] kenarlar da eşit olduğu için AD 18" yorumunda bulunmuştur.

Şekil 3.50.'de verilen 59. problemde de odak öğrenci Bora'nın farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olduğu düşüncesi tekrar ortaya çıkmıştır. Odak öğrenci Bora'nın "Bu iki açı eşit olduğundan bunun [ACD açısını kastederek] karşısı 4, bunun [B açısını kastederek] karşısı da 4 olmak zorunda değil mi" yorumu öğrencilerin kurmuş olduğu yanlış ilişkinin sürdüğünü göstermiştir. Bir kısım arkadaşı Bora'ya karşı çıkmıştır.



Şekil 3.50. *Öğretim dizisinin 59. problemi*

52. problemde (Şekil 3.54.) odak öğrenci Kayla'nın "Eğer BC ve EA kenarları birbirine paralel olsaydı $y = 12$ diyebilir miydik" sorusu, öğrencinin paralellik ile eşit uzunluklu doğru parçaları arasında yanlış bir ilişki kurduğunu ortaya çıkarmıştır.

3.2.5.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.17.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.17. *Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

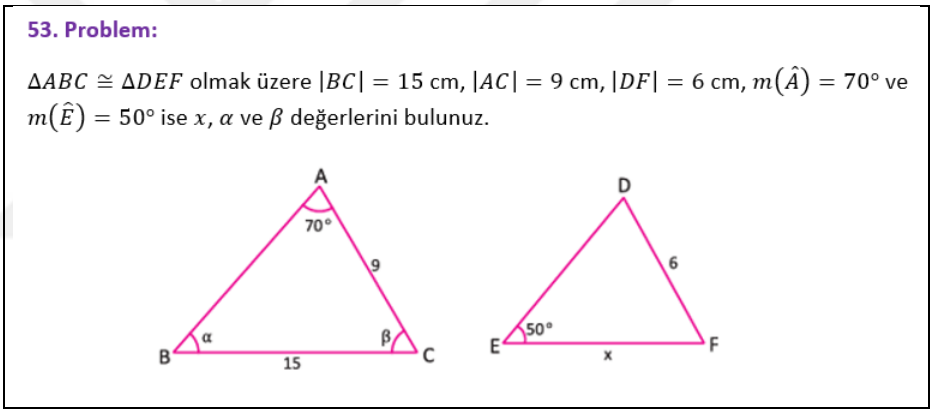
CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Cebirsel ön bilgiler Utku – (48. problem) $\|AB\| = 2\|EF\|$ temsilini okumada zorlanma, **Arya** - doğru okuması üzerine Utku - kat ilişkisini bölüm olarak doğru yorumlaması, Arya'nın bölüm olarak yanlış yorumlaması. **Tuna'nın** bu tür oran ilişkisini yorumlamada sıkıntılarını aşıyor olması. **Tuna** – (52. problem) orantıyı eşitlik olarak algılaması. Utku - $\frac{\|BC\|}{\|EB\|}$ oranının 1 olmasını üçgenlerin eş olması şeklinde doğru yorumlaması. **Bora** – açıların eş ölçülü olması ile kenar uzunluklarının eşit olması ile bağdaştırdığı ancak Utku ve Meltem'in eşlik ve benzerlik arasındaki ayrımı başarılı bir şekilde açıklamaları. (53. problem) - Benzerlik bağıntısının doğrudan verilmesi kenarlar arasındaki benzerlik orantısını kolaylıkla yazmalarını sağlaması. Kaptan, **Bora** – (57. problem) orantıda yer alan değişkenlerin birbirleriyle ilişkisini doğru bir biçimde yorumlayamamaları. Beşinci haftanın son dersinde temel orantı ve Thales teoremleri ile ilgili bir eşitlik ile tanımlanan orantıdaki değişkenlerin birbirleriyle ilişkisini yorumlamada yer yer hatalı yorumlarla karşılaşıldığı gibi ilişkiyi doğru yorumlayan öğrencilerin sayıca daha fazla olması. Cebirsel özellik kullanma **Tuna** – (63. Problem) $\frac{x+1}{3x+3} = \frac{5}{y+2}$ orantısını doğru yazması, **Ata** x'in bulunması gerektiğini ve Utku - içler dışlar çarpımı önerirken, **Kayla'nın** sol tarafta 3 kat ilişkisini sezmesi.	Değişkenin doğasını anlama Öğrencilerin benzerlik oranının açılar için de geçerli olduğunu düşünmeleri, sayısal örnek üzerine düşüncelerini düzenlemeleri ancak (48. problem) bir kısım öğrencinin benzerlik oranını açılara da genellemeleri. Selin - (52. problem) arkadaşlarının yardımıyla BC ve EB kenarlarına ilişkin sayısal verinin olmadığı orantıyı $\frac{12}{y} = \frac{4+x}{15}$ şeklinde yazmsı, bu orantıya eşit olan $\frac{\|BC\|}{\|EB\|}$ oranını yazmaması. **Bora** – sayısal veri olmamasını öne sürmesi ve aynı uzunluktaki iki doğru parçasının farklı temsiller ile ifade edildiğinde oranının 1 olacağı muhakemesinde bulunamaması, **Kayla'nın** bulunması. Selin - (55. problem) benzerlik bağıntısında ortak olan köşelerin daima aynı sırada yazılacağını düşünmesi. **Bora** – (59. problem) Utku'nun benzerlik araştırması esnasında açılar için kullandığı değişkenler ile problemde köşe ve kenarlar için verilen sembolleri birbirine karıştırması. Sembolik temsilleri kullanma **Tuna** – (55. problem) sembolik temsilleri doğru kullanması, benzerlik bağıntısını oluşturması, bu bağıntı ile orantı ilişkisini yazması ve problemde istenene ulaşabilmesi. Utku – (59. problem) görece zor olan problemde benzerliği kurabilmek için tablo kullanması. Denklem kurma Utku – (45. problem) denklemleri zihninde kurup çözüme ulaşması.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: 48. problemin (Şekil 3.44.) metnindeki $|AB| = 2|EF|$ temsilini okumada Utku'nun zorlandığı, odak öğrenci Arya'nın bu ilişkiyi "AB kenar uzunluğu EF kenar uzunluğunun iki katı" şeklinde doğru bir biçimde okuduğu görülmüştür. Utku, Arya'nın sözel olarak ifade ettiğini "AB nin yarısı EF de diyebiliriz" biçiminde doğru bir şekilde yorumlarken Arya "EF nin yarısı AB ye" yanlış ifadesinde bulunmuştur. Arya'nın yorumu öğrencinin orantı ilişkisini değerlendirmede eksikliği olduğunu göstermiştir. Orantı ilişkilerini sıklıkla yanlış yorumlamış olan odak öğrenci Tuna ise "AB nin yarısı bir EF ye eşit" yorumu ile bu eksikliğini gidermeye başladığını göstermiştir.

52. problemde (Şekil 3.54.) Selin'in yazdığı $\frac{12}{y} = \frac{4+x}{15}$ orantısı için odak öğrenci Tuna'nın "*12* nin $4 + x$ e, y nin 15 e eşit olur" ve "y *15* değil mi " şeklindeki ifadeleri öğrencinin orantıyı yorumlamada sıkıntısını ortaya koymuştur. Öğrencilere $\frac{|BC|}{|EB|}$ oranının 1 olmasının neye işaret ettiği sorulduğunda Utku "aynı üçgenler olduğunu gösterir; bir katı kadar, bir kat da aynı" şeklinde doğru yorumda bulunmuştur. Odak öğrenci Bora ise bu soruya "y nin *12* olduğunu, C ve E birbirine eşit, açılarından da anlayabiliriz" cevabını verirken, Utku ve Meltem eşlik ve benzerlik arasındaki ayrımı "açılar aynı olunca kenarlar aynı olmak zorunda değil" ifadesi ile başarılı bir şekilde açıklamışlardır.

Şekil 3.51.'de verilen 53. problemde benzerlik bağıntısının doğrudan verilmesi öğrencilerin kenarlar arasındaki orantı ilişkisini görece daha rahat yazmalarını sağlamıştır.



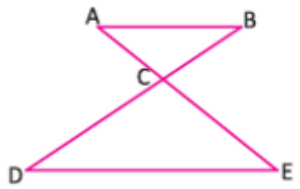
Şekil 3.51. *Öğretim dizisinin 53. problemi*

Utku tahtada verilen benzerlik bağıntısından eşit olan açıları tespit etmiş ve orantıyı $\frac{15}{x} = \frac{9}{6}$ şeklinde kurmuştur. "*1,5* luk bir oran bulduk; açılar eşit olacak" ifadesinde bulunmuş ve problemde istenenleri doğru bir şekilde elde etmiştir.

Öğrencilerin bir orantıda yer alan değişkenlerin birbirleriyle ilişkisini doğru bir biçimde yorumlayamadıkları Şekil 3.52.'de verilen 57. problemde gözlemlenmiştir. Kaptan problemde verilen orantı ilişkisi için $|BC| = 3k$ yazmış ve odak öğrenci Bora doğru parçalarının uzunluklarını orantı sabiti kullanarak nasıl yazıldığını anlamadığını ifade etmiştir. Öğrencilere oran-orantı ilişkilerini nasıl yorumlamaları gerektiği bu problemde bir kez daha anlatılmıştır.

57. Problem:

$[AB]//[DE]$, $3|BC| = 2|CD|$, $|AE| = 20$ cm ise $|AC|$ bulunuz.



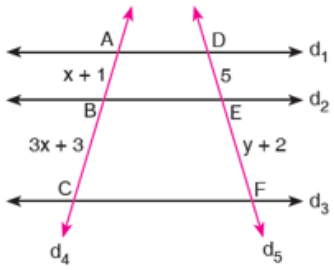
Şekil 3.52. *Öğretim dizisinin 57. problemi*

Birinci etap öğretim dizisinin beşinci haftasının son dersinde temel orantı ve Thales teoremleri öğrencilere sunulmuştur. Temel orantı teoremiyle ilgili problem çözümlerinde orantıdaki değişkenlerin birbirleriyle ilişkisini yorumlamada yer yer hatalı yorumlarla karşılaşıldığı gibi, ilişkiyi doğru yorumlayan öğrencilerin sayıca daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.

- Cebirsel özellik kullanma: Thales teoreminin bir uygulaması olan Şekil 3.53.'deki 63. problemi odak öğrenci Tuna tahtada $\frac{x+1}{3x+3} = \frac{5}{y+2}$ şeklinde doğru bir şekilde ifade etmiştir.

63. Problem:

Verilen şekilde $d_1//d_2//d_3$ olmak üzere $|AB| = x + 1$ br, $|BC| = 3x + 3$ br, $|DE| = 5$ br ve $|EF| = y + 2$ br olduğuna göre y nin kaç olduğunu bulunuz.



Şekil 3.53. *Öğretim dizisinin 63. problemi*

Odak öğrenci Ata "önce x i bulacağız" ifadesinde bulunurken, Utku içler dışlar çarpımı yapmayı önermiş ve "x i y cinsinden bulacağız" ifadesinde bulunmuştur. Odak

öğrenci Kayla AB ve BC doğru parçaları arasındaki cebirsel ilişkiyi fark ederek "*3* katı" yorumunda bulunup problemin çözüme ulaşmasında Tuna'ya yardımcı olmuştur.

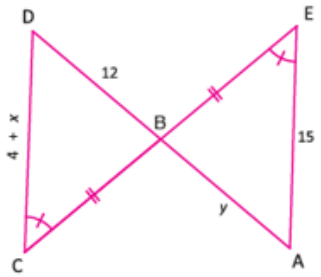
Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin doğasını anlama: Kenar-açı-kenar benzerlik teoreminin öğrencilere sunulmasının ardından "benzerlik oranı *2* olursa açılar da iki katına çıkar mı" sorusu yöneltilmiştir. Öğrencilerin çoğunluğu "evet" cevabını vermiştir. Öğrencilere sayısal bir örnek verildiğinde ise açıları iki katına çıkarmadıkları gözlemlenmiştir. Melike "açının kenarlarını ne kadar uzatsak da açının derecesi aynı kalmaz mı" yorumuyla durumu matematiksel olarak ifade etmeye çalışmıştır. Bu duruma benzer şekilde 48. problemde (Şekil 3.44.) bir kısım öğrenci kenarlar arasındaki iki kat ilişkisini açılara da genellemiş ve "*2* katı olmaz mı" sorusunu yöneltmişlerdir.

Şekil 3.54.'de verilen 52. problemde Selin arkadaşlarının yardımıyla tahtada eşlik bağıntısını doğru bir şekilde kurmuş, BC ve EB kenarlarına ilişkin sayısal verinin olmadığı orantıyı $\frac{12}{y} = \frac{4+x}{15}$ şeklinde yazmış, fakat bu orantıya eşit olan $\frac{|BC|}{|EB|}$ oranını yazmamıştır. Neden yazmadığı sorulduğunda odak öğrenci Bora "Birbirine eşit [BC ve EB doğru parçaları kastederek] ama. Eee nasıl yazacağız, sayısı yok onun" yorumunda bulunmuştur. Öğrencinin aynı uzunluktaki iki doğru parçasının farklı temsiller ile ifade edildiğinde oranının 1 olacağı muhakemesinde bulunamadığı gözlemlenmiştir. Odak öğrenci Kayla, kenar uzunlukları farklı temsiller ile temsil edilmiş olsa da oranın 1 olacağını "*1* tam olmaz mı" şeklinde doğru bir şekilde ifade etmiştir.

52. Problem:

Aşağıdaki şekilde $|BC| = |EB|$, $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{AEB})$, $|AE| = 15$, $|CD| = x + 4$, $|BD| = 12$, $|AB| = y$ olduğuna göre x+y değerini bulunuz.



Şekil 3.54. *Öğretim dizisinin 52. problemi*

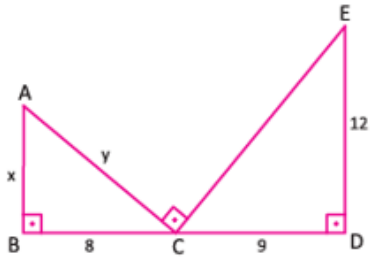
55. problemde (Şekil 3.55.) benzerlik bağıntısının odak öğrenci Tuna tarafından yazılması sırasında Selin'in "C ikisinde de ortak değil mi, neden birini sona diğerini başa yazdık" şeklindeki sorusu, öğrencinin C noktasında farklı doğru parçaları ile oluşan açılar arasındaki farkı ayırt edemediği ve benzerliği nasıl oluştuğunu anlayamadığını göstermiştir.

59. problemde (Şekil 3.50.) Utku'nun benzerlik araştırması esnasında açılar için kullandığı değişkenler ile problemde köşe ve kenarlar için verilen sembolleri odak öğrenci Bora'nın birbirine karıştırdığı gözlemlenmiştir. Benzerlik bağıntısını uygulamak için tahtaya gelen Bora $\frac{4}{6} = \frac{6}{4+x} = \frac{2a+b}{}$ orantısını kurmuştur. $2a + b$ ifadesindeki a ve b değişkenleri Utku'nun açılar için kullandığı değişkenler olup kenar uzunluklarını oranlamada kullanılmayacağı konusunda Bora uyarılmıştır.

- Sembolik temsilleri kullanma: Açı-açı benzerlik teoreminin kullanımını gerektiren Şekil 3.55.'deki 55. problemde odak öğrenci Tuna "BCA ve DCE açılarına a ve b atayacağım" ifadesi ile üçgende tümleyen açılara sembolik temsiller atayarak benzerlik bağıntısını oluşturmuş, bu bağıntı ile orantı ilişkisini yazmış ve problemde istenilen değere ulaşabilmiştir.

55. Problem:

$[AB] \perp [BD]$, $[ED] \perp [BD]$, $[AC] \perp [EC]$ olmak üzere $|BC| = 8$ cm, $|CD| = 9$ cm, $|ED| = 12$ cm, $|AB| = x$ cm, $|AC| = y$ cm ise $x + y$ değerini bulunuz.

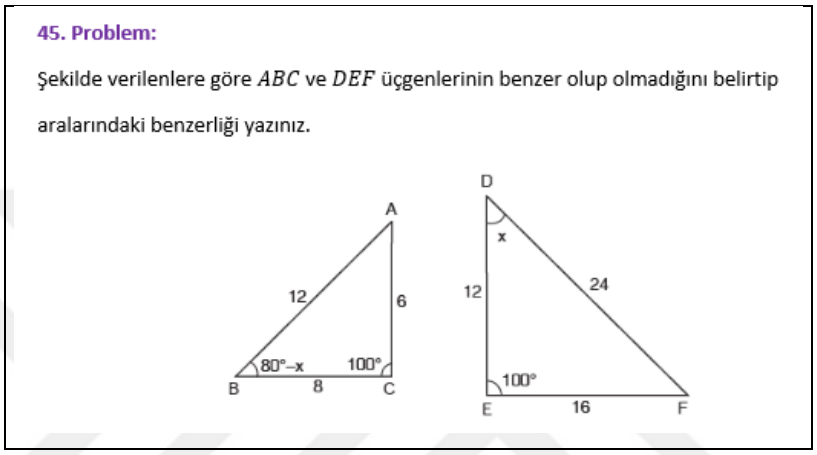


Şekil 3.55. *Öğretim dizisinin 55. problemi*

Öğrencilerin açı-açı benzerlik teoremini kullanmalarını gerektiren 59. problemde (Şekil 3.50.) Utku, uygun terminoloji kullanmasa da kenar-açı-kenar benzerliğini gördüğünü ifade etmiştir. Öğrenci tahtada A açısına a, B açısına c ve DCB açısına z değişkenlerini atamıştır. İki iç açının toplamının bu açılara komşu olmayan dış açıyı vermesi özelliğinden faydalanarak da ADC açısının $b + z$ olduğunu ifade etmiştir.

Öğrenciler ilk olarak komşu üçgenler arasında benzerlik araştırmasına girmiş daha sonra üçgenlerin açıları bir tablo yardımıyla listelenince benzerliğin DAC ve CAB üçgenleri arasında olduğunu görmüş ve $\Delta DAC \approx \Delta CAB$ bağıntısını kurabilmişlerdir.

- Denklem kurma: Verilen iki üçgenin benzer olup olmadığının sorulduğu Şekil 3.56.'daki 45. problemde öğrencilerin benzerlik araştırması üçgenin iç açılarından yola çıkmak şeklinde gerçekleşmiştir.



Şekil 3.56. *Öğretim dizisinin 45. problemi*

Utku: Öbür üçgende…

Araştırmacı: Öbür üçgen dediğin hangisi?

Utku: Soldaki üçgen.

Araştırmacı: Adını söyle.

Utku: ABC üçgenindeki şuradaki boş, gösterilmeyen açıya…

Araştırmacı: Yani A açısı.

Utku: A açısına x diyebiliriz çünkü $100 + 80 - x$, x daha x i götürür, 180 olur. Öbür tarafta da (F açısını kastediyor) yine 80-x yazarız.

Utku B ve C açılarının toplamının $180 - x$ olduğunu ve A açısına x değişkenini verdiğinde üçgenin iç açıları toplamına ulaşabileceğini ve aynı düşünce ile F açısının ölçüsünü de bulduğunu ifade etmiştir. Öğrencinin terminoloji kullanımı zayıf olmakla beraber denklemleri zihninde kurup çözüme ulaşma biçimi başarılı olmuştur.

3.3. Ara Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular

Beş hafta süre ile devam etmiş olan birinci etap öğretim dizisinin ardından sırasıyla düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip Lara, Bora, Kayla, Tuna, Arya ve Ata isimli altı odak grup öğrencisi ile ara klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Birinci etap öğretim

dizisi sürecinde geometrik ve cebirsel olarak ele alınan ve tartışılan kavramları öğrencilerin nasıl yapılandırdıklarını ayrıntılı olarak anlamak için gerçekleştirilen ara klinik görüşmelerden elde edilen bulgular;

- Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi
- Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi

temaları altında sunulmuştur.

3.3.1. Ara klinik görüşmenin birinci problemine ilişkin bulgular

Üçgenin çevresini değişkenler ile ifade edebilmek ve üçgen eşitsizliğini kullanmak ara klinik görüşmenin Şekil 3.57.'de verilen birinci probleminin geometrik hedefi iken, üçgenin kenar uzunluklarının tümünün değişken ile ifade edilmesi problemi cebirsel kılmıştır. Problemin cebirsel içeriği öğrencilerin cebirsel muhakemelerini ve sembolik manipülasyon becerilerini inceleme fırsatı sağlamıştır. Bu problemde öğrencilere bir geometrik çizim verilmemiş ve öğrencilerin geometrik temsil kullanma becerileri gözlemlenmiştir.

Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları $|AB| = 2x + 1$, $|AC| = x + 6$ ve $|BC| = x + 4$ olarak verilmiştir. Buna göre;

a) Üçgenin çevresini bulunuz.

b) x değiştikçe çevre uzunluğunda nasıl bir değişiklik meydana gelir?

c) x değişkeni için ne gibi kriterler söz konusudur?

Şekil 3.57. *Ara klinik görüşmenin birinci problemi*

3.3.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgi ve bu bilgileri problemin çözümünde uygulama biçimleri Tablo 3.18.'de sunulmuştur.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Öğrencilerin hiçbiri üçgen eşitsizliğini kullanmamış olup bu kavram ile ilgili herhangi bir işlem veya sözel ifadede bulunmamıştır.

Kayla'nın üçgenin dış açılar toplamının $360°$ olduğunu bilmediği gözlemlenmiştir.

Tuna, Bora ve Ata, üçgenin kenar uzunluğunun negatif olmayacağını vurgulamışlardır. Ata kenar uzunluğunun negatif olamayacağını "Eksili olursa *0* dan

küçük bir şey olamaz, sadece mesela yerin altında olur, mesela sıfırdan eksi bire inersin ama uzunlukta öyle bir şey yoktur" şeklinde ifade etmiştir. Arya da "Uzunluk sadece eksi olamaz" yorumunda bulunarak üçgenin kenar uzunluğunun negatif olamayacağını belirtmiştir.

Tablo 3.18. *Ara klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Geometrik ön bilgiler **Öğrencilerin** üçgen eşitsizliğini kullanmaması, bu kavram ile ilgili herhangi bir işlem veya sözel ifadede bulunmamaları. **Kayla** üçgenin dış açılar toplamının 360° olduğunu bilmemesi. **Tuna**, **Bora**, **Ata**, **Arya** - üçgenin kenar uzunluğunun negatif olmayacağını vurgulamaları. Tanım yapma becerileri **Lara** - çevreyi "dış kenarlarının toplamı", **Tuna** "üçgenin kenar uzunluklarının toplamı" **Arya** "bütün kenar uzunluklarının toplamı" olarak tanımlamaları. Prototip fenomeni **Bora ve Tuna haricindeki** öğrencilerin problemdeki üçgeni temsil etmek için çizdikleri üçgenlerin prototip olması.	Geometrik temsilleri kullanma Öğrenciler problemdeki üçgeni bir üçgen çizimi ile temsil etmeleri, üçgenin köşelerini A , B ve C harfleri ile adlandırmaları ve değişkenler ile tanımlı kenar uzunluklarını ilgili kenarlara yazmaları.

- Tanım yapma becerileri: Lara çevreyi "dış kenarlarının toplamı" olarak tanımlarken Tuna ve Arya ise çevreyi "üçgenin kenar uzunluklarının toplamı" olarak matematiksel olarak ifade etmişlerdir.

- Prototip fenomeni: Bora ve Tuna haricindeki öğrencilerin problemdeki üçgeni temsil etmek için çizdikleri üçgenlerin prototip, yani tabanı kağıt düzlemine paralel olacak biçimde ve ikizkenar veya eşkenar üçgene benzer olduğu gözlemlenmiştir.

Geometrik Bilgiyi Devreye Sokma

- Geometrik temsilleri kullanma: Problemdeki verileri tüm odak öğrenciler bir üçgen ile temsil etmişler, üçgenin köşelerini A, B ve C harfleri ile adlandırmışlar ve değişkenler ile tanımlı kenar uzunluklarını ilgili kenarlara yazmışlardır.

3.3.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapıları ve sembolik manipülasyon becerileri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.19.'da

genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme ve cebir bilgi yapısı temaları altında birer ve sembolik manipülasyon teması altında üç alt tema verilmiştir.

Tablo 3.19. *Ara klinik görüşmenin birinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Sayı kümeleri bilgisi **Öğrenciler**in x değişkenine tamsayı değerleri atamaları. **Bora** - daha geniş kapsamdaki sayı kümeleri üzerinde düşünebilmesi. **Kayla** – değişkene negatif değer verilebileceğini düşünmesi.	Cebirsel ön bilgiler **Bora** - diğer kenar uzunluklarındaki x değişkenlerin katsayılarının 1 olmasından dolayı $2x+1$ uzunluğundaki AB kenarının diğer kenarlardan uzun olacağını düşünmesi **Ata** - x değişkenine sayısal değerler atamadan değişkeninin alacağı küçük değerler için AB kenarının diğer kenarlardan kısa, büyük değerler için ise diğer kenarlardan uzun olacağını ifade etmesi. **Tuna** – "$2x+1$, 0 dan büyük olmalıdır" yorumunda bulunması ancak eşitsizlik ile ifade etmemesi, tamsayılar kümesi ile sınırlı kalan bir düşünce **Ata** - x değişkeninin -1 den büyük olması gerektiğini ifade etmesi ve $-1 <$ gösterimini kullanması.	Değişkenin doğasını anlama "x değiştikçe" ifadesini: **Lara** - anlamlandıramaması, değişkenin alacağı bazı değerler için bu üçgenin ikizkenar üçgen olabileceğinin farkında olmaması. **Bora** - doğru yorumlaması. Artan sayısal değerler için çevrenin arttığını, değişkenin sınırı olmadığını, negatif sayılar hariç her değerin atanabileceğini ifade etmesi. **Kayla** - değişkenin artan ve azalan değerler alması ile ilgili olduğunu ifade etmesi, **Tuna**, **Ata**, **Arya** - artan değerler için çevrenin artması olarak yorumlamaları. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Lara** - üçgenin çevresini $2x+1+x+6+x+4$ olarak ifade etmesi. Hepsini toplamak istemiş ancak eşitlik olmadığından bu işlemi gerçekleştiremeyeceğini ifade etmesi. **Kayla** - çevreyi $Ç = 4x+11$ olarak ifade etmesi ve x i bulmadan çevreyi bulamayacağını söylemesi, görüşmenin sonunda üçgenin çevresini $4x+11$ olarak ifade etmesi. Cebirsel işlem becerileri **Lara** - çevreyi $2x+1+x+6+x+4$ olarak ifade etmesi, toplamı en sade biçimde ifade etmemesi. **Bora**, **Kayla**, **Tuna** ve **Arya** çevreyi cebirsel işlemler yürüterek, **Ata** zihninden hesaplayarak $4x+11$ olarak elde etmeleri.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Sayı kümeleri bilgisi: Öğrencilerin x değişkenine atadıkları sayısal değerleri tamsayılar kümesinden seçtikleri gözlemlenmiştir. Bora'nın bazı kusurlar içeren "o zaman tamsayılar hariç rasyonel de verebiliriz. Aynen tamsayılar hariç bütün her şeyi verebiliriz. Yani negatif sayılar hariç" şeklindeki yorumundan daha geniş kapsamdaki sayı kümeleri üzerinde düşünebildiği anlaşılmıştır.

Kayla'ya yöneltilen değişkenin alabileceği değerlerin ne olabileceği sorusuna, öğrenci "Sanırım sadece sonsuz büyüklükte çünkü sonsuz küçüklükte olduğu zaman yani

çevresi buradan küçük olabilir ama sonsuz küçüklükte sanırım olamaz. Belli bir noktaya gelince yok olmaz mı yani böyle küçülür nokta haline gelir" cevabını vermiştir. Değişkenin üçgenin kenar uzunluğunu tanımladığı dolayısıyla üçgen olmayı engelleyen bazı sayısal değerlerin verilemeyeceği düşüncesine sahip olduğu gözlemlenmiştir. Ancak Kayla'nın bu yorumundan sonraki "Bu x sonsuz bir sayı da olabilir ya da eksili sonsuz bir sayı da olabilir. Buradan üçgen hem küçük olarak hem büyük olarak sonsuz olabilir bence" yorumunun önceki yorumuyla çeliştiği görülmüştür.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Bora, $2x + 1$ uzunluğundaki AB kenarının diğer kenarlardan uzun olacağını düşünmüş ve bunu diğer kenar uzunluklarını belirten değişkenlerin katsayılarının 1 olmasına bağlamıştır, ancak x değişkenine 2 değerini atayınca düşüncesini çürütmüştür. Ata ise x değişkenine sayısal değer atamaya gerek duymadan değişkeninin alacağı küçük değerler için AB kenar uzunluğunun diğer kenarlardan kısa, büyük değerler için ise diğer kenarlardan uzun olacağını ifade etmiştir. Buna nasıl karar verdiği sorulunca, x değişkeni için sırasıyla 2 ve 8 tamsayı değerlerini atayarak kendini doğruladığını göstermiş ve "x küçüldükçe BA kenarı küçülüyor ama büyüdükçe en uzun kenar BA oluyor" yorumunda bulunmuştur.

Tuna bir üçgenin kenar uzunluğunun negatif olmayacağı bilgisini $2x + 1$ uzunluğuna sahip AB kenarı için "bizim bu üçgende x imiz bir negatif sayı olamaz. Çünkü $2x + 1$, 0 dan büyük olmalıdır" yorumunda bulunarak uygulamış, fakat bunu bir eşitsizlik ile ifade etmemiş ve tamsayılar kümesi ile sınırlı kalan bir düşünce ile "x imize -1 değerini verdiğimizde -1 oluyor AB kenar uzunluğu, AB kenar uzunluğumuz da eksi olamaz. 0 dan küçük bir sayı olamaz" yorumunu eklemiştir. Ata x değişkeninin -1 den büyük olması gerektiğini ifade etmiş ve $-1 <$ gösterimini kullanmıştır.

Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin doğasını anlama: Lara'nın görüşmenin başından itibaren "x değiştikçe" ifadesini anlamlandıramadığı, "Çevresini soruyor ama x değiştikçe çevre uzunluğunun nasıl…" ve "burada $x + 6$ demiş [AC kenarını kalemi ile göstererek], burada $2x$ demiş [AB kenarını kalemi ile göstererek]. Öyle galiba çünkü değişmiş" ifadelerinden anlaşılmıştır. Görüşmenin devamında "ama x burada nasıl değişiyor" sorusuna kendisinin verdiği "Demek x in işlemi değişmiyor hepsi artı, sayıları mı değişiyor önlerindeki, yani değişiyor ve çevre uzunluğunu etkiliyor değişimi…"

cevabından Lara'nın değişkenin değişmesinin artan ya da azalan sayısal değerler alması anlamına geldiğini anlamadığı görülmüştür.

Lara ayrıca problemde verilen üçgenin farklı kenar uzunluklarına sahip olduğunu "$2x + 1$, $x + 6$, $x + 4$ [kenar uzunluklarına işaret ederek]. Aynı değil bunlar. Üçgeni zaten belirtmemiş, ikizkenar, eşkenar üçgen belirtmemiş" ifadesi ile belirtmiştir. Lara'nın değişkenin alacağı bazı değerler için bu üçgenin ikizkenar üçgen olabileceğinin farkında olmadığı gözlemlenmiştir.

Bora ise, "x değiştikçe" ifadesini "değişken değiştikçe sonuç da değişir, yani çevre uzunluğu değişir" olarak doğru bir şekilde yorumlamıştır. Değişkene artan sayısal değerler atayan Bora "Çevre daha fazla büyüdü, yani büyük sayılar verdiğimizde daha büyüdü" yorumunda bulunmuş ve kendisine yöneltilen "x değişkeninin sınırları nedir" sorusuna ise önce "x değişkeninin sınırı yoktur çünkü değişken" cevabını vermiştir. Değişkene veremeyeceği değerlerin olup olmadığı sorusunu ise "Evet eksi, çünkü kenar uzunluğu eksi olamaz, santimetre çünkü veya birim. O zaman tamsayılar hariç rasyonel de verebiliriz. Aynen tamsayılar hariç bütün her şeyi verebiliriz. Yani negatif sayılar hariç" şeklinde yanıtlamıştır.

Kayla değişkenin değişmesini "Burada x değiştikçe tabi ki de çevre uzunluğu artar yani küçüldükçe x çevre uzunluğu küçülür, x büyüdükçe çevre uzunluğu genişler" yorumuyla doğru bir şekilde açıklamıştır. Kayla bu yorumunu Bora'dan farklı olarak değişkene sayısal değerler vermeden ifade etmiştir.

Tuna, Ata ve Arya, x değiştikçe çevre uzunluğunun nasıl değişeceği sorusuna değişkenin artan değerleri bağlamında düşünerek çevre uzunluğunun artacağını ifade etmişlerdir.

- <u>Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği</u>: Lara'dan üçgenin çevresinin bulunması istenildiğinde, öğrenci "Denklem kurarsak bulabilir miyiz" sorusu ile düşüncesini belirtmiş ve kenar uzunluklarını toplamak suretiyle $2x + 1 + x + 6 + x + 4$ ifadesini yazmıştır. Hepsini toplamak istediğini belirtmiş ancak "ama eşittir yok" ifadesinde bulunarak işleme devam etmemiştir. Öğrenci değişkenler içeren bir çevrenin olamayacağını ve değişken içeren bir ifadenin mutlak surette bir matematiksel nesneye eşit olması ve dolayısıyla sembolik manipülasyon ile bu değişkenin sayısal değerine ulaşılması gerektiğini düşündüğü gözlemlenmiştir. Lara'ya elinde bir denklem olmaması hakkında ne düşündüğü sorulduğunda, "gönderme yapamam" şeklindeki yanıtı öğrencinin denklemlere sözdizimsel yaklaştığını göstermiştir.

Kayla'nın da Lara gibi bir düşünceye sahip olduğu "bunların hepsinin toplamı bir şeye eşit olmalı" ifadesinden anlaşılmıştır. Kayla üçgenin iç açılarının ve dış açılarının toplamının 180 olduğunu belirtince öğrenciye "çevrenin de böyle sabit bir şeye eşit olması gibi bir şey var mı" sorusu yöneltilmiş ve öğrenci bu soruya "Yani, yok sanırım, ama böyle de soruyu nasıl bulacağız? Yani bize herhangi bir eşlik vermemiş" yanıtını vermiştir. Kayla çevreyi $Ç = 4x + 11$ olarak ifade ettikten sonra "üçgenin bu çevresine yani bir şeye eşit olmalı ki biz buradan x i bulalım ama bize net x nedir diye de sormuyor, çevresini bulunuz diyor ve bunu x i bulmadan yapamayız. Yani buradan çevre bir şeye eşit olmalı" şeklindeki yorumu, öğrencinin değişkenin sayısal değerine ulaşma isteğini ortaya koymuştur. Görüşmenin sonunda Kayla üçgenin çevresini $4x + 11$ olarak ifade etmiştir.

- Cebirsel işlem becerileri: Lara üçgenin çevresini $2x + 1 + x + 6 + x + 4$ olarak ifade edebilmiş, fakat bu toplamı en sade biçimde ifade edememiştir.

Bora, Kayla ve Arya, çevre için $2x + 1+x + 6+x + 4$ ifadesini yazmış ve türdeş terimler arasındaki işlemleri doğru bir şekilde gerçekleştirerek $4x + 11$ sonucuna ulaşmış ve bu toplamı çevre anlamına gelen Ç sembolüne eşitleyerek çevreyi $Ç = 4x + 11$ olarak ifade etmişlerdir. Tuna kenar uzunluklarını toplayarak Ata ise zihninden çevreyi $4x + 11$ olarak bulmuşlardır.

3.3.2. Ara klinik görüşmenin ikinci problemine ilişkin bulgular

Cebir ve geometri öğrenme alanlarının harmanlandığı ara klinik görüşmenin Şekil 3.58.'de verilen ikinci problemi cebirsel olarak birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin dik koordinat sisteminde geometrik olarak temsil edilmesi yeterliliği ve bu sistemi oluşturan doğrular ile x-ekseni arasında kalan üçgensel bölgenin alanını bulma becerisini gerektirmektedir. 2018-2019 eğitim öğretim yılı ortaöğretim 9. sınıf programında birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü ve geometrik anlamı üçgenler alt öğrenme alanının öğretiminden bir önceki ünitede öğrencilere verilmiştir.

$x - y + 4 = 0$

$y = 2 - x$

denklem sistemi ile x-ekseni arasında kalan bölgede ne çeşit düzlemsel bir bölge oluşur? Bu bölgenin alanını nasıl bulursunuz?

Şekil 3.58. Ara klinik görüşmenin ikinci problemi

3.3.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgi, bilgilerini uygulama biçimleri ve geometrik düşünmelerine dair bulgular sunulmuştur. Tablo 3.20.'de geometrik bilgi kapsamında iki alt tema, geometrik bilginin uygulanması kapsamında bir tema ve geometrik düşünme kapsamında iki alt tema yer almıştır.

Tablo 3.20. *Ara klinik görüşmenin ikinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Geometrik ön bilgiler **Bora** - üçgenin alanı bilmemesi. Dikdörtgenin alanı bilme ancak üçgenin alanına dikdörtgen alanından faydalanarak ulaşamama. **Kayla** - üçgenin alanını bilmesi ancak elindeki veriler ile alanı doğru hesaplayamaması. **Ata** – üçgenin alan formülünü bilip doğru uygulaması ancak formülü eşkenar dörtgenden faydalanarak tekrar elde etmeye çalışması. **Arya** - Denklemlerin geometrik olarak doğruları gösterdiğini bilgisine sahip olması. Terminoloji kullanımı **Lara** - "düzlemsel" terimini "köşesi olmayan" olarak açıklaması, bu terimden ipucu elde etmeye çalışması. **Bora** - düzlemsel olmayı düzgün geometrik nesneler ile özdeşleştirmesi. **Kayla** - düzlem terimini "sonsuza uzanan" ve "düzlem o doğrunun oluşturduğu yol" olarak ifade etmesi ancak kağıdın düzlem oluşunu sonu olması ile açıklaması. Uzay terimini "sonsuza kadar giden bir çizgi, sonu olmayan" şeklinde ifade etmesi. **Bora** - doğru parçalarına "çizgi" olarak hitap etmesi.	Geometrik temsilleri kullanma **Lara** - dik koordinat sistemini çizme, eksenleri geleneksel temsil olan yatay ekseni x , düşey ekseni y ile gösterme ve bunlara sırasıyla apsis ve ordinat olarak hitap etmesi. **Arya hariç tüm öğrenciler** - dik koordinat sistemini çizmeleri, eksenleri geleneksel olarak doğru bir şekilde temsil etmeleri. **Arya** yatay ekseni y, düşey ekseni x ile temsil etmesi.	Problemi tasavvur biçimleri **Lara** – Oluşan alanı birim sayarak bulacağını düşünmesi ve bir doğru üzerinde yer kapladığını öne sürerek alan olabileceğini belirtmesi. **Kayla** - problemde verilen denklemlerin kesişeceğini ve bir dikdörtgenin alanının sorulduğunu düşünmesi. **Arya** – denklemlerin çözümünden elde edeceği değişkenlerden doğru parçaları oluşacağı ve bir şekil meydana geleceğini düşünmesi. Geometrik düşünme **Ata** - üçgenin alanına kareden ulaşmaya çalışması.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Bora'nın üçgenin alan formülünü bilmediği "üç kenarı toplayıp ikiye bölüyorduk" şeklindeki ifadesinden görülmüştür. Öğrenci dikdörtgenin alanını "kısa kenar çarpı uzun kenar" olarak ifade etmiş, ancak bir üçgenin alanının dikdörtgenin alanının yarısı olacağı çıkarımını yapamamıştır. Alanın "santimetrekare veya metrekare" ile nitelendirildiğini belirtince, araştırmacı öğrenciye üç kenarın toplanıp ikiye bölünmesiyle santimetrekare, metrekare elde edilip edilmeyeceği sorusunu yöneltmiştir. Bora "üç kenarını, üç kenarını birbiriyle çarpsak ikiye bölsek yine olmaz ki" yanıtını vermiştir.

Kayla üçgenin alanını "Alanı demek kısa kenarı ile uzun kenarını çarptığımız zaman alanını buluyorduk" şeklinde tanımlamış ve yanlış yürüttüğü cebirsel işlemler ile elde ettiği nokta çiftinden geçen doğrunun x ve y ekseni ile oluşturduğu üçgenin alanını "*3*" olarak bulmuştur.

Ata denklem sisteminin ortak çözümünü doğru bir şekilde gerçekleştirerek $x = -1$ ve $y = 3$ değerlerini elde etmiş, fakat ortak çözümün anlamını bilmediği için dik koordinat sisteminde $(-1,0)$ ve $(0,3)$ noktalarını işaretlemiştir. Bu noktaları birleştiren bir doğru çizmiş ve problemde istenilen düzlemsel bölgenin çizdiği doğru ile x ve y eksenleri arasında oluşan dik üçgen olduğunu ifade etmiştir. Öğrenci elde ettiği üçgenin alanını "uzunluk -1 [$(-1,0)$ noktasının orijine olan uzaklığına işaret ederek] olamayacağı için buraya *1* yazıp, buraya da *3* yazıp [ayrı bir yerde bir dik üçgen çizip kenar uzunluklarını 1 ve 3 olarak belirliyor] bununla bunun [1 ve 3 birimlik kenarları işaret ederek] çarpımının ikiye bölümü" olarak ifade etmiştir.

Arya denklemlerin geometrik olarak doğruları gösterdiğini kendinden emin olmayarak ifade etmiştir.

- Terminoloji kullanımı: Görüşme süresince "düzlemsel" kelimesi üzerinde duran ve görüşmenin başında düzlemsel olmayı "köşesi olmayan" olarak açıklayan Lara'ya bu kelime üzerinde fazla zaman harcamasının sebebi sorulmuş ve Lara'nın "mesela dikdörtgensel falan dese şekli belli olur ama düzlemsel ne demek" şeklindeki cevabı bir ipucu araştırması içinde olduğunu göstermiştir.

Bora "yok etme" yöntemini yanlış bir şekilde uygulayarak elde ettiği $(-4,0)$ ile $(0,4)$ ve $(2,0)$ ile $(0,2)$ noktalarını eksenlerde işaretlemiş ve bu nokta çiftlerinden geçen doğruları çizmiştir. Bu doğrular ile x-ekseninin altından x-eksenine paralel olacak biçimde herhangi doğru çizerek bir üçgen oluşturmuştur. Yaptığı çizimin düzlemsel

olduğunu ifade edince kendisine düzlemsel olmanın ne olduğu sorulmuş, öğrenci de "Yani düzlemsel, yamuk olmayan bütün şekiller olabilir mi? Çünkü yamuk farklı bir şey" yanıtını vermiştir. Yamuğun neden farklı olduğu sorusuna ise "*N*ormalde kare veya dikdörtgen, karşılıklı kenarları eşit, ama yamukta bütün kenarlar farklı, yani dört kenarı var, dört kenarı da hiçbiri birbirine eşit değil" cevabını vermiştir. Düzlemsel olmanın, öğrencinin zihninde düzgün geometrik nesneler ile özdeşleşmiş olduğu görülmüştür. Ayrıca Bora'nın doğru parçalarına "çizgi" olarak hitap ettiği gözlemlenmiştir.

Kayla "düzlem" terimini "sonsuza uzanan" ve "düzlem o doğrunun oluşturduğu yol" olarak açıklarken "uzay" terimi "sonsuza kadar giden bir çizgi, sonu olmayan" şeklinde ifade etmiştir. Bir kağıdın düzleme örnek teşkil edip etmeyeceği sorusuna Kayla'nın "Ya kağıdın bir sonu var ve evet düzlemdir aslında" şeklindeki yanıtı, yaptığı düzlem tanımı ile çelişmiştir.

Geometrik Bilgiyi Devreye Sokma

- Geometrik temsilleri kullanma: Lara problemi okuduktan sonra dik koordinat sistemini çizmiş, eksenleri geleneksel temsil olan yatay ekseni x, düşey ekseni y ile göstermiş ve bunlara sırasıyla apsis ve ordinat olarak hitap etmiştir. Diğer tüm öğrenciler de dik koordinat sistemini çizmişlerdir. Arya hariç öğrenciler eksenleri geleneksel olarak doğru bir şekilde temsil etmişler; Arya ise yatay ekseni y, düşey ekseni x ile temsil etmiştir.

Geometrik Düşünme

- Problemi tasavvur biçimleri: Lara'ya işlemleri tamamlayabilse meydana gelecek çizimi nasıl tasavvur ettiği sorulduğunda, öğrenci "zihnimde oluşan şey [bir başka dik koordinat sistemi çizip eksenlere x ve y yazarak] x ve y. Şu kısımda [x ekseninin pozitif kısmı etrafında x ekseninin içine alacak biçimde bir elips çiziyor] bir şey oluşacak, biz onun alanını bulacağız. Birim sayarak. Bunu ama buraya yansıtamıyorum" yanıtını vermiştir. Buna ek olarak öğrenci, "Yani şöyle bir şey oluşursa [dik koordinat sisteminin 1. bölgesinde ardışık kenarları koordinat eksenleri üzerinde olan bir dikdörtgen çiziyor] buraya [dikdörtgenin bir köşesinin y ekseninde karşılık geldiği noktayı gösteriyor] geldiği sayı ile buradaki sayı arasında [dikdörtgenin bir köşesinin x ekseninde karşılık geldiği noktayı gösteriyor] şöyle birimleri sayarız" örneğini vermiştir. Lara bir doğru üzerinde alan olabileceğini belirtmiş ve bunun sebebini "çünkü sonuçta bir yer kaplıyor" şeklinde açıklamıştır.

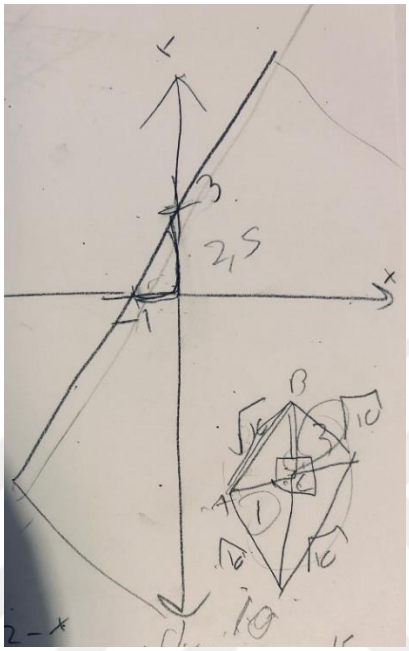
Kayla'ya problemde verilen denklemlerin neye işaret ettiği sorulduğunda, öğrenci "Ya bunlar denklem ama bunların sanırım bize çakışıp kesiştiklerini soruyor olabilir. Yani bir kenar uzunluğu gibi bir şey verip, bölgenin alanını soruyor" cevabını vermiştir. Zihninde canlanan yapıyı ayrıca "koordinat sistemi geldi aslında aklıma ilk önce yani şöyle [dik koordinat sistemi çiziyor, yatay eksene y, düşey eksene x yazıyor], tam tersi [eksenlere yazdığı x ve y yi değiştiriyor]. Yani daha sonra $x - y + 4$ diyor. Ya sanırım bunlar bir sonsuza giden doğrular ve mesela atıyorum biri böyle [y eksenine paralel doğru çiziyor] biri böyle [x eksenine paralel bir doğru çiziyor] gittiği zaman burada kalan alanı [oluşan dikdörtgenin alanını tarıyor] soruyor bize" şeklinde açıklamıştır.

Arya'ya bu problemin zihninde nasıl şekillendiği sorulduğunda, öğrenci "Şey olarak düşündüm, x ve y değerlerini bulursak eğer doğru parçaları ile burada bir kesişim ve şekil ortaya çıkacak. Bize de arada kalan bölgeyi soruyor" yanıtını vermiştir.

- Geometrik düşünme: Ata denklem sisteminin ortak çözümünden elde ettiği $(-1,0)$ ve $(0,3)$ noktalarından geçen doğru ile x ve y eksenleri arasında kalan bölgenin alanını üçgenin alan formülünü kullanarak "*1.5*" olarak bulmuş, fakat sonrasında üçgenin alanına kareden ulaşma fikri aklına gelmiştir:

> Ata: Ben, aklıma şöyle bir fikir geldi, bunu şöyle kareye tamamlayıp [dik koordinat sisteminde oluşturduğu üçgeni temsili olarak kağıtta bir başka yere çizdiği dik üçgeni Görsel 3.11.'de görüleceği üzere bir eşkenar dörtgene tamamlıyor] bulunan sonucu dörde bölsek bulabiliriz bence.
>
> Araştırmacı: Neden dörde bölüyorsun?
>
> Ata: Çünkü dört tane üçgen kare ettiği için. Bir tanesini bulabilmek için. [Oluşturduğu eşkenar dörtgenin köşegenlerinin kesişimindeki açıların tümüne 90 derecelik açı sembolü koyuyor] Burası 3, olur. [Pisagor teoremini kullanıp hipotenüsü, eşkenar dörtgenin bir kenarını $\sqrt{10}$ buluyor ve dörtgenin tüm kenarlarına $\sqrt{10}$ yazıyor]. Bir kenarının $\sqrt{10}$ olduğunu öğrendik. Bunun alanını bulmak için 10 ile 10 u kök 10 u çarpacağız. 10 olacak. Bunu dörde böldüğümüzde buranın alanının 2.5 olduğunu öğrendik.
>
> Araştırmacı: Az önce de şey diyordun, 3 ile 1 i çarpıp ikiye bölerim diyordun. O zaman kaç çıkar?
>
> Ata: 1.5
>
> Araştırmacı: Hangisi doğru?
>
> Ata: 2.5 olan daha doğru, çünkü burada sağlamasını yaptık.
>
> Araştırmacı: Bir şey soracağım, sen burada ne çeşit bir şekil oluşturdun?
>
> Ata: Kare.
>
> Araştırmacı: Nasıl yaptın?

Ata: Burayı [çizdiği ilk dik üçgende hipotenüsün üzerinden geçiyor], bu kenarı buldum. Kare olduğu için hepsinin [çizdiği diğer eş üçgenleri kalemi ile gösteriyor] aynı olduğunu düşündüm. Sonra bunla bunu [eşkenar üçgenin kenarlarını gösteriyor] çarptım, sonra bunun tamamının alanının 10 olduğunu anladım. Bunu dörde böldüm.



Görsel 3.11. *Ata'nın ara klinik görüşmenin ikinci probleminde üçgenin alanını bulması*

Ata'nın elde ettiği geometrik nesnenin bir eşkenar dörtgen olduğu görülmüştür, ancak öğrenci nesnenin "kare" olduğunu ifade etmiştir. Ata pek çok geometrik bilgisini devreye sokarak geometrik düşünce ortaya koymaya çalışmıştır.

3.3.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapıları ve sembolik manipülasyon becerileri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.21.'de genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme teması altında dört, cebir bilgi yapısı teması altında bir ve sembolik manipülasyon teması altında iki alt tema verilmiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Lara $y = 2 - x$ denklemini sağlayan $(1,1)$ noktasını elde etmiş, fakat çizdiği dik koordinat sisteminde doğruyu çizebilmek için gereken bir diğer noktayı elde etmemiştir. Öğrenci denklemde x için 1 yazıp y değişkenini 1 olarak

bulmuş, bunu y −ekseninde işaretlemiş ve yaptığı işlemi "bu arasında kalan bölgenin bir ucunun burada olduğunu" olarak açıklamıştır. Öğrencinin denklem sistemini dik koordinat sisteminde temsil etme ile ilgili ön bilgilerinin eksik olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 3.21. *Ara klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
<u>Cebirsel ön bilgiler</u> **Öğrencilerin tümü** – denklemi ve denklem sistemini geometrik olarak temsil edememe. **Lara** - $y = 2 - x$ denklemini sağlayan $(1,1)$ noktasını elde etme. **Bora** – yok etme yöntemini yanlış uygulama. Denklemlerin geometrik anlamına dair ön bilgi eksiklikleri ve hatalar. **Kayla** – bir değişkeni diğeri cinsinden yazarak yerine koyma yöntemini uygulaması; toplamsal olan terimi dağıtma şeklinde hata yapması. **Tuna** - yok etme yönteminin fazla değişkenlerden kurtulmak olduğunu düşünmesi. **Tuna**, **Bora** - yok etme yönteminde yürüttükleri sürecin aynı olması ancak **Tuna'nın** değişkenler için iki farklı değer bulmasında bir sorun olduğunu fark etmesi. **Ata** – yerine koyma yöntemini üçüncü denemesinde başarması ancak denklem sisteminin çözümünün ne anlama geldiğini bilmemesi. **Arya** - denklemlerin birinin kapalı, diğerinin bağımlı değişkene bağlı olarak verilmesi ile yok etme yöntemini kullanmasında duraksamasına neden olması ve yöntemi yanlış kullanması. Denklemlerin birer doğru belirttiğine dair olan beyan ettiği bilgisini uygulamaya geçirememesi.	<u>Aritmetik işlem becerileri</u> **Bora** - $2 - y = 4$ denklemini kendi ifadesiyle "eksi ile çarpınca" $2 + y = -4$ elde etmesi. Elde ettiği $(-4,0)$ ve $(2,0)$ noktaları arasındaki uzaklığı -2 birim olarak hesaplaması. **Kayla** - çarpımsal olmayan bir terimi parantez içine dağıtması, denklemde sayısal değeri yerine yazarken aritmetik işlem hatası. **Tuna** - $y = 2 - x$ denklemini "artı ile genişleteceğini" ifade ederek bu denklemi $2 + y = x$ formuna sokması. **Ata** – Aritmetik işlem hataları **Tuna**, **Arya** - sırasıyla "artı ile genişletmek" ve "eksi ile genişletmek" ifadelerini kullanmaları. **Arya** – Aritmetik işlem hataları <u>Eşitliğin misyonları</u> **Lara** - eşitliği nicelikler arasında bir ilişki olarak algılayamaması ve denklem formunun bağımlı değişkenin bağımsız değişkene bağlı olarak tanımlandığı $y = ax + b$ şeklinde olması gerektiğini düşünmesi. <u>0 sayısının özellikleri</u> **Lara** - 0 sayısının çarpmaya göre de etkisiz eleman olduğunu belirtmesi, 0 sayısı ile ilgili yanlış kavrayışları. **Bora** - toplama işlemine göre 0 sayısının etkisiz eleman olduğunu bilmesi ve toplamaya göre ters eleman kavrayışına sahip olması. <u>Eşitliğin özellikleri</u> **Bora** - eşitliğin geçişme özelliğini bilip kullanabilmesi.	<u>Cebirsel işlem becerileri</u> **Ata** - yerine koyma yöntemi ile x değişkeninin değerini bulması ancak bu değeri denklemlerin birinde yerine yazmak yerine, yerine koyma yöntemi ile y değişkeninin değerine ulaşmaya çalışması. İkinci denemesinde verilen denklemlerde x değişkenlerini yalnız bırakmayı düşünmüş ve işlem hataları ile $0 \neq -2$ elde edince y değişkenini yi bulamamasını doğruyu çizemeyeceği anlamına geldiğini ifade etmesi. Üçüncü denemesinde aynı süreçleri takip ederek denklem sisteminin çözümünü elde etmesi. <u>Değişkenin doğasını anlama</u> **Tuna** - Değişkenlerin negatif veya pozitif oluşlarının belirleyicisinin bu değişkenlerin katsayıları olduğunu düşünmesi.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Bora denklem sistemini yok etme yöntemini kullanarak çözmek istemiş, fakat yöntemi yanlış uygulamıştır. Bora $x - y + 4 = 0$ ve $2 - x = y$ denklemlerini alt alta yazıp x değişkenlerinin üzerini çizerek yok etmiş ve Şekil 3.59.'da görülen denklemleri yazmıştır.

$$-y + 4 = 0 \ldots \text{I}$$
$$2 = y \ldots \text{II}$$

Şekil 3.59. *Bora'nın yok etme yöntemini yanlış uygulayarak y değişkeninin değerine ulaşması*

Öğrenci Şekil 3.59.'da verilen I. denklemden $y = 4$ elde ederek y-ekseninde 2 ve 4 sayılarını işaretlemiş ve "y yi buldum, x i bulamadım. O zaman x i bulmak için y yi yok etmem lazım" açıklamasını yapmıştır. Bora $y = 2 - x$ denklemini $2 - y = x$ olarak düzenlemiş ve bu denklemi -1 ile yanlış bir şekilde çarpmış, Şekil 3.60.'da verilen I. denklemi yazmıştır.

$$2 + y = -x \ldots \text{I}$$
$$x - y + 4 = 0 \ldots \text{II}$$

Şekil 3.60. *Bora'nın yok etme yöntemini yanlış uygulayarak x değişkeninin değerine ulaşması*

Bora Şekil 3.60.'da yazdığı I. ve II denklemlerde y değişkenlerinin üzerini çizmiş ve elde ettiği $x = -4$ ve $x = 2$ noktalarını x-ekseninde işaretlemiştir. Yok etme yöntemini kullandığında ne elde edeceği sorusuna Bora, "y doğrusunda bulunan noktayı ve bu noktalarla birlikte x eksenini birleştirdiğimiz zaman zaten x ekseni ile arasında kalan bölgeyi sormuş, onu bulabiliriz" cevabını vermiştir. Öğrencinin yanlış bir şekilde uyguladığı yöntemin sonucunda denklemlere karşılık gelen doğruların kesişme noktası olduğunu bilmediği gözlemlenmiştir. Bora'ya denklem sisteminin anlamı sorulmuş ve öğrencinin denklemlerin geometrik anlamına dair ön bilgisinin eksiklikler ve hatalar içerdiği gözlemlenmiştir.

Araştırmacı: Bunlar [denklem sistemindeki denklemlere işaret ederek] neler?

Bora: İki tane nokta.

Araştırmacı: Nokta mı onlar?

Bora: Hayır bir bölge, yok bölge değil.

Araştırmacı: Yani, birinci satırda yazılan ve ikinci satırda yazılan ifadeler...

Bora: Denklem.

Araştırmacı: Peki, denklemler ne gösterir?

Bora: Hmm, değişkenlik gösterir.

Araştırmacı: Nasıl bir değişkenlik gösteriyor?

Bora: Çünkü x ve y değişkeni var o yüzden. O yüzden değişkenlik gösterir.

Araştırmacı: Peki, değişkenlik göstermesi ne demektir?

Bora: Yani aslında bir eşitlik denklem, bu eşitsizlik olamaz zaten, eşitlik.

Araştırmacı: Koordinat sisteminde bir denklem ne gösterir?

Bora: Denklem, bir bölgeyi gösterir veya bir...

Araştırmacı: Nasıl bir bölge?

Bora: Bir şekli de gösteriyor olabilir, yani kenar uzunluğunu gösterir. Yok. Doğru mu? Kafam karıştı.

Araştırmacı: Denklemler dik koordinat sisteminde ne gösterir? Bu soruya belki cevap verebilirsin.

Bora: Aynen ya. y yi bulduğum zaman burası bir kenar [y-eksenine işaret ederek], burayı bir kenar [x-eksenini işaret ederek] kabul ettiğimiz zaman, karşılıklı olduğu için bir şekli gösteriyor olabilir. Doğru mu? Değil mi?

Kayla verilen denklem sistemindeki $y = 2 - x$ denklemi için "y nin $2 - x$ olduğunu söylemiş" ifadesinde bulunarak $x - y + 4 = 0$ denkleminde y değişkeni yerine $2 - x$ yazarak yerine koyma metodunu uygulamayı düşünmüştür. Kayla'nın çözümü Şekil 3.61.'de görüldüğü şekilde gerçekleşmiştir.

$$x - (2 - x) + 4 = 0 \ldots \text{I}$$
$$-4x + 8 - 4x = 0 \ldots \text{II}$$
$$-8x + 8 = 0 \ldots \text{III}$$
$$-8x = -8$$
$$x = 1$$

Şekil 3.61. *Kayla'nın yerine koyma yöntemi ile x değişkeninin değerini bulması*

Kayla $x - y + 4 = 0$ denkleminde y değişkeni yerine $2 - x$ ifadesini doğru bir şekilde yerine yazmıştır. Ancak II. denklemde görüleceği üzere toplamsal olan 4 terimini, önünde bulunan terimlere dağıtmıştır. $-8x + 8 = 0$ denklemini elde edince "Yani *0* demek şu nokta [orijini göstererek] demek" yorumunda bulunmuştur. Ardından "Yani buradan x i bulsam bölgenin alanını bize vermez" diyerek "x i bulursam sadece bir bölge

oluşturmaz" açıklamasında bulunmuştur. Öğrencinin birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sistemini çözdüğünde elde edeceği sıralı ikilinin bu denklemlere karşılık gelen doğruların kesişim noktası olduğunu bilmediği görülmüştür. Devamında "Yani bize sadece bir doğru oluştursa, yani şöyle [bir başka dik koordinat sistemi çiziyor] verilen nokta bir doğru oluştursa [dik koordinat sisteminin 1. bölgesinde x eksenine paralel bir doğru parçası çiziyor] buranın alanı sonsuza kadar gider. Yani bize iki şey lazım ki çakıştıkları yerin bölgesini bulabilelim. x eksi y artı 4 eşit 8, sonra bize y yi vermiş. Buradan 4 ü değil de x i dağıtsak…" yorumunda bulunmuştur. Sonra "Ya da y yi yerine koymayıp devam etsek de iki bilinmeyenli, ya sanırım yaptığımız şey doğru çünkü iki bilinmeyenli bir denklemi 0 a eşitleyemeyiz. Burada en azından bilinmeyenleri bire düşürebiliyoruz" yorumunda bulunarak x değişkeni için bulduğu değeri $x - y + 4 = 0$ denkleminde yerine koyarak y değişkeninin değerine ulaşmış ancak aritmetik hatalar yapmıştır. Kayla'ya dağıtma işleminin ne zaman yapıldığı sorusu yöneltilmiş ve öğrenci "dağıtmayı, parantez içinde eksili değil de yani parantez içinde bir ifade olduğu zaman, biz onu, yani bir bilinmeyen olduğu zaman onu bulmamıza yardımcı oluyor" cevabını vermiştir. Kayla'nın algısının, toplamsal 4 terimi ile önünde bulunan parantez içindeki ifade arasında çarpma işlemi olduğu şeklinde olduğu düşünülmüştür.

Tuna problemin çözümü için yok etme metodunu kullanacağını söylemiş ve denklemleri alt alta yazarak işe koyulmuştur. $y = 2 - x$ denklemini "artı ile genişleteceğini" söyleyerek denklemi $2 + y = x$ formuna sokmuştur. $x - y + 4 = 0$ ve $2 + y = x$ denklemlerini alt alta yazarak denklemlerdeki y değişkenlerinin üzerini çizmiş ve $x = -4$ ve $2 = x$ sonucuna ulaşmış ve "x imiz birinci denklemde -4 çıktı, ikinci denklemde ise 2 çıktı. Bu biraz saçma geliyor bana çünkü x imiz bir tane değişken" yorumunu yapmıştır. x değişkenini yok etmek için yürüttüğü benzer süreçte y değişkeni için farklı iki değer elde etmiş ve "Yine aynı şekilde bir sorunla karşılaştığımı düşünüyorum" yorumunda bulunmuştur. Tuna, yok etme yönteminin amacını "yok etme yönteminin amacı bizi değişkenlerden kurtarmak, fazla değişkenlerden" şeklinde açıklamıştır. Tuna ile Bora'nın yok etme yönteminde yürüttükleri sürecin aynı olduğu görülmekle beraber, Tuna'nın ortada bir sorun olduğunu anladığı "çünkü x imiz bir tane değişken" yorumundan anlaşılmıştır.

Ata da Kayla gibi yerine koyma yöntemi ile problemin çözümüne ulaşmak istemiştir. $x - y + 4 = 0$ denkleminde "y yerine $2 - x$ yazabiliriz" diyerek işlemlerine başlamış ve denklemlerin ortak çözümünden x değişkeninin değerini -1 olarak doğru bir

şekilde bulmuştur. Bundan sonra y değerini bulmak istediğini söylemiş ve kendisine değişkenlerin değerlerini bularak neyi amaçladığı sorulmuştur. Ata bu soruya "ikisinin çakıştığı bölgeye de ikisi arasında kalan bölge" yanıtını vermiştir. Öğrenci x değişkeninin değerini bulduktan sonra yapması gereken bu değeri denklemlerden birinde yerine yazmak iken, Ata yerine koyma yöntemi ile y değişkeninin değerine ulaşmaya çalışmıştır. Ata üçüncü denemesinde denklem sisteminin ortak çözümünü $x = -1$ ve $y = 3$ olarak bulmuş, dik koordinat sisteminde $(-1,0)$ ve $(0,3)$ noktalarını işaretleyip bu noktaları birleştiren bir doğru çizmiştir. Öğrenci problemde istenilen düzlemsel bölgenin çizdiği doğru ile x ve y eksenleri arasında oluşan dik üçgen olduğunu ifade etmiştir. Ata, denklem sisteminin bir doğruyu gösterdiğini ifade etmiştir.

Arya'nın "Böyleyken eksi x ile artı x [sırasıyla $y = 2 - x$ ve $x - y + 4 = 0$ denklemlerindeki x değişkenlerini göstererek], ama eşittirin diğer tarafında [$x - y + 4 = 0$ denkleminin sağ tarafındaki 0 ı göstererek]. Yok etmeyi denemek istedim ama nasıl olabileceği hakkında pek… Bunu bu tarafa atıp bunu bu tarafa atsam [$y = 2 - x$ denklemindeki y değişkenini sağa, x değişkenini sola yazıyor], eksi y, olmaz sanırım" şeklindeki yorumu, öğrencinin yok etme yöntemini denklemlerin birinin kapalı diğerinin bağımlı değişkene bağlı olarak verilmesi durumunda nasıl kullanacağı konusunda duraksamasına sebep olmuştur. Arya $y = 2 - x$ denklemini $x = 2 - y$ olarak düzenlemiş ve bu denklemi kendi tabiri ile "eksi ile genişleterek" $-x = -2 + y$ olarak ifade etmiştir. Arya $x - y + 4 = 0$ ve $-x = -2 + y$ denklemlerini alt alta yazarak ilk denklemin sol tarafındaki y değişkeni ile ikinci denklemin sağ tarafındaki y değişkenini sadeleştirmiştir. Birinci denklemden $x = -4$, ikinci denklemden $x = 2$ değerlerini bulmuştur. Yaptığı işlemlerdeki anlamsızlığı fark etmiş ve yazdıklarını silmiştir.

Arya bir diğer denemesinde $x - y + 4 = 0$ denklemini $y = x + 4$ olarak düzenlemiş ve "çok mantıklı gelmiyor yani y nin $x + 4$ olmasını burada bir şekilde gösteremem ki" yorumunda bulunmuştur. Bu yorum öğrencinin denklemlerin birer doğru belirttiği beyanını uygulamaya geçiremediğini göstermiştir.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik işlem becerileri: Yok etme yöntemini kullanan Bora'nın $2 - y = 4$ denklemini kendi ifadesiyle "eksi ile çarpınca" $2 + y = -4$ elde etmesi, öğrencinin aritmetik işlemlerinin hatalar içerdiğini göstermiştir.

Bora, yok etme yöntemini yanlış bir şekilde uygulayarak elde ettiği $(-4,0)$ ve $(2,0)$ noktaları arasındaki uzaklığı -2 birim olarak hesaplamıştır. Öğrencinin iki nokta arasındaki mesafenin negatif olmayacağı bilgisinin mevcut olmadığı gözlemlenmiştir.

Yerine koyma yöntemi ile problemin çözümüne girişen Kayla'nın çarpımsal olmayan bir terimi parantez içine dağıtmak şeklinde yanlış öğrenmesi Şekil 3.61.'de verilen III. denkleminde gözlemlenmiştir. Bu işlem sonucunda elde ettiği $x = 1$ değerini $x - y + 4 = 0$ denkleminde $1 - y + 4 = 0$ olarak yerine koymuş, ancak hatalı sembolik manipülasyon ile y değerini 3 olarak elde etmiştir.

Denklem sistemini yok etme yöntemi kullanarak çözmeyi düşünen Tuna, $y = 2 - x$ denklemini "artı ile genişleteceğini" ifade ederek bu denklemi $2 + y = x$ formuna sokmuştur. Tuna'nın artı ile genişletmek olarak gerçekleştirdiği eylem, y değişkenlerini her iki denklemin aynı tarafında bulundurulması suretiyle ortadan kalkması şeklinde gerçekleştirdiği yanlış bir sembolik manipülasyon olmuştur.

Ata'nın aritmetik işlem hatalarından dolayı, denklem sistemini üçüncü denemesinde çözebildiği gözlemlenmiştir.

Arya $x + 4 = y$ denklemini sağlayan bir nokta çifti bulmak için $x = 1$ değerini vermiş ve $y = 5$ bulmuştur. $y = 5$ değerini aynı denklemin kapalı formu olan $x - y + 4 = 0$ denkleminde yerine yazıp yanlış hesaplayarak $x = 9$ elde etmiştir. Arya bir denklemin -1 ile çarpılmasını "eksi ile genişletmek" olarak ifade etmiştir.

- Eşitliğin misyonları: Lara denklem sisteminin birinci denklemi olan $x - y + 4 = 0$ denklemini geometrik olarak temsil etmek için x değişkenine 0, 1 ve -1 değerlerini atayarak çözümüne başlamıştır. Denklemde x için 1 değerini yazdıktan sonra duraksamıştır:

> Araştırmacı: Evet, neden durdun? Lara ne düşünüyorsun?
>
> Lara: Şimdi burası ordinat [y eksenini göstererek], burası apsis [x eksenini göstererek] de bu normal sanki şey gibi değil, 0 için, 1 için yaptığımız gibi değil.
>
> Araştırmacı: Onlar nasıl oluyordu?
>
> Lara: Eşittirin bir tarafında ya x ya da y oluyordu burada ikisi aynı anda verilmiş.

Lara'nın ifadesinden öğrencinin eşitliği nicelikler arasında bir ilişki olarak algılayamadığını ve denklemlerin öğrencinin zihninde bağımlı değişkenin bağımsız değişkene bağlı olarak tanımlandığı $y = ax + b$ şeklinde olduğu gözlemlenmiştir. Kapalı formda verilen denklemin sol tarafına işaret ederek "buradaki sayılar *0* a eşit" yorumunda bulunmuştur.

- 0 sayısının özellikleri: Lara'nın problemin başında $ax + by + c = 0$ formundaki kapalı denklemlere aşina olmayışı, görüşmenin ilerleyen dakikalarında da "x ile y niye yan yana" sorusunu yöneltmesine sebep olmuştur. Araştırmacının isterse kendisinin de x ve y değişkenlerini eşitliğin farklı taraflarında bulundurabileceği yorumunun üzerine, Lara "y yi atarsak, o zaman *0* ne olacak" cevabını vermiştir. Lara'nın 0 sayısı ile ilgili işlemlere ait sahip olduğu bilgiler diyalogda verilmiştir.

> Lara: Şuradaki 0 ı şey yapmamız lazım [$x - y + 4 = 0$ denklemini göstererek]. y yi bu tarafa atarsak [y değişkeninden sağa doğru bir ok çiziyor]. Nasıl bu, nasıl çıkıyor?
> Araştırmacı: 0 nasıl bir sayıdır?
> Lara: Etkisiz.
> Araştırmacı: Neye göre etkisiz?
> Lara: Yanındaki sayılara göre etkisiz.
> Araştırmacı: Ne yaparsan etkisiz olur?
> Lara: Yanına bir şey gönderirsem. Çarparsam. Değer verirsem.
> Araştırmacı: 0 a değer vermek ne demek?
> Lara: y yi bu tarafa gönderirsek burası y olur 0 gider.

Lara 0 sayısının çarpmaya göre de etkisiz eleman olduğunu belirtmesi aritmetik kavrayışındaki kusurları ve eksiklikleri ortaya koymuştur.

Bora'nın problemi okuduktan sonra $x - y + 4 = 0$ denklemi hakkında "*0* olması için $x - y$ nin *4* olması lazım. Doğru değil mi" şeklindeki yorumu, öğrencinin toplama işlemine göre 0 sayısının etkisiz eleman olduğunu bildiğini ve toplamaya göre ters eleman kavrayışına sahip olduğunu göstermiştir.

- Eşitliğin özellikleri: Problemin çözümü için yok etme yöntemini kullanan Bora'nın $y = 2 - x$ biçiminde verilmiş denklemi $2 - x = y$ ve $x = 2 - y$ denklemini $2 - y = x$ olarak biçiminde yazması, öğrencinin eşitliğin geçişme özelliğini bildiğini ve kullanabildiğini göstermiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Cebirsel işlem becerileri: Ata yerine koyma yöntemi ile x değişkeninin değerini bulmuştur. Ancak bu değeri denklemlerden birinde yerine yazmamış ve fakat yerine koyma yöntemi ile y değişkeninin değerine ulaşmaya çalışmıştır. $x - y + 4 = 0$ denklemini $-y + 4 = -x$ olarak düzenleyip $y = 2 - x$ denkleminde $-x$ yerine $-y + 4$ yazmayı düşünmüş ve yerine yazma işlemini $y = 2 - (-y + 4)$ şeklinde gerçekleştirmiştir. Öğrencinin hatasının toplama yapmak yerine çıkarma işlemi yapma olduğu görülmüştür. Öğrenci $y = 2 - (-y + 4)$ denklemindeki parantezi y değişkenine

doğru, 4 sayısına yanlış dağıtıp $y = 2 + y + 4$ elde etmiş ve $0 = 6$ çelişkisine ulaşmış ve "bu olmaz ki ama" yorumunda bulunmuştur.

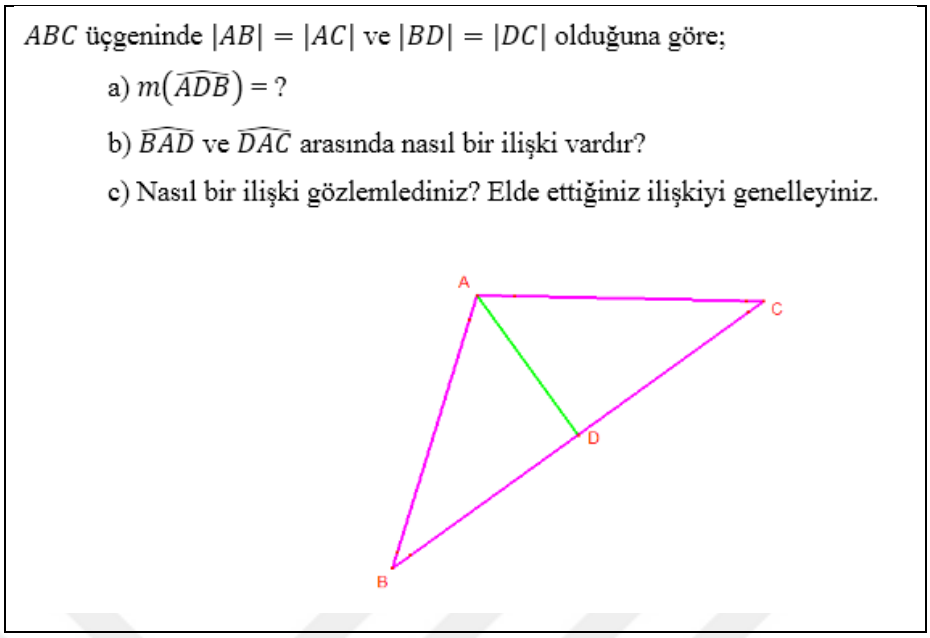
İkinci denemesinde Ata, verilen denklemlerde x değişkenlerini yalnız bırakmayı düşünmüştür. $y = 2 - x$ denkleminde x değişkenini doğru bir şekilde yalnız bırakmış ve $x = 2 - y$ yazmıştır. $x - y + 4 = 0$ denkleminde x değişkenini yanlış bir şekilde yalnız bırakarak $x = -(y + 4)$ yazmıştır. Bu denklemleri birbirine eşitleyince de işlem hataları ile $0 \neq -2$ elde etmiş ve "yine y yi bulamıyoruz" yorumunu yapmıştır. Araştırmacının y yi bulamamasının ne anlama geldiğini sorusuna öğrenci "doğru çizemeyiz, bir alan bulamayız" cevabını vermiştir.

Ata üçüncü denemesinde yine aynı süreçleri takip etmiş ve aritmetik işlemlerini dikkatle yürütüp denklem sisteminin çözümünü $x = -1$ ve $y = 3$ olarak elde etmiştir.

- Değişkenin doğasını anlama: Tuna ikinci denemesinde $x - y + 4 = 0$ denklemini düzenleyerek $x - y = -4$ olarak ifade etmiş ve $y = 2 - x$ denklemi için "y ve x i bir arada bulundurup y yi negatif, x i ise pozitif değerde yapmalıyız" yorumunda bulunarak $-2 = -x - y$ denklemini elde etmiştir. Düzenlediği $x - y = -4$ ve $-2 = -x - y$ denklemleri hakkında "$x - y$, -4 iken $-x$ ile $-y$ nin toplamı -2 ye eşittir. x imiz burada pozitif bir sayıdır" yorumunda bulunmuş ve kendisine x değişkeninin pozitif olduğunu nasıl anladığı sorulmuştur. Tuna'nın bu soruya verdiği "çünkü x, pozitif bir sayı ile negatif bir sayıyı topladığımızda -4 buluyoruz, negatif, negatif x ile negatif y yi topladığımızda daha da büyük bir değer buluyoruz. Ben burada x imizin ya da y mizin pozitif olduğunu düşünüyorum" şeklindeki yanıttan, öğrencinin x ve y değişkenlerinin negatif veya pozitif oluşlarının belirleyicisinin bu değişkenlerin katsayıları olduğunu düşündüğü anlaşılmıştır.

3.3.3. Ara klinik görüşmenin üçüncü problemine ilişkin bulgular

Ara klinik görüşmenin Şekil 3.62.'de verilen üçüncü problemi bir ikizkenar üçgende tepe açısına ait kenarortayın aynı zamanda açıortay ve yükseklik olduğu bilgisinin öğrenciler tarafından elde edilmesine yöneliktir. Problemde sayısal veri verilmemesi öğrencilerin genelleme becerilerini incelemeye olanak sağlamıştır.



Şekil 3.62. *Ara klinik görüşmenin üçüncü problemi*

3.3.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgi ve bu bilgilerini problemin çözümü için nasıl devreye soktuklarına dair bulgular sunulmuştur. Tablo 3.22.'de geometrik bilgi kapsamında üç alt tema ve geometrik bilginin uygulanması kapsamında iki tema alt tema yer almıştır.

Tablo 3.22. *Ara klinik görüşmenin üçüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
<u>Geometrik ön bilgiler</u> **Bora, Kayla** - ADB açısının $90°$ olması ve BAD ve DAC açı ölçülerinin eşit olmasını üçgenin ikizkenar üçgen olmasına bağlaması. **Arya** - BAD ve DAC açılarının eşit ölçüde olmasını ikizkenar üçgende kenarortayın aynı zamanda açıortay olacağı ön bilgisine kendinden çok da emin olmayarak dayandırması. (Özellik temelli yaklaşım). **Tuna** - Farklı üçgenlerde eşit uzunluktaki kenarların gördüğü açıların eşit ölçülü olması şeklindeki yanlış kabulü ile BAD ve DAC üçgenlerinin açılarına değişkenler atamış ve benzerlik kurmaya çalışması. Benzerlik ilgili pek çok bilgi ve beceri sahibi oluşu. Benzerlik oranının 1 olmasını eşkenar üçgen olma ile değerlendirmesi. **Ata** - ABD ve ADC üçgenlerinin eş üçgenler olduğunu herhangi bir değişken atamaya ve benzerlik bağıntısı kurmaya gerek duymadan görmesi. <u>Terminoloji kullanımı</u> **Bora** - ABC üçgenini ikizkenar üçgen ve AD doğru parçasına kenarortay olarak ifade etmesi.	<u>Geometrik temsilleri kullanma</u> **Bora** – eşit doğru parçalarını çizimde temsilde kullandığı tek çentikleri k birim, çift çentikleri 2k birim olarak algılaması ve üçgenin eşkenar üçgen olacağı çıkarımında bulunması, sonra bu yanılgısından kendiliğinden kurtulması. Benzer durumu **Arya**'nın yaşaması. <u>Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme</u> **Lara** – Problemde verilen sembolik temsillerin karşılıklarını tespit edebilmesi,

Tablo 3.22. (Devam) *Ara klinik görüşmenin üçüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Terminoloji kullanımı **Bora** - İkizkenar üçgende "tepe açısı" terimine vakıf olmaması genellemede bulunmasını zorlaştırması. **Ata** - AD doğru parçasının kenarortay olduğunu ifade etmesi. **Tuna** - "ABD açısı"nı "AB kenarını gören açı" olarak ifade edişi. **Ata** - ABD ve ADC üçgenlerine önce "eşit üçgenler" sonra bunlara "eş üçgenler" olarak hitap etmesi. Tanım yapma becerileri **Kayla** – Kenarortayı doğru tanımlaması.	Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme **Lara** – üçgenin ikizkenar üçgen ve AD doğru parçasının kenarortay olduğunu ifade etmesi. **Bora** – Geometrik temsiller ile ilgili yanılgısını attıktan sonra ABC üçgeninin "ikizkenar üçgen" olduğunu söylemesi. **Kayla**, **Tuna** - sembolik temsilleri çizim üzerinde gözlemleyip eşit uzunlukları doğru bir şekilde temsil etmeleri. **Ata** - sembolik temsilleri çizim üzerinde gözlemlemesi, diğer öğrencilerden farklı olarak eylemlerini metni okuması ile eş zamanlı gerçekleştirmesi. **Arya** - eşit uzunluklu kenarları doğru belirlemesi.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Bora ADB açısına dik açı sembolü koymuş, ADB açısının ölçüsünün neden 90° olduğu sorusuna ise, "çünkü ikizkenar, ikizkenarı ortadan ikiye bölen yükseklik diktir" yanıtını vermiştir. BAD ve DAC açılarının eşit olmasını da üçgenin ikizkenar üçgen olmasına bağlamıştır.

Kayla ABC üçgeninin bir ikizkenar üçgen olduğunu belirtmemiştir. Kayla, Bora gibi sahip olduğu ikizkenar üçgenin tepe açısına ait kenarortayın aynı zamanda yükseklik olduğu bilgisini, "kenarortayın oluşturduğu açı dik değildi, yani her zaman dik olmuyordu ama burada bu kenarların uzunluğu da [AB ve AC doğru parçalarını göstererek] birbirlerine eşit olduğu için ADB açısına 90 diyebiliriz diye düşünüyorum" düşüncesi ile ifade etmiştir.

Arya BAD ve DAC açılarının eşit ölçülü olmasını ikizkenar üçgende kenarortayın aynı zamanda açıortay olacağı ön bilgisine kendinden çok da emin olmayarak dayandırmıştır.

Tuna farklı üçgenlerde eşit uzunluktaki kenarların gördüğü açıların eşit ölçülü olması şeklindeki yanlış kabulü ile BAD ve DAC üçgenlerinin açılarına değişkenler atamış ve kendi tabiriyle "oran orantı" yani benzerlik kurmaya çalışmıştır.

> Tuna**:** Benzerlik kurmayı düşünüyorum. İlk üçgenimize BAD ismini veriyorum, bizim B açımıza denk gelen burada C açımız, A açımıza denk gelen burada tekrar A açımız ve D açımıza denk gelen burada tekrar D açımız [$\Delta(BAD) \approx \Delta(CAD)$ yazıyor]. BA kenarımız

burada, ama bu kenarlar arasında bir oran orantı oluyordu, açılar arasında değil. Bu yüzden en son yazdığımı gereksiz buldum.

Araştırmacı**:** Benzerlik mi var bu iki üçgen arasında?

Tuna**:** Bu iki üçgen arasında benzerlik olduğunu düşünüyorum çünkü ikisinde de bazı kenarlar eşittir, bazı kenar uzunlukları, BA ile AC kenar uzunluğumuz eşit ve BD ile DC kenarımız da eşit. a, b, c değişkenlerini de atayabiliriz. AB kenarımıza a, ve AB ile AC kenarımız eşit olduğu için AC kenarı da a değerini alır, BD kenarımıza b, DC kenarımıza da b değişkenini veriyorum. Bunlar eşittir.

Araştırmacı**:** Tamam.

Tuna**:** AD kenarımıza da c diyorum. BA kenarımızın a nın AC kenarımıza oranı a eşittir AD kenarımız c, tekrar AD kenarımız c oluyor [$\frac{a}{a}=\frac{c}{c}$ yazıyor]. Bu üçgende oranın 1 olduğunu görüyoruz. Bu sanırım eşkenar üçgen olduğunu söylüyordu bize. Fakat eşkenar üçgen olamaz çünkü burada AB kenarı ile AC kenarı, BD kenarı ile DC kenarının eşit olduğunu söylüyor ABC üçgeni içinde. Fakat bu üçgenimizin ikizkenar olduğunu biliyoruz. Sanırım bu soruyu devam ettiremem.

Tuna'nın üçgenler arasında benzerlik kurma ile ilgili pek çok bilgi ve beceriye sahip olduğu görülmüştür. Kurmuş olduğu $\Delta(BAD) \approx \Delta(CAD)$ benzerliğin doğru olmasına rağmen, öğrenci bu benzerliği sahip olduğu "iki farklı üçgende eşit uzunluktaki kenarları gören açıların aynı ölçüde olması" yanlış kavrayışı ile temellendirmiştir. Benzerlik oranının "1" olmasını eşkenar üçgen olma ile değerlendirmesi, benzerliğin bir mukayese olduğunu bilmediğini ve öğrencide benzerlik kavramının kavramsal olarak mevcut olmadığını göstermiştir.

Ata'nın Tuna'dan farkı ise ABD ve ADC üçgenlerinin eş üçgenler olduğunu herhangi bir değişken atamaya ve benzerlik bağıntısı kurmaya gerek duymaksızın elde edebilmiş olmasıdır.

- <u>Terminoloji kullanımı</u>: Bora'nın ABC üçgenini ikizkenar üçgen ve AD doğru parçasına kenarortay olarak ifade etmesi doğru terminoloji kullanımına örnek teşkil etmiştir. Problemdeki ilişkiyi genellemesi istendiğinde ise, ikizkenar üçgende "tepe açısı" terimine vakıf olmaması öğrenciyi oldukça zorlamıştır. İkizkenar üçgende taban açılarına "köşe açıları" olarak hitap etmiş, fakat tepe açısının da bir köşe açısı olduğunu söylemiş, yani bu şekilde ayırt edemeyeceğini fark etmiştir.

Tuna'nın "ABD açısı" şeklinde ifade etmesi gereken matematiksel nesneye "AB kenarını gören açı" olarak ifade edişi dikkatleri çekmiştir.

Ata ABD ve ADC üçgenleri için önce "eşit üçgenler" terimini kullanmış, ancak daha sonra bunlara "eş üçgenler" olarak adlandırmıştır.

- Tanım yapma becerileri: Kayla AD doğru parçası hakkında "bir açıdan çıkan ve kenarı eşit uzunluklara bölen doğru parçasına kenarortay diyorduk" yorumunda bulunarak hem doğru terimi kullanmış hem de kenarortayı doğru tanımlamıştır. Ata da AD doğru parçasının kenarortay olduğunu ifade etmiştir.

Geometrik Bilginin Kullanılması

- Geometrik temsilleri kullanma: Bora'nın eşit doğru parçalarını çizimde temsil etmek için kullandığı (AB ve AC kenarlarına çift çentik, BD ve DC kenarlarına tek çentik) temsiller tek çentikleri k birim, çift çentikleri 2k birim olarak algılamasına ve üçgenin eşkenar üçgen olacağı yanlış çıkarımına sebep olmuştur. Ancak öğrenci bu yanılgısından kendiliğinden kurtulmuştur.

Arya eşit uzunluktaki kenar uzunluklarını doğru belirleyebilmiş olmasına rağmen AB ve AC kenarlarının eşitliğini temsil etmede kullandığı çift çentikleri BD ve DC kenarlarının eşit olduğunu temsilde de kullanmış ve ABC üçgeni için "eşkenar üçgen" ifadesinde bulunmuştur. Düşüncesini sorgulayan Arya, ilerleyen dakikalarda BD ve DC kenarlarının temsilinde kullandığı çift çentikleri silerek bu eşit uzunlukları tilda (~) ile temsil etmiştir.

- Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme: Lara $|AB| = |AC|$ ve $|BD| = |DC|$ ilişkilerini verilen çizimde BD ve DC için tek ve AB ve AC çift çentik ile işaretleyerek doğru parçalarının eşit uzunlukta olduğunu göstermiştir. Lara'nın yaptığı işaretlemeler üzerine kendisine bu üçgenin ne çeşit bir üçgen ve AD doğru parçasının ne olduğu sorulmuş, Lara da bu soruları sırasıyla "ikizkenar üçgen" ve "kenarortay" olarak doğru bir şekilde cevaplamıştır.

Bora problem metninde verilen $|AB| = |AC|$ ilişkisini verilen çizimde AB ve AC kenarlarına çift çentik koyarak eşit olduğunu göstermiş ve ABC üçgeninin "ikizkenar üçgen" olduğunu söylemiştir.

Kayla ve Tuna problemde verilen sembolik temsilleri çizim üzerinde gözlemlemiş ve eşit uzunlukları tek ve çift çentik temsilleri ile doğru bir şekilde ifade edebilmiştir. Ata da sembolik temsilleri çizim üzerinde gözlemlemiş fakat diğer öğrencilerden farklı olarak eylemlerini metni okuması ile eş zamanlı gerçekleştirmiştir.

Arya ise eşit uzunluklu kenarları doğru belirlemiş ancak geometrik temsilleri doğru olmadığı için bir süreliğine yanılgıya düşmüştür.

3.3.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin sembolik manipülasyon ve genelleme becerileri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.23.'de sembolik manipülasyon ve genelleme temaları altında birer alt tema verilmiştir.

Tablo 3.23. *Ara klinik görüşmenin üçüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

SEMBOLİK MANİPÜLASYON	GENELLEME
Değişkenin doğasını anlama **Lara** - BAD ve DAC açılarının ortak olan A sembolünden dolayı açıların eşit ölçülü olduğunu düşünmesi.	Genellemede bulunma **Bora** - bir ikizkenar üçgende tepe açısına ait kenarortayın hem yükseklik hem de açıortay olduğu bilgisine sahip olması ancak bu bilgiyi kenar-açı-kenar eşlik bağıntısına dayandıramaması. Terminoloji eksikliği genelleme yapmasını zorlaştırması. Genellemeyi doğrulama düzeyi sayısal değer vermekten ibaret oluşu. **Kayla**, **Tuna**, **Arya** - farklı üçgenlerde eşit uzunluktaki kenarları gören açıların birbirine eşit olacağı yanlış kabulünün oluşundan dolayı genellemesinin sağlıklı oluşunu engellemesi. **Ata** - ABD ve ADC üçgenlerini eş olarak algılaması. Takip ettiği süreç anlamlı ancak bu süreci matematiksel olarak genellemede yetersiz oluşu.

Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin doğasını anlama: Lara BAD ve DAC açıları arasındaki ilişkinin sorulduğu b şıkkı için "ikisinde de A ortada, aynı açı olmuyor mu" sorusunu yöneltmiş ve bu sorusunu "A ikisinde de ortada, ortak açı" şeklinde cevaplamıştır. Lara farklı açıları temsil etmek için kullanılan sembolik temsillerin doğasını anlamadığı görülmüştür. Öğrencinin ön klinik görüşmenin üçüncü probleminde de köşeler için kullanılan üç sembollü temsilleri çizim üzerinde yerini tespit edememiştir.

Genelleme

- Genellemede bulunma: Bora'nın bir ikizkenar üçgende tepe açısına ait kenarortayın hem yükseklik hem de açıortay olduğu bilgisine sahip olduğu gözlemlenmiştir. Ancak bu bilgiyi kenar-açı-kenar eşlik bağıntısına dayandırmak suretiyle bir çözüm gerçekleştirmemiştir. Genelleme yapması istenildiğinde ise terminoloji bilgisinin zayıf olduğu gözlemlenmiştir.

> Bora**:** İkizkenar üçgenlerde, neydi o açının ismi, sol taraftaki diyeceğim ama bir de neydi, köşe açıları diyeyim.
>
> Araştırmacı**:** Köşe açıları ne demek?

Bora**:** Köşe açıları şöyle değil mi? [B açısının bulunduğu köşeyi işaretleyerek]. Ama köşe açıları dersem üçü de olur.

Araştırmacı**:** Evet, üçü de olur, doğru. İkizkenar üçgende diye başladın. Haydi bakalım.

Bora**:** İkizkenar üçgende...

Araştırmacı**:** Ne demek istediğini sen söyle bize.

Bora**:** Evet, ikizkenar üçgende, ıı, karşılıklı olmaz, karşılıklı iki kenar…

Araştırmacı**:** Karşılıklı?

Bora**:** Karşılıklı değil, nasıl, aa kafam karıştı, bunlar [AB ve AC kenarlarına işaret ediyor] karşılıklı değil ama di mi?

Araştırmacı: Karşılıklı ne demek?

Bora: Aynen, bu karşılıklı olmaz. Karşılıklı, bu silgi ve kalem gibi olması gerekiyor. Ben yanlış şey yaptım.

Araştırmacı: Tamam. Nasıl bir ilişki elde ettin, bunu bir genelle bakalım.

Bora: Yaptık, şimdi genelleyeceğiz. Bir ikizkenar üçgende, gerisi gelmiyor işte, dilimin ucunda ama söyleyemiyorum.

Araştırmacı: Matematiksel olmayan bir şekilde anlat bize o zaman ilişkiyi. Yani illa terim kullanmak için çabalama. Ne yaptın onu söyle bize.

Bora: İkizkenar üçgende iki kenar ve karşılıklı iki açı birbirine eşittir ve bunu ortadan kesen doğru parçası hem açıortay hem de kenarortaydır diyebiliriz.

Bora'ya yöneltilen BAD açısının neden $90°$ olduğu sorusuna öğrenci "BC kenarının tamamına *14* diyelim. Kenarortay olduğu için *7, 7* bölmüş [BC doğru parçasına 14 yazıyor, BD ve DC doğru parçalarına 7 yazıyor], misal veriyorum. Bunu tam olarak ortadan ikiye böldüğü için, eşit parçadan ve bunun bir üçgen çizdiğimizde dik inmesi gerek, biraz yamuk inse burası *6* ve *8* olabilirdi. O yüzden *90* diyorum" yanıtını vermiştir. Bora'nın genellemeyi doğrulama düzeyinin, dayanaksız sayısal değer vermekten ibaret olduğu gözlemlenmiştir.

Kayla "BAD ve DAC açılarının birbirlerine eşit olduğunu düşünüyorum çünkü bu üçgende kenarortay oluşturmuş ve bu açıların gördüğü kenarlar birbirlerine eşit olduğu için iki açının da birbirlerine eşit olduğunu düşünüyorum" şeklindeki ifadesi, farklı üçgenlerde eşit uzunluktaki kenarları gören açıların birbirine eşit olacağı yanlış kabulünü ortaya koymuştur. Kayla'nın genellemesi ise "Yani, ıı, AD doğru parçası bu ABC üçgeninin kenarortayı, ee, ve ıı, açıların gördüğü kenarlar da birbirlerine eşit olduğu için bu iki açı [BAD ve DAC açılarını göstererek] birbirlerine eşittir diyebiliriz. Başka olarak yani bu [ADB açısını göstererek] *90* derece olması ya öyle bir şey var mı, bunu tam olarak şey yapamıyorum" şeklinde gerçekleşmiştir. Farklı üçgenlerde iki kenar uzunluğunun eşit olması o kenarları gören açıların birbirine eşit olacağı yanlış kabulüne Arya'nın da sahip

olduğu kendisine yöneltilen ADB açısının kaç derece olduğu sorusuna verdiği "Şu an nasıl söyleyebilirim? Yani belki kaç derece olduğunu söyleyebileceğimi zannetmiyorum ama bunlar [ADB ve ADC açılarını gösteriyor] kenarların [AB ve AC yi göstererek] gördüğü açılar birbirine eşit olmaz mı" sorusu ile kendini göstermiştir. Arya bu yorumu yaptıktan sonra ADB açısının $90\,°$ olduğunu belirtmiştir. Arya genellemesini "ikizkenarlarda kenarortay, bir kenarı ortadan ikiye, kenarortay çıktığı açıyı da ortadan ikiye böler" ve "ikizkenar üçgenlerde eşit kenarların gördüğü açılar birbirine eşittir dedim, şu ikisine [ADB ve ADC açılarına işaret ederek]" şeklinde ifade etmiştir. Tuna problemde verilen eşit uzunluktaki kenarları tek ve çift çentikler ile doğru bir şekilde temsil ettikten sonra üçgenlerin açılarına değişkenler atamak istemiştir. AB ve AC kenar uzunluklarının birbirine eşit olmasını gerekçe sunarak ADB ve ADC açılarına x değişkenini atamıştır. Öğrencinin iki farklı üçgende eşit uzunluktaki kenarları gören açıların aynı ölçüde olduğu yanlış kabulüne sahip olduğu görülmüştür. Devamında Tuna B ve C açılarına da x değişkenini atamış ve bunu "İkinci olarak ise B ve C açılarına tekrar x değerini verebiliriz çünkü ikisi de ACD açımız AB kenarını görüyor ve ABC açımız ise AC kenarını görüyor, bunlara tekrardan x değerlerini verebilirim" şeklinde gerekçelendirmiştir. Öğrenciye aynı değişkeni kullanmasının sebebi sorulduğunda, öğrenci "çünkü bu açıların gördüğü kenar uzunlukları eşit" yanıtını vermiştir. Görüşmenin ilerleyen dakikalarında Tuna BAD ve DAC açılarının ölçülerinin de yine eşit uzunlukta kenarları görmelerinden ötürü eşit olacağını "BAD açımıza y ve DAC açımıza da y değerini vermeyi düşünüyorum çünkü gördük BAD açımız gördüğü BD kenarı ve DAC açımızın gördüğü de DC kenarı ve bunlar eşit" açıklaması ile izah etmiştir. Bu öğrencilerin yanlış genellemelerinin eş zamanlı olarak öğretim dizisinde başka öğrencilerde de olduğu gözlemler arasında yer almıştır.

Ata'nın kendi tabiri ile "eşit üçgen" olarak hitap ettiği ABD ve ADC üçgenleri hakkında "Hem buraları [AB ve AC kenarlarına işaret ediyor] eşit, hem buraları [BD ve DC kenarlarına işaret ediyor*] eşit, ikisi de aynı şeyin* [AD kenarının üzerinden kalem ile geçiyor ve doğru parçasını uzatıyor] üzerinde, doğru parçası üzerinde olduğu için, yani ikisi de çeşit, yani aynı üçgen" şeklinde yaptığı genelleme, öğrencinin bu üçgenleri eş olarak algıladığını göstermiştir. Ata'ya ifade ettiği yargının ne fayda sağlayacağı sorulmuş, öğrenci de "Bu açı ile bu açı [DBA ile ACD açılarına çentik koyuyor] eşittir, bununla bu [BAD ile DAC açılarına çentik koyuyor] eşittir, bununla da bu [ADB ve ADC açılarına çift açı sembolü koyuyor] eşittir o zaman" cevabını vermiştir. ADB ve ADC

açılarının eşit olması üzerine b şıkkında sorulan ADB açısının ölçüsünün 90° olduğunu ifade etmiştir. Ata'dan elde ettiği ilişkiyi genellemesi istenmiş ve Ata aşağıdaki genellemelerde bulunmuştur.

> Ata: Bir üçgenin iki kenarı eşit ise o iki üçgen eşkenardır çünkü iki kenarı eşit olacağı için burası [AD doğru parçasını gösteriyor] da eşit olacak.
>
> Araştırmacı: Eşkenar mı?
>
> Ata: İkizkenar, yok.
>
> Araştırmacı: İyice düşün.
>
> Ata: İki üçgenin, iki farklı üçgenin iki açısı eşit olursa üçüncü açısı da eşit olur.
>
> Araştırmacı: Peki başka ne gibi bir şey söylersin? Bu söylediğin doğru, katılıyorum sana. Genel ABC üçgenine baktığında, nasıl bir ilişki elde ettin sen?
>
> Ata: İki üçgenin dik olduğunu bulduk, çünkü bu bir santim daha büyük olsaydı birbirlerine eş olmazdı, eş olduğunu buradan [90 derecelik açılara işaret ederek] anladık. Sonra buraların birbirine eşit olduğunu söylüyor, buraların kenarortay olduğunu anladık, burasıyla bunun, bununla bunun eşit olduğu için.

Ata'nın takip ettiği sürecin anlamlı olduğu, fakat bu süreci matematiksel olarak genellemede yetersiz olduğu gözlemlenmiştir.

3.4. İkinci Etap Öğretim Dizisine İlişkin Bulgular

Bu bölümde son klinik görüşmelere kadar devam eden ve üç hafta süren öğretim dizisinden elde edilen bulgulara yer verilmiştir. İkinci etap öğretim dizisinde benzerlik teoremleri, temel orantı teoremi ve Thales teoremleri, üçgenin yardımcı elemanları, kenarlarına göre üçgenlerde yardımcı elemanlar, Öklid bağıntısı ve üçgende alan konularına yer verilmiştir. Öğretim dizisinden elde edilen bulgular geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ve cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi başlıkları altında haftalık olarak sunulmuştur.

3.4.1. Birinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftasında benzerlik teoremleri, temel orantı teoremi ve Thales teoremleri ile ilgili uygulamalara yer verilmiştir. Haftanın ilerleyen derslerinde üçgenin yardımcı elemanlarından iç ve dış açıortay, iç ve dış açıortay teoremleri ile kenarortay ve ağırlık merkezi öğrencilere tanıtılmıştır.

3.4.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin matematiksel ifade ve eylemleri geometrik ön bilgiler, geometrik bilginin uygulanması ve geometrik düşünme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.24.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.24. *İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Terminoloji kullanımı **Bora** – "özel üçgen" terimini kullanması, anlamını bilmemesi. Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili tanıma Ayçin - $m(\hat{C})$ temsilini C üçgeni, $m(\widehat{ABD})$ temsilini ABD üçgeni şeklinde okuması. Geometrik ön bilgiler **Tuna** - Bir noktanın doğruya uzaklığının dikme çizerek bulunacağını bilmesi. Prototip fenomeni **Kayla** – (71. problem), **Bora** – (74. problem), Melike (77. problem) duyular ile hareket etmeleri. **Bora** - Melike ve birkaç öğrencinin ABC üçgenini ikizkenar kabul ettiklerini tespit etmesi. **Bora** - ANC açısını 90 ° kabul edişi ve Utku'nun **Bora'ya** karşı çıkışı. **Bora** – (80. problem) $3-5$ uzunluğundaki doğru parçalarının $3-4-5$ üçlüsünü hatırlatması ve açıortayı ait olduğu kenara dik olacağını düşünmesi, Utku, **Tuna** ve **Ata'nın** bu algıdan uzaklaşmaları. Ece – (87. problem) $3-4-5$ dik üçgenini hatırlatan kenar uzunluklarından herhangi ikisini görüp üçgene dik üçgen muamelesi yapması.	Çizimdeki bir unsuru tanıma Öğrenciler – (74. problem) İç içe çizilmiş, bir açının ortak olduğu ve birer kenarları paralel olan üçgenlerde orantılı parçalı kenarları hangi oranda parçalandığını tespitte zorlanmaları. **Bora** – (Görsel-3.13.) tanım ile görsel arasındaki farkı tespit etmesi. **Tuna** – (85. problem) İç içe çizilmiş üçgenlerde ağırlık merkezini tespit edememesi. Geometrik bilgiyi devreye sokma **Tuna** – (85. problem) doğru terminoloji kullanımı, (66. problem) Thales teoremini doğru kullanması. Utku - Temel orantı teoremi ile Thales teoremi arasındaki farkı açıklaması. Utku – (70. problem) Dikdörtgen ile ilgili temel kazanımları problemin çözümü için devreye sokması **Tuna** - (74. problem) Benzerlik ilişkisini doğru kurma, Buse, **Bora** ve Bahar'ın benzerlik ilişkisini temellendirmeleri, Utku, Meltem ve **Tuna'nın** yöndeş açıları doğru tespit edişleri. Utku - (77. problem) iç açıortaya ilişkin özellikleri uygulaması. **Tuna**, **Kayla** – (84. Problem) iç açıortay teoremini uygulamaları. Öğrenciler – (86. problem) K noktasının ağırlık merkezi olacağı çıkarsamasında bulunamamaları. Meltem - ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğu bilgisini devreye sokması (özelliği tersine çalıştırması)	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler Öğrenciler – CG-II yazılımında açıortay aracı ile açının dinamik tanımı arasındaki ilişkiyi kuramamaları, sayısal veriye bağımlılığın devam edişi. **Tuna**, **Ata**, **Bora** - (Görsel 3.14.) farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördüğü kenar uzunluklarının eşit olacağı yanılgısının devam etmesi. Meltem - ABD ve ADC açılarının bulundukları bölgeleri göstererek açıortayın açıyı ikiye böldüğü için gösterdiği alanları da ikiye böldüğünü ifade etmesi, Utku - üçgenler için ortak kenarı tespit ederek D noktasından eş olduğunu ve yansımanın mevcut olduğunu belirtmesi. Serhat'ın Meltem'i "Açıklığın aynı olması" ifadesi ile desteklemesi, tartışma sonunda Utku'nun düşüncesinin iki üçgende eşliğe evrilmesi. **Tuna** - Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktadan açı kollarına indirilen dikmelerin açı kollarını kestiği noktaların, açının köşesine olan uzaklıkları eşittir" özelliğini elde etmesi. **Kayla** – (78. problem) İç açıortaya ait özellikleri tersine çalıştırma girişimi, **Bora** **Kayla'ya** karşı çıkışı, **Arya**'nın destek oluşu.

Tablo 3.24. (Devam) *İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Bora, **Ata** – (Görsel 3.12.) - üçgenin eşkenar, Utku ikizkenar üçgen olduğunu ifade etmeleri. **Kayla** - **Bora**, **Ata** ve Utku'yu düzeltmeleri.	Üçgende kenarortayın aynı zamanda yükseklik olmasından dolayı **Ata'nın** üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu çıkarsaması. **Arya** – (87. problem) ağırlık merkezi özelliğini taşıyan noktayı doğru tespit etmesi. **Tuna** – "doğrusal olma"yı sorgulaması.	**Tuna** - Farklı üçgenlerde eşit uzunlukta kenarların gördüğü açıların eşit olacağı yanlış ilişkisini tekrar kuruşu. Meltem - iç açıortaya ilişkin özelliği tersine çalıştırabilecek ilişkiyi kurması.

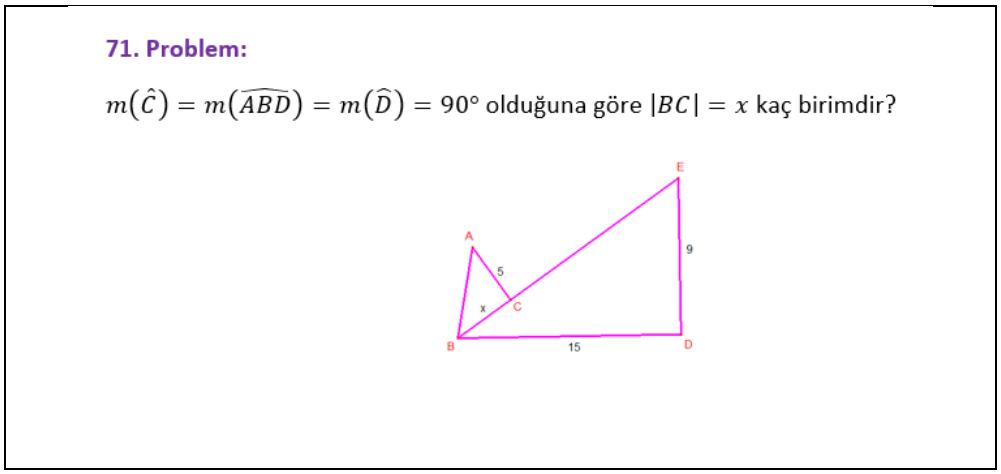
Geometrik Bilgi

- Terminoloji kullanımı: Öğrencilerin terminoloji kullanıp terminolojinin kavramsal içeriğinin ne olduğu ile ilgili bir kavrayışlarının olmadığı durumuna bir örnek ikinci öğretim dizisinin ilk haftasında gözlemlenmiştir. 71. problemde (Şekil 3.63.) odak öğrenci Bora "özel üçgen var mı" sorusu ile düşüncesini ifade etmiş ve kendisine yöneltilen özel üçgenin ne olduğunu sorusuna "bilmiyorum" cevabını vermiştir. Aynı problemde odak öğrenci Ata geometrik nesneler için işaret zamirleri kullanmış ve ifade etmek istediği kavramlar için terminoloji kullanamamıştır.

- Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili tanıma: Bazı öğrencilerin geometrik nesnelerin sembolik temsillerini hala tanımadıkları da yine gözlemler arasında yerini almıştır. 71. problemde (Şekil 3.63.) Ayçin $m(\hat{C})$ temsilini C üçgeni, $m(\widehat{ABD})$ temsilini ABD üçgeni şeklinde okumuştur.

- Geometrik ön bilgiler: Bir noktanın bir doğruya olan uzaklığı ne olduğu ve nasıl bulunabileceği sorusuna odak öğrenci Bora "*i*ki nokta arasındaki metre ya da santim ölçüsü" olarak cevap verirken odak öğrenci Tuna "dikme indirerek buluruz" doğru cevabını vermiştir.

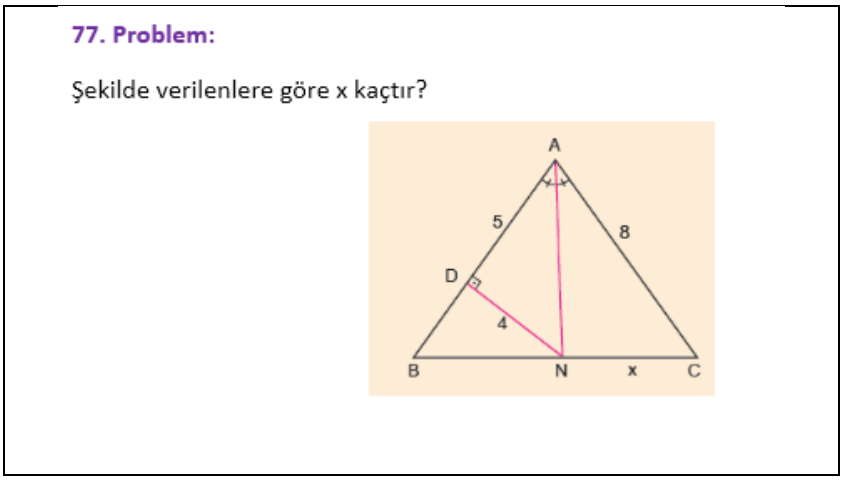
- Prototip fenomeni: CG-II yazılımı ile çizilmiş olan Şekil 3.63.'deki 71. problemin metninde ABD açısının dik olduğunun belirtilmesi, odak öğrenci Kayla'nın prototip algısını ortaya çıkarmıştır. Kayla B nin nasıl dik olabileceğini sormuş, Utku Kayla'nın düşüncesine "görüntüye aldanmayacaksın" yorumunu getirmiştir.



Şekil 3.63. *Öğretim dizisinin 71. problemi*

74. problemde (Şekil 3.68.) öğrencilerin benzerlik araştırmaları için yöndeş açı arayışları sırasında odak öğrenci Bora D, E ve F noktalarını doğrusal kabul etmiş ve "EFC ile DEA" açılarının ters açılar olduğunu belirtmiştir. Bu noktaların doğrusal olması ile ilgili verinin olmayışı öğrencinin duyuları ile hareket ettiğini göstermiştir.

İç açıortayın özelliklerinin kullanımını gerektiren Şekil 3.64.'de verilen 77. problemi tahtada Melike çözmüştür.

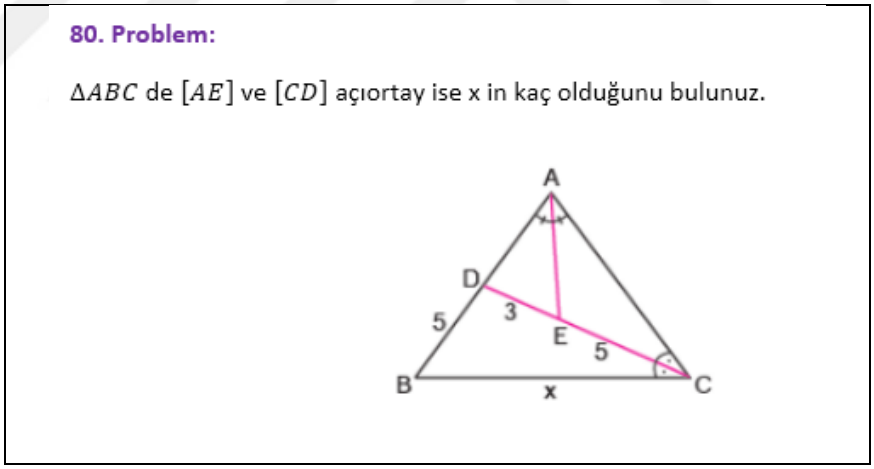


Şekil 3.64. *Öğretim dizisinin 77. problemi*

Melike "burada eşlik var. Burası [AC kenarına işaret ederek] 8 olduğundan burası da [AB kenarına işaret ederek] $8, 3$ kaldı [DB doğru parçasına işaret ederek]" yorumunda bulunmuştur. Öğrenci iç açıortayın özelliklerini kullanmaya çalışmış, ancak özellikleri tam olarak kavrayamadığı ve duyuları ile hareket ettiği anlaşılmıştır. ABC üçgenini ikizkenar ve AN açıortayını da kenarortay kabul etmiş, "$3 - 4 - 5$ üçgeninden x de 5

olur" yorumunda bulunmuştur. Melike'nin düşüncesinde neyin yanlış olduğu sorusuna odak öğrenci Bora "ikizkenar kabul etti" şeklinde doğru cevaplamıştır. Sınıfta birkaç öğrenci de Melike gibi düşündüklerini ifade etmişlerdir. Melike'nin hatalı olduğunu bulan Bora, sonrasında Melike ile benzer bir prototip algı ile "AN $\sqrt{41}$ dir; bununla Pisagor yapınca $\sqrt{23}$ buluruz" yorumunda bulunmuştur. Bora'nın AN doğru parçasını $\sqrt{41}$ olarak bulması doğru iken, ANC açısını $90°$ olarak kabul edişi prototip algısını ortaya çıkarmıştır. Utku Bora'ya "onun *90* olduğu bilmiyoruz" yorumu ile Bora'ya karşı çıkmıştır.

Üçgende iç açıortay doğrusunun ait olduğu kenarı açının kolları ile orantılı parçalara ayırması özelliğinin kullanılarak çözüme ulaşılacağı, Şekil 3.65.'de verilen 80. problemde bazı doğru parçalarının uzunluklarının $3-5$ gibi $3-4-5$ Pisagor üçlüsünü hatırlatması ve odak öğrenci Bora'nın açıortay doğrusunun ait olduğu kenara aynı zamanda dik olacağı prototip algısını ortaya sürmesine sebep olmuştur. Ancak bazı öğrenciler Bora'ya karşı çıkmışlardır.



Şekil 3.65. *Öğretim dizisinin 80. problemi*

Odak öğrenci Bora: E noktasını uzattım (AE açıortay doğrusunu BC kenarını kesecek biçimde uzattığını söylemek istiyor). Sonra Pisagor'dan $3-4-5$ oldu.

Odak öğrenci Tuna: Pisagor yok.

Odak öğrenci Ata: Pisagor yok ki $90°$ lik açı yok.

Odak öğrenci Bora: Ama açıortay…

Utku: Ya açıortay şey yapmayabilir, dik.

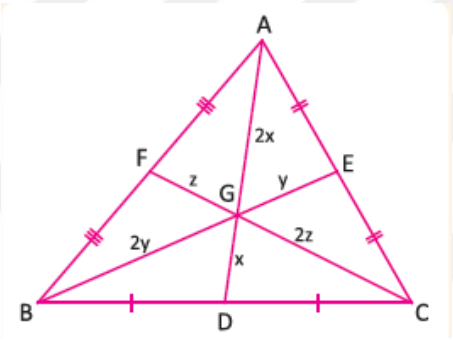
Odak öğrenci Tuna: Dikme değil.

Utku: AD ye $3k$ diyebiliriz.

Öğrenciler arasında gerçekleşen tartışmada Utku, odak öğrenciler Tuna ve Ata'nın açıortayın aynı zamanda yükseklik olacağı prototip algısından uzaklaştığı görülmüştür. Ayrıca Utku açıortayın ait olduğu kenarı açının kolları ile orantılı doğru parçalarına ayırdığı geometrik bilgisini devreye sokmuştur.

Pisagor üçlülerinden biri olan $3-4-5$ dik üçgenini hatırlatan kenar uzunluklarından herhangi ikisini çizimde gören öğrencilerin bu üçgene dik üçgen muamelesi yapmalarına bir örnek de 87. problemde (Şekil 3.71.) görülmüştür. Ağırlık merkezinin kenar ve köşelere olan uzaklıkları bilgisini kullanarak $|GD| = 3$ ve $|GC| = 4$ elde edilince Ece "$3-4-5$ üçgeni" yorumunda bulunmuştur.

Öğrencilere üçgenin yardımcı elemanlarından kenarortayın tanıtılması için Görsel 3.12.'de sunulan çizim kullanılmıştır.



Görsel 3.12. *Kenarortayın öğrencilere tanıtılması için kullanılan çizim*

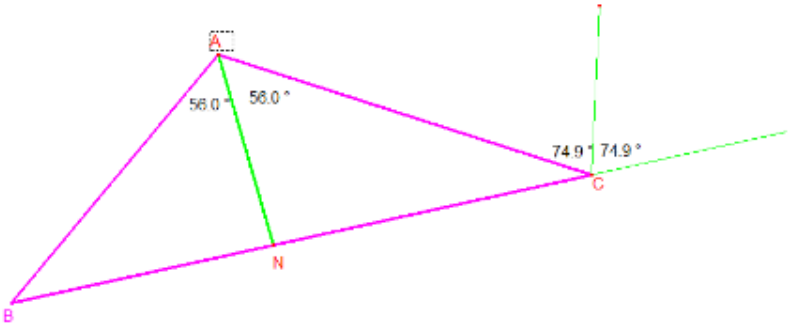
Odak öğrenci Bora ve odak öğrenci Ata üçgenin eşkenar üçgen olduğunu, Utku ise ikizkenar üçgen olduğunu ifade etmişlerdir. Odak öğrenci Kayla ise, Bora, Ata ve Utku'yu düzeltmiş ve "hiçbir kenarı birbirine eşit değil" şeklinde doğru yorumda bulunmuştur.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Çizimdeki bir unsuru tanıma: İç içe çizilmiş, bir açının ortak olduğu ve birer kenarları paralel olan üçgenlerde orantılı parçalı kenarların hangi oranda parçalandığının tespitinde bazı öğrencilerin zorlandıkları gözlemlenmiştir. 74. problemde (Şekil 3.68.) bazı öğrencilerin ADE ve ABC üçgenleri arasındaki benzerliğin CEF ve CAK üçgenlerinde de geçerli olduğunu düşündükleri gözlemlenmiştir. Odak öğrenci Bora "$4-12$ ilişkisi olduğu için x in 5 olması gerekiyor" yorumunda bulunmuştur. Bahar ile odak öğrenci Arya da Bora'yı desteklemiştir. ADE ile ABC üçgenleri arasındaki benzerlik

oranının 3 olduğu öğrenciler tarafından tespit edilmesinin üzerine, öğrencilere AE doğru parçasının k birim olduğu kabul edilirse EC doğru parçasının kaç birim olacağı sorusu yöneltilmiştir. Bahar "$3k$" cevabını verirken, odak öğrenci Arya "$2k$ dememiz lazım çünkü AC, ABC üçgenine ait" açıklaması ile çizimdeki kenar uzunluklarını doğru bir şekilde ifade etmiştir. Utku "Bu sefer $2k$ küçük üçgene geçmiş, 2k bölü 3k olur o da *2* bölü *3* den, onu da *15* ile çarpacağız, *3* e böleceğiz *10* çıkar" doğru yorumunda bulunmuştur.

Üçgenin yardımcı elemanlarından iç ve dış açıortayların tanıtılması esnasında öğrencilere sunulmuş olan Görsel 3.13.'deki CG-II çiziminde, odak öğrenci Bora iç ve dış açıortay tanımına işaret ederek "tanımda ışın diyor ya, o zaman bu devam ediyor mu" sorusunu yöneltmiştir. Öğrenci çizimdeki iç ve dış açıortayların doğru parça olarak çizildiğini fark etmiştir.

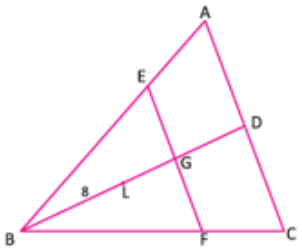


Görsel 3.13. *İç ve dış açıortayların tanıtımı için kullanılan CG-II çizimi*

Bir üçgende ağırlık merkezinin kenarortay doğrusunu kenara bir birim köşeye iki birim uzaklıkta olduğu bilgisinin kullanımını gerektiren Şekil 3.66.'daki 85. problemde odak öğrenci Tuna ağırlık merkezinin kenarortay doğrusunu hangi oranda ayırdığını doğru terminoloji ile açıklamıştır. Fakat Tuna'nın "BL *8* ise ikiye böleriz GD *4* tür" şeklindeki yorumu, üçgenlerdeki ağırlık merkezleri ile bu merkezlerin kenar ve köşelere olan uzaklıkları doğru bir şekilde tespit edemediğini göstermiştir. Odak öğrenci Arya Tuna'ya karşı çıkmış ve "LD *4* tür" yorumunda bulunmuştur. Arya'nın da ağırlık merkezi-köşe veya ağırlık merkezi-kenar mesafelerini doğru belirleyemediği görülmüştür.

85. Problem:

G noktası ABC üçgeninin, L noktası ise BEF üçgeninin ağırlık merkezidir. $|BL| = 8$ cm ise $|BD|$ kaç cm'dir?

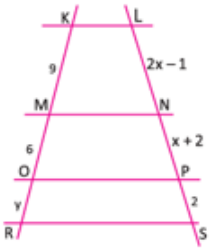


Şekil 3.66. *Öğretim dizisinin 85. problemi*

- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Thales teoreminin kullanımı gerektiren Şekil 3.67.'deki 66. problemi odak öğrenci Tuna tahtada çözmüştür.

66. Problem:

$[KL]//[MN]//[OP]//[RS]$ olmak üzere $|KM| = 9$ cm, $|MO| = 6$ cm, $|LN| = 2x - 1$ cm, $|NP| = x + 2$ cm, $|PS| = 2$ cm, $|OR| = y$ cm olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.

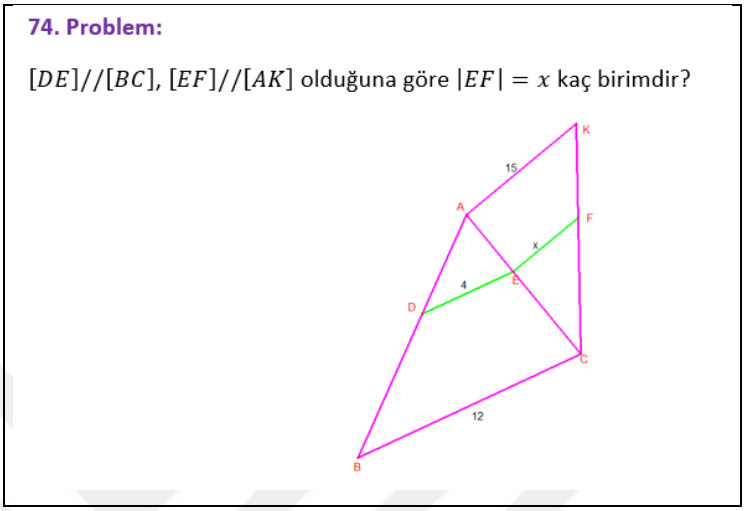


Şekil 3.67. *Öğretim dizisinin 66. problemi*

Tuna bu problemde Thales teoremini doğru bir şekilde uygulamıştır. Temel orantı teoremi ile Thales teoremi arasındaki farkın ne olduğu sorusuna Utku, "Thales'de üçgen olmak zorunda değil" cevabını vermiştir.

Dikdörtgen ile ilgili temel kazanımlar gerektiren 70. problemde (Şekil 3.77.) Utku dikdörtgen ile ilgili sahip olduğu ön bilgisini "Buralar [D, E, F, G açılarını kastederek] da diktir çünkü dikdörtgen" yorumu ile devreye sokmuştur. Öğrenci şekilde verilen açılara değişkenler atamış ve yine dikdörtgene ait temel özellikleri kullanarak "EF ye de x diyebiliriz çünkü dikdörtgen" yorumunda bulunmuştur.

İkinci etap öğretim dizisinin ilk haftasında, öğrencilerin verilen paralel doğru parçaları ile üçgenler arasındaki benzerlikleri ve benzerlik oranlarını tespit etmeye başladıkları Şekil 3.68.'de verilen 74. problemde gözlemlenmiştir.



Şekil 3.68. *Öğretim dizisinin 74. problemi*

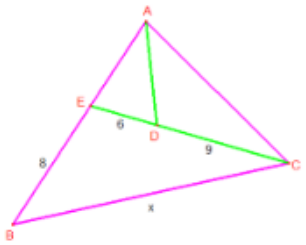
Bu problemde odak öğrenci Tuna "ABC ile ADE benzerdir" yorumunda bulunmuş ve Bahar ile Buse Tuna'yı desteklemiştir. Paralelliği Buse "Paralellik var, birbirinin 3 katı" şeklinde açıklarken, odak öğrenci Bora "Açı açı benzerliği" olduğunu ifade etmiş ve bunun üzerine diğer öğrenciler ortak açıların araştırmasına girişmiştir. Utku "A açısı ABC ve ADE nin açısı", Meltem "Yöndeş açılar var ADE ile ABC" ve odak öğrenci Tuna "AED ile ACB" doğru yorumlarında bulunmuşlardır.

77. problemde (Şekil 3.64.) öğrencilerin açıortay doğrusunun üçgeni eş üçgenlere ayırdığı prototip algısının neden hatalı olduğunun tartışılmasını müteakip Utku iç açıortaya ilişkin özellikleri başarılı bir şekilde uygulayarak N noktasından AC doğru parçasına dikme indirmiş ve sorunun çözümüne ulaşmıştır.

Birkaç açıortayın birarada verildiği Şekil 3.69.'daki 84. problemde öğrenciler iç açıortay teoremini doğru bir şekilde uygulayabilmişlerdir. Odak öğrenci Tuna "AE $6k$, AC $9k$ ile orantılı değil midir" sorusunu yöneltmiştir. Öğrencinin ifade edişi yanlış olmuş, ancak söylemek istediğini diğer öğrenciler anlamıştır. Tuna'nın yorumu üzerine odak öğrenci Kayla "AE $2k$, AC ye $3k$ dedim" yorumunda bulunmuştur. Kayla'nın ifadesi hem doğru hem de AE ve AC doğru parçalarına atanacak en sade halde olduğu görülmüş ve Utku tarafından "olur, olur, sadeleştirmiş" yorumu ile onaylanmıştır.

84. Problem:

$[AD]$ ve $[CE]$ açıortaylar olmak üzere şekilde verilenlere göre x kaç birimdir?

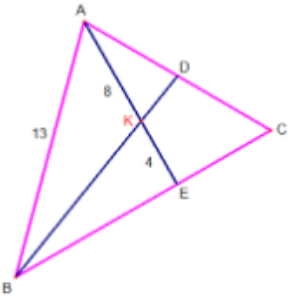


Şekil 3.69. *Öğretim dizisinin 84. problemi*

Ağırlık merkezinin problem metninde belirtilmediği Şekil 3.70.'de verilen 86. problemde bazı öğrenciler K noktasının ağırlık merkezi olacağı çıkarsamasında bulunamamışlardır.

86. Problem:

ABC üçgeninde $[AE] \perp [BC]$ ise ABC üçgeninin çevresini bulunuz.

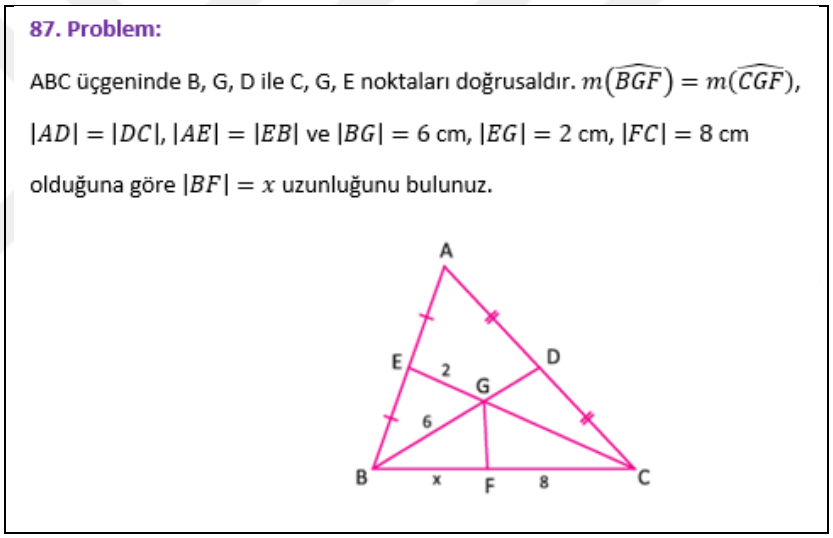


Şekil 3.70. *Öğretim dizisinin 86. problemi*

K noktasının neden ağırlık merkezi olduğunun açıklanmasından sonra öğrenciler Pisagor teoremini kullanarak $|BE|$ doğru parçasının uzunluğunun 5 birim olduğunu bulmuşlardır. EC doğru parçasının uzunluğu sorulunca Meltem, ağırlık merkezinin kenarortayların kesim noktası olduğu bilgisini devreye sokarak "ağırlık merkezinin olması için de kenarortay olması gerekiyor o yüzden EC de 5 dir" yorumunda bulunmuş ve özelliği tersine çalıştırabilmiştir. AC doğru parçasının uzunluğunun da 13 birim olması üzerine bu üçgenin ne çeşit bir üçgen olduğu öğrencilere sorulmuş ve odak öğrenci Ata "ABC ikizkenar üçgendir" doğru cevabını vermiştir. Bu problem, kenarortayın aynı

zamanda yükseklik olduğu bir üçgenin ikizkenar üçgen olduğunu göstermek açısından güzel bir uygulama olmuştur.

G noktasının ağırlık merkezi olduğunun öğrenciler tarafından keşfedilmesini gerektiren Şekil 3.71.'de verilen 87. problemde odak öğrenci Arya G noktasının ağırlık merkezi olduğunu tespit edebilmiştir. G noktasının neden ağırlık merkezi olduğu sorusuna odak öğrenci Arya "kenarortaylar var, kenarortayların kesiştiği yer G merkezi" doğru cevabını vermiştir. Problemin çözümünün ardından odak öğrenci Tuna, problem metnindeki noktalar ile ilgili olarak "doğrusal olması bize bir şey kazandırdı mı bu soruda" sorusunu yöneltmiştir. Tuna'nın bu sorusu, öğrencilerin artık terimlerin anlamları üzerine düşündüğünü ve geometrik kavramların oluşumunda ne gibi faktörlerin rol oynadığını araştırmaya başladıklarını göstermiştir.



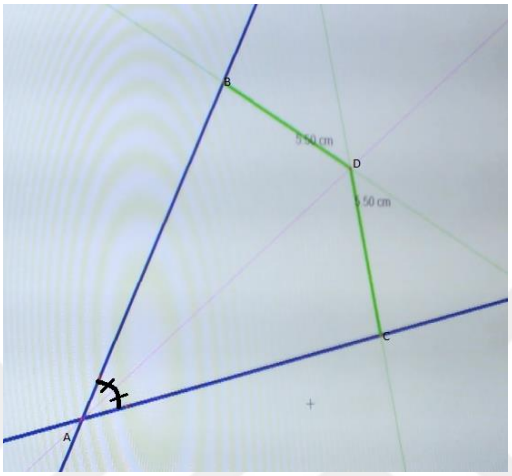
Şekil 3.71. *Öğretim dizisinin 87. problemi*

Geometrik Düşünme

- İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler: Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktanın açı kollarına eşit uzaklıkta olması ve bu noktadan açı kollarına indirilen dikmelerin açı kollarını kestiği noktaların açının köşesine eşit uzaklıkta olması özellikleri öğrenciler ile beraber CG-II yazılımında keşfedilmiştir. Açıortayın nasıl çizileceği sorusuna odak öğrenci Kayla "açıyı [açının ölçüsünü kastederek] bilmeliyiz ki iki eşit parçaya ayıralım" yorumunda bulunmuş ve odak öğrenci Tuna da Kayla'yı desteklemiştir. Öğrencilerin sayısal veriye bağımlılığı gözlemlenmiştir. Birinci etap öğretim dizisinin dördüncü haftasında da gözlemlenmiş olan bu durumun, yani açıortay

doğrusunu herhangi bir doğruyu çizip açıları eşitlemek suretiyle sürükleyerek bulabilecekleri düşüncesinin devam ettiği görülmüştür.

Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktanın açı kollarına eşit uzaklıkta olması özelliğinin keşfi için sınıfta CG-II yazılımı Görsel 3.14.'de verilen çizim ile gerçekleştirilmiştir.



Görsel 3.14. *Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktanın açı kollarına eşit uzaklıkta olması özelliğinin keşfi için CG-II yazılımında gerçekleştirilen çizim*

Çizimi takiben sınıf içinde aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir.

Araştırmacı: Yeşil ile temsil edilen doğru parçalarının ölçüleri neden eşittir?

Odak öğrenci Tuna: Açıortayımız açımızı ikiye böldü. Bizim açımızda çizgiler var. O yüzden uzunlukların aynı olduğunu söylüyor bize.

Odak öğrenci Kayla: Bir ikizkenar oluştuğu için olabilir mi?

Utku: Ama o bir üçgen değil ki iki üçgenin birleşiminden oluşuyor.

Odak öğrenci Kayla: Bir açısı 90, diğer iki açısı da birbirine eşit.

Odak öğrenci Bora: Açıortay açıyı ikiye bölüyor ve bu iki açının karşısındaki kenar birbirine eşit oluyor.

Meltem: (tahtada elleriyle ABD ve ADC açılarının bulundukları bölgeleri göstererek) açıortay açıyı ikiye böldüğü için buradaki alanları da otomatik ikiye böler.

Utku: İki tane doğru (AD doğru parçasının ABD ve ADC üçgenleri için ortak kenardır demek istiyor) eş bir yerde birleşmiş, A noktasında ve bu açıyı ikiye bölüyor.

Odak öğrenci Ata: Açıortay açıyı ortadan ikiye böldüğü için açıların gördüğü kenarlar eşit oluyor.

Utku: D noktasından eş, yansıma olarak düşünebiliriz.

Serhat: Açıklığın aynı olmasından.

Utku: İkisinde de dikme var, ikisinin de gördüğü AD.

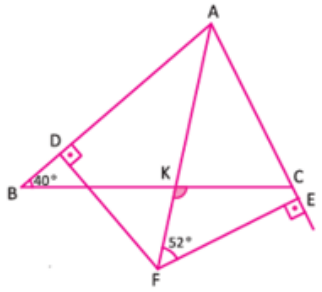
Odak öğrenci Tuna'nın "açıortayımız açımızı ikiye böldü. Bizim açımızda çizgiler var. O yüzden uzunlukların aynı olduğunu söylüyor bize", odak öğrenci Ata'nın "açıortay açıyı ortadan ikiye böldüğü için açıların gördüğü kenarlar eşit oluyor" ve odak öğrenci Bora'nın "açıortay açıyı ikiye bölüyor ve bu iki açının karşısındaki kenar birbirine eşit oluyor" şeklindeki yorumları, farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördükleri kenar uzunluklarının eşit olacağı yanılgısının devam ettiğini ortaya koymuştur. Odak öğrenci Kayla açı-açı benzerliğini ifade etmek için kullandığı "ikizkenar" terimi ile kastetmek istediğinin "bir açısı 90, diğer iki açısı da birbirine eşit" olduğu anlaşılmıştır. Meltem'in tahtada ABD ve ADC açılarının bulundukları bölgeleri göstererek açıortayın açıyı ikiye böldüğü için gösterdiği alanları da ikiye böldüğünü ifade etmesinin üzerine Utku üçgenler için ortak kenarı tespit etmiş, D noktasından eş olduğunu ve yansımanın mevcut olduğunu belirtmiştir. Serhat Meltem'in görüşünü desteklemek adına "Açıklığın aynı olmasından" yorumunu getirmiştir. Tartışmayla beraber Utku'nun düşüncesinin iki üçgende eşliğe evrildiği görülmüştür.

Öğrenciler arasında gerçekleşen tartışmayı takiben ABD ve ADC üçgenlerinin eş olduğu gösterilmiş ve başka hangi sonuca ulaşabileceği öğrencilere sorulmuştur. Odak öğrenci Tuna "AB ile AC nin eşit uzunlukta olduğuna" cevabını vererek "B*ir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktadan açı kollarına indirilen dikmelerin açı kollarını kestiği noktaların, açının köşesine olan uzaklıkları eşittir*" özelliğini elde etmiştir.

İç açıortaya ait özellikleri tersine çalıştırmayı gerektiren Şekil 3.72.'de verilen 78. problemde odak öğrenci Kayla'nın herhangi bir doğru üzerinde alınan noktadan açının kollarına eşit uzunlukta oluşu o doğrunun açıortay olabileceğini hissettiği "FD eşit FE demiş o zaman DFK da 52 olabilir mi" sorusundan anlaşılmıştır. Odak öğrenci Bora Kayla'nın düşüncesine "ama açıortay dememiş ki" yorumu ile karşı çıkmış, fakat odak öğrenci Arya "ama uzunluklar eşit" yorumu ile Kayla'ya destek vermiştir. Tuna'nın "bir hata var. Soruda bize FD ve FE açılarının aynı olduğunu söylüyor. Açı değil kenar uzunluğu. O zaman DFK 52 olmaz ki çünkü bize onunla ilgili bilgi vermiyor. DAF ile FKC nin aynı olduğunu söylüyor. DFK ise FD kenarını görmüyor" yorumu farklı üçgenlerde eşit uzunlukta kenarların gördüğü açıların eşit olacağı şeklindeki yanlış ilişkiyi ortaya koymuştur. Meltem, "Açıortay ise [AF doğru parçasını kastederek] kenarlar [FD ve FE doğru parçalarını kastederek] eşit oluyordu. O yüzden DFK *52* dir" yorumu ile iç açıortaya ilişkin özelliği tersine çalıştırabilecek ilişkiyi kurmuştur.

78. Problem:

Verilen şekilde $|FD| = |FE|$, $m(\widehat{ABC}) = 40°$, $m(\widehat{AFE}) = 52°$ olduğuna göre $m(\widehat{FKC})$ yi bulunuz.



Şekil 3.72. *Öğretim dizisinin 78. problemi*

3.4.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri Tablo 3.25.'de sunulmuştur.

Tablo 3.25. *İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

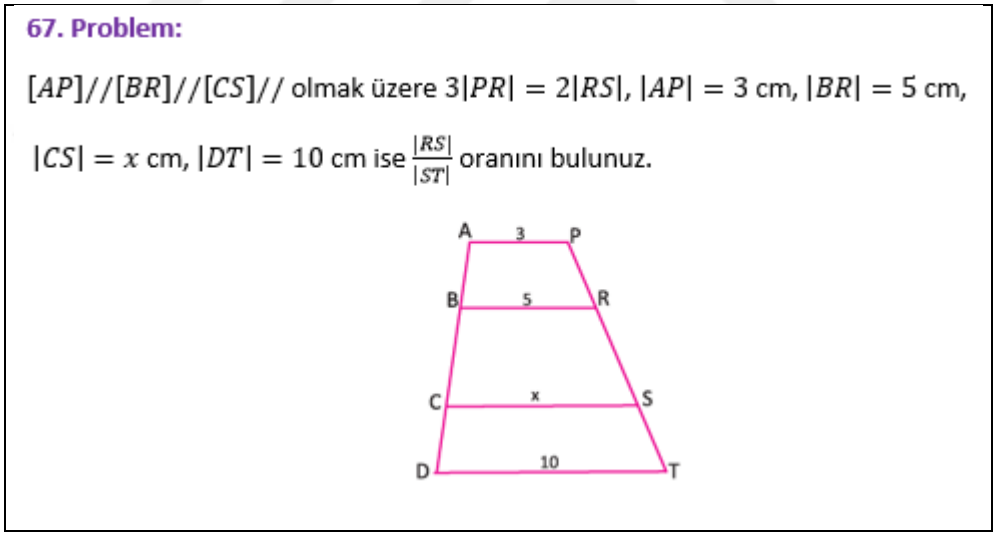
CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Cebirsel ön bilgiler **Bora** – (67. problem) orantı ilişkisini doğru yorumlaması. Utku – (70. problem) Orantıda sadeleştirme hatası.	Cebirsel işlem becerileri (65. problem) **Ata'nın** içler-dışlar çarpımındaki içlerin yer değiştirebileceği ve dolayısıyla paralel doğruların kenarda ayırdığı parçaların birbirine oranı ile **Bora'nın** ifade ettiği karşılıklı doğru parçalarının oranının aynı olduğu anlayışını geliştirememiş olması. Utku – oran-orantıyla esnek çalışması, Bahar'ın çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini sembolik temsiller içeren ifadelerde kullanamaması. **Tuna** - (72. problem) benzerlik ilişkisini doğru kurması ve $\frac{x}{6} = \frac{10}{7+x}$ orantısında içlerin çarpımını da başarılı bir şekilde gerçekleştirmesi. **Kayla** – (84. problem) $\frac{6k}{8} = \frac{9k}{x}$ orantısını yazarak değişkenleri doğru bir şekilde sadeleştirmesi. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Kayla** - (69. problem) iki üçgen arasındaki benzerlik oranını tespit etmesi, **Tuna'nın** değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği geometrik bilgisini devreye sokmasına engel oluşu. Melike – (76. problem) değişkenin sayısal değerine ulaşmadan açıortaya ait geometrik özelliği kullanarak sonuca ulaşması. Sembolik temsilleri kullanma Utku – (70. problem) Sembolik temsilleri kullanarak benzerlik bağıntısını kurması. **Ata** - (71. problem) Benzerlik ilişkisini dik açıların varlığı ve kenarlar arasındaki kat ilişkisinin mevcut olması ile sağlandığını düşünmesi.

Tablo 3.25. (Devam) *İkinci etap öğretim dizisinin birinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
	Sembolik temsilleri kullanma Ece - **Ata'dan** farklı olarak bazı açıların eş ölçülü olduğunu ifade etmesi ancak bu açıları belirleyememesi. **Ata'nın** tümler açılar DBE ve ABC açılarına yanlış değişken ataması. **Tuna** – (72. problem) sembolik temsilleri doğru atayarak problemi çözmesi. Değişkenin doğasını anlama **Kayla** - Kenarortayın tanıtılması için kullanılan Görsel 3.12.'de verilen çizimde kenar uzunluklarının eşit olduğunu düşünmesi. **Tuna**, **Bora**, **Kayla** - orantı ilişkilerini doğru bir şekilde yorumlamaya başlamaları, birden fazla orantı için farklı bir değişken kullanmaları.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Orantı ilişkisinin yorumlanması suretiyle çözümün gerçekleştirileceği Şekil 3.73.'de verilen 67. problemi odak öğrenci Bora tahtada çözmüştür.



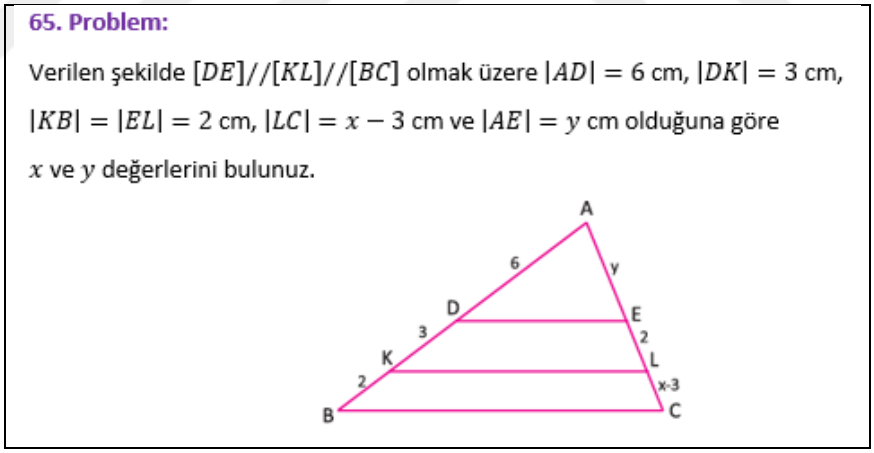
Şekil 3.73. *Öğretim dizisinin 67. problemi*

Bora orantı ilişkisini doğru bir şekilde yorumlayarak PR ve RS doğru parçalarına uygun değişkenleri atayarak çözüme başlamıştır. Odak öğrenci Tuna Bora'ya müdahale etmiş, fakat arkadaşlarının karşı çıkması ile kendisinin hatalı olduğunu fark etmiştir.

Orantıda sadeleştirme hatasının gözlemlendiği 70. problemde (Şekil 3.77.) Utku içler arasında yani $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$ orantısında 4 ile 16 arasında sadeleştirme yapmıştır. Öğrencilere bir orantıda nasıl sadeleştirme yapmaları gerektiği tekrar anlatılmıştır.

Sembolik Manipülasyon

- Cebirsel işlem becerileri: Temel orantı teoreminin kullanımını gerektiren Şekil 3.74.'deki 65. problemde odak öğrenci Bora karşılıklı doğru parçalarını oranlanması gerektiğini ifade etmiştir. Bahar tahtada $\frac{6}{y} = \frac{3}{2}$ orantısını yazmış ve odak öğrenci Ata itiraz ederek "hayır, $\frac{6}{3} = \frac{y}{2}$ diyecek" şeklinde görüşünü bildirmiştir. Ata'nın içler-dışlar çarpımındaki içlerin yer değiştirebileceği ve dolayısıyla paralel doğruların kenarda ayırdığı parçaların birbirine oranı ile odak öğrenci Bora'nın ifade ettiği karşılıklı doğru parçalarının oranının aynı olduğu anlayışını geliştiremediği gözlemlenmiştir. Bahar yazdığı orantıdan y değişkenin değerinin 4 olduğunu ve bunu "aklımdan içler dışlar çarpımı yaptım" şeklinde açıklarken Utku "yarım katı [soldaki oranı kastederek], yarım katı o da *4* oluyor" yorumunda bulunmuştur. Bahar'ın x değişkenin sayısal değerine ulaşmak için kurduğu $\frac{3}{2} = \frac{2}{x-3}$ orantısında ise içler dışlar çarpımında 3 ile $x - 3$ ün çarpımını $3x - 3$ yazması da, öğrencinin çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini sembolik temsiller içeren ifadelerde kullanamadığını göstermiştir.



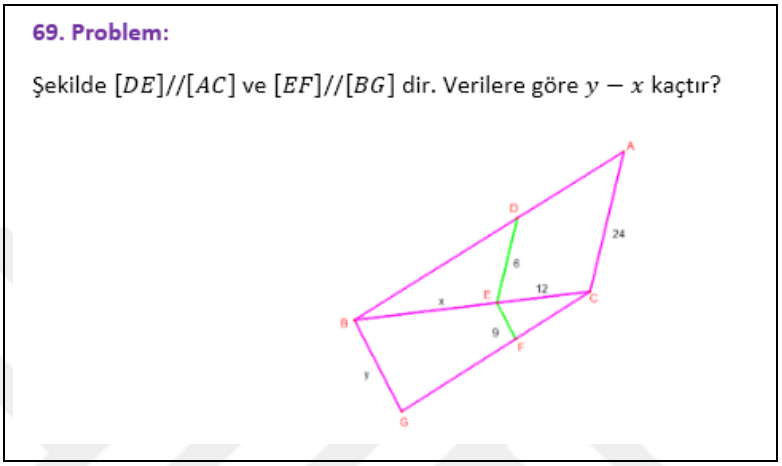
Şekil 3.74. *Öğretim dizisinin 65. problemi*

72. problemde (Şekil 3.78.) odak öğrenci Tuna benzerlik ilişkisini doğru bir şekilde kurduktan sonra elde ettiği orantı olan $\frac{x}{6} = \frac{10}{7+x}$ orantısında içlerin çarpımını da başarılı bir şekilde gerçekleştirmiştir.

İkinci etap öğretim dizisinin ilk haftasının ilerleyen derslerinde öğrencilerin orantı kurma ve içler veya dışların yer değiştirmesi gibi orantıda işlem esnekliği geliştirmeye başladıkları gözlemlenmiştir. 84. problemde (Şekil 3.69.) odak öğrenci Kayla tahtada

$\frac{6k}{8} = \frac{9k}{x}$ orantısını yazmış ve değişkenleri doğru bir şekilde sadeleştirerek sonuca ulaşmıştır.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Birer kenarı ortak olan iki üçgende temel orantı teoreminin kullanımını gerektiren Şekil 3.75.'deki 69. problemde odak öğrenci Kayla iki üçgen arasındaki benzerlik oranını tespit etmiştir.



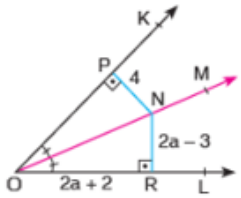
Şekil 3.75. *Öğretim dizisinin 69. problemi*

Kayla'nın "benzerlik var [BDE ve BAC üçgenlerini kastederek] 4 katı" yorumu üzerine odak öğrenci Tuna "x ya 48 ya da 3" yorumunda bulunmuştur. Tuna'nın değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği geometrik bilgisini devreye sokmasına engel olmuştur. Temel orantı teoreminin açı-açı benzerlik teoremi ile ilişkisi öğrencilere aktarıldıktan sonra, Tuna $EFC \approx BGC$ bağıntısını doğru bir şekilde kurup değişkenlerin değerlerine ulaşmıştır.

İç açıortayda açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına eşit uzaklıkta olduğu ve açı kolları üzerindeki dikme ayaklarının açının köşesine eşit uzaklıkta olduğu özelliğinin kullanımını gerektiren Şekil 3.76.'daki 76. problemi tahtada Melike çözmüştür. Melike iç açıortay özelliğini kullanarak "çentik var o yüzden $4 = 2a - 3$ olmalı, ama a tamsayı çıkmıyor" yorumunda bulunmuştur. Öğrenci hemen sonrasında a değişkeninin sayısal değerine ulaşmak zorunda olmadığını "a yı bulmayacağım, 2 eklerim" yorumuyla ifade etmiştir. Melike'nin değişkenin sayısal değerine ulaşmadan açıortaya ait geometrik özelliği kullanarak sonuca ulaşması başarılı olmuştur.

76. Problem:

Aşağıda verilen şekilde $\widehat{KOL}$ nın açıortayı $[OM$ ise $|OP|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.

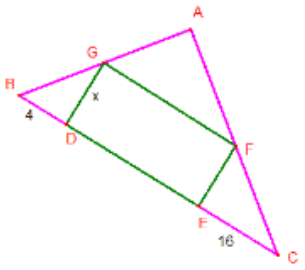


Şekil 3.76. *Öğretim dizisinin 76. problemi*

- Sembolik temsilleri kullanma: Sembolik temsil kullanmak suretiyle benzerlik bağıntısının uygulanacağı Şekil 3.77.'da verilen 70. problemi Utku tahtada çözmüştür.

70. Problem:

$m(\hat{A}) = 90°$, GDEF bir dikdörtgen olduğuna göre $|GD| = x$ kaç birimdir?



Şekil 3.77. *Öğretim dizisinin 70. problemi*

Utku "Şuraya a [B açısına a yazıyor], şuraya [C açısına b yazıyor] b diyelim" yorumuyla BGD ve EFC üçgenlerinin açılarına değişkenler atamış, dikdörtgene ait temel özellikleri kullanmış, $\Delta GBD \approx \Delta CFE$ bağıntısını doğru bir şekilde yazmış ve oranlamayı önce CFE sonra GBD üçgenine bakarak $\frac{4}{x} = \frac{16}{x}$ şeklinde yazmıştır. Yazdığı eşitliğin sağ tarafındaki orana arkadaşları karşı çıkmış ve Utku oranlamayı $\frac{4}{x} = \frac{x}{16}$ şeklinde düzeltmiştir.

Sembolik temsillerin kullanımını gerektiren 71. problemde (Şekil 3.63.) ise sınıf içinde aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir.

Odak öğrenci Ata: ABC üçgeni ile DEB arasında benzerlik var mı?

Araştırmacı: Nasıl gördün?

Odak öğrenci Ata: 90 var bir de 5 ile 15.

Odak öğrenci Kayla: B nasıl dik olur?

Utku: Görüntüye aldanmayacaksın.

Odak öğrenci Ata: Burası ile burası, burası ile burası…

Araştırmacı: Burası ile burası, burası ile burası dediğin yer nere?

Odak öğrenci Ata: 3 katı bunun.

Odak öğrenci Kayla: ABC de C dik, AB en uzun kenar.

Ece: Açılarının eşit olması gerekiyor ABC üçgeni ile EBD üçgeni benzer.

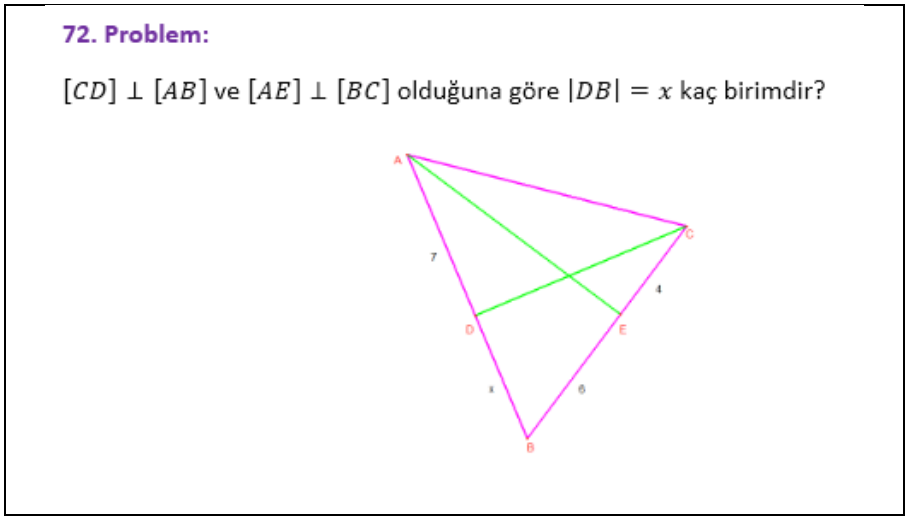
Araştırmacı: Nereden biliyorsun?

Ece: Çünkü C kenarı dik, D kenarı dik. B açısı ortak.

Odak öğrenci Tuna: Bilinmeyen atarız.

Odak öğrenci Ata'nın benzerlik ilişkisinin dik açıların varlığı ve kenarlar arasındaki kat ilişkisinin mevcut olması ile sağlandığını düşündüğü gözlemlenmiştir. Ece ise Ata'dan farklı olarak bazı açıların eş ölçülü olduğunu belirtmiş, fakat bu açıların hangileri olduğunu ifade edememiştir. Odak öğrenci Tuna'nın değişken atama önerisi üzerine, Ata birbirini $90°$ ye tamamlayan DBE ve ABC açılarına a değişkenini yanlış bir şekilde atamıştır.

Benzerlik bağıntısının sembolik temsillerin kullanımı ile kurulacağı Şekil 3.78.'de verilen 72. problemi odak öğrenci Tuna tahtada çözmüştür.



Şekil 3.78. *Öğretim dizisinin 72. problemi*

Tuna problemin çözümü için DAE açısına a değişkenini atamış, CD ve AE doğru parçalarının kesişim noktasını da G ile temsil etmiştir. Utku ters açıların olduğunu

söylemiş ve bunun üzerine Tuna AGD ve CGE açılarına b, CDB açısına a değişkenlerini atamıştır. Tuna'ya B açısına hangi değişkeni atayacağı sorulunca, DBC açısına b değişkenini atamıştır. Tuna'nın kullandığı tüm sembolik temsiller doğru olmuştur. Öğrenci ilk olarak ADC ve CBD üçgenleri arasında benzerlik araştırması yapmış, ancak ADC üçgeninde yeterince veri olmadığı söyleyince ABE ile CBD üçgenleri arasında benzerlik bağıntısını doğru bir şekilde kurmuştur.

- Değişkenin doğasını anlama: Üçgenin yardımcı elemanlarından kenarortayın tanıtılması için kullanılan Görsel 3.12.'de verilen çizim hakkında odak öğrenci Kayla "içerde oluşan üçgenler birbirine eşit diyebilir miyiz" sorusunu yöneltmiştir. Bunun üzerine, ne açıdan eşit olduğu kendisine sorulmuş ve Kayla "kenar uzunlukları olarak" cevabını vermiştir. Kayla'nın bir ilişki arayışı içinde olduğu görülmüştür, fakat öğrenci kenarortayları temsil eden değişkenlerin farklı olmasından dolayı kenar uzunluklarının farklı uzunluklar olabileceği çıkarımında bulunamamıştır.

Öğrencilerin problem metinlerinde verilen orantı ilişkilerini doğru bir şekilde yorumlamaya başladıkları gözlemlenmeye başlanmıştır. Şekil 3.69.'da verilen 84. problemde Ece değişken kullanarak $2|AB| = 5|AC|$ orantısını "AB $5k$, AC $2k$" olarak doğru bir şekilde belirleyebilmiştir. $2|DC| = 5|BD|$ ilişkisi için sınıfta bazı öğrenciler k değişkeninden farklı bir değişken kullanmayı önermişlerdir. Farklı orantı ilişkileri için farklı değişkenler kullanmayı önermeleri, öğrencilerin bu konudaki gelişimlerini ortaya koymuştur. Odak öğrenci Tuna "BF 5 in, FC 2 nin katı" olarak yorumlamış, odak öğrenci Bora da Tuna'yı desteklemiştir. Odak öğrenci Kayla ise "BE 2 nin, EC 5 in katıdır" yorumunda bulunmuştur. Öğrencilerin bu yorumları doğru olmuştur.

3.4.2. İkinci hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında üçgenin yardımcı elemanlarından kenarortayın uzunluğunu bulma, bir dik üçgende hipotenüse ait kenarortay ile dik kenarlar arasındaki ilişki ve kenar orta dikme, üçgende çevrel çember ve özellikleri, üçgenin yardımcı elemanlarından yükseklik, üçgende diklik merkezi ve diklik merkezinin özellikleri öğrencilere tanıtılmıştır. İkizkenar üçgende yardımcı elemanlar ve $30° - 60° - 90°$ üçgeninin özellikleri üzerine problemler çözülmüştür.

3.4.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin matematiksel ifade ve eylemleri geometrik ön bilgiler, geometrik bilginin uygulanması ve geometrik düşünme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.26.'da bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.26. *İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

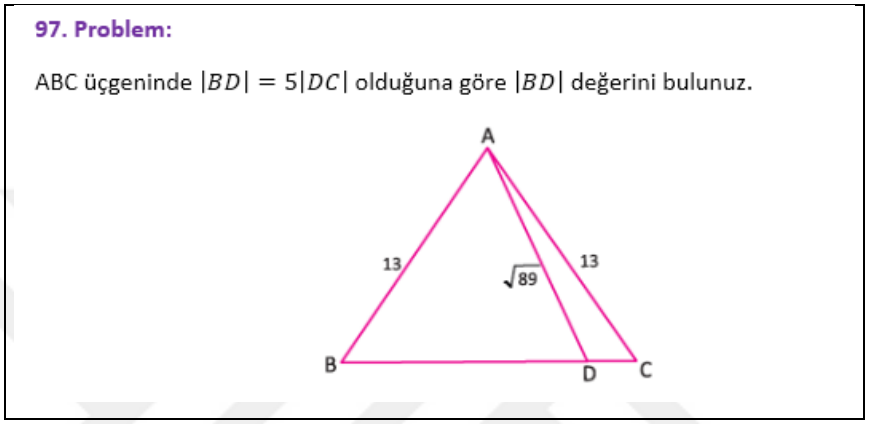
GEOMETRİK BİLGİLER	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Geometrik ön bilgiler Meltem – Geniş açılı üçgende diklik merkezinin üçgenin içine düşmeyeceğini bilmesi. **Bora** – (97. problem) İkizkenar üçgende tepe açısından çizilen yükseklik ile taban açılarından çizilen yüksekliklerin aynı uzunlukta olduğunu düşünmesi. Utku, Meltem - aynı uzunlukta olmayacağını açıklamaları. Prototip algılar **Lara**, **Arya** – (89. problem) İki doğru parçasının karşılıklı olmasının paralellik için yeterli olacağını düşünmeleri, **Kayla'nın** paralellik için kanıt olması gerektiğini ifade etmesi.	Geometrik bilgiyi devreye sokma **Tuna**, **Kayla**, Meltem - (89. problem) Ağırlık merkezini tespit etme, ağırlık merkezinin kenar ve köşelere uzaklıklarını bulabilmeleri. Ece – (91. problem) Kenar orta dikme tanımını tersine çalıştırabilmesi. **Ata** - (93. problem) Yüksekliğin aynı zamanda kenarortay olduğu bir üçgenin ikizkenar üçgen olduğu ve BC doğru parçasının orta noktası olan K noktası ile oluşan BDK ve DKC üçgenlerin eş olduğu geometrik bilgisini devreye sokması. **Tuna'nın** D noktasında oluşan açıların ters açılar olmayışını önceki hafta edindiği doğrusal kavramı ile ilişkilendirerek **Ata**'e karşı çıkışı. **Bora** - (95. problem) "geniş açılı üçgende diklik merkezi dışarıda olması" bilgisini, öğrenciler - D açısının $90°$ olması durumunda x in 10 olacağını ifade etmeleri **Lara'nın** üçgen eşitsizliği kullanmayı önermesi, Pelinsu – üçgen eşitsizliğini açıklaması. **Tuna** – (96. problem) Diklik merkezinin üçgenin içine düşmesinin o üçgenin dar açılı üçgen olduğuna işaret ettiği bilgisini devreye sokması. **Ata** - BAC açısının 0 dan büyük olması gerektiği düşüncesini ifade etmesi.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler **Ata** – (89. problem) Farklı üçgenlerde eşit uzunluktaki kenarları gören açı ölçülerinin eşit olacağı yanılgısı.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Diklik merkezinin dar açılı bir üçgende tanıtılmasının ardından öğrencilere yöneltilen diklik merkezinin üçgenin daima içinde olup olmayacağı sorusuna, Meltem "geniş açılı üçgende dışındadır" cevabını vermiş ve Utku da Meltem'i desteklemiştir.

İkizkenar üçgene ait temel özelliklerin öğrenciler ile tartışıldığı Şekil 3.79.'da verilen 97. problemde odak öğrenci Bora'nın tepe açısından çizilen yükseklik ile taban açılarından çizilen yüksekliklerin aynı uzunlukta olduğu yanlış düşüncesinde olduğu gözlemlenmiştir. Öğrencilere "A dan BC ye indirdiğimiz dikme ile B den AC ye indirilen

dikme ile aynı uzunlukta mıdır" sorusu yöneltilmiş, Bora "aynıdır" cevabını verirken öğrencilerin çoğu "hayır" cevabını vermiştir. Öğrencilere neden aynı olmayacağı sorusuna Utku "biri tepe açısı diğeri değil" ve Meltem "çünkü açılar aynı değil" şeklinde doğru açıklamalarda bulunmuşlardır. Tepe açısından indirilen yüksekliğin başka ne olacağı sorusuna odak öğrenci Ata "BC yi ikiye böler" ve odak öğrenci Bora "kenarortay" doğru cevaplarını vermişlerdir.



Şekil 3.79. *Öğretim dizisinin 97. problemi*

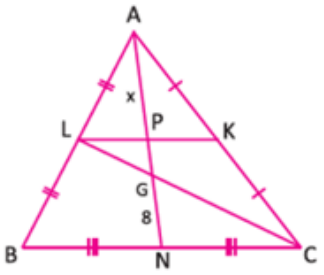
- Prototip algılar: Bir üçgende orta taban özelliğinin kullanımını gerektiren 89. problemde (Şekil 3.80.) öğrencilere LK ile BC doğru parçaları arasındaki ilişki sorulmuş ve odak öğrenci Lara "paralel, birbirlerinin karşısındalar" cevabını vermiştir. Lara iki doğru parçasının karşılıklı olmasının paralellik için yeterli olacağını düşünmüştür. Odak öğrenci Kayla, paralellik için kanıt olması gerektiğini ifade etmiştir. Odak öğrenci Arya ise "paralel oldukları için birbirine eşit demez miyiz" sorusuyla, paralel doğru parçalarının eşit olduğu prototip algısını ortaya koymuştur.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Üçgenin yardımcı elemanlarından kenarortayın özelliklerinin kullanımını gerektiren Şekil 3.80.'deki 89. problemde öğrenciler kenarortay ile ilgili bilgilerini devreye sokmuşlardır. Odak öğrenci Tuna "G nin ağırlık merkezi olduğunu biliyoruz" yorumunda bulunmuş ve kendisine bunun sebebi sorulunca odak öğrenci Kayla "çünkü kenarortayların kesişimi" şekilde doğru cevaplamıştır. Meltem ve odak öğrenci Kayla "AG eşit 16 diyebilir miyiz" sorusuyla, ABC üçgeninde ağırlık merkezinin köşeye olan uzaklığı doğru bir şekilde belirleyebilmişlerdir.

89. Problem:

K, L ve N noktaları ABC üçgeninin kenarlarının orta noktalarıdır. $|GN| = 8$ cm olduğuna göre $|AP| = x$ değerini bulunuz.

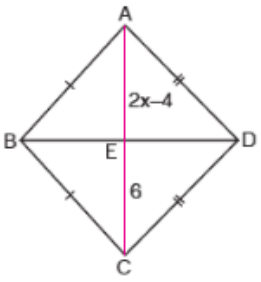


Şekil 3.80. *Öğretim dizisinin 89. problemi*

Kenar orta dikmenin öğrencilere tanıtımının ardından öğrencilere Şekil 3.81.'de verilen 91. problem yöneltilmiştir.

91. Problem:

Aşağıda verilen şekilde $[BD] \cap [AC] = \{E\}$ olduğuna göre x in kaç olduğunu bulunuz.

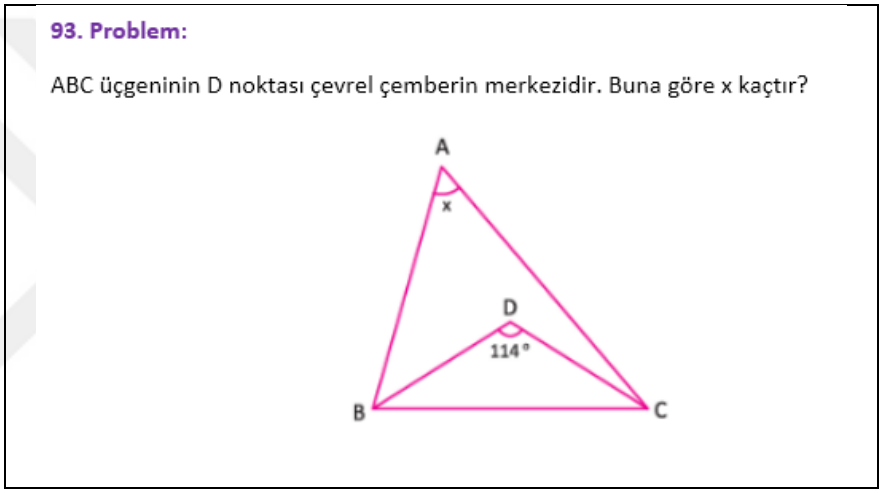


Şekil 3.81. *Öğretim dizisinin 91. problemi*

Öğrencilere yöneltilen AC ve BD doğru parçalarının nasıl kesiştiği sorusuna öğrenciler "dik" cevabını vermişlerdir. Doğru parçalarının dik kesiştiklerini nasıl anladıkları sorusuna odak öğrenci Arya "tam ortasından kesiyor", odak öğrenci Lara "dik düşüyor, açının ortasından" cevaplarını vermişlerdir. Arya ve Lara'ya ait açıklamaların bir dayanağı olmadığı görülmüştür. Ece "AD ile DC, AB ile BC eşit olduğundan" şeklindeki cevabı ile kenar orta dikme tanımını tersine çalıştırabildiğini göstermiştir.

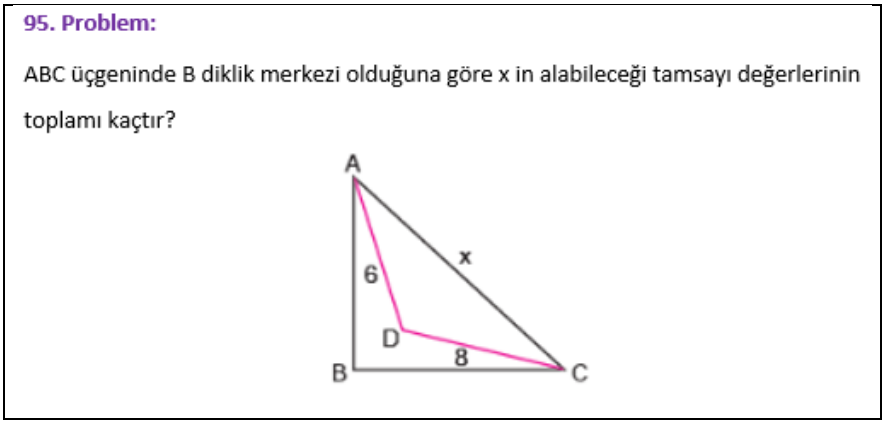
Çevrel çemberin öğrencilere tanıtılmasından sonra, öğrencilere yöneltilen Şekil 3.82.'deki 93. problemde odak öğrenci Ata ikizkenar üçgene ilişkin geometrik bilgisini devreye sokmuştur. D çevrel çemberin merkezinden indirilen dikmelerin kenarları eşit iki

parçaya ayırmasından dolayı Ata "BDK ve DKC üçgenleri birbirine eştir" yorumunda bulunmuştur. Ata'nın ifadesindeki K noktası D merkezinden BC kenarına indirilen dikmenin ayağı olarak belirlenmiştir. Öğrencinin bir üçgende yüksekliğin aynı zamanda kenarortay olduğu bir üçgenin ikizkenar üçgen olduğu ve BC doğru parçasının orta noktası olan K noktası ile oluşan BDK ve DKC üçgenlerin eş olduğu geometrik bilgisinin oluştuğu gözlemlenmiştir. D noktasından ABC üçgeninin kenarlarına indirilen dikmeler hakkında odak öğrenci Ata "D de oluşan diğer açı ters açı değil mi" sorusuna, ikinci etap öğretim dizisinin ilk haftasında doğrusallığı sorgulayan odak öğrenci Tuna "doğrusal olmayabilir" cevabını vererek Ata'nın bu düşünceden uzaklaşmasını sağlamıştır.



Şekil 3.82. *Öğretim dizisinin 93. problemi*

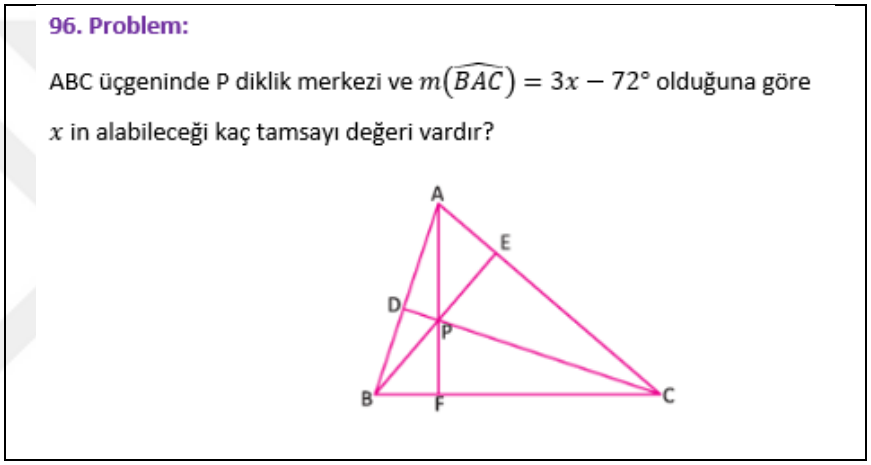
Diklik merkezi problemi olan 95. problem (Şekil 3.83.) öğrencilerin birinci etap öğretim dizinin ilk haftalarındaki kazanımlarını ortaya koyma fırsatını sunmuştur.



Şekil 3.83. *Öğretim dizisinin 95. problemi*

Öğrenciler ADC açısının geniş açı olduğunu tespit etmiş ve odak öğrenci Bora "geniş açılı üçgende diklik merkezi dışarıda" geometrik bilgisini ifade etmiştir. Öğrencilere yöneltilen D açısı $90°$ olsaydı x hakkında ne düşünürdünüz sorusuna öğrenciler "x e 10 derdik" cevabını vermişlerdir. Üçgeni üçgen yapan bazı kriterler olduğu hatırlatılınca odak öğrenci Lara "üçgen eşitsizliği" kullanmayı önermiştir. Üçgen eşitsizliğinin oluşturulması için Pelinsu "x ikisinin toplamı ile farkı arasında olmalı" açıklamasını yapmıştır. Lara eşitsizliği yazarak çözümü doğru bir şekilde yapabilmiştir.

Üçgende diklik merkeziyle ilgili olan Şekil 3.84.'deki 96. problemde odak öğrenci Tuna, diklik merkeziyle ilgili geometrik düşüncesini doğru bir şekilde ortaya koymuştur.



Şekil 3.84. *Öğretim dizisinin 96. problemi*

Odak öğrenci Tuna "$3x - 72$ $90°$ den küçük olacak" yorumunda bulunmuş ve kendisine sebebi sorulunca "ADC de düşünürsek D açısı 90" açıklamasını yapmıştır. Tuna diklik merkezinin üçgenin içine düşmesinin o üçgenin dar açılı üçgen olduğuna işaret ettiği geometrik bilgisini devreye sokmuştur. Odak öğrenci Ata BAC açısının 0 dan büyük olması gerektiği düşüncesini ileri sürerek "$3x - 72$ 0 dan büyük olmalı" yorumunda bulunmuştur. Pelinsu $3x - 72 > 0$ eşitsizliğini de çözerek "x 24 ten büyük, 54 ten küçük oluyor" yorumunda bulunarak soruyu çözmüştür.

Geometrik Düşünme

- <u>İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler</u>: Farklı üçgenlerde eşit uzunluktaki kenarları gören açı ölçülerinin eşit olacağı düşüncesi, ikinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında bazı öğrencilerde gözlemlenmiştir. 89. problemde (Şekil 3.80.) odak öğrenci Ata'nın "birbirine paralel olduğu için açılar ve gördüğü kenarların uzunlukları birbirine

eşit: AK ve KC eşit, B ve L açıları eşit" şeklindeki yorumuyla, ABC üçgeninde B açısının gördüğü kenarın KC olduğunu düşünmüş ve eşit uzunluktaki kenarları gören farklı üçgenlere ait açıların eşit ölçülü olduğu yanılgısına düşmüş olduğu gözlemlenmiştir.

3.4.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.27.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.27. *İkinci etap öğretim dizisinin ikinci haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	**CEBİR BİLGİ YAPISI**	**SEMBOLİK MANİPÜLASYON**
<u>Aritmetik işlem becerileri</u> Buse – (90. problem) Kenarortay uzunluğu bulma formülündeki $\frac{a^2}{2}$ teriminde önce bölme işlemini yapması, Utku'nun Buse ile aynı görüşte olması.	<u>Cebirsel ön bilgiler</u> Pelinsu, **Kayla** - (96. problem) $3x - 72 < 90$ eşitsizliğinin çözümünü $x = 54$ şeklinde gerçekleştirmeleri (eşitsizliği bir aralık olarak kavramaması) **Bora** (97. problem) orantı ilişkisini yanlış yorumlaması, diğer öğrencilerin karşı çıkışı. **Tuna** - iki tane iki bilinmeyenli denklem elde edilince "yok etme yöntemini kullanırız" önerisi ile çözmesi.	<u>Cebirsel işlem becerileri</u> Buse - (90. problem) Yazdığı $2x^2 = 130 - 32 = 98$ tek değişkenli denklemi çözememesi. **Tuna** – (95. problem) x değişkeninin değer aralığını "10 ile 14 arasında" olduğunu söyleyip eşitsizlik ile ifade edebilmesi. Bu aralıkta "sonsuz" reel sayı olduğunu bilmesi. <u>Değişkenin doğasını anlama</u> Mert Can – (90. problem) Kenarları temsil etmek için kullanılan küçük harfler ile köşeleri temsil etmek için kullanılan büyük harfler arasındaki ayrımın farkında olmaması. Öğrenciler - $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ formülünü yönelimi farklı olan üçgenler üzerinde yapılan alıştırmalarda kullanabilmeleri.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- <u>Aritmetik işlem becerileri</u>: Kenarortay uzunluğunun bulunması ile ilgili olan 90. problemi (Şekil 3.85.) çözmek için Buse tahtaya gelmiştir. Buse ABC üçgeninde A açısının gördüğü kenar uzunluğunun "*4*" olduğunu ifade etmiş ve bunun $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ formülündeki $\frac{a^2}{2}$ teriminde önce bölme işlemini yaptığından dolayı 4 bulmasından kaynaklandığını dile getirmiştir. Öğrenciler Buse'ye BC kenar uzunluğunun 8 olduğunu hatırlatmışlardır. Utku da Buse'nin düşüncesine benzer düşünce ile "yarısı

olmayacak mı" sorusunu yöneltmiştir. Buse'nin aritmetik işlem becerilerinin oldukça yavaş olduğu ve hatalar içerdiği görülmüştür.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Eşitsizlik bilgisi gerektiren 96. problemde (Şekil 3.84.) Pelinsu tahtada odak öğrenci Tuna'nın önerdiği "$3x - 72$ $90°$ den küçük olacak" eşitsizliğini yazmış, odak öğrenci Kayla oturduğu yerde çözümü yaparak "x *54*" cevabını vermiştir. Eşitsizliğin bir aralık olması gerektiği kavrayışının Kayla'da oluşmadığı görülmüştür. Pelinsu da tahtada eşitsizliği çözerek Kayla gibi "$x = 54$" yazmıştır.

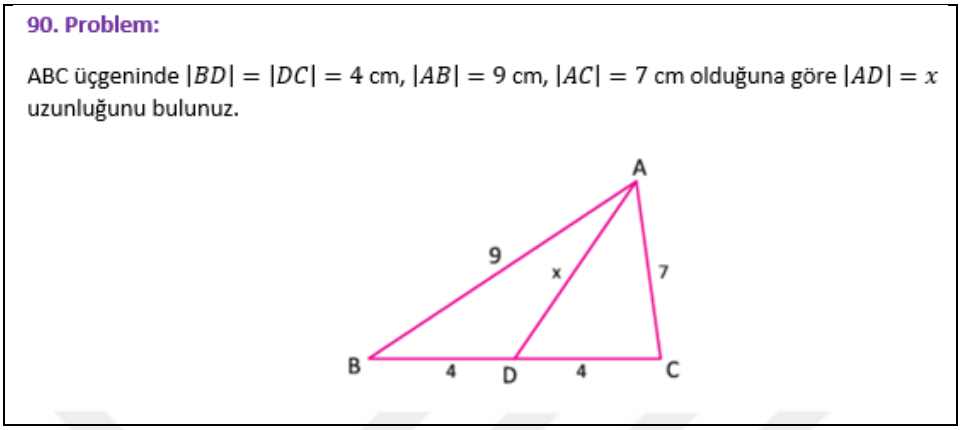
Doğru parçaları arasındaki ilişkinin bir orantı ile tanımlandığı 97. problemde (Şekil 3.79.) orantı ilişkisi hakkında odak öğrenci Bora "BD $1k$, DC $5k$ olabilir mi" yanlış yorumunda bulunmuş, diğer öğrenciler Bora'ya karşı çıkmıştır. Orantı ilişkilerini yorumlamada bazı öğrencilerin hala sıkıntı yaşadığı, fakat birçoğunun bu kavrayışa ulaştığı görülmüştür. Problemin çözümü için iki tane iki bilinmeyenli denklem elde edince odak öğrenci Tuna "yok etme yöntemini kullanırız" önerisi ile problemi çözmüştür.

- Cebirsel işlem becerileri: 90. problemde (Şekil 3.85.) Buse kenarortayın uzunluğuna ulaşabilmek için kenarortay uzunluğunu bulduran formülü kullanarak $2x^2 = 130 - 32 = 98$ şeklinde bir denklem yazmış ve çözüme ulaşmak için "x in karesini alacağız" yorumunda bulunmuştur. Buse'nin tek değişkenli bir denklemi çözemediği görülmüştür.

Üçgende diklik merkezi ile ilgili olan 95. problem (Şekil 3.83.) öğrencilerin eşitsizlik kavrayışlarıyla ilgili bilgi sunmuştur. Odak öğrenci Lara arkadaşlarının yardımıyla üçgen eşitsizliğini kullanarak problemi çözmüştür. x değişkeninin alabileceği değer aralığının ne olacağı sorusuna odak öğrenci Tuna "*10* ile *14* arasında" cevabını vermiş ve bunu eşitsizlik ile ifade edebilmiştir. Bu aralıkta kaç tane reel sayının var olduğu sorusuna ise Tuna "sonsuz" cevabını vermiştir.

- Değişkenin doğasını anlama: Kenarortay uzunluğunun hesaplanması üzerine kurulu olan Şekil 3.85.'deki 90. problemi çözmek için Mert Can tahtaya gelmiştir. Mert Can arkadaşlarının yardımıyla kenarortay uzunluğu formülünü yazmıştır. Mert Can kendisine yöneltilen formüldeki c nin nereyi göstermek için kullanıldığı sorusuna C açısına bakarak "4" olarak cevaplamıştır. Öğrencinin kenarları temsil etmek için kullanılan küçük harfler ile üçgenin köşeleri temsil etmek için kullanılan etiketler

arasındaki ayrımın farkında olmadığı görülmüştür. Mert Can soruyu çözemeyeceğini belirtmiş ve çözüm için başka bir öğrenci tahtaya gelmiştir.



Şekil 3.85. *Öğretim dizisinin 90. problemi*

Öğrencilere kenarortay uzunluğunu bulmak için kullanılan $2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$ formülünü yönelimi farklı olan üçgenler üzerinde yapılan alıştırmalarda kullanabilmeleri, değişkenin rollerini anladıklarını göstermiştir.

3.4.3. Üçüncü hafta öğretim dizisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında üçgende yükseklik ile ilgili problem çözümü, eşkenar üçgende yardımcı elemanların özellikleri, dik üçgende Öklid bağıntısı ve üçgende alan konularına yer verilmiştir. Aynı yüksekliğe veya aynı tabana sahip birden fazla üçgenin alanları ile ilgili uygulamalar üçüncü haftada yer almıştır.

3.4.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

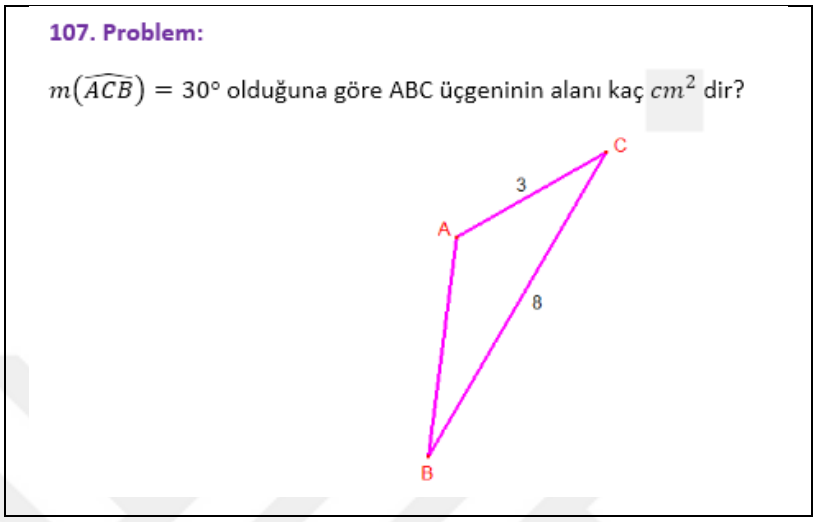
İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin matematiksel ifade ve eylemleri geometrik ön bilgiler, geometrik bilginin uygulanması ve geometrik düşünme temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.28.'de bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

Tablo 3.28. *İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI	GEOMETRİK DÜŞÜNME
Prototip fenomeni Melike – (107. problem) ABC üçgenini ikizkenar kabul etmesi.**Bora** – (109. problem) Herhangi bir üçgende yüksekliğin kenarortay olduğunu düşünmesi. **Bora** – (104. problem) Açıları belli olmayan dik üçgene $30° - 60° - 90°$ üçgeni muamelesi yapması, arkadaşlarının karşı çıkışı. **Bora** – (110. problem) Duyular ile hareket etmesi. **Bora** – (112. problem) BGC üçgeninin alanını dik kenarların çarpımının yarısı olarak bulması gerekirken hipotenüs ile hipotenüse ait yüksekliğin çarpımının yarısı olarak düşünmesi. **Tuna** - (114. problem) ABC üçgeninin alanını BC kenarı ile BC kenarına ait yüksekliğin çarpımından bulması, aynı üçgenin alanının BH yüksekliği ile AC kenarının çarpımının yarısı olduğunu görememesi, Meltem'in görmesi. **Bora** – (120. problem) Yamuğu dikdörtgen olarak değerlendirmesi. Kenar uzunluklarına atanan değişkenlerin değerine ulaşma çabası geometrik düşünmesine engel teşkil etmesi. Ata - (121. problem) benzerlik kurmayı düşünmesi, AEB ve DEC açılarını ters açılar kabul etmesi.	Geometrik bilgiyi devreye sokma **Kayla** - (99. problem) İkizkenar üçgende ikiz kenarlara ait yüksekliklerin eşit olduğunu doğru terminoloji ile ifade etmesi, Meltem – ikizkenar üçgende eş yüksekliklerin köşelere eşit uzaklıkta olduğu ifade etmesi, **Bora** - Pisagor teoremini kullanması. Öğrenciler – (100. problem) Eşkenar üçgende kenar ve yardımcı elemanları ilişkileri kurmaları. Meltem – (102. problem) Eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan herhangi bir noktadan üçgenin kenarlarına indirilen dikme uzunlukları toplamının eşkenar üçgenin yüksekliğine eşit olduğu ve kenar uzunluğu bilinen eşkenar üçgenin yüksekliğinin $30° - 60° - 90°$ üçgeni yardımıyla bulunacağı bilgilerini kullanması. **Arya** – (104. problem) Geniş açıya ait yüksekliğin üçgenin dışında olduğu bilgisini kullanarak üçgenin alanını bulması. **Ata** - (105. problem) İkizkenar üçgende tepe açısına ait yüksekliğin aynı zamanda kenarortay olduğu bilgisini kullanması, Pisagor teoremi ile tepe açısına ait yüksekliği hesaplaması, tepe açısından çizilen yüksekliğin taban açılarından çizilen yükseklikten farklı olduğunu bilmesi, Pelinsu'nun bunu bilmemesi, **Tuna'nın Ata'yı** destekleyen gerekçesinin doğru olması. **Ata'nın** alanı yanlış hesaplaması, **Bora'nın Ata'yı** düzeltmesi. **Ata'nın** alanın birimini "santimetre küp" olduğunu ifade etmesi, arkadaşlarının karşı çıkışı. **Bora** - (107. problem) $30° - 60° - 90°$ üçgeninden faydalanarak yüksekliği doğru bir şekilde bulması. **Tuna** - (112. problem) Bir üçgende kenarortayların oluşturduğu üçgenlerin alanlarının eşit olduğu CG-II yazılımı ile öğrencilere gösterildikten sonra BGC üçgeninin alanının ABC üçgeninin alanının altıda biri, **Lara** - üçte biri olduğunu söylemeleri. **Kayla**, Meltem - (115. problem) açıortay doğrusu üzerinde alınan nokta ile ilgili bilgilerini devreye sokmaları. Utku – (116. ve 117. problemler) ortak yükseklik/tabana sahip üçgenlerde alanların taban/yükseklik ile orantılı olduğu bilgilerini devreye sokması. **Bora** – (122. problem) CD ve BD kenarlarının eşit çıkması üzerine AD doğru parçasının kenarortay olduğunu tespit etmesi.	İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler **Bora** – (100. problem) kenar uzunluğunun negatif olmayacağı kavrayışı **Kayla** - Üçgenin alanına dikdörtgenin alanından ulaşma düşüncesi. **Bora**, **Kayla**, diğer öğrenciler - Üçgenin alanının kenar ve kenara ait yükseklik verileri ile elde edileceği kavrayışının gerçekleşmesi. Buse – (104. problem) Farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördüğü kenarların uzunluklarının eşit olacağı yanılgısı. Öğrenciler - (118. problem) Alanların benzerlik oranını kat ilişkisi olarak algılamaları. **Kayla, Tuna**, öğrenciler – CG-II yazılımında kenarortay çizmeyi köşe ile köşenin karşısındaki kenar üzerinde bulunan noktayı birleştiren bir doğru parçası çizip bu doğru parçasının ayağını kenar üzerinde ayarlayarak elde etmeye çalışmaları. Kenarortayların kesişimi ile oluşan üçgenler hakkında Meltem, **Kayla**, **Arya** - üçgenlerin eş alanlı olduğunu belirtmeleri, Utku - ağırlık merkezinin kenara bir, köşeye iki birim uzaklıkta olacağı bilgisini üçgenlerin alanlarına genellemesi ve üç tane üçgenin alanının diğer üçünün iki katı olduğunu düşünmesi. **Ata** – (122. problem) "90° nin gördüğü kenar yüksekliğe eşit" şeklinde ifade ettiği muhteşem üçlü kullanmak istemesi, **Bora** "öyle olsaydı hipotenüs olmazdı" ifadesi ile **Ata'ya** karşı çıkışı.

Geometrik Bilgi

- Prototip algılar: $30° - 60° - 90°$ özel üçgeninden faydalanarak yüksekliğin bulunacağı Şekil 3.86.'da verilen 107. problemi çözmek için Melike tahtaya gelmiştir.



Şekil 3.86. *Öğretim dizisinin 107. problemi*

Melike alanı bulmak için A noktasından BC kenarına bir dikme çizmiş, AB doğru parçasının üzerine 3 yazmış ve indirdiği dikmeyi kenarortay olarak kabul etmiştir. Öğrenci 30° lik bir açıya sahip ABC üçgenini tepe açısı A olan bir ikizkenar üçgen olarak kabul etmesi prototip algısını ortaya çıkarmıştır.

Ortak yükseklige sahip iki üçgende alanın üçgenlerin o yüksekliğe ait tabanları ile orantılı olduğu bilgisini gerektiren 109. problemde (Şekil 3.102.) odak öğrenci Bora, A noktasından BC kenarına çizilen dikmeyi kenarortay olarak kabul etmiş ve B noktası ile dikme ayağı arasındaki mesafe hakkında "2.5 diyebilir miyiz" sorusu ile görüşünü bildirmiştir. Bora'nın da Melike gibi herhangi bir üçgende yüksekliğin kenarortay olduğunu düşündüğü gözlemlenmiştir.

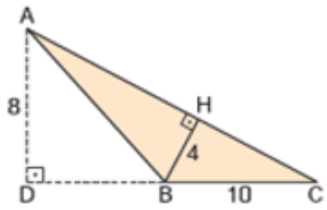
104. problemde (Şekil 3.103.) odak öğrenci Bora açıları belli olmayan dik üçgen için "$30 - 60 - 90$ üçgeni" yorumunda bulunmuş, ancak arkadaşları Bora'ya karşı çıkmışlardır.

110. problemde (Şekil 3.105.) odak öğrenci Bora "burada BE yükseklik değil mi? Bir tek köşeden çıkan doğru o var da o yüzden" yorumunda bulunmuştur. Bora'nın duyuları ile hareket ettiği görülmüştür.

112. problemdeki (Şekil 3.93.) verilere göre öğrencilerin BGC üçgeninin alanını dik kenarların çarpımının yarısı olarak bulmaları beklenirken, odak öğrenci Bora'nın BGC dik üçgeninin alanını sadece hipotenüs ile hipotenüse ait yüksekliğin çarpımının yarısı olarak düşündüğü gözlemlenmiştir. Buna benzer bir durum Şekil 3.87.'de verilen 114. problemde gözlemlenmiştir.

114. Problem:

Şekilde verilen ABC üçgeninde $[BH] \perp [AC]$ ve $[AD] \perp [BC]$ olmak üzere $|AD| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|BH| = 4$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç cm.dir?



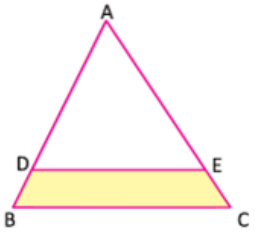
Şekil 3.87. *Öğretim dizisinin 114. problemi*

Odak öğrenci Tuna problemdeki ABC üçgeninin alanını BC kenarı ile BC kenarına ait yüksekliğin çarpımından bulmuştur. Fakat aynı üçgenin alanının BH yüksekliği ile AC kenarının çarpımının yarısı olduğunu görememiştir. ABC üçgeninin alanına BH doğru parçası ile AC doğru parçasının çarpımının yarısı olduğunu Meltem görmüş ve problemin çözümüne ulaşmıştır.

Üçgenlerin benzerlik oranını kullanarak alanların benzerlik oranına ulaşılmasını gerektiren Şekil 3.88.'deki 120. problemde, odak öğrenci Bora'nın alanı verilen yamuk hakkındaki görüşü prototip algıya örnek teşkil etmiştir. Kenarlar arasındaki orantı ilişkisinin odak öğrenci Ata tarafından doğru bir şekilde değerlendirilmesinden sonra odak öğrenci Bora $BCED$ yamuğu hakkında "paralelkenarın pardon dörtgenin alan *18* miş, kısa kenarı *2*, uzun kenarı *9* çarpımı alanı verir" yorumunda bulunmuştur. Öğrencinin $BCED$ yamuğunu bir dikdörtgen olarak değerlendirmiştir. Bora'nın kenar uzunluklarına atanan değişkenlerin değerine ulaşma çabası geometrik düşünmesinde engel teşkil ettiği görülmüştür.

120. Problem:

Verilen şekilde $[DE]//[BC]$ olmak üzere $|AD| = 4|BD|$ ve $A(BDEC) = 18\ cm^2$ olduğuna göre ADE üçgeninin alanını bulunuz.

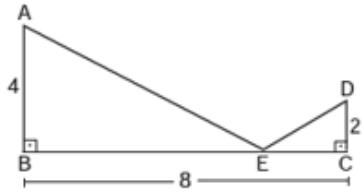


Şekil 3.88. *Öğretim dizisinin 120. problemi*

Prototip algıların gözlemlendiği bir diğer soru ise Şekil 3.89.'da verilen 121. problem olmuştur.

121. Problem:

Verilen şekilde B, E ve C noktaları doğrusal ise $|AE| + |ED|$ kaçtır?

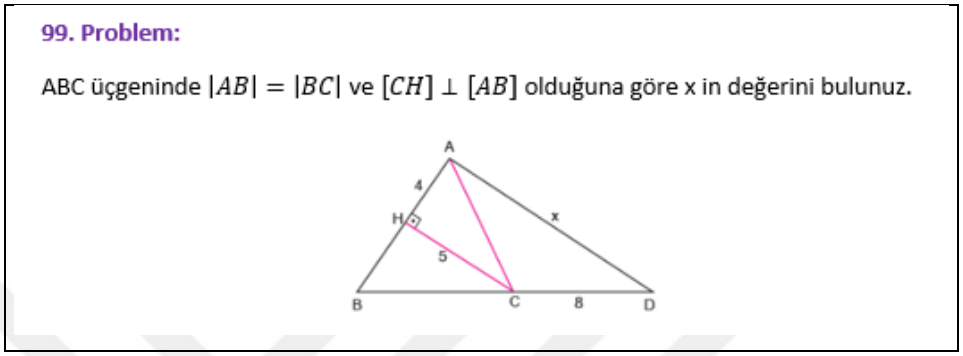


Şekil 3.89. *Öğretim dizisinin 121. problemi*

Odak öğrenci Ata dik üçgenlerin birer kenar uzunluklarının 2 ve 4 gibi birbirinin katı olmasından ötürü "benzerlik yapabiliriz. Burası *2* katı [AB ve DC kenarlarını göstererek]" yorumunda bulunmuştur. Ata'nın görüşünün dayanaksız olması üzerine Utku B noktasından AE doğru parçasına dikme indirmeyi düşünerek "Öklid" teoremini kullanmayı önermiş, fakat elde yeterli veri olmamasından dolayı bu düşüncesinden vazgeçmiştir. Odak öğrenci Ata AEB ve DEC açılarını ters açılar kabul etmiş ve eşit olduklarını gösteren noktalar koymuştur. Utku Ata'ya karşı çıkmış ve AED açısını $90°$ kabul ederek AEB ve DEC açılarına değişkenler atamış ve üçgenler arasında açı-açı benzerliği kurmaya çalışmıştır.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Geometrik bilgiyi devreye sokma: Bir ikizkenar üçgende eşit uzunluğa sahip kenarlara ait yüksekliklerin eşit olduğu bilgisinin kullanımını gerektiren Şekil 3.90.'daki 99. problemde odak öğrenci Kayla bu konuda sahip olduğu bilgiyi doğru terminoloji ile ifade etmiştir.



Şekil 3.90. *Öğretim dizisinin 99. problemi*

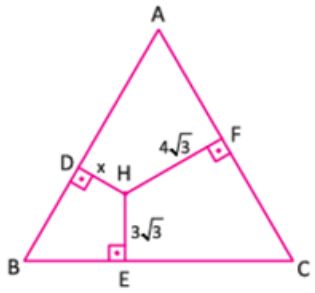
Kayla "A ve C açıları eşittir; A açısından çıkıp BC kenarına düşen yükseklik de 5 olacak" yorumuyla problemin çözümü için doğru bir başlangıç yapmıştır. A köşesinden BC kenarına bir dikme çizildikten sonra dikme ayağı ile C noktası arasındaki uzunluğun da 4 birim olduğunu Meltem ifade etmiş ve odak öğrenci Bora Pisagor teoremini kullanarak x değişkeninin değerine ulaşmıştır.

100. problemde (Şekil 3.100.) araştırmacının "bir eşkenar üçgende yükseklik aynı zamanda …" şeklinde başlayan cümlesini öğrenciler "…kenarortay ve açıortaydır" şeklinde tamamlamışlardır. Öğrencilerin eşkenar üçgenin bir kenarı ile yardımcı elemanları arasındaki ilişkileri kurdukları gözlemlenmiştir.

Eşkenar üçgenin iç bölgesinde alınan herhangi bir noktadan üçgenin kenarlarına indirilen dikmelerin uzunlukları toplamının eşkenar üçgenin yüksekliğine eşit olduğu bilgisi ile kenar uzunluğu bilinen eşkenar üçgenin yüksekliğinin $30° - 60° - 90°$ üçgeni yardımıyla bulunacağı bilgisinin kullanımını gerektiren Şekil 3.91.'deki 102. problemi Meltem çözmüştür. Meltem bir kenar uzunluğu bilinen eşkenar üçgenin yüksekliğinin uzunluğuna $30° - 60° - 90°$ özel üçgenini kullanarak ulaşmış ve bu uzunluğun H noktasından kenarlara indirilen dikmelerin toplamına eşit olduğunu ifade ederek değişkenin değerine ulaşmıştır.

102. Problem:

ABC eşkenar üçgeninde H noktasından üçgenin kenarlarına çizilmiş yükseklikler görülmektedir. $|AC| = 16$ cm, $|HF| = 4\sqrt{3}$ cm, $|HE| = 3\sqrt{3}$ cm olduğuna göre $|DH| = x$ değerini bulunuz.



Şekil 3.91. *Öğretim dizisinin 102. problemi*

Geniş açıya ait yüksekliğin üçgenin dışında olduğu bilgisini odak öğrenci Arya 104. problemde (Şekil 3.103.) kullanarak üçgenin alanını doğru bir şekilde bulabilmiştir.

İkizkenar üçgende tepe açısına ait yüksekliğin aynı zamanda kenarortay olduğu bilgisinin kullanımını gerektiren Şekil 3.92.'deki 105. problemi odak öğrenci Ata tahtada çözmüştür.

105. Problem:

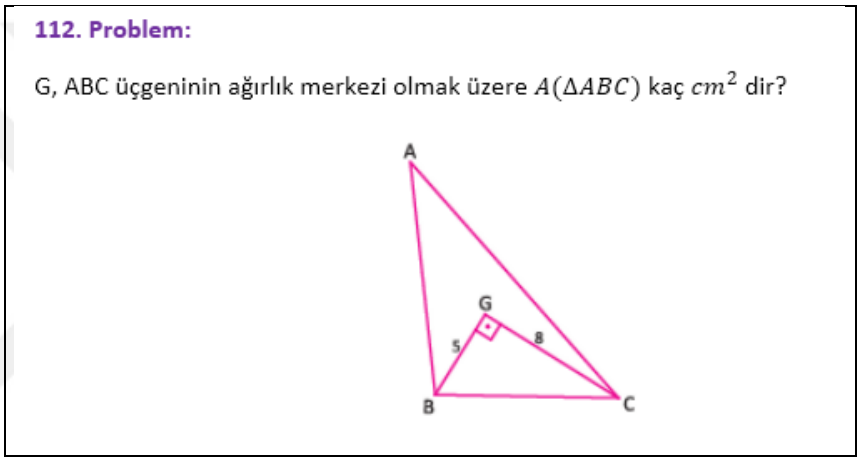
Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 10$ ve $|BC| = 16$ cm ise bu üçgenin alanını bulunuz.

Şekil 3.92. *Öğretim dizisinin 105. problemi*

Odak öğrenci Ata "ikizkenar üçgen çizdiğimizde hem kenarortay hem açıortay oluyor" yorumu ile Pisagor teoremini kullanarak tepe açısına ait yüksekliği 6 cm olarak hesaplamış, ancak üçgenin alanını "$\frac{16.3}{2} = 24$" olarak yanlış bulmuştur. Öğrencilere yöneltilen "dikmeyi B açısından indirseydik hem açıortay hem de kenarortay olur muydu" sorusunu, Ata "olmazdı" şeklinde doğru cevaplarken Pelinsu "olurdu" şeklinde yanlış cevaplamıştır. Odak öğrenci Tuna neden olmayacağını "burada AB eşit AC, ortak açı A açısı. O yüzden olmaz" şeklinde gerekçelendirmiştir. Odak öğrenci Bora "bir tane üçgenin alanını buldu" yorumuyla Ata'nın çözümüne karşı çıkmış ve Ata işlemdeki hatasını düzeltmiştir. Alanın birimi sorulduğunda Ata "santimetre küp" cevabını vermiş, arkadaşları ise Ata'ya karşı çıkmışlardır.

Melike'nin 107. problemdeki (Şekil 3.86.) üçgenin ikizkenar üçgen olduğu prototip algısının düzeltilmesinin ardından odak öğrenci Bora Melike'nin çizdiği doğru parçası ile oluşan üçgende $30° - 60° - 90°$ özel üçgeninden faydalanarak yüksekliği doğru bir şekilde bulabilmiştir. Bora'dan dikme ayağına H yazması istenmiş, fakat Bora yüksekliğe h yazmıştır. Odak öğrenci Lara'nın "*90* ların bulunduğu yer" ve Meltem'in "BC kenarını kestiği nokta" şeklindeki açıklamaları Bora'ya H noktasını nereye işaretlemesi gerektiği ile ilgili yardımcı olmuştur.

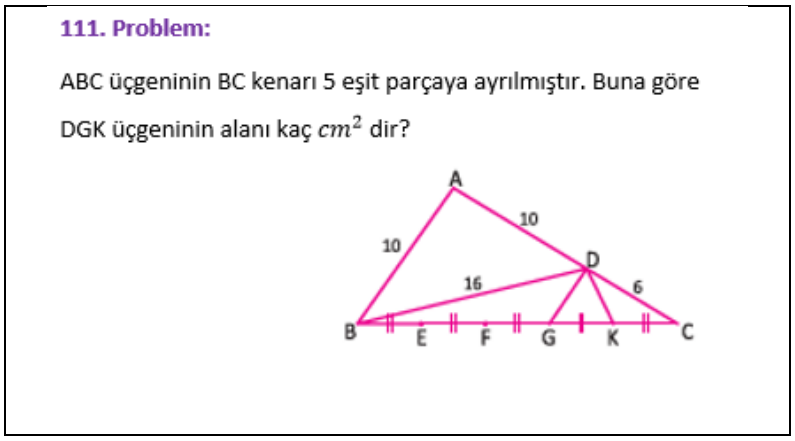
Bir üçgende kenarortayların oluşturduğu üçgenlerin alanlarının eşit olduğu CG-II yazılımı ile öğrencilere gösterildikten sonra Şekil 3.93.'deki 112. problem yöneltilmiştir.



Şekil 3.93. *Öğretim dizisinin 112. problemi*

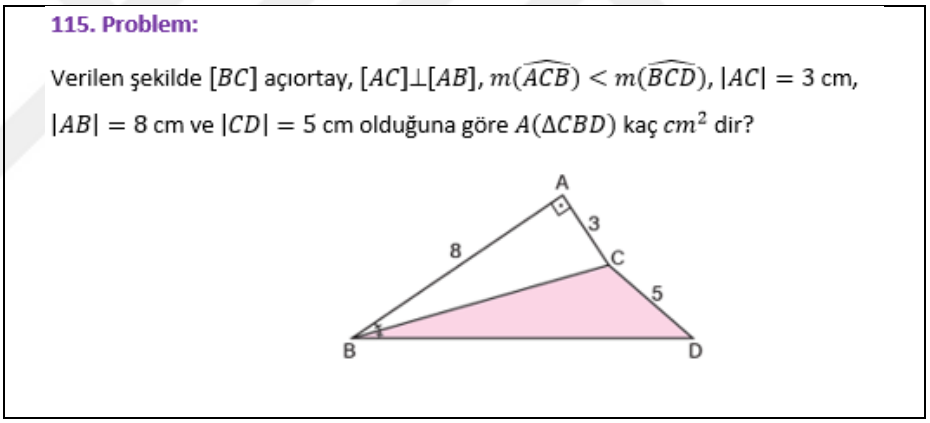
Öğrencilere BGC üçgeninin alanının ABC üçgeninin alanının kaçta kaçı olduğu sorusu yöneltilmiştir. Odak öğrenci Tuna "altıda biri" olduğunu ifade ederken odak öğrenci Lara kenarortaylar ile oluşan üçgenlere ait geometrik kazanımını devreye doğru bir biçimde sokmuş ve böylece "üçte biri" cevabını vermiştir.

Kenar uzunlukları bilinen bir ikizkenar üçgenin yüksekliğini bulmak suretiyle istenen alanın hesaplanabileceğini, Şekil 3.94.'de verilen 111. problemde odak öğrenci Bora ikizkenar üçgenin yüksekliğini Pisagor teoremini doğru bir şekilde uygulayarak bulmuştur. Bora'nın Pisagor teoremini uygulamasının uygun olup olmadığı sorusuna odak öğrenci Ata "evet vardı çünkü ikizkenar üçgen" doğru açıklamasını getirmiştir. Bora ABD üçgeninin alanını 48 br^2 olarak elde etmiştir.



Şekil 3.94. *Öğretim dizisinin 111. problemi*

Açıortay ile ilgili bilginin devreye sokulmasını gerektiren Şekil 3.95.'deki 115. problemde odak öğrenci Kayla, problemin çözümünü geometrik bilgisini doğru ve uygun terminoloji kullanarak ifade etmiştir.



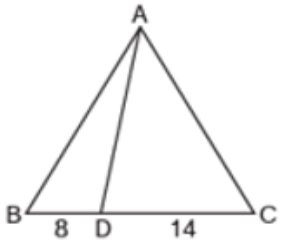
Şekil 3.95. *Öğretim dizisinin 115. problemi*

Odak öğrenci Kayla "açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktadan kenarlara eşit uzaklık vardır" ifadesinde bulunarak problemin çözümünü doğru bir şekilde başlatmıştır. Meltem de iç açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına indirilen dikme ayaklarının açının köşesine eşit uzaklıkta olduğu bilgisini devreye sokarak C noktasından BD doğru parçasına çizilen dikmenin ayağı ile B noktası arasındaki uzaklığın 8 cm olacağını ifade etmiştir.

Ortak yüksekliğe sahip üçgenlerde alanların tabanların alanları ile orantılı olduğu bilgisinin kullanımını gerektiren Şekil 3.96.'daki 116. problemi Utku tahtada çözmüştür.

116. Problem:

Şekilde verilen ABC üçgeninde $|BD| = 8$ cm ve $|DC| = 14$ cm olduğuna göre $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$ sonucunu bulunuz.

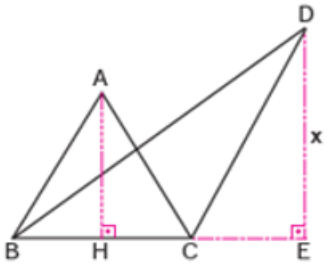


Şekil 3.96. *Öğretim dizisinin 116. problemi*

Utku A noktasından BC kenarına çizilecek bir doğru parçasına işaret ederek "buradan bir yükseklik indiririz ve ikisinin de yüksekliği olur. Ona k diyebiliriz yani $8k$ [ABD üçgeninin alanı kastederek] bir de $14k$ [ADC üçgeninin alanı kastederek]" şeklinde doğru yorumda bulunmuştur. Öğrencide ortak yüksekliğe sahip üçgenlerde alanların tabanların alanları ile orantılı olduğu bilgisinin yerleştiği gözlemlenmiştir. Benzer şekilde tabanları ortak olan iki üçgende alanların yükseklik ile orantılı olduğu kazanımını Utku Şekil 3.97.'de verilen 117. problemde devreye sokmuştur.

117. Problem:

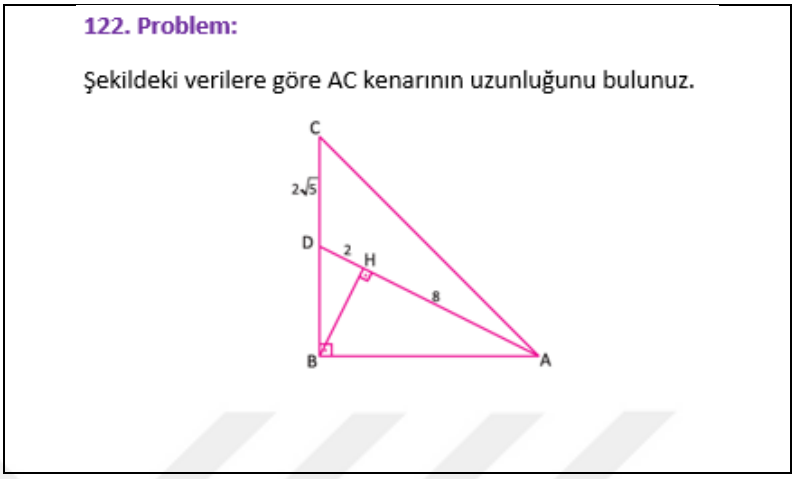
Verilen şekilde $[AH] \perp [BC]$, $[DE] \perp [BC]$, $4A(\Delta ABC) = 3A(\Delta DBC)$ ve $|AH| = 6$ cm olduğuna göre $|DE| = x$ kaç cm.dir?



Şekil 3.97. *Öğretim dizisinin 117. problemi*

Utku "bu sefer tabanlar aynı olur, $\frac{3}{4}$ yani" yorumuyla problemde verilen orantı ilişkisinden ABC ve DBC üçgenlerinin yüksekliklerinin oranına ulaşmıştır.

Şekil 3.98.'deki 122. problem de öğrencilerin geometrik bilgilerini devreye soktukları bir problem olmuştur.



Şekil 3.98. *Öğretim dizisinin 122. problemi*

Problemin çözümü için tahtaya gelen Selin, CAD üçgeni bir dik üçgen olmamasına rağmen "DA kenarı 10, CD kenarı $2\sqrt{5}$, karesi 20…" ifadesinde bulunarak Pisagor teoremini kullanmak istemiştir. Arkadaşları Selin'e CAD üçgeninin dik üçgen olmadığını söyleyince Serhat "benzerlik yapamaz mıyız" sorusunu yöneltmiştir. Bunun üzerine, benzerlik kullanımından ziyade Öklid bağıntısı ve Pisagor teoreminin kullanılmasıyla problemin kolaylıkla çözülebileceği konusunda öğrenciler yönlendirilmiştir. DHB üçgeninde Pisagor teoremi uygulanıp CD ve BD kenarlarının eşit çıkması üzerine odak öğrenci Bora AD doğru parçasını kastederek "o zaman kenarortay oldu" şeklinde doğru yorumda bulunmuştur.

Geometrik düşünme

- <u>İlişki kurarak gerçekleştirilen öğrenmeler</u>: İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında öğrencilerin cebir ve geometri arasında bağlar kurmaya başladıkları 100. problemde (Şekil 3.100.) görülmüştür. Bu problemde Pisagor teoreminin uygulanmasından sonra elde edilen $k^2 = 4$ denklemi ile ilgili olarak "$k^2 = 4$ için $k = -2$ olarak düşünür müsünüz" sorusuna odak öğrenci Bora "hayır çünkü kenar uzunluğu" cevabını vermiştir. Öğrencide kenar uzunluğunun negatif bir değer almayacağı kavrayışı oluşmuştur.

Üçgenin alanının öğrencilere tanıtılmasının üzerine, odak öğrenci Kayla "karede uzun kenar çarpı kısa kenar oluyordu. Onu ikiye bölümü olarak" olarak ifade etmiştir.

Öğrencinin kare ile ifade etmek istediğinin dikdörtgen olduğu anlaşılmıştır. Üçgensel bir bölgenin alanının "*bir kenar uzunluğu ile o kenar uzunluğuna ait yüksekliğin uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir*" tanımının öğrenciler tarafından kullanılması için tahtaya BC kenar uzunluğu 12 br, AC kenarına ait yüksekliği 6 br olan bir ABC üçgeni çizilmiş ve üçgenin alanını bulmaları istenmiştir. Odak öğrenci Kayla "burada taban verilmemiş" şeklinde doğru yorumda bulunmuş ve odak öğrenci Bora "*12* taban değil ki" doğru yorumunu yapmıştır. Öğrenciler bu veriler ile üçgenin alanını bulunamayacağını belirtmiş ve hiçbir öğrenci alanı 36 birim kare bulmamıştır. Öğrencilerin üçgenin alanının kenar ve kenara ait yükseklik verileri ile elde edileceği somut kavrayışının gerçekleştiği gözlemlenmiştir.

104. problemde (Şekil 3.103.) iç açıortayın ayırdığı doğru parçaları ile açıortayın kolları arasındaki oran ilişkisinin değerlendirilmesinin ardından Buse "ADC üçgeninde A açısı $22k$ yı görüyor, ABD üçgeninde A açısı 6 yı görüyor. Acaba $22k$ 6 ya mı eşit" sorusu ile düşüncesini paylaşmıştır. Öğrencinin farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıların gördüğü kenarların uzunluklarının eşit olacağı yanılgısının sürdüğü gözlemlenmiştir.

Benzerlik oranının bilindiği bir üçgende alanların oranının ne olacağı üzerine yapılan tartışmada öğrencilerin alanı iki boyutlu olarak değerlendiremedikleri gözlemlenmiştir. 118. problemde (Şekil 3.99.) Utku ise "alan oranı $\frac{1}{4}$ olmaz mı" sorusu ile görüşünü belirtmiştir. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{4}$ arasında nasıl bir ilişki olduğu öğrencilere sorulmuş ve Buse "yarısı değil mi" cevabını vermiştir. Buse'nin cevabında ne neyin yarısı belli olmamıştır. Utku Buse'nin cevabını "alan oranı benzerlik oranının yarısı değil mi" ifadesi ile açıklık getirmeye çalışmıştır. Öğrencilerin alanların oranını bir kat ilişkisi olarak algıladıkları görülmüştür. Büyük üçgenin küçük üçgene benzerlik oranı olan 2 ile alanların benzerlik oranı 4 ün arasındaki ilişki sorulduğunda da Utku "*2* katı" cevabını vermiştir. Araştırmacının alanın iki boyutun çarpımı olduğu açıklamasını yapması üzerine, odak öğrenci Kayla "karesi" olduğu doğru cevabına ulaşmıştır.

Kenarortayların kesişimi ile oluşan üçgenlerin alanlarının eşit olduğu CG-II yazılımı kullanılarak gösterilmiş ve öğrenciler arasında aşağıdaki tartışma gerçekleşmiştir.

> Araştırmacı: Ağırlık merkezi neydi?
>
> Buse: 2 ye 1 oranı.
>
> Utku: Kenarortayların üzerinde olan bir şeydi.
>
> Odak öğrenci Kayla: Açılardan çıkar kenarortayın kesişmesiyle oluşan. Meltem destekliyor.

Araştırmacı: Kenarortayı Cabri'de nasıl çizeceğiz?

Odak öğrenci Tuna: Bir açıdan diğer kenara doğru uzatacağız. Bir doğru parçası çizeceğiz.

Araştırmacı: Ama kenarortay olduğunu nasıl bileceğim onun?

Odak öğrenci Kayla: Önce o kenarın uzunluğunu ölçmemiz gerekiyor. Eşit bir şekilde ikiye ayıracağım.

Araştırmacı: [Çizim gerçekleştiriliyor] Oluşan üçgenlerin alanları arasında nasıl bir ilişki vardır?

Odak öğrenci Kayla: Hepsi eşittir.

Utku: Üçü diğer üçünün 2 katı.

Araştırmacı: Hangi üçü?

Utku: 2 ye 1 oranı diye bir şey var. 2 ye 1 oranı olduğuna göre birinin yüksekliği 2 olacak, diğerininki 1 olacak.

Buse: Benzerlik doğrultusunda.

Araştırmacı: Nasıl bir benzerlik var burada?

Buse: 2 ye 1 oranı.

Meltem: Bence hepsi aynı.

Odak öğrenci Arya: Hepsi değil de karşılıklı olanlar aynı.

Sınıf içinde gerçekleşen bu tartışma, Buse'nin ağırlık merkezini özellik sunarak tanımlaması, Utku'nun kenarortaylar ile ilgili olduğunu belirtmesi ve odak öğrenci Kayla ile Meltem'in kenarortayların kesim noktası olduğunu belirtmesiyle başlamıştır. Ancak öğrencilerin CG-II yazılımında kenarortayı, tıpkı açıortayı çizme ile ilgili düşünceleri gibi, köşe ile köşenin karşısındaki kenar üzerinde bulunan noktayı birleştiren bir doğru parçası çizip bu doğru parçasının ayağını kenar üzerinde ayarlayarak elde etmeye çalıştıkları gözlemlenmiştir. Meltem ve odak öğrenci Kayla oluşan üçgenlerin eş alanlara sahip olduğunu belirterek doğru cevabı vermişler, fakat bunun için bir dayanak öne sürmemişlerdir. Utku ise ağırlık merkezinin kenara bir birim, köşeye iki birim uzaklıkta olacağı bilgisini üçgenlerin alanlarına genellemiş ve üç tane üçgenin alanının diğer üçünün iki katı olduğunu düşünmüştür. Odak öğrenci Arya ise herhangi bir dayanak olmaksızın, karşılıklı üçgenlerin alanlarının aynı olduğunu ifade etmiştir.

122. problemde (Şekil 3.98.) odak öğrenci Ata "muhteşem üçlü mü" sorunu yönelterek problemin çözümü için girişimi başlatmıştır. Öğretim dizisi boyunca araştırmacı tarafından kullanılmamış olan bu ifadenin ne anlama geldiği sorulunca Ata "90° nin gördüğü kenar yüksekliğe eşit" cevabını vermiştir. Odak öğrenci Bora "öyle olsaydı hipotenüs olmazdı" şeklindeki doğru gerekçe ile Ata'ya karşı çıkmıştır.

3.4.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftasında sınıf-içi uygulamalar ve tartışmalarda öğrencilerin ifade ve eylemleri genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon temaları altında sunulmuştur. Tablo 3.29.'da bu temalar altındaki bileşenlere yer verilmiştir.

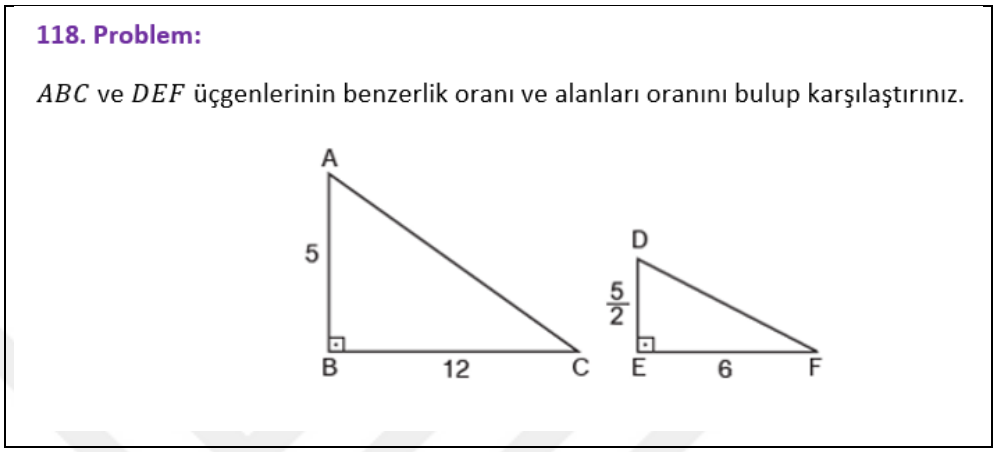
Tablo 3.29. *İkinci etap öğretim dizisinin üçüncü haftası - cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Aritmetik işlem becerileri **Tuna**, Utku, Buse – (118. problem) - Benzerlik oranının bilindiği üçgenlerde alanlar oranının kat ilişkisi olduğunu düşünmeleri.	Cebirsel ön bilgiler Bahar, Eren - (100. problem) Kenarlar arasındaki orantı ilişkisini doğru kurmaları ve ihtiyaçları doğrultusunda genişletebilmeleri. Utku - (103. problem) Üçgenin alanını veren farklı kenar uzunlukları ile o kenar uzunluklarına ait yüksekliklerin çarpımının ikiye bölümü ifadelerindeki ikiye bölme işlemlerinin ihmal edilebileceği kavrayışına ulaşması. **Bora** - (109. problem) Kenarlar arasındaki orantı ilişkisini doğru bir şekilde yorumlaması, **Tuna** - aynı yüksekliğe sahip farklı üçgenlerde yüksekliğin sayısal değerinin ihmal edilebileceği düşüncesine sahip olması. Utku - (115. problem) Üçgenlerin alanları oranında alan formülündeki ikiye bölme işleminin gerekmediği kavrayışına ulaşması.	Değişkenin doğasını anlama: **Bora** - (100. Problem) Kenar uzunluğunun negatif olmayacağını bilmesi. Cebir ve geometri arasında bağ kurması. Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme **Tuna**, Meltem, **Arya** - (104. problem) AB ve DC kenarlarını iç açıortay özelliğini sağlayacak biçimde kullanılan değişken cinsinden ifade edememeleri. Utku - (108. problem) – bir doğru parçasını değişken cinsinden ifade edebilmesi. (110. problem) ortak yüksekliğe sahip üçgenlerin alanlarının taban uzunlukları ile orantılı olduğu bilgisini devreye sokarak Utku - EAB üçgeninin alanının $3S$, **Tuna** - EDC üçgeninin $5S$ olarak elde etmeleri.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik işlem becerileri: Benzerlik oranının bilindiği üçgenlerde alanlar oranını üzerine gerçekleşen tartışmada öğrencilerin alanlar oranının kat ilişkisi olduğunu düşündükleri Şekil 3.99.'da verilen 118. problemde gözlemlenmiştir. Odak öğrenci Tuna "benzerlik oranı $\frac{1}{2}$, alan oranı biraz farklı çıkıyor" yorumunda bulunmuştur. Utku ise "alan oranı $\frac{1}{4}$ olmaz mı" sorusu ile görüşünü belirtmiştir. $\frac{1}{2}$ ile $\frac{1}{4}$ arasında nasıl bir ilişki olduğu öğrencilere sorulmuş ve Buse "yarısı değil mi" cevabını vermiştir. Buse'nin cevabında ne neyin yarısı belli olmamıştır. Utku Buse'nin cevabını "alan oranı benzerlik oranının yarısı değil mi" ifadesi ile açıklık getirmeye çalışmıştır. Öğrencilerin alanların

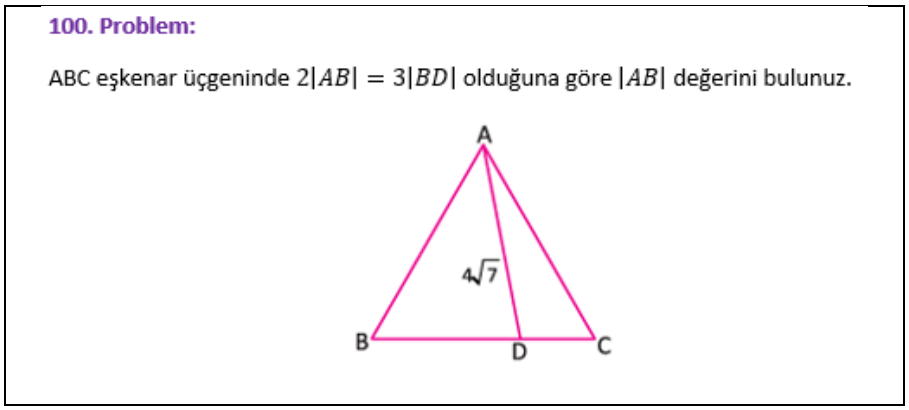
oranını bir kat ilişkisi olarak algıladıkları görülmüştür. Büyük üçgenin küçük üçgene benzerlik oranı olan 2 ile alanların benzerlik oranı 4 ün arasındaki ilişki sorulduğunda da Utku "*2* katı" cevabını vermiştir. Araştırmacının alanın iki boyutun çarpımı olduğu açıklaması üzerine, odak öğrenci Kayla "karesi" olduğu doğru cevabına ulaşmıştır.



Şekil 3.99. *Öğretim dizisinin 118. problemi*

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Kenarlar arasındaki orantı ilişkisinin değerlendirilmesinin gerektiği Şekil 3.100.'deki 100. problemde öğrenciler orantı ilişkisini doğru bir şekilde kurmuşlardır.

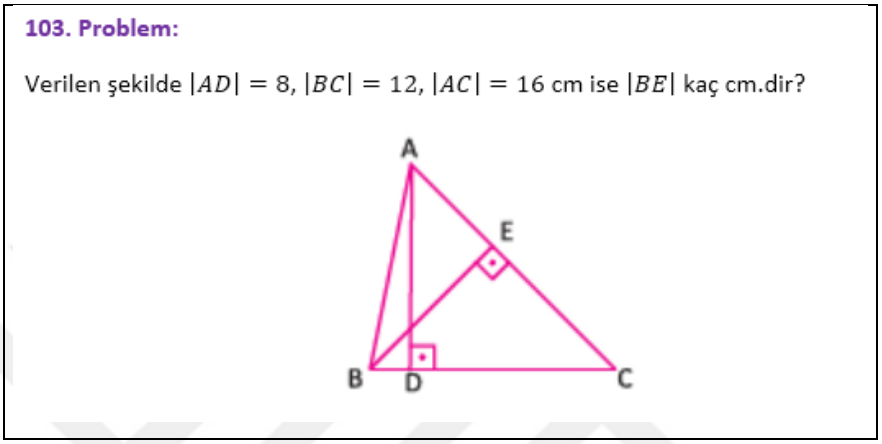


Şekil 3.100. *Öğretim dizisinin 100. problemi*

Bahar "AB $3k$, BD $2k$" yorumuyla orantı ilişkisini doğru bir şekilde kurmuştur. Bahar'ın yorumunu başka nasıl yazabileceğimiz sorusuna Eren "$6k$ ve $4k$" cevabını vermiştir. Kenar uzunluğunun ikiye bölünmesi gerekeceği için öğrencilere bu soru

sorulmuş ve Eren orantıyı doğru bir şekilde genişletmiştir. Öğrencilerin orantı ilişkilerini doğru bir biçimde değerlendirebildikleri ve ihtiyaçları doğrultusunda genişletebildikleri gözlemlenmiştir.

Üçgenin alan formülünün kullanımını gerektiren Şekil 3.101.'de verilen 103. problemi odak öğrenci Tuna tahtada çözmüştür.



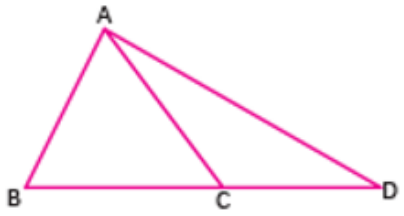
Şekil 3.101. *Öğretim dizisinin 103. problemi*

Odak öğrenci Tuna "öncelikle ABC üçgeninin alanını buluruz. Alanı *48*, AC kenar uzunluğunun *16* olduğunu söylüyor" şeklinde çözüme doğru bir şekilde başlamıştır. Utku "*8* çarpı *12* eşit *16* çarpı x yaparım" yorumunda bulunmuştur. Utku'nun üçgenin alanını veren farklı kenar uzunlukları ile o kenar uzunluklarına ait yüksekliklerin çarpımının ikiye bölümü ifadelerindeki ikiye bölme işlemlerinin ihmal edilebileceği kavrayışına ulaştığı gözlemlenmiştir.

Kenarlar arasındaki orantı ilişkisinin elde edilmesi ve ortak yüksekliğe sahip üçgenlerin alanları ile ilgili olan Şekil 3.102.'deki 109. problemde odak öğrenci Bora orantı ilişkisini "BC $5k$, CD $4k$" olarak doğru bir şekilde ifade etmiştir. Problemin çözümü için odak öğrenci Tuna'nın "Ben k yı buldum. Yüksekliği dahil etmedim. $\frac{9k}{2} = 54$ ten $k = 12$ buldum" ifadesinden öğrencinin ABC ve ACD üçgenlerinin yüksekliğini "1 birim" kabul ettiği gözlemlenmiştir. Öğrenci aynı yüksekliğe sahip farklı üçgenlerde yüksekliğin sayısal değerinin ihmal edilebileceği örtük düşüncesine sahip olduğu görülmüştür.

109. Problem:

ABD üçgeninde B, C ve D doğrusaldır. $4|BC| = 5|CD|$ ve ABD üçgeninin alanı 54 cm^2 ise $A(\Delta ABC)$ kaç cm^2 dir?



Şekil 3.102. *Öğretim dizisinin 109. problemi*

Üçgenlerin alanları oranının sorulduğu 115. problemde (Şekil 3.95.) Utku'nun alan formülündeki ikiye bölme işleminin gerekmediği kavrayışına ulaştığı gözlemlenmiştir. Alan formülündeki ikiye bölmeyi neden yapmadığını sorunca "ama sonuçta birbirlerini götüreceğine göre anlamı kalmıyor" şeklinde cevap vermiştir.

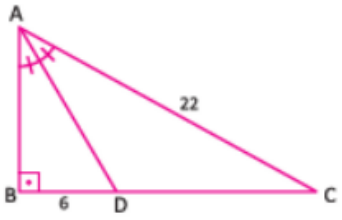
Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin doğasını anlama: 100. problemde (Şekil 3.100.) üçgenin yüksekliğinin k cinsinden bulunmasının ardından öğrenciler Pisagor teoremini uygulayarak k değişkeninin değerini 2 bulmuşlardır. Araştırmacının "$k^2 = 4$ için $k = -2$ olarak düşünür müsünüz" sorusuna odak öğrenci Bora "hayır çünkü kenar uzunluğu" cevabını vermiştir. Bora'nın açıklamasının doğru olduğu ve öğrencinin cebir ve geometri arasında bağ kurduğu gözlemlenmiştir.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme: Üçgende iç açıortayın ait olduğu kenarı üçgenin kolları ile orantılı parçalara ayırdığı bilgisinin kullanımını gerektiren Şekil 3.103.'deki 104. problem aynı zamanda geniş açılı bir üçgende alan formülünün uygulanmasına olanak sağlamıştır. Öğrencilere iç açıortayın ait olduğu kenarı diğer kenarlar ile orantılı parçalara ayırdığının hatırlatılmasının ardından "DC ye $22k$ derken AB ye ne deriz" sorusu yöneltilmiş ve odak öğrenci Arya "$6k$", Meltem ve odak öğrenci Tuna "$6t$" cevabını vermişlerdir. Arya'nın kullandığı değişken doğru iken, diğer öğrencilerin kurduğu orantı ilişkisi yanlış olmuştur.

104. Problem:

ADC üçgeninin alanını bulunuz.

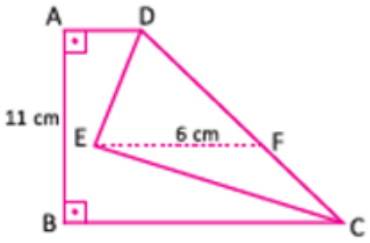


Şekil 3.103. *Öğretim dizisinin 104. problemi*

Şekil 3.104.'de verilen 108. problemde yükseklikleri toplamı verilmiş iki üçgenin alanları toplamını bulma üzerine kurgulanmıştır.

108. Problem:

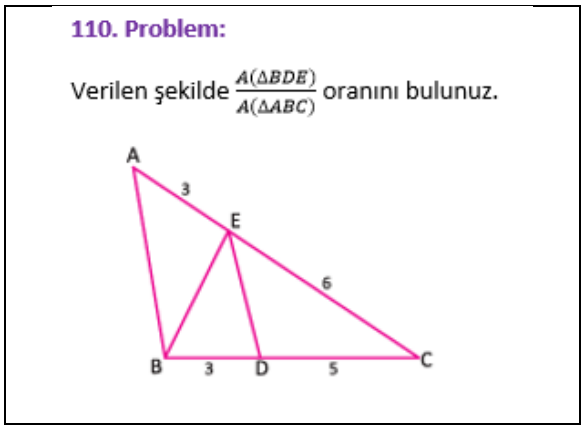
$ABCD$ dörtgeninde $[AB] \perp [BC]$, $[EF] // [BC]$ olmak üzere $|AB| = 11$ cm ve $|EF| = 6$ cm ise DEC üçgeninin alanını bulunuz.



Şekil 3.104. *Öğretim dizisinin 108. problemi*

DEC üçgeninin alanına DEF ve EFC üçgenlerinin alanlarının toplamı olarak bakılması gerektiği için, "DEF üçgeninin EF tabanına ait yükseklik h olursa EFC üçgeninin yüksekliğinin ne olacağı" öğrencilere sorulmuş ve Utku "$11 - h$" doğru cevabını vermiştir.

Ortak yüksekliğe sahip birden fazla üçgeni içeren Şekil 3.105.'deki 110. problemde öğrenciler üçgenlerin alanlarını taban ile orantılı olacak şekilde bir değişken yardımıyla ifade etmeye çalışmışlardır.



Şekil 3.105. *Öğretim dizisinin 110. problemi*

Öğrenciler birim karelik alan için S değişkenini kullanmışlar ve Utku EAB üçgeninin alanının "$3S$" ve odak öğrenci Tuna ise EDC üçgeninin "$5S$" olduğunu ifade etmişlerdir. Öğrencilerin ortak yüksekliğe sahip üçgenlerin alanlarının taban uzunlukları ile orantılı olduğu bilgisini devreye sokmaya çalıştıkları gözlemlenmiştir.

3.5. Son Klinik Görüşmelere İlişkin Bulgular

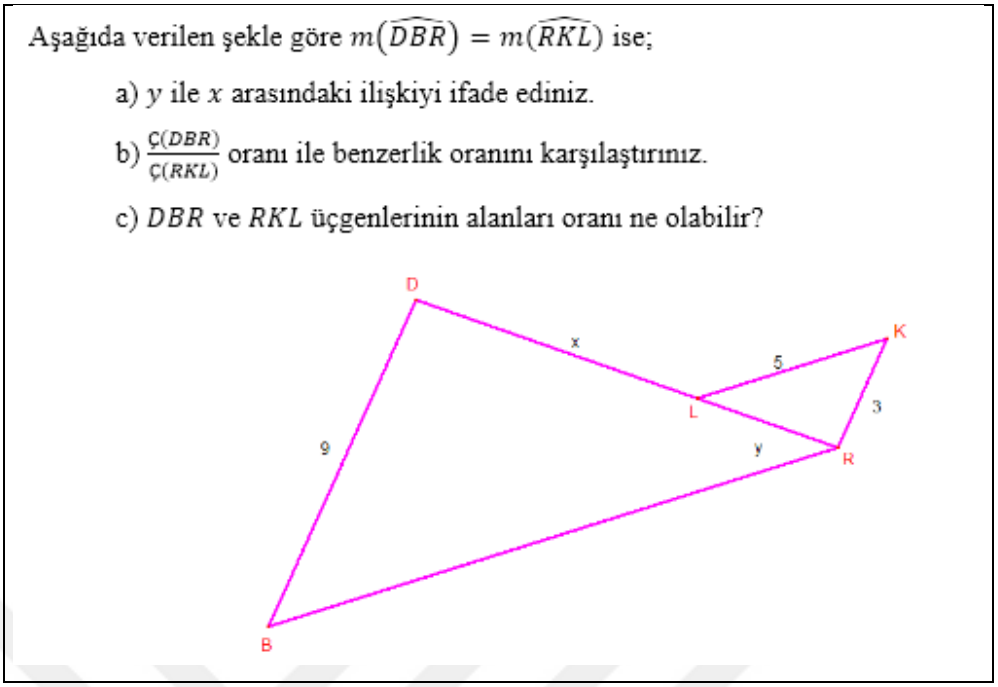
Üç hafta süre ile devam etmiş olan ikinci etap öğretim dizinin ardından sırasıyla düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip Lara, Bora, Kayla, Tuna, Arya ve Ata isimli altı odak grup öğrencisi ile son klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretim dizisi sürecinde geometrik ve cebirsel olarak ele alınan ve tartışılan kavramları öğrencilerin nasıl yapılandırdıklarını ayrıntılı olarak anlamak amacıyla gerçekleştirilen son klinik görüşmelerden elde edilen bulgular;

- Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi
- Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi

temaları altında sunulmuştur.

3.5.1. Son klinik görüşmenin birinci problemine ilişkin bulgular

Üçgenlerde benzerlik kavramının geometrik anlamda odak noktası olduğu son klinik görüşmenin Şekil 3.106.'da verilen birinci probleminde cebirsel odak oran-orantı kavramındadır. Bu problemin çözümü için temel gereksinim geometri bilgi sınıfına ait kavramlarla ilgili kazanımlar iken çözümün sürdürülebilir oluşu öğrencinin ya niceliksel muhakemeye sahip olması ya da cebirsel muhakemenin hakim olduğu sembolik manipülasyon becerisidir.



Şekil 3.106. *Son klinik görüşmenin birinci problemi*

3.5.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin geometrik ön bilgileri ve sahip oldukları geometrik bilgilerini uygulama biçimleri Tablo 3.30.'da sunulmuştur.

Tablo 3.30. *Son klinik görüşmenin birinci probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
<u>Geometrik ön bilgiler</u> **Kayla** - üçgenlerin benzerlik oranının alanlarının arasında da mevcut olduğunu düşünmesi. **Tuna** - açı-açı benzerlik teoremini doğru temellendirememesi ancak benzerlik bağıntısını doğru kurması ve uygulaması. **Ata** – üçgenin alanın sadece taban ve tabana ait yükseklik verileri ile bulunabileceğini düşünmesi, üçgenin alan formülünü bilmemesi. **Arya** - kenar-kenar-kenar teoremi görmeye çalışması. **Tuna hariç** - alan ile ilgili kavrayışların yetersiz oluşu. **Öğrencilerin tümü** - "Benzerlik oranının üçgenlerin yardımcı elemanları için de geçerli olduğu" bilgisinin mevcut olmaması. <u>Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili okuma</u> **Ata** - $m(\widehat{DBR}) = m(\widehat{RKL})$ temsilini "$mDBR$ üçgeni eşittir $mRKL$ üçgeni" olarak okumasının benzerlik bağıntısının verilmiş olmasını düşündürmesi. <u>Prototip algılar</u> **Lara** - 3 ve 5 birim kenar uzunluklarına sahip herhangi bir üçgenin diğer kenarının 4 birim olduğunu düşünmesi.	<u>Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme becerisi</u> **Kayla**, **Tuna** ve **Arya** birbirine eşit açıları çizim üzerinde doğru tespit etmeleri. **Arya** - DBR üçgenine ait DR kenarını doğru tespit edememesi. **Kayla** - eş ölçülü açıların gördüğü kenarları doğru bir şekilde tespit edebilmesi, bu doğru parçalarının orantılı parçalar olduğunu ifade edebilmesi.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Kayla'nın benzer üçgenlerin çevre ve alan oranları hakkında "çevreleri birbirine oran ise zaten alanları da direk otomatikman şey olabilir, dediğim gibi burası $1S$ ile burası $3S$ oluyor. Yani direk şey olabilir" şeklindeki görüşü öğrencinin üçgenlerin benzerlik oranının alanlarının arasında da mevcut olduğunu düşündüğünü göstermiştir.

Tuna'nın KRL ve KLR açılarına sırasıyla a ve b, RDB ve BRD açılarına sırasıyla a ve b değişkenlerini atayarak $\Delta LKR \approx \Delta RBD$ bağıntısını yazmıştır. Tuna'nın oluşturduğu benzerlik bağıntısı birbirini tümleyen açılarda açı-açı benzerlik teoreminin kullanılışı şeklinde gerçekleştirdiği görülmüştür. Tuna'nın bu problem için açı-açı benzerlik teoremini doğru bir şekilde temellendiremediği, ancak açı-açı benzerlik bağıntısını doğru kurduğu, benzerlik bağıntısını uygulama biçiminin de doğru olduğu gözlemlenmiştir.

Ata üçgenlerin alanlarının oranını bulabilmek için yükseklikleri bulması gerektiğini düşünerek "ama biz burada y yi bulamadığımız, bilmediğimiz için bulamayabiliriz. Çünkü y, bu iki üçgenin yani, bu [DBR üçgenini göstererek] iki uzunluk birbirine eşit olsaydı ikizkenar üçgenden diklik indirip, oradan dikliği bulup alanı bulabilirdik" yorumunda bulunmuştur. Ata'ya bu iki üçgenin yüksekliğini nasıl bulacağı sorulmuş, öğrenci de "hipotenüs yaparak, şu [DBR üçgeninin içinde kalan dikliği göstererek] uzunluğu bulup, bununla [DBR üçgeninin içinde kalan dikliği göstererek] bunun [BR kenarını göstererek] toplamını ikiye bölündüğünü yapıp alanı bulacaktık" yanıtını vermiştir. Ata ayrıca DBR üçgeninin B köşesinden iki farklı yükseklik çizmiş ve ikisinin de aynı uzunlukta olduğunu söylemiştir. Bunun sebebi olarak da "bu kenarın yani şu kenarın [DR kenarını göstererek] uzunluğunu bulamadığımız için net bir şey çizemeyiz" açıklamasını yapmıştır. Öğrencinin üçgenin alan formülünü bilmediği gözlemler arasında yer almıştır.

Arya kenar-açı-kenar benzerlik teoreminin koşullarını sağlayamamıştır. Arya'nın daha ziyade kenar-kenar-kenar teoremini görmek istediği, "eğer x ve y birbirinin katı sayılar olursa üçgenlere benzer üçgen diyebiliriz" ifadesinden anlaşılmıştır.

"*Benzerlik oranının üçgenlerin yardımcı elemanları için de geçerli olduğu*" bilgisinin öğrencilerde mevcut olmadığı görülmüştür. Tuna hariç diğer öğrencilerin alan ile ilgili kavrayışlarının da yetersiz olduğu belirlenmiştir.

- Geometrik nesneye karşılık gelen sembolik temsili okuma: Ata eşit ölçülü açı çiftini temsil eden $m(\widehat{DBR}) = m(\widehat{RKL})$ ifadesini "$mDBR$ üçgeni eşittir $mRKL$ üçgeni" olarak okumuş, bu üçgenlere ait benzerlik bağıntısının verildiğini düşünmüş ve çözümünü bu doğrultuda yürütmüştür.

- Prototip algılar: Lara problemi okuduktan sonra LR uzunluğuna 4 yazmıştır. Öğrenci 3 ve 5 birim kenar uzunluklarına sahip herhangi bir üçgenin diğer kenarının 4 birim olduğunu düşündüğü gözlemlenmiştir.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme becerisi: Kayla, Tuna ve Arya birbirine eşit olan açıları çizim üzerinde doğru bir şekilde tespit etmiştir.

Arya'nın DBR üçgenine ait DR kenarını doğru tespit edemediği "bunları [sırasıyla kalemi ile y ve x uzunluklu kenarları göstererek] da *3* katı gibi düşünürsek" yorumundan anlaşılmıştır.

Kayla eş ölçülü açıların gördüğü kenarları doğru bir şekilde tespit edebilmiş ve bu doğru parçalarının orantılı parçalar olduğunu ifade edebilmiştir.

3.5.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapıları, sembolik manipülasyon becerileri ve niceliksel muhakemeleri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.31.'de genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon ve niceliksel muhakeme temalarına ilişkin alt temalar verilmiştir.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik işlem becerileri: Lara RLK üçgeninin bir kenarının 3, DBR üçgeninin bir kenarının 9 birim verilmesinden dolayı üçgenlerin kenarları arasında "üç kat ilişkisi" olduğunu ifade etmiştir. Ancak bu sadece aritmetiksel bir tespit olmuştur, çünkü problemde verilen DBR ve RKL açılarının eşit ölçülü olmasını öğrenci kullanmadığı gibi bunu kenar-açı-kenar benzerlik teoremi temelinde söylememiştir. Lara $|BR| = 15$ olarak doğru bulmuştur, ancak bu bulgularının temeli sadece üçgenlerin birer kenarları arasındaki oran ilişkisidir.

Tablo 3.31. *Son klinik görüşmenin birinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	NİCELİKSEL MUHAKEME
Aritmetik işlem becerileri **Lara** – benzerliği aritmetiksel veri üzerine kurması. Düşüncesi matematiksel anlamda yanlış ifade etmesi. **Ata** - seri aritmetik işlemler yürütmesi, operatörleri sözlü belirtmemesi, zihnindeki oran ilişkisini sözel olarak yanlış ifade etmesi. **Arya** - kenarlar arasındaki oranı 3 bulmasına rağmen BR uzunluğunu 25 cm elde etmesi.	Cebirsel ön bilgiler **Tuna** - DBR ve RKL çevre oranını doğru ifade etmesine rağmen $x = 2y$ ilişkisini çevre oranını 3 olarak elde etmesine mani oluşu. Elde ettiği $\frac{24+x+y}{8+y}$ ifadesinde sadeleştirme yapamayacağının bilincinde olması. "Sadeleştirme" terimi yerine "yok etme metodu" ifadesini kullanması. Sadeleştirme yapamayınca çevrenin oranını benzerlik oranına eşitlemesi ancak eyleminin anlamını bilmemesi. $x + y = 3y$ denklemine ulaşıp çözüme devam etmemesi. Üçgenlerin alanlarının oranı için üçgenlerin ayrı ayrı alanlarını oranlama yoluna gitmesi. **Ata** - üçgenlerin çevrelerini birbirine oranlayarak $x = 2y$ ilişkisini devreye sokması. Benzerlik oranı ile üçgenlerin çevreleri oranının aynı olduğu sonucuna ulaşması. Denklem kurma **Lara'nın** sözel ifadesini matematiksel olarak ifade edememesi x değişkenine sayısal değerler atamasına sebep oluşu. **Kayla** - "DR kenarı LR nin 3 katı" ifadesini cebirsel olarak $\frac{3(x+y)}{y}$ ve $\frac{3\|DR\|}{\|LR\|}$ biçiminde yanlış temsil etmesi. **Tuna** - Elde ettiği $3x = 6y$ denklemini "x imiz y nin 2 katı" olarak doğru sözlü ifade edişi. **Ata** - yazdığı orantıdan $x = 2y$ denklemine ulaşması.	Sembolik temsilleri kullanma **Kayla** - LR ve DR doğru parçalarını $\|DR\| = x + y$ ve $\|LR\| = y$ şeklinde ifade edişi. **Tuna** - DBR ve RKL üçgenlerinin alanlarını oranlamak için çizdiği yüksekliklere farklı değişkenler ataması. Ata - benzerlik bağıntısından $\frac{\|DB\|}{\|RK\|} = \frac{\|RB\|}{\|KL\|}$ şeklinde yazdığı temsillerin doğru oluşu. RB uzunluğunu A değişkeni ile temsil etmesi ve geleneksel anlamda köşeleri temsil etmekte kullanılan etiketlerin rolünden farklı olduğunun ayırdında olması. Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme **Kayla** - "y, $x + y$ nin 3 e bölümü" şeklindeki ifadesini matematiksel olarak ifade edememesi değişkenleri birbiri cinsinden yazmasına engel oluşu. **Ata** - x ve y değişkenlerini birbiri cinsinden ifade edebilmesi ve çevreler oranında kullanabilmesi. **Arya** - x ve y değişkenlerinin birbirinin katı olduğunu sezmesi, bunları birbiri cinsinden yazamaması. Sembolik manipülasyon becerisi **Tuna** – Elde ettiği $x = 2y$ denkleminin çizim üzerinde ne anlama geldiğini yorumlayamaması. **Ata** – Elde ettiği $x + y = 3y$ denklemi için "x eşittir $2y$ ye bedel" yorumunu çizim üzerinde değerlendirmesi Okuduğu tüm temsiller ve yaptığı cebirsel işlemleri çizim üzerinde izlemesi.	**Kayla** - üçgenlerin çevre oranı hakkında yaptığı yorum bilinmeyen kenar uzunluklarına sahip benzer iki üçgenin çevreleri üzerine niceliksel muhakemeye sahip olduğunu göstermesi. **Tuna** - Yürüttüğü cebirsel stratejinin niceliksel ve cebirsel muhakemeden yoksun olması problemin b ve c şıkları için çözüm üretememesine sebep oluşu. **Ata** – çözümü cebirsel olmakla beraber gerçekleştirdiği sembolik manipülasyonu çizim üzerinde incelemesi cebirsel muhakemeye işaret.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik işlem becerileri: DR kenar uzunluğu hakkında, Lara $y = 4$ kabulü ile, " DL ye bir sayı vereceğiz, LR ile onu toplayıp 3 katını alacağım" yorumunda bulunmuştur. Lara'nın ifadesinin doğru biçimi"DL ile LR doğru parçalarının toplamının $\frac{1}{3}$ i LR dir" şeklindedir.

Ata'nın aritmetik işlem becerilerinin diğer öğrencilere kıyasla daha seri olduğu görülmüştür. Ata önceki klinik görüşmelerdeki gibi örneğin "RK, RB, KL, [$\frac{|DB|}{|RK|} = \frac{|RB|}{|KL|}$ yazıyor]. DB 9, RK 3, RB, RB yi bilmiyoruz, KL, KL 5, RB yi bilmiyoruz [$\frac{9}{3} = \frac{A}{5}$ yazıyor]" şeklinde operatörleri söylemeden işlemleri yürüttüğü gözlemlenmiştir. Üçgenler arasında benzerlik oranının 3 olduğunu bulan Ata "bu [eliyle RKL üçgenine işaret ederek] bu üçgenin [DBR üçgenine işaret ederek] 3 katı" yorumunda bulunmuştur. Öğrencinin oran ilişkisini yanlış ifade ettiği görülmüştür.

Arya üçgenlerin kenarları arasındaki oranın 3 olduğunu ifade etmesine rağmen BR kenar uzunluğunun KR ile ilişkili olarak 25 cm olduğunu söylemiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Tuna x ve y değişkenleri arasındaki ilişkiyi elde ettikten sonra DBR ve RKL üçgenlerinin çevrelerinin oranını $\frac{24+x+y}{8+y}$şeklinde doğru bir şekilde yazmıştır. Ancak $x = 2y$ ilişkisini kullanmaması DBR üçgeninin çevresinin RKL üçgenin çevre oranını 3 olarak elde etmesine mâni olmuştur. Tuna $\frac{24+x+y}{8+y}$ ifadesi ile ilgili "Yok etme metodu kullanamayız çünkü y leri yok edemeyiz çünkü çarpma işlemi olmalı" yorumunda bulunmuştur. Öğrencinin "yok etme metodu" ifadesi ile kast etmek istediğinin sadeleştirme olduğu, yaptığı açıklamadan anlaşılmıştır. Sadeleştirme yapamayınca $\frac{24+x+y}{8+y} = \frac{3}{1}$ orantısını kurmuştur. Tuna bu eylem ile DBR ve RKL üçgenlerinin çevrelerinin oranını 3 olarak kabul ettiğinin farkında olmadığı gözlemlenmiştir. Sembolik manipülasyonu sonucunda " $x + y = 3y$ " denklemine ulaşmış, fakat sonrasında çözüme devam edememiştir. Tuna'nın elde ettiği bu denklemin önceden bulduğu $x = 2y$ denklemi olduğunu fark etmemesi nedeniyle, stratejisi makul sayılmamıştır. Tuna üçgenlerin alanlarının oranı için üçgenlerin ayrı ayrı alanlarını oranlama yoluna gitmiş, öğrencinin üçgende alan formülünü bildiği ve uygulayabildiği gözlemlenmiştir. Tuna DBR ve RKL üçgenleri için birer yükseklik çizmiş, bu

yükseklikliklerin uzunlukları için farklı değişkenler atamıştır. "Benzerlik oranının üçgenlerin yardımcı elemanları için de geçerli olduğu" bilgisi öğrencide mevcut olmadığı ve $x = 2y$ ilişkisini devreye sokamadığı için problemin c şıkkında bir sonuca ulaşamamıştır.

Ata da Tuna gibi üçgenlerin çevrelerini birbirine oranlayarak $\frac{24+x+y}{8+y}$ ifadesini yazmıştır. $x = 2y$ ilişkisini bu oranda kullanarak $\frac{24+3y}{8+y}$ oranına ulaşmıştır. Bunun üzerine "yani aralarında üç katlık bir oran var" yorumunu yaparak benzerlik oranı ile üçgenlerin çevreleri oranının aynı olduğunu ifade etmiştir.

- Denklem kurma: Lara'nın sözel olarak "x ile 4 ü [y uzunluğunu 4 kabul ederek] toplayıp bu sayının [x e işaret ederek] *3* katı olması gerekiyor" şeklinde ifadesini matematiksel olarak ifade edememesi, x değişkenine sayısal değerler atamasına sebep olmuştur. Öğrencinin ifadesinin matematiksel olarak yanlış olduğu görülmüştür.

DBR ve RKL açılarının gördüğü kenarları doğru bir şekilde tespit eden Kayla "eğer bir benzerlik varsa y, $x + y$ nin *3* e bölümü olduğunu düşünüyorum" şeklinde doğru bir ifadede bulunmuştur. Bunu matematiksel olarak ifade etmek isteyen Kayla "DR kenarı LR nin *3* katı" ifadesini cebirsel olarak $\frac{3(x+y)}{y}$ ve sonrasında $\frac{3|DR|}{|LR|}$ biçiminde temsil etmiştir. Öğrencinin sözel olarak ifade ettiğini cebirsel olarak yanlış ifade ettiği görülmüştür. Kayla x ile y değişkenleri arasındaki ilişkiyi matematiksel olarak ifade edememiştir.

Tuna doğru bir şekilde kurduğu ancak doğru temellendirmediği açı-açı benzerliği ile elde ettiği $\Delta LKR \approx \Delta RBD$ bağıntısından faydalanarak $\frac{3}{9} = \frac{y}{x+y}$ orantısını yazmıştır. Bu orantının $\frac{1}{3}$ e eşit olduğunu ifade etmiş ve gereken içler dışlar çarpımını yapmadan "y miz S, x imiz $3S$ diyebilir miyiz" sorusunu yöneltmiştir. Sonrasında Tuna, içler dışlar çarpımını yaparak $3x = 6y$ denklemini yazmış ve bu denklemi "yani x imiz y nin *2* katı" olarak sözlü biçimde ifade etmiştir.

Ata problemde verilen eş ölçülü açı temsilini benzerlik bağıntısı zannederek $\frac{3}{1} = \frac{A}{5} = \frac{x+y}{y}$ orantısını yazmıştır. Her ne kadar açıların eşliğini gösteren temsili yanlış okumuş olsa da, üçgenler arasında $\Delta LKR \approx \Delta RBD$ bağıntısı mevcut olduğundan dolayı Ata'nın yazdığı orantı doğru olmuştur. Ata yazdığı orantıdan $x = 2y$ denklemine ulaşmıştır.

Sembolik Manipülasyon

- Sembolik temsilleri kullanma: Kayla'nın LR ve DR doğru parçalarını $|DR| = x + y$ ve $|LR| = y$ şeklinde ifade edişi temsilleri doğru bir biçimde kullandığını göstermiştir.

Tuna DBR ve RKL üçgenlerinin alanlarını oranlamak için bu üçgenlerde birer yükseklik çizmiş, bu yüksekliklerin uzunlukları için farklı değişkenler atamıştır.

Ata'nın benzerlik bağıntısından yazdığı orantılarda kenar uzunluklarını temsil için bu kenarları mutlak değer içinde "$\frac{|DB|}{|RK|} = \frac{|RB|}{|KL|}$" şeklinde yazması, bu öğrenci için önemli bir gelişim göstergesi olmuştur. Ata RB kenarının uzunluğunu A değişkeni ile temsil etmiş ve geleneksel anlamda köşeleri temsil etmekte kullanılan etiketlerin rolünden farklı olduğunun ayırdında olduğu gözlemlenmiştir.

- Değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme: Kayla "y, $x + y$ nin 3 e bölümü olduğunu düşünüyorum" şeklinde ifade ederken, bunu matematiksel olarak ifade edememesinden dolayı değişkenleri birbiri cinsinden yazamamıştır.

Ata $x = 2y$ denklemini yazarak değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilmiş ve bunu çevrelerin oranını elde edebilmek için doğru bir şekilde kullanabilmiştir.

Arya x ve y değişkenlerinin birbirinin katı olduğunu sezmiş, fakat bunları birbiri cinsinden yazamamıştır.

- Sembolik manipülasyon becerisi: Tuna üçgenler arasında kurduğu açı-açı benzerliği ile elde ettiği x ve y değişkenleri arasındaki ilişki hakkında "o zaman bu, x, y nin 2 katı. Bunu nasıl gösterebilirim? Bir x eşittir $2y$ [$x = 2y$ yazıyor]" yorumunda bulunmuş, ancak elde ettiği ilişkiyi çizim üzerinde ne anlama geldiğini yorumlayamamış ve elde ettiği bu bilgiyi problemin b ve c şıklarında devreye sokamamıştır.

Ata $\Delta LKR \approx \Delta RBD$ bağıntısından elde ettiği $x + y = 3y$ denklem için "hmm, yani burası [DR kenarını eliyle gösteriyor] $3y$ miş. x artı y, $3y$ imiş, o zaman demek ki x eşittir $2y$ ye bedel. [$x = 2y$ yazıyor]" ifadesinde bulunmuştur. Öğrenci değişkenler ile temsil edilen kenar uzunlukları için elde ettiği denklemi çizim üzerinde değerlendirmiş ve anlamlı sembolik manipülasyon gerçekleştirmiştir. Okuduğu tüm temsiller ve yaptığı cebirsel işlemleri çizim üzerinde izlediği gözlemlenmiştir.

Niceliksel Muhakeme

Kayla'nın "yani şu DR kenarı çevrenin bir parçası… Şuradan tam bölündüğünü düşünürsek [DR doğru parçası üzerinde bir nokta işaretliyor, DR doğru parçasını eşit üç parçaya ayırmaya çalışıyor] yani herhangi bir noktada, üç parçaya ayrılmış, 1 ise burası

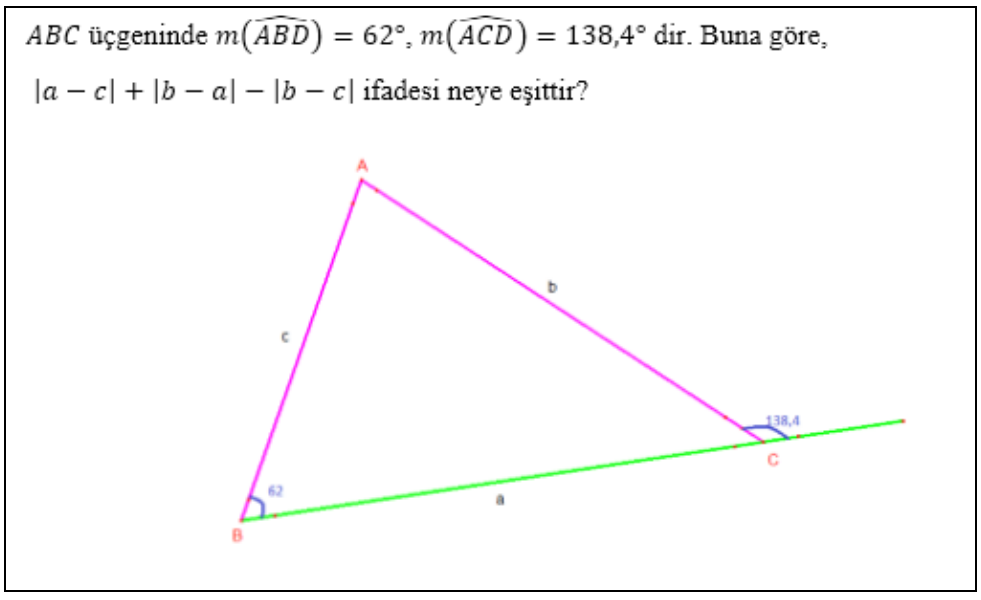
[y uzunluklu doğru parçasını kalemi ile işaret ederek], toplamı 3 [DR doğru parçasını kastederek] olur. Yani buradan bir şey söyleyebiliriz çevreleri için" şeklindeki DBR ile RKL üçgenlerinin çevreleri oranı hakkında yaptığı yorum, bilinmeyen kenar uzunluklarına sahip benzer iki üçgenin çevreleri üzerine niceliksel muhakemeye sahip olduğunu göstermiştir.

Tuna her ne kadar doğru benzerlik teoremini kullanamamış olsa da oluşturduğu benzerlik bağıntısı doğru olmuştur. Benzerlik bağıntısına uyguladığı süreçlerin de doğru olduğu gözlemlenmiş, ancak öğrenci elde ettiklerini geometrik çizim ile ilişkilendirememiştir. Öğrencinin sembolik manipülasyon becerilerine sahip olduğu görülmüş, fakat yürüttüğü cebirsel stratejinin niceliksel ve cebirsel muhakemeden yoksun olmasından dolayı problemin b ve c şıkları için çözüm üretememiştir.

Ata'nın da çözüm stratejisi cebirsel ağırlıklı olmakla beraber, cebirsel muhakemesinin değişkenlerin birbiriyle ilişkisini ve doğalarını çizim üzerinden takip ettiği görülmüştür. Ata değişkenler arasındaki ilişkiyi geometrik çizimde izleyerek zihninde somutlaştırmıştır.

3.5.2. Son klinik görüşmenin ikinci problemine ilişkin bulgular

Son klinik görüşmenin Şekil 3.107.'de verilen ikinci problem geometrik olarak açı-kenar ilişkileri bilgisi gerektirirken cebir bilgi yapısına ait kavramlardan biri olan mutlak değer kavrayışı, aritmetiksel muhakeme ve cebirsel işlem becerilerini gerektirmiştir.



Şekil 3.107. *Son klinik görüşmenin ikinci problemi*

3.5.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgilerini problemin çözümü için nasıl devreye soktuklarına dair bulgular sunulmuştur.

Geometrik Bilginin Uygulanması

Geometrik bilgiyi devreye sokma: Lara'nın üçgenin diğer iç açı ölçülerini bulmadığı ve üçgende açı-kenar ilişkisi oluşturmadığı görülmüştür.

Bora bir üçgenin kenar uzunluklarının negatif olamayacağını ifade etmiştir.

Bora, Tuna ve Ata'nın dış açısı verilen bir üçgenin iç açısını bulabilme, üçgenin iki açısının ölçüsü biliniyorsa üçüncüyü bulma, üçgenin kenar uzunluklarını gördükleri açıya göre büyüklük sıralaması yapma gibi temel özellikleri bildikleri ve uygulayabildikleri gözlemlenmiştir. Ata A açısının ölçüsünü bulmak için "i*ki iç açının toplamı kendilerine komşu olmayan dış açıya eşittir*" özelliğini kullanmıştır.

Arya her ne kadar açı ölçülerini doğru bulamasa da üçgende açı-kenar ilişkilerini doğru kurmuştur.

3.5.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapıları ve sembolik manipülasyon becerileri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.32.'de genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon temalarına ilişkin alt temalar verilmiştir.

Tablo 3.32. *Son klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Aritmetik işlem becerileri **Bora**, **Tuna** - ondalıklı sayılar ile toplama ve çıkarma işlemlerini doğru yapmaları, **Ata**, **Arya** - yanlış yapmaları. **Ata** - Sözel ifadeleri ile matematiksel temsillerinde gözlemlenen uyumsuzluk.	Cebirsel ön bilgiler **Lara**, **Kayla** - mutlak değer kavrayışlarının olmayışı. $\|a-c\|$ ifadesini "AB kenar uzunluğu" olarak okumaları. **Bora** - üçgenin kenarlar arasında büyüklük sıralamasını eşitsizlik ile ifade etmesi. İlk denemesinde mutlak değere parantez muamelesi yapması, sonrasında yazdığı eşitsizlik doğrultusunda mutlak değerli ifadelerin içlerinin pozitif veya negatif olmalarını doğru bir şekilde	Değişkenin doğasını anlama **Lara** - a, b, c değişkenlerinin kenar uzunluklarını temsil ettiğini ifade etmesi. AC nin orta noktası ile BC kenarının orta noktasını birleştiren bir doğru parçası çizerek yeni bir üçgen oluşturması ve bu üçgenin kenarlarını $a-c$, $b-a$ ve $b-c$ olarak ifade etmesi. $\|a-c\|+\|b-a\|-\|b-c\|$ ifadesi ile çevrenin sorulduğunu düşünmesi.

Tablo 3.32. (Devam) *Son klinik görüşmenin ikinci probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

GENELLEŞTİRİLMİŞ ARİTMETİKSEL MUHAKEME	CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
	Cebirsel ön bilgiler değerlendirmesi. Mutlak değer dışına yanlış çıkarması. Bütüncül bir değerlendirme yaparken cebirsel işlemde münferit davranması. **Tuna** - açı-kenar ilişkisini sözel ifade etmesi, bir eşitsizlik yazmaya gerek duymadan işlemlerini doğru gerçekleştirmesi. Mutlak değer kavrayışının mevcut oluşu **Ata** - mutlak değer içindeki ifadelerin işaretlerini incelerken sözlü ifade ettiği eşitsizlikten yararlanarak doğru bir şekilde değerlendirmesi. Açıları büyüklüklerine göre sözel olarak doğru ifade ederken matematiksel olarak yanlış yazması. **Arya** - mutlak değerin pozitif sonuç çıkaracağını bilmesi, içi negatif olan bir mutlak değerin pozitif olarak dışarı çıkması için gereken işlem bilgisine sahip olmaması.	Değişkenin doğasını anlama **Bora** - mutlak değer içindeki ifadelerin pozitif veya negatiflik durumlarını değerlendirebilirken, mutlak değerden çıkarırken mutlak değerden yanlış çıkarması. **Kayla** - üçgenin çevresinin sözel tanımını yapabilirken $\|a-c\|+\|b-a\|-\|b-c\|$ ifadesinin çevreyi verdiğini düşünmesi. **Tuna** - ilk etapta $\|a-c\|+\|b-a\|-\|b-c\|$ ifadesinin çevreyi verdiğini düşünmesi. **Ata** – İkinci denemesinde küçük harf temsillerinin kenarlar olduğunu anladığı için mutlak değerlerin içlerinin pozitif veya negatif olma durumlarını doğru bir şekilde değerlendirmesi. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Arya** - kenar uzunluklarını temsil için kullanılan değişkenlerin sayısal değerlerini bulamayacağı için sonuca ulaşamayacağını ifade etmesi.

Genelleştirilmiş Aritmetiksel Muhakeme

- Aritmetik işlem becerileri: Bora ve Tuna'nın ondalıklı sayılar ile toplama ve çıkarma işlemlerini doğru yaptığı görülmüştür.

Ata'nın ondalıklı sayılarda çıkarma işlemini yanlış yaptığı gözlemlenmiş olsa da açı ölçülerini yanlış bulması çözümü etkileyen bir durum oluşturmamıştır. Sözel ifadeleri ile matematiksel temsillerinde gözlemlenen bir başka uyumsuzluğa örnek ise, "*138,4 62* den çıkaracağım" ifadesinde bulunması ve $138{,}4-62$ işlemini yapmış olmasıdır. Ata gibi Arya da ondalıklı sayılarda çıkarma işlemini yanlış yapmıştır.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Lara ve Kayla'nın mutlak değer kavrayışının olmadığı gözlemlenmiştir. $|a-c|$ ifadesini "a eksi c kenar uzunluğu" olarak okumaları, öğretim dizisi esnasında öğrencilerin $|AB|$ temsilini "AB kenar uzunluğu" olarak okumaları ile ilişkili olduğu düşünülmüştür.

Bora üçgenin iç açılarıyla doğru orantılı olarak kenarlar arasında büyüklük sıralaması yapmış ve bunu eşitsizlik ile ifade edebilmiştir. Bora ilk denemesinde mutlak değere parantez muamelesi yapmış fakat sonra açı-kenar ilişkisi üzerine yazdığı eşitsizlik doğrultusunda mutlak değerli ifadelerin içlerinin pozitif veya negatif olmalarını doğru bir şekilde değerlendirebilmiştir. Ancak mutlak değerden çıkarırken içi pozitif olan mutlak değerli ifadenin pozitif olmasını sağlamak için " $|a-c|=a+c$ " örneğinde görülebileceği gibi ikinci terimlere müdahale etmiştir. İçi negatif olan mutlak değerli ifadeyi ise "$|b-a|=b-a$" örneğinde görülebileceği gibi değiştirmeden bırakmıştır. Yaptığı eylem için açıklaması, "b den a çıkınca eksili bir değer çıkması gerek o yüzden eksili çıkardım" şeklinde olmuştur. Bu durum öğrencinin mutlak değer kavrayışında bir sorun olduğunu göstermiştir. Bütüncül bir değerlendirme yaparken cebirsel işlemde değişkenler bazında münferit davranmıştır.

Tuna üçgenin iç açılarıyla doğru orantılı olarak kenarlar arasında büyüklük sıralamasını sözel olarak yapmış ve bir eşitsizlik yazmaya gerek duymaksızın işlemlerini doğru bir şekilde gerçekleştirmiştir. Tuna'nın mutlak değer kavrayışının tam olduğu da mutlak değerli ifadeleri doğru bir şekilde ve ne yaptığını adım adım anlatarak gerçekleştirmesinden anlaşılmıştır.

Ata mutlak değer içindeki ifadelerin pozitif veya negatif olma durumlarını incelerken sözlü olarak ifade ettiği eşitsizlikten yararlanmış ve doğru bir değerlendirme yapmıştır. Açıları büyüklüklerine göre sözel olarak doğru ifade ederken matematiksel olarak kenar sıralamasını $a<b<c$ şeklinde yanlış yazmış, fakat işlemlerini sözel ifadesine bağlı kalarak gerçekleştirdiği için bu durum çözümünü olumsuz yönde etkilememiştir.

Arya'nın mutlak değerin pozitif sonuç çıkaracağını bildiği, ancak içi negatif olan bir mutlak değerin pozitif olarak dışarı çıkması için gereken işlem bilgisine sahip olmadığı gözlemlenmiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Değişkenin doğasını anlama: Lara çizim üzerinde a, b, c değişkenlerinin kenar uzunluklarını temsil ettiğini ifade etmiştir. Fakat hemen sonrasında köşeyi temsil için kullanılan " C " ile AB doğru parçasının uzunluğunu temsil için kullanılan "c" sembollerini karıştırmış, sonra da hatasını anlamıştır. AC kenarının orta noktası ile BC kenarının orta noktasını birleştiren bir doğru parçası çizerek yeni bir üçgen oluşturmuş ve yeni oluşturduğu üçgenin kenarlarını $a-c, b-a$ ve $b-c$ olarak ifade

etmiştir. $|a-c|+|b-a|-|b-c|$ ifadesi ile çevrenin sorulduğunu düşünmüştür. Öğrencinin üçgenin kenar uzunluklarının sembollerle temsil edildiği durumda çevresini tespit edemediği anlaşılmıştır.

Bora mutlak değer içindeki ifadelerin pozitif veya negatiflik durumlarını değerlendirebilirken, mutlak değerden çıkarırken mutlak değer içindekilere $|a-c|=a+c$ örneğinde görüleceği üzere değişken bazında münferit davranmıştır. Öğrencinin değişkenlerin doğasını tam olarak anlamadığını göstermiştir.

Kayla üçgenin çevresinin sözel tanımını yapabilirken, öğrencinin $|a-c|+|b-a|-|b-c|$ ifadesinin çevreyi verdiğini düşünmesi değişkenlerin doğasını anlamadığını göstermiştir.

Tuna da ilk etapta değişkenlerin sayısal değerlerine ulaşmak istemiş, hatta $|a-c|+|b-a|-|b-c|$ ifadesinin çevreyi verdiğini düşünmüştür. Ancak bu öğrenci düşüncelerinden vazgeçip mutlak değerli ifadeleri doğru bir şekilde değerlendirebilmiştir.

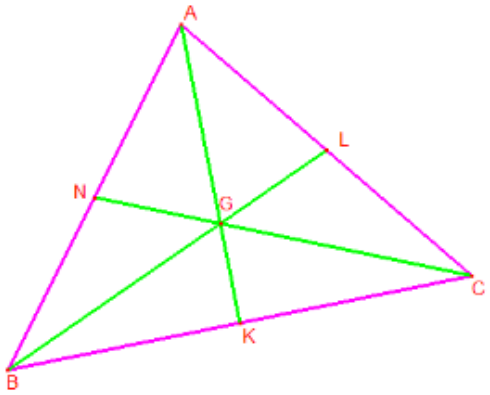
Ata ilk denemesinde değişkenlerin rollerini kavrayamadığından dolayı, mutlak değerlerin içindeki ifadeleri "kenarların farkı ile ortanca açı ile büyük açının farkını toplayıp ortanca açı ile şey ortanca kenar ile küçük kenarı çıkartacağız sonra bunları buradan çıkaracağız" şeklinde yorumlamıştır. İkinci denemesinde küçük harf temsillerinin kenarlar olduğunu anlaması sayesinde mutlak değerlerin içlerinin pozitif veya negatif olma durumlarını doğru bir şekilde değerlendirebilmiştir.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Arya kenar uzunluklarını temsil için kullanılan değişkenlerin sayısal değerlerini bulamayacağını ve dolayısıyla sonuca ulaşamayacağını ifade etmiştir. Kenar uzunluklarının sayısal değerlerine ulaşamayacağını bildiği, sayısal değerlere ulaşamasa da bu işlemlerin sonucunun sayısal olması gerekmediğinin bilincinde olmadığı gözlemlenmiştir.

3.5.3. Son klinik görüşmenin üçüncü problemine ilişkin bulgular

Üçgende ağırlık merkezinin üçgenin kenar ve köşelerine olan uzaklıkları arasındaki ilişkinin geometrik odak olduğu son klinik görüşmenin Şekil 3.108.'de verilen üçüncü probleminde, öğrencilerin oran ilişkisini kullanmaları problemin cebirsel boyutudur.

Şekildeki ABC üçgeninde G ağırlık merkezi ve üçgene ait kenarortayların uzunlukları toplamı 42 birim ise $|AG| + |BG| + |CG|$ toplamı kaç birimdir?



Şekil 3.108. *Son klinik görüşmenin üçüncü problemi*

3.5.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgilerine dair bulgular sunulmuştur.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Lara'nın ağırlık merkezinin kenarortayı hangi oranda ayırdığını bilmediği, ağırlık merkezi için yaptığı "kenarortayların ortasından geçtiği bölge" şeklindeki tanımından anlaşılmıştır.

Bora'nın ağırlık merkezini kenarortayların eşit uzunlukta olması ile ilişkilendirmesi ve ağırlık merkezinin kenarortayı "dik kenara *1*, köşeye *2*" şeklindeki yanlış kazanımı, problemi yanlış çözmesi ile sonuçlanmıştır.

Kayla, Tuna, Ata ve Arya'nın ağırlık merkezinin kenarortayı hangi oranlarda böldüğünü bildikleri görülmüştür.

Lara, kenarortayı "bir kenarı eşit parçaya bölen ışın" şeklinde tanımlarken Bora "kenarı ortadan iki eşit parçaya bölen kenar" tanımını yapmıştır. Kayla ağırlık merkezini "kenarortayların çakıştığı nokta" olarak tanımlamıştır. Öğrencinin çakışma kelimesini kesişme olarak kullandığı düşünülmektedir, zira önceki görüşmelerde de bu terimi kesişim için kullandığı gözlemlenmiştir.

3.5.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin cebir bilgi yapıları, sembolik manipülasyon becerileri ve niceliksel muhakemeleri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.33.'de cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon ve niceliksel muhakeme temalarına ilişkin alt temalar verilmiştir.

Tablo 3.33. *Son klinik görüşmenin üçüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON	NİCELİKSEL MUHAKEME
Cebirsel ön bilgiler **Kayla** - İstenen doğru parçaları toplamının kenarortay uzunlukları toplamının üçte biri olduğu oranlamasına geçememesi. **Arya** - kenarortay uzunluklarının eşit olmayabileceğini ifade etmesi, kenarortay uzunluklarını eşit kabul ettiği çözümünde 14 ü 1'e 2 oranında paylaştırmaya çalışması. 14 sayısını 1'e 1 oranında 7-7 olarak paylaştırabilmesi, tamsayılar bazında düşündüğü için 14 sayısını 1'e 2 oranında paylaştıramaması. Denklem kurma **Bora**, **Kayla** kenarortayların uzunlukları toplamını $\|AK\| + \|BL\| + \|CN\| = 42$ denklemi ile ifade etmeleri. **Tuna** - kenarortay uzunlukları toplamı için $42 = 3a + 3b + 3c$ denklemini yazması. **Ata** - kenarortay uzunlukları toplamını $9k = 42$ denklemini ile ifade etmesi.	Sembolik temsilleri kullanma **Kayla** - AG ve GK doğru parçalarına orantı sabiti kullanmadan 2 ve 1 yazması. **Arya** - AG, BG ve CG doğru parçalarına herhangi bir değişken kullanmadan 2 yazması. **Tuna** - ağırlık merkezinin kenarortayları ayırdığı parçalara kenarortay uzunluklarının farklı olma ihtimalini gözeterek değişkenler ataması. **Ata** - kenarortay uzunluklarının farklı uzunlukta olup olmayacağı üzerine bir yorum yapmadan ağırlık merkezinin kenarortayı ayırdığı doğru parçalarına $\|AG\| = \|BG\| = \|CG\| = 2k$ ve $\|GK\| = \|GL\| = \|GN\| = k$ değişkenlerini ataması. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Tuna** - $42 = 3a + 3b + 3c$ denkleminden değişkenlerin tek tek sayısal değerine ulaşamayacağını söylemesi. Cebirsel işlem becerileri **Tuna** - $42 = 3a + 3b + 3c$ denklemini kullanarak $2a + 2b + 2c$ ifadesinin sonucuna ulaşamaması. **Ata** - kenarortayların uzunlukları toplamını veren $9k = 42$ denklemini kullanarak $6k$ olarak ifade ettiği $\|AG\| + \|BG\| + \|CG\|$ toplamı 28 olarak elde etmesi.	**Ata** - $\|AG\|+\|BG\|+\|CG\|$ toplamını bir bütün olarak değerlendirebilmesi ve $\|AG\|$, $\|BG\|$ ve $\|CG\|$ doğru parçalarının sayısal değerlerini bulmaya çalışmaması niceliksel muhakemesini göstermiştir.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Kayla $\frac{|AG|}{|GK|} = \frac{2}{1}$ olmasından dolayı 42 yi ikiye bölerek çözüm gerçekleştirmiştir. Problemde istenilen doğru parçaları toplamının, kenarortay uzunlukları toplamının üçte biri olduğu oranlamasına geçememiştir.

Arya da Kayla gibi AG , BG ve CG doğru parçalarına 2 yazmıştır. Arya kenarortaylar toplamını üçe bölmeyi düşünmüş, fakat herhangi bir üçgende kenarortay uzunluklarının eşit olmayabileceğini düşünerek bu eylemi gerçekleştirmemiştir.

Kenarortay uzunluklarının eşit olmayabileceğini ifade etmiş olsa da, kenarortay uzunluklarını eşit kabul ettiği çözümünde 14 ü 1 e 2 oranında paylaştırmaya çalışmıştır. 14 sayısını 1 e 1 oranında 7-7 olarak paylaştırabileceğini ifade etmiş, ancak tamsayılar bazında düşündüğü için 14 sayısını 1'e 2 oranında paylaştıramamıştır.

- Denklem kurma: Bora ve Kayla kenarortayların uzunlukları toplamını $|AK| + |BL| + |CN| = 42$ denklemi ile ifade etmişlerdir. Öğrencilerin kenarortayları temsil etmek için $|AK|$, $|BL|$ ve $|CN|$ temsillerini kullanmaları başarılı bulunmuştur.

Tuna ağırlık merkezinin kenarortayları ayırdığı orantılı parçaların her birine farklı değişkenler atayarak kenarortayların uzunlukları toplamını veren $42 = 3a + 3b + 3c$ denklemini yazmıştır. Fakat yazdığı denklemden bir sonuç elde edemeyeceğini düşünmüştür.

Ata kenarortayların tümünü eşit uzunlukta kabul ederek tek değişken kullanmış ve kenarortay uzunlukları toplamını $9k = 42$ denklemi ile ifade etmiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Sembolik temsilleri kullanma: Kayla çizimde AG ve GK doğru parçalarına doğru parçalarına orantı sabiti kullanmadan 2 ve 1 yazmıştır. Benzer şekilde Arya çizimde AG, BG ve CG doğru parçalarına herhangi bir değişken kullanmaksızın ancak "oran olarak *2*" yorumunu yaparak 2 yazmıştır.

Tuna kenarortay uzunluklarının farklı olma ihtimalini gözeterek ağırlık merkezinin kenarortayları ayırdığı parçalara $|AG| = 2a$, $|GK| = 1a$, $|BG| = 2b$, $|GL| = 1b$, $|CG| = 2c$, $|GN| = 1c$ değişkenlerini atamıştır. Problemde istenen $|AG| + |BG| + |CG|$ ifadesini bu değişkenleri kullanarak doğru bir şekilde ifade etmiştir.

Ata kenarortay uzunluklarının farklı uzunlukta olup olmayacağı üzerine bir yorum yapmadan, ağırlık merkezinin kenarortayı ayırdığı doğru parçalarına $|AG| = |BG| = |CG| = 2k$ ve $|GK| = |GL| = |GN| = k$ değişkenlerini atamıştır. Problemde istenilen $|AG| + |BG| + |CG|$ ifadesini $6k$ olarak ifade etmiştir.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Tuna yazdığı $42 = 3a + 3b + 3c$ denkleminden değişkenlerin tek tek sayısal değerine ulaşamayacağını söylemiştir. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği, öğrencinin niceliksel muhakemede bulunmasına engel teşkil etmiştir.

- Cebirsel işlem becerileri: Tuna $42 = 3a + 3b + 3c$ denklemini kullanarak $2a + 2b + 2c$ ifadesinin sonucuna ulaşamamıştır. Yazdığı $2a + 2b + 2c$ ifadesinin denklem olduğunu ve elindeki denklemlere yok etme yöntemi uygulayabileceğini ifade etmiş,

fakat bu eylemi gerçekleştiremeyeceğini belirtmiştir. Tuna'nın oran-orantı kazanım eksikliği öğrencinin doğru bir şekilde yazdığı denklemden $2a+2b+2c$ ifadesinin sayısal değerine ulaşamaması ile sonuçlanmıştır.

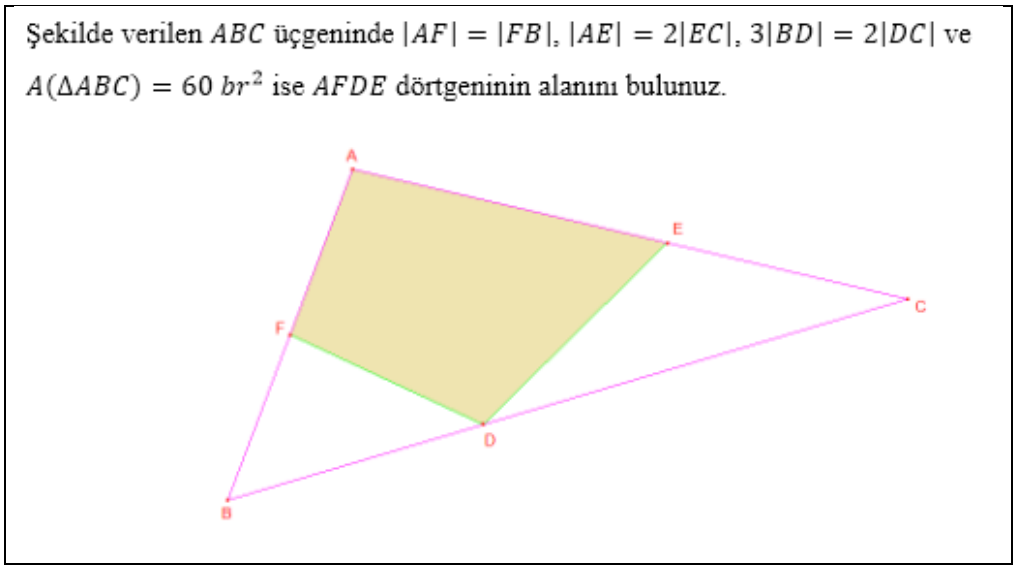
Ata ağırlık merkezinin orantılı doğru parçalarına atadığı değişkenler ile kenarortayların uzunlukları toplamını veren $9k = 42$ denklemini yazmış ve bu denklemi kullanarak $6k$ olarak ifade ettiği $|AG| + |BG| + |CG|$ toplamı 28 olarak doğru bir şekilde elde etmiştir.

Niceliksel Muhakeme

Ata'nın Tuna'dan farklı olarak $|AG|+|BG|+|CG|$ toplamını bir bütün olarak değerlendirebilmesi ve $|AG|$, $|BG|$ ve$|CG|$ doğru parçalarının sayısal değerlerini bulmaya çalışmaması, Ata'nın problem bazında niceliksel muhakemesinin mevcut olduğunu göstermiştir.

3.5.4. Son klinik görüşmenin dördüncü problemine ilişkin bulgular

Şekil 3.109.'da verilen son klinik görüşmenin dördüncü problemdeki geometrik hedef, aynı tabana ait yüksekliğe sahip üçgenlerde alanın taban uzunluğu ile orantılı olması bilgisinin kullanımıdır. Üçgenin alanının tabanı ile tabana ait üçgenin yüksekliğinin çarpımının yarısı formülünün ötesinde aynı tabana ait yüksekliğe sahip üçgenlerde alanın taban uzunluğu ile orantılı olması problemin cebirsel çatısıdır.



Şekil 3.109. *Son klinik görüşmenin dördüncü problemi*

3.5.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin bulgular

Bu alt başlıkta odak öğrencilerin sahip oldukları geometrik bilgi ve geometrik bilgilerini problemin çözümü için nasıl devreye soktuklarına dair bulgular sunulmuştur. Tablo 3.34.'de geometrik bilgi kapsamında iki, geometrik bilginin uygulanması kapsamında üç tema yer almıştır.

Tablo 3.34. *Son klinik görüşmenin dördüncü probleminde geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi*

GEOMETRİK BİLGİ	GEOMETRİK BİLGİNİN UYGULANMASI
Geometrik ön bilgiler **Lara** - üçgenin alanını bilmemesi ve dikdörtgenin alanını "kısa ile uzunun çarpımı" olarak ifade etmesi. **Kayla**, **Bora** gibi üçgenin alanını "taban çarpı yükseklik bölü 2" olarak ifade etmeleri. Arya araştırmacıya dörtgenin alanının nasıl bulunacağını sorması. Prototip algılar **Lara** - $AFDE$ nin dikdörtgen olduğunu söyleyerek kısa ve uzun kenarını göstermesi, sonra yamuğa benzetmesi. **Bora** - $AFDE$ ye "dörtgen" olarak hitap etmesine rağmen açılarının 90 ar derece ve alanının "kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı" olarak ifade etmesi. **Ata** - çizimdeki dörtgenin açılarını önce $90°$ kabul etmesi, sonra iç açıları $90°$ olmayan, paralelkenarı örnek sunması, açılara diklik sembolü koymasının anlamsız olduğunu söylemesi.	Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme becerisi **Lara** - sadece $\|AF\| = \|FB\|$ eşitliğini çizimde temsil edebilmesi. **Bora**, **Kayla**, **Arya** - $\|AF\| = \|FB\|$, $\|AE\| = 2\|EC\|$, $3\|BD\| = 2\|DC\|$ ilişkilerini çizimde tek değişken kullanarak temsil etmeleri. **Tuna** - $\|AF\| = \|FB\|$, $\|AE\| = 2\|EC\|$, $3\|BD\| = 2\|DC\|$ ilişkilerini çizimde kenar uzunluklarının farklı olabileceğini gözeterek farklı değişkenler ile temsil etmesi. **Ata** - doğru parçalarına ait ilişkileri okurken çizim üzerinde bulundukları yerleri tespit etmesi. Çizimdeki bir unsura tanıma **Bora** - $\|AF\| = \|FB\|$ olmasından ötürü $\|FD\|$ doğru parçasını kenarortay olarak adlandırması. Geometrik araçları kullanma **Bora**, **Arya** - A köşesinden BC kenarına çizdikleri yüksekliğin dikme ayağını D noktası olarak belirlemeleri. Sebebi sorulunca **Bora** - "ama oraya denk geldi", **Arya** - sorunun üzerine çizdiği yüksekliği tekrar çizerek dikme ayağının D noktasından farklı bir noktaya denk getirmesi. **Tuna** - A köşesinden BC kenarına yükseklik çizmesi, dikme ayağını D noktası olarak belirlememesi. **Ata** - F noktasından C noktasına bir doğru parçası çizmiş ve F yi dikme ayağı olarak belirlemesi. İkinci denemesinde $AFDE$ dörtgenini ikiye bölen FE doğru parçasını çizmesi ve A ve D köşelerinden $[FE]$ doğru parçasına dikmeler çizmesi.

Geometrik Bilgi

- Geometrik ön bilgiler: Lara'nın üçgenin alanını bilmediği ve dikdörtgenin alanını "kısa ile uzunun çarpımı" olarak ifade ettiği görülmüştür. Kayla ve Bora gibi üçgenin alanını "taban çarpı yükseklik bölü *2*" olarak ifade etmiştir.

Arya görüşme esnasında araştırmacıya dörtgenin alanının nasıl bulunacağını sormuştur.

- Prototip fenomeni: Lara taralı alanın dikdörtgen olduğunu söyleyerek kısa ve uzun kenarını göstermiştir. Sonrasında taralı alanı yamuğa benzettiğini ifade etmiştir.

Öğrencinin temel geometrik nesneleri tanımadığı ve çözüme yönelik herhangi bir eyleminin olmadığı gözlemlenmiştir. Bora dörtgenin alanını "kısa kenar ile uzun kenarın çarpımı" olarak ifade etmiştir. Bora'nın dörtgenin alanı için yaptığı tanım dikdörtgenin alan tanımıdır. Oysaki öğrenci $AFDE$ nesnesini dörtgen olarak ifade etmiş ve açılarının 90 ar derece olduğunu söylemiştir. Ata çizimdeki dörtgenin açılarını 90° kabul etmiş, fakat sonra iç açıları 90° olmayan -paralelkenarı örnek sunarak- dörtgenlerin de olduğu bilgisini ifade ederek açılara diklik sembolü koymasının anlamsız olduğunu belirtmiştir.

Geometrik Bilginin Uygulanması

- Sembolik temsilin geometrik çizimdeki karşılığını tespit etme becerisi: Lara sadece $|AF| = |FB|$ eşitliğini çizimde temsil edebilmiştir.

Bora, Kayla ve Arya $|AF| = |FB|$, $|AE| = 2|EC|$, $3|BD| = 2|DC|$ ilişkilerini çizimde tek değişken kullanarak temsil edebilmişlerdir.

Tuna $|AF| = |FB|$, $|AE| = 2|EC|$, $3|BD| = 2|DC|$ ilişkilerini çizimde kenar uzunluklarının farklı olabileceğini gözeterek farklı değişkenler ile temsil etmiştir.

Ata problemdeki doğru parçalarına ait ilişkileri okurken çizim üzerinde bulundukları yerleri tespit etmiştir.

- Çizimdeki bir unsura tanıma: Bora'nın bir doğru parçasının kenarortay olma koşulunu bilmediği, $|AF| = |FB|$ olmasından ötürü $|FD|$ doğru parçasını kenarortay olarak adlandırmasından anlaşılmıştır.

- Geometrik araçları kullanma: Bora A köşesinden BC kenarına çizdiği yüksekliğin dikme ayağını D noktası olarak belirlemiştir. Bunun üzerine, A köşesinden çizdiği yüksekliğin dikme ayağının D noktası olup olmayacağı sorusuna Bora "ama oraya denk geldi" yanıtını vermiştir. Arya da Bora gibi A köşesinden BC kenarına çizdiği yüksekliğin dikme ayağını D noktası olarak belirlemiştir. Arya'ya A köşesinden çizdiği yüksekliğin dikme ayağının D noktası olup olmayacağı sorulmuş ve öğrenci bu sorunun üzerine çizdiği yüksekliği tekrar çizerek dikme ayağının D noktasından farklı bir noktaya denk getirmiştir.

Tuna da A köşesinden BC kenarına yükseklik çizmiş ama dikme ayağını D noktası olarak belirlememiştir.

Ata üçgenin alanını bulmak için F noktasından C noktasına bir doğru parçası çizmiş ve F noktasını dikme ayağı olarak belirlemiştir. Üçgenin alanına ulaşmak için giriştiği strateji sonuç vermeyince, $AFDE$ dörtgenini ikiye bölen FE doğru parçasını

çizmiş ve A ve D köşelerinden $[FE]$ doğru parçasına dikmeler çizmiştir. Çizdiği bu yüksekliklerin de kendisini sonuca götürmeyeceğini anlayıp çözümü bırakmıştır.

3.5.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular

Odak öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin bulgular kapsamında öğrencilerin cebir bilgi yapıları, sembolik manipülasyon becerileri ve niceliksel muhakemeleri bu alt başlıkta sunulmuştur. Tablo 3.35.'de cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon ve niceliksel muhakeme temalarına ilişkin alt temalar verilmiştir.

Tablo 3.35. *Son klinik görüşmenin dördüncü probleminde cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi*

CEBİR BİLGİ YAPISI	SEMBOLİK MANİPÜLASYON
Cebirsel ön bilgiler **Bora**, **Ata**, **Tuna** - doğru parçalarının arasındaki orantı ilişkilerini kendi aralarında doğru yorumlamaları, **Kayla** - biraz zorlanarak doğru yorumlaması. Denklem kurma **Bora** - A köşesinden çizdiği yüksekliğe x değişkeni atayarak görüşme başında üçgenin alanını "taban çarpı yükseklik bölü 2" olarak tanımlamış olmasına rağmen alanı $\frac{5k+x}{2} = 60$ olarak yanlış ifade etmesi. **Kayla** - dörtgenin alanına ulaşmak için $A(AFDE) - 60 = A(AFDE)$ denklemini yazması. Denklemin anlamını "$AFDE$ nin alanından eğer biz bütün bir üçgenin alanını çıkartırsak bizden istenilen bölgeyi bulabiliriz" şeklinde açıklaması. **Tuna** - A köşesinden uzunluğunu $5y$ olarak belirlediği BC kenarına çizdiği yüksekliğe h değişkenini atayarak alanı $\frac{5yh}{2} = 60$ denklemi ile ifade etmesi. **Ata** - AB, AC ve BC kenar uzunluklarına sırasıyla $2x$, $3k$ ve $5t$ değişkenlerini atayarak üçgenin alanını $2x + 3k + 5t = 60$ denklemi ile ifade etmesi. br^2 gösterimini birim olarak okuması. İlerleyen dakikalarda yazdığı $2x + 3k + 5t = 60$ denkleminin üçgenin çevresini verdiğini anlaması. Alan formülünü hatırlayınca CF doğru parçasını yükseklik kabul edip y değişkeni ile temsil etmesi. Oluşan CFA üçgeninde Pisagor teoremini $x^2 + y^2 = 3k^2$ olarak ifade etmesi. Pisagor teoreminde $3k$ terimini paranteze almamış olması. **Arya** - A köşesinden $[BC]$ kenarına çizdiği yüksekliğe x değişkenini ataması ve alanı $\frac{5kx}{2} = 60$ olarak ifade etmesi.	Sembolik temsilleri kullanma **Bora**, **Kayla**, **Arya** - problemde verilen doğru parçalarının birbirleriyle ilişkisini $\|AF\| = \|FB\| = k$, $\|AE\| = 2k$, $\|EC\| = k$ örneğinde görüleceği üzere tek değişken kullanarak ifade etmeleri. **Tuna**, **Ata** - kenarlar arasında verilen ilişkileri farklı değişkenler kullanarak ifade etmesi. Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği **Bora** - üçgenin alan formülünü kullanarak atadığı değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği. **Kayla** - doğru parçalarına atadığı değişkenin değerini bulması gerektiğini ifade etmesi. **Tuna** - ABC üçgeninin alanından elde ettiği $5yh = 120$ denkleminden sayısal bir değere ulaşamayacağını anlayınca çözümü bırakması. **Ata** - atadığı değişkenlerin sayısal değerlerine ulaşmasını sağlayacak çözüm arayışları içerisinde olması. **Arya** - yükseklik olarak çizdiği AD doğru parçasının sayısal değerine ulaşıp üçgenin alan formülünden $5k$ ile temsil ettiği BC tabanının uzunluğunu bulmaya çalışması.

Cebir Bilgi Yapısı

- Cebirsel ön bilgiler: Bora, Ata ve Tuna problemde verilen doğru parçalarının arasındaki orantı ilişkilerini kendi aralarında doğru biçimde yorumlamışlardır.

Kayla biraz zorlansa da doğru parçalarının ilişkilerini kendi aralarında doğru bir şekilde yorumlamıştır. Kayla'nın orantı ilişkilerini değerlendirirken aşağıdaki söylem ve eylemleri gerçekleştirmiştir.

> Bize verilen şu ilk ifadede AF kenar uzunluğunun FB ye eşit olduğunu söylemiş [AF ve FB doğru parçalarına çentik koyuyor]. AE, EC nin iki katıymış, hayır. Ya evet, 2 EC, 1 AE yapıyormuş. Yani eğer buraya $2k$ dersek, burası k olurmuş [EC ve AE doğru parçalarına sırasıyla $2k$ ve k yazıyor]. BD kenar uzunluğu DC nin… Bunların yani yerlerini değiştiriyorduk sanırım, birbirlerini şey yapmaları için. O zaman şu söylediklerimiz [EC ve AE doğru parçalarına yazdığı $2k$ ve k değişkenlerine işaret ederek], 2 EC 1 AE ediyorsa, evet yerlerini değiştirmemiz gerekiyor bunların [EC ve AE doğru parçalarına sırasıyla k ve $2k$ yazıyor]. Buradan da EC nin ya da AE nin 2 katı olduğunu söyleyebiliriz. DB kenar uzunluğu DC nin… Burada da $2k$ olur, DC ye de $3k$ kalır [DB ve DC doğru parçalarına sırasıyla $2k$ ve $3k$ yazıyor].

- Denklem kurma: Bora A köşesinden çizdiği yüksekliğe x değişkeni atayarak görüşme başında üçgenin alanını "taban çarpı yükseklik bölü *2*" olarak tanımlarken bu alanı $\frac{5k+x}{2} = 60$ olarak yanlış bir şekilde ifade etmiştir.

Kayla dörtgenin alanına ulaşmak için $A(AFDE) - 60 = A(AFDE)$ denklemini yazmıştır. Kendisine bu denklem ile ne ifade etmek istediği sorulduğunda öğrencinin cevabı "$AFDE$ nin alanından eğer biz bütün bir üçgenin alanını çıkartırsak bizden istenilen bölgeyi bulabiliriz" olmuştur. Öğrencinin hem düşünsel hem de matematiksel olarak hatalı olduğu gözlemlenmiştir.

Tuna A köşesinden uzunluğunu $5y$ olarak belirlediği BC kenarına çizdiği yüksekliğe h değişkenini atayarak alanı $\frac{5yh}{2} = 60$ denklemi ile ifade etmiştir.

Ata AB, AC ve BC kenar uzunluklarına sırasıyla $2x$, $3k$ ve $5t$ değişkenlerini atayarak üçgenin alanını $2x + 3k + 5t = 60$ denklemi ile yanlış bir şekilde ifade etmiştir. Problemin başında br^2 gösterimini birim olarak okumasından dolayı, alan için çevre denklemini kurmuş olduğu düşünülmüştür. Öğrenci görüşmenin ilerleyen dakikalarında yazdığı $2x + 3k + 5t = 60$ denkleminin üçgenin çevresini verdiğini anlamıştır. Üçgenin alanı için yüksekliğe ihtiyaç duymuş ve C noktası ile F noktasını birleştiren doğru parçasının dikme ayağını F noktası kabul etmiştir. Çizdiği yüksekliği y değişkeni ile temsil eden Ata, oluşturduğu CFA üçgeni için Pisagor teoremini $x^2 + y^2 = 3k^2$ olarak ifade etmiştir. AC kenar uzunluğunu $3k$ olarak tanımlamış olmasına rağmen Pisagor teoreminde $3k$ terimini paranteze almadığı görülmüştür.

Arya A köşesinden $[BC]$ kenarına çizdiği yüksekliğe x değişkenini atamış ve alanı $\frac{5kx}{2} = 60$ olarak ifade etmiştir.

Sembolik Manipülasyon

- Sembolik temsilleri kullanma: Bora problemde verilen doğru parçalarının birbirleriyle ilişkisini $|AF| = |FB| = k$, $|AE| = 2k$, $|EC| = k$ örneğinde görüleceği üzere tek değişken kullanarak ifade etmiştir. Kayla ve Arya da tıpkı Bora gibi k değişkenini kullanarak doğru parçalarının birbirleriyle ilişkisini tek değişken kullanarak ifade etmişlerdir.

Tuna ise üçgenin kenar uzunluklarının farklı olma ihtimalini gözeterek problemde kenarlar arasında verilen orantı ilişkilerini farklı değişkenler kullanarak ifade etmiştir.

Diğer öğrencilerden farklı olarak Ata problemdeki sembolik temsilleri okurken çizim üzerinde yerlerini tespit ettiği ve bunu eş güdümlü gerçekleştirdiği görülmüştür. Son klinik görüşmenin üçüncü probleminde kenarortaylar için aynı değişkenleri kullanırken, bu problemde kenar uzunlukları için farklı değişkenler kullandığı görülmüştür.

- Değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği: Bora'nın atadığı değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği, üçgenin alan formülünü kullanarak sonuca ulaşmak için girdiği çabadan anlaşılmıştır.

Kayla doğru parçalarına atadığı değişkenin değerini bulması gerektiğini ifade etmiştir.

Tuna $\frac{5yh}{2} = 60$ denklemi ile ABC üçgeninin alanını ifade etmiş ve $5yh = 120$ denkleminden sayısal bir değere ulaşamayacağını anlayınca çözümü bırakmıştır.

Ata da atadığı değişkenlerin sayısal değerlerine ulaşmasını sağlayacak çözüm arayışları içerisinde olmuştur.

Arya yükseklik olarak çizdiği AD doğru parçasının sayısal değerine ulaşıp üçgenin alan formülünden taban olarak kabul ettiği ve $5k$ ile temsil ettiği BC doğru parçasının uzunluğunu bulmaya çalışmıştır.

4. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Bu bölümde araştırmadan elde edilen sonuçlar sunulmuş, sonuçlar alan yazın taraması ile tartışılmış ve araştırmanın sonuçlarına yönelik önerilerde bulunulmuştur.

4.1. Sonuç

Araştırmadan elde edilen sonuçlar beş başlıkta geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ve cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ana temaları altında sunulmuştur. Bu beş başlık:

1. Ön klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar
2. Birinci etap öğretim dizisine ilişkin sonuçlar
3. Ara klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar
4. İkinci etap öğretim dizisine ilişkin sonuçlar
5. Son klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

şeklinde belirlenmiştir.

4.1.1. Ön klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

Araştırma öncesi öğretim dizisinin gerçekleştirileceği sınıfın öğrencilerine uygulanmış olan cebir ve van Hiele geometrik düşünme testi sonuçlarına göre seçilmiş olan sırasıyla düşük, orta ve yüksek başarı seviyesindeki Lara, Bora, Kayla, Tuna, Arya ve Ata isimli odak öğrenciler ile gerçekleştirilmiş ön klinik görüşmelerden elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

4.1.1.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar

Ön klinik görüşmelerde öğrencilerin doğruda ve üçgende açı ile üçgen eşitsizliği konularında kazanım eksikliklerinin (ön bilgi, sembolik temsilin çizimde karşılık geldiği nesneyi tanımama ya da karıştırma, içeriği bilinmeyen kural temelli öğrenmeler) niceliksel veya cebirsel yöntemler ile gerçekleştirilebilecek çözüme ulaşmalarında engel olduğu görülmüştür.

Öğrencilerin problem durumuna uygun olmayan geometrik bilgiyi kullanmaları ve prototip algıları çözüme ulaşmalarında engel teşkil etmiştir.

4.1.1.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar

Cebirsel muhakemenin öğrencilerde gelişimine imkan sağlayan genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme ve niceliksel muhakeme bileşenlerini oluşturan alt temalara ilişkin elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır. Öğrencilerin;

1. Sayısal verinin az olmasından dolayı problemi zor bulduklarını ifade etmeleri,
2. Cebirsel ön bilgi eksikliklerinin çözüm stratejilerini değiştirmelerine, her yeni stratejide yeni değişkenler kullanmaları ve bir süre sonra değişkenlerin rollerini birbirine karıştırmaları,
3. Değişkenin negatif olması durumunda sabit bir veri olan çevre uzunluğunun değişeceğini ifade etme şeklinde eşitliğin işlemsel misyonunu kavramamış olma,
4. Değişkenin doğasını kavrayamamaları,
5. Değişkenin ait olduğu sayı kümesi ile ilgili sınırlı kavrayışları,
6. Toplamı oluşturan üç değişkenden birinin en küçük değeri almasının diğer iki değişken toplamının büyük olması ile sağlanacağı muhakemesine sahip olmama,
7. Yok etme yöntemi gibi cebirsel bir süreci yönetebilmesine rağmen, değişkenin doğasını kavramamış olma ve değişkenleri birbiri cinsinden ifade edememe,
8. Cebirsel ifadelerin sadeleştirilmesi, parantez kullanım ve cebirsel süreçleri yürütme gibi becerilerinin gelişmemiş olması ve aritmetik işlem hataları,
9. "x cinsinden yazma" ifadesini x değişkeninin bir katı olarak değerlendirmeleri,
10. Eşitsizlik operatörü ile aritmetik operatörlerini birbirinden ayırt edememe,
11. Katsayıyı orantı sabiti olarak kullanma

şeklinde gerçekleşmiş durumların geometri problemlerini çözmelerinde engel olduğu görülmüştür.

4.1.2. Birinci etap öğretim dizisine ilişkin sonuçlar

Ön klinik görüşmelerden sonra uygulanmış olan birinci etap öğretim dizisinden elde edilen sonuçlar geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ve cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ana temaları altında aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

4.1.2.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar

Öğrencilerin doğruda açı ve üçgenin temel elemanlarına ait kazanımlarının 9. sınıf seviyesi için yetersiz, sınırlı ve yer yer hatalı olduğu anlaşılmıştır. Öğrencilerin terminoloji kullanımları, kural temelli yanlış öğrenmeleri, geometrik kavramları tanımlamaları ve çizimleri ile kavramlara ilişkin özellikleri ifade edişleri bu görüşü desteklemiştir. Bunun yanı sıra, bazı öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında bazı geometrik özelliklerle ilgili doğru kazanımlarının olduğu ve bu kazanımları uygulayabildikleri gözlemlenmiştir. Öğretim dizisinin ilerleyen haftalarında öğrencilerin yapılandırdıkları geometrik ilişkileri problem çözümleri, sınıf-içi tartışmalar ve diğer geometrik ilişkilerin elde edilişinde devreye soktukları görülmüştür.

Öğrencilerinin önceki öğrenim safhalarında dinamik geometri yazılımlarını duymadıkları ve yazılımlardan herhangi birinin kullanıldığı bir öğrenme ortamını deneyimlemediklerini ifade etmişlerdir.

Öğrencilerin gerek tahtada gerekse CG-II yazılımında çizdikleri üçgenlerin prototip olduğu görülmekle beraber,

- ikizkenar üçgende yatay düzleme paralel olan tabana ait açı ölçülerinin eşit olduğu,
- dik üçgende dik olmayan açı ölçülerinin eşit ölçülü olduğu,
- herhangi bir dörtgende köşegenlerin dik kesiştiği,
- herhangi bir doğru parçasının üçgenin yardımcı elemanı olduğu,
- herhangi bir üçgende yardımcı elemanların doğrusal olduğu,
- iki kenar uzunluğunun Pisagor üçlüsü ya da Pisagor üçlüsünün katı olan uzunluklara sahip herhangi bir üçgene dik üçgen muamelesi yapma

şeklinde prototip algılar ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin duyularını katarak çizimlere yaklaşımları prototip algıların oluşmasına neden olduğu gözlemlenmiştir.

Geometrik kazanımların artışıyla öğrencilerin geometrik nesneler arasında ilişkiler kurmaya başladıkları, bu ilişkilerin bazen doğru bazen de yanlış olduğu gözlemlenmiştir. Utku'nun üçgenin dış açıları toplamını bütünler açı kavramı ile ilişkilendirmek suretiyle gerçekleştirdiği niceliksel muhakeme içeren kanıtı cebirsel muhakeme ve geometri arasındaki bağlantıyı ortaya koyan bir örnek olarak görülmüştür. Odak öğrenci Ata'nın kurduğu "farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit olacağı" yanlış ilişkisi, öğretim dizisi süresince farklı öğrenciler tarafından da kurulmuştur. Birinci

etap öğretim dizisinin sonunda bazı öğrencilerin bu yanlış ilişkiyi doğru gerekçeler sunarak düzeltme durumları ile karşılaşılmıştır.

Öğrencilerin problemlerin çözümleri için farklı yollar önermeleri takdir edilmiş, önerdikleri farklı çözüm yolları sınıf içinde tartışılarak çözüm yollarının doğru olup olmadığı ve bir diğer çözüm yolundan ayırt ediciliği üzerinde durulmuştur.

4.1.2.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar

Öğrencilerin sembolik temsiller ile çalışabilmelerinin öncesinde sağlam bir genelleştirilmiş aritmetiksel muhakemenin geliştirilmesinin gerekli olduğu ortaya çıkmıştır.

Oran-orantı, eşitsizlik ve kesişim-birleşim gibi cebir bilgi yapısı kapsamındaki kavramlar ile ilgili öğrencilerin kavrayışlarında önemli eksiklikler gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin problemlerde kullanılan sembolik temsillerin doğasını anlama konusunda acemiliklerini ilerleyen haftalarda atlattıkları görülse de, problem durumuna göre bu kavrayışları değişkenlik göstermiştir. Değişkenin doğasını kavrama seviyesi ile dinamik düşünme arasında doğrusal bir ilişki olduğunu ortaya koyan durumlar ile karşılaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin değişkenin sayısal değerine ulaşma isteğinin yoğun olduğu ve bu uğurda geometrik bilgilerini devreye sokmadıkları görülmüştür.

Sembolik temsil içeren ifadelerde öğrencilerin cebirsel işlem hataları ve sayı kümeleri kazanım eksikliklerinin, denklem ya da eşitsizlikleri doğru biçimde çözmelerine engel olduğu görülmüştür. Birinci etap öğretim dizisinin sonuna doğru bazı öğrencilerin cebirsel özellikleri tersine çalıştırabildikleri ve cebirsel ifadelerle işlemlerde esneklik kazandıkları gözlemlenmiştir.

Kimi öğrencilerin zamanla değişken kullanımı, gereken geometrik özelliği devreye sokarak denklem yazımı ve sembolik manipülasyon uygulama konularında özerkliğe ulaştıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sembolik manipülasyonlarının sözdizimsel olduğu, yani terimlere çizdiği oklar ile hareket kazandırarak terimlere hareket eden nesneler gibi davranmaları gözlemler arasında yer almıştır.

Öğrencilerin geometrik kavram ve ilişkiler hakkında gerekçeler sunmaya başlamaları ve geometrik düşünmelerindeki gelişim problemleri ele alış biçimlerini olumlu etkilediği ve geometri ile cebir arasında bağlantılar kurmaya başladıkları görülmüştür. Süreç boyunca öğrencilerin niceliksel ve cebirsel muhakemelerini sözlü ya da yazılı olarak ortaya koydukları durumlar gözlemlenmiştir.

4.1.3. Ara klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

Birinci ve ikinci etap öğretim dizileri arasında altı odak öğrenci ile gerçekleştirilmiş olan ara klinik görüşmelerden elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

4.1.3.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar

Birinci etap öğretim dizisinde öğrencilerin elde etmesi beklenen doğruda ve üçgende açı, üçgen eşitsizliği ve üçgende eşlik kazanımlarının belirli bir ölçüde yerleştiği görülmüştür. Bu kavramlardan üçgen eşitsizliği kazanımının odak öğrencilerin hiçbirinde yerleşmediği gözlemlenmiştir.

Temsiller arası geçiş problemi olan ikinci problemde öğrencilerin denklem sistemini dik koordinat sisteminde göstermeleri gerektiğini bildikleri ancak sistemi oluşturan denklemleri temsil eden doğruları çizemedikleri ve denklem sisteminin ortak çözümünün dik koordinat sisteminde anlamını bilmedikleri gözlemlenmiştir.

İkizkenar üçgenin tepe açısına ait yardımcı elemanlarının doğrusal oluşunu elde etmelerinin beklendiği üçüncü problemde öğrenciler hali hazırda sahip oldukları bu bilgiyi ifade etmek suretiyle çözdüklerini düşünürken, Ata ve Tuna kanıt gerçekleştirmişlerdir.

Öğrencilerin üçgende alan kavramına yönelik kazanım eksiklikleri görülmüş olmakla beraber, Ata'nın üçgenin alanına bir dörtgenin alanından yola çıkarak ulaşmaya çalışması öğrencinin geometrik düşünmesindeki gelişime işaret etmiştir.

4.1.3.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar

Cebirsel muhakemeye yol açan genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme ve niceliksel muhakeme bileşenlerini oluşturan alt temalara ilişkin elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır. Öğrencilerin;

1. Sembolik bir ifadenin çevre belirtmeyeceği, çevreyi temsil eden bir ifadenin mutlaka bir sayıya eşit olmasının gerektiği düşüncesi,
2. Kenar uzunluklarının farklı değişkenler ile temsil edilmesini üçgenin çeşitkenar üçgen olması ile ilişkilendirme, değişkenin bazı değerleri için üçgenin ikizkenar üçgen olma ihtimalini görememe,
3. Değişkenin tanım kümesinin tamsayılar ile sınırlı olduğunu düşünme,

4. Eşitliğin nicelikler arasında bir ilişki olması misyonunu algılayamama ve kapalı denklem formunu tanımama,
5. Çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini yanlış kullanma,
6. Terminoloji eksikliklerinin genellemede bulunmalarını zorlaştırması, genellemeyi doğrulama biçimlerinin sayısal örnek vermekten ibaret olması,

şeklinde gerçekleşmiş durumların geometri problemlerini çözmelerinde engel olduğu görülmüştür. Bu durumların yanı sıra öğrencilerde olumlu gelişimler gözlemlenmiştir. Örneğin, Ata'nın denklem sisteminin ortak çözümünü gerçekleştirmesi, Bora'nın toplama işlemine göre 0 sayısının etkisiz eleman olduğunu bilmesi, toplamaya göre ters eleman kavrayışına sahip olması, eşitliğin geçişme özelliğini kullanabilmesi olumlu gelişimler olarak gözlemlenmiştir. Ata'nın varsayımlarda bulunup bu varsayımları geometrik ya da cebirsel bilgi ve becerilerini kullanarak doğrulaması veya çürütmesi ara klinik görüşmede dikkati çeken bir diğer unsur olmuştur.

4.1.4. İkinci etap öğretim dizisine ilişkin sonuçlar

Ara klinik görüşmelerden sonra uygulanmış olan ikinci etap öğretim dizisinden elde edilen sonuçlar, geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisi ve cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisi ana temaları altında aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

4.1.4.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar

İkinci etap öğretim dizisinde bazı öğrencilerin geometrik kavramlara ilişkin kullandıkları terminolojinin kavramsal içeriğini bilmeme ve sembolik temsillerin geometrik çizimde karşılığını bulamama gibi durumlar ile karşılaşıldığı gibi doğru terminoloji kullanan, karşılaştıkları yeni terimlerin anlamı üzerine düşünen ve geometrik kavramların oluşumunda ne gibi faktörlerin rol oynadığını araştıran öğrencilerin sayıca arttığı görülmüştür. Öğrencilerin birbirlerinin fikirlerine karşı çıkış/destekleme seviyeleri ilk haftalarda sayısal örnek verme ve duyular ile hareket etmek iken, araştırmanın sonuna doğru söylemlerinin daha formal yapı aldığı gözlemlenmiştir.

Prototip algıların yeni kavramların tanıtıldığı derslerde daha yaygın olduğu, fakat kazanımların öğrencilerde yerleşmeye başlamasıyla bunun azaldığı gözlemlenmiştir. Görsel algıların yarattığı prototip algılar, dik olmayan üçgende Pisagor üçlüsü ifade etme, iki doğru parçasının karşılıklı olmasının paralellik için yeterli olacağını ve paralel doğru

parçalarının eşit olduğunu düşünme, açıları belli olmayan dik üçgenin $30° - 60° - 90°$ üçgeni olarak kabul etme, herhangi bir üçgende yüksekliğin kenarortay olduğunu düşünme, bir dik üçgenin alanının sadece hipotenüs ile hipotenüse ait yüksekliğin çarpımının yarısı olarak bulunacağını düşünme ve bu formülü sadece yatay yönelimli olan üçgende kullanabilme, yamuğa dikdörtgen muamelesi yapma şeklinde prototip algıları ikinci etap öğretim dizisinde görülmüştür. Bu algıların ortaya çıktığı durumlarda gerekçe sunarak arkadaşının görüşünü çürüten öğrencilerin de mevcut olduğu gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin birinci etap öğretim dizisinde edindikleri geometrik ön bilgi ve özellikleri büyük ölçüde problem çözümünde kullanabildikleri ve özellikleri tersine çalıştırabildikleri gözlemlenmiştir. Öğretim dizisinin her haftasında bir önceki haftaya ait geometrik kazanımları devreye sokabildikleri de görülmüştür.

Benzer üçgenlerin alanları oranı üzerine yapılan tartışmada öğrencilerin alanı iki boyutlu olarak değerlendiremedikleri ve bir "kat ilişkisi" olarak algıladıkları görülmüştür.

4.1.4.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar

Öğrencilerin orantı ilişkilerinde bazen sadeleştirme hataları yapsalar da, bu ilişkileri doğru olarak değerlendirmeye başladıkları ve ilerleyen haftalarda içler veya dışların yer değiştirmesi gibi işlem esnekliği geliştirmeye başladıkları gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin sözel ifade ettikleri eşitsizlikleri matematiksel olarak yazabildikleri, ancak değişkenin sayısal değerine ulaşmak için tamsayı ekseninde düşünerek sınır değerinin bir küçüğüne eşitleme durumlarının devam ettiği görülmüştür.

Hem birden fazla orantı ilişkisi için farklı değişkenler kullanmayı önermeleri hem de kenarortay uzunluk formülünü yönelimi farklı olan üçgenler üzerinde yapılan alıştırmalarda kullanabilmeleri, öğrencilerin değişkenin doğasını anladıklarını ortaya koymuştur.

Öğrencilerin CG-II yazılımında açıortay veya kenarortay çizme araçlarını kullanma biçimleri, sırasıyla herhangi bir doğruyu çizip açıları eşitlemek veya kenarı eş iki parçaya ayırmak suretiyle olması sayısal veriye bağımlılıklarını ortaya koyan örnekler olarak gerçekleşmiştir. Dinamik yazılım geometrik kavramların tanıtımı, kavram yanılgılarının giderilmesi ve kavramlar arasında ilişkiler kurma konusunda zamanı etkili kullanmaya olanak sağlayarak öğrenme ortamına büyük ölçüde katkı sağlamıştır.

Cebirsel terim içeren ifadelerde çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini bazı öğrencilerin yanlış kullandığı görülmüştür. Öğretim dizisinin ilerleyen safhalarında derse katılımı artan bazı öğrencilerin aritmetik işlem becerilerinin oldukça yavaş ve hatalar içerdiği ve değişkenlerin doğasını anlamadıkları görülmüştür.

Öğrencilerin geometrik özellikleri problem çözümünde devreye sokarak niceliksel muhakemelerini ortaya koydukları çözüm yollarında farkı yaratanın ne olduğu üzerinde özellikle durulmuştur.

Üçgenler alt öğrenme alanında cebirsel muhakemenin ön planda tutulduğu bu araştırmada, pilot ve ana çalışmanın gerçekleştiği sınıfların 2018-2019 eğitim öğretim yılının ikinci döneminde MEB tarafından uygulanmış olan ortak sınavlarda diğer dokuzuncu sınıf şubelerine nazaran daha yüksek başarıya sahip olmaları, araştırmanın eğitim-öğretim açısından faydalı olduğunu ortaya koymuştur.

4.1.5. Son klinik görüşmelere ilişkin sonuçlar

Üç hafta süren ikinci etap öğretim dizisinin ardından altı odak grup öğrencisi ile gerçekleştirilmiş olan son klinik görüşmelerden elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

4.1.5.1. Geometri bilgi yapısının cebirsel muhakemeye etkisine ilişkin sonuçlar

Öğretim dizisi süresince hedeflenen kazanımları öğrencilerin problem çözümlerinde kullanabildikleri ancak bazı kazanımların sağlanması için daha uzun süreye ihtiyaç olduğu görülmüştür. Benzerlik teoremlerinin gereksinimlerini sağlama, benzerlik oranının üçgenin yardımcı elemanları için de geçerli olduğu bilgisi ve üçgende alan uygulamaları bu ihtiyaçlar arasında yer almıştır.

Sembolik temsile karşılık gelen nesneyi tanıma ile ilgili herhangi bir sıkıntı yaşanmazken, çizimdeki bir unsuru tanıma konusunda sıkıntılar yaşayan öğrenciler olmuştur. Öğrencilerin herhangi bir dörtgene yamuk ya da dikdörtgen muamelesi yapmaları dörtgen kazanımlarının eksik olduğunu ortaya koymuştur.

4.1.5.2. Cebirsel muhakemenin geometri bilgi yapısına etkisine ilişkin sonuçlar

Cebirsel muhakemeye yol açan genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme ve niceliksel muhakeme bileşenlerini oluşturan alt temalara ilişkin elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde sıralanmıştır.

1. Lara hariç tüm öğrencilerin orantı ilişkilerini doğru bir şekilde değerlendirmeleri ve bu doğrultuda geometrik nesnelere değişken atamaları,
2. Mutlak değer kavrayışının Tuna ve Ata'da gelişmiş olması,
3. Öğrencilerin değişkenlerin doğasını anlamak konusunda ilerleme kaydetmeleri,
4. Tuna ve Ata'nın değişkenleri birbiri cinsinden matematiksel olarak ifade edebilmeleri,
5. Benzer üçgenlerin çevreleri oranının benzerlik oranına eşit oluşunu Kayla'nın niceliksel muhakeme ve Ata'nın cebirsel yöntem ile ifade etmeleri,
6. Tuna'nın yürüttüğü cebirsel stratejilerin niceliksel ve cebirsel muhakemeden yoksun olması, Ata'nın gerçekleştirdiği sembolik manipülasyonları çizim üzerinde değerlendirmesinin anlamlı sembolik manipülasyona imkan sağlaması,
7. Öğrencilerin sözel ve matematiksel ifadeleri arasında uyumsuzlukların olması,
8. Bora ile Tuna'nın ondalıklı sayılar ile aritmetik işlemleri doğru bir şekilde yürütmeleri,
9. Öğrencilerin değişkenin sayısal değerine ulaşma isteği ve işlemleri tamsayılar kümesinde düşünmeleri

şeklinde gerçekleşmiştir.

4.2. Tartışma

Cebirin ve cebirsel muhakemenin merkeze alınarak üçgenler alt öğrenme alanının öğretiminin gerçekleştirildiği bu araştırmada, öğrencilerin cebirsel muhakemeleri ve geometri bilgi yapılarının birbiri ile etkileşimleri bu bölümde ilgili alan yazını ile tartışılmış olup beş başlıkta sunulmuştur:

1. Ön klinik görüşmelere ilişkin tartışma
2. Birinci etap öğretim dizisine ilişkin tartışma
3. Ara klinik görüşmelere ilişkin tartışma
4. İkinci etap öğretim dizisine ilişkin tartışma
5. Son klinik görüşmeler ilişkin tartışma

4.2.1. Ön klinik görüşmelere ilişkin tartışma

Odak öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında edinmiş oldukları kazanımlar göz önünde bulundurularak ön klinik görüşmelerde doğru ve üçgende açılar ile üçgen eşitsizliği konuları içerik olarak belirlenmiştir. Öğrencilerin problemlere verdikleri

yanıtlar geometrik ön bilgi, sembolik temsilleri tanıma ve kullanma, sembolik temsilin karşılık geldiği nesneyi tanıma, geometrik bilgiyi uygulama bakımından eksiklikleri ortaya koymuştur. Öğrenciler problemlerde cebirsel bilgilerini devreye sokmuş olsalar da bu eksiklikler çözümü sürdürmelerinde engel teşkil etmiştir. Birinci problemde Lara'nın verilen çizimi bir doğru parçası ile iki geometrik nesneye ayırması fakat bu nesnelere ait ön bilgilerinin yetersiz oluşu; Bora'nın çözüme en çok yaklaştığı stratejisinde ters açıların eş olduğu bilgisini devreye sokamaması; ikinci problemde Kayla'nın üçgenin çevresi için yazdığı denklemden iki değişkeni diğer değişken cinsinden ifade etmesi fakat üçgen eşitsizliği bilgisine sahip olmaması bu duruma örnek gösterilebilir.

Kaput, Blanton ve Moreno'ya (2008, s.46) göre cebirsel sistem, genelleme ifade edilmesi bağlamında sağlam temeller üzerine oturmuş bir sembolizasyon sistemi ile tanıtılmazsa kural temelli olur. Geometri öğrenme alanında yaygın bir şekilde görülen kural temelli benzetmeler, örneğin birinci problemdeki çizim için "kalem ucu" benzetmesi gibi, öğrenciler tarafından ifade edilmiş ve klinik görüşme esnasında öğrencilere yöneltilen sorulardan öğrencilerin sadece kuralın adını hatırladıkları, ancak içeriğini bilmedikleri görülmüştür.

Vinner ve Herschkowitz'in (1980) her bir geometrik kavram için en az bir tane prototipik örneğin olduğu şeklinde ifade ettikleri (s.179-180) prototip fenomeninin öğrencilerin cebirsel ya da niceliksel muhakeme ile gerçekleştirilebilecek çözüme ulaşmalarında engel teşkil ettiği görülmüştür. Birinci problemde öğrencilerin ışınların paralelliğini öne sürerek çizimdeki geniş açılar ya da bu açıların bütünlerinin eş olacağı şeklindeki duyulardan kaynaklanan prototip algıları ve ikinci problemde kenar uzunlukları arasındaki eşitsizliği yorumlayabilmelerine rağmen prototip üçgenler çizmeleri bu duruma örnek teşkil etmiştir.

Smith III ve Thompson (2008, s.120); muhakemeye değer ve ödül verilmeyen, berrak düşünmenin ve iletişimin desteklenmediği, durumlar üzerine çoklu bakış açılarının hoş görülmediği bir matematik öğretiminde öğrencilerin durumları, nicelikleri ve ilişkileri tanımlama yerine matematiği aritmetik ile sayısal değer bulma olarak gördüklerini ifade etmişlerdir. Nitekim ön klinik görüşmelerde öğrenciler problemlerde sayısal verinin az olmasından dolayı problemi zor bulduklarını belirtmişlerdir. Dördüncü problemde öğrencilerin verilen eşitsizlikteki açılara açı ölçü temsillerinin katsayıları ile orantılı tek değişken atamalarının temelinde de değişkenin sayısal değerine ulaşma isteğinin olduğu düşünülmüştür. Janvier'e (1996) göre formal cebire geçiş, öğrencilerin

değişkenlerin bulunabilecek belirli bir bilinmeyeni temsil ettiği görüşünden ziyade cebirsel temsilleri dinamik bir bakış açısıyla değerlendirmeleri ile sağlanır.

Alan yazında öğrencilerin cebirsel sembolleri yorumlamada zorluk çektiklerini ortaya koyan pek çok çalışma vardır (Clement, 1982; Kaput ve Sims-Knight, 1983, MacGregor ve Stacey, 1997; Quinlan, 2001; Dindyal, 2003; Weinberg, Dresen ve Slater, 2016, Atasoy ve Bulut, 2018). İkinci problemde Lara ve Bora'nın kenar uzunluğunu temsil eden değişkenin negatif tamsayı değeri alabileceğini düşünmüş olmaları öğrencilerin değişkenin doğasını kavrayamadıklarını ortaya koymuştur. Smith'in sembolik düşünme olarak adlandırdığı cebirsel muhakeme türünde (2008, s.133) cebir öğretiminin hedeflerinden biri de öğrencinin cebirsel sembolizasyon için anlam yaratmalarına yardımcı olmaktır. Üçüncü problemde Bora'nın denklemlerin ortak çözümü gibi cebirsel bir süreci yönetebilmesine rağmen değişkenin doğasını kavramamış olmasından dolayı, değişkenleri birbiri cinsinden ifade edememesi de değişkenin doğasını kavramanın ne denli önemli olduğuna işaret etmiştir. Cebirsel ön bilgi eksikliklerinin öğrencilerin çözüm stratejilerini değiştirmelerine sebep olduğu, her yeni stratejide yeni değişkenler kullanmaları ve bir süre sonra değişkenlerin rollerini birbirine karıştırmaları ön klinik görüşmede sıkça görülmüştür.

Kaput (2000b, s.9) anlamlı sembolik manipülasyonun cebirsel muhakemeye imkan verdiğini ifade etmiştir. Anlamlı sembolik manipülasyona imkan sağlayan alt temalardan biri genelleştirilmiş aritmetiksel muhakemedir. Öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme bileşenlerindeki kazanım ve tecrübe eksiklikleri geometri problemlerini çözmelerinde olumsuz bir etken olarak ortaya çıkmıştır. Bu bileşende aritmetik işlem hataları, eşitsizlik operatörü ile aritmetik operatörlerini birbirinden ayırt edememe, değişkenin negatif olması durumunda sabit bir veri olan çevre uzunluğunun değişeceğini ifade etme şeklinde eşitliğin işlemsel misyonunu kavramamış olma, değişkenin ait olduğu sayı kümesi ile ilgili sınırlı kavrayışlar, toplamı oluşturan üç değişkenden birinin en küçük değeri almasının diğer iki değişken toplamının büyük olması ile sağlanacağı muhakemesine sahip olmama şeklinde görülmüştür. Anlamlı sembolik manipülasyona imkan veren bir diğer bileşen ise cebir bilgi yapısıdır. Bu yapı, öğrencilerin cebirsel ön bilgileri, temsiller arası geçiş yapma becerileri, cebirsel özellik kullanmaları ve denklem kurmaları alt bileşenlerinden oluşur. Cebir bilgi yapısında öğrencilerin cebirsel ifadelerde sadeleştirme, parantez kullanımı ve cebirsel özellik kullanma becerilerinin yeterince gelişmemiş olduğu ortaya çıkmıştır.

4.2.2. Birinci etap öğretim dizisine ilişkin tartışma

Öğretim dizisinin gerçekleştirildiği sınıfın öğrencilerinin önceki öğrenim safhalarında edinmiş olmaları beklenen doğruda açı ve üçgenin temel elemanlarına ait kazanımlarının dokuzuncu sınıf seviyesi için oldukça sınırlı olduğu görülmüştür. Kural temelli yanlış öğrenmeler, yanlış terminoloji kullanımı, geometrik nesneleri yanlış çizimleri, geometrik nesnenin özelliklerini yanlış bilme şeklindeki durumlar sınıf-içi tartışmalarda ortaya çıkmıştır. Görece daha az sayıda öğrencinin temel kavramlarla ilgili doğru kazanımlarının olduğu ve bu kazanımlarını problem çözümlerinde kullanabildikleri gözlemlenmiştir. Araştırmacı araştırma süresince kural temelli öğrenimlere yer vermemiş ve geometrik nesnelere ilişkin kazanımlar CG-II yazılımı desteği ile sınıf-içi tartışmalarda öğrenciler tarafından keşfedilmesi suretiyle gerçekleştirilmiştir.

MEB tarafından 2011 yılında yayınlanan Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında öğretmenlere, öğrenme ortamları hazırlarken, dinamik geometri yazılımlarının etkileşimli yapılarından yararlanmaları gerektiği vurgusu yapılmıştır (s.15-16). Araştırmanın yürütüldüğü sınıfın öğrencileri önceki öğrenim safhalarında dinamik geometri yazılımlarını duymadıklarını ve yazılımlardan herhangi birinin kullanıldığı bir öğrenme ortamını deneyimlemediklerini ifade etmeleri düşündürücüdür. DGY'nın öğrencilere ölçüm yapma, karşılaştırma, şekilleri manipüle etme gibi deneyimler sunmasından dolayı, öğretim dizisi boyunca geometrik kavramların tanıtımında ve kavram yanılgılarının giderilmesinde zamanı etkili kullanmaya olanak sağlayarak öğrenme ortamına büyük ölçüde katkı sağlamıştır. CG-II yazılımı öğrencilerin geometrik kavramlar arasında ilişkiler kurmaları ve geometrik düşünmelerinin gelişiminde de önemli rol oynamıştır.

Haj-Yahya (2019, s.3) prototip öğrenmelerin genelde ilk öğrenilenler olup birçok öğrencinin kavram imajında belirgin olduğunu ifade etmiştir. Birinci etap öğretim dizisinde öğrencilerin üçgen çizimlerinin prototip oluşu, bir ikizkenar üçgende yatay düzleme paralel olan kenara ait açı ölçülerinin eşit olması gerektiği, dik üçgende dik olmayan açı ölçülerinin eşit ölçülü olacağı, herhangi bir dörtgende köşegenlerin dik kesiştiği, üçgenin içinde çizilen herhangi bir doğru parçasının üçgenin yardımcı elemanı olduğu, herhangi bir üçgende üçgenin yardımcı elemanlarının doğrusal olduğu, iki kenar uzunluğunun Pisagor üçlüsü ya da Pisagor üçlüsünün katı olduğu herhangi bir üçgene dik üçgen muamelesi yapmaları şeklindeki prototip algılar gözlemlenmiştir. Prototip algıların

oluşumuna sebep olan faktörlerden biri de öğrencilerin duyuları ile çizimlere yaklaşımları olduğu gözlemlenmiştir. Görsel algının geometrik kavramların kullanımı ve gelişimini engellediği (Gal ve Linchevski, 2010; Haj-Yahya, 2019; Jones, 2000) görüşü göz önünde bulundurularak kavramlara ilişkin özelliklerin hatırlanması gerektiği öğrencilere tavsiye edilmiştir. Öğretim dizisinin ilerleyen haftalarında da öğrencilerin birbirlerine kavramlara ilişkin özellikleri hatırlatarak birbirlerinin düşüncelerini düzeltme girişimlerinin olduğu gözlemlenmiştir.

Öğretim dizisinin ilerleyen haftalarında öğrencilerin yapılandırdıkları geometrik ilişkileri problem çözümlerinde, sınıf-içi tartışmalarda ve diğer geometrik ilişkilerin elde edilmesinde kullanmaya başladıkları görülmüştür. Öğretim dizisinin ilk haftalarında öğrencilerin dayanaksız "örneklerle kanıtlama" argümanı kullanarak genel ifadeleri doğrulamaları (Carpenter ve Levi, 2000, s.19) geometrik düşünmelerinde gelişim kaydetmeleri sayesinde gerekçeler sunarak kanıtlamaya evrilmiştir. Öğrencilerin geometrik gerçeklerle hareket etmenin önemini takdir ettikleri gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin geometrik bilgiyi yapılandırmaları, kavramlar arası ilişkiler kurma şeklinde gerçekleştiği görülmüştür. Öğretim dizisi süresince öğrencilerin geometrik nesne ve kavramlar arasında ilişkiler kurmaya çalıştıkları ve bu ilişkilerin bazen doğru bazen de yanlış olduğu gözlemlenmiştir. Utku'nun üçgenin dış açıları toplamını bütünler açı kavramı ile ilişkilendirmek suretiyle gerçekleştirdiği niceliksel muhakeme içeren kanıtı, cebirsel muhakemenin geometrik düşünme ile güçlü bağlantılar içinde olduğuna (Dindyal, 2007, s.7) örnek teşkil etmiştir. İkinci hafta üçgende açı-kenar ilişkisi alt başlığının öğretimi esnasında odak öğrenci Ata'nın kurduğu "farklı üçgenlerde eşit ölçülü açıları gören kenar uzunluklarının eşit olacağı" yanlış ilişkisi, üçgenler alt öğrenme alanının farklı alt başlıklarında diğer öğrenciler tarafından da kurulmuştur. Kurulan bu yanlış ilişkinin giderilmesi için CG-II yazılımı kullanılmış ve bazı öğrencilerin bu yanlış ilişkiyi doğru gerekçeler sunarak düzeltme durumları gözlemlenmiştir.

Alan yazında sınıf-içi sosyal etkileşimin öğrenmeyi desteklediği bir çok çalışma mevcuttur (Yackel ve Cobb, 1996; Cobb ve Yackel, 1996; Cobb, vd., 1997). Öğrenme etkileşim halindeki öğrencilerin bireysel katkıları ile gerçekleşir (Steffe ve Thompson, 2000, s. 290). Öğrencilerin matematiksel görüş ve çözümlerini gerekçelendirme ve birbirini dinleyerek onaylama ya da karşı çıkma şeklinde sosyal etkileşimin oldukça yoğun olduğu bu uygulamada problemlerin çözümü için farklı yollar önermeleri takdir

edilmiş, önerdikleri farklı çözüm yolları sınıf içinde tartışılarak doğru olup olmadığı ve bir diğer çözüm yolundan ayırt ediciliği hakkında konuşulmuştur.

Cebirsel muhakemenin bileşenleri olan genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı, sembolik manipülasyon, genelleme ve niceliksel muhakeme bileşenlerinde öğrencilerin eylem ve söylemlerinin dokuzuncu sınıf seviyesi açısından sınırlı olduğu gözlemlenmiştir. Bu durum erken cebir öğretimi ve cebirsel muhakemenin erken yaşta geliştirilmesinin önemini ortaya koymaktadır (Kaput, Carraher ve Blanton, 2008; Ayber, 2017; Ataş, 2019). Cebir bilgi yapısı kapsamında oran-orantı, eşitsizlik ve kesişim-birleşim kavramları ile ilgili öğrenci kavrayışlarında önemli boşluklar gözlemlenmiştir. Yaygın olarak gözlemlenen durumlar; orantıdaki değişkenlerin birbirleriyle ilişkisini yanlış yorumlama, eşitsizliğe denklem muamelesi yapma, değişkenin tanım kümesini tamsayı bazında düşünme ve kesişim-birleşim kavramları arasındaki farkı ayırt edememe şeklinde gerçekleşmiştir. Bu kavramlar çok yönlü ve boyutlu olarak üçgenlerle ilgili kavram ve özelliklerin sunulması ve problemlerde ele alınmıştır. Birinci etap öğretim dizisinin sonuna yaklaşıldığında cebir bilgi yapısına ait bu kavram ve kavrayışlarla ilgili yer yer hatalı yorumlarla karşılaşıldığı gibi, kavramları doğru yorumlayan ve algılayan öğrencilerin arttığı da gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin geometri problemlerinde kullanılan sembolik temsillerin doğasını anlama konusundaki acemiliklerini ilerleyen haftalarda atlattıkları gözlemlense de, bazı öğrencilerin değişkenin doğasını anlamakta zorluk çektikleri görülmüştür. Öğrencilerin değişken kullanımı ile ilgili yaşadıkları zorlukların, soyut semboller ile gerçekleştirilen işlemlerin öğrencilere anlamlı gelmemesi (Herscovics ve Linchevski, 1994) ve ilköğretim seviyesinde öğrencilerin cebirsel sembolizasyon için anlam yaratmalarını sağlayacak hedeflerin tanımlanmamış oluşudur (Bastable ve Schifter, 2008, s.173). Birçok öğrencinin değişkenin sayısal değerine ulaşma isteğinin yoğun olduğu ve bundan dolayı geometrik bilgilerini devreye sokmadıkları görülmüştür. Sembolik temsil içeren ifadelerde öğrencilerin sayı kümeleri kazanım eksiklikleri, cebirsel işlem hataları ve değişkenleri birbiri cinsinden ifade edebilme için gereken sembolik manipülasyon becerilerinin henüz gelişmemiş oluşu, denklemleri doğru biçimde çözmelerine engel olduğu durumlar olarak görülmüştür. Genel olarak öğrencilerin gerçekleştirdikleri sembolik manipülasyonunun sözdizimsel olduğu yani terimlere çizilen oklar ile hareket kazandırarak terimlere hareket eden nesneler gibi davranmaları gözlemler arasında yer almıştır.

Değişkenin doğasını kavrama seviyesi ile dinamik düşünme arasında doğrusal bir ilişki olduğunu ortaya koyan durumlarla karşılaşılmıştır. Birinci etap öğretim dizisinin sonuna doğru bazı öğrencilerin cebirsel özellikleri tersine çalıştırmada ve cebirsel ifadelerle işlemlerde esneklik kazandıkları gözlemlenmiştir. Kimi öğrencilerin zamanla değişken kullanma, gereken geometrik özelliği devreye sokarak denklem yazma ve sembolik manipülasyonda bulunmada özerkliğe ulaştıkları gözlemlenmiştir. Birinci etap öğretim dizisi süresince öğrencilerin niceliksel ve cebirsel muhakemelerini sözlü ya da yazılı olarak ortaya koydukları durumlar gözlemlenmiştir.

Birinci etap öğretim dizisinin son haftasında öğrencilerin geometrik problemleri ele alış biçimlerinde geometri ile cebir arasında bağlar kurmalarıyla beraber belirgin gelişim gözlemlenmiştir.

4.2.3. Ara klinik görüşmelere ilişkin tartışma

Birinci etap öğretim dizisi sürecinde öğrencilerin elde etmesi beklenen doğruda ve üçgende açı, üçgende eşlik kavramları ile ilgili kazanımlarının belli ölçüde yerleştiği ancak görüşmenin birinci probleminde üçgen eşitsizliğini odak öğrencilerin kullanmamaları dikkat çekici olmuştur. Öğrencilerin üçgen eşitsizliğini problemde kullanmamalarının sebepleri arasında kenar uzunluklarının değişkene bağlı olarak tanımlanması ve problemin iki şıkkının çevre ile ilintili olmasından dolayı üçgenin çevresine odaklanmalarına bağlı olabileceği düşünülmüştür. Dindyal'in (2004, s.185) çalışmasında da kenar uzunluklarının değişkenler ile tanımlandığı bir üçgende öğrencilerin değişkenin alabileceği değerler ile ilgili bir kısıtlamadan bahsetmedikleri ortaya çıkmıştır.

İkinci problemde üçgenin bir kenar uzunluğunun negatif bir sayı olamayacağını tüm öğrenciler vurgulamış iken Bora'nın ortak çözümden elde ettiği ve oluşturduğu üçgenin köşe noktaları $(-4,0)$ ve $(2,0)$ arasındaki mesafeyi -2 birim bulması, üçgenin kenar uzunluğunun negatif değer almayacağı beyanı ile çelişmiştir. Bu durumun, öğrencinin yoğun sembolik manipülasyon neticesinde problem bağlamından ayrılmasının ve eylemlerinde anlam araştırmasına girmemesinin bir sonucu olabileceği düşünülmüştür.

Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarından kazanmış olmaları beklenen üçgende alan kavramı ile ilgili kazanım eksiklikleri görülmüş olmakla beraber, Ata'nın üçgenin

alanına bir dörtgenin alanından yola çıkarak ulaşmaya çalışması öğrencinin geometrik düşünmesindeki gelişime işaret etmiştir. Ata elde ettiği üçgende alan formülünü uygulayarak elde ettiği sonuç ile dörtgenin alanından yola çıkarak elde ettiği üçgenin alanı sonucunun farklı çıkması üzerine, öğrenci kendi elde ettiği sonucun doğru olduğunu ifade etmiştir. Bir başka deyişle öğrenci eylemini bir nevi kanıt olarak nitelendirmiştir.

Bir ikizkenar üçgende tepe açısına ait yardımcı elemanların çakışık olduğunun elde edilmesinin beklendiği üçüncü problemde bu bilgiyi ifade ederek çözüm getirdiklerini düşünen öğrenciler olmasına rağmen, Ata ve Tuna'nın kanıtlama girişimleri değerli bulunmuştur. Ata ikizkenar üçgende tepe açısına ait yardımcı elemanların çakışık olduğunu yardımcı elemanın oluşturduğu iki üçgenin eş olduklarını göstererek kanıtlamıştır. Tuna ise yardımcı eleman tarafından oluşturulan üçgenler arasında doğru bir benzerlik bağıntısı kurmasına rağmen, benzerliği "farklı üçgenlerde eşit uzunlukta kenarları gören açıların eşit olması" ilişki ile temellendirmesi yanlış olmuştur.

Matematiksel nesnelere ait farklı temsil formlarını birbirine bağlamanın matematiğin öğrenme alanlarında bağlantılar kurmaya yardımcı olduğuna dair pek çok araştırma vardır (Dougherty, 2008; Venenciano vd, 2020). Temsiller arası geçiş problemi olan ikinci problemde öğrencilerin denklem sistemini dik koordinat sisteminde göstermeleri gerektiğini bildikleri ancak sistemi oluşturan denklemleri temsil eden doğruları çizemedikleri ve denklem sisteminin ortak çözümünün dik koordinat sistemindeki anlamını bilmedikleri gözlemlenmiştir. Literatür ve öğretim tecrübeleri; bazı öğrencilerin doğru denklemi oluşturmakta, grafikleri sembollerle ilişkilendirmekte, doğruyu bir nesne olarak ele almakta, grafikler hakkında nitel yargılarda bulunmakta ve grafikteki kavramların anlamını yorumlamakta sorun yaşadıklarını göstermektedir (Ferrini-Mundy, 2003, s. 22). Öğrencilerin denklemlerin ortak çözümü için kullanılan cebirsel yöntemleri bildikleri, fakat hem yürüttükleri sembolik manipülasyonların genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme bileşenlerindeki eksiklikler hem de cebirsel işlem beceri seviyeleri tarafından olumsuz etkilendikleri görülmüştür. Ata denklem sisteminin ortak çözümünü doğru bir şekilde gerçekleştirmiş fakat çözüm için anlam yaratamamıştır. Godfrey ve Thomas'ın (2008, s.72) ifade ettiği gibi, Lara'nın eşitliğin nicelikler arasında bir ilişki sembolü olmasından ziyade bir operatör olarak algılaması, kapalı denklem formunu tanımaması ile sonuçlanmıştır. Godfrey ve Thomas'ın (2008, s.90) ifade ettiği üzere, eşitlik sembolüne sürecin sonucu olduğu fikrine sahip ve denklik ilişkisinin

özelliklerini oluşturamamış öğrencilerin matematiksel denklemlerle tam olarak etkileşime giremediği sonucu bu problemde gözlemlenmiştir.

Kieran'a (1981, s.324) göre öğrenciler cebiri denklemler ile tanıdıkları için eşit işaretinin olmaması öğrencilerde büyük kavramsal problem yaratmaktadır. Lara ve Kayla'nın birinci problemde sembolik bir ifadenin çevre belirtemeyeceği, çevreyi temsil eden bir ifadenin mutlaka bir sayıya eşit olmasının gerektiği düşüncesi öğrencilerin Kieran'ın (1992) ifade ettiği gibi "=" işaretini aritmetikte işlemi sonuçtan ayıran bir işaret olarak algıladıklarını ortaya koymuştur. Bu durum Atasoy ve Bulut'un 2018 yılında 12. sınıf öğrencilerinin geometri konularındaki cebirsel süreçlerini inceledikleri çalışmada da ortaya çıkmış ve yazarlar durumu iyi düzeydeki öğrencilerin bile bir geometrik şeklin çevresini cebirsel olarak ifade etmede hataya düştüklerini ve cebirsel ifadelerin sonuç belirtmeyeceğini düşünmeleri olarak değerlendirmişlerdir.

Değişkenin tanım kümesinin tamsayılar ile sınırlı olduğunu ve değişkenlerin negatif veya pozitif oluşlarının belirleyicisinin bu değişkenlerin katsayıları olduğunu düşünme şeklinde gerçekleşmiş durumların, öğrencilerin değişkenin tanım kümesini kavramadıklarını ortaya koymuştur.

Öğrencilerin terminoloji eksikliklerinin genellemede bulunmalarını zorlaştırdığı ve cebirsel genellemeden ziyade aritmetiksel genelleme eğilimleri (Tanışlı, 2016, s. 62) genellemeyi doğrulama biçimlerinin sayısal örnek vermekten ibaret olması ile sonuçlanmıştır.

Piaget (1971) öğrencilerin temelde araştırmacılar olduklarını, araştırmaları için varsayımda bulunduklarını ve karşı örnekler ile karşılaştıklarında bu varsayımlarını düzenleyerek deneyimleri için anlamlar oluşturduklarını ifade etmiştir. Ata'nın varsayımlarda bulunup bu varsayımları geometrik ya da cebirsel bilgi ve becerilerini kullanarak doğrulaması veya çürütmesi ara klinik görüşmede dikkati çeken bir unsur olmuştur.

4.2.4. İkinci etap öğretim dizisine ilişkin tartışma

Üçgenler alt öğrenme alanında öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin incelendiği bu araştırmanın ikinci etap öğretim dizisi üç hafta süre ile devam etmiştir. İkinci etap öğretim dizisi üçgende benzerlik, üçgenin yardımcı elemanları, Öklid teoremi ve üçgende alan konularını içermiştir. Öğretim dizisinde görece pasif katılımcı öğrencilerin geometrik kavramlara ilişkin kullandıkları terminolojinin kavramsal içeriğini

bilmemeleri ve sembolik temsillerin geometrik çizimde karşılığını bulamamaları gibi durumlar ile karşılaşıldığı gibi; doğru terminoloji kullanan, karşılaştıkları yeni terimlerin anlamları üzerine düşünen ve geometrik kavramların oluşumunda ne gibi faktörlerin rol oynadığını araştıran öğrencilerin sayıca arttığı da görülmüştür. Öğrencilerin birbirlerinin fikirlerine karşı çıkış veya destekleme seviyeleri birinci etap öğretim dizisinin ilk haftalarında sayısal örnek verme ve duyular ile hareket etmek şeklinde iken, araştırmanın sonuna doğru söylemlerinin daha formal yapıya büründüğü gözlemlenmiştir. Hatırda kalması amacıyla yapılan benzetmelerden ve kurallardan araştırmacının öğretim dizisi boyunca kaçınmasının ve sınıf-içi tartışmalarda öğrencilerin formal ifadelerinin araştırmacı tarafından vurgulanmasının bu gelişimi desteklediği düşünülmüştür.

Pek çok araştırmacı, kavram örneklerinin prototip örneklerden daha gelişmiş olanlara doğru hiyerarşik biçimde oluşturulduğunu ifade etmiştir (Vinner ve Herschkowitz, 1980; Watson ve Mason, 2002; Bills vd., 2006). Öğretim dizisi süresince yeni geometrik kavramların tanıtıldığı derslerde prototip algıların daha yaygın olduğu ve geometrik kazanımın öğrencilerde yerleşmeye başlamasıyla daha azaldığı görülmüştür. Vinner ve Dreyfus (1989, s.364) karmaşık kavramların tek bir adımda gerçekleşmediğini ifade etmeleri, kazanımların yerleşmesi ile beraber prototip algıların seyrekleşmesi ile açıklanabilir. İkinci etap öğretim dizisinde görsel algıların yarattığı prototip algıların; dik olmayan üçgende Pisagor üçlüsü ifade etme, iki doğru parçasının karşılıklı olmasının paralellik için yeterli olacağını ve paralel doğru parçalarının eşit olduğunu düşünme, açıları belli olmayan bir dik üçgeni $30° - 60° - 90°$ üçgeni olarak kabul etme, herhangi bir üçgende yüksekliğin kenarortay olduğunu düşünme, bir dik üçgenin alanının sadece hipotenüs ile hipotenüse ait yüksekliğin çarpımının yarısı olarak bulunacağını düşünme ve bu formülü sadece yatay yönelimli olan üçgende kullanabilme, yamuğa dikdörtgen muamelesi yapma şeklinde prototip algılar görülmüştür. Bu algıların ortaya çıktığı durumlarda kanıt öne sürerek arkadaşının görüşünü çürüten öğrencilerin mevcut olduğu gözlemlenmiştir.

Öğrencilerin birinci etap öğretim dizisinde edindikleri geometrik ön bilgi ve özellikleri büyük ölçüde problem çözümünde kullanabildikleri ve bazı öğrencilerin özellikleri tersine çalıştırabildikleri gözlemlenmiştir. İkinci etap öğretim dizisinin her haftasında bir önceki haftaya ait geometrik kazanımları problem çözerken devreye sokabildikleri görülmüştür. Bu araştırmanın ikinci etap öğretim dizisi kazanımlarından olan ve önceki öğrenim safhalarında kazanılmış olacağının beklendiği üçgende alan

kavramı ile ilgili öğrencilerin önemli eksikliklerinin olduğu gözlemlenmiştir. Benzer üçgenlerin alanları oranı üzerine yapılan tartışmada öğrencilerin alanı iki boyutlu olarak değerlendiremedikleri ve bir "kat ilişkisi" olarak algıladıkları görülmüştür.

İkinci etap öğretim dizisinin ilk haftasında öğrencilerin orantı ilişkilerini doğru bir biçimde değerlendirmelerine rağmen, yer yer sadeleştirme hataları yaptıkları gözlemlenmiştir. İkinci etap öğretim dizisinin ilerleyen haftalarında öğrencilerin orantı kurma ve içler veya dışların yer değiştirmesi gibi orantıda işlem esnekliği geliştirmeye başladıkları gözlemlenmiştir. Öğrencilerin sözel ifade ettikleri eşitsizlikleri matematiksel olarak yazabildikleri, ancak değişkenin sayısal değerine ulaşmak için tamsayı ekseninde düşünerek sınır değerinin bir küçüğüne eşitleme durumlarının devam ettiği görülmüştür. Öğrencilerin sayısal veriye olan bağımlılıklarına bir diğer örnek ise, CG-II yazılımında açıortay veya kenarortay çizme araçlarını kullanma biçimlerinin sırasıyla herhangi bir doğruyu çizip açı ölçülerini eşitlemek veya kenarı eş iki parçaya ayırmak biçiminde olmasıdır. Aynı üçgende kenar uzunlukları arasındaki birden fazla orantı ilişkisi için farklı değişkenler kullanmayı önermeleri ve kenarortay uzunluk formülünü yönelimi farklı olan üçgenler üzerinde yapılan alıştırmalarda kullanabilmeleri, öğrencilerin değişkenin doğasını anladıkları durumlara örnek teşkil etmiştir. Cebirsel terim içeren ifadelerde çarpmanın toplama üzerine dağılma özelliğini bazı öğrencilerin yanlış kullandığı görülmüştür. Öğretim dizisinin ilerleyen safhalarında derse katılımı artan bazı öğrencilerin aritmetik işlem becerilerinin oldukça yavaş olduğu ve hatalar içerdiği, değişkenlerin doğasını anlamadıkları ve cebirsel süreçleri yönetemedikleri görülmüştür.

Öğrencilerin geometrik özellikleri problem çözümünde devreye sokarak niceliksel muhakemelerini ortaya koydukları çözüm yollarında farkı yaratanın ne olduğu üzerinde özellikle durulmuştur. Oral, İlhan ve Kınay (2013, s.42) geometri ve cebir öğrenme alanlarının öğretiminde öğrencilerin hem geometrik hem de cebirsel düşünme düzeylerine uygun öğrenme ortamlarının oluşturulmasının, geometri ve cebir öğrenmeyi kolaylaştıracağını ve anlamlı hale getireceğini ifade etmişlerdir.

NCTM (1989), matematik eğitim reformunda entelektüel ve sosyal otonominin ana hedef olduğunu vurgulamıştır. Öğretim dizisi neticesinde bazı öğrencilerin entelektüel özerklik düzeylerinde anlamlı gelişim gözlemlenmiştir. Daha spesifik olmak gerekirse, öğretim dizisi ile öğrenciler problemlerinin gerektirdiği geometrik bilgi ile hareket ederek bilinmeyen nesnelere değişken atama, cebirsel bilgiyi devreye sokarak sembolik

manipülasyon gerçekleştirme ve sembolik manipülasyon sonuçlarını değerlendirme şeklindeki basamakları kendi kendilerine gerçekleştirdikleri gözlemlenmiştir.

4.2.5. Son klinik görüşmelere ilişkin tartışma

Öğrencilerin öğretim dizisi süresince hedeflenen geometrik kazanımları problem çözümlerinde kullanabildikleri, ancak bazı kazanımların sağlanması için daha uzun süreye ihtiyaç olduğu görülmüştür. Benzerlik teoremlerinin gereksinimlerini sağlama, benzerlik oranının üçgenin yardımcı elemanları için de geçerli olduğu bilgisi ve üçgende alan uygulamaları bu ihtiyaçlar arasında yer almıştır. Öğrencilerin önceki öğrenim safhalarında dörtgen kazanımlarındaki eksiklikler, herhangi bir dörtgene yamuk ya da dikdörtgen muamelesi yapmaları ile sonuçlanmıştır. Geometrik kazanımın yerleşmediği durumlarda öğrencilerin değişkenin sayısal değerine ulaşma isteklerinin daha yoğun olduğu görülmüştür.

Son klinik görüşmenin ikinci problemi öğrencilerin genelleştirilmiş aritmetiksel muhakeme, cebir bilgi yapısı ve sembolik manipülasyon kapsamında gelişimleri hakkında veriler sunmuştur. Düşük ve orta başarı düzeyine sahip öğrencilerin yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilere kıyasla ondalıklı sayılar ile yürüttükleri aritmetik işlemleri doğru gerçekleştirdikleri görülmüştür. Aynı problemde Tuna ve Ata'nın mutlak değer kavrayışlarının tam olduğu, Bora ve Arya'nın mutlak değerin pozitif sonuç çıkaracağını bilmelerine rağmen, içi negatif olan bir mutlak değer ifadesinin pozitif olarak dışarı çıkması için gereken işlem bilgisine sahip olmadıkları ortaya çıkmıştır. Genel anlamda Lara hariç tüm öğrencilerin orantı ilişkilerini doğru bir şekilde değerlendirdikleri ve bu doğrultuda geometrik nesnelere değişken atayabildikleri görülmüştür. Sembolik manipülasyon kapsamında öğrencilerin değişkenlerin doğasını anlamak konusunda ilerleme kaydettikleri ve Tuna ile Ata'nın değişkenleri birbiri cinsinden matematiksel olarak ifade edebildikleri görülmüştür.

Öğrencilerin cebirsel düşünceyi matematiksel olarak ifade etmede güçlük çekmeleri ve hatalar yapmaları pek çok araştırmanın sonucu olarak ifade edilmiştir (Clement, Lochhead ve Monk 1981; Clement, 1982). Kayla'nın sözel ifadesini matematiksel olarak yanlış ifade etmesi ve öğrencilerin sözel ve matematiksel ifadeleri arasında uyumsuzlukların oluşu, son klinik görüşmelerde gözlemlenmeye devam etmiştir. Meşhur öğrenci-profesör probleminde (Clement, Lochhead ve Monk, 1981, s.288) öğrencilerin tersinim hatalarının (reversal error) cebirsel harfleri nesneleri

etiketleme olarak yorumlamalarından kaynaklandığı düşünülmektedir (Quinlan, 2001, s.512).

Öğrenciler sadece değişkenler ile aritmetik ve cebirsel işlemlere odaklanıp işlem boyutundan öteye gidemezlerse problem çözme süreçlerinde zorluk yaşayabilirler (Thompson, 1993; Smith III ve Thompson, 2008). Üçüncü problemde Tuna'nın cebirsel veya niceliksel muhakemede bulunmadan cebirsel işlemlere ve değişkenlerin tek tek sayısal değerlerine odaklanıp işlem boyutundan öteye gidememesi, değişkenlere ilişki kurulacak nicelikler olarak değil de manipüle edilecek nesneler olarak davranmasından (White ve Mitchelmore, 1996, s.88) kaynaklanmıştır. Aynı problemde Ata kenarortay uzunluklarının tek tek sayısal değerine odaklanmayan bütüncül ve esnek yaklaşımı ile niceliksel muhakemeyi ön plana almıştır. Bu problemde Arya'nın kenarortay uzunluğunu kenarortayı oluşturan doğru parçaları arasındaki oranı gözeterek paylaştırmasında tamsayılar ekseninde düşünmesi, doğru parçalarının uzunluklarını sayısal olarak elde edememesiyle sonuçlanmıştır.

Birinci problemde benzer üçgenlerin çevreleri oranının benzerlik oranına eşit oluşunu Kayla'nın niceliksel muhakeme ve Ata'nın cebirsel yöntem ile ifade edişleri, öğrencilerin cebirsel muhakemelerindeki gelişimin geometrik düşünmelerini kuvvetlendirdiği görüşüne ulaştırmıştır. Ata'nın gerçekleştirdiği sembolik manipülasyonu çizim üzerinde değerlendirmesinin anlamlı sembolik manipülasyona imkan sağladığı görülmüştür.

4. 3. Öneriler

Bu bölümde araştırmadan elde edilen sonuçlara ve gelecekte yapılabilecek benzer araştırmalara yönelik olarak çeşitli önerilerde bulunulmuştur.

4.3.1. Araştırmanın sonuçlarına yönelik öneriler

1. Değişkenin geometrik ilişki ve problemlerde rolünü, doğasını ve tanımlı olduğu kümeyi öğrencilerin anlamalarının oldukça önemli olduğu görülmüştür. Dolayısıyla öğretmenlerin, ilişki kazanımı veya problem çözümleri esnasında sembolik temsiller ve temsil edilen nesne üzerinde özellikle durmaları, bunları iyi bir şekilde açıklamaları ve temsilin doğası üzerine değerlendirme yapmaları faydalı olacaktır. Anlamlı sembolik manipülasyonun bu noktada başladığı

gözlemlendiği için, öğretmenlere öğretim programında değişkenin sayısal değerine ulaşmanın ön planda olmadığı problemlere yer vermeleri tavsiye edilir.

2. Genelleme yapmayı sağlamada öğretmenin öğrencileri harekete geçirmesinin gerekli olduğu gözlemlenmiştir. Dolayısıyla belirli bazı durumlar için metot öğretmek veya örnekler sunmak yeterli olmamaktadır. Bu nedenle, alternatif etkinliklere öğretmenlerin yer vermesi faydalı olacaktır.
3. Niceliksel muhakemenin gelişimi matematik eğitiminde fark yaratan bir unsurdur. Dolayısıyla, öğretmenlere farklı bakış açılarını vurgulamaları ve bakış açıları arasındaki farkın öğrencilere aktarmaları tavsiye edilir.
4. Gerek tekrara yönelik örnekler sunmak gerekse kavramları oluşturan yapılar üzerine derinlemesine inceleme yapılması için gereken zamanı ayırmamak cebirsel muhakemenin gelişimine olumsuz etkide bulunmaktadır. Dolayısıyla, öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel muhakemelerini geliştirmeye yönelik örnekler sunmaları ve kavramları oluşturan yapılar üzerinde incelemeye zaman ayırması önerilir.
5. Öğrencilerde cebirsel muhakemenin erken yaşlardan itibaren gelişimine önem vermek öğrencilerin ilerleyen yıllardaki matematik kazanımlarını olumlu etkileyeceği düşünülmektedir. Bu nedenle ilk ve ortaokul öğretmenlerine günlük hayat ile ilişkili ve öğrencilerin genellemede bulunmalarına yönelik matematiksel görevleri öğretim programlarında yer vermeleri önerilir.
6. Geometri dersinin kurallardan oluşan bir ders olarak görülmesinin önüne geçmek gerekmektedir. Bu amaçla, öğretmenlerin geometrik özellikler üzerinde öğrencilerin argüman sunabilecekleri tartışma ortamları yaratarak genellemede bulunmalarına olanak sağlaları tavsiye edilir.
7. Hem geometrik özelliklerin keşfine yardımcı olması hem de zamanı verimli kullanmaya katkıda bulunması nedeniyle, geometri derslerinin öğretiminde bir dinamik geometri yazılımının öğrenme ortamına dahil edilmesi önerilir.
8. Üçgenler alt öğrenme alanının öğretimi esnasında dikkat edilmesi gereken önemli hususlardan bazıları şunlardır:
    a. Açı kavramının öğrencilerin zihninde kolay oluşmadığı, öğrencilerin paralel doğruların kesen ile kesildiğinde oluşan açıları tespit etmekte zorlandıkları, statik tanımın hakim olduğu ve müteakip geometrik kazanımlar (örneğin benzerlik oranının açı ölçüleri için geçerli olmaması

gibi) etkilediği görülmüştür. Dolayısıyla açı kavramına ait dinamik tanımın verilmesi ve öğretim programında özellikle dinamik geometri yazılımlarından faydalanılarak daha uzun süre üzerinde durulması önem taşımaktadır.

b. Eşit uzunluktaki kenarların geometrik olarak temsilinde tek ve çift çentik kullanımı, öğrencilerin çentikleri k ve $2k$ olarak algılamasına sebep olabilmektedir. Öğretmenlerin sınıf ortamında öğrencilerin çentik kullanımına dikkat etmesi ve bu yönde öğrencileri bilinçlendirmesi tavsiye edilir.

c. Üçgenin yardımcı elemanlarından iç açıortay ile ilgili özelliklerin sunum sırasının önem taşıdığı gözlemlenmiştir. Buna göre "açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına çizilen yüksekliklerin eşit olması" özelliğinin üçgende açıortay doğrusunun kenarı farklı uzunluklarda parçalara ayıracağı kavrayışı sağlandıktan sonra verilmelidir. Çünkü bu araştırmada, ilk olarak üçgende açı-kenar ilişkileri esnasında ortaya çıkan, üçgenlerde eşlik kavramının öğretimi sırasında sınıfa sirayet etmiş olan farklı düzlemsel geometrik nesnelerde dahi "eşit ölçülü açıların karşısında eşit uzunlukta doğru parçaları olacağı" düşüncesinin açıortay doğrusu üzerinde alınan noktaya dair özellikler ile pekiştiği görülmüştür.

d. Ağırlık merkezinin kenarortayları hangi oranda parçaladığının öğretiminde örneğin G, AT doğru parçasının ağırlık merkezi olmak üzere $|AG| = 2k$, $|GK| = k$ yerine $|AG| = \frac{2k}{3}$ ve $|AG| = \frac{k}{3}$ şeklindeki rasyonel oranlamaları, kazanımın gerçekleşmesinde daha faydalı olacaktır.

e. Öğrencilerin duyusal kaynaklı prototip algılarını gidermek için, yönelimi farklı örnekler sunmak faydalı olacaktır. Çünkü geometrik çizimlerin standart bir formatta olduğu ve veriler ile uyumsuz alıştırmaların yoğun bir şekilde uygulanması, prototip algıları pekiştirecektir. Öğretmenlerin öğrencileri duyuları ile gözlemden ziyade analitik gözlemlere yönlendirmesi gerekmektedir.

4.3.2. Gelecekte yapılacak araştırmalara yönelik öneriler

Üçgenler alt öğrenme alanında öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin araştırıldığı bu araştırma sınıf seviyesi açısından dokuzuncu sınıf öğrencileri ile sınırlıdır. Farklı sınıf seviyelerinde özellikle fonksiyonlar alt öğrenme alanında olmak üzere benzer çalışmaların gerçekleşmesi öğrencilerin matematiğin alt öğrenme alanları arasındaki bağlantıların öğrenciler tarafından deneyimlenmesi sağlanabilir. Gelecek araştırmalar birden fazla ve nitelik açısından farklı okulların sınıflarında gerçekleştirilebilir.

KAYNAKÇA

Ackermann, E. (1995). Construction and transference of meaning through form. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in Education*, (341-354). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Apsari, R.A., Putri, R.I.I., Sariyasa, Abels, M., Prayitno, S. (2020). Geometry representation to develop algebraic thinking: a recommendation for a pattern investigation in pre-algebra class. *Journal on Mathematics Education*, 11(1), 45-58.

Arastaman, G., Öztürk, F. İ., Fidan, T. (2018). Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik: kuramsal bir inceleme. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 15(1), 37-75.

Aşık, G., Yılmaz, Z. (2017). Design-based research and teaching experiment methods in mathematics education: differences and similarities. *Journal of Theory and Practice in Education,* 13(2), 343–367.

Atasoy, E., Bulut, D.B. (2018). Lise 4. sınıf öğrencilerinin geometri konularındaki cebirsel düşünme süreçlerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi,* 12(2), 199-227.

Ataş, Y. (2019). *Sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri ve ölçme problemlerini çözme süreçlerindeki cebirsel düşünme becerileri.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Ayber, G. (2017). *Cebirsel düşünmenin genelleme aracılığıyla geliştirilmesi perspektifinde ortaokul matematik ders kitaplarının incelenmesi*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Baki, A., Bütüner, S. (2011). Cebirin tarihsel gelişimi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 2(3), 198-231.

Bal, H. (2016). *Nitel araştırma yöntem ve teknikleri (Uygulamalı-Örnekli)*. (1. Basım). İstanbul: Sentez Yayıncılık.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education*. Yayımlanmamış doktora tezi. East Lansing, MI: Michigan State University, Department of Teacher Education.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal, 90,* 449–466.

Ball, D. L., Bass, H. (2000a). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. C. Phillips (Ed.), *Ninety-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education: Part I. Constructivism in education: Opinions and second opinions on controversial issues* (193–224). Chicago, IL: University of Chicago Press.

Ball, D. L., Bass, H. (2000b). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (83–104). Westport, CT: Ablex.

Ball, D. L., Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group,* CMESG/GCEDM, Edmonton, AB. (3–14). B. Davis, E. Simmt (Eds.).

Ball, D. L., McDiarmid, G. W. (1990). The subject matter preparation of prospective mathematics teachers. In W. R. Houston, M. Haberman, J. Sikula (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education* (437–449). New York, NY: Macmillan.

Bastable, V., Schifter, D. (2008). Classroom stories: examples of elementary students engaged in the early grades. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), In *Algebra in the early grades* (165-184). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Başkale, H. (2016). Nitel araştırmalarda geçerlik, güvenirlik ve örneklem büyüklüğünün belirlenmesi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Hemşirelik Fakültesi Elektronik Dergisi* 9(1), 23-28.

Bazzini, L., Boero, P., Garuti, R. (2001). Revealing and promoting students' potential in algebra: a case study concerning inequalities. In 'The Future of the Teaching and Learning of Algebra,' *Proceedings of the 12th International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) Study Conference, (53-60). Melbourne: University of Melbourne.

Bazzini, L., Tsamir, P. (2001). Research based instruction: widening students' perspective when dealing with inequalities. In 'The Future of the Teaching and Learning of Algebra,' *Proceedings of the 12th International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) Study Conference, (61-68). Melbourne: University of Melbourne.

Bednarz, N., Kieran, C., Lee, L. (1996). *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching.* Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Prague, Czech Republic. (126-154). J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, and N. Stehlíková (Eds.).

Blanton, M.L., Kaput, J.J. (2003). Developing elementary teachers': "algebra eyes and ears". *Teaching Children Mathematics*, 10(2), 70-77.

Blanton, M.L., Kaput, J.J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education,* 36(5), 412-446.

Boester, T., Lehrer, R. (2008). Visualization algebraic reasoning. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (211-234). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Brumfiel, C. (1980). Teaching the absolute value function. *National Council of Teachers of Mathematics*, 73(1), 24-30.

Cankoy, O. (2010). Mathematics teachers' topic-specific pedagogical content knowledge in the context of teaching a^0, 0! and $a \div 0$. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri/Educational Sciences: Theory & Practice,* 10(2), 749-769.

Carpenter, T. P., Levi, L. (2000). *Developing conceptions of algebraic reasoning in the primary grades*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Carpenter, T. P., Franke, M., Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Chazan, D. (1994). *Algebra for all students?* National Center for Research on Teacher Learning.

Clement, J., Lochhead, J., Monk, G. S. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *The American Mathematical Monthly*, 88, 286–290.

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education,* 13(1), 16-30.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design In Mathematics and Science Education* (307-333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cobb, P., Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14(2), 83-94.

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics,* 23(1), 99-122

Cobb, P., Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist,* 31, 175–190.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education,* 28(3), 258-277.

Conference Board of the Mathematical Sciences (2001). *Issues in mathematics education: Vol. 11. The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society, in cooperation with Mathematical Association of America.

Corbin, J. M., Strauss, A. C. (2007). *Basics of qualitative research: techniques and procedures for developing grounded theory*. Thousand Oaks, CA: Sage Publication.

Creswell, J.W. (2007). *Qualitative Inquiry & Research Design: Choosing among Five Approaches (2nd ed.).* Thousand Oaks, CA: Sage Publication.

Çakıroğlu, E. (2015). Matematik kavramlarının tanımlanması. İ.Ö. Zembat, M.F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, A. Delice (Editörler), *tanımları ve tarihsel gelişimleriyle matematiksel kavramlar* içinde (1-13). Ankara: Pegem Akademi

Dindyal, J. (2003). *Algebraic thinking in geometry at high school level*. Yayımlanmamış Doktora Tezi. Chicago, IL: Illinois State University. Department of Mathematics.

Dindyal, J. (2004). Algebraic thinking in geometry at high school level: Students' use of variables and unknowns. *27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated*, Townsville, Australia, 27 – 30 June 2004, MERGA 2004, 183-190.

Dindyal, J. (2007). The need for an inclusive framework for students' thinking in school geometry, *The Mathematics Enthusiast*, 4(1), Article 5.

Dougherty, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (389-412). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Eisenhart, M. A., Howe, K. R. (1992). Validity in educational research. In M. LeCompte, W. Millroy, J. Preissle (Eds.), *The Handbook of Qualitative Research in Education*. (642-680). San Diego: Academic Press.

Ferrini-Mundy, J., Floden, R., McCrory, R. (2003). *Knowledge for teaching school algebra: challenges in developing an analytic framework*. AERA Interactive Symposium, Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago.

Freundenthal, H. (1982). Variables and functions. *Proceedings of Conference on Functions*, Enschede, The Netherlands: National Institute for Curriculum Development. (7-20). G. V. Barneveld, H. Krabbendam (Eds.).

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *Journal of Mathematical Behaviour*, 31(1), 60–72.

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163–183.

Godfrey, D., Thomas, M. O. J. (2008). Student perspectives on equation: the transition from school to university. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 71-92.

Goldenberg, E. P., Cuoco, A. A., Mark, J. (1999). A role for geometry in general education. In R. Lehrer, D. Chazan (Eds.), *Designing Learning Environments for Developing Understanding of Geometry and Space* (3-44). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Guba, E.G., & Lincoln, Y.S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. *Educational Communication and Technology Journal*, 30(4), 233-252.

Güven, Y. (2006). Farklı geometrik çizim yöntemleri kullanımının öğrencilerin başarı, tutum ve Van Hiele geometri anlama düzeylerine etkisi. Yüksek lisans tezi. Trabzon: Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

Haj-Yahya, A. (2019). Do prototypical constructions and self-attributes of presented drawings affect the construction and validation of proofs? *Mathematics Education Research Journal*, 32, 685–718.

Herscovics, N., Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59–78.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *Mathematics Teacher*, 74, 11-18.

http-1. https://www.goodreads.com/author/quotes/83670.Richard_Hamming (Erişim tarihi: 04.04.2021)

Janvier, C. (1996). Modeling and the initiation into algebra. In N. Bednarz, C. Kieran, L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (225-236). Dordrecht: The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(1), 53–60.

Kaput, J., Sims-Knight, J.E. (1983). Errors in translations to algebraic equations: roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5(3), 63-78.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Some methodological issues. In E. Silver (Ed.), *Teaching and Learning Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (381-398). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J.J. (1995). A research base supporting long term algebra reform? *Seventeenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, Columbus, OH.

Kaput, J.J., Blanton M.L., (2000). *Algebraic reasoning in the context of elementary mathematics: making it implementable on a massive scale*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kaput, J.J. (2000a). *Teaching and learning a new algebra with understanding.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kaput, J.J. (2000b). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K12 curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kaput, J.J., Carraher, D.W., Blanton, M.L. (2008). A skeptic's guide to algebra in the early grades. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (xvii-xxi). NY: Taylor & Francis Group.

Kaput, J.J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (5-17). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Kaput, J.J., Blanton, M.L., Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (19-56). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 317-326.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (390-412). New York: Macmillan.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modem times*. New York: Oxford University Press.

MacGregor, M., Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics*, 33(1), 1-19.

Malle, G. (1993). Variable, terme und formeln. In G. Malle, E.C. Wittmann, H. Bürger (eds) *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. (44-78). Wiesbaden: Vieweg.

Mason, J. (2008). Making use of children's powers to produce algebraic thinking. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (57-94). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Maviş, M., Gül, G., Solaklıoğlu, H., Tarku, H., Bulut, F., Gökşen, M. (2017). *Ortaöğretim matematik 9 ders kitabı* (1. Baskı). MEB Devlet Kitapları. Ankara: Tuna Matbaacılık.

Mazur, J. (2017). *Matematik sembollerinin kısa tarihi* (Çev: B. Gönülşen). İstanbul: Türkiye İş Bankası Kültür Yayınları.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M.D., Senk, S.L. (2012). Knowledge of algebra for teaching: a framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*. 43(5), 584-615.

Merriam, S.B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Merriam, S.B., Tisdell, E.J. (2015). *Qualitative research: A guide to design and implementation* (4th edition). San Francisco: Jossey-Bass.

Milli Eğitim Bakanlığı (2011). *Ortaöğretim matematik dersi öğretim programı*. Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı. (2013). *Ortaokul matematik dersi 5-8.sınıflar öğretim programı.* Devlet Kitapları Müdürlüğü, Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı (2018). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11, 12. sınıflar) öğretim programı*. Ankara.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S.J., Kaput, J.J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68, 99–111.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics,* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for the school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oral, B., İlhan, M., Kınay, İ. (2013). 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ve cebirsel düşünme düzeyleri arasındaki ilişkinin incelenmesi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 34, 33-46.

Özden, M., Saban, A. (2017). Nitel araştırmalarda paradigma ve teorik temeller. *Eğitimde nitel araştırma desenleri* kitabında (1-30). Ankara: Anı Yayıncılık.

Peled, I., Carraher, D.W. (2008). Signed numbers and algebraic thinking. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (303-328). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowledge: an essay on the relations between organic regulations and cognitive processes*. Chicago: University of Chicago Press.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 73–93.

Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*.

Quinlan, C. (2001). Importance of view regarding algebraic symbols. In 'The Future of the Teaching and Learning of Algebra,' *Proceedings of the 12th International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) Study Conference, Melbourne: University of Melbourne.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

Schoenfeld, A. H., Arcavi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher*, 81(6), 420-427.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Senk, S.L. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.

Skemp, R.R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Smith III, J.P.J, Thompson, P.W (2008). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (95-132). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. In J.J., Kaput, D. Carraher, M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (133-160). NY: Taylor & Francis Group, LLC.

Steffe, L. P., Wiegel, H. (1992). On reforming practice in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 445-465.

Steffe, L. P., Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design In Mathematics and Science Education* (267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof'. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (495– 511). New York: Macmillan.

Tanışlı, D. (2016). How do students prove their learning and teachers their teaching? Do teachers make a difference? *Eurasian Journal of Educational Research*, 66, 47-70.

Tanışlı, D., Dur, M. (2018). Quantitative reasoning: reflections on solving real-world problems, *Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 47(1), 60-108.

Thompson, P.W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 165-208.

Thompson, D.R., Senk, S. L. (2001). The effects of curriculum on achievement in second-year algebra: the example of the University of Chicago School Mathematics Project. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 58-84.

Türer, C. (1991). Eğitimde içerik analizi. *M.Ü. Atatürk Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 3, 321-327.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry.* Final report of the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Project. Chicago, IL; University of Chicago, Department of Education.

Uygan, C. (2019). Öğrenci matematiğini araştırmada öğretim deneyi yöntemi: kuramsal temeller ve örnek bir uygulamadan yansımalar. *Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi*, 7(2), 792-825.

Vance, J.H. (1998). Number operations from an algebraic perspective. *Teaching Children Mathematics*, 4, 282-285.

Venenciano, L.C.H, Yagi, S.L., Zenigami, F.K., Dougherty, B.J. (2020) Supporting the development of early algebraic thinking, an alternative approach to number. *Investigations in Mathematics Learning*, 12(1), 38-52.

Vinner, S., Hershkowitz, R. (1980). *Concept image and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts*. In R. Karplus (Ed.), Proceedings of the 4th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education (177–184). University of California, Berkeley: PME.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.

Vinner, S., Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 356–366.

Watson, A., Mason, J. (2002). Extending example spaces as a learning teaching strategy in mathematics. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, 377–385). Norwich: PME.

Weinberg, A., Dresen, J., Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *Journal of Mathematical Behavior*, 43, 70–88.

White, P., Mitchelmore, M. (1996). Conceptual knowledge in introductory calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 79-95.

Yackel, E., Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458-477.

Yackel, E. (1997). A foundation of algebraic reasoning in the earlier grades. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 276-280.

Yanık, A., Ada, T. (2013). Investigation of the development of 7th grade students' skills to define, construct and classify polygons with Cabri Geometry. *Turkish Online Journal of Qualitative Inquiry*, 4(3), 48-60.

Yıldırım, A. Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri.* Sekizinci Baskı Ankara: Seçkin Matbaacılık.

EK-1: Eskişehir Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

T.C

ESKİŞEHİR VALİLİĞİ

İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ARAŞTIRMA DEĞERLENDİRME FORMU

ARAŞTIRMA SAHİBİNİN	
Adı Soyadı	Ferda ADIGÜZEL DOĞAN
Kurumu/Üniversitesi	Anadolu Üniversitesi
Araştırma Yapılacak Eğitim Kurumu ve Kademesi	Tüm Anadolu Liseleri
Araştırmanın Konusu	Ortaöğretimde James J. Kaput'un Bakış Açısıyla Cebir Reformu: 9. Sınıf Denklem-Eşitsizlikler ve Üçgenler Alt Öğrenme Alanlarında Bir Uygulama
Üniversite / Kurum Onayı	Var
Araştırma/Proje/Ödev/ Tez Önerisi	Var
Veri Toplama Araçları	Örnek Öğretim Taslağı, Klinik Görüşme Soruları, Öğrenci Gözlem Formu
Görüş İstenecek Birimler	-
KOMİSYON GÖRÜŞÜ	
Milli Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü'nün 2017/25sayılı genelgesi gereğince 2018-2019 öğretim yılında uygulanmasında sakınca yoktur.	
Komisyon Kararı	KABUL (Oybirliği ile)
Muhalif Üyenin Adı ve Soyadı	Gerekçesi : .....

KOMİSYON

Komisyon Başkanı	Üye
Milli Eğitim Müdür Yardımcısı	Öğretmen
Üye	Üye
Öğretmen	Öğretmen

EK-1: (Devam) Eskişehir Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ESKİŞEHİR

Sayı : 88074293/605.01/20499318 30.10.2018
Konu : Araştırma Projesi

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Anadolu Üniversitesi Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğü' nün 22/10/2018 tarih ve E.119244 sayılı yazısı.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Doktora Programı öğrencisi Ferda ADIGÜZEL DOĞAN' ın "Ortaöğretimde James j. Kaput' un Bakış Açısı ile Cebir Reformu: 9. Sınıf Denklem-Eşitsizlikler ve Üçgenler Alt Öğrenme Alanlarında Bir Uygulama" başlıklı proje çalışması Araştırma İzin Komisyonu tarafından incelenmiş ve komisyon tarafından sakınca görülmediği tespit edilmiş olup, komisyon tarafından belirtilen okulda yukarıda adı geçen projenin gerçekleştirilmesi uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde takdirlerinize arz ederim.

Müdür a.
Müdür Yardımcısı

OLUR
.../10/2018

Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

EK:
Araştırma Değerlendirme Formu (1 sayfa)

[redacted]

EK-1: (Devam) Eskişehir Milli Eğitim Müdürlüğünden Alınan İzin Belgesi

Ana. Üni. Evrak Tarih ve Sayısı: 05/11/2018-E.96197

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

ESKİŞEHİR

Sayı : 88074293/605.01/20688659 31.10.2018
Konu: Araştırma Projesi

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
(Genel Sekreterlik Yazı İşleri Müdürlüğü)

İlgi : a) 30/10/2018 tarih ve 20499318 sayılı olur.
b) 22/10/2018 tarih ve E.119244 sayılı yazınız.

İlgi (b) yazı ile istemiş olduğunuz "Araştırma Projesi" incelenmiş ve uygun görülmüş olup, ilgi (a) Olur ekte sunulmuştur.
Bilgilerinize rica ederim.

Vali a.
İl Milli Eğitim Müdürü

EKLER :
1-İlgi (a) Olur (1 sayfa)
2-Araştırma Değerlendirme Formu (1 sayfa)

01 Kasım 2018

EK-2: Öğrenci Velisini Bilgilendirme ve Onam Formu

ÖĞRENCİ VELİSİNİ BİLGİLENDİRME ve ONAM FORMU

Sayın Veli,

Bu mektubun amacı sizi araştırmamızla ilgili haberdar etmek ve buna bağlı olarak velisi bulunduğunuz öğrencinin katılımıyla ilgili izin almaktır. "Ortaöğretimde James J. Kaput'un Bakış Açısı İle Cebir Reformu: 9. Sınıf Denklem-Eşitsizlikler Ve Üçgenler Alt Öğrenme Alanlarında Bir Uygulama" başlıklı bir doktora tez çalışması yapmaktayım. Bu çalışma; 9. Sınıf öğrencilerinde Denklem-Eşitsizlikler ve Üçgenler alt öğrenme alanlarında cebirsel becerilerin ve sembol manipülasyonunun anlamlı hale getirilmesi suretiyle cebirsel muhakemeyi öne çıkarmayı destekleme amacını taşımaktadır. Sınıf içinde tasarladığım uygulamalarımı 2018-2019 eğitim-öğretim yılının güz ve bahar dönemleri içinde 12 aylık bir süreçte gözlemleyeceğim.

Ben Anadolu Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalında doktora öğrencisiyim. Velisi olduğunuz öğrencinin matematik öğretmeniyim. Tez çalışmamı Doç. Dr. Tuba ADA danışmanlığında yürütmekteyim. Bu çalışmanın sonuçları 9. sınıf eğitim materyallerinin cebirselleştirilmesinin, öğrencilerin cebirsel muhakemelerinin ve cebirsel muhakemeyi destekleyen bir sınıf kültürü ve öğretim uygulamalarının gelişimine ışık tutulacaktır. Lise cebir eğitiminin yaygın odak noktası sembol içeren ifadeler ile çalışma yani denklem çözme, ifade sadeleştirme ve çarpanlara ayırma şeklindeki ezberlenmiş süreçlerin çağrılması biçimindedir. Süreçleri işletemeyen ve yeni alt öğrenme alanlarına bütünleştiremeyen öğrenciler için matematiksel gelişim durmakta ve matematiği hayatta karşılaşacakları sınavlarda başarılı olmalarını sağlayacak ölçüde gerekliliği bulunan, birbiriyle bağlantısız formüller silsilesi olarak görmeye başlamaktadırlar. Böylesi bir tespit ile bu çalışmada amaç; 9. sınıf öğrencilerinde Denklemler-Eşitsizlikler ve Üçgenler alt öğrenme alanlarında cebirsel becerilerin ve sembol manipülasyonunun anlamlı hale getirilmesi suretiyle öğrencilerde cebirsel muhakemeyi öne çıkarmayı desteklemektir. Türk Milli Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından 2017-2018 Eğitim Öğretim yılında uygulamaya konulan yeni matematik öğretim programının 9. sınıf ünitelerinden "Denklem-Eşitsizlikler" müfredatın %46'sını, "Üçgenler" ise %32'sini oluşturmaktadır. Bu ünitelerde gerçekleştirilmesi planlanan cebirselleştirme hareketi ile cebir ve diğer matematik konu alanların yeniden yapılandırılması amaçlanmaktadır.

EK-2: (Devam) Öğrenci Velisini Bilgilendirme ve Onam Formu

Böylece takip eden sınıflarda yeni matematik konularının öğrencilere kazandırılması için gereken zaman elde edilecektir. Cebirin diğer matematik öğrenme alanlarıyla ve farklı disiplinlerle ilişkisinin öğrenciler tarafından görülmesini sağlayacak olan faktör cebirsel muhakemenin ön plana çıkarılmasıdır. Öğrencilerin aktif bir biçimde derse katıldığı, düşüncelerini yansıtma fırsatlarının tanındığı ve git gide artan formel dilin kullanıldığı bir sınıf ortamı cebirselleştirmenin gerçekleşeceği bir ortamdır.

Araştırma kapsamında öğrenciler ile gözlemler ve klinik görüşmeler yapılacaktır. Gözlemler esnasında veri kaybını minimuma indirmek için dersler video kamera ile kayıt altına alınacaktır. Gözlemlerin odağı 9. Sınıf öğrencileri ve bulundukları matematik öğrenme ortamındaki uygulamaları olacaktır. Bu esnada video kayıtlarından yararlanılacaktır. Video kayıtlarında öğrencilerin görüntülerinin de bulunma ihtimali vardır. Video kayıtları doktora tezinin bir parçası olarak kullanılacaktır. Bu çalışma kapsamında sağlanacak olan tüm bilgiler gizli tutulacak ve sadece araştırma amaçları çerçevesinde kullanılacaktır. Çalışmada öğrenci yüzleri ve isimleri gizlenecektir. Öğrencilerden alınan tüm veriler kapsamı dışında hiçbir kişi ya da kurum ile kesinlikle paylaşılmayacaktır. Çalışmaya katılım gönüllü olduğu için velisi bulunduğunuz öğrenci istediğiniz zaman araştırmadan ayrılma hakkına sahiptir. Bu bağlamda aşağıdaki metni okumanızı ve kararınız doğrultusunda belgeyi imzalama ya da imzalamama özgürlüğünüzün olduğunu belirtmek isteriz.

EK-3: Cebirsel Düşünme Testi

CEBİRSEL DÜŞÜNME TESTİ

Bu sınav 10 sorudan oluşmaktadır. Soruları dikkatlice okuyunuz. Soruların çözümüne yönelik düşüncelerinizi aktarmanız istenmektedir. Süre 40 dakikadır.

1)

Bilgehan, Neslihan ve Yıldırım lunaparka gidiyorlar. Tabloda bindikleri oyuncaklara ait bilgiler vardır.

	A-Çarpışan arabalar
Bilgehan	2 tur
Neslihan	1 tur
Yıldırım	1 tur

En çok parayı Yıldırım, en az parayı Neslihan harcadığına göre, oyuncakların bir turunun fiyatını (A, B, C) büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

2)

$5(x-3)-3(x+1)=2(3x+1)$
eşitliğini sağlayan x sayısını bulunuz.

3)

"Bir sayının 3 katının $\frac{1}{4}$'i, 7'den büyüktür" ifadesini matematiksel olarak yazınız.

4)

x ile y arasındaki $y=2x-4$ ilişkisine ait grafiği çiziniz.

5)

$-5 \leq x \leq 2$ olduğuna göre x^2 nin alabileceği değerler hangi aralıktadır?

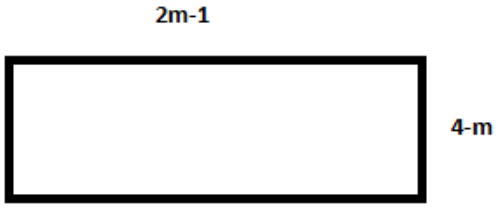
6)

x	1	2	3	4	5
y	5	7	9	11	13

x ve y arasındaki ilişkiyi açıklayan denklemi yazınız.

7)

Aşağıdaki şekilde verilen dikdörtgenin alanını bulmamıza yardımcı olacak ifadeyi yazınız. m=5 için alan ne olur?



8)

Fatih Murat'a 20 lira verirse paraları eşit oluyor. Murat Fatih'e 20 lira verirse Fatih'in parası Murat'ın parasının iki katı oluyor. Fatih ve Murat'ın toplam kaç lirası vardır?

9)

a, b, c pozitif tam sayılar olmak üzere
$\frac{b}{a}=4$ ve $\frac{c}{a}=\frac{1}{3}$ olduğuna göre $a+b+c$ toplamının en küçük değeri kaçtır?

10)

$2^2+2+3=$
$3^2+3+4=$
$4^2+4+5=$
…

örüntüsü verilmiştir. Tablodaki son satıra tüm gerçek sayılarda geçerli olabilecek nasıl bir denklem yazarsınız?

EK-4: Birinci Etap Öğretim Dizisinin Ders Planları

BİRİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN BİRİNCİ HAFTASININ DERS PLANI

Konu: Üçgende Açılar
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Doğruda ve üçgende açılar, Üçgenin temel elemanları, Üçgenin iç açıları toplamının ispatı

Amaçlar:
1. CG-II yazılımının tanıtmak.
2. Yöndeş açıların ölçülerinin eşit oluşunu dinamik geometri yazılımı ile göstermek.
3. Paralel doğrulara ait denklemlerini hatırlatmak.
4. Paralel iki doğrunun bir ya da daha fazla kesen ile kesildiğinde oluşan açılar ile ilgili problem çözmek.
5. Doğruda açı ile ilgili problem çözerken kullanılacak geometrik ve cebirsel araçları tanıtmak.
6. Üçgenin temel elemanlarının temsilleriyle tanıtmak.
7. Üçgen ve açının tanımları ve üçgenin iç açıları toplamı ispatının öğrenciler tarafından keşfedilmesini sağlamak.

Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.

Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

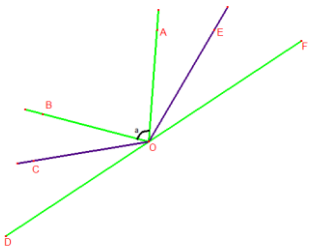
DERSİN AKIŞI

- CG-II yazılımının tanıtılması.
- Öğrencilerden "açı" terimini tanımlamalarının istenmesi.
- Paralel iki doğrunun bir kesenle kesildiği durumda oluşan açıların tartışılması. Yöndeş açıların ölçülerinin eşit olduğunu paralel doğruları çakıştırarak gösterilmesi.
- Tümler ve bütünler açılarının tartışılması.
- Öğrencilerden "üçgen" terimini tanımlamalarının istenmesi.
- Üçgenin temel elemanlarının tartışılması.
- Açı tanımlarının verilmesi.

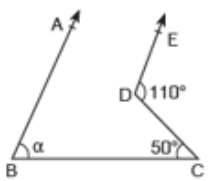
  Açı Kavramı

  1. Bir ışının bir noktadan diğerine olan pozisyon değişikliğindeki dönme ölçüsü
  2. Başlangıç noktaları aynı olan iki ışının oluşturduğu şekil
  3. İki ışın arasında kalan bölge

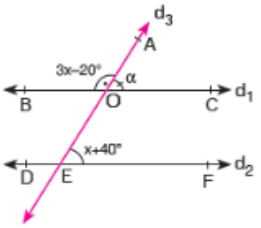
1. Problem: Aşağıda verilen şekilde D, O ve F noktaları doğrusal, $[OE$ ve $[OC$ açıortay, $m(\widehat{COE}) = 120°$ ise $m(\widehat{AOB})$ =a kaç derecedir?



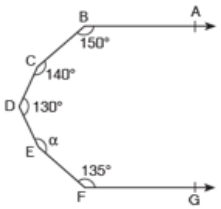
2. Problem: Tümleri ile bütünlerinin toplamı 128° olan açının kaç derece olduğunu bulunuz.
3. Problem: Bütünleri ile tümlerinin oranı 7 olan açı kaç derecedir?
4. Problem: Verilen şekilde $[BA//[DE$, $m(\widehat{EDC}) = 110°$ ve $m(\widehat{DCB}) = 50°$ olduğuna göre $m(\widehat{ABC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.



5. Problem: Verilen şekilde $d_1 // d_2$, $m(\widehat{AOB}) = 3x + 20$ ve $m(\widehat{OEF}) = x + 40$ olduğuna göre $m(\widehat{AOC}) = \alpha$ nın kaç derece olduğunu bulunuz.



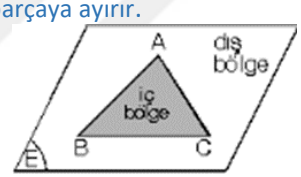
6. Problem: Verilen şekilde $[BA // [FG$ dir. $m(\widehat{ABC}) = 150°$, $m(\widehat{BCD}) = 140°$, $m(\widehat{CDE}) = 130°$, $m(\widehat{EFG}) = 135°$ olduğuna göre $m(\widehat{DEF}) = \alpha$ kaç derecedir?



- Üçgenin formal tanımının verilmesi.

Üçgen kavramı

Doğrusal olmayan $[AB], [AC], [BC]$ doğru parçalarının birleşiminden oluşan geometrik cisim üçgendir. Bir üçgen düzlemi üç parçaya ayırır.



Üçgenin iç açıları ölçüleri: $m(\hat{A})$ veya $m(\widehat{BAC})$, $m(\hat{B})$ veya $m(\widehat{ABC})$, $m(\hat{C})$ veya $m(\widehat{BCA})$ ile temsil edilir.

Soru: Üçgenin iç açıları toplamının 180° olduğunu gösteriniz.

BİRİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN İKİNCİ HAFTASININ DERS PLANI

Konu: Üçgende Açılar, Kenarlarına göre Üçgenlerde Açılar, Üçgende Açı ile Kenar İlişkileri
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Üçgende açılar, Kenarlarına göre üçgenlerde açılar, Üçgende açı ve kenar ilişkileri.

Amaçlar:
1. Üçgenin dış açılarını belirlemek.
2. Üçgenin dış açılar toplamının cebirsel kanıtını yapmak.
3. Bir üçgende "iki iç açının toplamı bunlara komşu olmayan açının dış açısının ölçüsüne eşit olması" özelliğini vermek.
4. Kenarlarına göre üçgenlerde açılar ile kenarlar arasındaki ilişkileri tanıtmak.
5. Üçgende açı ile gördüğü kenar arasındaki ilişkiyi değerlendirmek.

Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.

Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

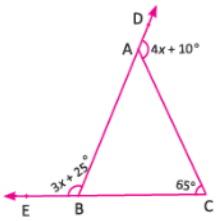
DERSİN AKIŞI

Soru: Üçgenin dış açıları toplamının 180° olduğunu gösteriniz.

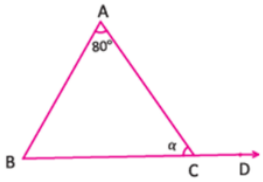
- Değişkenlerin birbiri cinsinden yazılması ile ilgili tartışma.

7. Problem: Bir üçgenin iç açıları sırasıyla 1, 5 ve 12 sayıları ile orantılıdır. Buna göre üçgenin en büyük açısının kaç derece olduğunu bulunuz.

8. Problem: ABC üçgeninde $m(\widehat{ACB}) = 65°$, $m(\widehat{ABE}) = 3x + 25°$ ve $m(\widehat{CAD}) = 4x + 10°$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.

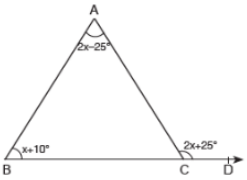


9. Problem: ABC üçgeninde B, C ve D noktaları doğrusal, $m(\widehat{ACD}) = 5m(\widehat{ABC})$ ve $m(\widehat{CAB}) = 80°$ olduğuna göre $m(\widehat{ACB}) = \alpha$ değerini bulunuz.

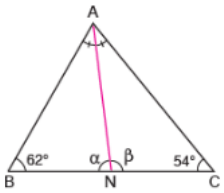


- Öğrencilerin oran-orantı ilişkisi içeren problem yazma çalışması.
- "Bir üçgende iki iç açının toplamının diğer açının dış açısına eşit olması" özelliğinin keşfedilmesi.

10. Problem: Şekilde verilen ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 2x - 25°$, $m(\widehat{ABC}) = x + 10°$ ve $m(\widehat{ACD}) = 2x + 25°$ olduğuna göre x kaç derecedir?



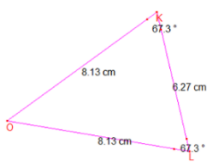
11. Problem: Şekilde verilen ABC üçgeninde $[AN]$ açıortay, $m(\widehat{ABC}) = 62°$, $m(\widehat{ACB}) = 54°$, $m(\widehat{ANB}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ANC}) = \beta$ olduğuna göre α ve β nın kaç derece olduğunu bulunuz.



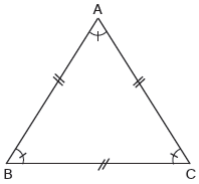
- Kenarlarına göre üçgenlerin tanıtılması.

  1. Çeşitkenar üçgen

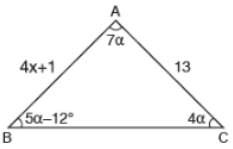
  2. İkizkenar üçgen: İki kenarının uzunluğu birbirine eşit olan üçgene **ikizkenar üçgen** denir. Uzunluğu eşit olan kenarların birleştiği köşedeki açıya **tepe açısı**, tepe açısının karşısındaki kenara **taban**, taban ile uzunlukları eşit olan kenarların oluşturduğu açılara **taban açıları** denir. İkizkenar üçgende taban açılarının ölçüsü birbirine eşittir.



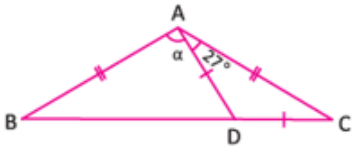
3. Eşkenar Üçgen: Üç kenar uzunluğu da birbirine eşit olan üçgene **eşkenar üçgen** denir. Eşkenar üçgenin iç açılarının ölçüsü 60° dir.



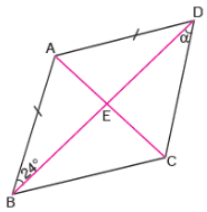
12. Problem: ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 7\alpha$, $m(\hat{B}) = 5\alpha - 12°$, $m(\hat{C}) = 4\alpha$, $|AB| = 4x + 1$ br ve $|AC| = 13$ br olduğuna göre x i bulunuz.



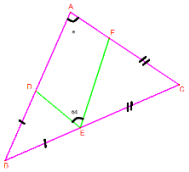
13. Problem: ABC ve ADC birer ikizkenar üçgen, $|AB| = |AC|$ ve $|AD| = |DC|$ ve $m(\widehat{CAD}) = 27°$ olduğuna göre $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ açısı kaç derecedir?



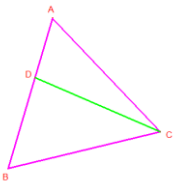
14. Problem:
Verilen şekilde ABC eşkenar üçgen, $m(\widehat{ABE}) = 24°$ ve $|AB| = |AD|$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC}) = \alpha$ kaç derecedir?



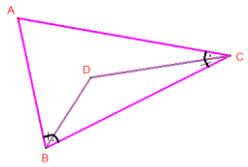
15. Problem:
Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre a kaç derecedir?



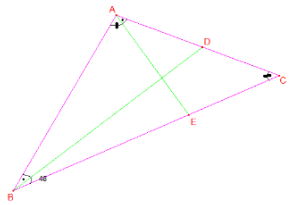
16. Problem:
ABC üçgeninde $|AB| = |BC| = |AC|$ ve $3m(\widehat{ACD}) = 2m(\widehat{BCD})$ olduğuna göre $m(\widehat{ADC})$ kaç derecedir?



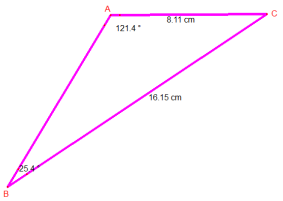
17. Problem: ABC üçgeninde $m(\widehat{BAC}) = 68°$, $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{DCB})$ ve $m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCA})$ olduğuna göre $m(\widehat{BDC})$ kaç derecedir?



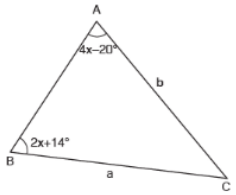
18. Problem: ABC üçgeninde $m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{ACB})$, $m(\widehat{CAE}) = m(\widehat{ABD})$, $m(\widehat{DBC}) = 48°$ olduğuna göre $m(\widehat{AEB})$ kaç derecedir?



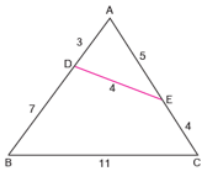
- Öğrencilerin CG-II yazılımında çizilen üçgeni sürükleyerek açı ve kenar ilişkileri üzerine gözlem yaparak genelleme yapmalarının istenmesi.
- Bir üçgende uzun olan kenarı gören açının ölçüsü, kısa olan kenarı gören açının ölçüsünden büyüktür. Tersine, ölçüsü büyük olan açının karşısında daha uzun kenar vardır.



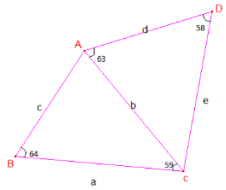
19. Problem: Şekilde verilen ABC üçgeninde $|AC| = b$, $|BC|$ =a, $m(\widehat{BAC}) = 4x - 20°$ ve $m(\widehat{ABC}) = 2x - 14°$ olmak üzere a> b ise x in alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



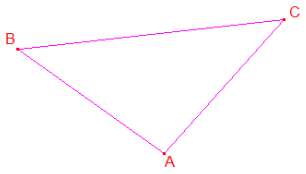
20. Problem: Şekilde verilen ABC üçgeninde $|BC| = 11$, $|DE| = 4$, $|AD| = 3$, $|AE| = 5$, $|DB| = 7$, $|EC| = 4$ cm. olduğuna göre ADE ve ABC üçgenlerinin iç açılarından hangisinin en büyük olduğunu bulunuz.



21. Problem: Şekilde verilenlere göre kenar uzunluklarını sıralayınız.



22. Problem: ABC üçgeninde $m(\hat{A})$ tamsayı, $|AB| = |AC|$, $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) < 125°$ ise $m(\hat{A})$ en çok kaçtır?



BİRİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN ÜÇÜNCÜ HAFTASININ DERS PLANI

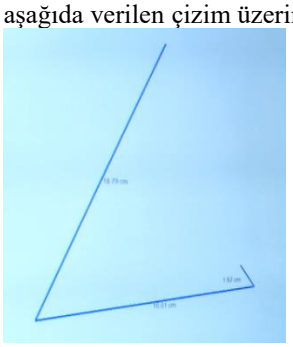
Konu: Üçgen eşitsizliği, Üçgen eşitsizliği ve üçgende açılar ile ilgili problemler
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Üçgen eşitsizliği, Üçgenin kenar ve açıları arasındaki ilişkiler, Üçgende açı ve açı – kenar ilişkileri ile ilgili problemler

Amaçlar:
1. Üçgen eşitsizliğine duyulan ihtiyacı CG-II yazılımı ile öğrencilerin hissetmesini sağlamak
2. Üçgen eşitsizliğini tanıtmak.
3. Üçgen eşitsizliği ve üçgende açı-kenar ilişkilerinden oluşan ilişkileri beraber değerlendirme becerisi geliştirmek.
4. Üçgen eşitsizliğini problemlerde kullanmak.
5. Üçgende açı ve açı - kenar ilişkileri ile ilgili problemler çözmek.

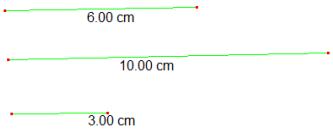
Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.
Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

DERSİN AKIŞI

- CG-II yazılımında gerçekleştirilmiş aşağıda verilen çizim üzerine tartışma.

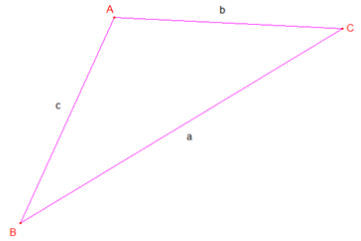


- **Soru:** Aşağıda uzunlukları verilmiş doğru parçaları ile üçgen oluşturabilir misiniz?



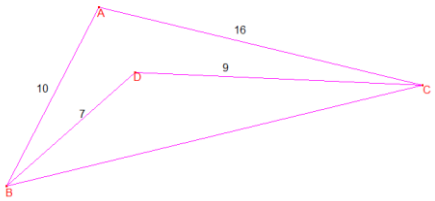
- Üçgen eşitsizliğinin tanıtılması.

Üçgen Eşitsizliği

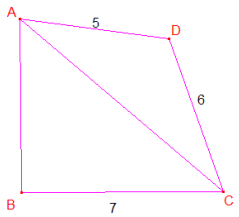


$$|a-c| < b < a+c$$

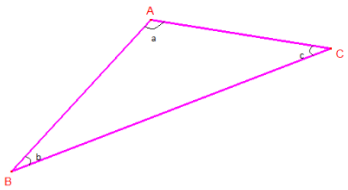
23. Problem: ABC üçgeninde $|BC|$ kenarının alabileceği tamsayı değerlerinden en küçük ve en büyüğünün toplamı kaçtır?



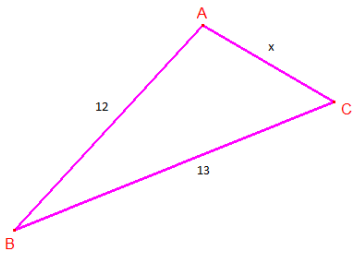
24. Problem: $m(\hat{B}) = 90°$ ise $|AC|$ kenarının alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?



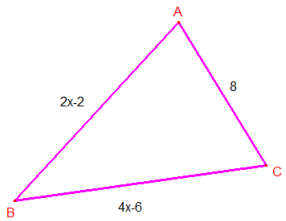
25. Problem: ABC üçgeninin iç açıları arasında $a + b < 9c$ bağıntısı varsa c nin alabileceği en küçük tam sayı değeri kaçtır?



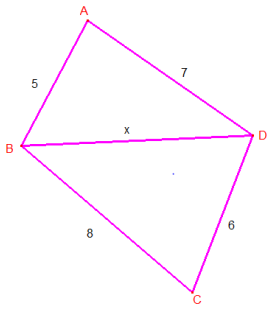
26. Problem: ABC üçgeninde A geniş açıdır. x in alabileceği en büyük tamsayı değeri kaçtır?



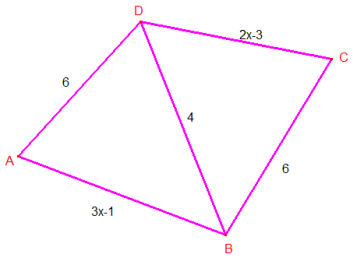
27. Problem: ABC üçgeninde verilenlere göre $m(\hat{C}) < m(\hat{B}) < m(\hat{A})$ ise üçgenin çevresinin alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?



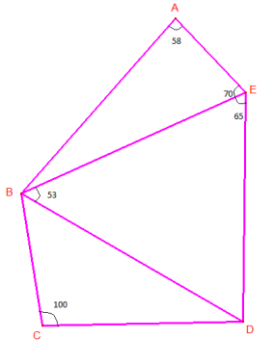
28. Problem: Verilen şekilde $m(\widehat{BCD}) > 90°$ ise x aşağıdakilerden hangisi olabilir?
a) 4 b) 7 c) 9 d) 11 e) 12



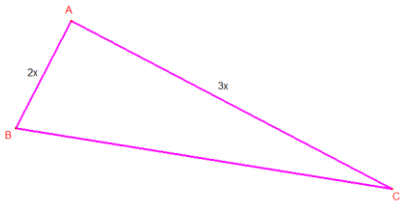
29. Problem: Verilen şekilde x in alabileceği tamsayı değeri kaçtır?



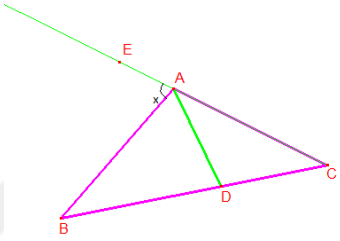
30. Problem: Verilen şekilde en uzun kenar hangisidir?



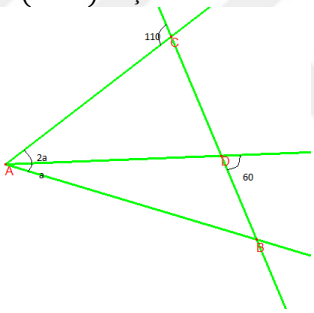
31. Problem: ABC üçgeninin çevresi 60 birimden küçük ise x in alabileceği en küçük tamsayı değeri kaçtır?



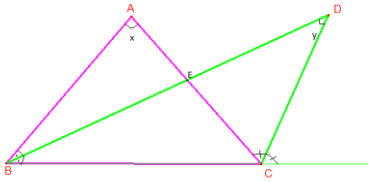
32. Problem: Aşağıda verilen şekilde $|AB| = |AC|$, $|AD| = |DC|$, $m(\widehat{BAD}) = 54°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAE}) = x$ kaç derecedir?



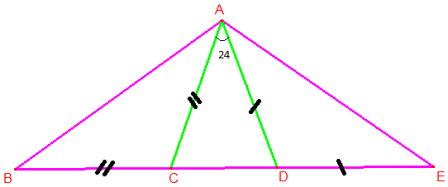
33. Problem: Aşağıda verilen şekilde $m(\widehat{DBK})$ kaç derecedir?



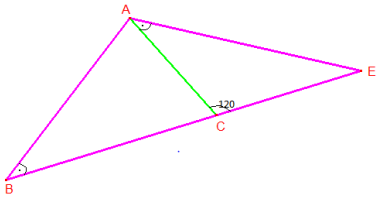
34. Problem: Aşağıda verilen şekilde $x + y = 54$ ise x kaç derecedir?



35. Problem: Aşağıda verilen şekilde $m(\widehat{BAE})$ kaç derecedir?



36. Problem: Verilen şekilde $m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{CAE})$, $m(\widehat{ACE}) = 120°$ olduğuna göre $m(\widehat{BAE})$ kaç derecedir?



BİRİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN DÖRDÜNCÜ HAFTASININ DERS PLANI

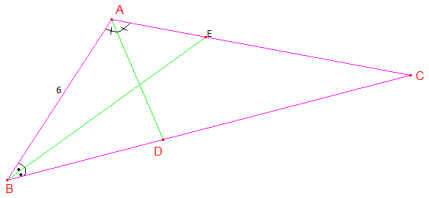
Konu: Üçgende açı-kenar ilişkileri, Üçgenlerde eşlik aksiyomları.
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Üçgenin yardımcı elemanları ile bu yardımcı elemanlarının ait olduğu kenarların uzunlukları arasındaki ilişki, Üçgenlerde eşlik aksiyomları, Eş üçgenlerle ilgili aksiyomları ile ilgili problemler

Amaçlar:
1. Üçgenin yardımcı elemanları ile bu yardımcı elemanlarının ait olduğu kenarların uzunlukları arasındaki ilişkinin CG-II yazılımı yardımıyla öğrencilere sezdirmek ve bu ilişkilerin öğrenciler tarafından genellenmesini sağlamak.
2. İki üçgenin eş olması gereken koşulları fark etmelerini sağlamak
3. Üçgenlerde eşlik aksiyomlarını kavramak.
4. Eş üçgenlerle ilgili aksiyomları ve eşlik bağıntılarını kurarak problem çözebilmek.

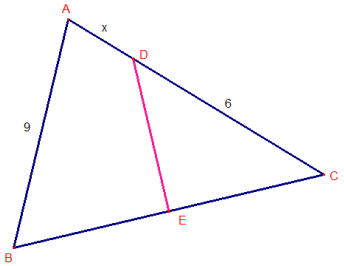
Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.
Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

DERSİN AKIŞI

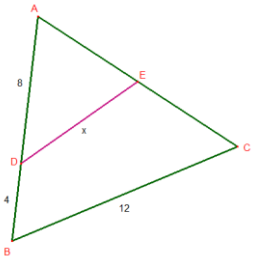
37. Problem: ABC üçgeninde $|AD| < |BE|$, $|BC| = 10$ br olduğuna göre $|AC|$ kaç farklı tamsayı değeri alabilir?



38. Problem: ABC üçgeninde $[DE] \perp [BC]$, $|BE| = |EC|$ ise $|AD| = x$ in alabileceği tam sayı değerlerinin toplamı kaçtır?



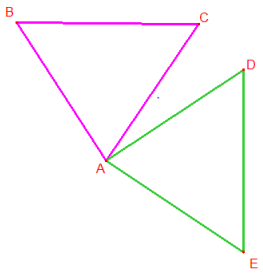
39. Problem: ABC üçgeninde $|AE| = |EC|$ ise $|ED| = x$ in alabileceği kaç farklı tam sayı değeri vardır?



- Üçgende eşlik ve eşlik bağıntılarının verilmesi.

Üçgenlerde Eşlik

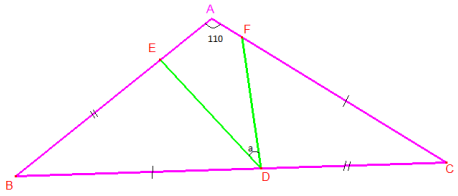
İki üçgenin eşliği, bu üçgenlerin eş olan karşılıklı elemanları arasında bire bir eşleme yapılmış olması demektir. Şekilde $\Delta\, ABC \cong \Delta\, ADE$ dir.



Kenar Açı Kenar (KAK) Eşlik Aksiyomu

İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede, karşılıklı ikişer kenar ve bu kenarların oluşturduğu açılar eş ise bu iki üçgen eştir.

40. Problem: ABC üçgeninde $|AB| = |AC|$, $|BE| = |DC|$, $|BD| = |FC|$ ve $m(\widehat{BAC}) = 110°$ ise $m(\widehat{EDF})$=a kaç derecedir?

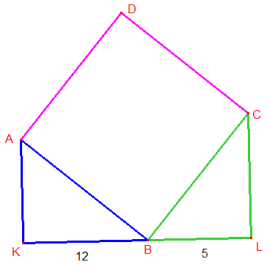


Açı Kenar Açı (AKA) Eşlik Aksiyomu

İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede, üçgenlerin ikişer açısı ile bu açıların köşelerini birleştiren kenarları karşılıklı eş ise bu iki üçgen eştir.

41. Problem:

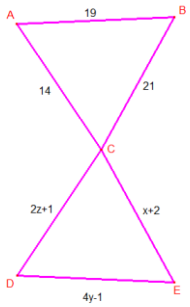
$ABCD$ kare, $[AK] \perp [KL]$, $[CL] \perp [KL]$, $|KB| = 12$ ve $|BL| = 5$ olduğuna göre $Ç(ABCD)$ kaç birimdir?



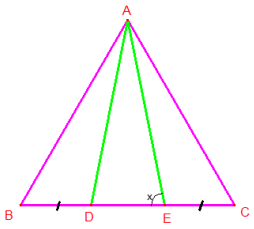
Kenar Kenar Kenar (KKK) Eşlik Aksiyomu

İki üçgen arasında yapılan birebir eşlemede, karşılıklı kenarlar eş ise bu iki üçgen eştir.

42. Problem: Şekilde $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ olduğuna göre $x + y + z$ kaçtır?



43. Problem: ABC eşkenar üçgen, $m(\widehat{BAD}) = 2m(\widehat{DAE})$, $|BD| = |EC|$ olduğuna göre $m(\widehat{AED}) = x$ kaç derecedir?



BİRİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN BEŞİNCİ HAFTASININ DERS PLANI

Konu: Üçgenlerde benzerlik teoremleri, Üçgenlerde eşlik ve benzerlik
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Benzerlik teoremleri, Benzerlik teoremleri ile ilgili problemler, Orantılı doğru parçaları teoremi, Thales teoremi

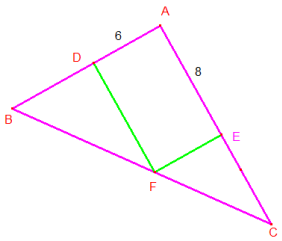
Amaçlar:
1. İki üçgenin benzer olması gereken koşulları incelemek.
2. Üçgenlerde benzerlik teoremlerini kavramak.
3. Üçgenlerde benzerlik ile eşlik arasındaki farkı anlayabilmek.
4. Benzer üçgenlerle ilgili teoremleri ve benzerlik bağıntılarını kurarak problem çözebilmek.
5. Üçgenlerde eşlik ve benzerlik bağıntılarını yazabilmek.
6. Üçgende orantılı doğru parçaları teoremini kavramak ve problem çözmek.
7. Thales teoremini kavramak.

Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.

Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

DERSİN AKIŞI

44. Problem:
$ADFE$ dikdörtgen, ABC üçgen, $|AD| = 6\ br$, $|AE| = 8\ br$, $|BF| = |FC|$ olduğuna göre ABC üçgeninin çevresi kaç birimdir?

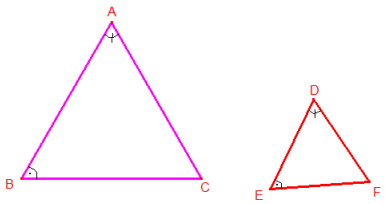


- Üçgenlerde benzerlik ve benzerlik bağıntılarının verilmesi.

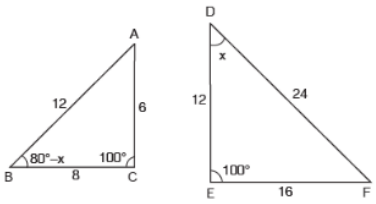
Üçgenlerde Benzerlik

İki üçgenin köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede, karşılıklı açılar eş ve karşılıklı kenarların uzunlukları orantılı ise bu iki üçgen benzerdir. $\Delta ABC \approx \Delta DEF$ şeklinde temsil edilir.

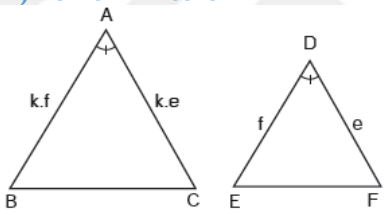
$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|} = k$ dır. k sayısına benzerlik oranı denir.



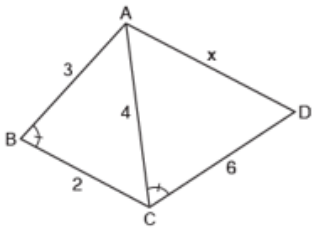
45. Problem: Şekilde verilenlere göre ABC ve DEF üçgenlerinin benzer olup olmadığını belirtip aralarındaki benzerliği yazınız.



Kenar-Açı-Kenar (KAK) Benzerlik Teoremi

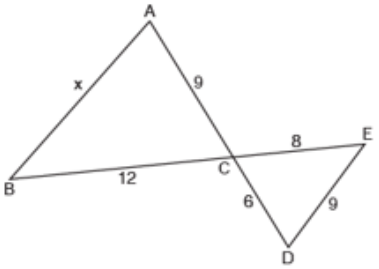


46. Problem: Verilen şekilde $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$, $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 2$ cm, $|AC| = 4$ cm, $|CD| = 6$ cm ise $|AD| = x$ uzunluğunu bulunuz.



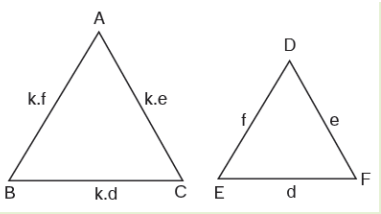
47. Problem:

Verilen şekilde A, C, D ile B, C, E noktaları doğrusal, $|AC| = 9$ cm, $|BC| = 12$ cm, $|CE| = 8$ cm, $|CD| = 6$ cm, $|DE| = 9$ cm ise $|AB| = x$ kaç cm.dir?

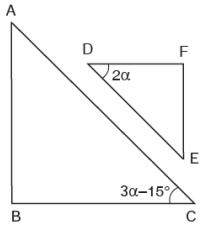


Kenar-Kenar-Kenar (KKK) Benzerlik Teoremi

İki üçgenin köşeleri arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı kenar uzunlukları orantılı ise üçgenler benzerdir.

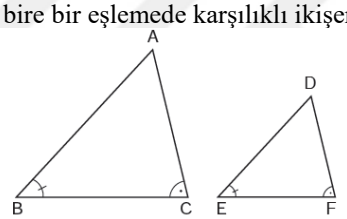


48. Problem: Verilen şekilde $|AB| = 2|EF|$, $|BC| = 2|DF|$ ve $|AC| = 2|DE|$ olduğuna göre $\propto$ kaç derecedir?

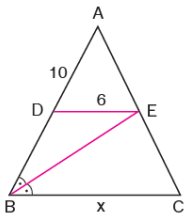


Açı-Açı (AA) Benzerlik Teoremi

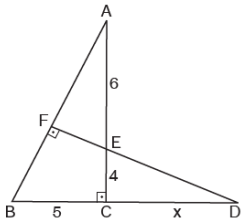
İki üçgen arasında yapılan bire bir eşlemede karşılıklı ikişer açı eş ise bu iki üçgen benzerdir.



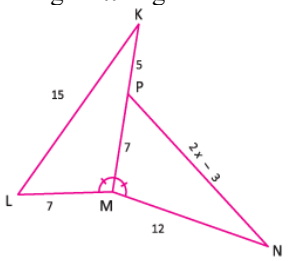
49. Problem: ΔABC de $[BE]$ açıortay ve $[DE]//[BC]$ olduğuna göre x kaç cm. dir?



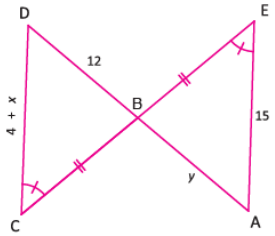
50. Problem: Verilen şekilde B, C ve D ile D, E ve F noktaları doğrusal, [DF] ⊥ [AB], [AC] ⊥[BD] ise x kaç cm. dir?



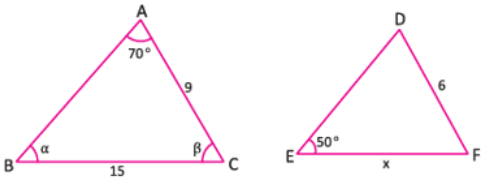
51. Problem: Aşağıdaki şekilde verilenlere göre x değerini bulunuz.



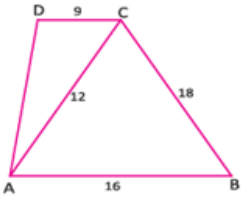
52. Problem: Aşağıdaki şekilde $|BC| = |EB|$, $m(\widehat{BCD}) = m(\widehat{AEB})$, $|AE| = 15$, $|CD| = x + 4$, $|BD| = 12$, $|AB| = y$ olduğuna göre x+y değerini bulunuz.



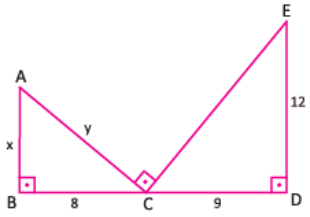
53. Problem: $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ olmak üzere $|BC| = 15$ cm, $|AC| = 9$ cm, $|DF| = 6$ cm, $m(\hat{A}) = 70°$ ve $m(\hat{E}) = 50°$ ise x, α ve β değerlerini bulunuz.



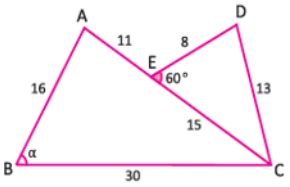
54. Problem: Verilen şekilde $[AB]//[DC]$, $|AB| = 16$ cm, $|AC| = 12$ cm, $|BC| = 18$ cm, $|DC| = 9$ cm ise $|AD|$ değerini bulunuz.



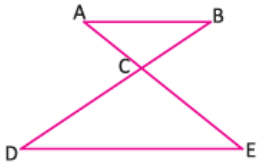
55. Problem: $[AB] \perp [BD]$, $[ED] \perp [BD]$, $[AC] \perp [EC]$ olmak üzere $|BC| = 8$ cm, $|CD| = 9$ cm, $|ED| = 12$ cm, $|AB| = x$ cm, $|AC| = y$ cm ise $x + y$ değerini bulunuz.



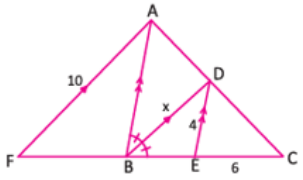
56. Problem: Verilen şekilde $|AB| = 16$ cm, $|BC| = 30$ cm, $|DE| = 8$ cm, $|DC| = 13$ cm, $|EC| = 15$ cm, $|AE| = 11$ cm ve $m(\widehat{DEC}) = 60°$ olduğuna göre α açısının ölçüsünü bulunuz.



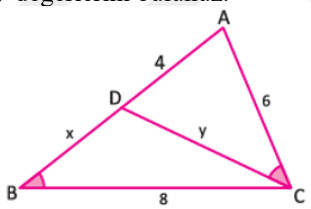
57. Problem: $[AB]//[DE]$, $3|BC| = 2|CD|$, $|AE| = 20$ cm ise $|AC|$ bulunuz.



58. Problem: AFC üçgeninde $[AB]//[DE]$, $[BD]//[FA]$, $m(\widehat{DBA}) = m(\widehat{DBE})$, $|DE| = 4$ cm, $|EC| = 6$ cm, $|AF| = 10$ cm ise $|DB| = x$ cm uzunluğunu bulunuz.

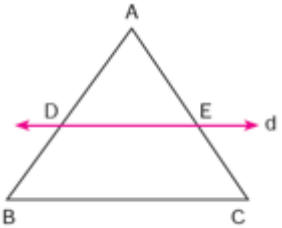


59. Problem: ABC bir üçgen, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ACD})$, $|AD| = 4$ cm, $|BC| = 8$ cm, $|AC| = 6$ cm olduğuna göre $|BD| = x$ ve $|CD| = y$ değerlerini bulunuz.

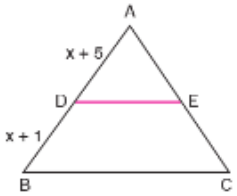


Üçgende Orantılı Doğru Parçaları

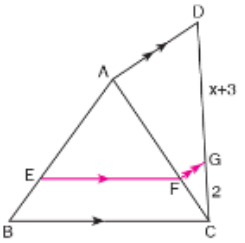
Bir üçgende herhangi bir kenara paralel çizilen doğru kestiği kenarlarda orantılı doğru parçaları ayırır. Buna temel orantı teoremi denir. Verilen ABC üçgeninde $d//[BC]$ olmak üzere $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{|AE|}{|EC|}$ olur. Bu teoremin karşıtı da doğrudur.



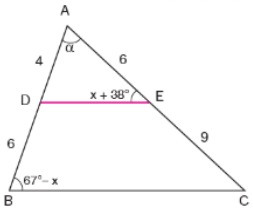
60. Problem: ABC üçgeninde $[DE]//[BC]$, $3|AE| = 4|EC|$ olduğuna göre x in kaç olduğunu bulunuz.



61. Problem: Aşağıda verilen şekilde $[EF]//[BC]$, $[FG]//[AD]$, $|AF| = 3|FC|$ olduğuna göre x in kaç olduğunu bulunuz.



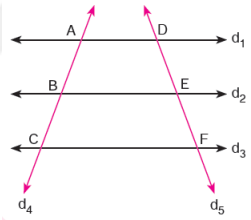
62. Problem: Şekilde verilenlere göre $\propto$ nın kaç olduğunu bulunuz.



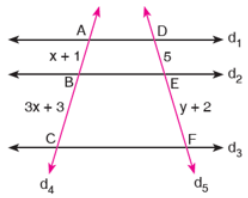
Thales Teoremi

Birbirine paralel en az üç doğru iki farklı doğru ile kesildiğinde karşılıklı olarak orantılı doğru parçaları oluşur.

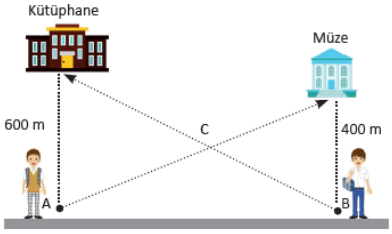
$d_1//d_2//d_3$ ise $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|EF|}$ olur.



63. Problem: Verilen şekilde $d_1//d_2//d_3$ olmak üzere $|AB| = x + 1$ br, $|BC| = 3x + 3$ br, $|DE| = 5$ br ve $|EF| = y + 2$ br olduğuna göre y nin kaç olduğunu bulunuz.



64. Problem: Aşağıdaki şekilde A noktasında bulunan Serhat müzeye, B noktasında bulunan Serkan ise kütüphaneye en kısa yoldan gitmek istemektedir. Kütüphanenin yola uzaklığı 600 metre, müzenin yola uzaklığı 400 metredir.



Serkan ve Serhat C noktasında karşılaştıklarına göre bu noktanın yola uzaklığını bulunuz.

EK-5: İkinci Etap Öğretim Dizisinin Ders Planları

İKİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN BİRİNCİ HAFTASININ DERS PLANI

Konu: Üçgende benzerlik, Üçgenin yardımcı elemanları
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Üçgende benzerlik ile ilgili problem çözümü, Temel orantı teoremi, Üçgende iç ve dış açıortay, açıortayın özellikleri, İç açıortay teoremi, dış açıortay teoremi, üçgende kenarortay ve ağırlık merkezi.

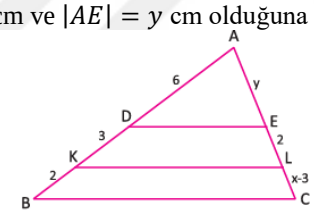
Amaçlar:
1. Üçgende benzerlik teoremlerini kullanarak problem çözmek.
2. Temel Orantı Teoremi: Üçgenin bir kenarına paralel ve diğer iki kenarı kesecek şekilde çizilen doğrunun ayırdığı doğru parçaları arasındaki ilişkiyi kurabilmek.
3. Temel Orantı Teoremini kullanarak problem çözmek.
4. Bir üçgende iç ve dış açıortayı tanıtmak.
5. Açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına olan uzaklıklarının eşit olduğunu keşfetmek.
6. Açıortay doğrusu üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına olan uzaklığın dikme ayağının açının köşesine olan uzaklığının eşit olduğunu keşfetmek.
7. Bir açıyı bölen bir doğru parçasının üzerinde alınan bir noktadan açının kollarına olan uzaklıkların eşit olması durumunda açıyı bölen doğru parçasının açıortay olduğunu çıkarsamak (özelliği tersine işletebilme)
8. İç ve dış açıortay teoremlerini tanıtmak.
9. Üçgende kenarortayı tanıtmak ve ağırlık merkezini oluşturan koşulları incelemek.

Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.

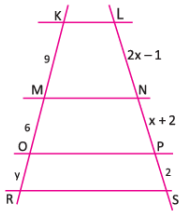
Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

DERSİN AKIŞI

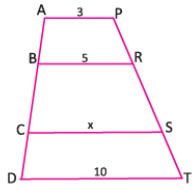
65. Problem: Verilen şekilde $[DE]//[KL]//[BC]$ olmak üzere $|AD| = 6$ cm, $|DK| = 3$ cm, $|KB| = |EL| = 2$ cm, $|LC| = x - 3$ cm ve $|AE| = y$ cm olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.



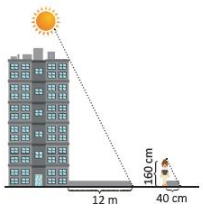
66. Problem: $[KL]//[MN]//[OP]//[RS]$ olmak üzere $|KM| = 9$ cm, $|MO| = 6$ cm, $|LN| = 2x - 1$ cm, $|NP| = x + 2$ cm, $|PS| = 2$ cm, $|OR| = y$ cm olduğuna göre x ve y değerlerini bulunuz.



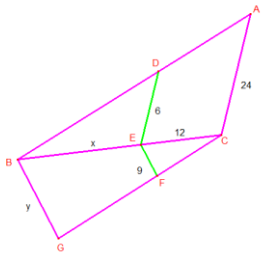
67. Problem: $[AP]//[BR]//[CS]//$ olmak üzere $3|PR| = 2|RS|$, $|AP| = 3$ cm, $|BR| = 5$ cm, $|CS| = x$ cm, $|DT| = 10$ cm ise $\frac{|RS|}{|ST|}$ oranını bulunuz.



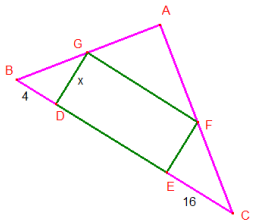
68. Problem: Aybige, güneşli bir günde bir binanın boyunu hesaplamak istiyor. Aybige'nin boyu 160 cm, gölgesi ise 40 cm dir. Binanın gölgesinin uzunluğu 12 m olduğuna göre binanın boyunu hesaplayınız.



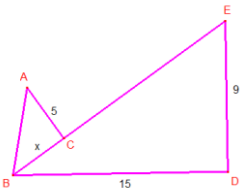
69. Problem: Şekilde $[DE]//[AC]$ ve $[EF]//[BG]$ dir. Verilere göre $y - x$ kaçtır?



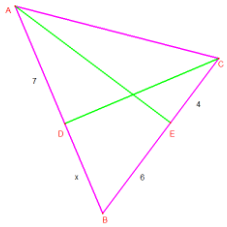
70. Problem: $m(\hat{A}) = 90°$, GDEF bir dikdörtgen olduğuna göre $|GD| = x$ kaç birimdir?



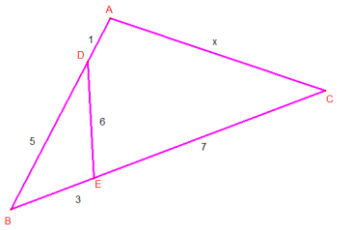
71. Problem: $m(\hat{C}) = m(\widehat{ABD}) = m(\hat{D}) = 90°$ olduğuna göre $|BC| = x$ kaç birimdir?



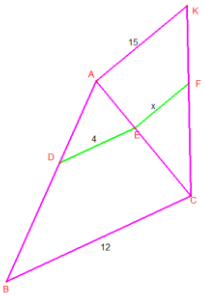
72. Problem: $[CD] \perp [AB]$ ve $[AE] \perp [BC]$ olduğuna göre $|DB| = x$ kaç birimdir?



73. Problem: Şekilde verilenlere göre $|AC| = x$ kaç birimdir?



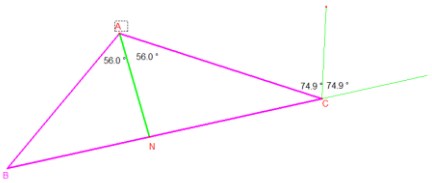
74. Problem: $[DE]//[BC]$, $[EF]//[AK]$ olduğuna göre $|EF| = x$ kaç birimdir?



Üçgende Yardımcı Elemanlar

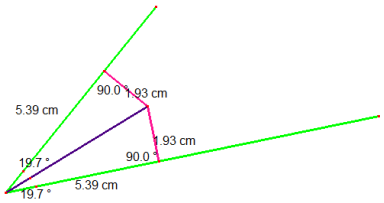
1. Açıortay

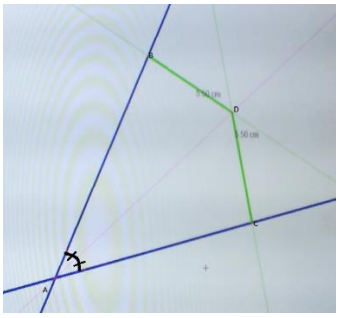
Bir üçgende bir iç açıyı iki eşit parçaya bölen ışına **iç açıortay**, bir dış açıyı iki eşit parçaya bölen ışına **dış açıortay** denir.



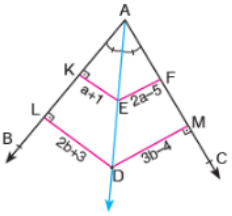
İç açıortayın özellikleri

1. Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktanın açı kollarına olan uzaklığı eşittir.
2. Bir açının açıortayı üzerinde alınan bir noktadan açı kollarına indirilen dikmelerin açı kollarını kestiği noktaların, açının köşesine olan uzaklıkları eşittir.

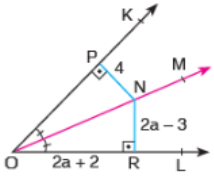




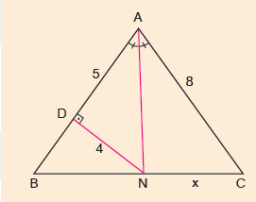
75. Problem: Aşağıda verilen şekilde $\widehat{BAC}$ nin açıortayı $[AD$ dir. Verilenlere göre a+b yi bulunuz.



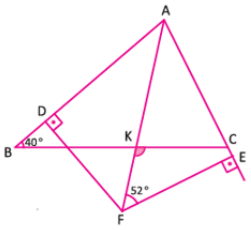
76. Problem: Aşağıda verilen şekilde $\widehat{KOL}$ nın açıortayı $[OM$ dir. Verilenlere göre $|OP|$ nun kaç cm olduğunu bulunuz.



77. Problem: Şekilde verilenlere göre x kaçtır?

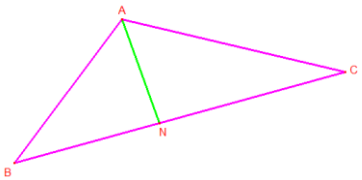


78. Problem: Verilen şekilde $|FD| = |FE|$, $m(\widehat{ABC}) = 40°$, $m(\widehat{AFE}) = 52°$ olduğuna göre $m(\widehat{FKC})$ yi bulunuz.

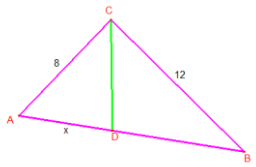


İç Açıortay Teoremi

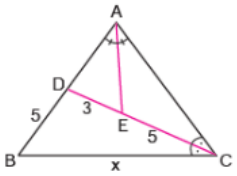
ABC üçgeninde $[AN]$ açıortay olmak üzere $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|NC|}$ dir. Bu orantıya iç açıortay teoremi denir.



79. Problem: Şekildeki ΔABC de $[CD]$ açıortay ve $|BD| = 4$ olduğuna göre x kaçtır?

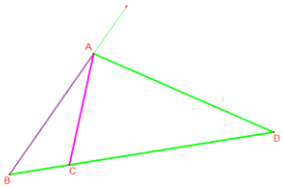


80. Problem: ΔABC de $[AE]$ ve $[CD]$ açıortay ise x in kaç olduğunu bulunuz.

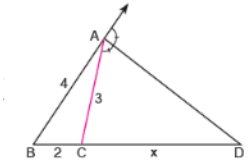


Dış Açıortay Teoremi

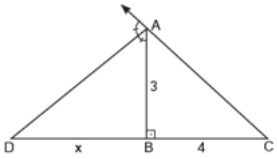
ABC üçgeninde $[AD]$ dış açıortay olmak üzere $\frac{|CD|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|}$ dir. Bu orantıya dış açıortay teoremi denir.



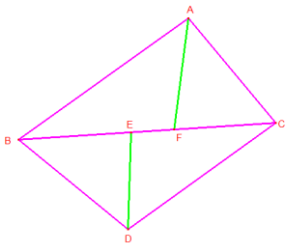
81. Problem: Verilen şekilde $[AD]$ dış açıortay olduğuna göre x in kaç cm olduğunu bulunuz.



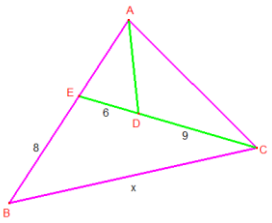
82. Problem: ABC üçgeninde $[AD]$ dış açıortay, $[AB] \perp [DC]$, $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm ise $|DB| = x$ kaç cm.dir?



83. Problem: $[AF]$ ve $[ED]$ açıortaylar, $2|AB| = 5|AC|$, $2|DC| = 5|BD|$ ve $|BC| = 35$ ise $|EF|$ kaç birimdir?

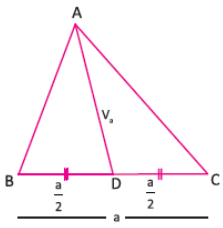


84. Problem: $[AD]$ ve $[CE]$ açıortaylar olmak üzere şekilde verilenlere göre x kaç birimdir?

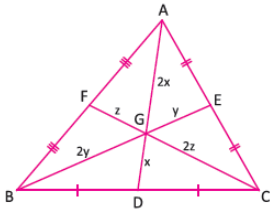


2. Kenarortay

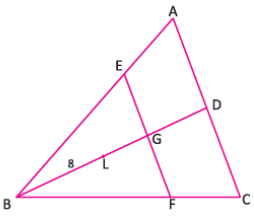
Üçgenin bir köşesinden karşı kenarın ortasına çizilen ve bu kenarı iki eşit uzunluğa bölen doğru parçasına kenarortay denir.



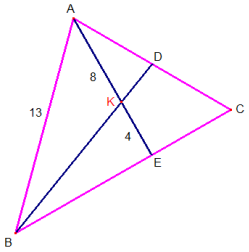
Kenarortaylar üçgenin içinde bir noktada kesişir. Bu noktaya üçgenin ağırlık merkezi denir.



85. Problem: G noktası ABC üçgeninin, L noktası ise BEF üçgeninin ağırlık merkezidir. $|BL| = 8$ cm ise $|BD|$ kaç cm'dir?

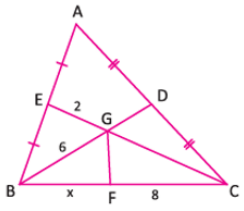


86. Problem: ABC üçgeninde $[AE] \perp [BC]$ ise ABC üçgeninin çevresini bulunuz.



EK-5: (Devam) İkinci Etap Öğretim Dizisinin Ders Planları

87. Problem: ABC üçgeninde B, G, D ile C, G, E noktaları doğrusaldır. $m(\widehat{BGF}) = m(\widehat{CGF})$, $|AD| = |DC|$, $|AE| = |EB|$ ve $|BG| = 6$ cm, $|EG| = 2$ cm, $|FC| = 8$ cm olduğuna göre $|BF| = x$ uzunluğunu bulunuz.



İKİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN İKİNCİ HAFTASININ DERS PLANI

Konu: Üçgenin yardımcı elemanları
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Kenarortay uzunluğu, Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay ile dik kenarlar arasındaki ilişki, Kenar orta dikme, Üçgenin çevrel çemberi, Üçgende yükseklik, Diklik merkezi, İkizkenar üçgende yardımcı elemanlar, 30°-60°-90° üçgeni

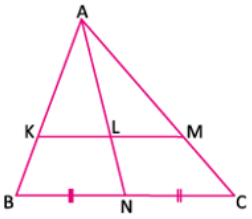
Amaçlar:
1. Üçgende kenarortay ile ilgili problem çözebilmek.
2. Üçgende kenarortay uzunluğunu bulabilmek.
3. Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay ile dik kenarlar arasındaki ilişkiyi tanıtmak.
4. Üçgende kenar orta dikmeyi tanıtmak.
5. Üçgende çevrel çemberi ve özelliklerini tanıtmak.
6. Üçgende yüksekliği tanıtmak.
7. Üçgende diklik merkezi ve özelliklerini tanıtmak.
8. İkizkenar üçgende yardımcı elemanların özelliklerini tanıtmak.
9. 30°-60°-90° üçgeninin özelliklerini tanıtmak.

Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.

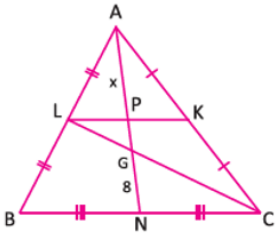
Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

DERSİN AKIŞI

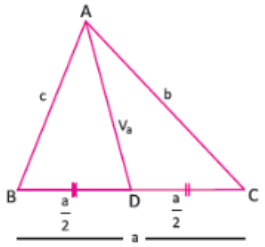
88. Problem: ABC üçgeninde $[AN]$ kenarortay ve $[KM]//[BC]$ dir. $|KL| = 5x + 3$ ve $|LM| = 7x - 9$ olduğuna göre x değerini bulunuz.



89. Problem: K, L ve N noktaları ABC üçgeninin kenarlarının orta noktalarıdır. $|GN| = 8$ cm olduğuna göre $|AP| = x$ değerini bulunuz.

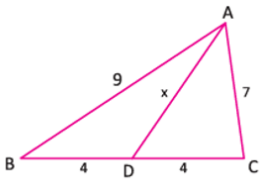


Kenarortay uzunluğu

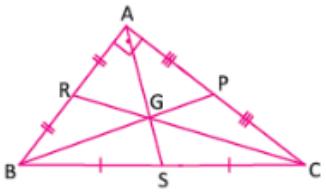


$$2V_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

90. Problem: ABC üçgeninde $|BD| = |DC| = 4$ cm, $|AB| = 9$ cm, $|AC| = 7$ cm olduğuna göre $|AD| = x$ uzunluğunu bulunuz.



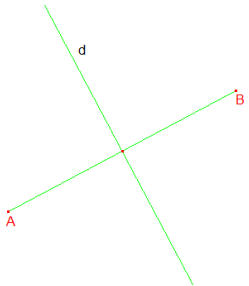
Dik üçgende kenarortay uzunlukları arasında
$|AS| = V_A$, $|BP| = V_B$, $|CR| = V_C$ olmak üzere $5V_A^2 = V_B^2 + V_C^2$ ilişkisi mevcuttur.



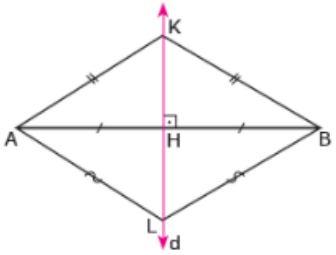
3. Yükseklik

Kenar Orta Dikme

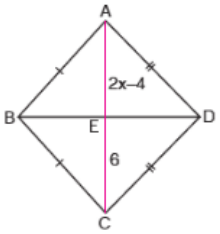
Bir doğru parçasının orta noktasında dik olan doğruya orta dikme denir. D doğrusu $[AB]$ nin orta dikmesidir.



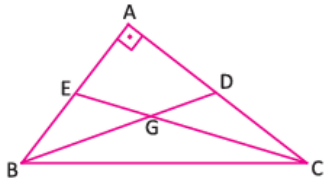
Bir doğru parçasının orta dikmesi üzerinde alınan herhangi bir nokta, doğru parçasının uç noktalarına eşit uzaklıktadır.



91. Problem: Aşağıda verilen şekilde $[BD] \cap [AC] = \{E\}$ olduğuna göre x in kaç olduğunu bulunuz.

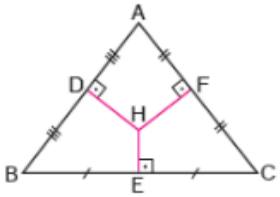


92. Problem: ABC dik üçgeninde G ağırlık merkezidir. $|BD| = 5\sqrt{2}$ cm ve $|CE| = 5\sqrt{3}$ cm ise $|BC|$ değerini bulunuz.

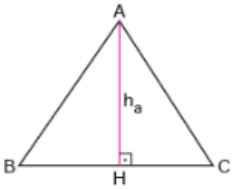


Çevrel çember

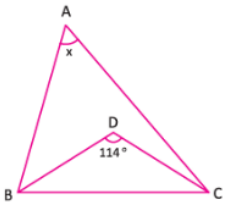
ABC üçgeninde A , B ve C noktalarından geçen çember üçgenin çevrel çemberi olarak adlandırılır. Bir üçgenin kenar orta dikmeleri bir noktada kesişir. Bu nokta üçgenin çevrel çemberinin merkezidir.



Bir üçgenin herhangi bir köşesinden karşı kenara veya karşı kenarın uzantısına indirilen dik doğru parçasına yükseklik denir. H noktasına dikme ayağı denir.

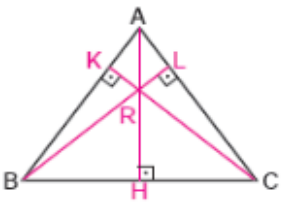


93. Problem: ABC üçgeninin D noktası çevrel çemberin merkezidir. Buna göre x kaçtır?



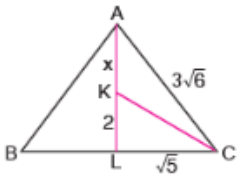
Diklik merkezi

ΔABC de yükseklikler veya yüksekliklerin uzantıları bir noktada kesişir. Bu noktaya ABC üçgeninin diklik merkezi denir.

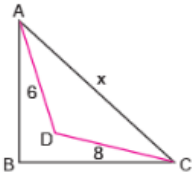


Soru: Diklik merkezi üçgenin daima içinde midir?

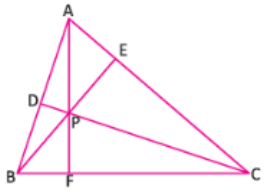
94. Problem: ABC üçgeninde K diklik merkezi ve $[AL] \cap [CK] = \{K\}$ olduğuna göre x kaç cm.dir?



95. Problem: ABC üçgeninde B diklik merkezi olduğuna göre x in alabileceği tamsayı değerlerinin toplamı kaçtır?

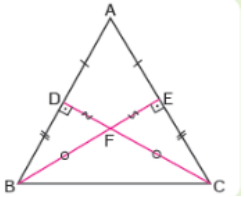


96. Problem: ABC üçgeninde P diklik merkezi ve $m(\widehat{BAC}) = 3x - 72°$ olduğuna göre x'in alabileceği kaç tamsayı değeri vardır?

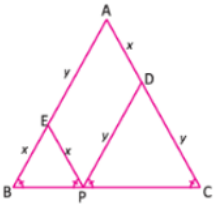


İkizkenar Üçgene Ait Özellikler

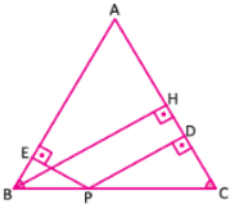
1. AB ve AC kenarlarının eşit olduğu ikizkenar üçgende eş olan kenarlara ait yüksekliklerin uzunlukları birbirine eşittir.



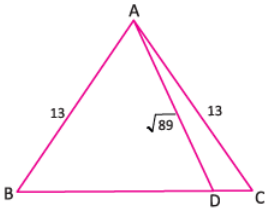
2. İkizkenar üçgende taban üzerindeki herhangi bir noktadan eşit uzunluktaki kenarlara çizilen paralellerin uzunlukları toplamı, birbirine eşit olan kenar uzunluğuna eşittir.



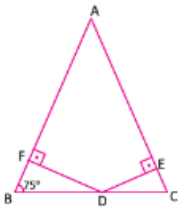
3. İkizkenar üçgende taban üzerindeki herhangi bir noktadan eşit uzunluktaki kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşit kenarlara ait yüksekliğe eşittir.



97. Problem: ABC üçgeninde $|BD| = 5|DC|$ olduğuna göre $|BD|$ değerini bulunuz.



98. Problem: ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 18$ cm, $[DF] \perp [AB]$, $[DE] \perp [AC]$, $m(\widehat{ABC}) = 75°$ ve $|DF| = 5$ cm olduğuna göre $|DE| + |DF|$ değerini bulunuz.



İKİNCİ ETAP ÖĞRETİM DİZİSİNİN ÜÇÜNCÜ HAFTASININ DERS PLANI

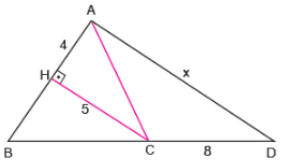
Konu: Üçgenin yardımcı elemanları, Öklid bağıntıları ve üçgende alan,
Süre: 6 ders saati
Alt konular: Üçgende yükseklik, eşkenar üçgende yardımcı elemanlar, Öklid bağıntıları, üçgende alan, ortak yükseklik/tabana sahip üçgenlerde alan ilişkileri

Amaçlar:
1. Üçgende yükseklik ile ilgili problem çözebilmek.
2. Eşkenar üçgende yardımcı elemanların özelliklerini tanıtmak.
3. Dik üçgende Öklid bağıntılarını tanıtmak.
4. Öklid bağıntısının AA benzerlik teoreminden elde edilişini keşfetmek.
5. Üçgende alan formülünün gereksinimlerini tanıtmak.
6. Alanların benzerlik oranını keşfetmek.
7. Üçgende alan ile ilgili problem çözebilmek.

Öğretim Materyalleri: CG-II yazılımı, akıllı tahta, kağıt, kalem, cetvel.
Öğrenme Ortamının Tasarımı: Sınıf-içi tartışmalar

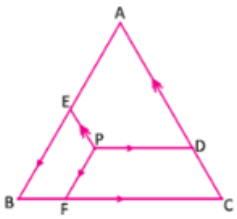
DERSİN AKIŞI

99. Problem:
ABC üçgeninde $|AB| = |BC|$ ve $[CH] \perp [AB]$ olduğuna göre x in değerini bulunuz.

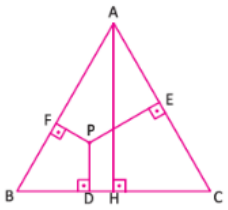


Eşkenar Üçgene ait özelikler

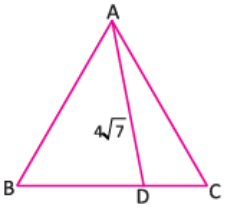
1. Eşkenar üçgende iç bölgesi veya kenarları üzerinde alınan herhangi bir noktadan kenarlara çizilen paralellerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin bir kenar uzunluğuna eşittir.



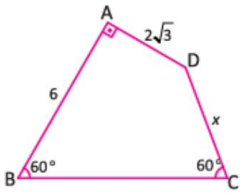
2. Eşkenar üçgende iç bölgesi veya kenarları üzerinde alınan herhangi bir noktadan kenarlara çizilen dikmelerin uzunlukları toplamı, eşkenar üçgenin yüksekliğine eşittir.



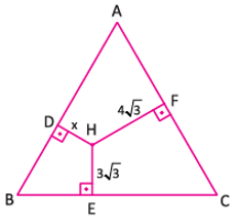
100. Problem: ABC eşkenar üçgeninde $2|AB| = 3|BD|$ olduğuna göre $|AB|$ değerini bulunuz.



101. Problem: $ABCD$ dörtgeninde verilenlere göre $|DC|$ değerini bulunuz.



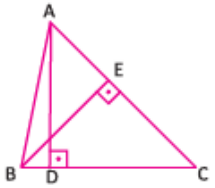
102. Problem: ABC eşkenar üçgeninde H noktasından üçgenin kenarlarına çizilmiş yükseklikler görülmektedir. $|AC| = 16$ cm, $|HF| = 4\sqrt{3}$ cm, $|HE| = 3\sqrt{3}$ cm olduğuna göre $|DH| = x$ değerini bulunuz.



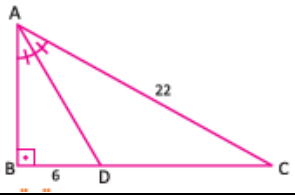
Üçgende Alan

Bir üçgensel bölgenin alanı; bir kenar uzunluğu ile o kenara ait yükseklik uzunluğunun çarpımının yarısına eşittir.

103. Problem: Verilen şekilde $|AD| = 8$, $|BC| = 12$, $|AC| = 16$ cm ise $|BE|$ kaç cm.dir?

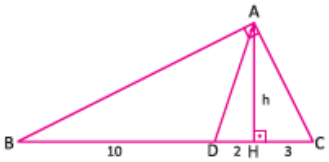


104. Problem: ADC üçgeninin alanını bulunuz.

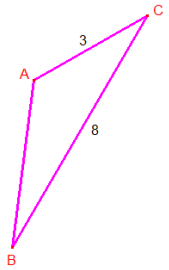


105. Problem: Bir ABC ikizkenar üçgeninde $|AB| = |AC| = 10$ ve $|BC| = 16$ cm ise bu üçgenin alanını bulunuz.

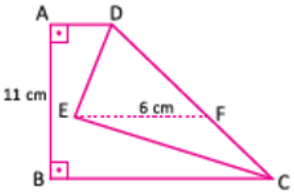
106. Problem: Şekilde verilenlere göre ABD üçgeninin alanını bulunuz.



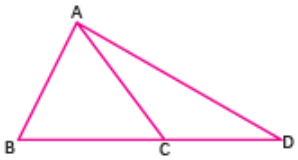
107. Problem: $m(\widehat{ACB}) = 30°$ olduğuna göre ABC üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?



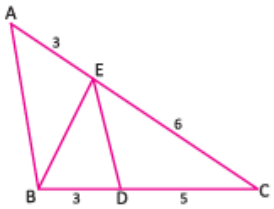
108. Problem: $ABCD$ dörtgeninde $[AB] \perp [BC]$, $[EF] // [BC]$ olmak üzere $|AB| = 11$ cm ve $|EF| = 6$ cm ise DEC üçgeninin alanını bulunuz.



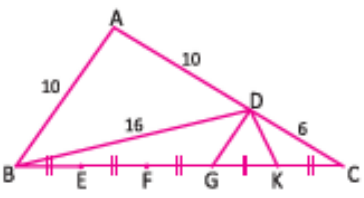
109. Problem: ABD üçgeninde B, C ve D doğrusaldır. $4|BC| = 5|CD|$ ve ABD üçgeninin alanı 54 cm^2 ise $A(\Delta ABC)$ kaç cm^2 dir?



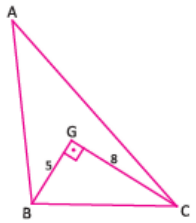
110. Problem: Verilen şekilde $\frac{A(\Delta BDE)}{A(\Delta ABC)}$ oranını bulunuz.



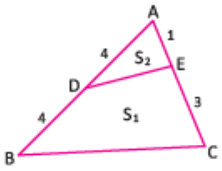
111. Problem: ABC üçgeninin BC kenarı 5 eşit parçaya ayrılmıştır. Buna göre DGK üçgeninin alanı kaç cm^2 dir?



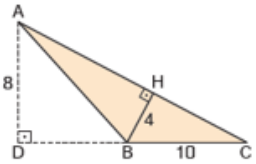
112. Problem: G, ABC üçgeninin ağırlık merkezi olmak üzere $A(\Delta ABC)$ kaç cm^2 dir?



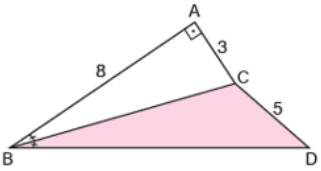
113. Problem: Şekilde verilenlere göre $\frac{S_1}{S_2}$ değerini bulunuz.



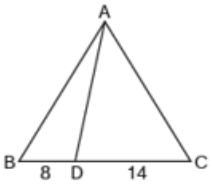
114. Problem: Şekilde verilen ABC üçgeninde $[BH] \perp [AC]$ ve $[AD] \perp [BC]$ olmak üzere $|AD| = 8$ cm, $|BC| = 10$ cm, $|BH| = 4$ cm olduğuna göre $|AC|$ kaç cm.dir?



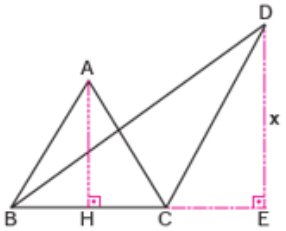
115. Problem: Verilen şekilde $[BC]$ açıortay, $[AC] \perp [AB]$, $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{BCD})$, $|AC| = 3$ cm, $|AB| = 8$ cm ve $|CD| = 5$ cm olduğuna göre $A(\Delta CBD)$ kaç cm^2 dir?



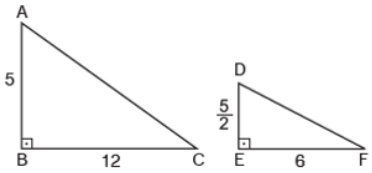
116. Problem: Şekilde verilen ABC üçgeninde $|BD| = 8$ cm ve $|DC| = 14$ cm olduğuna göre $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$ sonucunu bulunuz.



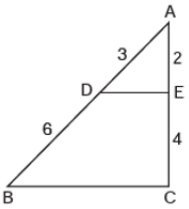
117. Problem: Verilen şekilde $[AH] \perp [BC]$, $[DE] \perp [BC]$, $4A(\Delta ABC) = 3A(\Delta DBC)$ ve $|AH| = 6$ cm olduğuna göre $|DE| = x$ kaç cm.dir?



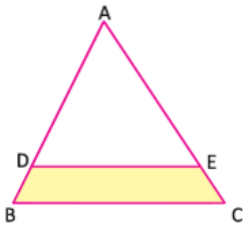
118. Problem: ABC ve DEF üçgenlerinin benzerlik oranı ve alanları oranını bulup karşılaştırınız.



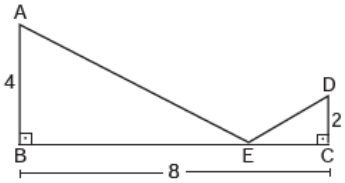
119. Problem: ABC üçgeninde $|AD| = 3$ cm, $|AE| = 2$ cm, $|DB| = 6$ cm, $|EC| = 4$ cm ve $A(\Delta ADE) = 2\ cm^2$ olduğuna göre $A(\Delta ABC)$ kaç cm^2 dir?



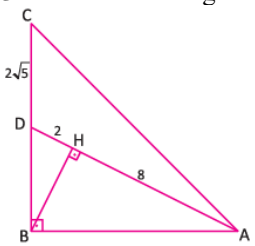
120. Problem: Verilen şekilde $[DE]//[BC]$ olmak üzere $|AD| = 4|BD|$ ve $A(BDEC) = 18\ cm^2$ olduğuna göre ADE üçgeninin alanını bulunuz.



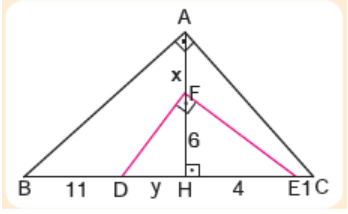
121. Problem: Verilen şekilde B, E ve C noktaları doğrusal ise $|AE| + |ED|$ kaçtır?



122. Problem: Şekildeki verilere göre AC kenarının uzunluğunu bulunuz.



123. Problem: Şekilde verilenlere göre $x + y$ kaçtır?



EK-6: Anadolu Üniversitesi Sosyal Ve Beşerî Bilimler Bilimsel Araştırma Ve Yayın Etiği Kurulu Karar Belgesi

Evrak Kayıt Tarihi: 11.09.2018 Protokol No: 87973 Tarih: 26.09.2018

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ SOSYAL VE BEŞERÎ BİLİMLER BİLİMSEL ARAŞTIRMA VE YAYIN ETİĞİ KURULU

KARAR BELGESİ

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Doktora Tez Çalışması
KONU:	Eğitim Bilimleri
BAŞLIK:	Ortaöğretimde James J. Kaput'un Bakış Açısı ile Cebir Reformu: 9. Sınıf Denklem-Eşitsizlikler ve Üçgenler Alt Öğrenme Alanlarında Bir Uygulama
PROWTEZ YüRüTücüsü:	Doç. Dr. Tuba ADA
TEZ YAZARI:	Ferda ADIGÜZEL DOĞAN
ALT KOMİSYON GÖRÜŞÜ:	
KARAR:	Olumlu

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ferda ADIGÜZEL DOĞAN
Yabancı Dili : İngilizce, Almanca

Eğitim Geçmişi

- Yüksek Lisans 2005. :2001- Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı. Tez adı: Çözülebilir Manifold ve Özel Lineer Reel Grup Üzerinde Minimal Dağılımlar.
- Lisans : 1995-2001. Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.

Mesleki Geçmişi

- 2013-… Öğretmen, MEB, Eskişehir İl Milli Eğitim Müdürlüğüne bağlı bir devlet ortaöğretim okulu.
- 2010-2013 Proje Uzmanı, MEB, Ankara Yenimahalle İlçe Milli Eğitim Müdürlüğü AR-GE.
- 2003-2010 Öğretmen, MEB, Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğüne bağlı bir devlet ortaöğretim okulu.
- 2001-2003 Öğretmen, MEB, Ankara İl Milli Eğitim Müdürlüğüne bağlı bir devlet ortaöğretim okulu.